PURETÉ (D'APRÈS OFER GABBER)

par

Joël Riou

`Id: gysin.tex,v 1.88 2007-12-22 14:18:29 cvs Exp`

Table des matières

Dans ces notes, on présente la nouvelle démonstration par Ofer Gabber du théorème de pureté cohomologique absolue, annoncée dans [**4**]. La section 1 rappelle la construction des classes de Chern en cohomologie étale. Celles-ci servent dans la section 2 qui consiste en la construction et l'étude des propriétés des morphismes de Gysin associés aux morphismes d'intersection complète lissifiables. Dans la section 3, ces morphismes de Gysin sont utilisés pour donner une formulation précise du théorème de pureté absolue (théorème 3.1). La démonstration du théorème de pureté (différente de celle rédigée dans [**2**]) s'appuie notamment sur les résultats de géométrie logarithmique établis dans [**10**].

Dans tout cet exposé, on fixe un entier naturel $n \geq 1$. Tous les schémas seront supposés être des schémas sur $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$. On note Λ le faisceau d'anneaux constant de valeur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, $\Lambda(1)$ le faisceau des racines n-ièmes de l'unité (pour la topologie étale) et $\Lambda(r)$ ses puissances tensorielles, auxquelles on peut donner un sens pour tout $r \in \mathbf{Z}$.

1. Classes de Chern

Dans cette section, on rappelle la construction des classes de Chern des fibrés vectoriels sur des schémas généraux à valeurs dans la cohomologie étale. On s'appuie sur le calcul de la cohomologie étale des fibrés projectifs de SGA 5 VII 2 et sur la méthode de [**6**]. Les démonstrations sont parfois différentes de celles de SGA 5 VII 3 : on s'est efforcé de donner une présentation aussi « économique » que possible.

À la différence de l'exposé oral qui utilisait un langage géométrique, dans ces notes, un fibré vectoriel est un Module $\mathcal{E}$ localement libre de rang fini et le fibré projectif de $\mathcal{E}$ est le fibré des hyperplans défini dans EGA II 4.1.1 : $\mathbf{P}(\mathcal{E}) = \operatorname{Proj} \mathbf{S}^\star\mathcal{E}$ où $\mathbf{S}^\star\mathcal{E}$ est l'Algèbre symétrique du $\mathcal{E}$.

Définition 1.1. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X. Le faisceau des sections inversibles de $\mathcal{L}$ est naturellement muni d'une structure de torseur sous le schéma en groupes $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. La classe d'isomorphisme de $\mathcal{L}$ définit donc un élément dans $H^1_{\text{ét}}(X, \mathbf{G}_{\mathrm{m}})$. On note $c_1(L) \in H^2_{\text{ét}}(X, \Lambda(1))$ l'image de cet élément par le morphisme de bord déduit de la suite exacte courte de Kummer :

$$0 \to \Lambda(1) \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{[n]} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to 0 \text{ (1)}.$$

Si $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}'$ sont deux fibrés en droites sur X, on a la relation d'additivité :

$$c_1(\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}') = c_1(\mathcal{L}) + c_1(\mathcal{L}') \in H^2(X, \Lambda(1)) \text{ (2)}.$$

Notons que les classes de Chern de fibrés en droites résident dans les degrés pairs de la cohomologie étale, elles commutent donc avec toutes les classes de cohomologie. Notons aussi que si $f\colon Y \to X$ est un morphisme et $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur X, alors $f^\star(c_1(\mathcal{L})) = c_1(f^\star\mathcal{L})$.

(1) Une grande liberté d'interprétation est laissée à l'imagination du lecteur au sujet des conventions de signes à utiliser dans cette définition de c_1. La même liberté me semblant exister dans SGA 4 pour le morphisme trace, il me paraît illusoire de faire davantage de zèle. Cependant, à un endroit de ces notes, ce choix ne sera pas neutre : il faut que les choix de signes soient mutuellement cohérents de sorte que l'on ait une compatibilité entre le degré des fibrés en droites sur la droite projective, le morphisme trace et la première classe de Chern (cf. démonstration du lemme 2.32).

(2) Il existe des théories cohomologiques « orientées » pour lesquelles cette propriété de la première classe de Chern n'est pas satisfaite, cf. [**9**].

***Théorème 1.2* (Formule du fibré projectif).** — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang constant r sur X. On note $\pi\colon \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ le fibré projectif de $\mathcal{E}$. On pose $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(X, \Lambda(1))$ [3]. Alors, les puissances $\xi^i \in H^{2i}(X, \Lambda(i))$ de ξ définissent un isomorphisme dans $\mathrm{D}(X_{ét}, \Lambda)$:*

$$(1, \xi, \dots, \xi^{r-1})\colon \bigoplus_{i=0}^{r-1} \Lambda(-i)[-2i] \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$$

D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, on peut supposer que X est le spectre d'un corps algébriquement clos k. On se ramène ainsi au calcul de l'algèbre de cohomologie étale des espaces projectifs sur k, cf. SGA 5 VII 2.

***Théorème 1.3*.** — *Il existe une unique manière de définir, pour tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X et tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$, des éléments $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}_{ét}(X, \Lambda(i))$ pour tout $i \in \mathbf{N}$ de sorte que si l'on définit la série formelle $c_t(\mathcal{E}) = \sum_{i\geq 0} c_i(\mathcal{E})t^i$, on ait les propriétés suivantes :*
- *la série formelle $c_t(\mathcal{E})$ ne dépend que de la classe d'isomorphisme du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur le $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X ;*
- *si $f\colon Y \to X$ est un morphisme de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas et $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur X, alors $f^\star(c_t(\mathcal{E})) = c_t(f^\star\mathcal{E})$;*
- *si $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ est une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X, on a la relation de Cartan-Whitney :*

$$c_t(\mathcal{E}) = c_t(\mathcal{E}')c_t(\mathcal{E}'') \ ;$$

- *si $\mathcal{L}$ est un fibré en droites sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X, la classe $c_1(\mathcal{L})$ est celle de la définition 1.1 et*

$$c_t(\mathcal{L}) = 1 + c_1(\mathcal{L})t \ .$$

On a alors les relations $c_0(\mathcal{E}) = 1$ et $c_i(\mathcal{E}) = 0$ pour $i > \operatorname{rk}\mathcal{E}$ pour tout fibré vectoriel $\mathcal{E}$ sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X.

La démonstration utilise plusieurs constructions géométriques :

***Proposition 1.4* (Principe de scindage I).** — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel de rang r. On note $\pi\colon \mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \to X$ le fibré des drapeaux complets de $\mathcal{E}$. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*
- *le fibré vectoriel $\pi^\star\mathcal{E}$ admet une filtration (canonique) $0 = \mathcal{M}_0 \subset \mathcal{M}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{M}_r = \pi^\star\mathcal{E}$ par des fibrés vectoriels de sorte que pour tout entier $1 \leq i \leq r$, le quotient $\mathcal{L}_i = \mathcal{M}_i/\mathcal{M}_{i-1}$ soit un fibré en droites ;*
- *le morphisme canonique $\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$ est un monomorphisme scindé dans $\mathrm{D}(X_{ét}, \Lambda)$.*

(3) Le faisceau $\mathcal{O}(1)$ est le faisceau fondamental sur $\mathbf{P}(\mathcal{E})$: c'est le quotient inversible de $\pi^\star\mathcal{E}$ par l'hyperplan universel.

La seule propriété non triviale réside dans le fait que $\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$ soit un monomorphisme scindé. En remarquant que la projection $\mathbf{Drap}(\mathcal{E}) \to X$ peut s'écrire comme un composé de r projections de fibrés projectifs, ceci se déduit de la formule du fibré projectif [(4)].

***Proposition 1.5* (Principe de scindage II).** — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit (E) : $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \xrightarrow{p} \mathcal{E}'' \to 0$ une suite exacte courte de fibrés vectoriels sur X. On note $\mathbf{Sect}(E)$ le X-schéma défini par le fait que pour tout X-schéma $f\colon Y \to X$, l'ensemble des X-morphismes $Y \to \mathbf{Sect}(E)$ s'identifie naturellement à l'ensemble des sections de la surjection de fibrés vectoriels $f^\star(p)\colon f^\star\mathcal{E} \to f^\star\mathcal{E}''$ sur Y [(5)]. Le Y-schéma $\mathbf{Sect}(E)$ est naturellement muni d'une structure de torseur sous le Y-schéma en groupes vectoriel d'homomorphismes $\mathbf{Hom}(\mathcal{E}'', \mathcal{E}')$. Notons $\pi\colon \mathbf{Sect}(E) \to X$ la projection. Les propriétés suivantes sont satisfaites :*
- *l'image inverse par $\pi\colon \mathbf{Sect}(E) \to X$ de la suite exacte de fibrés vectoriels E est (canoniquement) scindée ;*
- *le morphisme canonique $\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$.*

L'existence de $\mathbf{Sect}(E)$ est évidente, la question étant de nature locale sur X. Localement pour la topologie de Zariski sur X, la projection π est la projection depuis un espace affine, l'isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$ résulte alors de l'invariance par homotopie de la cohomologie étale pour les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas (SGA 4 XV 2.2).

Démontrons le théorème 1.3. Grâce aux propositions 1.4 et 1.5, l'unicité est évidente. Il s'agit donc de construire une théorie des classes de Chern satisfaisant les propriétés demandées. Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel (que l'on peut supposer de rang constant r) sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X. On considère le fibré projectif $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ sur X. On note $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$. D'après la formule du fibré projectif (théorème 1.2), il existe d'uniques éléments, notés $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(X, \Lambda(i))$ pour $1 \leq i \leq r$ tels que l'on ait la relation

$$\xi^r - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-1} + c_2(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \cdots + (-1)^r c_r(\mathcal{E}) = 0 \in H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r)) .$$

On pose $c_0(\mathcal{E}) = 1$ et $c_i(\mathcal{E}) = 0$ pour $i > r$. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un fibré en droites, $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \simeq X$ et $\mathcal{O}(1) \simeq \mathcal{E}$, ce qui montre que cette définition étend la précédente pour les fibrés en droites. La seule propriété non évidente est la formule de Cartan-Whitney. Par principe de scindage (propositions 1.4 et 1.5), il suffit d'établir la formule suivante :

***Lemme 1.6*.** — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Soit $(\mathcal{L}_i)_{1\leq i\leq r}$ une famille finie de fibrés en droites sur X, soit $\mathcal{E} = \bigoplus_{1\leq i\leq r} \mathcal{L}_i$ leur somme directe. Dans $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))$, on a la relation :*

$$\prod_{i=1}^{r} (\xi - c_1(\mathcal{L}_i)) = 0$$

(4) Plus précisément, Grothendieck a montré (cf. [**5**], ou SGA 6 VI 4.6 pour le même argument dans le cas de la K-théorie algébrique) que la théorie des classes de Chern permettait de calculer l'algèbre de cohomologie des fibrés de drapeaux, fussent-ils incomplets.

(5) Je remercie Dennis Eriksson de m'avoir signalé cette construction.

où $\xi = c_1(\mathcal{O}(1))$. *Autrement dit,*

$$c_t(\mathcal{E}) = \prod_{i=1}^{r} c_t(\mathcal{L}_i) \ .$$

L'argument qui suit est inspiré de [**11**]. Pour $1 \leq i \leq r$, on note H_i l'hyperplan projectif de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ défini par l'inclusion $\mathcal{L}_i \to \mathcal{E}$. Notons $\pi \colon \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to X$ la projection. Le morphisme canonique $\pi^\star\mathcal{L}_i \to \mathcal{O}(1)$ induit un isomorphisme sur l'ouvert complémentaire de H_i dans $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. On en déduit que l'élément $\xi - c_1(\mathcal{L}_i)$ de $H^2(X, \Lambda(1))$ peut être relevé en un élément x_i du groupe de cohomologie à supports $H^2_{H_i}(X, \Lambda(1))$ [6]. Le produit des éléments x_i vit naturellement dans le groupe de cohomologie à support $H^{2r}_{\cap_{1\leq i\leq r} H_i}(\mathbf{P}(E), \Lambda(i))$ qui est nul puisque l'intersection de ces r hyperplans est vide ; on en déduit la formule voulue par oubli du support.

Proposition 1.7. — *Soit $\mathcal{E}$ un fibré vectoriel sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X. Pour tout entier naturel i, on a l'égalité :*

$$c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E}) \ ;$$

autrement dit, on a une formule de changement de variables :

$$c_t(\mathcal{E}^\vee) = c_{-t}(\mathcal{E}) \ .$$

Grâce à la relation de Cartan-Whitney et au principe de scindage, on peut se ramener au cas où $\mathcal{E}$ est un fibré en droites. Cela résulte alors du fait que $c_1 \colon \operatorname{Pic}(X) \to H^2(X, \Lambda(1))$ soit un homomorphisme de groupes.

2. Morphismes de Gysin

Étant donné un morphisme d'intersection complète $X \xrightarrow{f} S$ entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas vérifiant certaines hypothèses techniques, on va construire un morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_f \colon \Lambda \to f^?\Lambda$ où $f^? = f^!(-d)[-2d]$ (d est la dimension relative virtuelle de f). Ces morphismes de Gysin seront compatibles à la composition des morphismes d'intersection complète.

L'essentiel de cette section est consacrée à la construction de ces morphismes de Gysin dans le cas des immersions régulières. Le morphisme trace permettra de faire la construction dans le cas des morphismes lisses. Ces deux définitions se recolleront pour donner la définition 2.33 dans le cas général et le théorème 2.34 établira la compatibilité à la composition de ces morphismes de Gysin.

2.1. Première classe de Chern d'un pseudo-diviseur. — Soit $\mathcal{L}$ un fibré en droites sur un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma X, Z un fermé de X et U l'ouvert complémentaire. On suppose donnée une section inversible $s \colon \mathcal{O}_U \xrightarrow{\sim} \mathcal{L}_{|U}$. Au couple $(\mathcal{L}, s)$ est canoniquement associée une classe $c_1(\mathcal{L}, s) \in H^2_Z(X, \Lambda(1))$ induisant $c_1(\mathcal{L}) \in H^2(X, \Lambda(1))$ par oubli du support (construire un élément de $H^1_Z(X, \mathbf{G}_\mathrm{m})$ et utiliser la suite exacte de Kummer).

