École universitaire Paris-Saclay
Année universitaire 2022/2023

Licence de mathématiques
MEU 102 Algèbre et géométrie

Corrigé de l'examen partiel du 24 octobre 2022

Exercice I

Sans faire de longs calculs, déterminer un vecteur non nul $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ tel que $A\overrightarrow{x} = \overrightarrow{0}$, où A est la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -5 & 1 & -4 \\ -3 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

> On remarque que la troisième colonne est la somme des deux premières. On en déduit aussitôt que $\overrightarrow{x} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ convient.

Exercice II

(1) Résoudre le système linéaire suivant de deux équations à deux inconnues :

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + 3y - 7 = 0 \end{cases}$$

On notera $A \in \mathbf{R}^2$ le point obtenu.

> Résolvons $x = 3\,y - 1$ de l'équation 1 et remplaçons-le dans l'équation 2, ce qui donne :
>
> $$2\,(3\,y-1) + 3\,y - 7 \,=\, 0 \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad 9\,y - 9 \,=\, 0,$$
>
> d'où :
>
> $$y \,=\, 1, \qquad \text{puis :} \qquad x \,=\, 3 \cdot 1 - 1 \,=\, 2.$$
>
> Ainsi :
>
> $$A \,=\, (2, 1).$$

On considère la droite $\mathscr{D}_1$ paramétrée par $M_1(t) := (-1 + 3\,t,\ t)$ avec $t \in \mathbf{R}$ arbitraire.

(2) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_1$.

> Rappelons que pour une paramétrisation d'une droite de la forme $M(t) = \big(x_0 + \lambda\,t,\ y_0 + \mu\,t\big)$ avec des constantes $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, une équation cartésienne associée naturelle est de la forme :
>
> $$-\,\mu\,x + \lambda\,y + c \,=\, 0,$$
>
> où la constante c doit être ensuite simplement déterminée par l'équation :
>
> $$-\,\mu\,(x_0 + \lambda\,t) + \lambda\,(y_0 + \mu\,t) + c \,=\, -\,\mu\,x_0 + \lambda\,y_0 + c,$$
>
> dans laquelle la variable t a disparu, c'est-à-dire :
>
> $$c \,:=\, \mu\,x_0 - \lambda\,y_0.$$
>
> Ici, avec $M_1(t) = (-1 + 3\,t,\ t)$, on trouve comme équation cartésienne pour $\mathscr{D}_1$:
>
> $$-\,x + 3\,y - 1 \,=\, 0.$$

On considère aussi la droite $\mathscr{D}_2$ paramétrée par $M_2(t) := (3t + 2, -2t + 1)$ avec $t \in \mathbf{R}$ arbitraire.

(3) Déterminer une équation cartésienne de $\mathscr{D}_2$.

> En procédant de même que dans la question précédente, on obtient que
>
> $$2 \cdot (3t+2) + 3 \cdot (-2t+1) = 7$$
>
> Par conséquent, $\mathscr{D}_2$ admet $2x + 3y - 7 = 0$ comme équation cartésienne.

