K-THÉORIE ALGÉBRIQUE DES ANNEAUX D'ENTIERS

par

Frédéric Deglise et Joël Riou

Résumé. — Ce texte est formé des notes des exposés que nous avons préparés pour le groupe de travail « Motifs ». La première partie comporte l'énoncé de la conjecture de Lichtenbaum, dont on s'efforce de donner un sens dans les deux parties suivantes, sans y parvenir complètement, des exposés supplémentaires étant prévus pour cela. Le but de la seconde partie consiste ainsi à établir que les groupes de K-théorie algébrique des anneaux d'entiers de corps de nombres sont des groupes abéliens de type fini. Dans la troisième partie, on essaie de donner quelques idées de démonstration sur un résultat d'Armand Borel [**B2**] permettant de calculer le rang de ces groupes de K-théorie par des méthodes utilisant notamment de l'analyse harmonique.

Table des matières

PARTIE I
CONJECTURES DE LICHTENBAUM

1. Préliminaire : le cas de la fonction ζ de Riemann

Nous allons commencer la série de conjecture par une proposition classique :

Proposition 1. *Soit n un entier positif.*

Alors, si b_n désigne le n-ième terme du développement en série entière suivant

$$\frac{te^t}{e^t - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{n!} t^n$$

on obtient l'égalité suivante

$$\zeta(-n) = -\frac{b_{n+1}}{n+1}$$

où ζ désigne la fonction ζ de Riemann.

Remarque 2. *b_{2n} est n-ième nombre de Bernouilli.*

2. Le cas des corps de nombres

Le but de ce paragraphe est d'énoncer la conjecture principale de [**L**].

On fixe donc K un corps de nombres de degré n sur $\mathbb{Q}$, et on note r_1 le nombre de plongements réels de K, r_2 le nombre de plongements complexes à conjugaison près.

On rappelle la définition de la fonction ζ associée à K :

$$\zeta(K, s) = \sum_{\mathfrak{p}} \frac{1}{(N\mathfrak{p})^s}$$

où la somme est indexée par les places $\mathfrak{p}$ de K, et $N\mathfrak{p}$ désigne la norme de l'idéal correspondant.

On connait déjà le comportement de cette fonction ζ sur certains entiers :

1. D'après la formule analytique du nombre de classe de Dirichlet, ζ_K admet un pôle simple en $s = 1$ dont le résidu est :
$$\lim_{s\to 1} (s-1)\zeta(K, s) = 2^{r_1+r_2}.\frac{\pi^{r_2}}{|\delta|^{1/2}} \frac{hR}{w}$$
où h est le nombre de classes, w le nombre de racine de l'unité, R le régulateur et δ le discriminant de K.
2. On déduit de l'équation fonctionnelle : ζ_K admet un zéro d'ordre $(r_1 + r_2 - 1)$ en $s = 0$ dont le résidu est :
$$\lim_{s\to 0} s^{-(r_1+r_2-1)}\zeta(K, s) = -\frac{hR}{w}$$

La situation de la fonction ζ est donc plus simple pour les entiers négatifs. On a par ailleurs la proposition suivante, due à Lichtenbaum (obtenu comme corollaire d'un résultat de Siegel, cf [**S**]), qui lui sert de point d'appui pour ses conjectures :

Proposition 3. *Si K est totalement réel, pour tout entier positif impair m, le nombre*

$$\zeta(K, -m)$$

est un nombre rationnel non nul.

2.1. Cas totalement réel. — Dès lors Lichtenbaum (s'appuyant sur une conjecture de Birch-Tate dans le cas $m = 1$), propose la conjecture suivante suivante (conjecture 2.4 de [**L**]) :

Conjecture 4. *Si K est totalement réel, pour tout entier positif impair m,*

$$|\zeta(K, -m)| = r.\frac{\sharp K_{2m}(\mathcal{O}_K)}{\sharp K_{2m+1}(\mathcal{O}_K)}$$

où r est une puissance de 2, et K_i désignent les groupes de K-théorie de Quillen de l'anneau $\mathcal{O}_K$.

Remarque 5. *Ainsi cette conjecture dans le cas $K = \mathbb{Q}$ implique une relation sur la torsion des groupes de K-théorie de Quillen de l'anneau $\mathbb{Z}$.*

2.2. Cas général. — Finalement, Lichtenbaum arrive à la conjecture suivante :

Conjecture 6. *Soit $m > 0$ un entier.*

Est-il vrai que

$$\lim_{s \to -m} (s+m)^{-g} \zeta(K, s+m) = \pm r.\frac{h_m R_m}{w_m}$$

où

1. *$h_m = \sharp K_{2m}(\mathcal{O}_K)$ est une généralisation du nombre de classes.*
2. *$w_m = \sharp K_{2m+1}(\mathcal{O}_K)_{tor}$ est une généralisation du nombre de racines de l'unité.*
3. *R_m est le régulateur de Borel.*
4. *$g = rg(K_{2m+1})$*
5. *r est une puissance de 2.*

Plusieurs proposition concernant la K-théorie sont cachées dans cette définition.

1. $K_{2m}(\mathcal{O}_K)$ est un groupe fini.
2. $K_{2m+1}(\mathcal{O}_K)$ est de type fini (car sa torsion doit être finie, et son rang fini).

Cet exposé a pour but de démontrer que cette conjecture a un sens. Plus précisément, on démontrera que $K_*(\mathcal{O}_K)$ est de type fini et on calculera les rangs de ces groupes, en particulier :

$$g = \begin{cases} r_1 + r_2 & \text{si } m \text{ est pair} \\ r_2 & \text{si } m \text{ est impair} \end{cases}$$

Remarque 7. *Dans l'article de Lichtenbaum, $r = 1$ a priori. Toutefois, il est clair d'après l'énoncé de la conjecture 6 que r est une puissance de 2. Ce facteur a priori étonnant s'explique par la possible reformulation suivante de la conjecture de Lichtenbaum :*

Conjecture 8. *Soit m un entier positif, alors*

$$\lim_{s \to -m} (s+m)^{-g} \zeta(K, s+m) = \pm \frac{h'_m R_m}{w'_m}$$

où

1. *$h'_m = \sharp H^2(\mathcal{O}_K; \mathbb{Z}(m+1))$ est le cardinal de la cohomologie motivique de $\mathcal{O}_K$ en degré 2 et poids $m+1$.*
2. *$w'_m = \sharp H^1(\mathcal{O}_K; \mathbb{Z}(m+1))_{tor}$ est la partie de torsion du groupe de cohomologie motivique considéré.*
3. *R_m est (toujours) le régulateur de Borel.*

4. $g = \begin{cases} r_1 + r_2 & \textit{si } m \textit{ est pair} \\ r_2 & \textit{si } m \textit{ est impair} \end{cases}$

Autrement dit, le facteur 2 s'explique par la différence entre la cohomologie motivique et la K-théorie.

On ne détaillera pas cette conjecture car la définition de la cohomologie motivique d'un anneau de type fini sur $\mathbb{Z}$ est toute fraîche et ne dispose pas encore des développements nécessaires pour justifier la conjecture précédente.

PARTIE II
K-THÉORIE DES ANNEAUX D'ENTIERS

1. Rappels sur la K-théorie

1.1. Construction + de Quillen. — Soit A un anneau commutatif. Dans tous les cas, le groupe de K-théorie $K_0(A)$ est défini comme le groupe de Grothendieck des A-modules projectifs de type fini.

Il y a par contre plusieurs manières de définir les groupes de K-théorie supérieurs de A. On a choisi ici de donner la construction + de Quillen qui est la plus pratique pour démontrer le théorème qu'on a en vue.

On commence classiquement par donner cette construction dans le cadre général. Dans tout ce qui suit, le mot « espace » désignera un CW-complexe pointé.

Proposition 9. *Soit X un espace connexe. Soit N un sous-groupe distingué de $\pi_1(X)$ qui est de plus parfait.*

Notons $\mathcal{T}(X, N)$ la catégorie des couples (Y, f) tels que $f : X \to Y$ est une application continue dont l'application induite $\pi_1(f)$ est triviale sur N, muni des morphismes à homotopie près.

Alors,

1. *$\mathcal{T}(X, N)$ admet un objet initial. On le note simplement (X^+, i) sans référence au groupe N (qui sera supposé clair dans le contexte).*

   Ainsi, pour tout couple (Y, f) dans $\mathcal{T}(X, N)$, le diagramme suivant admet une unique solution à homotopie près :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X^+ \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

2. *De plus, la flèche induite*

$$\pi_1(X)/N \xrightarrow{i_*} \pi_1(X^+)$$

   est un isomorphisme.

3. *Enfin, la flèche induite*

$$H_*(X; \mathbb{Z}) \xrightarrow{i_*} H_*(X^+; \mathbb{Z})$$

   est un isomorphisme.

Remarque 10. *C'est la dernière propriété qui nous intéresse. On voit qu'elle ne peut être conséquence de la première propriété que si le groupe N est parfait, puisqu'en degré 1, $H_1(X;\mathbb{Z}) = \pi_1(X)_{ab}$, et par définition, $N_{ab} = 0$ (le cas le plus fréquent sera d'ailleurs celui où le groupe N est le groupe des commutateurs de $\pi_1(X)$).*

Démonstration de la proposition — On construit et vérifie les propriétés de l'espace X^+ en utilisant la théorie de l'obstruction en topologie algébrique. On commence donc par contruire un premier espace X' en ajoutant des 2-cellules à X de manière à tuer le groupe N dans le groupe $\pi_1(X')$.

Le morphisme induit
$$i_* : \pi_1(X)/N \to \pi_1(X')$$
est donc par construction un isomorphisme.

D'après la théorie de l'obstruction, l'espace ainsi obtenu à la propriété que pour tout élément (Y, f) de $\mathcal{T}(X, N)$, il existe une application de $X' \to Y$, car l'obstruction à relever l'application f à X' se trouve dans l'image de N par le morphisme $\pi_1(X) \to \pi_1(Y)$, qui est nulle par hypothèse. Mais cette application n'est pas nécessairement unique.

Or, l'obstruction à trouver une homotopie entre deux relévements donnés se trouve dans le sous-groupe $\pi_2(X', X)$ (homotopie relative de X' par rapport à X) de $\pi_2(X)$. On construit donc finalement X^+ en rajoutant à X' des 3-cellules de manière à tuer $\pi_2(X', X)$ dans $\pi_2(X^+)$.

Et puisqu'on a rajouté des 3-cellules, on a pas changé l'homotopie en degré 1, et donc l'application induite
$$i_* : \pi_1(X)/N \to \pi_1(X^+)$$
est encore un isomorphisme.

On a donc prouvé (1) et (2). Mais par ailleurs, on n'a rien changé à l'homologie par notre procédé. En effet, utilisant le fait que $H_1(X) = \pi_1(X)_{ab}$, on voit que le morphisme induit
$$i_* : (\pi_1(X)/N)_{ab} \to \pi_1(X^+)_{ab}$$
est encore un isomorphisme, puisque N étant parfait, $N_{ab} = 0$.

Dès lors, $\pi_1(X^+, X) = 0$ à cause de l'isomorphisme de 2. On s'est de plus arrangé pour que $\pi_2(X^+, X) = 0$. Donc, d'après le théorème d'Hurewicz relatif associé au couple (X^+, X), on en déduit que
$$H_1(X^+, X) = H^2(X^+, X) = 0$$
Comme par ailleurs on n'a ajouté à X que des cellules de dimension inférieure à 3, $H^i(X^+, X) = 0$ si $i \geq 3$. On obtient donc 3. en appliquant la suite exacte longue d'homologie relative au couple (X^+, X). $\lhd$

On va maintenant donner la partie algébrique de la construction. Considérons donc un anneau commutatif. On définit alors une tour de groupes :
$$\{1\} \to A^\times \to GL_2(A) \to \ldots \to GL_n(A) \to GL_{n+1}(A) \to \ldots$$
où chaque morphisme envoie une matrice dans le coin gauche d'une matrice de dimension un de plus.

On peut alors poser :
$$GL(A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} GL_n(A)$$
et de même,
$$SL(A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} SL_n(A)$$

Pour n un entier, on définit de plus $E_n(A)$ comme le sous-groupe distingué de $GL_n(A)$ engendré par les matrices de transvections (c'est-à-dire de la forme $1 + \lambda.\delta$ où δ est une matrice dont les coefficients sont tous nuls sauf un situé hors de la diagonale qui est égal à 1). On peut de même poser :

$$E(A) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} E_n(A)$$

On dispose alors du lemme de Whitehead :

Lemme 11. *Les groupes ci-dessus vérifient les propriétés suivantes :*

1. $E_n(A)$ *est parfait si* $n \geq 3$.
2. $E(A) = [GL(A), GL(A)]$.

Rappelons que l'on associe à tout groupe G un espace BG, appelé espace classifiant, qui est caractérisé à homotopie près par la propriété suivante :

$$\pi_i(BG) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } i = 0 \\ G & \text{si } i = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dès lors, on peut appliquer la construction $+$ dans le cas de l'espace $BGL(A)$, avec comme sous-groupe distingué parfait $E(A)$.

On obtient donc un espace $BGL(A)^+$ qui vérifie entre autre :

$$\pi_1(BGL(A)^+) = \pi_1(BGL(A))/E(A) = GL(A)_{ab}$$

Historiquement, une des premières définition d'un groupe de K-théorie supérieure a été donnée sous cette forme. C'est sans doute ce qui a conduit Quillen à poser :

Définition 12. *Soit* A *un anneau commutatif. Pour* $n \geq 1$, *on définit le* n*-ième groupe de K-théorie (de Quillen) en posant*

$$K_n(A) = \pi_n\big(BGL(A)^+\big)$$

1.2. Propriétés élémentaires de la K-théorie. — On résume les propriétés de la K-théorie algébrique dans l'ordre suivant :

1.2.1. Degré 1. — On a un isomorphisme :

$$K_1(A) = GL(A)_{ab} = H_1(GL(A))$$

1.2.2. Comparaison avec l'homologie des groupes. — Plus généralement, on dispose pour tout entier n d'un morphisme canonique :

$$\begin{tikzcd}
K_n(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "(1)"'] & & H_n(GL(A)) \\
& H_n(BGL(A)^+;\mathbb{Z}) & H_n(BGL(A);\mathbb{Z}) \arrow[l, "\sim", "(2)"'] \arrow[u, equal]
\end{tikzcd}$$

où (1) est l'application d'Hurewicz, et (2) résulte des propriétés de la construction $+$ (cf. prop. 9, 3.)

