Joël MERKER
Professeur des universités
Département de Mathématiques d'Orsay
Bâtiment 425, Faculté des sciences, F-91405 Orsay Cedex
www.math.ens.fr/~merker/index.html
merker@dma.ens.fr

Philosophie générale des mathématiques

(xiii+625 pages)

Problème de Riemann-Helmholtz-Lie

(xxiii+325 pages)

Theory of Transformations Groups

(xvi+670 pages)

Doctorat de philosophie en trois volumes **31 août 2011**
Sous la direction du Professeur
Jean-Jacques SZCZECINIARZ
Université de Paris 7

Table des matières

Philosophie générale des mathématiques

Chap. : L'Ouvert mathématique **1**
1. Le réel de l'Ouvert : Argument, synopsis, intentions **1**
L'Obscur mathématique 1
Penser *en situation* le non-pensé de l'ouverture 2
L'héritage français de philosophie des mathématiques 2
Diffusion, dissémination, diffraction d'un Ouvert objectivable 3
L'Ouvert posé dans des univers axiomatiques 4
Potentialité et expression 5
L'Ouvert intersubjectif 6
Thèse du réel de l'Ouvert 6
Les obscurités du travail inachevé 7
Le Voir de l'Ouvert 7
L'ouverture désorientée totale 8
La pensée disparaissante 8
Le métaphysique dans les mathématiques 9
2. Discussion intercalaire **9**
Avertissement terminologique 9
Interprétation inappropriée de mysticisme 10
Appréhension dynamique 10
Conserver la trace du mouvement 10
3. Choisir un style de discours sur l'Ouvert **11**
Métaphores lumineuses 11
Limites du discours didactique 11
Proximité de la parole poétique 12
Arbres mathématiques, mathématiques luxuriantes 12
Questions gromoviennes 14
4. Thèses sur l'Ouvert et sur le principe de non-savoir **15**
Axiome d'existence 15
Principe de non-savoir 15
Thèse générale de mobilisation 16
Suspension et volonté 16
Indices d'ouverture 17

Comment l'Ouvert est-il ouvert ? 17
Nouvelle thèse postulée sur l'Ouvert 17
Le sujet idéalement réceptif à l'Ouvert 19
5. Insuffisance de l'épistémologie du Concept 20
Magnétisme de l'*a posteriori* 20
Cavaillès et le problème du fondement des mathématiques 21
Il n'y a pas d'auto-mouvement des mathématiques 22
Subsumer les mathématiques 23
Retour sur les nécessités internes a posteriori 25
6. Figures allégoriques de l'Obscur, du non-voilement et de la vérité . 27
Métaphores terrestres 27
Nécessité des allégories de la connaissance 28
L'allégorie de la caverne 28
Théorie de la vérité et du non-voilement 28
7. Indécision de la position d'hypothèses et construction du vrai 29
Grothendieck bâtisseur de maisons 29
Schéma de l'indécision de la position d'hypothèses 30
Dynamique de l'éclaircissement 31
Généralités sur l'herméneutique, en philosophie 32
L'herméneutique indécise de la position d'hypothèses, en mathématiques 33
Approfondir les interstices d'un enchaînement d'hypothèses 34
8. Bilan et résumé 35
Les mathématiques comme Recherche 35
Résumé théorique intercalaire 35

Chap. : Exigence abstraite, satisfaction abstraite, Inconscient mathématique 39
1. Prologue 39
Quadrilogie fondamentale 40
Organisation rhétorique et théorique 41
2. Difficultés liminaires 41
La spécialisation : obstacle à la pensée des mathématiques ? 41
Premier doute quant au transfert des catégories psychanalytiques dans les mathématiques 42
La métaphysique silencieuse de la satisfaction 42
3. Prospection préliminaire des attentes 43
4. Attentes et dominations externes 44
Deux écueils dialectiques « duals » 44
Le concept contre la conscience 44
Ce qui se joue en nous 45
Le désert de la psychologie des sciences 45

