Corrigé du mini-DM n°2

Exercice I

Dans le plan $\mathbf{R}^2$, on considère les points $A = (6, 5)$, $B = (-3, -1)$.
(1) Déterminer un paramétrage $M(t) = (X(t), Y(t))$ pour $t \in \mathbf{R}$ de la droite (AB).

> Pour déterminer un paramétrage de (AB), il suffit de déterminer un paramétrage affine $M(t) = (X(t), Y(t))$ tel que $M(0) = A$ et $M(1) = B$, ce qui est le cas du paramétrage suivant :
>
> $$\begin{cases} X(t) &= 6 - 9t \\ Y(t) &= 5 - 6t \end{cases}$$

(2) Déterminer une équation cartésienne de (AB).

> Il s'agit d'éliminer t dans les équations donnant le paramétrage, ce que l'on peut faire en calculant par exemple $2X(t) - 3Y(t)$ pour tout $t \in \mathbf{R}$:
>
> $$2X(t) - 3Y(t) = 2(6 - 9t) - 3(5 - 6t) = -3$$
>
> On en déduit qu'une équation cartésienne de la droite (AB) est $2x - 3y = -3$.

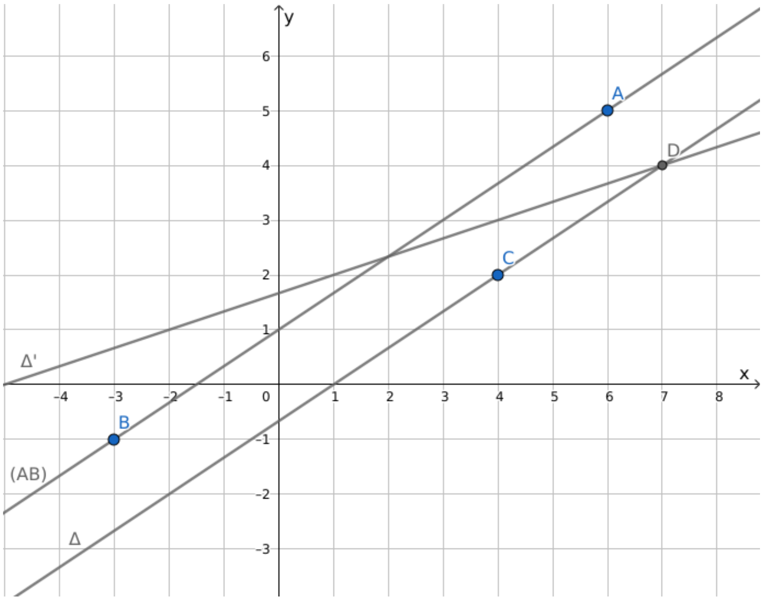
(3) Déterminer une équation cartésienne de la droite Δ parallèle à (AB) passant par le point $C = (4, 2)$.

> On sait que les parallèles à (AB) ont une équation cartésienne de la forme $2x - 3y = c$ où $c \in \mathbf{R}$. Pour déterminer celle qui passe pour le point C, il suffit de calculer $c := 2 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 2$. On obtient donc que Δ admet $2x - 3y = 2$ pour équation cartésienne.

On note Δ' la droite d'équation $x - 3y = -5$.
(4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection D des droites Δ et Δ'.

> Il s'agit de résoudre le système d'équations suivant en deux variables :
>
> $$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ x - 3y = -5 \end{cases}$$
>
> En faisant l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 - \frac{1}{2}L_1$ sur les lignes, on obtient un système équivalent :
>
> $$\begin{cases} 2x - 3y = 2 \\ -\frac{3}{2}y = -6 \end{cases}$$
>
> La forme triangulaire du système assure que le système possède une unique solution $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. La dernière équation est équivalente à $y = 4$. On détermine ensuite $x = \frac{2+3y}{2} = 7$. Le point d'intersecion de Δ et Δ' est donc $D = (7, 4)$.

(5) Représenter graphiquement les points A, B, C, D et les droites (AB), Δ et Δ'. Indiquer les calculs supplémentaires qui vous sont nécessaires pour procéder à la construction.



La seule construction qui mérite une explication est celle de la droite Δ', dont on connaît seulement le point D d'après les questions précédentes. Pour tracer Δ', on peut utiliser par exemple que $(-5,0) \in \Delta'$ ou que le coefficient directeur est $\frac{1}{3}$ (puisque l'équation réduite est $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$.).

Exercice II

Dans l'espace $\mathbf{R}^3$, on considère le plan $\mathscr{P}_1$ défini par l'équation $x+2y+3z = 16$, $\mathscr{P}_2$ celui défini par $-x-3y-z = -9$ et $\mathscr{P}_3$ celui défini par $y+z = 5$. Déterminer l'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$.

Il s'agit de résoudre le système d'équations linéaires suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ -x & - & 3y & - & z & = & -9 \\ & & y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

En faisant l'opération $L_2 \longleftarrow L_2 + L_1$ sur les lignes, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \\ & & y & + & z & = & 5 \end{array}\right.$$

En faisant l'opération $L_3 \longleftarrow L_3 + L_2$ sur les lignes, on obtient le système équivalent suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & + & 3z & = & 16 \\ & & -y & + & 2z & = & 7 \\ & & & & 3z & = & 12 \end{array}\right.$$

Ce système est maintenant sous forme *triangulaire*. Il possède une unique solution $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$, et on peut déterminer successivement z, y et x :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z & = & \frac{12}{3} = 4 \\ y & = & -7 + 2z = 1 \\ x & = & 16 - 2y - 3z = 16 - 2 - 12 = 2 \end{array}\right.$$

Le système possède donc $(2,1,4)$ comme unique solution. L'intersection $\mathscr{P}_1 \cap \mathscr{P}_2 \cap \mathscr{P}_3$ est donc le singleton $\{(2,1,4)\}$.