1.2.3. Structure de H-espace. — La somme directe des matrices induit une structure de H-espace sur $BGL(A)^+$ (groupe à homotopie près).

Remarque 13. *La même méthode ne peut munir l'espace $BGL(A)$ d'une structure de G-espace car son groupe fondamental n'est pas commutatif (en général). On avait commencé par définir un espace ayant le type d'homotopie de la K-théorie en forçant $BGL(A)$ à devenir un H-espace.*

Cette structure supplémentaire de $BGL(A)^+$ nous permet d'interpréter la K-théorie rationnelle.

Rappelons d'abord que l'homologie rationnelle d'un espace est toujours munie d'une structure de coalgèbre avec coünité. On définit en effet :

1. Une coünité en considérant le morphisme évident $H_0(X;\mathbb{Q}) \to H_0(*;\mathbb{Q})$;
2. Un co-produit grâce à l'application diagonale et l'isomorphisme de Künneth :

$$\begin{tikzcd} H_*(X;\mathbb{Q}) \arrow[r] \arrow[dr, "\Delta"'] & H_*(X \times X;\mathbb{Q}) \\ & H_*(X;\mathbb{Q})\otimes H_*(X;\mathbb{Q}) \arrow[u, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

On peut alors définir la partie primitive d'une coalgèbre :

$$\mathrm{Prim}\big(H_*(X;\mathbb{Q})\big) = \{x \in H_*(X;\mathbb{Q}) \mid \Delta x = x \otimes 1 + 1 \otimes x\}$$

Alors, pour tout espace X, la flèche d'Hurewicz se factorise et induit un morphisme :

$$\pi_*(X) \otimes \mathbb{Q} \to \mathrm{Prim}\big(H_*(X;\mathbb{Q})\big)$$

Or, si X est un H-espace, le théorème de Cartan-Serre affirme que ce morphisme est un isomorphisme. On en déduit donc dans le cas $X = BGL(A)^+$,

$$K_*(A) \otimes \mathbb{Q} \simeq \mathrm{Prim}\big(H_*(GL(A);\mathbb{Q})\big)$$

1.2.4. Suite exacte de localisation. — Soit f un élément de A, alors on a une suite exacte longue (pourvu que A et $A/(f)$ soient des anneaux réguliers) :

$$\cdots \to K_{n+1}(A_f) \to K_n(A/(f)) \to K_n(A) \to K_n(A_f) \to K_{n-1}(A/(f)) \to \dots$$

Remarque 14. *Cette propriété est vraiment de nature géométrique et se prouve plutôt en utilisant K-théorie du schéma $X = \operatorname{Spec} A$, associée à la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules cohérents par une autre construction que la construction $+$.*

2. Théorème de finitude

2.1. Enoncé et stratégie de la démonstration. — Comme annoncé, on prouve finalement le théorème de Quillen suivant :

Théorème 15. *Soit K un corps de nombre, et $\mathcal{O}_K$ l'anneau des entiers de ce corps de nombre.*

Alors, pour tout entier n, le groupe abélien $K_n(\mathcal{O}_K)$ est de type fini.

Démonstration du théorème — On doit montrer que les groupes

$$\pi_n(BGL(\mathcal{O}_K)^+)$$

sont de type finis pour tout entier n.

1. Or, d'après le théorème sur les classes de Serre (la classe considérée étant les groupes abéliens de type fini), ceci est équivalent à démontrer que les groupes :

1. $\pi_1(BGL(\mathcal{O}_K)^+)$
2. $H_i(BGL(\mathcal{O}_K)^+) = H_i(GL(\mathcal{O}_K))$ pour $n > 1$.

sont de type fini.

Ainsi, le théorème est équivalent à démontrer que les groupes d'homologie du groupe discret $GL(\mathcal{O}_K)$ sont de type fini.

2. Soit m un entier fixé. Pour prouver que $H_m(GL(\mathcal{O}_K))$ est de type fini, on utilise la démarche suivante :
2.a. On démontre un résultat de stabilité. Il existe un entier N (ne dépendant que de m) tel que pour tout $n \geq N$

$$H_m(GL(\mathcal{O}_K)) \simeq H_m(GL_n(\mathcal{O}_K))$$

2.b. D'un autre côté, un théorème de Raghunathan implique que les groupes d'homologie de $SL_n(\mathcal{O}_K)$ sont de type fini.

Or celà suffit pour conclure :
2.c. On termine en effet en considérant la suite exacte courte de groupes :

$$0 \to SL_n(\mathcal{O}_K) \to GL_n(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{Det} \mathcal{O}_K^\times \to 0$$

On associe à cette suite exacte la suite spectrale de Hochschild-Serre,

$$E^2_{p,q} = H_p(\mathcal{O}_K^\times; H_q(SL_n(\mathcal{O}_K)) \Rightarrow H_{p+q}(GL_n(\mathcal{O}_K))$$

Or, d'après le théorème de Dirichlet (vu dans un exposé précédent), le groupe abélien $\mathcal{O}_K^\times$ est de type fini. Dès lors, puisque d'après le **2.b.**, $H_q(SL_n(\mathcal{O}_K))$ est de type fini, les groupes

$$H_p(\mathcal{O}_K^\times; H_q(SL_n(\mathcal{O}_K))$$

sont de type fini.

Enonçons rapidement le lemme qui nous sert à affirmer ceci :

Lemme 16. *Soit A un groupe abélien de type fini discret, et M un A-module de type fini.*

Alors, pour tout entier p, les groupes $H_p(A; M)$ sont de type fini.

Démonstration du lemme — On démontre tout d'abord ce lemme en supposant que le groupe A est cyclique, car il dispose alors d'une résolution canonique formée de A-modules de type fini.

Dans le cas général, on écrit A comme extension successive de groupes cycliques. Le lemme en découle puisque la propriété qu'il énonce est stable par extension. ◁

L'aboutissement de la suite spectrale est donc filtré de telle manière que les gradués associés soient de type fini. On en déduit que cet aboutissement est de type fini. ◁

On va décrire dans la suite les deux résultats qui manquent dans cette démonstration, à savoir **2.a.** et **2.b.**.

2.2. Stabilité. — On se réfère dans cette partie à **[vdK]**, et on démontre en particuier un des théorèmes énoncés (voir 4.10, dans le cas $XL(R) = GL(R)$, $R = A$, *sdim* est la dimension de Krull de l'anneau A).

Théorème 17. *Soit A un anneau noethérien de dimension de Krull finie d. Alors, pour tout couple d'entiers (m, n) le morphisme canonique*

$$H_m(GL_n(A)) \to H_m(GL_{n+1}(A))$$

est un isomorphisme si $n \geq max(2m + 1, 2m + d)$.

On obtient donc le corollaire qui nous intéresse :

Corollaire 18. *Pour tout entier couple d'entiers (m,n), le morphisme canonique*

$$H_m(GL_n(\mathcal{O}_K)) \to H_m(GL(\mathcal{O}_K))$$

est un isomorphisme si $n \geq 2m+1$.

On va décrire la preuve de van der Kallen (qui est issue de la thèse de Maazen).

2.2.1. Rang stable de Bass. — Dans les questions de stabilité des groupes linéaires, c'est Bass qui a trouvé la propriété fondamentale de stabilité suivante (cf. [**Bass**]) :

Définition 19. *Soit A un anneau (unitaire et commutatif).*

1. *On dit qu'un r-uplet de vecteurs $(e_1, ..., e_r)$ de $A^{(\mathbb{N})}$ est (une suite) unimodulaire si et seulement si $Ae_1 \oplus ... \oplus Ae_r$ est facteur direct dans $A^{(\mathbb{N})}$.*
2. *On appelle rang stable de A, abrégé $s.r.(A)$, le plus petit entier r tel que :*
   Pour toute suite unimodulaire $(e_1, ..., e_{r+1})$ de A, il existe des scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_r$ dans A tels que $(e_i + \lambda_i.e_{r+1})_{1\leq i\leq r}$ soit unimodulaire.

Or, d'après une proposition de Bass, la dimension de Krull suffit :

Proposition 20. *Si A est un anneau de dimension de Krull finie d, on a :*

$$s.r.(A) \leq d+1$$

Remarque 21. *Dans la cas d'une k-algèbre de type fini, il y a égalité.*

2.2.2. La connexité fondamentale. — La stratégie de la preuve est d'utiliser l'action naturelle de $GL_n(A)$ sur l'ensemble $\mathcal{U}_n$ des suites unimodulaires de A^n (par multiplication).

Cet ensemble est partiellement ordonné par la relation d'« inclusion » des r-uplets d'éléments de A^n. On peut dès lors lui associer canoniquement un espace $N\mathcal{U}_n$ (c'est la construction nerf des topologues). Dès lors, le rang stable de A se traduit par la connexité suivante de l'espace des suites unimodulaires :

Lemme 22. *L'espace $N\mathcal{U}_n$, nerf de l'ensemble des suites unimodulaires de A^n, est $(n - s.r.(A) - 1)$-connexe.*

C'est en fait une reformulation de la définition du rang stable de A (Voir [**vdK**], theorem 2.6.).

2.2.3. Démonstration ; des suites spectrales. — On va maintenant donner la description de la preuve de [**vdK**]. Pour alléger les notations, on pose donc $G_n = GL_n(A)$, et on suppose A noethérien de dimension $d \geq 1$. Donc, $s.r.(A) \leq d+1$, et en particulier, l'espace $N\mathcal{U}_n$ est au moins $n-d-2$-connexe.

De manière générale, on sait associer à l'action transitive d'un groupe (discret) sur un espace s-connexe une suite spectrale convergeant vers 0, et dont le terme E^1 s'exprime à l'aide de l'homologie de certains stabilisateurs du groupe (dans une région donnée dépendant de la connexité de l'espace).

C'est ce principe que nous allons appliquer à l'action de G_n sur $N\mathcal{U}_n$ (notons que l'action est bien transitive).

Or, si l'on considère $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique du A-module A^n, tout couple $(e_i)_{i\leq p}$ où $1 \leq p \leq n$ est une suite unimodulaire de A^n. Par ailleurs, le stabilisateur de cette suite, noté G_n^p, est le sous-groupe des matrices inversibles d'ordre n de la forme :

$$\begin{pmatrix} Id_p & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

où Id_p est la matrice identité d'ordre p.

On va utiliser ces suites unimodulaires et leurs stabilisateurs pour construire la suite spectrale. On obtient ainsi :

Lemme 23. *Il existe une suite spectrale convergente :*

$$E^1_{r,s} \Rightarrow 0$$

telle que si $0 \leq r \leq n-d-1$,

$E^1_{r,s} = H_s(G^r_n)$, *où on a posé* $G^0_n = G_n$.

Du fait que la suite converge vers 0, on peut extraire les informations suivantes de cette suite spectrale. Si $n-d-1 \geq 1$, le morphisme

$$E^1_{1,s} = H_s(G^1_n) \to E^1_{0,s} = H_s(G_n)$$

est un isomorphisme pour $2s \leq n-d-1$.

On voit donc qu'on se rapproche d'un résultat de stabilité ; car en effet, on peut recommencer la même manipulation avec le groupe G^1_n. On le fait agir cette fois sur $\mathcal{U}_n$ par multiplication à droite ; l'action n'est alors pas transitive, mais par contre, sa restriction aux suites unimodulaires qui ont pour premier élément e_1 fixé est bien transitive. Notons $\mathcal{U}^1_n$ cet ensemble. Un raffinement du lemme 22 nous permet de conclure que $\mathcal{U}^1_n$ est $n-d-3$-connexe, de sorte qu'on peut appliquer la même construction.

On regarde encore la suite unimodulaire $(e_1, ..., e_r)$ pour $r \leq n$. On note $G^{1,r}_n$ le stabilisateur de cet élément. Par exemple, dans le cas particulier $r = 1$, le stabilisateur de l'élément (e_1) de $\mathcal{U}^1_n$ est égal au groupe des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} & Id_r & 0 \\ 0 & M & Q \end{pmatrix}$$

où M est un matrice quelconque d'ordre $(r-1)\times(n-r)$, et Q une matrice carré inversible d'ordre $n-r$.

On a alors une suite spectrale :

Lemme 24. *Il existe une suite spectrale convergente :*

$$_\sharp E^1_{r,s} \Rightarrow 0$$

telle que si $0 \leq r \leq n-d-2$,

$_\sharp E^1_{r,s} = H_s(G^{1,r}_n)$, *où on a posé* $G^{1,0}_n = G^1_n$.

On peut alors dévisser cette suite spectrale et trouver : si $n-d-2 \geq 1$, le morphisme

$$_\sharp E^1_{1,s} = H_s(G^{1,1}_n) \to {}_\sharp E^1_{0,s} = H_s(G^1_n)$$

est un isomorphisme pour $2s \leq n-d-1$.

On a donc obtenu un isomorphisme, pour $n \geq 2s+d+1$,

$$H_s(G^{1,1}_n) \to H_s(G_n)$$

Or, (miracle), $G^{1,1}_n \simeq GL_{n-1}(A)$, et finalement, pour tout $n \geq 2s+d+1$,

$$H_s(GL_{n-1}(A)) \to H_s(GL_n(A))$$

est un isomorphisme (c'est de plus le morphisme d'inclusion naturel), ce qui est le résultat voulu. $\square$

Remarque 25. *Le problème pour dévisser ces deux suites spectrales (et même la première) est qu'on est obligé de considérer tous ses éléments, y compris les stabilisateurs* G^r_n *pour* $r > 1$. *On ne peut s'en sortir que en considérant tous les groupes de la forme* $G^{P,Q}_n$ *où* P *et* Q *sont des sous-ensembles de* $\{1, ..., n\}$, *et en prouvant les relations de stabilité par récurrence sur* s *pour tous ces groupes en même temps. Il faut donc construire* *une action transitive de ces sous-groupes sur un sous-ensemble de $\mathcal{U}_n$ qui est $\phi(n,P,Q)$-connexe, choisir $\phi(n,P,Q)$ suites unimodulaires σ_i tels que les stabilisateurs sont encore de la forme $G_n^{P'_i,Q'_i}$ pour certains P'_i, Q'_i plus grand que P,Q (voir* **[vdK]** *3.5 pour le choix explicite). On obtient dès lors autant de suites spectrales que de triple (n,P,Q), et il faut toutes les dévisser d'un seul coup pour pouvoir démontrer une stabilité avec une condition du genre $n \geq \psi(n,P,Q)$, où ψ est explicite par récurrence sur s.*

Il y a donc une part d'arbitraire dans l'article **[vdK]**, puisqu'il faut choisir une fonction $\psi(n,P,Q)$ qui convienne pour la méthode. La question de savoir si le choix **[vdK]** est optimal pour la méthode est ouverte. Par contre, Suslin a obtenu une amélioration de la conclusion (mais en utilisant une méthode complémentaire) comme suit :

Théorème 26. *(Suslin) Soit A un anneau noethérien de dimension de Krull finie d. Alors, pour tout couple d'entiers (m,n) le morphisme canonique*

$$H_m(GL_n(A)) \to H_m(GL_{n+1}(A))$$

est un isomorphisme si $n \geq max(2m+1, m+d-1)$.

