Deuxième exposé du groupe de lecture

Caractères des représentations de groupes finis

Joël RIOU

22 octobre 1999

Résumé

A partir du deuxième chapitre du livre *Representation theory* [1] de **Fulton** et **Harris**, je vais présenter la théorie des caractères dans le but de démontrer des égalités liées au dénombrement des représentations irréductibles sur un groupe fini G.

1 Caractères

1.1 Définition, propriétés

Rappel 1.1 *Une représentation d'un groupe fini G est un homomorphisme de groupes $G \xrightarrow{\rho} GL(V)$, où V est un k-espace vectoriel de dimension finie et k un corps commutatif. (On dit aussi que V est un G-module.)*

Il s'agit en fait d'un cas particulier d'action de groupe, où l'on impose en plus la linéarité des fonctions $\rho(g)$. Ainsi, on notera parfois $\forall x \in V \quad \rho(g)(x) = g.x$

Définition 1.1 (Caractère) *Le caractère χ_V associé à la représentation ρ est l'application suivante.*

$$\chi_V = \left\{ \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & k \\ g & \longmapsto & tr\, \rho(g) \end{array} \right.$$

Propriété 1.1 (Fonction de classe) *χ_V appartient à $k_{class}(G)$ qui est par définition le sous-espace vectoriel de k^G des fonctions qui sont constantes sur chacune des classes de conjugaison de G.*

Démonstration : Pour tous $(g,h) \in G^2$, $\chi_V\left(hgh^{-1}\right) = \mathrm{tr}\ \left(\rho(h)\rho(g)\rho(h)^{-1}\right) = \mathrm{tr}\ \rho(g) = \chi_V(g)$

Propriété 1.2 $\chi_V(e) = dim\ V$

Propriété 1.3 *Si $k = \mathbb{C}$, alors $\chi_V\left(g^{-1}\right) = \overline{\chi_V(g)}$*

Démonstration : Comme G est un groupe fini, $\rho(g)$ est d'ordre fini, donc diagonalisable sur $\mathbb{C}$, et son spectre est inclus dans $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$. On achève le calcul en remarquant que pour tout $z \in \mathbb{U}$, $z^{-1} = \overline{z}$

1.2 Exemples élémentaires

1.2.1 Représentation triviale : χ_1

On prend la représentation triviale de G, c'est-à-dire que l'on a :

$$V = k \qquad \forall g \in G \quad \rho(g) = \mathrm{Id}_V$$

On note χ_1 le caractère de cette représentation (on l'appelle caractère unitaire). Il vérifie la relation suivante :

$$\forall g \in G \quad \chi_1(g) = 1$$

1.2.2 Représentation associée à une action de groupe

On suppose que G agit sur un ensemble fini E par l'homomorphisme $G \overset{\psi}{\to} \mathrm{Perm}(E)$

On pose $V = \mathrm{Vect}(e_x, x \in E)$

Définition 1.2 *La représentation associée à l'action de groupe ψ est l'homomorphisme $G \overset{\rho}{\to} GL(V)$ défini par :*

$$\forall g \in G \quad \forall x \in E \quad \rho(g)(e_x) = e_{\psi(g)(x)}$$

Propriété 1.4

$$\forall g \in G \quad \chi_V(g) = |Fix\ g| \qquad Fix\ g = \{x \in E, \psi(g)(x) = x\}$$

Démonstration : On peut faire le calcul de la trace dans la base $(e_x)_{x\in E}$. Chaque coefficient de la diagonale de $\rho(g)$ est soit 0 si $g.x \neq x$, soit 1 si $g.x = x$.

1.2.3 Représentation régulière : χ_R

C'est un cas particulier de représentation associée à une action de groupe. Ainsi, ψ correspond à l'action du groupe G sur lui-même par translation à gauche.

$$\forall (g,h) \in G^2 \qquad \psi(g)(h) = gh$$

Dans ce cas particulier, on notera R l'espace vectoriel V.