[6] Pour le moment, peu importe de fixer un relèvement canonique.

La classe $c_1(\mathcal{L}, s)$ définit un morphisme $\Lambda_Z = \Lambda_X/\Lambda_U \to \Lambda_X(1)\,[2]$ dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$. En « composant » un tel morphisme avec une classe de cohomologie de Z représentée par un morphisme $\Lambda_Z \to \Lambda_Z(q)\,[p]$, il vient que $c_1(\mathcal{L}, s)$ induit des morphismes

$$\mathrm{Gys}_{(\mathcal{L},s)} \colon H^p(Z, \Lambda(q)) \to H^{p+2}_Z(X, \Lambda(q+1))\ .$$

Définition 2.1. — Si $Z \to X$ est une immersion régulière de codimension 1 définie par un Idéal (inversible) $\mathcal{I}$, on pose $\mathrm{Gys}_{Z\subset X} = \mathrm{Gys}_{(\mathcal{I},1_{X-Z})}$.

On prendra garde au fait que *via* les identifications usuelles, le faisceau inversible $\mathcal{I}$ et le diviseur effectif Z ont des classes opposées dans le groupe de Picard de X.

2.2. Classes fondamentales généralisées. — Pour étudier la compatibilité à la composition des classes fondamentales définies dans [**2**, §1] dans le cas des immersions régulières (cf. SGA 6 VII 1.4), Ofer Gabber définit une classe fondamentale généralisée pour une immersion fermée $Y \to X$ définie par un Idéal de type fini $\mathcal{I}$. Cette construction n'est plus limitée aux immersions régulières et est compatible aux changements de bases arbitraires, mais elle dépend d'une donnée supplémentaire, à savoir celle d'un fibré vectoriel sur Y se surjectant sur le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Y} = \mathcal{I}/\mathcal{I}^2$.

2.2.1. Éclatement modifié. — Soit $Y \to X$ une immersion fermée entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas définie par un Idéal de type fini $\mathcal{I}$. On note U l'ouvert complémentaire. Soit $\mathcal{E} \to \mathcal{N}_{X/Y}$ un épimorphisme de Modules sur Y où $\mathcal{E}$ est un Module localement libre de rang fini. On définit une $\mathcal{O}_X$-Algèbre graduée quasi-cohérente $\mathcal{A}_\star$ par produit fibré de façon à avoir un carré cartésien de $\mathcal{O}_X$-Modules, pour tout entier naturel n :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A}_n \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{I}^n \arrow[d] \\ \mathbf{S}^n\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1} \end{tikzcd}$$

où l'algèbre symétrique $\mathbf{S}^\star\mathcal{E}$ est prise sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{O}_Y = \mathcal{O}_X/\mathcal{I}$.

Définition 2.2. — On pose $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}} = \mathrm{Proj}\,\mathcal{A}_\star$ et on note $\pi\colon\ \mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}} \to X$ la projection.

Remarque 2.3. — Si $Y \to X$ est une immersion fermée régulière et que $\mathcal{E} \to \mathcal{N}_{X/Y}$ est un isomorphisme, $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ s'identifie à l'éclaté de Y dans X. C'est ce cas particulier que l'on généralise ici en vue d'obtenir une construction compatible aux changements de base.

Proposition 2.4. — *L'Algèbre $\mathcal{A}_0$ est isomorphe à $\mathcal{O}_X$, les Modules $\mathcal{A}_n$ sont de type fini, l'Algèbre graduée $\mathcal{A}_\star$ est engendrée par $\mathcal{A}_1$ et on a un isomorphisme canonique de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathcal{A}_\star \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X/\mathcal{I} \xrightarrow{\sim} \mathbf{S}^\star\mathcal{E}$.*

L'assertion concernant $\mathcal{A}_0$ est tautologique. Soit n un entier naturel. Comme $\mathcal{I}^n \to \mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$ est un épimorphisme, la projection $\mathcal{A}_n \to \mathbf{S}^n\mathcal{E}$ est aussi un épimorphisme et si on note $\mathcal{K}_n$ son noyau, on a un isomorphisme $\mathcal{K}_n \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}^{n+1}$. Par dévissage, il en résulte que $\mathcal{A}_n$ est un Module de type fini.

Puisque $\mathbf{S}^n\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_X/\mathcal{I}$-Module, $\mathcal{K}_n$ contient $\mathcal{I}\cdot\mathcal{A}_n$. Comme $\mathcal{E}\to\mathcal{I}/\mathcal{I}^2$ est un épimorphisme, le morphisme $\mathbf{S}^n\mathcal{E}\to\mathcal{I}^n/\mathcal{I}^{n+1}$ est aussi un épimorphisme, ce qui implique que la projection $\mathcal{A}_n\to\mathcal{I}^n$ est un épimorphisme. Par conséquent, l'inclusion $\mathcal{I}\cdot\mathcal{A}_n\to\mathcal{I}\cdot\mathcal{I}^n=\mathcal{I}^{n+1}\simeq\mathcal{K}_n$ est un isomorphisme : $\mathcal{K}_n=\mathcal{I}\cdot\mathcal{A}_n$. Ceci permet d'obtenir l'isomorphisme $\mathcal{A}_\star\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X/\mathcal{I}\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathcal{E}$.

Pour montrer que le morphisme évident $\mathcal{A}_1^{\otimes n}\to\mathcal{A}_n$ de Modules est un épimorphisme, il suffit, d'après le lemme de Nakayama, de le tester après passage aux corps résiduels de X. Au-dessus de l'ouvert U, c'est évident ; au-dessus de Y, cela résulte de l'isomorphisme $\mathcal{A}_\star\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_X/\mathcal{I}\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathcal{E}$.

Corollaire 2.5. — *Le morphisme $\pi\colon \mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}\to X$ est projectif et on dispose d'isomorphismes canoniques $\pi^{-1}(U)\xrightarrow{\sim}U$ et $\pi^{-1}(Y)\simeq\mathbf{P}(\mathcal{E})$.*

L'isomorphisme au-dessus de U est évident. Compte tenu de EGA II 3.5.3, celui décrivant $\pi^{-1}(Y)$ se déduit de l'isomorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Algèbres graduées $\mathcal{A}_\star\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_Y\xrightarrow{\sim}\mathbf{S}^\star\mathcal{E}$.

Proposition 2.6. — *Soit $p\colon X'\to X$ un morphisme. On pose $Y'=Y\times_X X'$ et $\mathcal{E}'=p^\star\mathcal{E}$. On dispose d'un épimorphisme évident $\mathcal{E}'\to\mathcal{N}_{X'/Y'}$. Le morphisme canonique*

$$\mathrm{Bl}^{X'}_{Y',\mathcal{E}'}\to\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}\times_X X'$$

est une nil-immersion.

Notons $\mathcal{A}'_\star$ la $\mathcal{O}_{X'}$-Algèbre graduée quasi-cohérente donnant naissance à $\mathrm{Bl}^{X'}_{Y',\mathcal{E}'}$. On dispose d'un morphisme évident $p^\star\mathcal{A}_\star\to\mathcal{A}'_\star$ de $\mathcal{O}_{X'}$-Algèbres graduées quasi-cohérentes. Pour tout entier, le morphisme $p^\star\mathcal{A}_n\to\mathcal{A}'_n$ est un morphisme entre $\mathcal{O}_{X'}$-Modules de type fini ; pour montrer qu'il s'agit d'un épimorphisme, d'après le lemme de Nakayama, il suffit de vérifier que ce morphisme induit un isomorphisme d'une part au-dessus de $U'=X'-Y'$ (c'est évident) et d'autre part modulo l'idéal $\mathcal{I}'$ définissant Y' dans X' (cela résulte de la description donnée dans la proposition 2.4). Le morphisme

$$\mathrm{Bl}^{X'}_{Y',\mathcal{E}'}\to\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}\times_X X'$$

s'identifie au X'-morphisme évident $\operatorname{Proj}\mathcal{A}'_\star\to\operatorname{Proj}p^\star\mathcal{A}_\star$ (EGA II 3.5.3) ; d'après ce qui précède, il s'agit d'une immersion fermée. Le fait que ce morphisme induise un isomorphisme au-dessus de $p^{-1}(U)$ et de $p^{-1}(Y)$ permet d'en déduire aussitôt que le morphisme induit au niveau des schémas réduits associés

$$(\mathrm{Bl}^{X'}_{Y',\mathcal{E}'})_{\text{réd}}\to(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}\times_X X')_{\text{réd}}$$

est un isomorphisme.

2.2.2. Définition des classes. — On se donne toujours une immersion fermée $i\colon Y\to X$ définie par un Idéal $\mathcal{I}$ de type fini. On note $j\colon U\to X$ l'inclusion de l'ouvert complémentaire ($\mathcal{I}$ étant de type fini, j est un morphisme de type fini). On suppose donné un épimorphisme de $\mathcal{O}_Y$-Modules $\mathcal{E}\to\mathcal{N}_{X/Y}$ avec $\mathcal{E}$ est localement libre de rang fini. On note $\pi\colon\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}\to X$ la projection de l'éclatement modifié, $j'\colon U\to\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ l'immersion ouverte évidente et

$i'\colon \mathbf{P}(\mathcal{E}) \to \mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ l'immersion fermée donnée par le corollaire 2.5. On note r le rang du fibré vectoriel $\mathcal{E}$ que l'on suppose de rang constant pour simplifier et on suppose $r > 0$.

On a ainsi le diagramme suivant de schémas, où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(\mathcal{E}) \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "\pi'"] & \mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}} \arrow[d, "\pi"] & U \arrow[l, "j'"'] \arrow[d, equal] \\
Y \arrow[r, "i"] & X & U \arrow[l, "i'"']
\end{tikzcd}$$

Proposition 2.7. — *Le morphisme évident $\Lambda \to \mathbf{R}\pi'_\star\Lambda$ dans $\mathrm{D}(Y_{ét}, \Lambda)$ est un monomorphisme scindé : la formule du fibré projectif identifie son conoyau à*

$$\bigoplus_{k=1}^{r-1} \Lambda(-k)\,[-2k] \ .$$

Les morphismes évidents définissent un triangle distingué :

$$\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda \to i_\star\,\mathrm{coker}(\Lambda \to \mathbf{R}\pi'_\star\Lambda) \xrightarrow{0} \Lambda\,[1]$$

dans $\mathrm{D}(X_{ét}, \Lambda)$. On peut le récrire sous la forme

$$\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda \xrightarrow{\rho} \bigoplus_{k=1}^{r-1} i_\star\Lambda(-k)\,[-2k] \xrightarrow{0} \Lambda\,[1] \ ,$$

le morphisme ρ admettant une section canonique donnée par les éléments $c_1(\mathcal{O}(1), 1_U)^k$ de $H^{2k}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}, \Lambda(k))$, identifiés à des morphismes $i_\star\Lambda(-k)\,[-2k] \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda$ dans $\mathrm{D}(X_{ét}, \Lambda)$.

On note L une résolution injective du faisceau constant Λ vu comme faisceau de Λ-modules sur le grand site étale des schémas de type fini sur X. Pour tout morphisme de type fini $W \xrightarrow{p} X$, on note $L_{|W}$ le complexe de faisceau de Λ-modules sur $W_{\text{ét}}$ induit par L ; on peut le voir comme un objet de $\mathrm{D}(W_{\text{ét}}, \Lambda)$ isomorphe à Λ.

Lemme 2.8. — *Le carré commutatif évident de complexes de faisceaux sur $X_{ét}$ est homotopiquement bicartésien :*

$$\begin{tikzcd}
L_{|X} \arrow[r] \arrow[d] & i_\star L_{|Y} \arrow[d] \\
\pi_\star L_{|\,\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}} \arrow[r] & \pi_\star i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}
\end{tikzcd}$$

(ceci signifie par exemple que le complexe simple associé à ce diagramme, identifié à un complexe 3*-uple, est acyclique).*

Les complexes simples associés aux complexes doubles

$$j_! L_{|U} \to L_{|X} \to i_\star L_{|Y}$$

et

$$j'_! L_{|U} \to L_{|\,\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}} \to i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}$$

de faisceaux sur X et $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ respectivement sont acycliques. Choisissons un foncteur de résolution « flasque » additif r sur la catégorie des faisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}_{\text{ét}}}$ et notons abusivement $\mathbf{R}\pi_\star$ le foncteur (additif) de la catégorie des complexes (bornés inférieurement) de faisceaux de Λ-modules sur $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ vers la catégorie des complexes de faisceaux de Λ-modules sur X défini par la formule $\mathbf{R}\pi_\star K = \mathrm{Tot}(\pi_\star rK)$, ce foncteur préserve les quasi-isomorphismes et induit le foncteur $\mathbf{R}\pi_\star\colon \mathrm{D}^+(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}_{\text{ét}}}, \Lambda) \to \mathrm{D}^+(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ usuel.

On obtient ainsi un diagramme commutatif de complexes de faisceaux de Λ-modules sur X :

$$\begin{tikzcd}
j_! L_{|U} \arrow[r] \arrow[d] & L_{|X} \arrow[r] \arrow[d] & i_\star L_{|Y} \arrow[d] \\
\mathbf{R}\pi_\star j'_! L_{|U} \arrow[r] & \mathbf{R}\pi_\star L_{|\,\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}} \arrow[r] & \mathbf{R}\pi_\star i'_\star L_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}
\end{tikzcd}$$

Les lignes de ce diagramme constituent des complexes doubles dont les complexes simples associés sont acycliques. D'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre, le morphisme $j_! L_{|U} \to \mathbf{R}\pi_\star j'_! L_{|U}$ est un quasi-isomorphisme. On en déduit que le carré de droite est homotopiquement bicartésien, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition 2.7, la formule du fibré projectif pour $\mathbf{P}(\mathcal{E})$ implique que l'on a un triangle distingué dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$i_\star\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star i'_\star\Lambda \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_\star\Lambda(-i)\,[-2i] \xrightarrow{0} i_\star\Lambda\,[1] \ .$$

En considérant les colonnes du carré homotopiquement bicartésien donné par le lemme, on peut conclure à l'existence d'un triangle distingué

$$\Lambda \to \mathbf{R}\pi_\star\Lambda \to \bigoplus_{i=1}^{r-1} i_\star\Lambda(-i)\,[-2i] \to \Lambda\,[1] \ .$$

Ce triangle est scindé par les puissances de l'élément $c_1(\mathcal{O}(1), 1_U)$; le morphisme de droite est donc nul, ce qui achève la démonstration de la proposition.

