

Groupe des tresses d'ARTIN

JOËL RIOU
XAVIER CARUSO

Groupe des tresses d'ARTIN

JOËL RIOU
 XAVIER CARUSO

Résumé

L'objectif de ce dossier est de donner quelques propriétés du groupe des tresses d'ARTIN. D'une part, on s'attachera à en donner plusieurs définitions et représentations classiques : l'indispensable point de vue algébrique permet de comprendre la structure de ce groupe et de mettre en lumière les difficultés théoriques qu'il contient, tandis que le point de vue géométrique permet de comprendre qu'il s'agit bien de tresses. D'autre part, on essaiera de décrire des aspects divers des tresses, notamment la résolution du problème des mots grâce à un algorithme de retournement des mots, et des aspects plus anecdotiques comme la minimalisation du nombre de générateurs de ces groupes, et le fait que ces groupes sont sans torsion.

Table des matières

1	Approche algébrique du groupe de tresses \mathcal{B}_n	5
1.1	Définition de \mathcal{B}_n	5
1.2	Une construction théorique de \mathcal{B}_n	5
1.3	Représentation plus visuelle d'une tresse	6
1.4	Morphismes partant de \mathcal{B}_n	6
1.4.1	Morphisme canonique de \mathcal{B}_n vers \mathfrak{S}_n	6
1.4.2	Morphisme vers \mathbb{Z}	7
2	Approche géométrique du groupe des tresses	8
2.1	Définition des tresses géométriques	8
2.2	Produit de deux tresses géométriques	9
2.3	Présentation géométrique du groupe des tresses	10
3	Retournement des mots	12
3.1	Description de la méthode	12
3.2	Implémentation de l'algorithme	12
3.3	Tests	12
3.3.1	Une relation de définition des tresses	13
3.3.2	Un exemple de tresse	13
4	Curiosités	15
4.1	\mathcal{B}_n est engendré par 2 éléments	15
4.2	Le groupe des tresses est sans torsion	16
A	Programmes	17
A.1	Le retournement des mots pour résoudre le problème des mots dans le groupe des tresses \mathcal{B}_n	17

Chacun sait depuis son enfance que si on a quelques bouts de ficelles (ou des cheveux suffisamment longs), on peut les faire se croiser les uns sur les autres. Intuitivement, on imagine bien que l'on puisse *composer* deux tresses, et que l'on puisse les défaire. Ces remarques apparemment anodines permettent d'imaginer une structure de groupe sur ces objets. Comme on va le voir, on peut modéliser de plusieurs façons ces objets naturels que constituent les tresses.

1 Approche algébrique du groupe de tresses \mathcal{B}_n

Commençons par une définition purement algébrique apparemment *mystérieuse*, mais qui s'expliquera bien par la suite.

1.1 Définition de \mathcal{B}_n

Définition 1.1 Pour $n \geq 2$, le groupe de tresses à n brins \mathcal{B}_n est le groupe engendré par $n-1$ générateurs $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations suivantes :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket \quad \begin{cases} |i-j| = 1 & \implies \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j \\ |i-j| > 1 & \implies \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \end{cases} \quad (1)$$

1.2 Une construction théorique de \mathcal{B}_n

Plus précisément, on peut le construire en considérant l'ensemble \mathfrak{a}^* des mots sur l'alphabet $\mathfrak{a} = \{\sigma_i, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\} \cup \{\sigma_i^{-1}, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$. Par la suite, on aura également besoin de définir $\mathfrak{a}_+ = \{\sigma_i, i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket\}$ et l'ensemble des mots positifs \mathfrak{a}_+^* . On notera ε le mot vide.

Sur cet ensemble \mathfrak{a}^* , on peut définir une relation \mathfrak{R} qui ne fait que traduire les relations de définitions entre les générateurs, et les relations entre les générateurs et leurs inverses :

Relations particulières aux tresses

$$\begin{cases} \forall (i, j) \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & \begin{cases} |i-j| = 1 & \implies \sigma_i \sigma_j \sigma_i \mathfrak{R} \sigma_j \sigma_i \sigma_j \\ |i-j| > 1 & \implies \sigma_i \sigma_j \mathfrak{R} \sigma_j \sigma_i \end{cases} \\ \forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket & \begin{cases} \sigma_i \sigma_i^{-1} \mathfrak{R} \varepsilon \\ \sigma_i^{-1} \sigma_i \mathfrak{R} \varepsilon \end{cases} \end{cases}$$

Ensuite, on peut définir une autre relation \mathfrak{R}^* qui traduit uniquement le fait que les simplifications contenues dans la relation \mathfrak{R} peuvent être effectuées au milieu d'un mot :

Relations de compatibilité avec la concaténation

$$\forall (a, b, x, y) \in (\mathfrak{a}^*)^4 \quad x \mathfrak{R} y \implies a x b \mathfrak{R}^* a y b$$

On veut ainsi identifier grâce à une relation d'équivalence \cong les mots de \mathfrak{a}^* qui s'obtiennent en faisant un nombre fini d'opérations élémentaires correspondant à cette relation \mathfrak{R}^* . On peut ainsi définir la relation \cong comme étant la plus petite relation d'équivalence qui contienne \mathfrak{R}^* . On remarque que l'on peut donner une autre définition équivalente de la relation d'équivalence \cong sur les mots de \mathfrak{a}^* :

Propriété 1.1 \cong est la plus petite relation d'équivalence contenant \mathfrak{R} et vérifiant de plus :

$$\forall (a, b, \tilde{a}, \tilde{b}) \in (\mathfrak{a}^*)^4 \quad \begin{cases} a \cong \tilde{a} \\ b \cong \tilde{b} \end{cases} \implies ab \cong \tilde{a} \tilde{b}$$

\mathfrak{a}^* est un monoïde pour la loi de concaténation. Quand on quotiente \mathfrak{a}^* par la relation d'équivalence \cong , on obtient un groupe, vu que la relation \cong est compatible avec la concaténation, et que tout élément de \mathfrak{a}^*/\cong possède un inverse par rapport à l'élément neutre e qui est la classe du mot vide ε . Par définition, on a ainsi : $\mathcal{B}_n = \mathfrak{a}^*/\cong$.