Propriété 1.5

$$\chi_R(g) = \begin{cases} |G| & si\ g = e \\ 0 & si\ g \neq e \end{cases}$$

Démonstration : Comme l'action ψ est libre, la seule façon d'obtenir des points fixes est de prendre $g = e$, et dans ce cas tous les éléments du groupe sont fixés par $\psi(g)$

1.3 Opérations sur les caractères

1.3.1 Représentation $\rho_{V\oplus W}$

Définition 1.3 *Si V et W sont deux représentations de G, on définit la représentation $\rho_{V\oplus W}$ par l'opération naturelle :*

$$g.(v+w) = g.v + g.w$$

Propriété 1.6 $\forall g \in G \quad \chi_{V\oplus W}(g) = \chi_V(g) + \chi_W(g)$

Démonstration : Ceci découle de la forme matricielle de $\rho_{V\oplus W}(g)$ qui est évidemment diagonale par blocs $\begin{pmatrix} \rho_V(g) & \\ & \rho_W(g) \end{pmatrix}$.

1.3.2 Représentation $\rho_{\mathbf{Hom}(V,W)}$

$\mathrm{Hom}(V,W)$ désigne l'ensemble des applications linéaires de V vers W.

Définition 1.4 *Si V et W sont deux représentations de G, on définit la représentation $\rho_{Hom(V,W)}$ par :*

$$\forall g \in G \quad \forall F \in Hom(V,W) \quad \rho_{Hom(V,W)}(g)(F) = \rho_W(g) \circ F \circ \rho_V(g^{-1})$$

Pour calculer le caractère $\chi_{\mathrm{Hom}(V,W)}$, on va utiliser ce lemme :

Lemme 1.1 *Soient $u \in End(W)$ et $v \in End(V)$. Si $\Phi \in End(Hom(V,W))$ est défini par $\Phi(f) = u \circ f \circ v$, alors $tr\ \Phi = (tr\ u)(tr\ v)$*

Démonstration : Choisissons des bases $(e_i)_{i \in I}$ de V et $(f_j)_{j \in J}$ de W. On note $(e_i^\star)_{i \in I}$ et $\left(f_j^\star\right)_{j \in J}$ les bases duales associées.

On construit $(F_{i,j})_{(i,j) \in I \times J}$ une base de Hom (V, W) ainsi :

$$F_{i,j}(x) = \langle e_i^\star, x \rangle f_j$$

La base duale $\left(F_{i,j}^\star\right)_{(i,j) \in I \times J}$ est définie ainsi :

$$\left\langle F_{i,j}^\star, F \right\rangle = \left\langle f_j^\star, F(e_i) \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
\text{tr } \Phi &= \sum_{(i,j) \in I \times J} \left\langle F_{i,j}^\star, \Phi(F_{i,j}) \right\rangle \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times J} \left\langle f_j^\star, u \circ F_{i,j}(v(e_i)) \right\rangle \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times J} \left\langle f_j^\star, u(\langle e_i^\star, v(e_i) \rangle f_j) \right\rangle \\
&= \sum_{(i,j) \in I \times J} \left\langle f_j^\star, u(f_j) \right\rangle \langle e_i^\star, v(e_i) \rangle \\
&= (\text{tr } u)(\text{tr } v)
\end{aligned}$$

Propriété 1.7

$$\forall g \in G \quad \chi_{Hom(V,W)}(g) = \chi_V\left(g^{-1}\right) \chi_W(g)$$

Dans le cas particulier où $k = \mathbb{C}$, on a le résultat remarquable :

$$\chi_{Hom(V,W)} = \overline{\chi_V} \chi_W$$

1.3.3 Représentation $\rho_{V^\star}$

On rappelle que si $f \in \text{Hom}(V, W)$ on définit ${}^t f \in \text{Hom}(W^\star, V^\star)$ par

$${}^t f(\varphi) = \varphi \circ f$$

Définition 1.5 (Représentation duale) *Si V est une représentation de G, on définit la représentation $\rho_{V^\star}$ par*

$$\forall g \in G \quad \rho_{V^\star}(g) = {}^t \rho_V\left(g^{-1}\right)$$

Propriété 1.8 *$\rho_{V^\star}$ est caractérisée par la relation suivante :*

$$\forall g \in G \quad \forall f^\star \in V^\star \quad \forall x \in V \quad \langle f^\star, x \rangle = \langle g.f^\star, g.x \rangle$$

Propriété 1.9

$$\forall g \in G \quad \chi_{V^\star}(g) = \chi_V\left(g^{-1}\right)$$

Dans le cas particulier où $k = \mathbb{C}$:

$$\chi_{V^\star} = \overline{\chi_V}$$

Démonstration : Du fait de la définition, on utilise la propriété que tr f = tr ${}^t f$. On peut aussi le voir en utilisant les résultats sur Hom (V, k) (k étant, bien entendu, muni de la représentation triviale de G, dont le caractère est χ_1).