Corollaire 2.9. — *La suite suivante, dont les morphismes sont évidents, est exacte :*

$$0 \to H^{2r}_Y(X, \Lambda(r)) \to H^{2r}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}, \Lambda(r)) \to \mathrm{coker}(H^{2r}(Y, \Lambda(r)) \to H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(r))) \to 0$$

L'énoncé de ce corollaire serait bien évidemment juste en tout bidegré (p, q) au lieu de $(2r, r)$, mais nous n'utiliserons que ce cas particulier.

On note $\mathrm{Gys}\colon H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(q)) \to H^{p+2}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}, \Lambda(q+1))$ le morphisme de Gysin associé au pseudo-diviseur $(\mathcal{O}(1), 1_U)$ sur $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ et $\xi = c_1(\mathcal{O}(1)) \in H^2(\mathbf{P}(\mathcal{E}), \Lambda(1))$. Le lemme suivant est évident :

Lemme 2.10. — *Le morphisme composé*

$$H^p(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(q)) \overset{\mathrm{Gys}}{\to} H^{p+2}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}},\Lambda(q+1)) \to H^{p+2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(q+1)) \ ,$$

où la flèche de droite est le morphisme de restriction, est la multiplication par ξ.

Définition 2.11. — On définit un élément $\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}}$ de $H^{2r-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(r-1))$ par la formule :

$$\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}} = -\left[\xi^{r-1} - c_1(\mathcal{E})\xi^{r-2} + \cdots + (-1)^{r-1}c_{r-1}(\mathcal{E})\right] \ .$$

Le lemme suivant résulte aussitôt de la construction des classes de Chern :

Lemme 2.12. — *Dans $H^{2r}(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(r))$, on a l'égalité*

$$\xi\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E}) \ .$$

Définition 2.13. — Compte tenu du corollaire 2.9, les lemmes 2.10 et 2.12 montrent que l'élément $\mathrm{Gys}(\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}}) \in H^{2r}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}},\Lambda(r))$ provient par restriction d'un unique élément de $H^{2r}_Y(X,\Lambda(r))$, noté $\mathrm{Cl}_{i,\mathcal{E}}$.

2.2.3. Propriétés des classes généralisées. —

Proposition 2.14. — *La formation des classes généralisées $\mathrm{Cl}_{i,\mathcal{E}}$ et $\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}}$ est compatible à tout changement de base $X' \to X$.*

Compte tenu de la proposition 2.6, ceci résulte aussitôt des définitions.

Proposition 2.15. — *Soit $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ un épimorphisme de Modules localement libres sur Y. Soit $\mathcal{K}$ le noyau de cet épimorphisme. On suppose que $\mathcal{E}'$ est de rang constant r'. On a alors la relation*

$$\mathrm{Cl}_{i,\mathcal{E}'} = (-1)^{r'-r}c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \mathrm{Cl}_{i,\mathcal{E}}$$

dans $H^{2r'}_Y(X,\Lambda(r'))$ où on a utilisé les accouplements canoniques

$$H^a(Y,\Lambda(b)) \otimes H^{a'}_Y(X,\Lambda(b')) \to H^{a+a'}_Y(X,\Lambda(b+b')) \ .$$

On dispose d'une immersion fermée de $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}}$ dans $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}'}$, ce qui permet de considérer la composition suivante de flèches de restriction :

$$H^{2r'}_Y(X,\Lambda(r')) \to H^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathcal{E}')}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}'},\Lambda(r')) \to H^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}},\Lambda(r')) \ .$$

Cette composée étant injective, il s'agit de montrer que les images des deux éléments considérés dans $H^{2r'}_{\mathbf{P}(\mathcal{E})}(\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathcal{E}},\Lambda(r'))$ sont égales, mais comme ces deux éléments sont naturellement définis comme étant des images d'éléments de $H^{2r'-2}(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(r'-1))$ par le morphisme Gys associé au fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ sur $\mathrm{Bl}^X_{Y,\mathbf{P}(\mathcal{E})}$ canoniquement trivialisé sur U, on se ramène à montrer l'égalité

$$\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}'_{|\mathbf{P}(\mathcal{E})}} = (-1)^{r'-r}c_{r'-r}(\mathcal{K}) \cdot \mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}}$$

dans $H^{2r'}(\mathbf{P}(\mathcal{E}),\Lambda(r'))$. Ceci ne fait plus intervenir que le schéma Y et l'épimorphisme $\mathcal{E}' \to \mathcal{E}$ de fibrés vectoriels sur Y. Il s'agit d'une identité « universelle » dans cette situation ; on peut appliquer le principe de scindage et faire une récurrence sur la différence $r' - r$

pour se ramener au cas où $r' = r+1$, c'est-à-dire que $\mathcal{K}$ est un fibré en droites. Les relations de Cartan-Whitney entre les classes de Chern de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ et $\mathcal{K}$ donnent aussitôt l'égalité

$$\mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}'|\mathbf{P}(\mathcal{E})} = [\xi \mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}} - (-1)^r c_r(\mathcal{E})] - c_1(\mathcal{K}) \cdot \mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}} \ ,$$

ce qui donne bien la relation voulue puisque $\xi \mathrm{Clf}_{i,\mathcal{E}} = (-1)^r c_r(\mathcal{E})$ (cf. lemme 2.12).

2.3. Immersions régulières. — On rappelle que la notion d'immersion régulière est définie dans SGA 6 VII 1.4.

Définition 2.16. — Soit $i\colon Y \to X$ une immersion régulière entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. On pose $i^? = i^\star(c)\,[2c] : \mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ où c est la codimension de i. On définit un morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda$ dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ de la façon suivante. Quitte à décomposer Y en réunion disjointe d'ouverts-fermés, on peut supposer que la codimension c de i est constante. Si $c = 0$, i est l'inclusion d'un ouvert, Cl_i est l'isomorphisme évident. Dans le cas où $c > 0$, choisissons un ouvert U de X dans lequel Y est un sous-schéma fermé, notons $i'\colon Y \to U$ cette immersion fermée. Le faisceau conormal $\mathcal{N}_{X/Y}$ de Y dans X est un fibré vectoriel de rang c sur Y muni de l'épimorphisme tautologique $\mathcal{N}_{X/Y} \to \mathcal{N}_{X/Y}$; on peut donc considérer la classe $\mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_{i',\mathcal{N}_{X/Y}} \in H^{2c}_Y(U, \Lambda(c))$, que l'on identifie à un morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i'^?\Lambda \simeq i^?\Lambda$ dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$; il est évident que la construction ne dépend pas de l'ouvert intermédiaire U.

Le théorème suivant généralise l'énoncé établi dans [**2**, proposition 1.2.1] :

Théorème 2.17. — *Si $Z \xrightarrow{i} Y$ et $Y \xrightarrow{j} X$ sont deux immersions régulières composables, le diagramme suivant est commutatif dans* $\mathrm{D}(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ *:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{j\circ i}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?(\mathrm{Cl}_j)"] \\ & i^?j^?\Lambda \end{tikzcd}$$

On peut évidemment supposer que les immersions i et j sont des immersions fermées et que les codimensions de i et de j sont constantes, de valeurs respectives m et n. Si $m = 0$ ou $n = 0$, c'est trivial ; on suppose donc que $m > 0$ et $n > 0$.

Lemme 2.18. — *On peut supposer que $n = 1$ (*i.e.* j est de codimension 1).*

On éclate Y dans X pour obtenir le diagramme suivant où les carrés sont cartésiens :

$$\begin{tikzcd} P' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "p'"] & P \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & X_Y \arrow[d, "\pi"] \\ Z \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$$

L'idée de la démonstration est d'utiliser une sorte de formule d'excès d'intersection (cf. [**3**, theorem 6.3] pour une formulation dans la théorie de Chow) pour les immersions $j \circ i\colon Z \to$

X et $j\colon Y \to X$ relativement au changement de base $\pi\colon X_Y \to X$ qui va faire chuter la codimension de ces immersions fermées régulières.

On a des isomorphismes canoniques $P = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y})$ et $P' = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Y_{|Z}})$. On vérifie facilement que $P \to X_Y$ est une immersion fermée régulière de codimension 1. Par changement de base lisse, $P' \to P$ est une immersion fermée régulière de codimension m. On suppose que $i'^{?}(\mathrm{Cl}_{j'}) \circ \mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_{j' \circ i'}$ et on veut montrer que $i^{?}(\mathrm{Cl}_j) \circ \mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_{j \circ i}$. Les morphismes à comparer s'identifient à des éléments de $H^{2(m+n)}_Z(X, \Lambda(m+n))$ (on fera ce type d'identifications jusqu'à la fin de la démonstration). La proposition 2.7 implique que l'application

$$\pi^\star\colon H^{2(m+n)}_Z(X, \Lambda(m+n)) \to H^{2(m+n)}_{P'}(X_Y, \Lambda(m+n))$$

est injective, il suffit donc de comparer les classes après application de $\pi^\star$.

Considérons $\pi^\star(\mathrm{Cl}_{j\circ i}) \in H^{2(m+n)}_{P'}(X_Y, \Lambda(m+n))$. La classe $\mathrm{Cl}_{j\circ i}$ est la classe généralisée $\mathrm{Cl}_{j\circ i, \mathcal{N}_{X/Z}}$, la proposition 2.14 implique l'égalité

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = \mathrm{Cl}_{j'\circ i', \pi^\star \mathcal{N}_{X/Z}}$$

où est sous-entendu l'épimorphisme de fibrés vectoriels $p'^\star \mathcal{N}_{X/Z} \to \mathcal{N}_{X_Y/P'}$ dont on note $\mathcal{E}'$ le noyau, qui est un $\mathcal{O}_{P'}$-Module localement libre de rang $n-1$. La proposition 2.15 donne alors l'égalité

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot \mathrm{Cl}_{j'\circ i'}$$

où l'on a utilisé l'accouplement

$$H^{2(n-1)}(P', \Lambda(n-1)) \times H^{2(m+1)}_{P'}(X_Y, \Lambda(m+1)) \to H^{2(m+n)}_{P'}(X_Y, \Lambda(m+n))\ .$$

La composition des classes admise provisoirement pour les immersions j' et i' donne l'égalité

$$\mathrm{Cl}_{j'\circ i'} = \mathrm{Cl}_{i'} \cdot \mathrm{Cl}_{j'}$$

via l'accouplement

$$H^{2m}_{P'}(P, \Lambda(m)) \times H^2_P(X_Y, \Lambda(1)) \to H^{2(m+1)}_{P'}(X_Y, \Lambda(n+1))\ .$$

On a ainsi obtenu :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot \mathrm{Cl}_{i'} \cdot \mathrm{Cl}_{j'}\ .$$

Notons $\mathcal{E}$ le noyau de l'épimorphisme $p^\star\mathcal{N}_{X/Y} \to \mathcal{N}_{X_Y/P'}$. Il vient aussitôt que dans le diagramme évident de Modules sur P' qui suit, les lignes et les colonnes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & i'^\star\mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & i'^\star p^\star\mathcal{N}_{X/Y} \arrow[r] \arrow[d] & p'^\star\mathcal{N}_{X/Z} \arrow[r] \arrow[d] & p'^\star\mathcal{N}_{Y/Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & i'^\star\mathcal{N}_{X_Y/P} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N}_{X_Y/P'} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{N}_{P/P'} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

En particulier, on obtient un isomorphisme canonique $i'^\star\mathcal{E} \xrightarrow{\sim} \mathcal{E}'$, d'où $i'^\star c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \in H^{2(n-1)}(P', \Lambda(n-1))$. On en déduit :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = c_{n-1}(\mathcal{E}'^\vee) \cdot \mathrm{Cl}_{i'} \cdot \mathrm{Cl}_{j'} = \mathrm{Cl}_{i'} \cdot c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot \mathrm{Cl}_{j'} \ .$$

On utilise implicitement dans ces notations l'associativité des structures multiplicatives permettant par exemple de définir une application

$$H^{2m}_{P'}(P, \Lambda(m)) \times H^{2(n-1)}(P, \Lambda(n-1)) \times H^2_P(X_Y, \Lambda(1)) \to H^{2(m+n)}(X_Y, \Lambda(m+n))$$

sans qu'il y ait à s'inquiéter de l'ordre dans lequel les multiplications sont faites. Les propositions 2.15 et 2.14 impliquent les égalités suivantes :

$$c_{n-1}(\mathcal{E}^\vee) \cdot \mathrm{Cl}_{j'} = \mathrm{Cl}_{j', p^\star\mathcal{N}_{X/Y}} = \pi^\star \mathrm{Cl}_j \in H^{2n}_P(X_Y, \Lambda(n)) \ .$$

Le morphisme p étant lisse, on a aussitôt $\mathrm{Cl}_{i'} = \pi^\star \mathrm{Cl}_i$. On a ainsi obtenu l'égalité voulue :

$$\pi^\star \mathrm{Cl}_{j\circ i} = \pi^\star \mathrm{Cl}_i \cdot \pi^\star \mathrm{Cl}_j \ ,$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

On est ramené à établir le théorème 2.17 dans le cas où j est de codimension 1. On pose maintenant $P = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{X/Z})$ et $P' = \mathbf{P}(\mathcal{N}_{Y/Z})$. Le diagramme suivant récapitule la situation :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] & \pi^{-1}(Y) \arrow[r] & X_Z \arrow[dd, "\pi"] \\
P' \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & Y_Z \arrow[u] \arrow[d] & \\
Z \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "j"] & X
\end{tikzcd}$$

On veut établir l'égalité suivante dans $H^{2m+2}_Z(X,\Lambda(m+1))$:

$$\mathrm{Cl}_{j\circ i}=\mathrm{Cl}_i\cdot\mathrm{Cl}_j\ .$$

D'après la proposition 2.7, il suffit de vérifier cette égalité dans $H^{2m+2}_P(X_Z,\Lambda(m+1))$ après application de $\pi^\star$.