1.3 Représentation plus visuelle d'une tresse

À chaque mot $m \in \mathfrak{a}^*$, on peut associer une configuration qui illustre fidèlement la *forme* de la tresse.

Une configuration est un schéma qui représente de façon assez concrète ce que fait une tresse sur les brins, et en particulier, elle permet de visualiser quel brin passe devant ou derrière un autre.

Ainsi, σ_i et σ_i^{-1} agissent sur les brins i et $i + 1$ comme l'indiquent les figures 1 et 2.

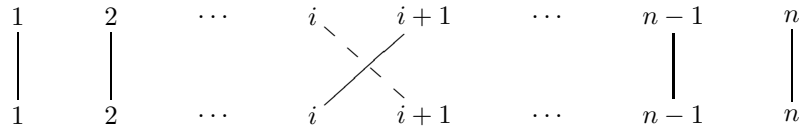


FIG. 1 – Configuration associée à σ_i

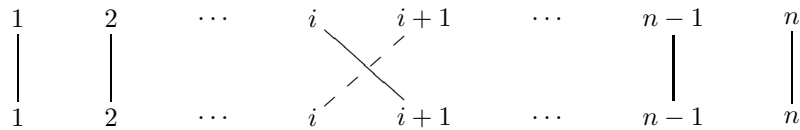


FIG. 2 – Configuration associée à σ_i^{-1}

Pour obtenir la configuration associée à un certain mot de \mathfrak{a}^* , on met à la suite de haut en bas les configurations des tresses *élémentaires* qui sont dans ce mot, en raccordant les différents brins.

La justification des relations qui définissent le groupe des tresses \mathcal{B}_n apparaît naturellement quand on arrive à se convaincre que les configurations intervenant dans ces égalités font bien essentiellement la même chose comme le montrent les figures 3 et 4.

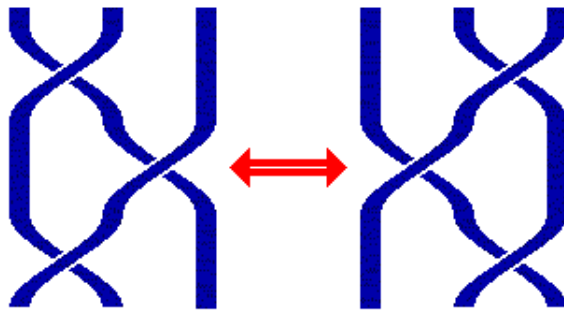


FIG. 3 – Illustration de l'égalité $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

1.4 Morphismes partant de \mathcal{B}_n

1.4.1 Morphisme canonique de \mathcal{B}_n vers \mathfrak{S}_n

Comme les illustrations le montrent, on peut constater que la tresse σ_i permute, entre autres choses, les brins numérotés i et $i + 1$. On peut ainsi définir un morphisme de monoïdes qui à σ_i et à σ_i^{-1} associe la transposition $(i \ i + 1)$.

Comme on le vérifie aisément, ce morphisme passe aussi au quotient par la relation \cong . On obtient ainsi un morphisme de groupes $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\text{perm}} \mathfrak{S}_n$ qui a une tresse associée la permutation des brins qui lui correspond (en fait, on lui associe l'inverse de cette permutation, mais ce choix est uniquement fait dans le but d'obtenir un morphisme de groupes et non un anti-morphisme).

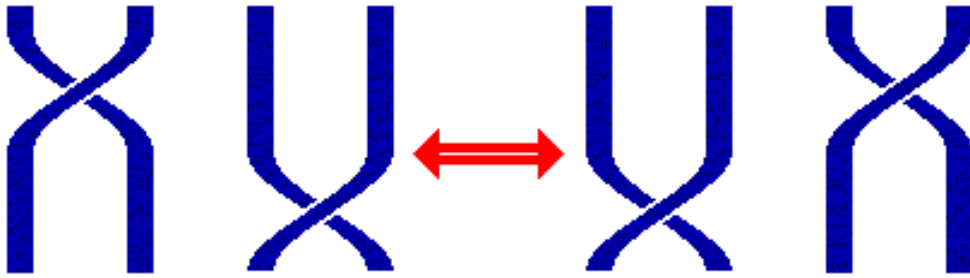


FIG. 4 – Illustration de l'égalité $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| > 1$

Le noyau de ce morphisme $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\text{perm}} \mathfrak{S}_n$, c'est-à-dire l'ensemble des tresses qui ne permutent pas les brins, est noté \mathcal{P}_n et on l'appelle *groupe de tresses pures*.

1.4.2 Morphisme vers \mathbb{Z}

On peut donner un autre morphisme qui compte algébriquement les croisements positifs σ_i et les croisements négatifs σ_i^{-1} .

