Opérations sur la K-théorie algébrique *via* la théorie homotopique des schémas

Joël Riou

Institut de Mathématiques de Jussieu
Université Denis Diderot – Paris 7

7 juin 2006

Définition (Grothendieck)

Soit A un anneau (resp. X un schéma). On note $K_0(A)$ (resp. $K_0(X)$) le groupe abélien présenté par les générateurs $[M]$ où M parcourt les classes d'isomorphismes de A-modules projectifs de type fini (resp. de fibrés vectoriels sur X) soumis aux relations de la forme

$$[M] = \left[M'\right] + \left[M''\right]$$

pour toute suite exacte $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$.

Exemples

- *Si k est un corps, $K_0(k) \simeq \mathbb{Z}$;*
- *si A est un anneau de Dedekind, $K_0(A) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(A)$;*
- *si k est un corps, $K_0(\mathbb{P}^n_k) \simeq \mathbb{Z}\left[U\right]/U^{n+1}$ où $U = [\mathscr{O}(1)] - 1$.*

Si X est un espace topologique compact, on peut définir un groupe $K_0^{\mathrm{top}}(X)$ de façon homologue au K_0 algébrique, mais on va en donner une construction homotopique.

Définition

Pour tout couple (d, r) d'entiers naturels, on note $\mathrm{Gr}_{d,r}$ la grassmannienne des sous-espaces de dimension d dans $\mathbb{A}^{d+r}$. On a des morphismes évidents $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{d,r+1}$ et $\mathrm{Gr}_{d,r} \to \mathrm{Gr}_{1+d,r}$. On note $\mathrm{Gr}(\mathbb{C})$ la limite inductive des espaces topologiques $\mathrm{Gr}_{d,r}(\mathbb{C})$.

Définition

Soit X un espace topologique. On note $K_0^{\mathrm{top}}(X)$ l'ensemble des classes d'homotopies d'applications continues $X \to \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})$, aussi noté $[X, \mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C})]$. Plus généralement, pour tout entier naturel n, on note $K_n^{\mathrm{top}}(X) = [X, \Omega^n(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}(\mathbb{C}))]$ où Ω^n est le foncteur « n-ième espace de lacets ».

Quillen associe à tout schéma X des groupes abéliens $K_n(X)$, construits comme étant les groupes d'homotopies d'un espace topologique $\Omega|\mathbf{B}Q\mathscr{P}(X)|$ construit à partir de la catégorie *exacte* $\mathscr{P}(X)$ des fibrés vectoriels sur X.

- Suite exacte de Mayer-Vietoris ;
- si X est un schéma régulier, $K_n(X) \xrightarrow{\sim} K_n(X \times \mathbb{A}^1)$;
- si K est un corps de nombres, $\mathscr{O}_K$ son anneau d'entiers, les groupes abéliens $K_n(\mathscr{O}_K)$ sont de type fini (Quillen) et on connaît leur rang (Borel). Par exemple, $K_0(\mathscr{O}_K) = \mathbb{Z} \oplus \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_K)$ est de rang 1 et $K_1(\mathscr{O}_K) = \mathscr{O}_K^\times$ est de rang $r_1 + r_2 - 1$ (théorème des unités de Dirichlet).

Soit S un schéma noethérien. On note Sm/S la catégorie des S-schémas lisses de type fini et séparés.

En théorie homotopique des schémas, un espace (sur S) est un préfaisceau simplicial sur la catégorie Sm/S : un espace $\mathscr{F}$ fait correspondre à tout schéma X dans Sm/S un ensemble simplicial $\mathscr{F}(X)$ [1].

Définition

Soit $f : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ un morphisme entre espaces sur S. On dit que f est une équivalence faible simpliciale si pour tout $X \in Sm/S$ et $x \in X$, l'application $\mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$ induite au niveau des germes (« évalués » sur l'hensélisé $\mathscr{O}^h_{X,x}$) est une équivalence d'homotopie faible.

[1] On pourrait aussi bien remplacer les ensembles simpliciaux par des espaces topologiques.

Si $X \in Sm/S$, il n'est pas vrai que la projection $\mathbb{A}^1 \times X \to X$ soit une équivalence faible simpliciale.