Scepticisme de principe à l'égard de la psychologie 46
Abondance de dominations 46
Illuminations subliminales 46
5. Formulation abrégée de ces attentes 47
6. Un exemple : analyse de l'« inconscient » par Gauss et triomphe structuraliste de l'a posteriori du concept 47
La construction du polygone régulier à dix-sept côtés à l'aide d'une règle et d'un compas 48
Un exemple d'ingéniosité arithmétique 49
Les structures : raisons cachées de la réussite de la méthode ? 50
Conclusion dogmatique provisoire 51
Vers une thèse négative sur le génie ? 52
Premières objections 52
7. Kant, les facultés et la théorie du génie dans la critique de la faculté de juger 52
Deux facultés 52
Le génie selon Kant 53
Félix Klein 53
Remarque intercalaire 53
8. Thèses négatives sur le génie, refoulement de l'inconscient et privilège des méthodes structurales 53
Thèses de philosophe 54
L'étalon des mathématiques structurales 54
Obstructions à une psychanalyse mathématique 55
Résumé et conclusion : la raison philosophique contre les mathématiques génétiques 55
9. Critique forte du structuralisme triomphant à l'aide du paradoxe de l'*a posteriori* 56
Retour sur le premier écueil 56
Nécessité d'un renversement partiel et d'un relèvement 57
Les profondeurs de ce qui cherche à se dire 57
10. Redressement de l'argumentation 58
Objection galoisienne 58
Hasard et force 58
Questions 58
Permanence de l'infralinguistique 59
Le primate du philosophe 59
Satisfactions, pulsions 59
11. Pour une philosophie de la volonté mathématique 60
12. Introduction aux thèses principales 60
Avertissement : candeur interrogative 60
La sublimation 61

13. Présence de zones motrices infralinguistiques obscures 61
Thèse d'existence 61
Scholie : rayonnement de l'infralinguitique 62
Pédagogie et métaphysique 62
Nécessité de se cloîtrer hors du langage 62
Scholie : le don de solitude 63
Discussion 63
L'intuition de vérité 63
14. Multiplicité et hétérogénéité des influences sur la pensée 64
Thèse 4 et discussion 64
15. Intentionnalité rationnelle 65
Dynamique de la réalisation 65
Intentionnalité rationnelle 65
16. La satisfaction mathématique 65
Thèse 6 66
Dialectique lautmanienne des problèmes 66
Effort de l'esprit et nécessité de réalisation 66
Contre l'opérativité logique constituante 67
17. Conditions de possibilité 67
Thèse 8 ; exemple 67
Discipline de non-savoir 68
18. Éclaircir chaque question. Contempler des généalogies de problèmes. Ne se satisfaire que de solutions complètes 68
19. Portée et limites de l'inconscient 69
Effusions d'incohérence 69
Béance des questions simples 70
Questions déterminées 70
La méthode générale d'Abel 70
Motifs de la méthode axiomatique 71
20. Conclusion : parabole de l'obscurité et de la confusion 71
Mouvement abyssal 72
Prégnance des structures interrogatives 72

Chap. : Théorèmes d'existence, en mathématiques 74
1. Prologue 74
2. Paradoxe de la notion d'être 74
3. L'essence 75
4. La critique par Leibniz de l'argument ontologique de Descartes ... 76
5. La preuve ontologique cartésienne 78
6. Vers le dévoilement des synthèses 80
7. Schémas de genèse 82
8. Les théorèmes d'existence vus par Albert Lautman 84

9. Les schémas de genèse de Lautman **86**
10. La question pure d'existence **91**
11. L'idée de déductibilité et les systèmes formels **92**
12. Bilan et conclusions **97**
13. Diagrammes philosophiques et résultats mathématiques **100**

Chap. : Conjectures mathématiques, preuves mathématiques **120**
Prologue 120
Quel statut pour la proposition mathématique non démontrée ? 120
L'irréversible-synthétique en mathématiques 121
Insuffisances spéculatives 122
Dérobade philosophique 123
Liberté mathématique 124
Conjectures expérimentales étrangères aux démonstrations rigoureuses 125
Inexactitudes et expressions inappropriées 127
Reprise sur le théorème des nombres premiers 131
Conjecture de Collatz 132
La maxime capitale de l'induction 133
Libération par le contre-exemple ? 135
Virtualités pérennes du principe de raison 135
Actifier la question 135
Conjecture de Proth-Gilbreath 136
Retour sur Wittgenstein : deux universalités incomparables 137
Exemple 139
Conjecture de Goldbach 140
Calculs au front 141
Digression sur la nature physique du calcul 142
Dialectique a priori de l'existentiel 143
Heuristique semi-rigoureuse 144
Conjecture des nombres premiers jumeaux 144
Conjecture de Polignac 144
Écarts entre nombres premiers consécutifs 144
Fréquence des écarts entre nombres premiers consécutifs 145
Métaphysique du « tout ce qui est possible se réalise » 145
Raisonnement absurde 146
Maintien du fossé conceptuel 148
Retour sur le théorème des nombres premiers ; doxas anachroniques .. 148
Permanence du provisoire et de la problématicité 149
Démultiplication artificielle des énoncés 151
Arguments heuristiques en théorie analytique des nombres 152
Métaphysique des raisonnements heuristiques 153
Épilogue critique 153