Ce morphisme Ψ est défini sur le monoïde \mathfrak{a}^* par $\Psi(\sigma_i) = 1$ pour tout $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$. Il passe au quotient, il donne donc un morphisme de groupes $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\Psi} \mathbb{Z}$.

Grâce à ces morphismes, on peut quand même dire que les éléments de la famille $(\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{n-1}^{-1})$ sont bien distincts et que les générateurs σ_i pour $i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ sont d'ordre infini.

Cet aspect n'est pas pleinement satisfaisant en soi, car ce n'est pas très *constructif*. En effet, étant donné deux mots de tresses, cette définition ne donne aucun moyen algorithmique, et encore moins intuitif, pour déterminer si ces deux mots représentent en fait la même tresse. Il est alors naturel de représenter différemment les tresses, par exemple dans l'espace et c'est ce que l'on va tenter d'expliquer dans la prochaine section. Ainsi, l'équivalence de mots de tresses va prendre une signification naturelle et intuitive.

2 Approche géométrique du groupe des tresses

On va maintenant s'attacher à définir les groupes des tresses d'un point de vue purement géométrique. Ainsi, un tresse sera constituée de n brins représentés par des fonctions continues du segment $[0, 1]$ vers le plan euclidien \mathbb{R}^2 . Comme on va pouvoir le remarquer, on peut identifier des tresses géométriques qui sont obtenues l'une de l'autre par des *déformations* continues.

2.1 Définition des tresses géométriques

Définition 2.1 β est une tresse géométrique à n brins si et seulement si $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ avec :

$$\begin{cases} f \in \mathfrak{S}_n \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \\ \forall z \in [0, 1] \end{cases} \begin{cases} \gamma_i \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2) \\ \gamma_i(0) = (i, 0) & \gamma_i(1) = (f(i), 0) \\ i \neq j \implies \gamma_i(z) \neq \gamma_j(z) \end{cases}$$

Définition 2.2 Si $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une tresse géométrique, on appelle permutation associée à β l'élément $\text{perm}(\beta) = f^{-1} \in \mathfrak{S}_n$.

Intuitivement, chaque composante γ_i représente le i -ème brin de la tresse géométrique. Chaque brin est donc un chemin continu qui part d'un point privilégié du plan $z = 0$ et qui arrive en un autre point privilégié du plan $z = 1$, comme on peut le représenter sur le schéma qui suit :

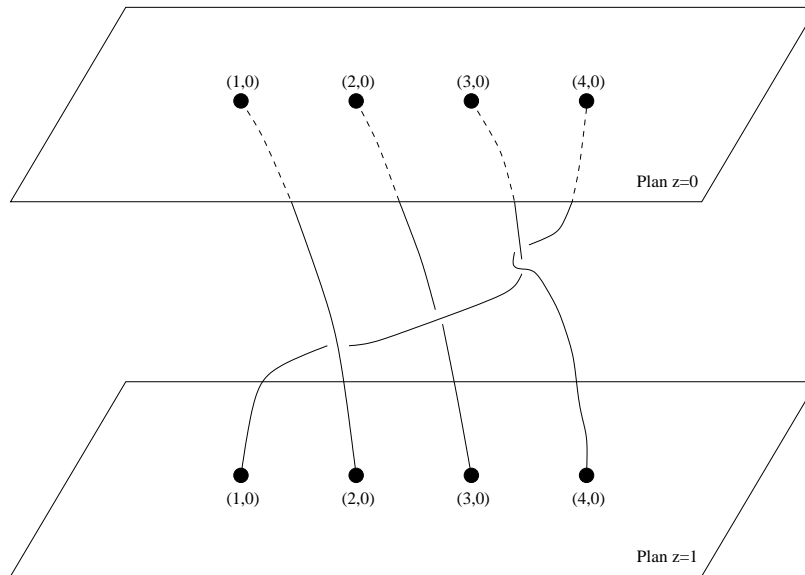


FIG. 5 – Un exemple concret de tresse géométrique

On peut munir l'ensemble des tresses géométriques d'une topologie pertinente :

Définition 2.3 Si $f \in \mathfrak{S}_n$, on définit différents espaces :

$$\mathfrak{T}_f = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}^2)^n, \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \begin{cases} \gamma_i(0) = (i, 0) \\ \gamma_i(1) = (f(i), 0) \end{cases} \right\}$$

$$\mathfrak{t}_f = \{ (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathfrak{T}_f, \forall z \in [0, 1] \quad i \neq j \implies \gamma_i(z) \neq \gamma_j(z) \}$$

On donne à cet espace affine \mathfrak{T}_f une structure d'espace affine normé en le munissant de la topologie de la convergence uniforme.

Il est clair que \mathfrak{t}_f s'identifie à l'ensemble des tresses géométriques associées à la permutation f^{-1} , et que \mathfrak{t}_f est une partie ouverte de l'espace affine normé \mathfrak{T}_f .

Définition 2.4 (Isotopie) On dira que deux tresses géométriques $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $\beta' = (f', \gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ sont directement isotopes si et seulement si $f = f'$ et pour tout $t \in [0, 1]$, β_t est une tresse géométrique avec :

$$\beta_t = (f, \delta_1, \dots, \delta_n) \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \delta_i = (1-t)\gamma_i + t\gamma'_i$$

On dit que deux tresses géométriques β et β' sont isotopes (noté $\beta \equiv \beta'$) si et seulement s'il existe une suite finie $(\beta_0, \dots, \beta_m)$ avec $\beta_0 = \beta$, $\beta_m = \beta'$ et pour tout $i \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, β_i et β_{i+1} sont directement isotopes.