2 Formules de projection

Dans cette partie, on suppose que la caractéristique de k ne divise pas l'ordre du groupe G.

2.1 Espace des invariants

Définition 2.1 *On note V^G l'espace vectoriel constitué des points de V invariants sous l'action de G :*

$$V^G = \{v \in V, \forall g \in G \quad g.v = v\}$$

Propriété 2.1

$$dim\ V^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

Démonstration : On définit un élément $\varphi \in \mathrm{End}(V)$:

$$\varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho(g)$$

Il est immédiat que l'image de φ est incluse dans V^G, et que pour tout $v \in V^G$, $\varphi(v) = v$.

Donc φ est un projecteur d'image V^G. Sa trace est donc la dimension de V^G.

$$\dim\ V^G = \mathrm{tr}\ \varphi = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g)$$

2.2 Définition d'une forme bilinéaire symétrique sur $k_{class}(G)$

$$\forall (\alpha, \beta) \in k_{class}(G)^2 \qquad (\alpha, \beta) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}) \beta(g)$$

2.3 Homomorphismes de G-modules

Rappel 2.1 *$V \xrightarrow{f} W$ est un morphisme de G-modules si et seulement si le diagramme suivant est commutatif (pour tout $g \in G$) :*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_V(g)"'] & W \arrow[d, "\rho_W(g)"] \\ V \arrow[r, "f"] & W \end{tikzcd}$$

Propriété 2.2 *$V \xrightarrow{f} W$ est un morphisme de G-modules si et seulement si*

$$\forall g \in G \quad \rho_{Hom(V,W)}(g)(f) = f$$

Définition 2.2 *On note $Hom_G(V, W)$ l'espace vectoriel des morphismes de G-modules de V vers W. La propriété précédente permet de dire que :*

$$Hom_G(V, W) = Hom(V, W)^G$$

Propriété 2.3

$$dim\ Hom(V, W)^G = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi_V(g^{-1})\, \chi_W(g) = (\chi_V, \chi_W)$$

Démonstration : La caractérisation des éléments de $\mathrm{Hom}_G(V,W)$ par leur invariance par la représentation $\rho_{\mathrm{Hom}(V,W)}$ permet d'utiliser les résultats sur la dimension de ces invariants.

Rappel 2.2 *Une sous-représentation de V est un sous-espace vectoriel $H \subset V$ tel que*

$$\forall h \in H \quad \forall g \in G \quad \rho_V(g)(h) \in H$$

Définition 2.3 *Une représentation V (non nulle) est dite irréductible si et seulement si ses seules sous-représentations sont $\{0\}$ et V.*

Dorénavant, on supposera que le corps k est *algébriquement clos.*

Lemme 2.1 (Schur) *Si V et W sont des représentations irréductibles et f un morphisme de G-modules de V vers W, alors f est nul ou est un isomorphisme, et dans ce second cas, si $V = W$, il existe $\lambda \in k$ tel que $f = \lambda Id$*

Démonstration : ker f et Im f sont des sous-représentations des représentations *irréductibles* V et W respectivement. Donc, deux cas se présentent :
- Si ker $f = V$, alors $f = 0$
- Sinon ker $f = \{0\}$, et Im $f \neq \{0\}$, donc Im $f = W$, f est injectif, et surjectif, il s'agit donc d'un isomorphisme de G-modules. Dans ce cas, si $W = V$, comme k est algébriquement clos, cet automorphisme f admet un espace propre non nul $\ker(f - \lambda\mathrm{Id})$, avec $\lambda \in k$. Cet espace propre est de surcroît une sous-représentation de V, donc $\ker(f - \lambda\mathrm{Id}) = V$, et $f = \lambda\mathrm{Id}$.

