Université Paris VII
Licence L2 – MASS

MA4 (Groupe MS3)
2005–2006

Feuille d'exercices n°3

Si cela n'est pas précisé, l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire canonique.

1) *Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs*

$$v_1 = (1, -1, 2) , \qquad v_2 = (1, 0, 1) .$$

Donner une équation de E, une base orthonormée de E, une base orthonormée de $E^\perp$ et la projection orthogonale de $(1, 1, 1)$ sur E.

Pour déterminer une base orthonormée de E, il s'agit d'appliquer l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt aux vecteurs v_1 et v_2. Posons $v_1' = v_1$; $u_1 = \frac{1}{\|v_1'\|} v_1' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -1, 2)$. Posons ensuite $v_2' = v_2 - (u_1|v_2)u_1 = v_2 - \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(1, 1, 0)$, puis $u_2 = \frac{1}{\|v_2'\|} v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$. Une base orthonormale de E est donc formée des vecteurs u_1 et u_2.

Pour déterminer une équation de E, on peut chercher une équation $ax+by+cz = 0$ satisfaite par v_1 et par v_2, on trouve le système d'équations suivantes pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{cases} a - b + 2c &= 0 \\ a + c &= 0 \end{cases}$$

On obtient que les solutions sont les multiples du triplet $(1, -1, -1)$. L'hyperplan E de $\mathbb{R}^3$ est donc défini par l'équation $x - y - z = 0$.

On reconnaît que E s'identifie à l'orthogonal du vecteur $w = (1, -1, -1)$, c'est-à-dire que $E = D^\perp$ où D est la droite vectorielle engendrée par $w = (1, -1, -1)$. Dans un espace euclidien, on a $(D^\perp)^\perp = D$, donc $E^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par w, le vecteur $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, -1)$ constitue donc une base orthonormale de $E^\perp$ [1].

Soit p le projecteur orthogonal sur E. Pour déterminer $p(1, 1, 1)$, plusieurs méthodes sont possibles. Comme u_1, v_2 est une base orthonormale de E, on peut utiliser la formule suivante pour tout vecteur u :

$$p(u) = (u_1|u)u_1 + (u_2|u)u_2 .$$

d'où

$$p(1, 1, 1) = \frac{1}{3}(1, -1, 2) + (1, 1, 0) = \frac{2}{3}(2, 1, 1) .$$

La deuxième méthode consiste à noter q le projecteur orthogonal sur $E^\perp$. Pour tout vecteur u, on a la relation $u = p(u) + q(u)$, ainsi $p(u) = u - q(u)$, mais comme $E^\perp$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur unitaire $w' = \frac{1}{\|w\|}w$, on a $q(u) = (w'|u)w'$ d'où $p(u) = u - (w'|u)w' = u - \frac{1}{3}(w|u)w$, ainsi :

$$p(1, 1, 1) = (1, 1, 1) + \frac{1}{3}(1, -1, -1) = \frac{2}{3}(2, 1, 1) .$$

2) *Appliquer l'algorithme de Gram-Schmidt aux vecteurs*

$$v_1 = (1, 2, 1) , \quad v_2 = (2, 3, 0) , \quad v_3 = (0, 1, 0)$$

[1] On peut aussi obtenir un vecteur de $E^\perp$ en prenant le produit vectoriel $v_1 \wedge v_2$: on trouve $(-1, 1, 1)$. Je rappelle que le produit vectoriel est déterminé par la formule suivante :

$$(x, y, z) \wedge (x', y', z') = (yz' - zy', zx' - xz', xy' - yx') .$$

pour obtenir une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Posons $v'_1 = v_1$, puis $u_1 = \frac{1}{\|v'_1\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)$.

Posons $v'_2 = v_2 - (u_1|v_2)u_1$; on obtient $v'_2 = v_2 - \frac{1}{6}(v'_1|v_2)v'_1 = (2,3,0) - \frac{4}{3}(1,2,1) = \frac{1}{3}(2,1,-4)$, d'où $u_2 = \frac{1}{\|v\|'_2} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2,1,-4)$.

Posons $v'_3 = v_3 - (u_1|v_3)u_1 - (u_2|v_3)u_2 = (0,1,0) - \frac{1}{3}(1,2,1) - \frac{1}{21}(2,1,-4) = \frac{1}{21}(-9,6,-3) = \frac{1}{7}(-3,2,-1)$, d'où $u_3 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-3,2,-1)$.

On obtient le triplet de vecteurs (u_1,u_2,u_3).

3) *Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ donné par la matrice suivante*

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{pmatrix} .$$

Montrer que f est une rotation, déterminer son axe et son angle.