La relation d'isotopie \equiv est une relation d'équivalence, et on note $\hat{\beta}$ la classe d'isotopie d'une tresse géométrique β .

Propriété 2.1 Comme l'espace topologique ambiant \mathfrak{T}_f est un espace affine normé, les composantes connexes par lignes brisées (c'est-à-dire les classes d'isotopies) de l'ouvert \mathfrak{t}_f coïncident avec ses composantes connexes (par arcs).

Fait 2.1 Dans toute classe d'isotopie $\hat{\beta}$, il existe des tresses géométriques $(f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ telles que les fonctions γ_i soient au choix :

- de classe \mathcal{C}^∞
- continues et affines par morceaux

Démonstration : Cela provient essentiellement de la compacité de $[0, 1]$, de la continuité des fonctions γ_i , du fait qu'elles prennent des valeurs différentes, et des théorèmes d'approximations des fonctions continues. \square

Lemme 2.1 Si φ est une fonction continue de $[0, 1]$ vers $[0, 1]$ telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ et si $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une tresse géométrique, alors $\beta \equiv \beta' = (f, \delta_1, \dots, \delta_n)$ avec :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \delta_i = \gamma_i \circ \varphi$$

On notera $\beta' = \beta \circ \varphi$

Démonstration : Pour $t \in [0, 1]$, notons $\psi_t(z) = (1-t)z + t\varphi(z)$. On remarque que $\beta \circ \psi_t$ est une tresse géométrique et que $\beta \circ \psi_0 = \beta$ et $\beta \circ \psi_1 = \beta'$.

On montre aisément en utilisant la continuité uniforme des fonctions γ_i que $t \mapsto \beta \circ \psi_t$ est un chemin continu de β vers β' dans \mathfrak{t}_f . β et β' font donc partie d'une même composante connexe par arcs de \mathfrak{t}_f , donc $\beta \equiv \beta'$. \square

2.2 Produit de deux tresses géométriques

Définition 2.5 Si $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ et $\beta' = (f', \gamma'_1, \dots, \gamma'_n)$ sont deux tresses géométriques à n brins, on définit une tresse géométrique produit $\beta \times \beta' = (g, \delta_1, \dots, \delta_n)$ définie par :

$$\begin{cases} g = f' \circ f \\ \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall z \in [0, 1] \quad \begin{cases} \delta_i\left(\frac{z}{2}\right) = \gamma_i(z) \\ \delta_i\left(\frac{1+z}{2}\right) = \gamma'_{f^{-1}(i)}(z) \end{cases} \end{cases}$$

Propriété 2.2 Le produit \times est compatible avec la relation \equiv d'isotopie : si $\alpha \equiv \alpha'$ et $\beta \equiv \beta'$ alors $\alpha \times \beta \equiv \alpha' \times \beta'$.

Propriété 2.3 Modulo l'isotopie, le produit \times est associatif : si α, β, γ sont des tresses à n brins alors

$$(\alpha \times \beta) \times \gamma \equiv \alpha \times (\beta \times \gamma)$$

Démonstration : On applique le lemme 2.1 avec la fonction φ définie par :

$$\forall z \in [0, 1] \quad \begin{cases} \varphi\left(\frac{z}{4}\right) = \frac{z}{2} \\ \varphi\left(\frac{1+z}{4}\right) = \frac{2+z}{4} \\ \varphi\left(\frac{1+z}{2}\right) = \frac{3+z}{4} \end{cases}$$

\square

Définition 2.6 On note \mathfrak{B}_n l'ensemble des classes d'équivalence de \equiv , c'est-à-dire l'ensemble des classes d'isotopies de tresses géométriques.

Propriété 2.4 (\mathfrak{B}_n, \times) est un groupe.

Démonstration : On définit une application φ ainsi :

$$\forall z \in [0, 1] \quad \varphi(z) = 1 - z$$

Si $\beta = (f, \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ est une tresse géométrique, on peut définir la tresse géométrique $\beta^{-1} = (f^{-1}, \delta_1, \dots, \delta_n)$ par :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \delta_i = \gamma_{f^{-1}(i)} \circ \varphi$$

Notons $\tau = \beta \times \beta^{-1}$ et définissons une application $t \mapsto \tau_t$ par :

$$\forall t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \quad \begin{cases} \forall z \in [0, t] \cup [1-t, 1] & \tau_t(z) = \tau(z) \\ \forall z \in [t, 1-t] & \tau_t(z) = \tau(t) \end{cases}$$

Il est *clair* que $t \mapsto \tau_t$ définit un chemin continu de la tresse triviale $e = \tau_0$ vers $\tau = \tau_{\frac{1}{2}}$ avec par définition $e = (\text{Id}, (1, 0), \dots, (n, 0))$.

En remarquant que $(\beta^{-1})^{-1} = \beta$, on obtient ainsi que pour toute tresse géométrique β , on a $\hat{\beta} \times \hat{\beta}^{-1} = \hat{\beta}^{-1} \times \hat{\beta} = \hat{e}$.