Par définition, la classe $\mathrm{Cl}_{j\circ i}\in H^{2m+2}_Z(X,\Lambda(m+1))$ se « restreint » en un élément

$$\gamma=\mathrm{Gys}_{P\subset X_Z}(\mathrm{Clf}_{j\circ i})$$

dans $H^{2m+2}_P(X_Z,\Lambda(m+1))$ où $\mathrm{Clf}_{j\circ i}\in H^{2m}(P,\Lambda(m))$.

Notons $\mathcal{I}$ l'Idéal de Y dans X, $\mathcal{I}_P$ celui de P dans X_Z et $\tilde{\mathcal{I}}$ celui de Y_Z dans X_Z. On a un isomorphisme canonique de faisceaux inversibles sur X_Z :

$$\pi^\star\mathcal{I}\simeq\mathcal{I}_P\otimes\tilde{\mathcal{I}}\ .$$

Cet isomorphisme est compatible aux trivialisations données sur $\pi^{-1}(V)$ où $V=X-Y$. On obtient ainsi une égalité dans le groupe des classes d'équivalences de tels pseudo-diviseurs, ce qui permet de décomposer $c_1(\pi^\star\mathcal{I},1_{\pi^{-1}(V)})\in H^2_{\pi^{-1}(V)}(X_Z,\Lambda(1))$ en une somme de deux composantes :

$$\pi^\star(c_1(\mathcal{I},1_V))=c_1(\pi^\star\mathcal{I},1_{\pi^{-1}(V)})=c_1(\mathcal{I}_P,1_{X_Z-P})+c_1(\tilde{\mathcal{I}},1_{X_Z-Y_Z})\ .$$

On en déduit une décomposition

$$\pi^\star\mathrm{Cl}_i\cdot\pi^\star\mathrm{Cl}_j=\alpha+\beta$$

dans $H^{2m+2}_P(X_Z,\Lambda(m+1))$ où

$$\begin{aligned}\alpha&=-\mathrm{Gys}_{P\subset X_Z}(\mathrm{Cl}_{i|P})\ ,\\ \beta&=-\mathrm{Gys}_{Y_Z\subset X_Z}(\mathrm{Gys}_{P'\subset Y_Z}(\mathrm{Clf}_i))\ .\end{aligned}$$

Le calcul de Cl_k où k est l'inclusion de l'intersection de diviseurs de Cartier s'intersectant transversalement dans le schéma ambiant réalisé dans [**2**, proposition 1.1.4] permet d'obtenir l'égalité d'opérateurs suivante :

$$\mathrm{Gys}_{Y_Z\subset X_Z}\circ\mathrm{Gys}_{P'\subset Y_Z}=\mathrm{Gys}_{P\subset X_Z}\circ\mathrm{Gys}_{P'\subset P}\ .$$

Notre but est d'établir l'égalité $\gamma=\alpha+\beta$. Les calculs précédents permettent d'écrire chacun des éléments α, β et γ comme des images par le morphisme $\mathrm{Gys}_{P\subset X_Z}$ de classes $\tilde\alpha$, $\tilde\beta$ et $\tilde\gamma$ dans $H^{2m}(P,\Lambda(m))$:

$$\begin{aligned}\tilde\alpha&=-\mathrm{Cl}_{i|P}\ ,\\ \tilde\beta&=-\mathrm{Gys}_{P'\subset P}(\mathrm{Clf}_i)\ ,\\ \tilde\gamma&=\mathrm{Clf}_{j\circ i}\ .\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à établir l'égalité $\tilde\gamma=\tilde\alpha+\tilde\beta$ dans $H^{2m}(P,\Lambda(m))$.

D'après les lemmes 2.10 et 2.12, on a $\mathrm{Cl}_{i|Z}=(-1)^m c_m(\mathcal{N}_{Y/Z})$. On en déduit l'égalité

$$\tilde\alpha=(-1)^{m+1}c_m(\mathcal{N}_{Y/Z})\ .$$

Pour calculer $\tilde{\beta}$, on observe que l'Idéal de P' dans P s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{K} \otimes_{\mathcal{O}_Z} \mathcal{O}(-1)$ où $\mathcal{K} = \mathcal{N}_{X/Y_{|Z}}$ est le noyau de l'épimorphisme $\mathcal{N}_{X/Z} \to \mathcal{N}_{Y/Z}$. On en déduit

$$\tilde{\beta} = (c_1(\mathcal{K}) - \xi) \cdot \left[\xi^{m-1} - c_1(\mathcal{N}_{Y/Z})\xi^{m-2} + \cdots + (-1)^{m-1} c_{m-1}(\mathcal{N}_{Y/Z})\right] \ .$$

Par ailleurs, la définition de $\tilde{\gamma}$ donne l'égalité :

$$\tilde{\gamma} = -\left[\xi^{m} - c_1(\mathcal{N}_{X/Z})\xi^{m-1} + (-1)^{m} c_{m}(\mathcal{N}_{X/Z})\right] \ .$$

La formule de Cartan-Whitney appliquée à la suite exacte courte

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{N}_{X/Z} \to \mathcal{N}_{Y/Z} \to 0$$

de fibrés vectoriels sur Z permet d'obtenir aussitôt la relation voulue $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} + \tilde{\beta}$, ce qui achève la démonstration du théorème.

La classe que l'on a définie est évidemment compatible avec celle de SGA $4\frac{1}{2}$[Cycle] 2.2 :

Proposition 2.19. — *Soit $i\colon Y \to X$ une immersion régulière de codimension c entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. Le morphisme de faisceaux $\Lambda \to \mathcal{H}^{2c}(i^!\Lambda(c))$ induit par le morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda$ est donné par la classe $\mathrm{cl}\,Y$ de SGA $4\frac{1}{2}$[Cycle] 2.2.*

2.4. Morphismes lisses. — Soit $p\colon X \to S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas de dimension relative d. D'après SGA 4 XVIII 2.9, on dispose d'un morphisme trace

$$\mathrm{Tr}_p\colon \mathbf{R}^{2d}p_!\Lambda(d) \to \Lambda \ ,$$

que l'on peut réinterpréter sous la forme d'un morphisme

$$\mathbf{R}p_!\Lambda(d)\,[2d] \to \Lambda$$

dans $\mathrm{D}(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ (en effet, d'après le théorème de changement de base pour un morphisme propre et SGA 4 X 4.3, les faisceaux $\mathbf{R}^i p_!\Lambda$ sont nuls pour $i > 2d$).

Définition 2.20. — Soit $p\colon X \to S$ un morphisme lisse compactifiable de $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas. Le morphisme $\mathrm{Cl}_p\colon \Lambda \to p^?\Lambda$ (7) dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ est le morphisme déduit par adjonction du morphisme $\mathbf{R}p_!\Lambda(d)\,[2d] \to \Lambda$ défini ci-dessus.

D'après SGA 4 XVIII 3.2.4, ce morphisme Cl_p est un isomorphisme : c'est la dualité de Poincaré.

Proposition 2.21. — *Si $f\colon Z \to Y$ et $g\colon Y \to X$ sont des morphismes lisses compactifiables composables, le diagramme suivant est commutatif dans $\mathrm{D}(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$:*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{j\circ i}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?(\mathrm{Cl}_j)"] \\ & i^?j^?\Lambda \end{tikzcd}$$

(7) On rappelle que l'on a posé $p^? = p^!(-d)\,[-2d]$ où d est la dimension relative de p.

Ceci est énoncé en SGA 4 XVIII 3.2.4 et résulte de la compatibilité des morphismes traces à la composition, cf. propriété (Var 3) dans SGA 4 XVIII 2.9.

Remarque 2.22. — Si cette théorie avait été à notre disposition, il eût peut-être été plus commode d'utiliser ici la construction des foncteurs $f^!$ pour f lissifiable mentionnée dans l'introduction de SGA 4 XVIII. Dans le cadre axiomatique des « foncteurs homotopiques stables », ceci est réalisé dans [**1**].

2.5. Morphismes d'intersection complète lissifiables. —

Définition 2.23. — Un morphisme d'intersection complète est un morphisme $X \xrightarrow{f} S$ admettant localement une factorisation sous la forme $X \xrightarrow{i} T \xrightarrow{p} S$ où p est lisse et i une immersion régulière (cf. SGA 6 VII 1.4). On pose $\operatorname{dim.rel.virt.} f = \dim p - \operatorname{codim} i$: c'est la dimension relative virtuelle de f (cf. SGA 6 VIII 1.9).

Définition 2.24. — On note $\mathcal{S}$ la catégorie dont les objets sont les $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas quasi-compacts admettant un faisceau inversible ample et dont les morphismes sont les morphismes de type fini entre de tels schémas. On note $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ la sous-catégorie de $\mathcal{S}$ ayant les mêmes objets mais dont les morphismes sont les morphismes d'intersection complète.

Dans $\mathcal{S}$, tout morphisme $X \to Y$ peut se factoriser sous la forme $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}^n_Y \xrightarrow{\pi} Y$ où i est une immersion et π la projection canonique. Tous les morphismes de $\mathcal{S}$ sont donc compactifiables, on peut leur appliquer le formalisme des foncteurs $\mathbf{R}f_!$ et $f^!$ de SGA 4.

Les morphismes de $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ admettent des factorisations globales dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme d'une immersion fermée régulière suivie d'un morphisme lisse.

Définition 2.25. — Pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$, on peut définir un foncteur

$$f^?\colon \mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda) \to \mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$$

par la formule $f^? = f^!(-d)\,[-2d]$ où $d = \operatorname{dim.rel.virt.} f$.

Les foncteurs $f^?$ sont les foncteurs image inverse pour une structure de catégorie fibrée convenable au-dessus de la catégorie $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$: on utilisera implicitement les isomorphismes de transitivité $f^?g^? \simeq (gf)^?$ associés à la composition de deux morphismes composables dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$.

Définition 2.26. — Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$. On suppose donnée une factorisation de f dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ où i est une immersion régulière et p un morphisme lisse. On définit un morphisme

$$\mathrm{Cl}_{p,i}\colon \Lambda \to f^?\Lambda$$

dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ comme étant le morphisme composé

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{p,i}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?(\mathrm{Cl}_p)"] \\ & f^?\Lambda \end{tikzcd}$$

où Cl_i est le morphisme de la définition 2.16 et Cl_p celui de la définition 2.20.

Théorème 2.27. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$. Si $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{p} S$ et $X \xrightarrow{i'} Y' \xrightarrow{p'} S$ sont deux factorisations du type envisagé dans la définition 2.26, alors les deux morphismes suivants dans la catégorie $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ sont égaux :*

$$\mathrm{Cl}_{p,i} = \mathrm{Cl}_{p',i'}\colon \Lambda \to f^?\Lambda\ .$$

La notation suivante s'avère assez commode pour cette démonstration :

Définition 2.28. — Si $f\colon Z \to Y$ et $g\colon Y \to X$ sont des morphismes composables dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$, $a\colon \Lambda \to g^?\Lambda$ et $b\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ des morphismes dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$ et $\mathrm{D}(Z_{\text{ét}}, \Lambda)$ respectivement, on pose $a\bigstar b = f^?(a) \circ b\colon \Lambda \to (g \circ f)^?\Lambda$.

Cette loi $\bigstar$ vérifiant une propriété d'associativité évidente, on omettra les parenthèses.

Par définition, on a ainsi : $\mathrm{Cl}_{p,i} = \mathrm{Cl}_p\bigstar\mathrm{Cl}_i$. On veut vérifier l'égalité $\mathrm{Cl}_p\bigstar\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_{p'}\bigstar\mathrm{Cl}_{i'}$. Quitte à introduire le produit fibré de Y et de Y' au-dessus de S, on peut supposer que « Y' coiffe Y », à savoir qu'il existe un morphisme lisse $q\colon Y' \to Y$ tel que $i = q \circ i'$ et $p' = p \circ q$:

$$\begin{tikzcd} & Y' \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "p'"] & \\ X \arrow[ur, "i'"] \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r, "p"] & S \end{tikzcd}$$

On a ainsi

$$\mathrm{Cl}_{p',i'} = \mathrm{Cl}_{p'}\bigstar\mathrm{Cl}_{i'} = \mathrm{Cl}_p\bigstar\mathrm{Cl}_q\bigstar\mathrm{Cl}_{i'}\ ,$$

la dernière égalité résultant de la proposition 2.21. On est ramené à montrer l'égalité $\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_q\bigstar\mathrm{Cl}_{i'}$. Pour cela, on introduit le produit fibré X' de X et Y' au-dessus de Y :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q'"] & Y' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[u, bend left, dotted, "s"] \arrow[ur, "i'"] \arrow[r, "i"'] & Y \end{tikzcd}$$

Le morphisme i' donne naissance à la section s de la projection $q'\colon X' \to X$. Le morphisme q étant lisse, l'immersion $j\colon X' \to Y'$ est régulière. Admettons provisoirement les égalités suivantes :

$$\mathrm{Cl}_{q'}\bigstar\mathrm{Cl}_s = \mathrm{id}_\Lambda\ , \qquad \mathrm{Cl}_q\bigstar\mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_i\bigstar\mathrm{Cl}_{q'}\ .$$

Il vient :

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}_i &= \mathrm{Cl}_i \bigstar \mathrm{Cl}_{q'} \bigstar \mathrm{Cl}_s \\ &= \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_s \ .\end{aligned}$$

On utilise alors la composition des morphismes de Gysin associés aux immersions régulières (cf. théorème 2.17). Celle-ci donne l'égalité $\mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{Cl}_{i'}$ qui permet de conclure que $\mathrm{Cl}_i = \mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_{i'}$. Les deux lemmes qui suivent permettent d'obtenir les deux égalités admises ci-dessus :

Lemme 2.29. — *Soit un diagramme cartésien dans $\mathcal{S}$:*

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "q'"] & Y' \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "i"] & Y \end{tikzcd}$$

On suppose que q est lisse et que i est une immersion régulière (donc j aussi). Alors on a l'égalité

$$\mathrm{Cl}_q \bigstar \mathrm{Cl}_j = \mathrm{Cl}_i \bigstar \mathrm{Cl}_{q'} \ .$$

On peut supposer que i est une immersion fermée. On identifie Cl_i (resp. Cl_j) à une classe dans $H^{2d}_X(Y, \Lambda(d))$ (resp. $H^{2c}_{X'}(Y', \Lambda(c))$) où c est la codimension de l'immersion régulière i. D'après la proposition 2.14, on a $q^\star(\mathrm{Cl}_i) = \mathrm{Cl}_j$. Bien que la vérification soit abracadabrante, la compatibilité du morphisme trace aux changements de base (propriété (Var 2) de SGA 4 XVIII 2.9) permet de conclure.