2.3. Théorème de Raghunathan. — On utilise **[R]** pour démontrer le **2.b.** du paragraphe 2.1, à savoir :

Proposition 27. *Soit K un corps de nombre. Alors, pour tout couple (m,n) d'entiers, le groupe d'homologie*

$$H_m(SL_n(\mathcal{O}_K))$$

est de type fini.

2.3.1. Enoncé et principe. — Le principe de la démonstration est de montrer que le quotient $SL_n(K)/SL_n(\mathcal{O}_K)$ est l'intérieur d'une variété compacte à bord et d'appliquer alors le lemme suivant :

Lemme 28. *Soit V une variété compacte à bord, de bord ∂ et d'intérieur $\mathring{V}$. Alors, pour tout entier m, les groupes d'homologie*

$$H_m(V) \qquad H_m(\partial) \qquad H_m(\mathring{V})$$

sont de type fini.

Démonstration du lemme — En effet, l'homologie singulière de V est de type fini (car par exemple, on peut trouver une triangulation finie de V). De plus, son bord ∂ est encore une variété compacte, et son homologie est aussi de type fini. On peut en déduire que l'homologie relative $H_m(V,\mathring{V})$ est de type fini, donc il en est de même de l'homologie de $\mathring{V}$ compte tenu de la suite exacte longue de la paire $(V,\mathring{V})$. ◁

Remarque 29. *Pour nous toutes les variétés sont C^∞.*

2.3.2. Fonctions de Morse. — On donne ici un moyen simple d'obtenir la situation du paragraphe précédent à l'aide de la donnée intermédiaire qui suit :

Définition 30. *Soit V une variété différentiable. On appelle fonction de Morse sur V toute fonction $f : V \to \mathbb{R}^{+*}$ C^∞ telle que :*

1. *pour tout $t > 0$, $f^{-1}(]0,t])$ est compact.*
2. *il existe $t_0 > 0$ tel que $f^{-1}(]0,t_0])$ contient tous les points critiques de f.*

On obtient alors la proposition suivante, que l'on peut voir comme un premier fait élémentaire de théorie de Morse :

Proposition 31. *Soit V une variété différentiable. Si V admet une fonction de Morse, V est homéomorphe à l'intérieur d'une variété compacte à bord.*

Démonstration de la proposition — Considérons f une fonction de Morse sur V, et soit $t_0 > 0$ tels que les points critiques de f soient tous dans le compact $C = f^{-1}(]0, t_0])$. Considérons la sous-variété ouverte $W = V - C$.

Alors, la fonction $f : W \to]t_0, +\infty[$ est propre et lisse. C'est donc une fibration localement triviale, et comme la base est simplement connexe, f induit un isomorphisme

$$W \xrightarrow{\phi} F \times]t_0, +\infty[$$

où F est la fibre de f. Dès lors, posant $\bar{W} = (F \times]t_0, +\infty[) \sqcup F_\infty$, où F est une copie de F à l'infini, on peut recoller $\bar{W}$ et $f^{-1}(]0, t_0 + \epsilon[)$ pour obtenir une compactification $\bar{V}$ de V, dont V est immédiatement l'intérieur. $\triangleleft$

Remarque 32. *La théorie de Morse vise plutôt à reconstituer une variété, à difféomorphisme près, à partir de sa fonction de Morse, grâce à des morceaux standards qu'on appelle anses.*

2.3.3. Théorème de Raghunathan. — Muni de cette définition, on peut alors énoncer précisément le théorème principal de [**R**] qui va nous être utile :

Théorème 33. *Soit G un groupe algébrique connexe et semi-simple sur $\mathbb{Q}$.*

Soit Γ un sous-groupe arithmétique de G, avec $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$.

Soit K un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$.

Alors, il existe une fonction C^∞ $f : G(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$ telle que

1. *f est invariante sous l'action de Γ à droite, et induit une fonction de Morse $f_\Gamma : G(\mathbb{R})/\Gamma \to R^{+*}$.*
2. *f_Γ est invariante sous l'action de K à gauche. Si Γ est sans torsion, la fonction induite $f_\Gamma : K\backslash G(\mathbb{R})/\Gamma \to \mathbb{R}^{+*}$ est une fonction de Morse.*

Remarque 34. *Si Γ a de la torsion, $G(\mathbb{R})/\Gamma \to \mathbb{R}^{+*}$ a des singularités en général, ce qui empêche d'obtenir une fonction de Morse au sens strict.*

On en déduit en effet le corollaire qui nous intéresse :

Corollaire 35. *Soit G un groupe algébrique connexe et semi-simple sur $\mathbb{Q}$ et Γ un sous-groupe arithmétique de G tel que $\Gamma \subset G(\mathbb{R})$. Alors, pour tout entier m, $H_m(\Gamma)$ est de type fini.*

Démonstration — Supposons que Γ n'a pas de torsion. L'action de Γ sur $K\backslash G(\mathbb{R})$ est libre, et de plus, $K\backslash G(\mathbb{R})$ est contractile. On en déduit que $K\backslash G(\mathbb{R})/\Gamma$ a le type d'homotopie d'un classifiant du groupe Γ. Or, d'après l'existence de la fonction de Morse f_Γ, le groupe abélien $H_m(K\backslash G(\mathbb{R})/\Gamma)$ est de type fini, et il est isomorphe à $H_m(\Gamma)$, par propriété de l'espace classifiant.

Dans le cas général, il existe Γ' un sous-groupe arithmétique de G distingué dans Γ tel que Γ' est sans torsion et Γ/Γ' est fini (on peut prendre l'image réciproque du sous-groupe de congruence d'ordre 3 dans $SL_n(\mathbb{Z})$ à travers une représentation fidèle du groupe $G(\mathbb{R})$).

Alors, d'après le cas précédent du corollaire appliqué au groupe Γ', $H_m(\Gamma')$ est de type fini. Il suffit maintenant d'appliquer la suite spectrale de Hochschild-Serre associée à la suite exacte courte

$$1 \to \Gamma' \to \Gamma \to \Gamma/\Gamma' \to 1$$

car l'homologie de Γ' est de type fini et que Γ/Γ' est fini. $\triangleleft$

On en déduit le théorème attendu dans le cas $\Gamma = SL_n(\mathcal{O}_K)$, où $\mathcal{O}_K$ est l'anneau des entiers d'un corps de nombre. (Pour démontrer que ce groupe est un sous-groupe arithmétique de $GL_n|_{\mathcal{O}_K}$, on utilise la restriction de Weil, qui sera décrite dans la partie suivante).

Nous allons maintenant donner les outils pour la construction de la fonction f. Nous renvoyons par contre à **[R]** pour sa définition. Le principe de la preuve est d'utiliser les caractères du groupe de Lie réel $G(\mathbb{R})$ pour construire f.

2.3.3.1. Caractères et racines. — Fixons T un tore maximal $\mathbb{Q}$-déployé de G (c'est-à-dire un sous-groupe de G qui est isomorphe à un produit fini du groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$, maximal pour cette propriété, et tel que l'isomorphisme est vrai sur les points rationnels).

Alors, si l'on note $X^*(T)$ le groupe des caractères sur T (ie les morphismes $\chi : T \to \mathbb{G}_m$), on obtient un groupe abélien libre de type fini.

Soit χ un caractère. On note encore $\chi : T(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ le morphisme associé sur les points réels (puisqu'on utilise les caractères que sur les points réels, cette notation ne prête pas à confusion). Ces fonctions sont C^∞, et se prêtent donc à la construction de f.

2.3.3.2. Décomposition d'Iwasawa. — Il s'agit de construire une fonction définie sur tout $G(\mathbb{R})$ à partir des caractères χ introduits dans le paragraphe précédent. C'est pourquoi on rapelle dans ce paragraphe la décomposition d'Iwasawa du groupe de Lie $G(\mathbb{R})$.

On note tout d'abord A la composante connexe de $T(\mathbb{R})$ contenant 1.

Si $\mathcal{G}$ désigne l'algèbre de Lie associée à $G(\mathbb{R})$, alors le groupe T agit naturellement sur $\mathcal{G}$ *via* la représentation adjointe. Pour tout caractère χ, on note $\mathcal{G}_\chi$ le sous-espace de $\mathcal{G}$ formé des vecteurs propres associés à χ pour cette action :

$$\mathcal{G}_\chi = \{v \in \mathcal{G} \mid \forall t \in T,\ Ad(t).v = \chi_{\mathbb{R}}(t).v\}$$

Les racines de G sont alors les caractères dans $X^*(T)$ qui sont valeurs propres de Ad (*i.e.* les caractères $\chi \in X^*(T)$ tels que $\mathcal{G}_\chi \neq 0$). On note cet ensemble Φ. On introduit un ordre arbitraire (léxicographique) sur le groupe abélien libre de type fini $X^*(T)$, qui induit donc un ordre sur Φ. On appelle racine simple les racines qui ne sont pas sommes de deux racines strictement positives pour cet ordre.

Considérons alors la sous-algèbre de Lie de $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{N} = \bigoplus_{\chi \in \Phi, \chi > 0} \mathcal{G}_\chi$$

On note N le sous-groupe de $G(\mathbb{R})$ qui lui correspond.

Muni de ces notations, on a classiquement la décomposition d'Iwasawa de $G(\mathbb{R})$ qui est un différomorphisme

$$G(\mathbb{R}) \to KAN$$

où K est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{R})$ (dont l'algèbre de Lie est orthogonale à l'algèbre de Lie de A pour le forme de Killing).

Remarque 36. *Cette décomposition est une généralisation de la décomposition classique $GL_n(\mathbb{R}) = O_n(\mathbb{R})\mathcal{T}$, où $\mathcal{T}$ est l'ensemble des matrices triangulaires supérieures.*

Considérons $H : G(\mathbb{R}) \to A$ le morphisme C^∞ associé à cette décomposition. Dès lors, tout caractère χ de G, induit une fonction noté $\tilde{\chi}$

$$\chi|_A \circ H : G(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{+*}$$

2.3.3.3. Domaines de Siegel. — Il s'agit maintenant de contrôler les fonctions définies précédemment.

Définition 37. *Soit $\underline{t} : \Delta \to \mathbb{R}^{+*}$ une fonction quelconque. On pose*

$$A_{\underline{t}} = \{a \in A \mid \forall \chi \in \Delta,\ \tilde{\chi}(a) \leq \underline{t}(\chi)\}$$

Soit $\eta \subset G(\mathbb{R})$ un sous-groupe relativement compact. L'ensemble $KA_{\underline{t}}\eta$ est appelé domaine de Siegel.

Dès lors, pour tout $g \in KA_{\underline{t}}\eta$, pour tout $\chi \in \Delta$, $\tilde{\chi}(g) \leq \underline{t}(\chi)$.

Cette définition va nous suffir pour construire la fonction de Raghunathan, compte tenu du théorème suivant dut à Borel :

Théorème 38. *Soit P un sous-groupe parabolique de G (ie G/P est propre). Alors,*

1. *L'ensemble de classes doubles $P(\mathbb{Q})\backslash G(\mathbb{Q})/\Gamma$ est fini. On considère $g_1, ..., g_m$ des représentants de ces classes.*
2. *Il existe une fonction $\underline{r} : \Delta \to \mathbb{R}^{+*}$ et un sous-groupe relativement compact η de $G(\mathbb{R})$ tel que $G(\mathbb{R})$ est réunion des domaines de Siegel suivants :*
$$G(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=1}^{m} KA_{\underline{r}}\eta$$
3. *Soit $\Omega = K\backslash(\cup_{i=1}^{m} KA_{\underline{r}}\eta)$. Alors Ω est un domaine fondamental de Γ :*
$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r] \arrow[dr, "\nu"'] & G(\mathbb{R}) \arrow[d] \\ & G(\mathbb{R})/\Gamma \end{tikzcd}$$
ν est surjective, et ses fibres sont finies.

On peut alors déduire de ce domaine fondamental une construction de f en utilisant les caractère χ et des partitions de l'unité pour les recoller convenablement afin de garantir la propreté de la fonction, ainsi que la finitude de ses points critiques. Nous renvoyons à **[R]** paragraphe 4 et 5 pour sa définition, ainsi que la démonstration de ses propriétés.

PARTIE III
COHOMOLOGIE RÉELLE DES GROUPES ARITHMÉTIQUES

1. Rappels sur la K-théorie algébrique et énoncé du théorème principal

Rappelons quelques faits sur $\mathsf{K}_0(A)$ où A est un anneau commutatif. On dispose d'une application « puissance extérieure maximale » $\mathsf{K}_0(A) \longrightarrow \mathsf{Pic}(A)$ qui est un morphisme de groupes. Ce morphisme admet une section ensembliste $\mathsf{Pic}(A) \longrightarrow \mathsf{K}_0(A)$ qui à un A-module inversible $\mathcal{L}$ associe $[\mathcal{L}] - [A]$, cette section étant un morphisme de groupes dans le cas où A est un anneau de Dedekind. Dans ce cas, il vient que $\mathsf{K}_0(A) \simeq \mathbb{Z} \oplus \mathsf{Pic}(A)$ où le morphisme $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathsf{K}_0(A)$ associe à un entier n le « module » libre de rang virtuel n. On rappelle[(1)] que si $A = \mathcal{O}_K$, alors $\mathsf{Pic}(A)$ est un groupe fini.