Penser le calcul 154
Directions ouvertes de philosophie des mathématiques 154

Chap. : Écriture mathématique, écriture littéraire 155

1. Syncrétisme de l'idée-forme 155
Deux préjugés de la pensée face au langage 155
Inséparabilité de la Forme et du Contenu 156

2. Micro-mécaniques du style 157
Champs magnétiques perturbés de la microstylistique 157
Acupuncture querelleuse 158
Virtualités par maintien des indécisions 158
Micro-corrections morphologiques 158
Exemple : démonstration de l'identité de Jacobi pour les algèbres associatives 159
Micro-commentaire de la démonstration 159
Exemples de pratiques de soulignement 160
Insertion volontaire d'ingrédients intuitifs 162

3. Génétique du littéral 164
Élongation temporelle ; alentissement 164
Mécanique du naturel 164
Compréhension et appropriation 164
Mobilisations neuro-moléculaires 165
Génétique des textes littéraires 165
Hybridations, croisements, multiplicités 165

4. Sur les illustrations 167
Illustration, ou non-illustration 167
Impossible codification des illustrations en mathématiques ? 167

5. Mathematics is amazingly compressible 167
Alchimie cognitive de la compréhension 167
Orchestrer les actes de pensée 168
Comment écrire ? 169
Le réflexe du pourquoi et du comment 169
Principes, préconisations 169

Partie I : *Courbure de Gauss, formes différentielles, relativité*

Chap. : Courbure des surfaces dans l'espace : le *Theorema Egregium* de Gauss 171

1. Présentation de la *formula egregia* 171
Définition géométrique de la courbure 173
Paradoxe remarquable 174
Méthodologie expositionnelle 176

2. Courbes mathématiques dans le plan **177**
Filaments et trajectoires 177
Identification du continu et coordonnées 178
Trois saisies analytiques des courbes dans le plan 179
Dialectique de l'ontologie imprécise 180
Caractère intrinsèque de la représentation paramétrée 183
Équivalence locale entre les trois représentations 184
3. Préliminaire sur les surfaces **185**
Illustrations 185
Trois saisies analytiques des surfaces dans l'espace 186
4. Courbures des courbes planaires **189**
Longueur d'une courbe 189
Courbure des cercles et des droites 190
Chaîne de segments rectilignes et courbure 191
Courbure des cercles via l'application de Gauss 192
Définition de la courbure des courbes quelconques dans le plan 194
Cercle osculateur à une courbe en un point 195
5. Expression analytique de la courbure des courbes planaires **197**
Vecteurs tangents et vecteurs normaux 197
Expression de la courbure en représentation paramétrée 200
Expression de la courbure en représentation implicite 200
Deuxième preuve directe systématique 202
Évanouissement intrinsèque de la courbure des courbes 206
6. Opposition dialectique imprévisible du dimensionnel **207**
Anticipation du Theorema egregium 207
7. Courbure des surfaces dans l'espace **208**
Détermination du plan tangent à une surface 208
Vecteurs unitaires normaux à une surface 208
Transfert sur la sphère auxiliaire et orientation 210
Définition géométrique de la courbure de Gauss 215
8. Deux expressions extrinsèques de la courbure des surfaces **216**
Courbure des surfaces graphées 216
Prémices d'élimination différentielle systématique 219
Courbure des surfaces en représentation implicite 222
9. Genèse des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* **226**
Cinq concepts novateurs 226
Lien avec un mémoire d'Euler 227
Chronologie sommaire de la genèse 230
Débuts des Disquisitiones 231
Le Preisschrift de 1822 233
Les Neue Untersuchungen de 1825 235

10. Action du principe de raison suffisante 236
Triangles géodésiques 236
Déduction du caractère intrinsèque de la courbure 238
Insatisfaction gaussienne 241
Raison suffisante leibnizienne 243
Racine métaphysique du principe 244
Mathématique du principe de raison 245
Exemple paradigmatique : la formula egregia 245
11. Caractérisation différentielle des surfaces de courbure nulle 246
Équivalence à la métrique pythagoricienne 246
Numérateur de la formula egregia 246
Factorisation par complexification 247
Relations différentielles systématiques 248
Complétion de la combinaison linéaire caractéristique 251
12. Commentaire mathématique de la *computatio egregia* 252
Systématicité et complétude 252
Composantes du vecteur normal 253
Transfert à la représentation paramétrique 255
Élimination du dernier bastion d'extrinsèque 261
Theorema egregium 265
13. Leçons de métaphysique gaussienne 266
Différer et mûrir, différer pour mûrir 266
Maintenir en tension la recherche de vérités 266
Calculer est une vérité de la chose mathématique en elle-même 267
Voir émerger des entités autonomes organisées 267
Publier, ou ne pas publier 268
Nihil actum reputans si quid superesset agendum 268
Le levier symbolique 268
Die Gaussche Strenge 269
Science et conscience coprésente 270
L'impératif catégorique de la morale kantienne 270
Impératifs catégoriques de la pensée mathématique 271