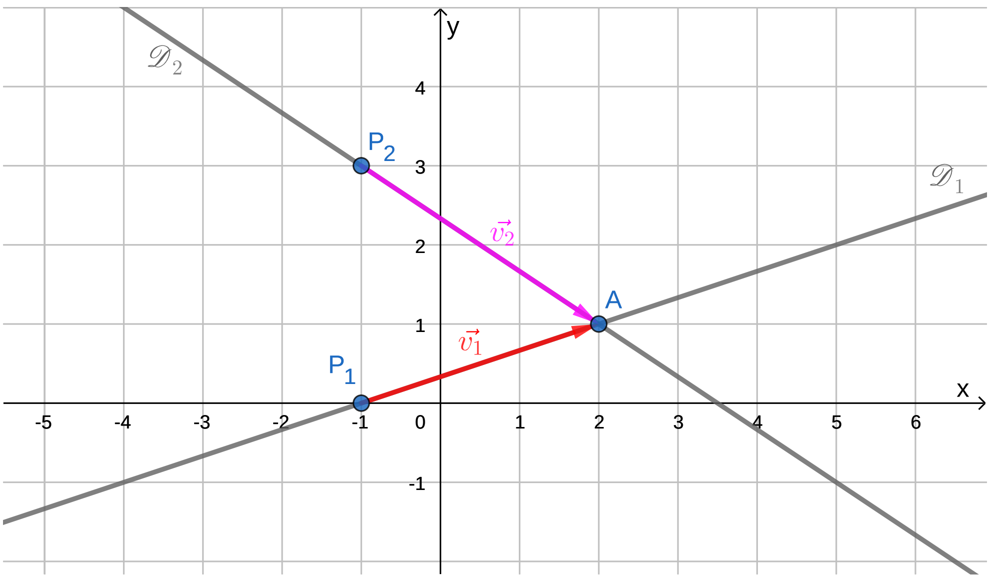
(4) Déterminer l'intersection $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$.

> Les équations équations cartésiennes obtenues dans les questions précédentes pour $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont manifestement équivalentes respectivement à la première et à la deuxième équation du système de la question (1). On en déduit immédiatement, sans calcul supplémentaire, que $\mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2 = \{A\}$ avec $A = (2, 1)$.

(5) Donner des vecteurs directeurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ des deux droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, ainsi que deux points $\mathscr{P}_1 \in \mathscr{D}_1$ et $P_2 \in \mathscr{D}_2$ distincts de A.

> Par exemple :
>
> $$\vec{v}_{D_1} := \binom{3}{1}, \qquad \vec{v}_{D_2} := \binom{3}{-2}, \qquad P_1 := (-1, 0), \qquad P_2 := (-1, 3).$$

(6) Sur une figure soignée, représenter les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$, ainsi que le point A.



Exercice III

Résoudre le système linéaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & -2 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ -2x & - & 4y & - & 3z & = & 9 \end{array}\right.$$

Si on note $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}_3$ les équations, on peut effectuer l'opération $\mathcal{E}_3 \longleftarrow \mathcal{E}_3 + 2\mathcal{E}_1$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 4z & = & -2 \\ & & y & + & 5z & = & 2 \\ & & & & 5z & = & 5 \end{array}\right.$$

Le système est alors échelonné, et même triangulaire, il possède donc une unique solution $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, que l'on peut calculer :

$$\left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1 \\ y & = & 2 - 5z = -3 \\ x & = & -2 - 2y - 4z = 0 \end{array}\right.$$

L'unique solution est donc $(0, -3, 1)$.

Exercice IV

Déterminer toutes les solutions de l'équation matricielle $B\,\vec{y} = \vec{y_0}$, où :

$$B := \begin{bmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}, \qquad \vec{y_0} := \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Commençons par écrire la matrice complète du système linéaire associé :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \;\; y_1 & \;\; y_2 & \;\; y_3 \qquad\quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \end{array},$$

puis, appliquons-lui la méthode du pivot :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ -3 & -2 & 4 & -1 \\ 6 & 1 & -8 & -4 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & -9 & 0 & -18 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{3} & 5 & -4 & 7 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

La dernière ligne du système linéaire, intégralement constituée de zéros, s'estompe, et il ne reste que deux équations :

$$\begin{aligned} 3\,y_1 + 5\,y_2 - 4\,y_3 &= 7, \\ 3\,y_2 \qquad\quad &= 6, \end{aligned}$$

qui se résolvent en :

$$y_2 := 2, \qquad \text{puis :} \qquad 3\,y_1 + 5 \cdot 2 - 4\,y_3 = 7,$$

$$\text{c'est-à-dire :} \qquad y_1 := \tfrac{7-10}{3} + \tfrac{4}{3}\,y_3.$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est :

$$\left\{\left(-\,1 + \tfrac{4}{3}\,y_3,\ 2,\ y_3\right):\ y_3 \in \mathbf{R} \text{ quelconque}\right\}$$