On démontre de façon analogue que \hat{e} est effectivement le neutre de la loi \times . On a montré de plus que \times était associative sur \mathfrak{B}_n ce qui permet de dire que \mathfrak{B}_n muni du produit \times est un groupe. \square

2.3 Présentation géométrique du groupe des tresses

On peut définir explicitement une tresse géométrique τ_i qui représente le croisement positif σ_i par $\tau_i = ((i \ i+1), \gamma_1, \dots, \gamma_n)$ avec par exemple :

$$\begin{cases} \forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i, i+1\} & \forall z \in [0, 1] \quad \gamma_j(z) = (j, 0) \\ \forall z \in [0, 1] & \begin{cases} \gamma_i(z) & = \left(i + z, (z - z^2)^2\right) \\ \gamma_{i+1}(z) & = \left(i + 1 - z, -(z - z^2)^2\right) \end{cases} \end{cases}$$

On peut ainsi obtenir par exemple la figure 6 en représentant ces courbes.

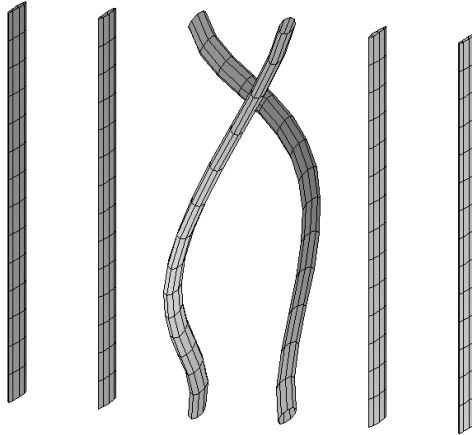


FIG. 6 – Tresse géométrique associée à σ_3 pour $n = 6$

On peut donc définir un morphisme de monoïdes $\mathfrak{a}^* \xrightarrow{\iota} \mathfrak{B}_n$ qui à un croisement positif σ_i associe $\hat{\tau}_i$, qui à un croisement négatif σ_i^{-1} associe $\hat{\tau}_i^{-1}$. On se convainc naturellement que ce morphisme de monoïdes passe au quotient par la relation \cong . On obtient ainsi un morphisme de groupes $\mathfrak{B}_n \xrightarrow{\iota} \mathfrak{B}_n$.

Théorème 2.1 (Artin, 1925) $\mathcal{B}_n \xrightarrow{\iota} \mathfrak{B}_n$ est un isomorphisme.

Démonstration : Pour avoir une preuve de ce théorème difficile, on peut se référer par exemple à [B74] qui donne une preuve due à FADELL et VAN BUSKIRK qui met en évidence l'intérêt de la topologie algébrique (et en l'occurrence du groupe fondamental) dans l'étude des groupes de tresses. \square

3 Retournement des mots

On peut s'intéresser à la mise en œuvre d'algorithmes permettant de détecter si deux mots de tresses (c'est-à-dire des éléments de \mathfrak{a}^*) représentent la même tresse, c'est-à-dire le même élément dans le groupe \mathcal{B}_n . C'est ce que l'on appelle résoudre le *problème des mots*. On ne s'intéressera pas ici aux questions théoriques extrêmement difficiles que ces notions posent et en particulier, on ne développera pas les démonstrations (longues et subtiles, voir [D00]) du fait que l'algorithme en question est convergent et donne une réponse correcte. La technique utilisée est basée sur ce que l'on appelle le *retournement des mots*.

3.1 Description de la méthode

L'enjeu de la méthode (dont on étudie que le cas particulier des groupes \mathcal{B}_n) est, partant d'un mot quelconque $m \in \mathfrak{a}^*$, d'obtenir un mot équivalent (pour la relation \cong) de la forme uv^{-1} , chacun des mots u et v étant dans \mathfrak{a}_+^* , c'est-à-dire que dans ces mots, les générateurs σ_i n'interviennent qu'avec des exposants positifs.

On définit ainsi une relation \rightarrow définie par :

$$\forall (a, b) \in \mathfrak{a}^* \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall i \quad a\sigma_i^{-1}\sigma_i b \rightarrow ab \\ |i-j|=1 \implies a\sigma_i^{-1}\sigma_j b \rightarrow a\sigma_j\sigma_i\sigma_j^{-1}\sigma_i^{-1}b \\ |i-j|>1 \implies a\sigma_i^{-1}\sigma_j b \rightarrow a\sigma_j\sigma_i^{-1}b \end{array} \right. \quad (2)$$

On note \rightarrow^* la clôture transitive de la relation \rightarrow , c'est-à-dire que $a \rightarrow^* b$ si, et seulement s'il existe $N \in \mathbb{N}$, et une suite finie $(u_n)_{n \in \llbracket 0, N \rrbracket}$ telle que $a = u_0$, $u_N = b$ et $\forall n \in \llbracket 0, N-1 \rrbracket$, $u_n \rightarrow u_{n+1}$.

Sur cette relation \rightarrow , on a les théorèmes suivants qui sont très importants :

Théorème 3.1 (Confluence) *Si a , b , et b' sont des mots de \mathfrak{a}^* tels que $a \rightarrow^* b$ et $a \rightarrow^* b'$, alors il existe $c \in \mathfrak{a}^*$ tel que $b \rightarrow^* c$ et $b' \rightarrow^* c$.*

Théorème 3.2 (Convergence) *Toute suite (u_n) telle que pour tout n , $u_n \rightarrow u_{n+1}$ est finie.*

La conséquence immédiate de ces deux théorèmes est que, partant d'un mot quelconque $a \in \mathfrak{a}^*$, en appliquant un nombre fini de fois les règles de transformations contenues dans la relation \rightarrow , on obtiendra toujours un mot terminal de la forme uv^{-1} avec $(u, v) \in (\mathfrak{a}_+^*)^2$, de surcroît ce mot terminal est *unique*.