Corollaire 2.1 (Orthonormalité des caractères irréductibles) *Si V et W sont des représentations* irréductibles

$$(\chi_V, \chi_W) = \begin{cases} 1 & \text{si } V \text{ et } W \text{ sont } G\text{-isomorphes} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On suppose maintenant que le corps k est de *caractéristique nulle.*

2.4 Formules de décomposition en représentations irréductibles

Rappel 2.3 *On sait que toute représentation V peut se décomposer en somme directe de représentations irréductibles. (Cela tient au fait que si l'on possède une sous-représentation W, il existe une sous-représentation H telle que $V = W \oplus H$.)*

Propriété 2.4 *Si V est G-isomorphe à $\oplus V_i^{\oplus a_i}$, les V_i étant des représentations irréductibles deux-à-deux non G-isomorphes, alors*

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_V) \qquad (\chi_V, \chi_V) = \sum a_i^2$$

Démonstration : $\chi_V = \sum_i a_i \chi_{V_i}$. Puis on utilise l'orthonormalité des caractères irréductibles.

On peut ainsi démontrer l'unicité de la décomposition en représentations irréductibles.

2.5 Caractérisation des caractères irréductibles

Corollaire 2.2 *V est irréductible si et seulement si $(\chi_V, \chi_V) = 1$*

2.6 Un premier résultat de dénombrement

Théorème 2.1

$$|G| = \sum_{V \ irréductible} (dim\ V)^2$$

Démonstration : Pour toute représentation irréductible V_i, calculons sa multiplicité a_i dans la représentation *régulière* R.

$$a_i = (\chi_{V_i}, \chi_V) = \chi_{V_i}(e) = \dim V_i \qquad |G| = \dim R = \sum_i a_i \dim V_i = \sum_i (\dim V_i)^2$$

2.7 Dénombrement des représentations irréductibles

Théorème 2.2 *Il y a autant de représentations irréductibles que classes de conjugaison dans G.*

Démonstration : Calculons l'orthogonal de $\{\chi_V, V$ irréductible$\}$ pour la forme bilinéaire symétrique $(\cdot,\cdot)$.

Soit $\alpha \in k_{class}(G)$, orthogonale à tous les caractères irréductibles de G.

Soit V une représentation, posons $\psi_V = \sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}) \rho_V(g)$. On remarque que : $\psi_V \in \mathrm{End}_G(V)$.

Dans le cas où V est une représentation irréductible, d'après le lemme de Schur, il existe $\lambda \in k$ tel que $\psi_V = \lambda \mathrm{Id}$

$\lambda = \frac{1}{\dim V} \mathrm{tr}\ \psi_V = \frac{|G|}{\dim V}(\alpha, \chi_V) = 0$. D'où $\psi_V = 0$.

Ce résultat peut s'étendre à n'importe quelle représentation W, parce que l'endomorphisme ψ_W admet une décomposition en blocs diagonaux, chacun égal à un ψ_V avec V irréductible.

En particulier, pour la représentation régulière R, on obtient :

$$\sum_{g \in G} \alpha(g^{-1}) \rho_R(g) = 0$$

Or, la famille $(\rho_R(g) e_e)_{g \in G}$ est libre, donc *a fortiori*, la famille d'endomorphismes $(\rho_R(g))_{g \in G}$ est libre. Donc les coefficients de la combinaison linéaire sont nuls, c'est-à-dire que $\alpha = 0$.

Du fait de l'orthonormalité des caractères irréductibles, on avait déjà le fait que le nombre de représentations irréductibles était inférieur ou égal à la dimension de $k_{class}(g)$. Comme la forme bilinéaire symétrique $(\cdot,\cdot)$ est non-dégénérée (car on est ici en caractéristique nulle), le fait que l'orthogonal des caractères soit nul prouve que les caractères forment une famille génératrice orthonormale de $k_{class}(g)$; d'où le théorème.

Table des matières

Références

[1] William Fulton, Joe Harris. *Representation theory : a first course*. Springer, 1991. (Graduate Texts in Mathematics)