Morel et Voevodsky définissent une notion de $\mathbb{A}^1$-équivalence faible, plus faible que la notion d'équivalence faible simpliciale mais qui possède cette propriété.

Définition

La catégorie homotopique $\mathscr{H}(S)$ de S est la catégorie obtenue en inversant formellement les $\mathbb{A}^1$-équivalences faibles dans la catégorie des espaces sur S.

Théorème (Morel-Voevodsky)

Soit S un schéma régulier. Pour tout $X \in Sm/S$ et tout entier naturel n, il existe une bijection canonique

$$K_n(X) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{H}(S)}(X, \mathrm{R}\Omega^n(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}))\ .$$

Soit S un schéma régulier.

Définition

Une opération $K_0(-) \to K_0(-)$ consiste en la donnée, pour tout $X \in Sm/S$, d'une application $K_0(X) \to K_0(X)$, fonctorielle en X.

Il existe une variante à n variables : les familles d'applications $K_0(X)^n \to K_0(X)$, fonctorielles en $X \in Sm/S$. L'addition et la multiplication sur les groupes $K_0(-)$ en donnent des exemples.

Si M est un fibré vectoriel sur X, on pose

$$\lambda_t([M]) = \sum_{n\geq 0} [\wedge^n M]\, t^n \in K_0(X)\,[[t]] \ ;$$

on peut étendre ceci en une application multiplicative sur les suites exactes pour obtenir finalement une application $\lambda_t \colon K_0(X) \to K_0(X)\,[[t]]$.

$$\lambda_t(x) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n(x) t^n \ .$$

On définit ainsi des applications $\lambda^n \colon K_0(X) \to K_0(X)$ qui font de $K_0(X)$ un λ-anneau (spécial).
On a obtenu des opérations $\lambda^n \colon K_0(-) \to K_0(-)$.

Théorème

Soit S un schéma régulier. L'application évidente suivante est bijective :

$$\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{Sm/S^{opp}\mathbf{Ens}}(K_0(-)) \; .$$

De plus, $\mathrm{End}_{\mathscr{H}(S)}(\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}) \simeq (K_0(S)\left[\left[\gamma^1, \gamma^2, \dots\right]\right])^{\mathbb{Z}}$ *où γ^i est une opération définie par l'égalité $\gamma^i(x) = \lambda^i(x + i - 1)$.*

Ingrédients de la démonstration : astuce de Jouanolou, suite exacte de Milnor, K-théorie des grassmanniennes (SGA 6).

Corollaire

Soit S un schéma régulier. Toute opération pointée[2] *$K_0(-) \to K_0(-)$ s'étend canoniquement en des applications fonctorielles $K_n(X) \to K_n(X)$ pour tout entier naturel n.*

[2] Au sens où elle envoie 0 sur 0.

- Cette extension à $K_n(-) \to K_n(-)$ des opérations usuelles $K_0(-) \to K_0(-)$ est la même que celle qui avait été construite par Soulé.
- Il existe une version à plusieurs variables. La structure multiplicative $K_i(X) \times K_j(X) \to K_{i+j}(X)$ qui s'en déduit coïncide avec les constructions antérieures de Quillen ($i = 0$ ou $j = 0$), Loday ($i > 0$ et $j > 0$), Waldhausen (i et j quelconques).
- L'objet $\mathbb{Z} \times \mathrm{Gr}$ porte formellement une structure de λ-Anneau spécial dans la catégorie $\mathscr{H}(S)$.

Soit k un corps. Soit $(\mathbb{H}^{p,q})_{p,q}$ une théorie cohomologique (orientée) représentée par un objet $\mathbb{H}$ de $\mathcal{SH}(k)$.
Alors, toute famille d'applications fonctorielles

$$K_0(X) \to \mathbb{H}^{2p,p}(X)$$

pour $X \in Sm/k$ s'étend canoniquement en des applications

$$K_n(X) \to \mathbb{H}^{2p-n,p}(X)$$

pour tout entier naturel n.

Exemple

Grothendieck a défini un caractère de Chern $K_0(X) \to \bigoplus_{p\geq 0} CH^p(X)_{\mathbb{Q}}$. La construction ci-dessus l'étend en des morphismes

$$K_n(X) \to \bigoplus_{p\geq 0} H^{2p-n}_{\mathscr{M}}(X, \mathbb{Q}(p)) \, .$$