Définition 3.1 *Pour tout $\omega \in \mathfrak{a}^*$, on note $N(\omega)$ et $D(\omega)$ les uniques mots de \mathfrak{a}_+^* tels que $\omega \rightarrow^* N(\omega)D(\omega)^{-1}$.*

Le résultat important consiste en le théorème suivant qui est rassurant dans la mesure où il donne un algorithme pour tester si un mot de \mathfrak{a}^* représente la tresse triviale, ce qui permet bien entendu de déterminer également si deux mots représentent la même tresse.

Théorème 3.3 (Problème des mots) *Pour tout mot $\omega \in \mathfrak{a}^*$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $\omega \cong \varepsilon$
2. $D(\omega)N(\omega)^{-1} \rightarrow^* \varepsilon$

On remarque que pour tester si un mot ω représente la tresse triviale, on applique deux fois l'algorithme de retournement.

3.2 Implémentation de l'algorithme

On peut par exemple implémenter cet algorithme dans le langage CAML avec le programme A.1.

3.3 Tests

On peut essayer de tester cet algorithme sur des exemples. On pourra ainsi voir que les mots obtenus après retournement n'ont aucune raison d'être plus courts que les mots de départ.

3.3.1 Une relation de définition des tresses

Ainsi, on peut vérifier si des relations entre les générateurs du groupe des tresses \mathcal{B}_n sont vraies ou fausses. Ici, on teste justement une relation de définition des tresses :

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1 = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

On va donc appliquer le test de neutralité au mot $\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$.

$$\omega = \sigma_1\sigma_2\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}$$

Première étape

$$N(\omega) = \sigma_1\sigma_2\sigma_1 \quad D(\omega) = \sigma_2\sigma_1\sigma_2$$

Seconde étape

$$\begin{aligned} &\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1 \\ &\sigma_2^{-1}\sigma_1^{-1}\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1 \\ &\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1 \\ &\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2\sigma_1 \\ &\sigma_1^{-1}\sigma_1 \\ &\varepsilon \end{aligned}$$

3.3.2 Un exemple de tresse

De façon générale, à partir d'une tresse géométrique (moyennant quelques propriétés génériques de régularité), on peut associer un mot de tresse. En fait, on obtient ce mot en projetant orthogonalement les brins sur le plan d'équation $y = 0$. Et lorsque deux brins se croisent on associe (suivant si tel ou tel brin passe devant tel autre) un des générateurs σ_i , ou son inverse.

Reprenons l'exemple de la tresse illustrée sur la figure 5. Pour cette tresse, la configuration plane associée est la suivante :



FIG. 7 – Configuration associée à la tresse de la figure 5

Le mot associé à cette tresse est donc $\omega = \sigma_3^{-2}\sigma_2\sigma_1^{-1}$. Essayons de voir vers quel mot va converger l'algorithme de retournement des mots de tresses.

$$\omega = \sigma_3^{-1}\sigma_3^{-1}\sigma_2\sigma_1^{-1}$$

Retournement

$$\begin{aligned} & \sigma_3^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_1^{-1} \\ & \sigma_3^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \\ & \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \\ & \sigma_2 \sigma_3 \sigma_2^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_1^{-1} \end{aligned}$$

$$N(\omega) = \sigma_2 \sigma_3 \quad D(\omega) = \sigma_1 \sigma_3 \sigma_2 \sigma_2$$

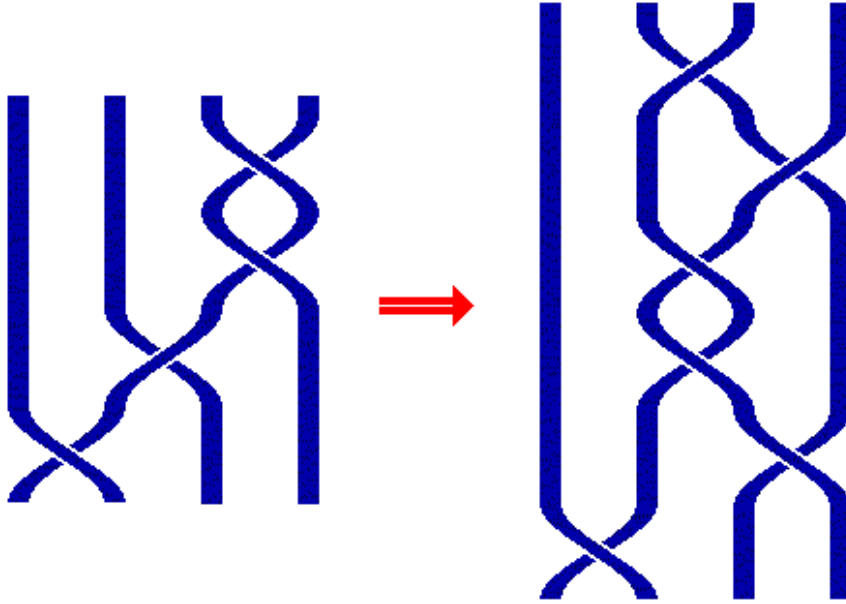


FIG. 8 – Configuration associée au mot obtenu après le retournement du mot ω

4 Curiosités

Les tresses donnent lieu à de multiples développements mathématiques variés. On ne va citer que deux aspects *anecdotiques* des tresses parmi tant d'autres.