Commençons par montrer que f est une isométrie, c'est-à-dire que M est une matrice orthogonale. Pour cela, notons $v_1 = (-\frac{3}{5},0,\frac{4}{5})$, $v_2 = (\frac{4}{5},0,\frac{3}{5})$ et $v_3 = (0,1,0)$ les vecteurs colonnes de cette matrice. On vérifie aussitôt que ces vecteurs forment une base orthonormale puisque les relations suivantes sont satisfaites :

$$\|v_1\|^2 = \|v_2\|^2 = \|v_3\|^2 = 1 \ ; \qquad (v_1|v_2) = (v_1|v_3) = (v_2|v_3) = 0 \ .$$

Si on développe le déterminant de M par rapport à la dernière ligne, on obtient que le déterminant de M est $\frac{3^2+4^2}{5^2} = 1$; par conséquent M est une matrice orthogonale de déterminant 1, l'endomorphisme associé f est une rotation.

Comme f est une rotation qui n'est pas l'identité, l'axe de f est la droite vectorielle fixée par f, autrement dit l'espace propre associé à la valeur propre 1. La résolution du système d'équation correspondant donne que l'axe de rotation de f est la droite vectorielle D engendrée par le vecteur $v = (1,2,2)$. Posons $u = \frac{1}{\|v\|}v = \frac{1}{3}(1,2,2)$.

Soit θ l'angle de la rotation f autour de l'axe D orienté dans le sens du vecteur u. On sait que la $\operatorname{tr} M = 1+2\cos\theta$, d'où $\cos\theta = -\frac{4}{5}$. On en déduit que $\theta = \arccos(-\frac{4}{5})$ ou $\theta = -\arccos(-\frac{4}{5})$, mais il faut faire plus de calculs pour déterminer le signe de θ. Il faut bien comprendre que le signe de θ n'a de sens qu'à partir du moment où on fixe une orientation de l'axe D : si on prenait le sens donné par $-u$ au lieu de u, le signe de θ sera inversé. Pour conclure, il s'agit de calculer la matrice de f dans une base orthonormée *directe* adaptée à la situation. Le vecteur $u' = \frac{1}{\sqrt{5}}(2,-1,0)$ est unitaire et orthogonal au vecteur u. Pour obtenir le vecteur u'' tel que (u,u',u'') soit une base orthonormale directe, il s'agit de prendre le produit vectoriel $u'' = u \wedge u'$, on obtient :

$$u'' = \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,-5).$$

On peut *a priori* dire que la matrice M' de f dans la nouvelle base (u,u',u'') est de la forme :

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} .$$

Il n'y a plus qu'à déterminer le coefficient $\sin\theta$, il est donné par la formule :

$$\sin\theta = (f(u')|u'') \ .$$

On obtient $f(u') = \frac{1}{\sqrt{5}}(2v_1 - v_2) = \frac{1}{5\sqrt{5}}(-10,0,5) = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2,0,1)$, d'où $\sin\theta = (f(u')|u'') = -\frac{9}{15} = -\frac{3}{5} < 0$. On en déduit $\theta = -\arccos(-\frac{4}{5})$.

4) *Soit f la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par le vecteur $(1,1,1)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Déterminer la matrice M de f dans la base canonique.*

Notons $u = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Complétons u pour obtenir une base orthonormale directe (u, u', u'') de $\mathbb{R}^3$. On choisit pour u' un vecteur unitaire orthogonal à u, par exemple $u' = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0)$. Le troisième vecteur est donné par la formule $u'' = u \wedge u' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2)$. La matrice de f dans la base (u,u',u'') est

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{4} & -\sin\frac{\pi}{4} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{4} & \cos\frac{\pi}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Notons P la matrice carrée dont les vecteurs-colonnes sont les coordonnées des vecteurs (u,u',u''). La matrice cherchée est $M = PM'P^{-1}$. Comme (u,u',u'') est une base orthonormale, P est une matrice orthogonale, par conséquent $P^{-1} = {}^tP$, d'où $M = PM'{}^tP$. Le calcul donne :

$$M = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2}+2 & \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 & \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 & 2+\sqrt{2} & \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 \\ \sqrt{2}-\sqrt{3}-1 & \sqrt{2}+\sqrt{3}-1 & 2+\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