Exercice V

(1) En effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, mettre sous forme échelonnée *réduite* la matrice suivante :

$$\left(\begin{array}{ccr|l} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right)$$

On applique l'algorithme du pivot de Gauss :

$$\begin{array}{ll}
\left(\begin{array}{ccr|l} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 9 & 11 \end{array}\right) & \\
\sim & \left[\begin{array}{ccc} L_2 & \longleftarrow & L_2 - 3L_1 \\ L_3 & \longleftarrow & L_3 - 2L_1 \end{array}\right] \\
\left(\begin{array}{ccr|l} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) & \\
\sim & L_3 \longleftarrow L_3 + \frac{1}{13}L_2 \\
\left(\begin{array}{ccr|l} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & -13 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \\
\sim & L_2 \longleftarrow -\frac{1}{13}L_2 \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) & \\
\sim & L_1 \longleftarrow L_1 - 4L_2 \\
\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) &
\end{array}$$

(2) Déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ qui sont solutions du système d'équations linéaires à trois équations et trois inconnues correspondant à la matrice augmentée (ou complète) de la question précédente. L'ensemble des solutions est-il un singleton, une droite ou bien un plan de $\mathbf{R}^3$?

D'après le calcul de la question précédente, le système est équivalent aux deux équations $x = 1$ et $z = 1$, et il n'y a aucune condition sur y ! L'ensemble des solutions est donc la droite donnée par le paramétrage $(1, t, 1)$ pour $t \in \mathbf{R}$.

Exercice VI

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère le plan $\mathscr{P}_1$ d'équation cartésienne $-2x + y + 5z = -1$ et le plan $\mathscr{P}_2$ d'équation cartésienne $x - y + 2z = -7$.

(1) Déterminer l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$.

Il s'agit de déterminer les solutions du système suivant (où l'on a écrit en premier l'équation de $\mathscr{P}_2$:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & -7 \\ -2x & + & y & + & 5z & = & -1 \end{array}\right.$$

On peut ajouter deux fois la première équation à la deuxième pour obtenir un système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & -7 \\ & - & y & + & 9z & = & -15 \end{array}\right.$$

Le système est alors échelonné et bien évidemment compatible : pour tout $z \in \mathbf{R}$, il existe un unique couple (x, y) tel que (x, y, z) soit solution :

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 15 + 9z \\ x & = & -7 + y - 2z = -7 + (15 + 9z) - 2z = 8 + 7z \end{array}\right.$$

(2) Montrer que $\mathscr{D} := \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ est une droite et en déterminer un paramétrage $M(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$. Vérifier sur votre copie que pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point $M(t)$ satisfait effectivement les équations des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

> D'après la question précédente, on peut utiliser la coordonnée z pour paramétrer $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$ qui est donc la droite $\mathscr{D}$ donnée par le paramétrage $M(t) = (8 + 7t, 15 + 9t, t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$.
>
> La vérification consiste en les calculs suivants, pour tout $t \in \mathbf{R}$:
>
> $$-2x(t) + y(t) + 5z(t) = -2(8 + 7t) + (15 + 9t) + 5t = -1$$
>
> $$x(t) - y(t) + 2z(t) = (8 + 7t) - (15 + 9t) + 2t = -7$$

(3) Déterminer un vecteur directeur et deux points distincts de $\mathscr{D}$.

> Pour obtenir deux points distincts de $\mathscr{D}$, on peut considérer par exemple $M(0) = (8, 15, 0)$ et $M(1) = (15, 24, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{M(0)M(1)} = (7, 9, 1)$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

On considère une droite Δ donnée par le paramétrage $M'(t) = (-3 - t, 2 + t, -1 + t)$ pour $t \in \mathbf{R}^3$.