Lemme 2.30. — *Soit $p\colon X \to S$ un morphisme lisse dans $\mathcal{S}$ admettant une section $s\colon S \to X$ (qui est une immersion régulière). Alors, $\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{id}_\Lambda$ dans $\mathrm{D}(S_{ét}, \Lambda)$.*

Les endomorphismes de Λ dans $\mathrm{D}(S_{\text{ét}}, \Lambda)$ sont donnés par des sections du faisceau Λ dans S, il suffit de vérifier que les nombres obtenus en passant aux points génériques de S sont égaux à 1. Comme on peut supposer que S est réduit et que la construction est compatible avec le passage aux points génériques, on peut supposer que S est le spectre d'un corps k. Notons x l'image de $\operatorname{Spec} k$ dans X. Quitte à remplacer X par un voisinage ouvert, on peut supposer qu'il existe un morphisme étale $\pi\colon X \to \mathbf{A}^d_k$ identifiant x à l'image inverse de l'origine dans $\mathbf{A}^d_k$. En utilisant l'isomorphisme évident $H^{2d}_{(0,\dots,0)}(\mathbf{A}^d_k, \Lambda(d)) \xrightarrow{\sim} H^{2d}_x(X, \Lambda(d))$, on se ramène au lemme suivant :

Lemme 2.31. — *Pour tout entier naturel d et tout schéma $S \in \mathcal{S}$, si on note $p\colon \mathbf{A}^d_S \to S$ la projection et $s\colon S \to \mathbf{A}^d_S$ l'inclusion de l'origine, on a l'égalité*

$$\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{id}_\Lambda$$

dans $\mathrm{D}(S_{ét}, \Lambda)$.

L'énoncé est évident pour $d = 0$. Une récurrence évidente s'appuyant sur le théorème 2.17 et la proposition 2.21 permet de se ramener au cas où $d = 1$, et comme précédemment, on peut supposer que $S = \operatorname{Spec} k$ où k est un corps que l'on peut supposer séparablement clos. On se ramène finalement au lemme suivant :

Lemme 2.32. — *Pour tout corps séparablement clos k, si on note $p\colon \mathbf{P}^1_k \to \operatorname{Spec} k$ la projection et $s\colon \operatorname{Spec} k \to \mathbf{P}^1_k$ l'inclusion de 0, on a l'égalité*

$$\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_s = \mathrm{id}_\Lambda$$

dans $\mathrm{D}(\operatorname{Spec} k_{\acute{e}t}, \Lambda)$.

L'idéal de l'immersion fermée s s'identifie au faisceau inversible $\mathcal{O}(-1)$. Par définition, l'image $\mathrm{Cl}_{s|\mathbf{P}^1_k}$ de Cl_s dans $H^2(\mathbf{P}^1_k, \Lambda(1))$ est $c_1(\mathcal{O}(-1)) \cdot \mathrm{Clf}_s$. Mais $\mathrm{Clf}_s = -1$. Ainsi, $\mathrm{Cl}_{s|\mathbf{P}^1_k} = c_1(\mathcal{O}(1))$. Le degré du fibré en droites $\mathcal{O}(1)$ étant 1, on peut conclure en utilisant la commutativité du diagramme suivant (cf. SGA 4 XVIII 1.1.6) :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Pic}(\mathbf{P}^1_k) \arrow[r, "c_1"] \arrow[dr, "\deg"'] & H^2(\mathbf{P}^1_k, \Lambda(1)) \arrow[d, "\mathrm{Tr}_p", "\sim"'] \\
 & \Lambda
\end{tikzcd}$$

Définition 2.33. — Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$. On note $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ le morphisme $\mathrm{Cl}_{p,i}$ dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ défini à partir d'une factorisation de f dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ sous la forme $f = p \circ i$ avec i une immersion régulière et p un morphisme lisse. D'après le théorème 2.27, cette définition est indépendante de la factorisation.

Théorème 2.34. — *Si $X \xrightarrow{f} Y$ et $Y \xrightarrow{g} Z$ sont des morphismes composables dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$, le diagramme suivant est commutatif dans* $\mathrm{D}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$.

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_f"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{g\circ f}"'] & f^?\Lambda \arrow[d, "f^?(\mathrm{Cl}_g)"] \\
 & (g\circ f)^?\Lambda
\end{tikzcd}$$

Paraphrasant SGA 6 VIII 2.6, on choisit une factorisation $Y \xrightarrow{j} V' \xrightarrow{p'} Z$ dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ avec j une immersion régulière et p' lisse, et une immersion régulière $X \xrightarrow{i} \mathbf{P}^n_Y$, de façon à obtenir le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbf{P}^n_Y \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "p"] & \mathbf{P}^n_{V'} \arrow[d, "p''"] \\ & Y \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "g"'] & V' \arrow[d, "p'"] \\ & & Z \end{tikzcd}$$

En utilisant le théorème 2.17 et la proposition 2.21, on obtient

$$\mathrm{Cl}_{g\circ f} = (\mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_{p''}) \bigstar (\mathrm{Cl}_{j'} \bigstar \mathrm{Cl}_i) \ .$$

Le lemme 2.29 donne l'égalité :

$$\mathrm{Cl}_{p''} \bigstar \mathrm{Cl}_{j'} = \mathrm{Cl}_j \bigstar \mathrm{Cl}_p \ ,$$

ce qui permet d'obtenir :

$$\mathrm{Cl}_{g\circ f} = (\mathrm{Cl}_{p'} \bigstar \mathrm{Cl}_j) \bigstar (\mathrm{Cl}_p \bigstar \mathrm{Cl}_i) \ ,$$

où l'on reconnaît l'égalité $\mathrm{Cl}_{g\circ f} = \mathrm{Cl}_g \bigstar \mathrm{Cl}_f$.

Proposition 2.35. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$. On suppose que f est plat de dimension relative d. Alors le morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^?\Lambda$ correspond par adjonction au morphisme $\mathbf{R}f_!\Lambda(d)[2d] \to \Lambda$ donné par le morphisme trace $\mathrm{Tr}_f\colon \mathbf{R}^{2d}f_!\Lambda(d) \to \Lambda$.*

Compte tenu de la proposition 2.19, cela résulte de SGA $4\frac{1}{2}$[Cycle] 2.3.8 (i).

Remarque 2.36. — Si $f\colon X \to Y$ est un morphisme propre dans $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$ de dimension relative virtuelle d, le morphisme Cl_f permet de définir, pour tout $K \in \mathrm{D}^+(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, un morphisme $f_\star\colon H^p(X, f^\star K) \to H^{p-2d}(Y, K(-d))$, compatible à la composition. On peut aussi en définir une version à supports $f_\star\colon H^p_Z(X, f^\star K) \to H^{p-2d}_{Z'}(Y, K(-d))$ dès que Z et Z' sont des fermés de X et Y respectivement tels que $f(Z) \subset Z'$.

3. Théorème de pureté

L'objectif de cette section est de donner une démonstration du théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier. Soit Y un sous-schéma (fermé) de X qui est aussi régulier. On note $i\colon Y \to X$ l'immersion, et c sa codimension. Alors, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda = i^!\Lambda(c)\,[2c]$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$.*

Corollaire 3.2. — *Soit $f\colon X \to S$ un morphisme de type fini entre $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schémas réguliers. On suppose que X et S admettent un faisceau ample. Alors, le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda(d)[2d] \to f^!\Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$, où d désigne la dimension relative virtuelle de f.*

Définition 3.3. — Un couple régulier est un couple (X, Y) où X est un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma régulier et Y un sous-schéma fermé de X qui est régulier. On dit que (X, Y) est pur si la conclusion du théorème 3.1 est vraie pour l'inclusion de Y dans X. Si $\overline{y} \to Y$ est un point géométrique de Y, on dira que (X, Y) est pur en $\overline{y}$ si $(\mathrm{Cl}_i)_{\overline{y}}$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(\overline{y}_{\text{ét}}, \Lambda)$.

Le théorème 3.1 peut ainsi se reformuler en disant que tout couple régulier est pur. Dans la sous-section 3.1 sera introduite la notion de pureté ponctuelle qui consiste à étudier les couples réguliers de la forme (X, x) où X est un schéma local régulier de point fermé x. Pour démontrer le théorème de pureté, il suffira de savoir que les couples réguliers de cette forme sont purs. Dans la sous-section 3.2, on se ramènera au cas où l'anneau de coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ avec ℓ un nombre premier inversible sur les schémas réguliers considérés. Dans la sous-section 3.3, on établira quelques propriétés utiles concernant la pureté des couples réguliers donnés par des diviseurs. Comme dans la démonstration de [**2**], la démonstration de la pureté ponctuelle pour des schémas réguliers arbitraires se ramènera à celle des schémas réguliers qui sont de type fini sur un trait S (d'inégale caractéristique). Dans la sous-section 3.4, on obtiendra des conditions suffisantes pour montrer que des schémas réguliers de type fini sur S sont ponctuellement purs. La sous-section 3.5 donnera les énoncés de géométrie logarithmique permettant d'établir que si (X, M) est un log-schéma log-lisse sur un trait (muni de sa log-structure canonique) et que le schéma X est régulier, alors X est ponctuellement pur. La démonstration du théorème 3.1 sera donnée dans la sous-section 3.6. Elle utilisera les résultats des sous-sections précédentes ainsi que trois théorèmes de résolution des singularités que l'on peut résumer ainsi :

- utilisation d'altérations pour obtenir un schéma à réduction semi-stable à partir d'un schéma (normal) sur S (cf. [**15**, proposition 4.4.1]) ;
- résolution des singularités d'une action modérée d'un groupe fini sur un log-schéma log-régulier de façon à obtenir une action très modérée (cf. [**10**]) ;
- résolution des log-singularités des log-schémas log-réguliers (cf. [**10**]).

3.1. Pureté ponctuelle. —

Définition 3.4. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma local régulier. On dit que X est ponctuellement pur en son point fermé x si le morphisme $\mathrm{Cl}_i \colon \Lambda \to i^{?}\Lambda$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(x_{\text{ét}}, \Lambda)$ où $i \colon x \to X$ est l'inclusion du point fermé de X.

Un schéma local régulier est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si son hensélisé (resp. son hensélisé strict) l'est.

Définition 3.5. — Soit X un $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{n}\right]$-schéma. Si $x \in X$, on dit que X est ponctuellement pur au point x si le localisé de X en x est ponctuellement pur en son point fermé. On dit que X est ponctuellement pur s'il l'est en tous ses points.

La proposition suivante est [**2**, proposition 2.2.4]. La démonstration de cet article semble compliquée puisqu'elle passe par des résultats plus fins que ceux dont nous avons besoin. On en redonne donc une démonstration plus courte.

Proposition 3.6. — *Soit $i\colon Y\to X$ une immersion fermée entre schémas réguliers. Le nombre de conditions satisfaites parmi les trois suivantes ne peut pas être deux :*
(a) *Le couple régulier (X,Y) est pur ;*
(b) *Le schéma Y est ponctuellement pur ;*
(c) *Le schéma X est ponctuellement pur aux points situés dans l'image de Y.*

Soit $y\in Y$, notons $V(y)$ le localisé de Y en y et $V(x)$ celui de l'image x de y dans X. On a un diagramme de schémas :

$$\begin{tikzcd} y \arrow[r, "i_y"] \arrow[dr, "i_x"'] & V(y) \arrow[d, "i'"] \\ & V(x) \end{tikzcd}$$

La composition des morphismes de Gysin donne le diagramme commutatif suivant dans $\mathrm{D}(y_{\text{ét}},\Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_{i_y}"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{i_x}"'] & i_y^?\Lambda \arrow[d, "i_y^?\mathrm{Cl}_{i'}"] \\ & i_x^?\Lambda \end{tikzcd}$$

Sur ce diagramme, on voit aussitôt que (a) et (b) impliquent (c) et que (a) et (c) impliquent (b). Montrons que (b) et (c) impliquent (a). Il s'agit de montrer que pour tout point y de Y, le morphisme $i_y^\star\mathrm{Cl}_{i'}$ est un isomorphisme. On peut procéder par récurrence sur la dimension de $V(y)$. On peut ainsi supposer que le support d'un cône C du morphisme $\mathrm{Cl}_{i'}$ dans $\mathrm{D}(V(y)_{\text{ét}},\Lambda)$ est contenu dans $\{y\}$. Mézalor, le morphisme canonique $i_y^!C\to i_y^\star C$ est un isomorphisme ; le diagramme ci-dessus montre que $i_y^!C=0$, ce qui permet de conclure que $C=0$ et finalement d'obtenir (a).