Chap. : Formes différentielles : Darboux, Frobenius, Cartan 272
1. Métaphysique élémentaire de la différence infinitésimale 272
Tangente à une courbe tracée dans le plan 272
Dérivée approchée 273
Élément différentiel infinitésimal 274
Accepter le langage infinitésimal classique 276
Opérateur de différentiation 277
Métaphysique de la différence infinitésimale 279
2. Calcul différentiel à plusieurs variables 280

Passage à deux variables 280

3. Histoire des formes différentielles 282

Chap. : Sur les équations de la gravitation d'Einstein (d'après Élie Cartan) 300

1. Résumé de géométrie riemannienne et équations de la gravitation . 300

Courbure de Gauss et variétés riemanniennes 302

Coefficients de courbure riemannienne 305

Connexion de Levi-Civita 308

Tenseurs, calcul tensoriel, dérivées covariantes des tenseurs 311

Théorème de Ricci 313

Composantes du tenseur de courbure et ses symétries 315

Identités de Bianchi 318

Tenseur de Ricci et sa divergence covariante 318

Covariance de la forme quadratique de Ricci 321

Analyse fine de la covariance du tenseur de Ricci 321

Formes différentielles quadratiques covariantes 322

Géométrie et physique 323

Équations de la gravitation d'Einstein 325

Conditions auxquelles doit satisfaire le tenseur d'Einstein 326

Théorème d'unicité d'Élie Cartan 327

2. Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne 329

Diagonalisation de la pseudo-métrique 329

Équations matricielles fondamentales 331

Base orthonormale mobile 333

3. Équations de structure et courbure pseudo-riemannienne 336

Convention sur la notation des sommes 336

Différentiation extérieure des formes θ^i 337

Introduction des composantes de rotation (connexion associée) 339

Calcul des coefficients de courbure 340

Invariance des composantes de courbure par application isométrique .. 343

Dérivées covariantes 344

Calcul explicite des composantes de courbure 345

Commentaires et spéculations sur l'expression explicite du tenseur de courbure 346

Dénombrement des composantes de courbure indépendants 348

Caractérisation de la courbure nulle 349

4. Méthode d'équivalence pour les surfaces gaussiennes 349

Étude du plan euclidien 349

Équations de structure dans le cas général 350

Calcul de la courbure de Gauss κ 352

5. Méthode d'équivalence pour les variétés pseudo-riemanniennes ... 354

Problèmes d'équivalence 354

Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne et variables de rotation 356

Relèvement des isométries 359

6. Équations de structure avec variables de rotation 361

Différentiation extérieure des formes ω^i 362

Introduction des composantes de rotation ω_j^i (connexion associée) 363

Formule explicite pour les dérivées covariantes 365

Introduction des coefficients de courbure S_{jkl}^i 366

Première expression explicite (insuffisante) des coefficients de courbure S_{jkl}^i 368