(1) cf. exposés de François Brunault

On rappelle que pour tout anneau commutatif A, le groupe $\mathsf{K}_1(A)$ est canoniquement isomorphe à l'abélianisé du groupe général linéaire $\mathsf{GL}_\infty(A)$ et qu'il existe une décomposition canonique $\mathsf{K}_1(A) = \mathsf{SK}_1(A) \oplus A^\times$.

Dans cette partie, on fixe un corps de nombres K, et on note $\mathcal{O}_K$ l'anneau de ses entiers. On note r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de K. On a démontré le théorème suivant dans la partie précédente.

Théorème 39. *Soit K un corps de nombres. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K)$ est un groupe abélien de type fini.*

Rappelons de plus le théorème suivant (dû lui aussi à Quillen).

Théorème 40. *Soit $\mathbb{F}$ un corps fini à q éléments. Alors, pour tout $n \geq 1$, $\mathsf{K}_n(\mathbb{F})$ est fini. Plus précisément, si n est pair et non nul, $\mathsf{K}_n(\mathbb{F}) = 0$ et si $n = 2i + 1$ avec $i \in \mathbb{N}$, alors $\mathsf{K}_n(\mathbb{F}) \simeq \mathbb{Z}/(q^i - 1)$.*

Rappelons aussi que tout ouvert de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ est affine[(2)]. Pour tout fermé F de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ (distinct de $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$), on peut considérer la suite exacte d'excision de Quillen en G-théorie (qui coïncide avec la K-théorie algébrique pour les schémas réguliers) associée, où l'on note U l'ouvert complémentaire de F et $\mathcal{O}_U$ l'anneau des fonctions sur U :

$$\cdots \longrightarrow \mathsf{K}_n(F) \longrightarrow \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathsf{K}_{n-1}(F) \longrightarrow \cdots$$

Remarque 41. *Christophe Soulé a montré que dans cette suite de localisation, le « push-forward » $\mathsf{K}_n(F) \longrightarrow \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K)$ est nul pour $n \geq 1$. En particulier, on voit que $\mathsf{SK}_1(\mathcal{O}_K) = 0$ puisque, par passage à la limite, ce groupe s'identifie à un sous-groupe de $\mathsf{SK}_1(K)$ qui est évidemment nul. Plus généralement, $\mathsf{SK}_1(\mathcal{O}_U) = 0$ pour tout ouvert U de* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$.

Proposition 42. *Soit S un ensemble fini de places finies de K de cardinal s. On note U l'ouvert affine complémentaire de S dans* $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$. *Alors,*

1. $\mathsf{K}_0(\mathcal{O}_U) = \mathbb{Z} \oplus \mathsf{Pic}(\mathcal{O}_U)$ *et* $\mathsf{Pic}(\mathcal{O}_U)$ *est un groupe fini ;*
2. $\mathsf{K}_1(\mathcal{O}_U) = \mathcal{O}_U^\times \simeq \omega_K \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2+s-1}$ *où ω_K désigne l'ensemble des racines de l'unité dans K ;*
3. *Pour tout entier impair $n \geq 3$, on a un isomorphisme $\mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_U)$;*
4. *Pour tout entier pair $n \geq 2$, on a une suite exacte courte :*

$$0 \longrightarrow \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_U) \longrightarrow \oplus_{s \in S} \mathsf{K}_{n-1}(\kappa(s)) \longrightarrow 0$$

En particulier, pour tout entier $n \geq 2$, on a un isomorphisme[(3)] $\mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K; \mathbb{Q}) \xrightarrow{\simeq} \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_U; \mathbb{Q})$.

Démonstration de la proposition — Il résulte de la suite exacte de localisation et du théorème de finitude de la K-théorie de $\mathcal{O}_K$ que les groupes de K-théorie algébrique de $\mathcal{O}_U$ sont de type fini sur $\mathbb{Z}$. Grâce à la suite exacte d'excision et le résultat de Soulé, on

[(2)] Il suffit de montrer que le morphisme $\mathcal{O}_U \xrightarrow{\pi} \mathcal{O}_K$ est un morphisme affine. Comme π est de présentation finie et que le fait d'être affine est une propriété de nature locale sur la base, il suffit de vérifier que l'on obtient un morphisme affine quand on localise en un idéal premier (non nul) de $\mathcal{O}_K$. Il suffit alors de constater que l'ouvert complémentaire d'un sous-schéma fermé d'un schéma de la forme $\operatorname{Spec} A$ où A est principal est un schéma affine, puisque c'est le complémentaire d'une hypersurface.

[(3)] Les foncteurs $\mathsf{K}_n(-; G)$ où G est un groupe abélien ne sont *a priori* pas obtenus en tensorisant les groupes $\mathsf{K}_n(-)$ avec G sur $\mathbb{Z}$, mais plutôt à partir d'un « produit tensoriel total » dans la catégorie homotopique stable topologique. Cependant, c'est le cas si G est plat sur $\mathbb{Z}$ donc en particulier pour des coefficients rationnels ou réels.

obtient la suite exacte suivante, dans laquelle on peut éliminer les groupes de Picard en tensorisant avec $\mathbb{Q}$:

$$0 \longrightarrow \mathsf{K}_1(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathsf{K}_1(\mathcal{O}_U) \longrightarrow \mathbb{Z}^S \longrightarrow \mathsf{Pic}(\mathcal{O}_K) \longrightarrow \mathsf{Pic}(\mathcal{O}_U) \longrightarrow 0$$

D'après le résultat de Soulé, on voit que $\mathsf{K}_1(\mathcal{O}_U)$ s'identifie à $\mathcal{O}_U^\times$, ce qui était déjà connu de Bass, Milnor et Serre, et il en résulte, modulo le théorème des unités de Dirichlet, que $\mathsf{K}_1(\mathcal{O}_U) \simeq \omega_K \times \mathbb{Z}^{r_1+r_2+s-1}$. On obtient aussi la finitude du groupe de Picard de $\mathcal{O}_U$ comme corollaire de la finitude du groupe de Picard de $\mathcal{O}_K$.

Les assertions concernant les groupes de K-théorie en degrés ≥ 2 résultent aussitôt du résultat de Soulé rappelé précédemment et du calcul de la K-théorie des corps finis. $\triangleleft$

Le corollaire principal des résultats de Borel dans **[B2]** est le théorème suivant :

Théorème 43. *Soit K un corps de nombres. Pour tout $n \geq 2$, on a $\dim_{\mathbb{R}} \mathsf{K}_n(\mathcal{O}_K;\mathbb{R}) = \mathsf{K}_n(K;\mathbb{R}) = 0, r_1+r_2, 0$ ou r_2 suivant que n est congru à $0,1,2$ ou 3 modulo 4.*

En particulier, le rang des groupes de K-théorie de l'anneau des entiers d'un corps de nombres K ne dépend que de la structure de la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} K$, c'est-à-dire de la structure archimédienne de K. Ce théorème est une généralisation du théorème des unités de Dirichlet, mais la démonstration en est nettement plus ardue.

2. Restriction de Weil

Si S est un schéma, on note Sch/S la catégorie des S-schémas. Pour tout morphisme de schémas $f : T \longrightarrow S$, on note $f_\flat$ le foncteur de restriction usuel $\mathsf{Sch}/T \longrightarrow \mathsf{Sch}/S$ obtenu en associant à un T-schéma X le S-schéma $X \longrightarrow T \longrightarrow S$. On rappelle que $f_\flat$ admet un foncteur adjoint à droite $f^\star : \mathsf{Sch}/S \longrightarrow \mathsf{Sch}/T$ qui à un S-schéma X associe $T\times_S X$. En termes préfaisceautiques, si $\mathcal{F}$ est un préfaisceau sur Sch/S, $(f^\star\mathcal{F})(Y/T) = \mathcal{F}(Y/S)$. Au niveau des « catégories » de préfaisceaux, $f^\star$ admet un adjoint à droite $f_\star$ qui à un préfaisceau $\mathcal{G}$ sur Sch/T associe le préfaisceau sur Sch/S qui à un S-schéma X associe $\mathcal{G}(T\times_S X)$.

Définition 44. *Soit $T \xrightarrow{f} S$ un morphisme de schémas et X un T-schéma, si le préfaisceau $f_\star X$ est représentable par un objet de Sch/S, on appelle ce S-schéma la restriction de Weil de X, et on le note $\mathcal{R}_{T/S}X$.*

Comme pour nos applications, il va s'agir de restreindre des groupes algébriques linéaires d'un corps de nombres K à $\mathbb{Q}$, nous nous contenterons du lemme suivant :

Lemme 45. *On suppose que $T \xrightarrow{f} S$ est un morphisme entre deux schémas affines tels que $f_\star\mathcal{O}_T$ soit un $\mathcal{O}_S$-Module libre. Alors, pour tout T-schéma affine X, la restriction de Weil de X de T à S existe et est affine. On suppose maintenant que $f_\star\mathcal{O}_T$ est de type fini comme $\mathcal{O}_S$-Module. Si X est de type fini (resp. de présentation finie, resp. lisse) sur T, alors $\mathcal{R}_{T/S}X$ est de type fini (resp. de présentation finie, resp. lisse) sur S.*

Démonstration du lemme — Notons A l'anneau de S, B celui de T et C celui de X. Choisissons une base $(e_i)_{i\in I}$ de B comme A-module. Commençons par le cas où $C = B[T_j, j\in J]$ est une B-algèbre libre. Il s'agit de construire une A-algèbre D et un isomorphisme naturel $\mathbf{Hom}_A(D,\Lambda) = \mathbf{Hom}_B(C,\Lambda\otimes_A B)$ pour toute A-algèbre Λ. Se donner un élément du membre de droite consiste à se donner une famille $(t_j)_{j\in J}$ d'éléments de $\Lambda\otimes_A B$, que l'on peut décomposer de manière unique sous la forme $t_j = \sum_{i\in I}\lambda_{ij}e_i$ avec $\lambda_{ij}\in\Lambda$. On peut ainsi prendre pour D la A-algèbre libre $A[\theta_{ij},(i,j)\in I\times J]$. Soit maintenant $\mathfrak{p}$ un idéal de C. Soit $a = \sum_{i,j} c_{ij}e_iT_j \in \mathfrak{p}$. Dire que a s'envoie sur 0 par un B-morphisme $C \longrightarrow \Lambda \otimes_A B$ équivaut clairement au fait que pour tout $i \in I$, l'élément $\sum_j c_{ij}\theta_{ij}$ s'envoie sur 0 par le A-morphisme $D \longrightarrow \Lambda$ correspondant. On peut ainsi construire la restriction de Weil de $\operatorname{Spec}(C/\mathfrak{p})$ en prenant le spectre premier de l'anneau obtenu en quotientant D par l'idéal engendré par les éléments de la forme précédente, pour tout élément a dans un système de générateurs de l'idéal $\mathfrak{p}$.

Par construction, $\mathcal{R}_{T/S}X$ est de type fini sur S (resp. de présentation finie) si c'est le cas de X sur T. Pour la lissité, on peut utiliser le critère [**EGA IV 17.1.1**] qui consiste à montrer que $\mathcal{R}_{T/S}X \longrightarrow S$ possède la propriété de relèvement à droite par rapport aux immersions fermées nilpotentes entre T-schémas affines (T est affine). Par adjonction et le critère pour le morphisme lisse $X \longrightarrow T$, il suffit de constater que la propriété pour un morphisme d'être une immersion fermée nilpotente est stable par changement de base. $\triangleleft$

Définition 46. *Soit k un corps parfait. Un groupe algébrique linéaire (ou affine) sur k est un k-schéma en groupes G affine, de type fini et réduit*(4).

Proposition 47. *Soit K/k une extension finie, avec k un corps parfait. Pour tout groupe algébrique linéaire G sur K, $\mathcal{R}_{K/k}G$ est un groupe algébrique linéaire sur k.*

Démonstration de la proposition — Le foncteur de restriction de Weil commutant aux produits finis, $\mathcal{R}_{K/k}G$ est un k-schéma en groupes, et le lemme précédent implique qu'il est de type fini, affine et lisse. En particulier, $\mathcal{R}_{K/k}G$ est réduit, d'où le résultat. $\triangleleft$

Exemple 48. *Soit K un corps de nombres. Notons $G = \mathsf{SL}_{n,K}$ le groupe spécial linéaire sur K. Nous allons décrire la structure du $\mathbb{R}$-groupe algébrique linéaire $G' = \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \big(\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}G\big)$. Considérons le diagramme cartésien suivant :*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec}(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} K) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f_{\mathbb{R}}"] & \operatorname{Spec} K \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec}\mathbb{R} \arrow[r, "i"] & \operatorname{Spec}\mathbb{Q} \end{tikzcd}$$

Il est tautologique qu'au niveau des catégories de préfaisceaux sur les catégories Sch/S (où S varie), on a la formule $i^\star f_\star = f_{\mathbb{R}\star} j^\star$. Ainsi, il vient un isomorphisme canonique $G' = \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} \big(\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}G\big) = \mathcal{R}_{\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}}K/\mathbb{R}}(\mathsf{SL}_n \times \operatorname{Spec}(\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} K))$. Notons r_1 (resp. r_2) le nombre de places réelles (resp. complexes) de K. On a $\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Q}} K \simeq \mathbb{R}^{r_1}\times\mathbb{C}^{r_2}$, donc $G' = (\mathsf{SL}_{n,\mathbb{R}})^{r_1} \times \big(\mathcal{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathsf{SL}_{n,\mathbb{C}}\big)^{r_2}$. On en déduit :

$$\big(\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathsf{SL}_{n,K}\big)(\mathbb{R}) \simeq \mathsf{SL}_n(\mathbb{R})^{r_1} \times \mathsf{SL}_n(\mathbb{C})^{r_2}$$

Définition 49. *Soit G un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire, et Γ un sous-groupe de $G(\mathbb{Q})$. On dit que Γ est arithmétique si et seulement s'il existe un plongement $G \longrightarrow \mathsf{GL}_{n,\mathbb{Q}}$ tel que les sous-groupes Γ et $G(\mathbb{Q}) \cap \mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$ de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Q})$ soient commensurables*(5)*. Cette notion ne dépend pas du plongement.*

Lemme 50. *$\mathsf{SL}_n(\mathcal{O}_K)$ est un sous-groupe arithmétique du $\mathbb{Q}$-groupe $\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathsf{SL}_{n,K}$.*

(4)Puisque k est parfait, G est nécessairement lisse sur k.