4.1 \mathcal{B}_n est engendré par 2 éléments

Dans la définition algébrique que l'on a donné du groupe des tresses à n brins \mathcal{B}_n , on a utilisé $n - 1$ générateurs qui correspondent aux croisements positifs de deux brins consécutifs. Ici, on va montrer qu'en fait on avait pas besoin d'autant de générateurs mais que deux suffisent. Essentiellement, on va considérer un des générateurs σ_1 et on va obtenir les autres σ_i en conjuguant par une tresse τ que l'on va définir par la configuration suivante :

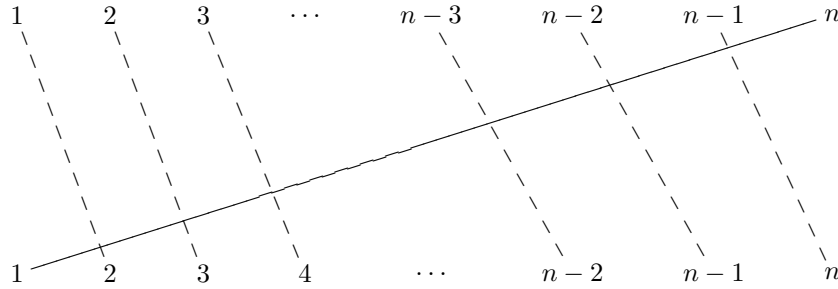


FIG. 9 – Configuration associée à la tresse τ

Plus précisément, on peut exprimer τ par un mot de \mathfrak{a}^* :

$$\tau = \sigma_{n-1} \dots \sigma_1$$

On pose $\sigma = \sigma_1$.

Propriété 4.1 \mathcal{B}_n est engendré par les éléments (σ, τ) . On a même ainsi une présentation du groupe \mathcal{B}_n avec ces générateurs (σ, τ) et les relations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \sigma\tau\sigma\tau^{-1}\sigma\tau & = \tau\sigma\tau^{-1}\sigma\tau\sigma \\ \forall k \in \llbracket 2, n-2 \rrbracket & \sigma\tau^k\sigma\tau^{-k} = \tau^k\sigma\tau^{-k}\sigma \end{array} \right. \quad (3)$$

Démonstration : On remarque que pour tout $i \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \tau\sigma_{i+1} &= \sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \dots \sigma_1\sigma_{i+1} \\ &= \sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \\ &= \sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+2}\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \\ &= \sigma_i\sigma_{n-1} \dots \sigma_{i+2}\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \\ &= \sigma_i\tau \end{aligned}$$

On obtient ainsi $\forall i \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket$, $\sigma_{i+1} = \tau^{-i}\sigma\tau^i$. Les relations (3) s'obtiennent en remplaçant simplement cette expression des générateurs σ_i dans les relations de définition de \mathcal{B}_n (1).

Réciproquement, on peut montrer facilement que les relations (1) s'obtiennent à partir des relations (3). \square

4.2 Le groupe des tresses est sans torsion

Théorème 4.1 *Le groupe des tresses d'ARTIN \mathcal{B}_n est sans torsion, c'est-à-dire que :*

$$\forall p \in \mathbb{N}^* \quad \forall t \in \mathcal{B}_n \quad t^p = e \iff t = e$$

En d'autres termes, si on répète p fois un motif de tresse non triviale, on n'obtient jamais la tresse triviale.

Démonstration : Il existe plusieurs façons de démontrer ce résultat. On peut utiliser des résultats combinatoires généraux sur les groupes ayant des présentations très particulières, c'est ce qui est fait dans [D00].

On peut aussi par exemple utiliser une notion très importante (et aussi relativement récente) qui est l'ordre de DEHORNOY. Si l'on admet l'existence (difficile à établir) de cet ordre qui a le bon goût d'être total et d'être invariant par translation à gauche, il est aussi clair que ce groupe \mathcal{B}_n est sans torsion. \square

Conclusion

Le groupe des tresses, bien qu'étudié depuis de nombreuses décennies, continue de donner lieu à des découvertes mathématiques relativement importantes, notamment les liens des tresses avec les systèmes autodistributifs (les ensembles munis d'une loi telle que $x(yz) = (xy)(xz)$) donnant des démonstrations très élégantes de l'existence de l'ordre de PATRICK DEHORNOY. Au passage, on a pendant assez longtemps cru qu'il fallait des extensions des axiomes de la théorie des ensembles ZF (notamment l'existence de grands cardinaux) pour établir l'existence de tels systèmes autodistributifs ayant des propriétés intéressantes.

Par ailleurs, les groupes de tresses d'ARTIN interviennent naturellement dans de nombreux domaines, ainsi, grâce à la théorie des tresses, on peut aborder sous d'autres angles la théorie des nœuds par exemple ou encore les diagrammes de FEYNMAN en physique.