Rappelons quelques propriétés importantes concernant la pureté ponctuelle :

Proposition 3.7 ([**2**, proposition 2.2.2]). — *Soit X un schéma local strictement hensélien régulier. Le complété $\hat{X}$ est ponctuellement pur en son point fermé si et seulement si X l'est.*

Proposition 3.8 ([**2**, corollary 2.2.3]). — *Soit k un corps premier. Si X est schéma régulier qui est un k-schéma, alors X est ponctuellement pur.*

3.2. Changement de coefficients. —

Proposition 3.9. — *Soit n un entier naturel non nul. Soit $n=\prod_{j=1}^k \ell_j^{\nu_j}$ la factorisation de n en produit de puissances de nombres premiers distincts. Un couple régulier (X,Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell_j^{\nu_j}\mathbf{Z}$ pour tout $j\in\{1,\dots,k\}$.*

Cela résulte aussitôt du lemme chinois et du fait que si m est un entier naturel divisant n, alors pour toute immersion fermée régulière $i\colon Y \to X$, le diagramme évident commute dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z})$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathrm{Cl}_i} & i^?\mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{Z}/m\mathbf{Z} & \xrightarrow{\mathrm{Cl}_i} & i^?\mathbf{Z}/m\mathbf{Z} \end{array}$$

Proposition 3.10. — *Soit ℓ un nombre premier. Pour tout entier $\nu \geq 1$, un couple régulier (X, Y) est pur relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ si et seulement s'il l'est relativement à l'anneau de coefficients $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$.*

En utilisant la résolution de Godement des faisceaux $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}(c)$ (où c est la codimension de l'immersion $i\colon Y \to X$) pour tout ν, on peut représenter les morphismes de Gysin $\mathrm{Cl}_i\colon \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z} \to i^?\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z})$ par des cocycles. Un tel cocycle pour ν_0 fixé induit pour tout entier $\nu \leq \nu_0$ un cocycle représentant le morphisme de Gysin à coefficients dans $\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$. Les propriétés élémentaires de la résolution de Godement font que, si on le souhaite, on peut en fait trouver une famille compatible de cocycles pour tout $\nu \in \mathbf{N}$.

Compte tenu de ces observations, une fois ces cocycles convenablement choisis, on dispose d'un cône privilégié $C(\nu)$ du morphisme $\mathrm{Cl}_i\colon \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z} \to i^?\mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z}$ dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^\nu\mathbf{Z})$ pour tout $\nu \in \mathbf{N}$ et de triangles

$$C(\mu) \longrightarrow C(\mu+\nu) \longrightarrow C(\nu) \longrightarrow C(\mu)[1]$$

dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \mathbf{Z}/\ell^{\mu+\nu}\mathbf{Z})$ pour tous $(\mu, \nu) \in \mathbf{N}^2$.

Par conséquent, si $C(1) = 0$, il vient que pour tout $\nu \geq 1$, $C(\nu) = 0$. Inversement, si $C(1)$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $C(\nu)$ pour tout $\nu \geq 1$.

3.3. Diviseurs réguliers. —

Définition 3.11. — Si X est un schéma et $\overline{x} \to X$ un point géométrique, on note $V(\overline{x})$ l'hensélisé strict de X en $\overline{x}$ et $i_{\overline{x}}\colon V(\overline{x}) \to X$ le morphisme canonique.

Proposition 3.12. — *Soit X un schéma régulier. Soit D un diviseur régulier de X. Le couple régulier (X, D) est pur si et seulement si pour tout point géométrique $\overline{x} \to D$, on a $H^q_{\text{ét}}(V(\overline{x}) - i_{\overline{x}}^{-1}(D), \Lambda) = 0$ pour tout $q \geq 2$.*

Cela résulte du calcul de $H^q_{\text{ét}}(V(\overline{x}) - i_{\overline{x}}^{-1}(D), \Lambda)$ pour $q \in \{0, 1\}$ (cf. SGA $4\frac{1}{2}$[Cycle] 2.1.4).

Proposition 3.13. — *On suppose que l'anneau de coefficients est* $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ *où* ℓ *est un nombre premier. Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme fini et plat de degré constant premier à* ℓ *entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$*-schémas réguliers. Soit* D *un diviseur régulier de* X*. On suppose que* $D' = f^{-1}(D)_{réd}$ *est un diviseur régulier de* Y*. Si le couple régulier* (Y, D') *est pur, alors* (X, D) *aussi.*

Grâce à la proposition 3.12, on peut choisir un point géométrique de D et remplacer X par son hensélisé strict en ce point. On suppose donc que X et D sont locaux strictement henséliens et on se concentre sur la pureté du couple (X, D) en le point fermé de D. Le schéma Y est alors réunion disjointe finie de schémas locaux strictement henséliens ; au moins un de ceux-ci est de degré premier à ℓ sur X. On peut donc supposer que Y aussi est local strictement hensélien. Il suffit alors de montrer que $H^q(X - D, \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ s'injecte dans $H^q(Y - D', \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, ce qui résulte du lemme suivant :

Lemme 3.14. — *On suppose que l'anneau de coefficients* Λ *est* $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ *où* ℓ *est un nombre premier. Soit* $f\colon Y \to X$ *un morphisme de présentation finie, fini et plat de rang d premier à* ℓ *entre* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$*-schémas. Alors, le morphisme canonique* $\Lambda \to f_\star\Lambda$ *est un monomorphisme scindé dans* $\mathrm{D}(X_{ét}, \Lambda)$*.*

D'après SGA 4 XVII 6.2.3, on a un morphisme $\mathrm{Tr}_f\colon f_\star\Lambda \to \Lambda$ tel que la composée

$$\Lambda \to f_\star\Lambda \to \Lambda$$

soit la multiplication par d, ce qui donne le scindage voulu puisque d est inversible dans Λ.

Proposition 3.15. — *On suppose que l'anneau de coefficients* Λ *est* $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ *où* ℓ *est un nombre premier. Soit* X *un* $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$*-schéma régulier. Soit* f *une fonction sur* X *dont le lieu des zéros* $D = V(f)$ *soit un diviseur régulier de* X*. On pose* $X' = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T]/(T^\ell - f)$*. On note* $\pi\colon X' \to X$ *la projection,* $D' = \pi^{-1}(D)_{réd}$ *(noter que* $D' \to D$ *est un isomorphisme). Alors,* X' *est un schéma régulier, et le couple régulier* (X', D') *est pur si et seulement si le couple régulier* (X, D) *l'est.*

Soit $\overline{x}$ un point géométrique de D (on identifiera aussi $\overline{x}$ à un point géométrique de D'). On va en fait montrer que (X, D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si (X', D') l'est. On peut supposer que X est le spectre premier d'un anneau local strictement hensélien A d'idéal maximal $\mathfrak{m}$ et que $\overline{x}$ est au-dessus du point fermé de X. On a évidemment $f \in \mathfrak{m}$; le fait que $D = V(f)$ soit régulier revient à dire que $f \notin \mathfrak{m}^2$.

Notons $A' = A[T]/(T^\ell - f)$. En considérant le déterminant de l'endomorphisme de A' comme A-module donné par la multiplication par un élément $b \in A'$, on observe que b est inversible dans A' si et seulement si son image dans l'algèbre locale $(A/\mathfrak{m})[T]/(T^\ell)$ est inversible. Il en résulte que A' est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}' = (T) + \mathfrak{m}A'$. Par ailleurs, on a un isomorphisme $A/(f) \xrightarrow{\sim} A'/(T)$ (*i.e.* $D' \to D$ est un isomorphisme). On construit facilement un isomorphisme $A_{(f)}[T]/(T^d - f) \xrightarrow{\sim} A'_{(T)}$, ce qui montre que le localisé de A' en (T) est un anneau de valuation discrète. La codimension de l'idéal premier (T) dans A' est donc 1. Compte tenu du fait que $A'/(T)$ soit régulier, il en résulte que X' est régulier.

On peut considérer, pour tout entier $\nu \geq 0$, le X-schéma affine $X^\nu = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_X[T]/(T^{\ell^\nu} - f)$. En élevant T à la puissance ℓ, on obtient une tour de morphismes

$$\cdots \to X^{\nu+1} \to X^\nu \to \cdots \to X^1 \to X^0 ,$$

le dernier morphisme $X^1 \to X^0$ s'identifiant à $\pi\colon X' \to X$. Au-dessus de $X - D$, cette tour de morphismes définit une tour de revêtements étales galoisiens de $X - D$ de groupe de Galois $\mathbf{Z}_\ell(1) = \lim\limits_{\nu} \mu_{\ell^\nu}$ où pour tout entier n inversible dans A, on note simplement $\mu_n = \mu_n(A)$.

Cette tour de revêtements définit un morphisme (surjectif) de groupes profinis $\pi_1^{\text{ét}}(X - D)^{\text{ab}} \to \mathbf{Z}_\ell(1)$. Par conséquent, on a un morphisme de topos $\rho_f\colon (X - D)_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ où $\mathbf{BZ}_\ell(1)$ désigne le topos des $\mathbf{Z}_\ell(1)$-ensembles discrets.

Lemme 3.16. — *Le couple régulier (X, D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme*

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \to \mathbf{R}\Gamma((X - D)_{\acute{e}t}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos ρ_f est un isomorphisme dans la catégorie dérivée des groupes abéliens.

Ce lemme découle des deux lemmes suivants :

Lemme 3.17. — *Pour tout entier $q \geq 2$, $H^q(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) = 0$ et on a des isomorphismes canoniques*

$$H^0(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mu_\ell \ , \quad H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \operatorname{Hom}(\mathbf{Z}_\ell(1), \mu_\ell) \simeq \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \ .$$

Il s'agit de montrer que $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est de ℓ-dimension cohomologique 1. Pour cela, voir par exemple [**13**, §3.4, chapitre I].

Lemme 3.18. — *Le morphisme composé*

$$\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z} \simeq H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \xrightarrow{\rho_f^\star} H^1((X - D)_{\acute{e}t}, \mu_\ell) \xrightarrow{\sim} H^2_D(X, \mu_\ell)$$

est donné (au signe près) par la classe de Gysin $\mathrm{Cl}_{D \subset X}$.

Un relèvement dans $H^1(X - D, \mu_\ell)$ de $\mathrm{Cl}_{D\subset X}$ est donné par l'image de f par le morphisme de bord $H^0((X - D)_{\text{ét}}, \mathbf{G}_{\mathrm{m}}) \to H^1((X - D)_{\text{ét}}, \mu_\ell)$ associé à la suite exacte de Kummer

$$0 \to \mu_\ell \to \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \xrightarrow{p} \mathbf{G}_{\mathrm{m}} \to 0 ,$$

autrement dit par le μ_ℓ-torseur $p^{-1}(f) \subset \mathbf{G}_{\mathrm{m}}$. Géométriquement, ce torseur s'identifie tautologiquement au revêtement galoisien $X' - D' \to X - D$ de groupe de Galois μ_ℓ. Bien sûr, la classe de ce μ_ℓ-torseur est donnée par le morphisme évident $\pi_1^{\text{ét}}(X - D)^{\text{ab}} \to \mathbf{Z}_\ell(1) \to \mu_\ell$ donnant l'image par $\rho_f^\star$ du générateur canonique de $H^1(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell)$.

On peut appliquer le lemme 3.16 à X' : il vient que le couple régulier (X', D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mu_\ell) \to \mathbf{R}\Gamma((X' - D')_{\text{ét}}, \mu_\ell)$$

induit par le morphisme de topos $\rho_T\colon (X' - D')_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ est un isomorphisme.

On dispose d'un carré commutatif de topos :

$$\begin{tikzcd}
(X'-D')_{\text{ét}} \arrow[r, "\rho_T"] \arrow[d, "g"] & \mathbf{BZ}_\ell(1) \arrow[d, "g'"'] \\
(X-D)_{\text{ét}} \arrow[r, "\rho_f"] & \mathbf{BZ}_\ell(1)
\end{tikzcd}$$

où g est induit par $\pi\colon X' \to X$ et g' par la multiplication par ℓ sur $\mathbf{Z}_\ell(1)$. Le faisceau $g_\star \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ s'identifie canoniquement à $\rho_f^\star g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$. Il en découle aisément que le couple régulier (X', D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si le morphisme canonique

$$\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) \to \mathbf{R}\Gamma((X-D)_{\text{ét}}, \rho_f^\star g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$$

est un isomorphisme.

La cohomologie relative du morphisme de topos $\rho_f\colon (X-D)_{\text{ét}} \to \mathbf{BZ}_\ell(1)$ définit un foncteur triangulé

$$F\colon \mathrm{D}^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) \to \mathrm{D}^+(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$$

tel que pour tout $K \in \mathrm{D}^+(\mathbf{BZ}_\ell(1), \mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$, $F(K)$ soit isomorphe à un cône du morphisme canonique $\mathbf{R}\Gamma(\mathbf{BZ}_\ell(1), K) \to \mathbf{R}\Gamma((X-D)_{\text{ét}}, \rho_f^\star K)$.

Le lemme suivant découle de ce qui précède :

Lemme 3.19. — *Le couple régulier (X, D) est pur en $\overline{x}$ si et seulement si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}) = 0$ tandis que (X', D') est pur en $\overline{x}$ si et seulement si $F(g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})) = 0$.*

Comme $\mathbf{Z}_\ell(1)$ est un pro-ℓ-groupe, le faisceau $g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est une extension successive de l copies de $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$. Le foncteur F étant triangulé, on en déduit aussitôt que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est nul, alors $F(g'_\star\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ aussi et que si $F(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z})$ est non nul, son premier objet de cohomologie non nul s'injecte dans celui de $F(g'_\star(\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}))$. Ceci achève la démonstration de la proposition 3.15.