(5)Deux sous-groupes H et K d'un groupe G sont dits commensurables si $H \cap K$ est d'indice fini dans H et dans K.

Démonstration du lemme — En fait, on peut construire un plongement de $\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathsf{SL}_{n,K}$ dans un groupe linéaire $\mathsf{GL}_{N,\mathbb{Q}}$ de sorte que $\big(\mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathsf{SL}_{n,K}(\mathbb{Q})\big) \cap \mathsf{GL}_N(\mathbb{Z}) = \mathsf{SL}_n(\mathcal{O}_K)$. Pour cela, il suffit de construire une immersion fermée $\mathcal{R}_{\mathcal{O}_K/\mathbb{Z}}\mathsf{SL}_{n,\mathcal{O}_K} \longrightarrow \mathsf{GL}_N$ de $\mathbb{Z}$-schémas en groupes avec $N = n \cdot [K:\mathbb{Q}]$ par exemple, ce qui est un petit exercice de géométrie algébrique. $\triangleleft$

3. Construction du morphisme j_Γ

Nous allons définir un morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $j_\Gamma : \mathbf{H}^\star(X_u;\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}^\star(\Gamma;\mathbb{R})$ pour tout sous-groupe arithmétique Γ dans un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique semi-simple connexe G, X_u désignant le « jumeau compact » de l'espace homogène X associé à $G(\mathbb{R})$, en suivant la méthode de Borel.

Le lecteur soucieux de connaître de plus amples détails sur la théorie des groupes de Lie réels pourra consulter [**H**].

3.1. Notations. — On fixe un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire G semi-simple connexe. On note $H = G(\mathbb{R})$ et X l'ensemble des sous-groupes compacts maximaux de H. On fait l'hypothèse simplificatrice disant que H est connexe. On observe que si K est un sous-groupe compact maximal de H, alors K est égal à son propre normalisateur, ainsi, il existe une unique bijection $K\backslash H \simeq X$ envoyant K sur K et compatible à l'action à droite canonique de H.

Notons $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de H (canoniquement isomorphe à celle de $G_\mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-groupe algébrique) et $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie d'un sous-groupe compact maximal K de H fixé. Comme de coutume, on pose $Ad(X).Y = [X,Y]$ pour $X, Y \in \mathfrak{g}$ et on note $ad(h)$ la différentielle en l'élément neutre de la conjugaison par h pour tout h dans H.

On rappelle que la forme de Killing est la forme bilinéaire suivante, qui est non dégénérée car G est semi-simple :

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \qquad B(X,Y) = \operatorname{tr}\left((AdX)(AdY) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}\right)$$

On note $\mathfrak{p}$ l'orthogonal de $\mathfrak{k}$ pour la forme de Killing, de sorte que l'on a la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$. On note $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ la $\mathbb{C}$-algèbre de Lie $\mathfrak{g} \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, et on pose $\mathfrak{p}_u = i.\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}_\mathbb{C}$. On peut alors définir la forme compacte $\mathfrak{g}_u$ de $\mathfrak{g}$ par la formule $\mathfrak{g}_u = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}_u$. On note que $\mathfrak{g}_u$ est encore une $\mathbb{R}$-algèbre de Lie semi-simple, dont la forme de Killing est induite par celle de $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$, qui n'est autre que le prolongement par $\mathbb{C}$-bilinéarité de celle de $\mathfrak{g}$. On sait que le sous-groupe de Lie G_u de $G(\mathbb{C})$ correspondant à la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{g}_u$ est un sous-groupe compact maximal de $G(\mathbb{C})$, contenant K. On définit l'espace symétrique dual de $X = K\backslash G$ par la formule $X_u = K\backslash G_u$.

3.2. Construction de classifiants de groupes arithmétiques. — Soit Γ un sous-groupe *arithmétique* du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire G. Commençons par rappeler le lemme suivant qui est bien connu.

Lemme 51. *Si Γ est sans torsion, alors l'action à droite de Γ sur X est propre, discontinue, sans point fixe. Autrement dit, tout point $x \in X$ admet un voisinage ouvert U tel que pour tout $\gamma \in \Gamma - \{1\}$, si $(U.\gamma) \cap U = \phi$. En particulier, toute application équivariante-G $\pi : G \longrightarrow X$ est un revêtement.*

Démonstration du lemme — L'hypothèse dont nous avons réellement besoin est que pour tout $g \in G$, le sous-groupe $\Gamma \cap (gKg^{-1})$ est le groupe trivial, ce qui est clairement vrai ici puisqu'il s'agit d'un groupe compact discret, donc fini, et par ailleurs sans torsion.

Soit K' un sous-groupe compact maximal de G. On a $\left(K'^{-1}.K'.K'\right) \cap \Gamma = \{1\}$. Comme K' est compact, il existe un voisinage ouvert U de K' dans G tel que $(U^{-1}.K'.U) \cap \Gamma = \{1\}$. Le sous-ensemble $K'.U$ de G est un ouvert invariant par l'action à gauche de K', donc définit un ouvert V de $X \simeq K' \backslash G$. Soit $\gamma \in \Gamma$ tel que $V \cap (V.\gamma)$ est non vide. Il existe $u, u' \in U$ et $k \in K$ tels que $\gamma = u^{-1}ku'$, donc $\gamma = 1$, ce qui démontre le résultat. $\triangleleft$

Proposition 52.

1. *Γ admet un sous-groupe d'indice fini Γ' sans torsion et distingué dans Γ.*
2. *Il existe un isomorphisme canonique $\mathbf{H}^\star\left(\Omega(X)^\Gamma\right) = \mathbf{H}^\star(\Gamma; \mathbb{R})$*[6] .
3. *Si Γ est sans torsion, on a de plus $\mathbf{H}^\star\left(\Omega(X)^\Gamma\right) = \mathbf{H}^\star_{dR}(X/\Gamma)$.*

Démonstration de la proposition — Pour le (1), il suffit de montrer que Γ admet un sous-groupe d'indice fini et sans torsion. En effet, si L est un tel sous-groupe, L ne va avoir qu'un nombre fini de sous-groupes conjugués et on pourra définir Γ' comme étant l'intersection de ces sous-groupes conjugués. Pour l'existence de L, on se ramène facilement à montrer que $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$ admet un sous-groupe d'indice fini et sans torsion, mais alors, il suffit de se souvenir que pour tout $N \geq 3$, le sous-groupe $\Gamma(N)$ de $\mathsf{GL}_n(\mathbb{Z})$ formé des matrices congrues à l'identité modulo N est sans torsion.

Pour établir (2) et (3), supposons dans un premier temps que Γ est sans torsion. Grâce à la décomposition de Cartan de H, on sait que l'espace X est contractile[7]. Il en résulte que X/Γ est un espace d'Eilenberg-MacLane $K(\Gamma, 1)$, ainsi on a un isomorphisme canonique $\mathbf{H}^\star(\Gamma; \mathbb{R}) = \mathbf{H}^\star(X/\Gamma; \mathbb{R})$. D'après le théorème de de Rham, cette $\mathbb{R}$-algèbre graduée s'identifie à $\mathbf{H}^\star_{dR}(X/\Gamma)$.

Pour établir (2), on utilise le fait que c'est vrai pour un sous-groupe sans torsion Γ' distingué, d'indice fini dans Γ. En utilisant par exemple la suite spectrale de Hochschild-Serre, on voit que (2) est vrai sans supposer Γ sans torsion, étant donné que la cohomologie des groupes finis est de torsion en degré > 0. $\triangleleft$

3.3. Cohomologie relative d'algèbres de Lie. —

3.3.1. Définition. — Le morphisme j_Γ que nous allons définir se factorise par des algèbres de cohomologie d'algèbres de Lie [**HS**]. Soit k un corps commutatif (de caractéristique 0), $\mathfrak{h}$ une k-algèbre de Lie (de dimension finie).

Définition 53. *Soit M un $\mathfrak{h}$-module. On note $C^n(\mathfrak{h}; M)$ le k-espace vectoriel des applications linéaires $f : \Lambda^n \mathfrak{h} \longrightarrow M$. On le munit d'une structure de $\mathfrak{h}$-module en posant, pour tous $\gamma \in \mathfrak{h}$, $f \in C^n(\mathfrak{h}; M)$, et $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \mathfrak{h}$:*

$$(\gamma.f)(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) = \gamma.f(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_n) - \sum_{i=1}^{n} f(\sigma_1 \wedge \ldots \sigma_{i-1} \wedge [\gamma, \sigma_i] \wedge \sigma_{i+1} \wedge \ldots \sigma_n)$$

[6] La cohomologie d'un groupe Γ désigne les foncteurs dérivés à droite du foncteur « Γ-invariants » qui part de la catégorie des $\mathbb{Z}\Gamma$-modules et qui arrive dans la catégorie des groupes abéliens. On a ainsi : $\mathbf{H}^\star(\Gamma; M) = \mathbf{Ext}^\star_{\mathbb{Z}\Gamma}(\mathbb{Z}, M)$ pour tout $\mathbb{Z}\Gamma$-module M. Ici, dans le cas où Γ est sans torsion, le complexe $C^\star(X; \mathbb{R})$ définit une résolution de $\mathbb{R}$ (puisque X est contractile), formée de Γ-modules « coïnduits » (puisque l'action de Γ sur les simplexes singuliers de X est libre), et par conséquent acycliques pour le foncteur « Γ-invariants ».

[7] En effet, l'application $K \times \mathfrak{p} \longrightarrow H$ qui à (k, X) associe $k \cdot \exp(X)$ est un difféomorphisme.

On munit $C^\star(\mathfrak{h};M)$ d'une structure de complexe de $\mathfrak{h}$-module, par la formule suivante, pour tous $f \in C^n(\mathfrak{h};M)$ et $\gamma_0,\dots,\gamma_n \in \mathfrak{h}$:

$$\begin{aligned}(df)(\gamma_0\wedge\cdots\wedge\gamma_n) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\gamma_i.f(\gamma_0,\dots,\hat{\gamma_i},\dots,\gamma_n)\\ &+ \sum_{0\leq p<q\leq n}(-1)^{p+q}f([\gamma_p,\gamma_q]\wedge\gamma_0\wedge\cdots\wedge\hat{\gamma_p}\wedge\cdots\wedge\hat{\gamma_q}\cdots\wedge\gamma_n)\end{aligned}$$

On a ainsi défini un complexe $C^\star(\mathfrak{h};M)$ dont la cohomologie est notée $\mathbf{H}^\star(\mathfrak{h};M)$ et s'appelle la cohomologie de $\mathfrak{h}$ à coefficients dans M.

On suppose maintenant donnée une sous-k-algèbre de Lie $\mathfrak{a}$ de $\mathfrak{h}$.

Définition 54. *On note $C^\star(\mathfrak{h},\mathfrak{a};M)$ le sous-complexe de k-vectoriels de $C^\star(\mathfrak{h};M)$ formé des applications k-linéaires $\Lambda^\star\mathfrak{h}\longrightarrow M$ se factorisant par $\Lambda^\star(\mathfrak{h}/\mathfrak{a})$ et fixées par l'action de $\mathfrak{a}$. La cohomologie du complexe $C^\star(\mathfrak{h},\mathfrak{a};M)$ est notée $\mathbf{H}^\star(\mathfrak{h},\mathfrak{a};M)$ et s'appelle la cohomologie relative de $(\mathfrak{h},\mathfrak{a})$ à coefficients dans M.*

La remarque suivante est fondamentale pour l'utilisation que nous allons faire de la cohomologie des algèbres de Lie :

Remarque 55. *La cohomologie (relative) des algèbres de Lie est compatible aux extensions du corps de base.*

3.3.2. Cohomologie d'algèbres de Lie de groupes de Lie. — La proposition suivante permet de relier la cohomologie des algèbres de Lie à un point de vue « infinitésimal » sur les formes différentielles sur les groupes de Lie.

Proposition 56. *Soit P un groupe de Lie réel et Q un sous-groupe fermé de P. Alors, l'application « évaluation en 1 » définit un isomorphisme du complexe $I^\star_{P,Q}$ formé des formes différentielles invariantes-P sur $Q\backslash P$ (et muni de la différentielle extérieure) et le complexe $C^\star(Lie(P),Lie(Q);\mathbb{R})$.*

Démonstration de la proposition — On peut d'abord montrer que $Q\backslash P$ est une variété différentiable. Ensuite, on voit que le complexe des formes différentielles sur $Q\backslash P$ s'identifie au complexe des formes différentielles sur P, Q-invariantes, et tuées par le produit intérieur avec les champs de vecteurs invariants-P provenant de l'algèbre de Lie de Q.

Quand on prend les invariants-P dans ces complexes, on obtient que le complexe $I^\star_{P,Q}$ des formes différentielles invariantes-P sur $Q\backslash P$ s'identifie au complexe des formes différentielles sur P qui sont Q-invariantes-P et tuées par le produit intérieur avec les champs de vecteurs invariants-P provenant de $Lie(Q)$.