Expression des S_{jkl}^i en fonction des R_{jkl}^i 372

7. Identités de Bianchi et dérivées covariantes d'ordre quelconque 374

Différentiation des équations de structure sans les variables de rotation 374

Dérivées covariantes d'ordre supérieur 377

Différentiation des équations de structure avec les variables de rotation 378

Dénombrement des coefficients de courbure indépendants 385

8. Invariants relatifs et invariants absolus 386

Composantes de Ricci et courbure scalaire 386

Invariants différentiels 387

Invariants différentiels absolus et relatifs 388

Différentiation covariante des invariants différentiels relatifs 389

Isométries de variétés pseudo-riemanniennes 392

Relativisation d'une forme différentielle covariante absolue 393

Théorème d'unicité 394

9. Forme quadratique de Riemann-Christoffel 395

Représentations du groupe pseudo-orthogonal 396

10. Paramétrisation des 2-plans dans $\mathbb{C}^4$ 397

Vecteurs et bivecteurs dans $\mathbb{C}^4$ 397

Bivecteurs généraux versus bivecteurs décomposables 398

Espace des 2-plans dans $\mathbb{C}^4$ et quadrique de Plücker 399

Quadrique de Minkowski complexifiée et transformations de Lorentz complexes 400

Géométrie de la quadrique de Minkowski complexe 401

Coordonnées de Plücker des deux familles de génératrices 402

Transformation lorentzienne induite sur l'espace des 2-plans 406

Homomorphisme de groupe 409

11. Décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductible 412

Action d'une transformation de Lorentz sur la forme de Riemann-Christoffel 413

Action d'un changement de base sur une forme quadratique 413

Soustraction de la trace modifiée 415

12. Théorème d'unicité 416

Forme quadratique de Ricci 416
Démonstration du théorème d'unicité 417

Partie II : *La mathématique universelle de Lie*

Chap. : Substitutions, permutations, invariances 422
1. Polynomialité 422
Mélanger algébriquement de manière arbitraire 422
Museler la protension à l'effectivité 423
Résoudre impose des synthèses irréversibles 424
Privilégier l'Algèbre, sans le secours de l'Analyse 424
2. Permutations et substitutions 425
Donation subreptice 425
Obligation platonicienne de spéculer maximalement sur tout point de départ 425
Libérer l'objet mathématique de toute dénomination 426
Dénommer est toutefois nécessaire 427
Caractère réflexif de la libération de toute dénomination 428
Classifier les permutations à automorphisme intérieur près 429
Métaphysique générale de la référentialité 430
3. Résultats élémentaires et fondamentaux sur le groupe $\mathfrak{S}_n$ 431
Permutations circulaires 431
Décomposition en cycles 431
4. Le problème fondamental de classification 432
Antériorité logique 432
Focalisation galoisienne et contextualité du réel problématique 433
Lie, Klein, la géométrie et les substitutions 434
Idée fixe de Lie 436
Classification des groupes continus de transformations 436
5. Transformations par permutation de polynômes multivariés 437
Action sur les racines 437
Microlectures formelles 438
6. Métaphysique génétique de la structure de groupe 440
Invariance de polynômes 440
Assertion fondamentale : les groupes naissent de l'Invariance 441
Progrès infinitésimaux de l'irréversible-synthétique symbolique 442
Métaphysique des nécessités mathématiques 447
Ontologie 'groupique' 449
7. Résolvantes de Lagrange 450
Racines d'un polynôme à une variable 450
Soustraire 0 n'équivaut pas à additionner 0 450

	Fonctions symétriques élémentaires des racines	451
	Premier Théorème de Lagrange	452
	Second Théorème de Lagrange	454
	Troisième Théorème de Lagrange	454
8.	**Démonstrations des théorèmes de Lagrange**	**455**
Chap. :	**Meditationes Algebraicæ**	**460**
	Trois objectifs	460
	Polynômes invariants par permutation des variables	460
	Fonctions symétriques élémentaires	462
	Fonctions des racines d'un polynôme	463
	Théorème de Lagrange	465
	Analyse a posteriori du théorème de Lagrange	466
	Commentaire philosophique	466
	Formules de Newton	467
	Question d'application	467
	Commentaire spéculatif	467
	Deux exemples très élémentaires	468
	Récurrences ouvertes	468
	Formules dites de Waring	469
	Commentaire mathématico-philosophique	469
	Exemple	471
	Démonstration moderne des formules de Waring	471
	L'énoncé du théorème par Waring lui-même : perplexité ?	474
	Lecture multiversale et appropriation intuitive	474
	Remarques intercalaires	476
	Unciae	476
	Circulation, généralisation, compréhension	477
Chap. :	**Commentaire du « premier mémoire » de Galois**	**479**
1.	**Rappels préliminaires**	**479**
2.	**Théorie des irrationnelles algébriques**	**482**
3.	**Brisure maximale des symétries**	**485**
4.	**Élément primitif et singularisation d'une variable**	**488**
5.	**Apparition du groupe de Galois**	**495**
Chap. :	**Généralités spéculatives**	**497**
	Destin comparé des œuvres scientifiques et littéraires	497
	Le mirage de l'« absorption en totalisation »	498
	Le drame de l'a posteriori du spéculatif	498
	Essences mathématiques spéculatives	499
	Accepter l'ouverture conceptuelle de l'espace	500
	Masses-pensées intuitives de la mathématique	501

Écarter les problèmes de fondement 503
Objectifs métaphysiques 503
L'ouverture chez Lie 504