3.4. Schémas sur un trait. — Soit S un trait. On note s son point fermé, η son point générique et π une uniformisante.

Proposition 3.20. — *Le trait S est ponctuellement pur.*

Il s'agit de montrer que S est ponctuellement pur en son point fermé. On peut supposer que S est strictement hensélien ; cela résulte alors facilement du fait que le corps des fractions de S soit de ℓ-dimension cohomologique 1 pour tout nombre premier inversible sur S (cf. SGA 4 X 2.2).

Proposition 3.21. — *Pour tout entier naturel n, l'espace affine $\mathbf{A}^n_S$ est ponctuellement pur.*

D'après la proposition 3.8, les schémas $\mathbf{A}^n_s$ et $\mathbf{A}^n_\eta$ sont ponctuellement purs. Ainsi, $\mathbf{A}^n_S$ est ponctuellement pur en les points de la fibre générique. Pour établir la pureté ponctuelle de $\mathbf{A}^n_S$ en les points de la fibre spéciale, on utilise la proposition 3.6 : il suffit de montrer que le couple régulier $(\mathbf{A}^n_S, \mathbf{A}^n_s)$ est pur. Le cas $n = 0$ résulte de la proposition 3.20 et le cas général en découle en vertu du théorème de changement de base lisse.

Corollaire 3.22. — *Un S-schéma lisse est ponctuellement pur.*

Définition 3.23. — Soit $p\colon X \to S$ un morphisme de type fini, avec X régulier et admettant un faisceau ample. On pose $K_X = p^?\Lambda_S$ et on dispose d'un morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_{X/S}\colon \Lambda_X \to K_X$ dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$ (cf. définition 2.33).

Proposition 3.24. — *Soit $p\colon X \to S$ un morphisme de type fini, avec X régulier et admettant un faisceau ample. Le schéma X est ponctuellement pur si et seulement si le morphisme $\mathrm{Cl}_{X/S}\colon \Lambda_X \to K_X$ est un isomorphisme dans $\mathrm{D}(X_{\acute{e}t}, \Lambda)$.*

On choisit une factorisation $X \xrightarrow{i} Y \xrightarrow{q} S$ de p (dans la catégorie $\mathcal{S}^{\mathrm{ic}}$) avec Y lisse sur S et i une immersion fermée (régulière). D'après le théorème 2.34 (ou plutôt par définition de $\mathrm{Cl}_{X/S}$), le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\mathrm{Cl}_i"] \arrow[dr, "\mathrm{Cl}_{X/S}"'] & i^?\Lambda \arrow[d, "i^?\mathrm{Cl}_q", "\sim"'] \\ & i^?q^?\Lambda \end{tikzcd}$$

Le morphisme q étant lisse, le morphisme de Gysin Cl_q est un isomorphisme. Par conséquent, $\mathrm{Cl}_{X/S}$ est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Cl}_i\colon \Lambda \to i^?\Lambda$ en est un. D'après la proposition 3.6 et compte tenu du fait que Y soit ponctuellement pur (cf. corollaire 3.22), ceci équivaut encore à dire que X est ponctuellement pur.

Corollaire 3.25. — *Soit X un S-schéma de type fini qui est régulier. Soit Y un X-schéma lisse. Si X est ponctuellement pur, alors Y aussi.*

Proposition 3.26. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme propre et dominant de S-schémas où X et Y sont supposés de type fini sur S, intègres, réguliers et admettant des faisceaux amples. On suppose de plus que f est génériquement étale de degré d inversible dans Λ. Alors, la pureté ponctuelle de X implique celle de Y.*

Le morphisme f est localement d'intersection complète lissifiable de dimension relative virtuelle zéro, d'où $f^? = f^!$. Le morphisme de Gysin relatif à f est un morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$.

Lemme 3.27. — *On peut généraliser le morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$ en des morphismes $f^\star M \to f^! M$, fonctoriellement en $M \in \mathrm{D}^+(Y_{\acute{e}t}, \Lambda)$.*

Le morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda \to f^!\Lambda$ correspond par adjonction à un morphisme $\mathbf{R}f_!\Lambda \to \Lambda$, que l'on peut tensoriser avec M pour obtenir (*via* la formule de projection) un morphisme $\mathbf{R}f_! f^\star M \to M$ qui correspond lui-même par adjonction au morphisme $f^\star M \to f^! M$ du type recherché.

En appliquant la fonctorialité de la construction du lemme au morphisme $\mathrm{Cl}_{Y/S}\colon \Lambda_Y \to K_Y$, on obtient un diagramme commutatif dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$.

$$\begin{tikzcd} f^\star\Lambda_Y \arrow[r] \arrow[d, "f^\star(\mathrm{Cl}_{Y/S})"'] & f^!\Lambda_Y \arrow[d, "f^!(\mathrm{Cl}_{Y/S})"] \\ f^\star K_Y \arrow[r] & f^! K_Y \end{tikzcd}$$

Via l'isomorphisme canonique $f^\star\Lambda_Y \simeq \Lambda_X$, le morphisme du haut s'identifie au morphisme $\mathrm{Cl}_f\colon \Lambda_X \to f^!\Lambda_Y$; celui de droite est $f^!(\mathrm{Cl}_{Y/S})$. D'après le théorème 2.34, il vient que le morphisme composé $\Lambda_X \simeq f^\star\Lambda_Y \to f^!K_Y \simeq K_X$ est le morphisme de Gysin $\mathrm{Cl}_{X/S}$. On déduit de ceci un diagramme commutatif de la forme suivante dans $\mathrm{D}(X_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} f^\star\Lambda_Y \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "f^\star(\mathrm{Cl}_{Y/S})"'] & \Lambda_X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{X/S}"] & f^!\Lambda_Y \arrow[d, "f^!\mathrm{Cl}_{Y/S}"] \\ f^\star K_Y \arrow[r] & K_X \arrow[r, "\sim"] & f^! K_Y \end{tikzcd}$$

Comme f est propre, on obtient par adjonction un nouveau diagramme commutatif dans $\mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$:

$$\begin{tikzcd} \Lambda_Y \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{Y/S}"'] & \mathbf{R}f_\star\Lambda_X \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{R}f_\star(\mathrm{Cl}_{X/S})"] & \Lambda_Y \arrow[d, "\mathrm{Cl}_{Y/S}"] \\ K_Y \arrow[r] & \mathbf{R}f_\star K_X \arrow[r] & K_Y \end{tikzcd}$$

Le diagramme ci-dessus met en évidence une relation entre les morphismes $\mathrm{Cl}_{Y/S}$ et $\mathbf{R}f_\star(\mathrm{Cl}_{X/S})$. Comme va le montrer le lemme suivant, le premier morphisme est un facteur direct du second, ce qui montre que la pureté ponctuelle de X implique celle de Y, achevant la démonstration de la proposition 3.26.

Lemme 3.28. — *Sur le diagramme précédent, les morphismes composés $\Lambda_Y \to \Lambda_Y$ et $K_Y \to K_Y$ sont les multiplications par le degré d (en particulier, ce sont des isomorphismes).*

Comme Y est connexe (non vide), on a un isomorphisme évident $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{D}(Y_{\text{ét}},\Lambda)}(\Lambda_Y)$. D'après le théorème de bidualité locale (cf. SGA $4\frac{1}{2}$[Th. finitude] 4.3), on a aussi un isomorphisme $\Lambda \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathrm{D}(Y_{\text{ét}},\Lambda)}(K_Y)$. Il suffit donc d'obtenir la conclusion au-dessus d'un ouvert non vide de Y. Quitte à remplacer Y par un ouvert non vide convenable, on peut supposer que f est un revêtement étale. On est ainsi ramené au lemme suivant :

Lemme 3.29. — *Soit $f\colon X \to Y$ un morphisme de schémas fini étale de degré constant d. Pour tout objet $M \in \mathrm{D}(Y_{\text{ét}}, \Lambda)$, le morphisme composé*

$$M \to f_\star f^\star M \to M$$

déduit des adjonctions canoniques $(f^\star, f_\star)$ et $(f_\star, f^\star)$ est la multiplication par d.

Grâce aux formules de projection, on peut supposer que $M = \Lambda_Y$. Il suffit alors d'établir le résultat après un changement de base étale (non vide) trivialisant le revêtement $X \to Y$ (par exemple une clôture galoisienne de ce revêtement). Bref, on peut supposer que X est une réunion disjointe de d copies de Y, auquel cas le résultat est trivial.

Définition 3.30. — Soit $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbf{N}^n$. On définit un S-schéma :

$$V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n) = \operatorname{Spec} \mathcal{O}_S[T_1, \ldots, T_n] / \left(\prod_{i=1}^n T_i^{e_i} - \pi\right) .$$

Pour tout i, on note H_i le sous-schéma fermé de $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ défini par l'équation $T_i = 0$.

Proposition 3.31. — *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers naturels non tous nuls. Alors, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est régulier et ponctuellement pur.*

On peut supposer que l'anneau des coefficients est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier inversible sur S.

Lemme 3.32. —

(i) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls dont au moins un est inversible dans η, le S-schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est intègre, régulier et de fibre générique lisse ;*

(ii) *Soit $d \geq 1$, si S' est le trait obtenu en extrayant une racine d-ième π' de l'uniformisante π* [(8)]*, pour tout n-uplet $(e_1, \ldots, e_n)$, on a un isomorphisme de schémas*

$$V(S', \pi', e_1, \ldots, e_n) = V(S, \pi, de_1, \ldots, de_n) \ ;$$

(iii) *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est régulier et intègre ;*

(iv) *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers non tous nuls, le schéma $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est ponctuellement pur si et seulement si pour tout i tel que $e_i > 0$, le couple régulier $(V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n), H_i)$ est pur* [(9)] *;*

(v) *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers non nuls, soit e le p.p.c.m. des e_i ; on suppose que ℓ ne divise pas e ; si $V(S, \pi, e, \ldots, e)$ est ponctuellement pur, alors $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ aussi ;*

(vi) *Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ un n-uplet d'entiers non tous nuls, $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est ponctuellement pur si et seulement si $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est ponctuellement pur.*

---

(8) Rappelons brièvement pourquoi S' est bien un trait. Si A est un anneau de valuation discrète, π une uniformisante et $d \geq 1$, notons $A' = A[X]/(X^d - \pi)$. Il est évident que A' est local noethérien et que son idéal maximal est engendré par X. On vérifie aussitôt que la suite évidente $0 \to A' \xrightarrow{X} A' \to A'/(X) \to 0$ de A'-modules est exacte, ce qui donne une résolution projective du corps résiduel de A'. D'après [**14**, §D.1, chapitre IV], A' est régulier de dimension 0 ou 1 et comme A' n'est pas un corps, c'est un anneau de valuation discrète.

(9) Si $e_i = 0$, c'est vrai aussi : c'est un cas particulier du théorème de pureté relatif, cf. SGA 4 XVI 3.7.

Les assertions (i) et (ii) sont laissées en exercice au lecteur. L'assertion (iii) résulte aussitôt de (i) et de (ii).

Pour montrer l'assertion (iv), il suffit d'observer que les diviseurs H_i pour $e_i > 0$ sont ponctuellement purs (ce sont des espaces affines sur le corps résiduel de S) et forment un recouvrement de la fibre spéciale de $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$. La fibre générique du schéma $V(S,\pi, e_1, \ldots, e_n)$ étant ponctuellement pure (puisque lisse sur une extension de η), on peut conclure en utilisant la proposition 3.6.

Concernant l'assertion (v), l'élévation des T_i à la puissance $\frac{e}{e_i}$ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, e, \ldots, e) \to V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ de degré $\frac{e^n}{e_1 \ldots e_n}$ (premier à ℓ) ; compte tenu du critère (iv), la proposition 3.13 permet de conclure.

Pour établir (vi), remarquons que l'élévation de T_1 à la puissance ℓ définit un morphisme fini et plat $V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \ldots, e_n) \to V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ de degré ℓ et étale en dehors du lieu d'annulation de T_1. Il suffit donc de montrer que $(V(S, \pi, \ell e_1, e_2, \ldots, e_n), H_1)$ est pur si et seulement si $(V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n), H_1)$ l'est, ce qui résulte de la proposition 3.15.

Établissons la proposition 3.31. D'après l'assertion (iii), les schémas considérés sont réguliers. Pour établir leur pureté ponctuelle, d'après le corollaire 3.25, on peut supposer qu'aucun des exposants e_i n'est nul. Dans le cas où les tous les entiers e_i vallent 1, le résultat est établi dans [**7**, theorem 1.4] (voir aussi [**12**, Satz 2.21]). Grâce à l'utilisation d'un trait auxiliaire, l'assertion (ii) permet d'en déduire que pour tout entier $d \geq 1$, $V(S, \pi, d, \ldots, d)$ est ponctuellement pur. En utilisant l'assertion (v), on obtient que $V(S, \pi, e_1, \ldots, e_n)$ est ponctuellement pur si ℓ ne divise aucun des entiers e_i. L'assertion (vi) permet de passer au cas général.

3.5. Géométrie logarithmique. —

Définition 3.33. — Soit S un trait, de point générique η. La log-structure canonique sur S est la log-structure image directe de la log-structure triviale sur η. Toute uniformisante de S définit un morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \to \Gamma(S, \mathcal{O}_S)$ donnant naissance à une carte $S \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}]$ du log-schéma S.