5) *Soit v un vecteur unitaire de $\mathbb{R}^3$. On considère l'application $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par*

$$f(u) = u - 2 < u, v > v \ .$$

a) *Montrer que f est une isométrie.*

Il s'agit de montrer que pour tout vecteur u, on a $\|f(u)\|^2 = \|u\|^2$. Pour cela, on procède au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \|f(u)\|^2 &= < f(u), f(u) > \\ &= < u - 2 < u,v > v, u - 2 < u,v > v > \\ &= < u,u > -2 < u,v >< v,u > -2 < u,v >^2 +4 < u,v >^2 < v,v > \\ &= \|u\|^2 + 4 < u,v >^2 (\|v\|^2 - 1) \\ &= \|u\|^2 \qquad (v \text{ est unitaire, donc } \|v\| = 1.) \end{aligned}$$

On a bien montré que f était une isométrie.

b) *Montrer que f est un endomorphisme symétrique.*

Il s'agit de montrer que si u et u' sont deux vecteurs, alors $< u, f(u') > = < f(u), u' >$. On obtient :

$$\begin{aligned} < u, f(u') > &= < u, u' - 2 < u', v > v > \\ &= < u, u' > -2 < u', v >< u, v > \ ; \\ < f(u), u' > &= < u - 2 < u,v > v, u' > \\ &= < u, u' > -2 < u, v >< v, u' > \ . \end{aligned}$$

On obtient bien $< u, f(u') > = < f(u), u' >$; f est un endomorphisme symétrique.

c) *Dans le cas où $v = \frac{1}{\sqrt{21}}(1,2,4)$, donner la matrice de f dans la base canonique.* On applique la définition de f pour calculer l'image des vecteurs de la base canonique :

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,0,0) - \frac{2}{21}(1,2,4) = \frac{1}{21}(19,-4,-8) \ ; \\ f(0,1,0) &= (0,1,0) - \frac{4}{21}(1,2,4) = \frac{1}{21}(-4,13,-16) \ ; \\ f(0,0,1) &= (0,0,1) - \frac{8}{21}(1,2,4) = \frac{1}{21}(-8,-16,-11) \ . \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base canonique est donc :

$$\frac{1}{21}\begin{pmatrix} 19 & -4 & -8 \\ -4 & 13 & -16 \\ -8 & -16 & -11 \end{pmatrix}$$

6) *Soit p la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation $x + 2y + 3z = 0$.*

a) *Déterminer la matrice de p dans la base canonique.* On remarque que E est l'orthogonal de la droite vectorielle D engendrée par le vecteur unitaire $v = \frac{1}{\sqrt{14}}(1, 2, 3)$. Soit q le projecteur orthogonal sur D. Pour tout vecteur u de $\mathbb{R}^3$, on a $u = p(u) + q(u)$ et $q(u) = (u|v)v$, d'où $p(u) = u - (u|v)v$. L'image des vecteurs de la base canonique par p donne les vecteurs-colonnes de la matrice P de p dans la base canonique, on obtient : P=

$$\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 13 & -2 & -3 \\ -2 & 10 & -6 \\ -3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

b) *Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale d'axe E.* Soit s la symétrie orthogonale d'axe E. On a la relation $s = 2p - \mathrm{id}$, la matrice cherchée est donc :

$$\frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -6 \\ -3 & -6 & -2 \end{pmatrix}$$

7) *On considère l'application $N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par*

$$N(x, y) = |x| + \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

a) *Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.* Tout d'abord, pour tout vecteur (x, y), $N(x, y)$ est positif ou nul. Il est clair que si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$N(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| N(x, y)\ .$$

Si (x, y) est tel que $N(x, y) = 0$, on a $|x| + \sqrt{x^2 + y^2} = 0$; il s'agit de la somme de deux nombres positifs ou nuls, comme cette somme est nulle, ces deux nombres sont nuls, d'où $|x| = 0$ et $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$. Il vient $x = 0$ puis $\sqrt{y^2} = 0$, donc $x = 0$ et $y = 0$.
Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. On se donne deux vecteurs (x, y) et (x', y') de $\mathbb{R}^2$. On veut montrer que

$$N(x + x', y + y') \leq N(x, y) + N(x', y')\ .$$

Les propriétés de la valeur absolue font que

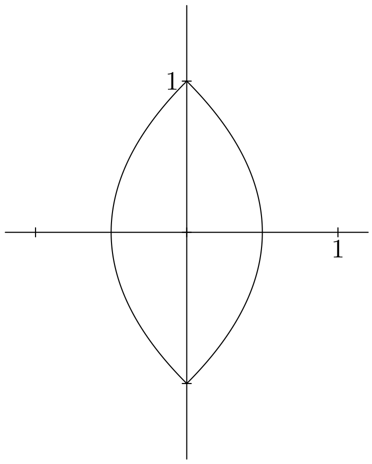
$$|x + x'| \leq |x| + |x'|\ ;$$

par ailleurs, l'inégalité triangulaire pour la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$ donne :

$$\sqrt{(x + x')^2 + (y + y')^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y'^2}\ .$$