Or, par évaluation en 1, le complexe des formes différentielles invariantes-P sur P s'identifie canoniquement au complexe $C^\star(Lie(P);\mathbb{R})$. Quand on prend les Q-invariants et que l'on ne garde que la partie tuée par le produit intérieur avec $Lie(Q)$, on obtient l'isomorphisme canonique de complexes espéré $I^\star_{P,Q}=C^\star(Lie(P),Lie(Q);\mathbb{R})$. $\lhd$

3.3.3. « Dualité ». — La théorie d'Élie Cartan admet pour conséquence :

Proposition 57. *Il existe un isomorphisme de $\mathbb{R}$-algèbres (canonique modulo le choix d'une racine de $X^2+1=0$ dans $\mathbb{C}$)*

$$\mathbf{H}^\star(\mathfrak{g},\mathfrak{k};\mathbb{R})=\mathbf{H}^\star(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{k};\mathbb{R})$$

Démonstration de la proposition — On observe que quand on tensorise ces $\mathbb{R}$-algèbres avec $\mathbb{C}$, par commutation de la cohomologie des algèbres de Lie à l'extension des scalaires, on trouve des deux côtés une $\mathbb{C}$-algèbre canoniquement isomorphe à $\mathbf{H}^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C}; \mathbb{C})$. Cependant, ce morphisme ne préserve pas les $\mathbb{R}$-structures, mais on vérifie aussitôt que c'est quand même le cas si en degré q, on multiplie ce morphisme par i^q où i est une racine primitive 4-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$. L'isomorphisme ainsi obtenu est bien compatible avec les structures de $\mathbb{R}$-algèbres. $\triangleleft$

Lemme 58. *Les complexes $C^\star(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \mathbb{R})$, $C^\star(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}; \mathbb{R})$ et $C^\star(\mathfrak{g}_\mathbb{C}, \mathfrak{k}_\mathbb{C}; \mathbb{C})$ ont une différentielle nulle.*

Démonstration du lemme — Il suffit clairement de le démontrer pour le complexe $C^\star(\mathfrak{g}, \mathfrak{k}; \mathbb{R})$. On utilise alors la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ et le fait que $[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}$ pour établir le résultat, en revenant à la définition de l'opérateur de cobord. $\triangleleft$

Lemme 59. *On a un isomorphisme canonique de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbf{H}^\star(X_u; \mathbb{R}) = \mathbf{H}^\star(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}; \mathbb{R})$.*

Démonstration du lemme — D'après la proposition 56, le complexe $C^\star(\mathfrak{g}_u, \mathfrak{k}; R)$ s'identifie canoniquement au complexe K' des formes différentielles invariantes-G_u sur X_u. Notons K le complexe de De Rham de X_u, on a une inclusion évidente $K' \longrightarrow K$ et une rétraction $K \longrightarrow K'$ obtenue par moyennage sous l'action du groupe compact G_u. Comme G_u est *connexe*, on peut adapter facilement la démonstration classique de l'invariance par homotopie de la cohomologie de De Rham pour obtenir que la composée $K \longrightarrow K' \longrightarrow K$ est homotope à l'identité, ce qui permet de conclure. $\triangleleft$

3.4. Définition du morphisme j_Γ. — Nous sommes maintenant en mesure de définir le morphisme j_Γ. On rappelle que l'on a fixé un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire semi-simple connexe G tel que $H = G(\mathbb{R})$ soit connexe (pour simplifier), et que X_u désigne le jumeau compact de l'espace homogène X des sous-groupes compacts maximaux de H, identifié à $K\backslash H$, où K désigne un sous-groupe compact maximal de H. On s'est de plus donné un sous-groupe arithmétique Γ de G. L'espace $I^\star_{H,K}$ est canoniquement isomorphe au complexe I_H des formes différentielles invariantes-H sur X.

Définition 60. *On note j_Γ le morphisme de $\mathbb{R}$-algèbres $\mathbf{H}^\star(X_u; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}^\star(\Gamma; \mathbb{R})$ obtenu à partir du diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{H}^\star(X_u;\mathbb{R}) \arrow[r, equal] \arrow[rrrrr, bend right, "j_\Gamma"'] & \mathbf{H}^\star(\mathfrak{g}_u,\mathfrak{k};\mathbb{R}) \arrow[r, equal] & \mathbf{H}^\star(\mathfrak{g},\mathfrak{k};\mathbb{R}) \arrow[r, equal] & I^\star_H \arrow[r] & \mathbf{H}^\star\Big(\Omega(X)^\Gamma\Big) \arrow[r, equal] & \mathbf{H}^\star(\Gamma;\mathbb{R}) \end{tikzcd}$$

Remarque 61. *Dans le diagramme précédent, la compatibilité entre les différents $\cup$-produits est évidente puisqu'elle peut toujours se voir en termes du produit extérieur de formes différentielles. Bien que trivial, ce fait est très important pour l'application à la K-théorie des anneaux d'entiers de corps de nombres.*

4. Un peu de géométrie riemannienne

On rappelle qu'une variété riemannienne est une variété différentielle dont le fibré tangent est muni d'un produit scalaire défini positif. On munit les variétés riemanniennes de la distance qui étant donnés deux points leur fait correspondre la borne inférieure de la longueur des chemins les joignant.

4.1. Structure de variété riemannienne sur X. — On rappelle que l'on a fixé un sous-groupe compact maximal K de H.

Définition 62. *On définit une forme bilinéaire symétrique g_0 sur $\mathfrak{g}$ par la formule suivante, où θ désigne l'involution de Cartan*[8] *sur $\mathfrak{g}$ associée à K :*

$$\forall X, Y \in \mathfrak{g} \qquad g_0(X,Y) = -B(X, \theta Y)$$

Comme $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$ sont orthogonaux pour la forme de Killing qui est non-dégénérée, g_0 est non-dégénérée. En fait, c'est un produit scalaire.

Proposition 63. *Il existe une unique structure de variété riemannienne sur H telle que le produit scalaire sur $\mathfrak{g}$ soit g_0 et telle que les translations à droite par tous les éléments de H soient des isométries. De plus, l'action de K par multiplication à gauche sur H se fait par isométries.*

Démonstration de la proposition — L'existence et l'unicité d'une telle structure riemannienne sur H est évidente. Pour la deuxième assertion, il suffit de montrer que $ad(k)$ est une isométrie de $\mathfrak{g}$ pour tout $k \in K$. Quand on écrit la condition différentielle pour que ce soit le cas, on obtient qu'il suffit de montrer que pour tous $X, Y \in \mathfrak{g}$, $Z \in \mathfrak{k}$, on a la formule suivante :

$$g_0(X, Ad(Z)Y) + g_0(Ad(Z)X, Y) = 0$$

Or, puisque la forme de Killing est « invariante », on a pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$:

$$B(X, Ad(Z)Y) + B(Ad(Z)X, Y) = 0$$

On conclut en étudiant le cas $Y \in \mathfrak{k}$ et le cas $Y \in \mathfrak{p}$, puisque $Ad(Z)$ préserve ces deux espaces vectoriels. ◁

Corollaire 64. *Il existe une unique structure de variété riemannienne sur X telle que l'action à droite de H se fasse par isométries de sorte que l'espace tangent à X en K coïncide avec le produit scalaire induit par g_0 sur l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{k} = \mathfrak{p}$.*

Remarque 65. *La structure de variété riemanienne sur X ne dépend pas du sous-groupe compact maximal K considéré.*

4.2. Opérateurs différentiels et théorie de Hodge. — Soit M une variété riemannienne orientée de dimension n. On note $(-,-)$ le produit scalaire canonique sur les divers espaces de tenseurs de carré intégrable sur M.

Définition 66. *Pour tout entier p, on note $\star$ l'isomorphisme canonique de faisceaux $\Omega^p_M \xrightarrow{\star} \Omega^{n-p}_M$, et on définit la différentielle covariante δ par la formule $\delta = (-1)^{n(p+1)+1} \star d \star$, où d désigne la différentielle extérieure. On note Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami défini par la formule suivante :*

$$\Delta = d\delta + \delta d$$

On remarquera que $\star \star \omega = (-1)^{p(n-p)} \omega$ pour toute forme différentielle ω de degré p.

[8] L'involution de Cartan θ vaut l'identité sur $\mathfrak{k}$ et -1 sur $\mathfrak{p}$.

Proposition 67. *On suppose que M est complète. Pour toutes formes différentielles $\alpha \in \Omega^p(M)$ et $\beta \in \Omega^{p+1}(M)$, si α, $d\alpha$, β et $\delta\beta$ sont de carré intégrable, alors on a la formule :*

$$(d\alpha, \beta) = (\alpha, \delta\beta)$$

Définition 68. *Une forme différentielle sur M est dite harmonique si et seulement si $\Delta M = 0$.*

On a le théorème d'Andreotti-Vesentini suivant, qui résulte de la proposition précédente dans le cas compact.

Théorème 69. *Une forme différentielle L^2 est harmonique si et seulement si elle est fermée et cofermée.*

Rappelons le théorème de Hodge pour les variétés riemanniennes compactes.

Théorème 70. *On suppose que M est compacte. Alors, toute forme différentielle sur M se décompose se manière unique sous la forme $\alpha + \beta + \gamma$ où β est harmonique, α dans l'image de d et γ dans l'image de δ.*

Dans le cas non-compact, les choses ne sont pas si « simples », mais on peut quand-même énoncer la forme faible suivante d'un théorème de Kodaira :

Théorème 71. *Soit ω une p-forme différentielle L^2 telle que $d\omega = 0$. Alors, il existe une p-forme L^2 et harmonique $H\omega$ et un élément $\sigma \in \Omega^{p-1}(M)$ telle que $\omega = H\omega + d\sigma$.*

Proposition 72. *Les formes différentielles sur X correspondant aux éléments de $I_H^\star$ sont des formes harmoniques.*

Démonstration de la proposition — D'après le lemme 58 et la proposition 56, on sait que les éléments de $I_H^\star$ sont des formes fermées. En utilisant l'opérateur $\star$, on voit qu'elles sont aussi cofermées, étant donné que l'action à droite de H et l'action à gauche de K sur X se fait par isométries, ce qui permet de conclure. $\lhd$

4.3. Théorème de Matsushima-Garland. — En utilisant un résultat de Matsushima et Garland, nous allons voir comment Borel ramène le théorème principal à l'existence d'un sous-complexe de $\Omega(X)^\Gamma$ vérifiant certaines conditions.

Théorème 73. *Soit Γ' un sous-groupe de Γ, distingué, d'indice fini et sans torsion. Soient C' un sous-complexe de $\Omega_X^{\Gamma'}$ et m' une constante positive tels que :*

1. *L'inclusion $C' \longrightarrow \Omega(X)^{\Gamma'}$ induit un isomorphisme en cohomologie en degrés $\leq m'$;*
2. *L'espace C'^q est formé de formes différentielles L^2 pour $q \leq m'$;*
3. *Pour tout $q \leq m'$, I_H^q est contenu dans C'^q.*

Alors, le morphisme $j_\Gamma^q : \mathbf{H}^q(X_u; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}^q(\Gamma; \mathbb{R})$ est injectif pour $q \leq m'$ et bijectif pour $q \leq \min(m', m(G))$, où $m(G)$ est une constante ne dépendant que de l'algèbre de Lie de G, telle que $m(G) \geq \frac{n-5}{4}$ si G est la restriction de Weil de SL_n de K à $\mathbb{Q}$.

Démonstration du théorème — D'après les considérations précédemment faites, on peut supposer sans danger que $\Gamma = \Gamma'$.

Commençons par montrer l'injectivité de j_Γ^q pour $q \leq m'$. Soit donc $\omega \in I_H^q$. On suppose que ω est un cobord dans $\Omega(X/\Gamma)$. D'après l'hypothèse 1., il existe $\sigma \in C'^{q-1}$ tel que $\omega = d\sigma$. D'après 2., σ est L^2. D'après la proposition 67, on a l'égalité $(d\sigma, \omega) = (\sigma, \delta\omega)$. La forme ω étant harmonique, on a $\delta\omega = 0$, ainsi, $(\omega, \omega) = (d\sigma, \omega) = 0$. Ici, on a seulement utilisé le fait que ω était harmonique et L^2, ainsi, l'espace vectoriel des formes harmoniques et L^2 de degré q s'injecte dans $\mathbf{H}^q(\Gamma; \mathbb{R})$.

Réciproquement, toute classe dans $\mathbf{H}^q(\Omega(X/\Gamma))$ est représentée par une q-forme différentielle L^2 d'après les hypothèses 1. et 2. Or, d'après le théorème 71 de Kodaira, toute q-forme différentielle L^2 et fermée est la somme d'une forme harmonique L^2 et d'un cobord. On a ainsi montré que $\mathbf{H}^q(\Gamma;\mathbb{R})$ s'identifiait à l'espace des formes harmoniques de carré intégrable sur X/Γ. Il reste donc à montrer que toute q-forme η_0 harmonique et L^2 sur X/Γ est telle que l'unique relèvement η invariant-Γ de η_0 dans $\Omega(X)$ est en fait invariant-H, pourvu que $q \leq m(G)$.

La démonstration nécessitant de nombreux calculs, nous nous contenterons de résumer les idées. On peut choisir une base orthonormale de $\mathfrak{g}$ pour g_0 formée d'éléments $(X_i)_{1\leq i\leq N}$ dans $\mathfrak{p}$ et d'éléments $(X_\alpha)_{N<\alpha\leq \dim G}$ dans $\mathfrak{k}$. Pour tout entier $p \leq 0$ et toute suite strictement croissante I de p-entiers dans $\{1,\dots,N\}$, on note ω^I le produit extérieur (ordonné dans le sens évident) des formes ω_i où i est atteint par la suite I, et où $(\omega_j)_j$ sont les 1-formes différentielles duales des $(X_i)_i$ vus comme champs de vecteurs invariants à droite. On peut écrire $\eta_0 = \sum_{|I|=q} \eta_I \omega^I$ où η_I est une fonction différentiable sur G/Γ, et où $\eta_I = 0$ si I n'est pas contenu dans $\{1,\dots,N\}$. Il s'agit de montrer que les dérivées $X_j \cdot \eta_I$ sont nulles pour $j \in \{1,\dots,N\}$.