Enfin, si les mathématiques donnent un formalisme précis pour l'étude d'objets concrets comme les tresses, certains théorèmes obtenus dans ce domaine sont néanmoins *inutisables*, ainsi d'un théorème de décomposition des tresses sous une certaine forme normale, ARTIN disait lui-même que si on voulait appliquer expérimentalement cette procédure sur une personne vivante, cela entraînerait

“ only violent protests and discrimination against mathematics ”

E. ARTIN (1898-1962), *Theory of braids*, 1947

A Programmes

A.1 Le retournement des mots pour résoudre le problème des mots dans le groupe des tresses \mathcal{B}_n

```
exception Terminaison;;

type lettre = D of int | I of int;;

(* Conversion d'un mot de tresse en une chaîne de caractères TeX *)
(* codage : lettre list -> string = <fun> *)

let codage=
  let rec chaine = function
    (D i)::l -> "\\sg{" ^ string_of_int i ^"} " ^ chaine l
  | (I i)::l -> "\\inv{\\sg{" ^ string_of_int i ^"}" } " ^ chaine l
  | []       -> "\\ \\n"
  in function
    [] -> "\varepsilon\\ \\n"
    | l -> chaine l
;;

(* Avancement d'une étape dans le retournement *)
(* etape : lettre list -> lettre list = <fun> *)

let rec etape = function
  (I i)::(D j)::l
    when i=j       -> l
| (I i)::(D j)::l
    when abs(i-j)=1 -> (D j)::(D i)::(I j)::(I i)::l
| (I i)::(D j)::l
    when abs(i-j)>1 -> (D j)::(I i)::l
| a::l             -> a::etape l
| []               -> raise Terminaison
;;

(* Mise en oeuvre du retournement complet d'un mot de tresse *)
(* retournement : lettre list -> lettre list list = <fun> *)

let retournement=
  let rec retourne mot=mot::
    try
      retourne (etape mot)
    with
      Terminaison -> []

  in retourne
;;

(* Décomposition d'un mot de la forme  $uv^{-1}$  en les deux mots  $u,v$  *)
(* decompose : lettre list -> lettre list * lettre list = <fun> *)

let decompose =
  let rec dec a b = function
    (D i)::l -> dec (D i::a) b l
```

```

| (I i)::l -> dec a (D i::b) l
| []       -> rev a,b

in dec [] []
;;

(* Calcul de l'inverse d'un mot de tresse *)
(* inverse : lettre list -> lettre list = <fun> *)

let inverse =
  let rec inv a = function
    []       -> a
  | (D i)::l -> inv (I i::a) l
  | (I i)::l -> inv (D i::a) l

  in inv []
;;

(* Function testant si un mot de tresse est équivalent au mot vide,
   en sauvegardant les étapes du calcul *)
(* neutralité_tresses : string -> lettre list -> unit = <fun> *)

let neutralité_tresses f a=
  let liste=retournement a
  in let n,d=decompose (hd (rev liste))
  in let liste'=retournement (inverse d@n)
  in let f=open_out_bin f
  in output_string f ("$$\omega=" ^ codage a ^ "$$\n");
  output_string f "\\paragraph{Première étape}\n";
  output_string f "$$\begin{array}{l}\n";
  do_list (output_string f) (map codage liste);
  output_string f "\\end{array}$$\n";
  output_string f ("$$N\pa{\omega}=" ^ (codage n) ^
"\quad D\pa{\omega}=" ^ (codage d) ^ "$$");
  output_string f "\\paragraph{Seconde étape}\n";
  output_string f "$$\begin{array}{l}\n";
  do_list (output_string f) (map codage liste');
  output_string f "\\end{array}$$\n";
  close_out f
;;

(* Sauvegarde des étapes du retournement d'un mot de tresse *)
(* retournement_mot : string -> lettre list -> unit = <fun> *)
let retournement_mot f a=
  let liste=retournement a
  in let n,d=decompose (hd (rev liste))
  in let f=open_out_bin f
  in output_string f ("$$\omega=" ^ codage a ^ "$$\n");
  output_string f "\\paragraph{Retournement}\n";
  output_string f "$$\begin{array}{l}\n";
  do_list (output_string f) (map codage liste);
  output_string f "\\end{array}$$\n";
  output_string f ("$$N\pa{\omega}=" ^ (codage n) ^
"\quad D\pa{\omega}=" ^ (codage d) ^ "$$");
  close_out f

```

```
;;
```

```
(* Tests *)
```

```
neutralité_tresses "test1.tex" ([D 1;D 2;D 1]@(inverse [D 2;D 1;D 2]))
```

```
;;
```

```
retournement_mot "test2.tex" [I 3;I 3;D 2;I 1]
```

```
;;
```

Table des figures

1	Configuration associée à σ_i	6
2	Configuration associée à σ_i^{-1}	6
3	Illustration de l'égalité $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$	6
4	Illustration de l'égalité $\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i$ si $ i - j > 1$	7
5	Un exemple concret de tresse géométrique	8
6	Tresse géométrique associée à σ_3 pour $n = 6$	10
7	Configuration associée à la tresse de la figure 5	13
8	Configuration associée au mot obtenu après le retournement du mot ω	14
9	Configuration associée à la tresse τ	15

Bibliographie

- [K99] CHRISTIAN KASSEL. *L'ordre de DEHORNOY sur les tresses*. Exposé numéro 865 donné au Séminaire NICOLAS BOURBAKI le 20 Novembre 1999.
- [B74] JOAN S. BIRMAN. *Braids, links and mapping class groups*. Princeton University Press and University of Tokyo Press, 1974. Annals of mathematics studies
- [MKS66] WILHELM MAGNUS, ABRAHAM KARASS, DONALD SOLITAR. *Combinatorial group theory : presentations of groups in terms of generators and relations*. Interscience, 1966.
- [D00] PATRICK DEHORNOY. *Braids and self-distributivity*. Livre à paraître.
<http://www.math.unicaen.fr/~dehornoy/book.html>
- [GH81] MARVIN J. GREENBERG, JOHN R. HARPER *Algebraic topology : a first course* Addison-Wesley, 1981.