Chap. : Équations de transformations et axiomes de groupes 506
Principe galoisien d'ambiguïté dans la donation 506
Équations de transformation, groupe continu d'ambiguïté 508
Trois principes de pensée qui gouvernent la théorie de Lie 510
Question préliminaire de dépendance paramétrique effective 511
Le mouvement des continua et la mobilité fluide 512
Dépasser la monade subjectivo-centrée 513
Abstraction des correspondances fonctionnelles 514
Les symboles sont imprégnés d'ignorance 515
Essentialisation des paramètres 516
Discontinuité axiomatique de l'engendrement synthétique 519
Analyse de l'essentialité des paramètres 521
Réduire le nombre des paramètres 522
Interlude : schémas universels du questionnement mathématique 523
Analyses de satisfaction mathématique 524
Caractérisation effective de l'inessentialité 526
Redécouverte en géométrie de Cauchy-Riemann 529

Chap. : Ontologie triple de $X(f)$ 531
Système d'équations différentielles ordinaires 531
Basculement ontologique 532
Formule exponentielle analytique pour l'intégration 534
Spéculation sur l'inéquivalence des équivalences 535
Retour sur le symbole $X(f)$ 536

Chap. : Théorème de Clebsch-Frobenius 539
Décision ontologique quant aux résolubilités 539
Redressement d'une transformation infinitésimale 542
Solutions mutuellement indépendantes d'une EDP 544
Intégrabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles 548
Théorème de Clebsch-Frobenius 551

Chap. : Le progrès incessant de l'irréversible-synthétique chez Lie 553

Partie III : *Philosophie du calcul : ouverture, genèse, dynamique*

Chap. : Autour de la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$ 569
Zêtas pairs et nombres de Bernouilli 569
Accès élémentaire à l'ouverture 570

	Spéculation intermédiaire	571
	Assertions mathématiques énigmatiques	573
	Traces effacées : le labyrinthe de la reconstitution	574
	Figure générique de la récurrence : contracter les expressions symboliques	576
	Reconstituer *a posteriori* des éléments de genèse	579
	Décider des actes de calcul	582
	Créer la différence téléscopique	584
	Critère d'irrationalité	587
	Élasticité de la nomination symbolique	588
	Conséquences de la proposition principale	591
	Examen a posteriori des adéquations relatives	597
	Démonstration ultra-simple par Calabi de l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$	599
	Interlude : spéculations sur l'identité $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$	600
	Identités algébriques entre factorielles	602
Chap. :	**Génétique mathématique technique : un exemple**	**607**
	Argument	607
	Origine du problème	607
	Identité à démontrer	612
	Préliminaires à l'étude des petites valeurs $\kappa = 2, 3, 4, 5$	614
	Les deux valeurs élémentaires $\kappa = 2$ et $\kappa = 3$	618
	La valeur $\kappa = 4$	621
	La valeur délicate $\kappa = 5$	623
Chap. :	**Séries hypergéométriques multiples et polylogarithmes**	**627**
	De l'Un au Multiple : passage à plusieurs variables	627
	Polyzêtas à plusieurs variables	628
	Causalité multiplicative	629
	Dominer l'induction : deux approches inéquivalentes du produit de mélange	630
	Carence synthétique du structuralisme	635
	Penser synthétiquementl'engendrement du mélange	636
	Le cas des sommes avec coïncidences	642
Chap. :	**Dynamique de l'égalité**	**649**
	Un calcul simple : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$	649
	L'exponentiation des possibles, croix du tout structural	653
	Trois concepts dynamiques : Expansion, Annihilation, Harmonisation	655
	L'annihilation créatrice d'intrinséquéité	659
	Identité à soi de l'être égal à lui-même	666
	Répétition et différence	667
	Culte du signe « = »	667
	Renverser l'ordre des symboles	667

L'algèbre immanente nous est inaccessible 668

Bibliographie

Bibliographie 669

L'Ouvert mathématique

Une philosophie offensive doit se situer résolument aux avant-postes de l'obscur, en ne considérant pas l'irrationnel comme “diabolique” et réfractaire à l'articulation, mais comme ce par quoi des dimensions neuves peuvent advenir.

Gilles CHÂTELET[1]

1. Le réel de l'Ouvert : Argument, synopsis, intentions

L'Obscur mathématique. L'Obscur mathématique, ou l'Ouvert mathématique, est le thème — allégorique, mystérieux, énigmatique — de ce premier volet de philosophie *générale* des mathématiques.

Règne de la certitude et de la rationalité, comment les mathématiques pourraient-elles héberger l'Obscur ? Comment pourraient-elles entretenir en leur sein des zones d'ombre et d'irrationnalité, toutes contraires à leur rigueur ? Où donc se trouveraient ces régions vagues et troubles, visiblement impropres à toute certitude démonstrative ?

Car hélas, l'Ouvert, partout, est très insaisissable, et en mathématiques, à cause de la complexification *historiquement irréversible* des contenus, l'Ouvert demeure souvent *invisible à toute vision qui ne se spécialise pas dans le tissu vivant et exigeant de la Recherche*.