En « additionnant » les deux inégalités précédentes, on obtient l'inégalite voulue.

b) Dessiner la boule unité associée à N.
Dessinons plutôt la sphère unité, la boule unité étant constituée de la sphère unité et de la partie qu'elle délimite. Il s'agit de résoudre l'équation $|x| + \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, qui équivaut à $\sqrt{x^2 + y^2} = 1 - |x|$. Les solutions vérifient donc $|x| \leq 1$, c'est-à-dire $-1 \leq x \leq 1$. Distinguons deux cas. Le premier cas est $0 \leq x \leq 1$, on obtient $x = \frac{1-y^2}{2}$. L'autre cas est $-1 \leq x \leq 0$, on trouve $x = \frac{y^2-1}{2}$. Il s'agit de représenter ces deux arcs de paraboles :



8) *Les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont-elles ouvertes, fermées, bornées, compactes ?*
- $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < 42\}$;
- $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 > y\}$;
- $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 \geq y > 0\}$;
- $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 = y\}$;
- $A_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x^2 - y^2 = 1\}$.

Soit $f_1 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \longmapsto x^2 + y^2$, on a $A_1 = f_1^{-1}(]-\infty, 42[)$; A_1 est l'image inverse d'un intervalle ouvert par l'application continue f_1, A_1 est donc ouvert. Ensuite, A_1 n'est pas vide (il contient $(0,0)$) et n'est pas $\mathbb{R}^2$ tout entier $(42,0) \notin A_1$; comme on sait que les seules parties de $\mathbb{R}^2$ à la fois ouvertes et fermées sont l'ensemble vide et $\mathbb{R}^2$, il vient que A_1 n'est pas fermé [2]. Comme A_1 n'est pas fermé, A_1 n'est pas compact non plus. Enfin, A_1 est borné puisque pour tout $u \in A_1$, on a $\|u\| \leq \sqrt{42}$ où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne usuelle.

Soit $f_2 \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application $(x,y) \longmapsto x^2 - y$, on a $A_2 = f_2^{-1}(]0, +\infty[)$. On en déduit que la partie A_2 est ouverte, et de même que précédemment, non fermée et donc non compacte. La partie A_2 n'est pas bornée puis que pour tout entier $n > 0$, l'élément $(n, 0)$ est dans A_2 et que la norme de $(n,0)$ tend vers $+\infty$.

L'ensemble A_3 n'est ni ouvert ni fermé. En effet, la suite $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2})$, formée d'éléments de A_3, converge vers $(0,0) \notin A_3$, donc A_3 n'est pas fermé ; inversement, la suite $(1, 1 - \frac{1}{n})$ est formée d'éléments n'appartenant pas à A_3 et converge vers $(1,1) \in A_3$, le complémentaire de A_3 n'est donc pas fermé, A_3 n'est pas ouvert. Les éléments $(n,1)$ pour $n \geq 1$ sont dans A_3 mais leur norme tend vers $+\infty$, A_3 n'est pas borné et donc pas compact non plus.

La partie A_4 est l'image inverse par l'application continue $(x,y) \longmapsto x^2 - y$ du singleton $\{0\}$ qui est fermé, par conséquent A_4 est fermé. Il n'est pas ouvert parce que A_4 n'est pas vide ni tout. Cette partie n'est pas bornée puisque la suite (n, n^2) d'éléments de A_4 voit sa norme tendre vers $+\infty$; on en déduit que A_4 n'est pas compact.

La partie A_5 est fermée puisque c'est l'image inverse par l'application continue de $(x,y) \longmapsto x^2 - y^2$ du singleton (fermé) $\{1\}$. De même que précédémment A_5 n'est pas ouverte. Une fois que l'on saura que A_5 n'est pas bornée, on saura quelle n'est pas compacte. Considérons la suite $P_n = (\sqrt{n+1}, \sqrt{n})$ d'éléments de A_5, la norme $\|P_n\|$ tend vers $+\infty$; on en déduit que A_5 n'est pas bornée.

[2] De façon plus explicite, la suite $P_n = (\sqrt{42} - \frac{1}{n}, 0)$ est formée d'éléments de A_1 et converge vers $(\sqrt{42}, 0)$ qui n'est pas dans A_1 ; d'après le critère séquentiel, on obtient que A_1 n'est pas fermé.