On considère la fonction $\varphi(x) = \sum_{1\leq a,b\leq N;I} \left([X_a,X_b]\eta_I\right)^2$ et on calcule son intégrale sur H/Γ, et après plusieurs manipulations (comme des intégrations par parties), on obtient que $X_j\cdot\eta_I = 0$ à condition de supposer que $q \leq m(G)$. Ce calcul a été fait par Matsushima dans le cas où H/Γ est compact, mais Garland l'a étendu au cas général. En effet, pour faire des intégrations par parties, il faut contrôler ce qui se passe au bord des variétés considérées. Néanmoins, on peut voir que le calcul de Matsushima marche si on suppose que pour tout élément A dans l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$, $U \cdot \eta_I$ est dans L^2 pour tout I. Pour faire cela, il suffit de convoler les fonctions η_I avec des fonctions α de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support compact sur G, invariantes par conjugaison avec les éléments de K. Les hypothèses et la conclusion restent vérifiées pour ces fonctions convolées, et quand on fait converger α vers un « Dirac concentré sur K », la convolée, qui est dans I_H^q, converge au sens L^2 vers η, donc est dans I_H^q par un argument de complétude des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés de dimension finie. ◁

4.4. Démonstration du théorème principal. — Nous allons démontrer le théorème principal, en admettant pour l'instant que les hypothèses du théorème précédent sont vérifiées si G est la restriction de Weil de K à $\mathbb{Q}$ de SL_n, avec une constante m' tendant vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME — On peut considère la suite infinie d'immersions fermées $G_1 \longrightarrow G_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_n \longrightarrow \cdots$, où $G_n = \mathcal{R}_{K/\mathbb{Q}}\mathsf{SL}_n$. À q fixé, pour n grand, le morphisme $j^q : \mathbf{H}^q(X_{n,u};\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{H}^q(\mathsf{SL}_n(\mathcal{O}_K);\mathbb{R})$ est un isomorphisme. On en déduit l'existence d'un isomorphisme canonique $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}^\star(X_{n,u};\mathbb{R}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}^\star(\mathsf{SL}_n(\mathcal{O}_K);\mathbb{R})$. L'isomorphisme canonique suivant en résulte :

$$\mathbf{H}^\star(\mathsf{SL}_\infty(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}^\star(X_{n,u};\mathbb{R})$$

Étudions de manière plus approfondie le membre de droite. On a vu que le groupe de Lie $G_n(\mathbb{R})$ s'identifiait au produit des $\mathsf{SL}_n(K_v)$ quand v parcourt l'ensemble des places archimédiennes de K, K_v désignant le complété de K en v. Il s'agit donc de décrire les jumeaux compacts des espaces symétriques associés aux $\mathbb{R}$-groupes algébriques $\mathcal{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathsf{SL}_n$ et SL_n. On voit sans difficulté que dans le cas de $\mathcal{R}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}}\mathsf{SL}_n$, on trouve SU_n et que dans le cas de SL_n, on trouve $\mathsf{SO}_n\backslash\mathsf{SU}_n$. On obtient ainsi un isomorphisme canonique (modulo le choix d'une numérotation des places archimédiennes) :

$$X_{n,u} = (\mathsf{SO}_n \backslash \mathsf{SU}_n)^{r_1} \times \mathsf{SU}_n^{r_2}$$

D'après la formule de Künneth, la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{H}^\star(X_{n,u};\mathbb{R})$ est le produit tensoriel (au sens gradué) des algèbres de cohomologie singulière réelle des espaces symétriques compacts associés à chacune des places archimédiennes de K. Il suffit donc de connaître la structure de l'algèbre obtenue en prenant la limite projective des algèbres de cohomologie singulière réelle des espaces compacts SU_n et $\mathsf{SU}_n/\mathsf{SO}_n$, le premier cas correspondant aux places complexes tandis que le deuxième apparaît avec les places réelles de K. Ces algèbres ont été calculées grâce à des théorèmes de Bott dans le séminaire Cartan [**C**].

Ainsi, $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}^\star(\mathsf{SU}_n;\mathbb{R})$ est une algèbre extérieure dont les générateurs $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ sont placés en degré $2i+1$, et $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{H}^\star(\mathsf{SO}_n\backslash\mathsf{SU}_n;\mathbb{R})$ est une algèbre extérieure dont les générateurs $(x_i)_{i\in\mathbb{N}^\star}$ sont placés en degré $4i+1$.

On en déduit que $\mathbf{H}^\star(\mathsf{SL}_\infty(\mathcal{O}_K);\mathbb{R})$ est une algèbre extérieure comportant r_1+r_2 générateurs placés en degré $4i+1$ pour $i\in\mathbb{N}^\star$ et r_2 générateurs placés en degré $4i-1$. Cette algèbre est canoniquement isomorphe à la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbf{H}^\star\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)$. Or, d'après un théorème sur les H-espaces, pour tout $q\geq 1$, $\pi_q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K)\big)\otimes\mathbb{R}$ s'injecte par le morphisme d'Hurewicz dans $\mathbf{H}_q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)$, et si on note D^q le sous-espace vectoriel de $\mathbf{H}^q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)$ engendré par les produits d'éléments de degré $<q$, alors, l'image du morphisme de Hurewicz est exactement l'orthogonal de D^q pour la dualité parfaite $\mathbf{H}_q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)\otimes_\mathbb{R}\mathbf{H}^q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)\longrightarrow\mathbb{R}$, autrement dit, on a l'isomorphisme canonique suivant qui permet de conclure :

$$\pi_q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big) = \mathbf{Hom}_\mathbb{R}\Big(\mathbf{H}^q\big(B\mathsf{SL}_\infty^+(\mathcal{O}_K);\mathbb{R}\big)/D^q,\mathbb{R}\Big)$$

◁

5. Compactification de Borel-Serre

Nous allons plonger X dans une variété à coins $\overline{X}$ de sorte que X soit l'intérieur de $\overline{X}$ et que Γ (que l'on peut supposer sans torsion) continue d'agir proprement discontinûment sans points fixes sur $\overline{X}$ de telle manière que $\overline{X}/\Gamma$ soit une variété à coins compacte. Cette construction est faite dans l'article [**BS**] dans un cadre général.

On rappelle que l'on a fixé un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire semi-simple connexe G dont le groupe des points réels H soit connexe.

5.1. Préliminaires sur les groupes algébriques. — Nous allons utiliser quelques résultats sur les groupes algébriques sur des corps non nécessairement algébriquement clos que l'on peut trouver dans l'article de référence [**BT**] sur les groupes réductifs.

Définition 74.

– *Soit L un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire. Le radical RL de L est le plus grand sous-groupe fermé résoluble distingué connexe de L. Le radical déployé R_dL de L est le plus grand sous-groupe fermé distingué connexe de L qui possède une suite de composition dont les quotients sont $\mathbb{Q}$-isomorphes à $\mathbb{G}_a$ ou $\mathbb{G}_m$. Le radical unipotent R_uL de L est le plus grand sous-groupe fermé distingué unipotent connexe de L.*
– *On dit d'un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire qu'il est semi-simple (resp. réductif) si son radical (resp. son radical unipotent) est trivial.*

– *Si M est un sous-$\mathbb{Q}$-groupe fermé d'un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire P, on dit que c'est un sous-groupe de Lévi de P si la projection $M \longrightarrow P/R_uP$ est un isomorphisme, en particulier, on a un produit semi-direct :*

$$1 \longrightarrow R_uP \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 1$$

On montre qu'un tel sous-groupe de Lévi existe toujours (en caractéristique 0).
– *Un sous-$\mathbb{Q}$-groupe fermé P de G est un $\mathbb{Q}$-parabolique de G si et seulement si la variété quotient G/P est projective*[9].
– *Si L est un $\mathbb{Q}$-groupe algébrique linéaire, on note $X(L)$ le groupe abélien des $\mathbb{Q}$-caractères de L i.e. l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Q}$-schémas en groupes $L \longrightarrow \mathbb{G}_m$ tandis que l'on note $Y(L)$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes à un paramètre de L i.e. l'ensemble des morphismes de $\mathbb{Q}$-schémas en groupes $\mathbb{G}_m \longrightarrow L$, qui est un groupe abélien si L est commutatif.*

On fixe une fois pour toutes un $\mathbb{Q}$-tore déployé maximal S de G. On note ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ l'ensemble des $\mathbb{Q}$-racines de G par rapport à S i.e. l'ensemble des $\mathbb{Q}$-caractères non triviaux de S par la représentation adjointe. Comme on peut toujours diagonaliser simultanément des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur $\overline{\mathbb{Q}}$ commutant deux-à-deux et que S est $\mathbb{Q}$-déployé, on a la décomposition suivante en espaces de poids où $\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}}$ désigne l'algèbre de Lie de G :

$$\mathfrak{g}_{\mathbb{Q}} = \mathfrak{g}^0 \oplus \bigoplus_{\alpha \in {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)} \mathfrak{g}^\alpha$$

où $\mathfrak{g}^\alpha$ désigne l'espace propre simultané de tous les éléments de $G(\overline{\mathbb{Q}})$ agissant sur $\mathfrak{g}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ via la représentation adjointe, associé à un caractère α. On sait que pour tout $\alpha \in {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$, $\mathfrak{g}^\alpha$ est de dimension 1. On peut associer à α un sous-$\mathbb{Q}$-groupe fermé unipotent U_α, appelé groupe radiciel. Ce groupe est caractérisé par l'existence d'un isomorphisme $\mathbb{G}_a \xrightarrow{\varphi} U_\alpha$ tel que l'on ait la formule $t.\varphi(x).t^{-1} = \varphi(t^\alpha.x)$ pour tous $t \in S(\overline{\mathbb{Q}})$ et $x \in \mathbb{G}_a(\overline{\mathbb{Q}})$.

Comme S est $\mathbb{Q}$-déployé, on a une dualité parfaite $X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} Y(S) \longrightarrow \mathbb{Z}$ entre $\mathbb{Z}$-modules libres de rang $\dim S$ et ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ engendre $X(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ comme $\mathbb{Q}$-espace vectoriel car G est semi-simple. Ainsi, les racines $\alpha \in {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ définissent des murs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $Y(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. On sait qu'il s'agit d'un système de racines.

On choisit alors une chambre C de Weyl de ce système de racines[10]. On note $\Delta \subset {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ l'ensemble des murs de la chambre C dans l'appartement $Y(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. L'ensemble Δ est une base de ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$, ou encore l'ensemble des racines simples de ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ pour l'ordre sur ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ associé à C : toute racine $\alpha \in {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ est combinaison linéaire à coefficients entiers de racines simples, les coefficients étant soit tous positifs soit tous négatifs. On a ainsi une notion de racines positives et négatives, dont les ensembles sont notés respectivement ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)^+$ et ${}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)^-$.

5.2. Classification des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques de G. — On rappelle que l'on a choisi un $\mathbb{Q}$-tore déployé maximal S de G et une chambre de Weyl dans l'appartement $Y(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$, et que l'on a noté $\Delta \subset {}_{\mathbb{Q}}\Phi(S,G)$ l'ensemble des racines simples correspondantes.

---

[9] On sait que G/P est toujours quasi-projective.

[10] Il s'agit d'une composante connexe du complémentaire des murs dans $Y(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$. Autrement dit, on choisit une chambre dans notre appartement. Ce choix n'en est pas vraiment un puisque le groupe de Weyl (qui est un groupe de Coxeter) agit simplement transivitement sur l'ensemble des chambres. Néanmoins, ce choix n'est pas anodin pour la compactification de Borel-Serre.

Définition 75. *Soit θ un sous-ensemble de Δ. On définit $T_\theta = \left(\bigcap_{\alpha\in\theta} \ker \alpha\right)^\circ$ et on note Z_θ le centralisateur de T_θ dans G et V_θ le sous-groupe fermé engendré par les U_α pour toute racine positive α qui n'est pas dans $\mathbb{N}\theta$. On définit enfin $P_\theta = Z_\theta.V_\theta$ et on a la décomposition de Lévi de P_θ en produit semi-direct :*

$$1 \longrightarrow V_\theta \longrightarrow P_\theta \longrightarrow Z_\theta \longrightarrow 1$$

Tous ces groupes algébriques sont définis sur $\mathbb{Q}$.

Théorème 76. *Les $(P_\theta)_{\theta\subset\Delta}$ sont les seuls sous-$\mathbb{Q}$-groupes paraboliques de G contenant P_ϕ. De plus, tout sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique est conjugué par $G(\mathbb{Q})$ (resp. $G(\overline{\mathbb{Q}})$) à un P_θ pour un unique $\theta \subset \Delta$.*

5.3. Action géodésique associée à un sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique de G. — Pour construire la compactification de Borel-Serre, nous allons associer à tout sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique P de G un groupe de Lie réel A_P canoniquement isomorphe à $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^{\Delta-\theta}$ où θ est l'unique partie de Δ tel que P soit conjugué à P_θ. Nous allons ensuite définir une action canonique de A_P sur X que l'on appelle l'action géodésique.

Le centre du $\mathbb{Q}$-groupe algébrique P/R_uP est un tore T. On peut noter S_P le plus grand sous-tore $\mathbb{Q}$-déployé de T. On voit aussitôt que $S_P = R_dP/R_uP$. On note A_P la composante neutre du groupe de Lie réel $S_P(\mathbb{R})$.

Essentiellement parce que les paraboliques de G sont égaux à leur normalisateur, si P et P' sont deux $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques conjugués, alors on a un isomorphisme *canonique* $S_P = S_{P'}$. En particulier, si on revient à notre $\mathbb{Q}$-parabolique P, on a un isomorphisme canonique $S_P = S_{P_\theta}$. On sait que $\Delta - \theta$ forme une base du $\mathbb{Q}$-vectoriel $X(S_{P_\theta}) \otimes \mathbb{Q}$, ainsi on obtient un isomorphisme canonique $A_P = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^{\Delta-\theta}$.

Pour tout point $x \in X$, on note K_x le sous-groupe compact maximal de $H = G(\mathbb{R})$ correspondant. On note $L_{x,P}$ l'unique $\mathbb{R}$-sous-groupe de Lévi de $P_\mathbb{R}$ dont les points réels soient stables par l'involution de Cartan de $G(\mathbb{R})$ associée à K_x. On peut donc identifier $L_{x,P}$ à $(P/R_uP)_\mathbb{R}$ et par conséquent on peut noter A_P^x le sous-groupe de $L_{x,P}(\mathbb{R})$ correspondant à A_P selon cette identification.

Si M est un $\mathbb{R}$-groupe algébrique connexe, on note ${}^\circ M$ le sous-$\mathbb{R}$-groupe algébrique de M défini par la formule

$${}^\circ M = \bigcap_{a\in X(M)_\mathbb{R}} \ker a^2$$

Comme $K_x \cap P(\mathbb{R}) = K_x \cap {}^\circ L_{x,P}(\mathbb{R})$, on a la décomposition suivante :

$$[(K_x \cap P(\mathbb{R}))\backslash {}^\circ L_{x,P}(\mathbb{R})] \times R_uP(\mathbb{R}) = (K_x \cap P(\mathbb{R}))\backslash {}^\circ P(\mathbb{R})$$

De plus, on a une décomposition en produit semi-direct :

$$1 \longrightarrow {}^\circ P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R}) \longrightarrow A_P^x \longrightarrow 1$$

Comme A_P^x est dans le centre de $K_x \cap P(\mathbb{R}) = K_x \cap {}^\circ L_{x,P}(\mathbb{R})$, la multiplication $A_P^x \times {}^\circ P(\mathbb{R}) \longrightarrow P(\mathbb{R})$ induit un isomorphisme

$$\mu_P^x : A_P^x \times [(K_x \cap P(\mathbb{R}))\backslash {}^\circ L_{x,P}(\mathbb{R})] \times R_uP(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} (K_x \cap P(\mathbb{R}))\backslash P(\mathbb{R}) = K_x\backslash G(\mathbb{R}) = X$$

Si on note $Z_P^x = (K_x \cap P(\mathbb{R}))\backslash {}^\circ L_{x,P}(\mathbb{R})$, on a ainsi construit une décomposition de X :

$$\mu_P^x : A_P^x \times Z_P^x \times R_uP(\mathbb{R}) \xrightarrow{\simeq} X$$

Définition 77. *Pour tout point $x \in X$, on définit une action de A_P^x sur X en faisant agir A_P^x par multiplication sur le premier facteur de la décomposition précédente de X.*

Comme A_P^x est canoniquement isomorphe à A_P, ceci définit une action (notée à gauche) de A_P sur X, qui ne dépend pas du choix de x. On peut donc définir une action canonique de A_P sur X, que l'on appelle l'action géodésique associée au $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique P de G.