L'Ouvert, ainsi, malgré de légitimes réticences qui renvoient à de célèbres controverses philosophiques, sera placé au commencement absolu de la *philosophie des mathématiques*, à la fois en tant qu'Il ne présuppose rien de ce que sont les mathématiques, et en tant qu'Il se pose comme Figure de l'immédiateté non-médiée de toutes les questions que les mathématiques soulèvent.

---

[1] *Les enjeux du mobile*, Des Travaux, Seuil, Paris, 1993, p. 22. Voir aussi *La philosophie aux avant-postes de l'obscur*, Conférence au *Forum Européen de la Science et de la Technologie, Science, Philosophie et Histoire des Sciences en Europe*, Grand Amphithéâtre de la Sorbonne, 10 décembre 1994.

> *Le commencement de la science absolue* doit être lui-même *commencement absolu*, il ne peut *rien présupposer*. Il doit donc n'être médiatisé par rien et ne doit pas avoir de fondement ; il doit plutôt être lui-même le fondement de toute science. Il doit être par conséquent purement et simplement un immédiat, ou plutôt l'immédiat lui-même. De même qu'il ne peut avoir de détermination en regard d'autre-chose, de même ne peut-il en contenir non plus en lui, aucun contenu, car semblable chose serait pareillement une différenciation et un rapport l'un à l'autre de termes divers, partant une médiation. [**206**]

Penser *en situation* le non-pensé de l'ouverture. Aussi, en mathématiques, seule une *méditation philosophique en situation* — sur l'*Obscur*, sur l'*Ouvert* et sur l'*Inconnu* — pourra, grâce à la spécialisation démultipliée et à la généralité métaphysique, fertiliser par *semailles* la contemplation et la compréhension des idéalités mathématiques. Les situations qui font mystère apparaîtront à travers des *actes* mathématiques variés, et ce, dans toute l'*hétéronomie plurielle* qui se rattache à ces actes, qu'elle soit d'ordre ontologique, motivationnel, conceptuel, phénoménologique, cénesthésique, philosophique, historique, symbolique, technique, *ou calculatoire*.

Toute la question, en creux, sera aussi de comprendre comment ce qui n'est pas principalement de l'ordre de la rationalité se blottit dans les franges de la connaissance mathématique et y mobilise dynamiquement l'écume de ses propres genèses.

L'héritage français de philosophie des mathématiques. Cette *méditation en situation* au contact de mathématiques spécialisées s'inscrira aussi dans une tradition française de *philosophie des mathématiques* qui s'est illustrée à travers les travaux d'Alain Badiou, de Léon Brunschvicg, de Jean Cavaillès, de Gilles Châtelet, de Gilles Deleuze, de Jean-Toussaint Desanti, de Ferdinand Gonseth, de Gilles-Gaston Granger, d'Albert Lautman, de Giuseppe Longo, de Marco Panza, de Jean Petitot, de Jean-Michel Salanskis, de Jean-Jacques Szczeciniarz et de Maximilien Winter. Toutefois, on cherchera relativement peu à se *situer comparativement* d'un point de vue théorique en rapport aux diverses idées développées par cette tradition, puisque ce nouvel *Essai de philosophie générale des mathématiques* ne sera pas l'ouvrage d'un philosophe-épistémologue concentré sur l'exégèse fine des doctrines, mais celui d'un mathématicien universitaire constamment mobilisé par la production mathématique spécialisée qui estime préférable d'apporter une pierre nouvelle à la philosophie des mathématiques, toujours imparfaite et insatisfaisante à cause de l'envol préoccupant que prennent toujours les mathématiques par rapport aux capacités de l'analyse réflexive.

Alors, en bénéficiant principalement d'une expertise professionnelle utile pour présenter et pour commenter certains *calculs explicites d'ampleur* tels que celui placé par Gauss au fondement de son *Theorema egregium*, l'objectif sera — en contrepoint à l'épistémologie du Concept qui s'avère actuellement dominante dans le domaine continental — de penser les germes de déploiement du sens, la surrection du vrai dans les mathématiques, et l'intemporelle *présence obscure du Problématique qu'il faut s'appliquer à maintenir coprésente dans la pratique*. Ici donc, pour être plus précis, le but sera de penser l'Ouvert qui *vit en co-présence* dans tout acte et dans toute théorie, c'est-à-dire de le penser et de le dire de manière concrète, effective, descriptive, notamment *à l'intérieur même des théories mathématiques effectives et au sein même des incarnations du Calcul*.