L'objectif de cette sous-section d'établir le théorème suivant :

Théorème 3.34. — *Soit S un trait muni de sa log-structure canonique. Soit $(X, M) \to S$ un morphisme log-lisse de log-schémas fs. Si le schéma X est régulier, alors il est ponctuellement pur.*

La proposition suivante précise [**8**, theorem 3.5] dans le cas des log-schémas fs :

Proposition 3.35. — *Soit $(X, M) \to (Y, N)$ un morphisme log-lisse entre log-schémas fs. On suppose donnée une carte $Y \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[Q]$ de (Y, N) où Q est un monoïde fs sans torsion* [10]*. Pour tout point géométrique $\overline{x}$ de X, il existe un voisinage étale U de $\overline{x}$, un morphisme injectif de monoïde $Q \to P$ avec P fs sans torsion et une carte $U \to \mathbf{Z}[P]$*

---

[10] Si $\overline{y}$ est un point géométrique de Y, il existe un voisinage étale de $\overline{y}$ admettant une telle carte avec $Q = M_{\overline{y}}/\mathcal{O}^{\times}_{Y,\overline{y}}$ qui est fs saillant.

tels que la partie de torsion de $\operatorname{coker}(Q^{\mathrm{gp}} \to P^{\mathrm{gp}})$ *soit d'ordre inversible sur* U *et que le morphisme de schémas* $U \to Y \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[Q]} \operatorname{Spec}\mathbf{Z}[P]$ *soit étale.*

Dans la démonstration du critère de log-lissité de [**8**, theorem 3.5], des éléments $t_1, \dots, t_r$ de $M_{\overline{x}}$ sont choisis de sorte que la famille $(d\log t_1, \dots, d\log t_r)$ forme une base du faisceau des log-différentielles $\omega^1_{X/Y,\overline{x}}$. On considère ensuite le morphisme de monoïdes évident $\mathbf{N}^r \oplus Q \to M_{\overline{x}}$ donné sur la composante $\mathbf{N}^r$ par les $t_1, \dots, t_r$. Il est tel que le conoyau de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}$ soit fini d'exposant n inversible dans l'anneau $\mathcal{O}_{X,\overline{x}}$ (en particulier, $\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$ est n-divisible). Il existe un morphisme injectif $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to G$ de conoyau tué par une puissance de n et un prolongement $h\colon G \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}$ de $\mathbf{Z}^r \oplus Q^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}$ tel que $G \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$ soit surjectif. Comme $M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$ est un groupe abélien de type fini et sans torsion, le lemme suivant montre que l'on peut s'arranger pour que G soit un groupe abélien libre. Dans la démonstration de [**8**, theorem 3.5], on pose ensuite $P = h^{-1}(M_{\overline{x}})$ et il est montré que sur un voisinage étale U de $\overline{x}$, P engendre la log-structure de (X, M) et que le morphisme de schémas $U \to S \times_{\operatorname{Spec}\mathbf{Z}[Q]} \operatorname{Spec}\mathbf{Z}[P]$ est étale en $\overline{x}$. Le monoïde P ainsi construit est fs et sans torsion.

Lemme 3.36. — *Soit* n *un entier naturel non nul. Soit* A *un groupe abélien libre de type fini. Soit* $\varphi\colon A \to B$ *un morphisme de groupes abéliens. Soit* $U \subset B$ *un sous-groupe* n*-divisible. On suppose que* B/U *est sans torsion et que* $\operatorname{coker}(A \to B/U)$ *est fini et tué par* n*. Alors, il existe un groupe abélien* A' *libre de type fini, un morphisme injectif* $A \to A'$ *de groupes abéliens tel que* A'/A *soit tué par une puissance de* n *et une extension* $A' \to B$ *du morphisme* $A \to B$ *telle que le morphisme composé* $A' \to B/U$ *soit surjectif.*

Grâce à une récurrence sur l'ordre de $\operatorname{coker}(A \to B/U)$, on peut supposer que $\operatorname{coker}(A \to B/U)$ est cyclique d'ordre $d \geq 2$, engendré par la classe d'un élément $b \in B$. Il existe donc $a \in A$ et $u \in U$ tels que $db = \varphi(a) + u$. Comme u est n-divisible, il existe $\tilde{u} \in U$ tel que $u = d\tilde{u}$. Quitte à remplacer b par $b - \tilde{u}$, on peut supposer que $u = 0$. On forme le carré cocartésien suivant dans la catégorie des groupes abéliens :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Z} \arrow[r, "a"] \arrow[d] & A \arrow[d] \\ \frac{1}{d}\mathbf{Z} \arrow[r] & A' \end{tikzcd}$$

En raison de la relation $db = \varphi(a)$, on peut définir un unique morphisme de groupes abéliens $\varphi'\colon A' \to B$ induisant $\varphi\colon A \to B$ et envoyant $\frac{1}{d}$ sur b. On obtient ainsi une surjection $A' \to B/U$ induisant un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker}(A \to B/U)$. Il reste à vérifier que A' est sans torsion. Soit a' un élément de torsion de A'. L'image de a' dans B/U *via* φ' est de torsion, mais B/U étant sans torsion, on a $\varphi(a') \in U$. Comme φ' induit un isomorphisme $A'/A \xrightarrow{\sim} \operatorname{coker}(A \to B/U)$, on en déduit que $a' \in A$, mais A est sans torsion, donc $a' = 0$.

Proposition 3.37. — *Soit $(X, M) \to S$ un log-schéma fs log-lisse sur un trait S (muni de sa log-structure canonique). On suppose que le schéma X est régulier. Alors, localement pour la topologie étale, X admet un morphisme étale vers un schéma $V(S, \pi, e_1, \dots, e_n)$ où $(e_1, \dots, e_n)$ est un n-uplet d'entiers non tous nuls (cf. définition 3.30).*

Soit π une uniformisante de S ; elle donne naissance à une carte $S \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}]$. D'après la propositon 3.35, on peut supposer qu'il existe un monoïde P fs sans torsion, un morphisme injectif $\mathbf{N} \to P$, une carte $X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$ telle que le morphisme de schémas $X \to S \times_{\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}]} \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$ soit étale. Soit $\overline{x}$ un point géométrique de X. On note P' le sous-monoïde de P formé des éléments dont l'image dans $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ soit inversible au point $\overline{x}$.

On peut supposer que P' est un groupe. En effet, si A est un sous-ensemble fini de P' qui engendre le groupe abélien (libre de type fini) P'^{gp} [(11)], on peut remplacer X par le voisinage ouvert de $\overline{x}$ sur lequel les images des éléments de A (et donc de P') sont inversibles dans le faisceau structural et par suite, remplacer P par $P[-P']$ qui est encore fs et sans torsion.

Le fait que $X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$ soit une carte implique alors que P' est le noyau de $P^{\mathrm{gp}} \to M^{\mathrm{gp}}_{\overline{x}}/\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$. En particulier, on obtient un isomorphisme

$$P/P' \xrightarrow{\sim} M_{\overline{x}}/\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}} \,.$$

Comme X est log-régulier, on reconnaît que X est régulier au fait que $M_{\overline{x}}/\mathcal{O}^{\times}_{X,\overline{x}}$ soit un monoïde libre. Par conséquent, il existe un entier r et un isomorphisme de monoïdes $\mathbf{N}^r \xrightarrow{\sim} P/P'$. On peut relever ce morphisme en un morphisme $\mathbf{N}^r \to P$, ce qui permet de construire un isomorphisme $\mathbf{N}^r \oplus P' \xrightarrow{\sim} P$.

Il en résulte que le morphisme de carte $X \to \operatorname{Spec} \mathbf{Z}[P]$ a pour but un schéma isomorphe à $\operatorname{Spec} \mathbf{Z}[\mathbf{N}^r \oplus P']$ qui est le produit d'un espace affine et d'un tore déployé (dont P' est le groupe des caractères). Dans la carte du morphisme $(X, M) \to S$ qui est donnée, l'image de 1 par le morphisme de monoïdes $\mathbf{N} \to P$ peut s'écrire $(e_1, \dots, e_r, p')$ dans $\mathbf{N}^r \oplus P'$ *via* les identifications ci-dessus. On peut choisir une base $a_1, \dots, a_s$ de P' comme groupe abélien telle que $p' = \sum_{i=1}^{s} f_i a_i$ avec $f_i \in \mathbf{N}$. On a ainsi construit un morphisme étale $X \to V(S, \pi, e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s)$ (avec les $e_1, \dots, e_r, f_1, \dots, f_s$ non tous nuls).

Compte tenu de la proposition 3.31, le théorème 3.34 résulte aussitôt de la proposition 3.37.

3.6. Démonstration du théorème de pureté. — Démontrons le théorème 3.1. D'après les propositions 3.9 et 3.10, on peut supposer que l'anneau des coefficients Λ est $\mathbf{Z}/\ell\mathbf{Z}$ où ℓ est un nombre premier. D'après la proposition 3.6, il s'agit de montrer que tout $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{\ell}\right]$-schéma régulier est ponctuellement pur. D'après [**2**, corollary 6.1.5], on peut supposer que X est un schéma régulier intègre, quasi-projectif et plat sur un trait (strictement hensélien) S, que l'on peut supposer d'inégale caractéristique d'après la proposition 3.8. On peut utiliser les notations de la sous-section 3.4. Quitte à étendre le trait S, on peut

(11) En fait, on peut montrer que P' est un monoïde de type fini (c'est une face de P).

supposer que l'anneau sous-jacent à S est intégralement fermé dans le corps des fonctions rationnelles sur X. La fibre générique X_η de X est donc géométriquement intègre.

En appliquant [**15**, proposition 4.4.1] à la normalisation de l'adhérence de X dans un plongement projectif, on obtient qu'il existe un groupe fini G et un diagramme G-équivariant :

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

tels que :
- G agisse trivialement sur X et S ;
- $S' \to S$ soit une extension finie de traits ;
- $X' \to X$ soit projectif, X' soit régulier, connexe et à réduction semi-stable sur S' ;
- G agisse fidèlement sur X' et $X' \to X$ soit génériquement un revêtement étale galoisien de groupe G.

On munit X' de la log-structure dont l'ouvert de trivialité est la fibre générique de $X' \to S'$. Soit H un ℓ-Sylow de G. On note $T = S'/H$. L'extension de traits (strictement henséliens) $S' \to T$ est d'ordre une puissance de ℓ, donc modérément ramifiée. Par conséquent, pour les log-structures canoniques, $S' \to T$ est log-étale. Comme on sait que X' est log-lisse sur S', il l'est donc aussi sur T. Comme H agit trivialement sur T et que son action sur X' est modérée, on peut appliquer le théorème de résolution équivariante de [**10**] qui donne un morphisme projectif et birationnel H-équivariant $X'' \to X'$ de log-schémas tel que X'' soit log-lisse sur T et que H agisse très modérément sur X''. Le log-schéma quotient X''/H est donc log-lisse sur T (en particulier, X''/H est log-régulier). D'après le théorème de résolution des log-singularités de [**10**], il existe un log-éclatement (en particulier, log-étale, projectif et birationnel) $X''' \to X''/H$ tel que X''' soit régulier. La situation est résumée sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & X'' \arrow[loop above, "H"] \arrow[r, "\text{birat.}"] \arrow[d] & X' \arrow[loop above, "G"] \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[dd] \\ X''' \arrow[r, "\text{birat.}"] & X''/H \arrow[urr, dotted] \arrow[dr] & S' \arrow[loop left, "G"] \arrow[d] & \\ & & T \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Le log-schéma X''' est régulier et log-lisse sur T ; d'après le théorème 3.34, X''' est ponctuellement pur. Le morphisme évident $X''' \to X$ est projectif et génériquement un revêtement étale de degré premier à ℓ, d'après la proposition 3.26, on peut conclure que X est ponctuellement pur, ce qui achève la démonstration du théorème de pureté.

Références

[1] Joseph Ayoub. Les six opérations de Grothendieck et le formalisme des cycles évanescents dans le monde motivique. *Thèse de doctorat soutenue le 25 février 2006.* Université Paris 7 — Denis Diderot.

[2] Kazuhiro Fujiwara. A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). Algebraic geometry 2000, Azumino (Hotaka). *Advanced Studies in Pure Mathematics* 36 (2002). pages 153–183.

[3] William Fulton. Intersection theory. Deuxième édition (1998). Springer.

[4] Ofer Gabber. Finiteness theorems for étale cohomology of excellent schemes. *Conférence en l'honneur de Luc Illusie*, Orsay, 2005.

[5] Alexandre Grothendieck. Sur quelques propriétés fondamentales en théorie des intersections *in* Séminaire Claude Chevalley. Deuxième année (1958). *Anneaux de Chow et applications.* École normale supérieure.

[6] Alexander Grothendieck. La théorie des classes de Chern. *Bulletin de la Société Mathématique de France* 86 (1958), pages 137–154.

[7] Luc Illusie. On the semistable reduction and the calculation of nearby cycles *in* Geometric aspects of Dwork theory (rédacteurs : Alan Adolphson, Francesco Baldassarri, Pierre Berthelot, Nicholas Katz, François Loeser), Walter de Gruyter, 2004, pages 785–803.

[8] Kazuya Kato. Logarithmic structures of Fontaine-Illusie. *in* Algebraic analysis, geometry and number theory, Proceedings of the JAMI Inaugural Conference, edited by Jun-Ichi Igusa, supplement to the American Journal of Mathematics, The Johns Hopkins University Press, Baltimore and London, 1988, pages 191–224.

[9] Fabien Morel, Marc Levine. Cobordisme algébrique I. *Comptes Rendus Mathématique, Académie des Sciences, Paris*, Série I 332 (2001), n°8, pages 723–728.

[10] Sophie Morel. Géométrique logarithmique I, II et III. Exposés au groupe de travail.

[11] Ivan Panin, Alexander Smyrnov. Push-forwards in oriented cohomology theories of algebraic varieties II. `http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0619/`.

[12] Michael Rapoport, Thomas Zink. Über die lokale Zetafunktion von Shimuravarietäten. Monodromiefiltration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik. *Inventiones Mathematicae* 68 (1982), n°1, pages 21—-101

[13] Jean-Pierre Serre. Cohomologie galoisienne. Cinquième édition. *Lecture Notes in Mathematics* 5 (1994). Springer.

[14] Jean-Pierre Serre. Algèbre locale, Multiplicités. Troisième édition. *Lecture Notes in Mathematics* 11 (1975). Springer.

[15] Isabelle Vidal. Théorie de Brauer et conducteur de Swan. *Journal of Algebraic Geometry* 13 (2004), n°2, pages 349–391.

---

exposés oraux des 16 juin 2006 et 13 avril 2007, notes du 22 décembre 2007

Joël Riou, Université Paris-Sud 11, Bât. 425, 91405 Orsay, France
E-mail : joel.riou@math.u-psud.org