5.4. Définition de $\overline{X}$. — Nous allons associer à tout $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique P de G une variété à coins $X(P)$. Nous recollerons ensuite ensemble toutes ces variétés à coins pour former $\overline{X}$.

Définition 78.

- *Pour tout sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique Q de G, on note $e(Q) = A_Q \backslash X$;*
- *Pour tout sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique P de G, on note $X(P)$ l'espace topologique $\overline{A_P} \otimes_{A_P} X$ obtenu en quotientant l'espace $\overline{A_P} \times X$ par la relation d'équivalence engendrée par $(a \cdot b, x) \sim (a, b \cdot x)$ pour tous $a \in \overline{A_P}$, $b \in A_P$ et $x \in X$ où $\overline{A_P}$ désigne l'espace topologique $\mathbb{R}_+^{\Delta-\theta}$ dont A_P est canoniquement identifié au complémentaire ouvert du bord, l'action de A_P sur $\overline{A_P}$ étant la multiplication coordonnée par coordonnée.*

Les orbites de $\overline{A_P} = \mathbb{R}_+^{\Delta-\theta}$ sous l'action de $A_P = \left(\mathbb{R}_+^\star\right)^{\Delta-\theta}$ sont en bijection évidente[11] avec l'ensemble des parties de $\Delta - \theta$, c'est-à-dire l'ensemble des parties θ' de Δ contenant θ, c'est-à-dire, d'après le théorème 76 de classification des $\mathbb{Q}$-paraboliques, à l'ensemble des $\mathbb{Q}$-sous-groupes paraboliques Q de G contenant P.

Le stabilisateur de la fonction caractéristique de $\theta' - \theta$ sous A_P s'identifie canoniquement à A_Q. On en déduit une décomposition ensembliste canonique de $X(P)$:

$$X(P) = \coprod_{Q \supset P} A_Q \backslash X = \coprod_{Q \supset P} e(Q)$$

La structure de variété à coins de $X(P)$ est induite par tous les isomorphismes canoniques $X(P) = \overline{A_P} \times Z_P^x \times R_u P(\mathbb{R})$. En effet, on a vu que, comme A_P-ensemble, X se décompose en $A_P^x \times Z_P^x \times R_u P(\mathbb{R})$.

On note $\overline{X}$ la réunion disjointe ensembliste des $e(P)$ quand P parcourt tous les sous-$\mathbb{Q}$-groupes paraboliques de $\overline{X}$. On identifie les ensembles $X(P)$ à des sous-ensembles de $\overline{X}$ de la manière évidente.

Si P et Q sont deux sous-$\mathbb{Q}$-groupes paraboliques de G, on remarque que $X(P) \cap X(Q) = X(R)$ où R désigne le plus petit sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique de G contenant P et Q. Du fait que pour tout couple de $\mathbb{Q}$-paraboliques P, Q tels que $P \subset Q$, l'application $X(Q) \longrightarrow X(P)$ induit un homéomorphisme de $X(Q)$ sur un ouvert de $X(P)$, on voit qu'il existe une unique topologie sur $\overline{X}$ pour laquelle les $X(P)$, pour tout $\mathbb{Q}$-parabolique P de G, soient ouverts et aient leur topologie induite par celle de $\overline{X}$. On note $\partial\overline{X}$ le fermé complémentaire de X dans $\overline{X}$. Pour tout point $y \in \overline{X}$, on note P_y l'unique $\mathbb{Q}$-sous-groupe parabolique de G tel que $y \in e(P_y)$.

5.5. Action de Γ sur $\overline{X}$. — Soit Γ un sous-groupe arithmétique de G. On peut vérifier que l'action de Γ par conjugaison sur $G_{\mathbb{Q}}$ (et plus généralement l'action de $G(\mathbb{Q})$) induit une action sur $\overline{X}$ qui prolonge celle sur X. Le théorème suivant justifie le terme de compactification de Borel-Serre pour désigner $\overline{X}/\Gamma$:

Théorème 79. *Si Γ est sans torsion, Γ agit proprement, discontinûment, sans point fixe sur $\overline{X}$. De plus, le quotient $\overline{X}/\Gamma$ est une variété à coins compacte.*

[11] On envoie une partie $L \subset \Delta - \theta$ sur la fonction caractéristique de L dans $\mathbb{R}_+^{\Delta-\theta} = A_P$.

6. Fin de la démonstration du théorème principal

Définition 80. *Soit U un ouvert de $\overline{X}$. Une forme différentielle ω sur $U \cap X$ est dite à croissance logarithmique de long de $U \cap \partial\overline{X}$ si et seulement si, pour tout point $y \in \partial\overline{X}$, si on note $P = P_y$, pour tout $x \in X$ (resp. il existe...), il existe un ouvert relativement compact F de $Z_P^x \times R_uP(\mathbb{R})$ et une carte $\psi : V \longrightarrow \mathbb{R}^d$ d'un voisinage ouvert V de $\overline{F}$ tel que, sous l'identification $X(P) = \mathbb{R}_+^{\Delta-\theta} \times Z_P^x \times R_uP(\mathbb{R})$, y soit dans $\{(0,\ldots,0)\} \times F$ et que, via l'isomorphisme logarithmique $\left(\mathbb{R}_+^\star\right)^{\Delta-\theta} \xrightarrow{\log} \mathbb{R}^{\Delta-\theta}$ et la carte ψ, les coefficients (au sens le plus naïf du terme) de ω vue comme forme différentielle sur un « voisinage » du point y dans $\mathbb{R}^{\Delta-\theta} \times \mathbb{R}^d$ soient majorés en valeur absolue par un polynôme en fonction des coordonnées correspondant aux éléments de $\Delta - \theta$ sur un ensemble de la forme $\rrbracket -\infty, t\rrbracket^{\Delta-\theta} \times \psi(F)$ pour un certain $t \in \mathbb{R}$.*

Définition 81. *On note $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}}$ le faisceau des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{X}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\Omega^\star_{\overline{X}}[\log]$ le complexe de faisceaux sur $\overline{X}$ qui à un ouvert U de $\overline{X}$ fait correspondre l'espace des formes différentielles ω sur $U \cap X$ telles que ω et $d\omega$ soient à croissance logarithmique le long de $U \cap \partial\overline{X}$.*

On remarque que $\Omega^\star_{\overline{X}}[\log]n$ est un Module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}}$. La notion de croissance logarithmique le long du bord étant invariante par l'action à droite du groupe $G(\mathbb{Q})$ sur $\overline{X}$, on peut raisonnablement faire la définition suivante :

Définition 82. *On suppose que Γ est un sous-groupe arithmétique sans torsion de G. Notons $\overline{\pi} : \overline{X} \longrightarrow \overline{X}/\Gamma$ la projection canonique. On pose $\Omega^\star_{\overline{X}/\Gamma}[\log] = \left(\overline{\pi}_\star\Omega^\star_{\overline{X}}[\log]\right)^\Gamma$ et on note $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}/\Gamma} = \left(\overline{\pi}_\star(\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}})\right)^\Gamma$ le faisceau des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\overline{X}/\Gamma$. Le faisceau $\Omega^\star_{\overline{X}/\Gamma}[\log]n$ est encore un Module sur le faisceau d'anneaux $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}/\Gamma}$.*

On peut associer à G une autre constante $c(G)$ qui, dans le cas de la restriction de Weil de K à $\mathbb{Q}$ de SL_n est supérieure ou égale à $\frac{n-3}{2}$. Le théorème suivant permet donc de conclure que les hypothèses du théorème 73 sont vérifiées dans des conditions permettant de terminer la démonstration du théorème principal.

Théorème 83. *Notons $C = \Omega^\star_{\overline{X}/\Gamma}[\log]\left(\overline{X}/\Gamma\right)$. Alors, les conditions suivantes sont vérifiées :*

1. *L'inclusion évidente $C \longrightarrow \Omega^\star(X/\Gamma)$ est un quasi-isomorphisme ;*
2. *Pour $q \leq c(G)$, C^q est formé de formes différentielles L^2 ;*
3. *$I_G^\star \subset C$.*

Démonstration du théorème — 1. De même que pour les variété de classes $\mathcal{C}^\infty$ « sans coins », le faisceau d'anneaux $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}/\Gamma}$ est mou i.e. admet des partitions de l'unité. Comme $\Omega^\star_{\overline{X}/\Gamma}[\log]$ est évidemment un complexe de $\mathcal{C}^\infty_{\overline{X}/\Gamma}$-Modules, il vient aussitôt que $\Omega^\star_{\overline{X}/\Gamma}[\log]$ est un complexe de faisceaux fins. De plus, $\Omega^\star_{\overline{X}}[\log]$ constitue une résolution du faisceau constant $\mathbb{R}$ sur $\overline{X}/\Gamma$, vu que la démonstration classique du lemme de Poincaré se comporte bien vis-à-vis des conditions de croissance au bord que l'on a imposées. D'après **[G]**, dans le diagramme suivant les flèches horizontales sont des isomorphismes pour tout $q \in \mathbb{N}$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{H}^q(C) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d] & \mathbf{H}^q\left(\overline{X}/\Gamma;\mathbb{R}\right) \arrow[d] \\
\mathbf{H}^q(\Omega^\star(X/\Gamma)) \arrow[r, "\simeq"] & \mathbf{H}^q(X/\Gamma;\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

Comme le fait d'enlever le bord (resp. les coins) d'une variété à bord (resp. à coins) ne change pas son type d'homotopie (faible), on en déduit que la flèche de droite est un isomorphisme, donc la flèche de gauche aussi.

2. Il s'agit de faire un calcul local au niveau des coins.

3. Si $\omega \in I_G^q$, alors ω est invariante par l'action à droite de A_P^x pour tout sous-$\mathbb{Q}$-groupe parabolique P de G et $x \in X$. En comparant cette action à droite à l'action géodésique de A_P, on obtient des estimations de la croissance de ω le long du bord, et il se trouve qu'un contrôle de ω sur certaines parties compactes implique alors que les « coefficients » de ω sont bornés au voisinage de tout point de $\partial\overline{X}/\Gamma$. $\triangleleft$

Bibliographie

[Bass] **H. Bass**. K-theory and stable algebra. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S*, **22** (1964), pages 489-544.

[B1] **Armand Borel**. Introduction aux groupes arithmétiques. *Actualités scientifiques et industrielles*, **1341** (1969). Publications de l'institut de mathématique de l'université de Strasbourg, **15**. Hermann.

[B2] **Armand Borel**. Stable real cohomology of arithmetic groups. *Annales scientifiques de l'École normale supérieure* (4ème série), **7** (1974), pages 235-272.

[B3] **Armand Borel**. Cohomologie de SL_n et valeurs de fonctions zêta aux points entiers. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa* (4ème série), **4** (1977), no. 4, pages 613-636.

[BS] **Armand Borel**, **Jean-Pierre Serre**. Corners and arithmetic groups. *Commentarii Mathematici Helvetici*, **48** (1973), pages 436-491.

[BT] **Armand Borel**, **Jacques Tits**. Groupes réductifs. *Publications Mathématiques de l'I.H.E.S.*, **27** (1965), pages 55-152.

[C] **Henri Cartan**. Périodicité des groupes d'homotopie stables des groupes classiques, d'après Bott. *Séminaire Cartan*, 12ème année (1959-1960). ENS.

[dR] **Georges de Rham**. Variétés différentiables, formes, courants. Formes harmoniques. *Actualités scientifiques et industrielles*, **1222** (1973). Publications de l'institut mathématique de l'université de « Nancago ». *Hermann*.

[G] **Roger Godement**. Topologie algébrique et théorie des faisceaux. *Actualités scientifiques et industrielles*, **1252** (1958). Publications de l'institut de mathématique de l'université de Strasbourg, **13**. Hermann.

[H] **Sigurdur Helgason**. Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces. *Pure and applied mathematics*, **80** (1978). *Academic Press*.

[HS] **Gerhard Hochschild**, **Jean-Pierre Serre**. Cohomology of Lie algebras. *Annals of Mathematics* (2ème série), **57** (1953), no. 3, pages 591-603.

[L] **S. Lichtenbaum**. Values of zeta-function, étale cohomology and algebraic k-theory. In D.G. Quillen, editor, *K-theory*, volume II, 1974.

[M] **Yozô Matsushima**. On Betti numbers of compact, locally symmetric Riemannian manifolds. *Osaka Mathematical Journal*, **14** (1962), pages 1-20.

[R] **M.S. Raghunathan**. A note on quotients of real algebraic groupes by arithmetics subgroups. *Inventiones mathematicae*, **4** (1968), pages 318-335.

[S] **C.-L. Siegel**. Gesammelte Abhandlungen. *Springer-Verlag*, 1966.

[TT] **Robert W. Thomason**, **Thomas Trobaugh**. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories *in The Grothendieck Festschrift : a collection of articles written in honor of the 60th birthday of Alexander Grothendieck*, Volume III, pages 247-436. *Progress in Mathematics*, **88** (1990). *Birkhaüser*.

[vdK] **W. van der Kallen**. Homology stability for linear groups. *Inventiones mathematicae*, **60** (1980), pages 269-295.

[Vas] **N. Vaserstein**. Stable rank of rings and dimensionality of topological spaces. *Funktional Anal. Appl.*, **5** (1971), pages 102-110.

Frédéric Deglise et Joël Riou