(4) Montrer que l'intersection $\Delta \cap \mathscr{P}_1$ consiste en un unique point que l'on notera A et dont on déterminera les trois coordonnées. Écrire sur votre copie la vérification du fait que les coordonnées que vous avez trouvées satisfont bien l'équation cartésienne du plan $\mathscr{P}_1$.

> Pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point $M'(t)$ appartient à $\mathscr{P}_1$ si et seulement si $-2(-3 - t) + (2 + t) + 5(-1 + t) = -1$, c'est-à-dire si $8t + 3 = -1$, ce qui est encore équivalent à $8t = -4$, c'est-à-dire $t = -\frac{1}{2}$. On déduit de ce calcul que $\Delta \cap \mathscr{P}_1 = \{A\}$ où $A = M'(-\frac{1}{2}) = (-\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.
>
> Pour vérifier ce résultat, on calcule $-2(-\frac{5}{2}) + \frac{3}{2} + 5(-\frac{3}{2}) = \frac{10+3-15}{2} = -1$.

(5) Déterminer l'intersection $\Delta \cap \mathscr{P}_2$.

> On procède de même qu'à la question précédente. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, le point $M'(t)$ appartient à $\mathscr{P}_2$ si et seulement si $(-3 - t) - (2 + t) + 2(-1 + t) = -7$. Or, le calcul montre que pour tout $t \in \mathbf{R}$, $(-3 - t) - (2 + t) + 2(-1 + t) = -7$. Par conséquent, pour tout $t \in \mathbf{R}$, $M'(t) \in \mathscr{P}_2$, ce qui signifie que $\Delta \subset \mathscr{P}_2$. Ainsi, $\Delta \subset \mathscr{P}_2 = \Delta$.

(6) Montrer que $\mathscr{D} \cap \Delta = \{A\}$.

> Tout d'abord, par définition, $A \in \Delta \cap \mathscr{P}_1$, donc $A \in \Delta$ et $A \in \mathscr{P}_1$. Comme $\Delta \subset \mathscr{P}_2$ d'après la question précédente, on en déduit que $A \in \mathscr{P}_2$. Comme A appartient à la fois à $\mathscr{P}_1$ et à $\mathscr{P}_2$, il vient que $A \in \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$. Comme $\mathscr{D}$ est par définition l'intersection des deux plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$, on a montré que $A \in \mathscr{D}$. Finalement, $A \in \mathscr{D} \cap \Delta$.
>
> Réciproquement, si un point B appartient à $\mathscr{D} \cap \Delta$, montrons que $B = A$. Comme $B \in \mathscr{D}$ et que $\mathscr{D} = \mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2$, il vient que $B \in \mathscr{P}_1$. Par ailleurs, $B \in \Delta$, donc $B \in \mathscr{P}_1 \cap \Delta$. Comme A est l'unique point d'intersection de $\mathscr{P}_1$ et Δ, on en déduit $B = A$.
>
> On a montré par double inclusion que $\mathscr{D} \cap \Delta = \{A\}$.
>
> (Plus formellement, si X, Y et Z sont des ensembles, on a toujours l'égalité $(X \cap Y) \cap Z = (X \cap Z) \cap (Y \cap Z)$. En appliquant cette identité avec $X := \mathscr{P}_1$, $Y := \mathscr{P}_2$, $Z := \Delta$, on obtient : $\mathscr{D} \cap \Delta = (\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2) \cap \Delta = (\mathscr{P}_1 \cap \Delta) \cap (\mathscr{P}_2 \cap \Delta) = \{A\} \cap \Delta = \{A\}$.)

(7) Reproduire sur votre copie la figure ci-dessous et y représenter les droites Δ (et $\mathscr{D}$) d'une façon qui corresponde à la configuration géométrique rencontrée dans cet exercice.