Au demeurant, et par souci de neutraliser sa connotation dépréciative, L'*Obscur* sera régulièrement entendu comme synonyme de l'*Ouvert*, son sens allégorique ne devant maintenant plus faire obstacle. Seul ce qu'il y a de poétique en chacun de nous saura exploiter cette gémellité sémantique décidée, avant que des analyses spéculatives neutres sur le plan métaphorique ne prennent l'avantage dans notre discours.

Diffusion, dissémination, diffraction d'un Ouvert objectivable. À un premier niveau — abstrait, infralinguistique, antéprédicatif — de l'Ouvert, des mystères rayonnent dans une histoire préliminaire, des problèmes apparaissent, se précisent, se reproduisent, s'amplifient, se résolvent, ou s'abîment dans une indéfinitude avérée.

> Le fait remarquable dont nous venons de parler et certains raisonnements philosophiques ont fait naître en nous la conviction que partagera certainement tout mathématicien, mais que jusqu'ici personne n'a étayée d'aucune preuve, la conviction, dis-je que tout problème mathématique déterminé doit être forcément susceptible d'une solution rigoureuse, que ce soit par une réponse directe à la question posée, ou bien par la démonstration de l'impossibilité de la résolution, c'est-à-dire la nécessité de l'insuccès de toute tentative de résolution. [**222**]

Tel est le génie spectral du théâtre partagé de l'Obscur mathématique :

kaléidoscope de questions offertes à l'impulsion conceptuelle,

avec, pour tout regard auscultant, la conviction hilbertienne partagée — jamais contredite par le destin d'un problème mathématique — que toute question *mathématique* s'attend à être résolue complètement, après — peut-être — d'imprévisibles approfondissements, parfois interminables, souvent inaccessibles à des non-spécialistes.

Il s'agit donc, pour ces mystères mathématiques, d'une circulation, d'un flux et d'un reflux dans une matière qui se donne les moyens de sa propre objectivation. Le *mouvement spontané du questionnement*, auquel répond la difficile et douloureuse production *non-automatique* de réponses effectives, est toujours susceptible de provoquer l'éclatement métaphysique des paradigmes, à cause, notamment, de l'analyse obsessionnelle — sur plusieurs générations de mathématiciens — d'une question très résistante, par exemple : cinquième postulat de la géométrie plane ; nombres imaginaires ; résolubilité par radicaux des équations algébriques ; quadrature du cercle ; transcendance de π ; cohérence de l'arithmétique.

> Proposons-nous un problème déterminé non encore résolu : par exemple, posons-nous la question de l'irrationalité de la constante C d'Euler ou de Mascheroni, ou encore la question de savoir s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $2^n + 1$. Quelque inabordables que semblent ces problèmes, et quelque désarmés que nous soyons encore vis-à-vis d'eux aujourd'hui, nous n'en avons pas moins la conviction intime que l'on doit pouvoir les résoudre au moyen d'un nombre fini de déductions logiques. [**222**]

En réflexivité, Hilbert soulevait ainsi en 1900, immédiatement après l'expression de sa conviction intime — et avec quelques accents d'inspiration kantienne — la question métaphysique supérieure (ou méta-mathématique) de savoir d'où pourrait venir cette conviction en la capacité universelle de résolution autonome que possèderaient *a priori* les mathématiques.

> Cet axiome de la possibilité de résoudre tout problème, est-ce une propriété caractéristique et distinctive de la pensée mathématique, ou serait-ce peut-être une loi générale du mode d'existence de notre entendement, à savoir que toutes les questions que se pose notre entendement soient susceptibles d'être résolues par lui ? [**222**]

Cependant, en accord direct avec la philosophie des mathématiques de Riemann qui exige de maintenir ouverte toute question difficile — qu'elle soit mathématique ou métaphysique — sans chercher à prétendre la résoudre par pétition de raisonnements, ou bien à établir sans hésitation qu'elle ne saurait être résolue en raison d'un système d'allégations critiques, il ne pourra pas être question ici de traiter un problème d'une telle ampleur, et sans dirimer son caractère métaphysique, on admettra que son *ouverture oubliée* continue à se manifester, à rayonner, et à s'approfondir, en tant qu'ouverture, dans le destin contemporain des mathématiques.

L'Ouvert posé dans des univers axiomatiques. À un deuxième niveau — de l'ordre du langage cette fois-ci —, l'Ouvert, ce sont aussi les structures mathématiques et les systèmes d'axiomes qui sont à la base des théories formelles, non seulement comme réservoirs de formes symboliques et de contenus conceptuels, mais surtout comme seuils d'ouverture à des univers mathématiques qui sont vastes en eux-mêmes. Ces univers pré-existent en quelque sorte par rapport à tout formalisme, parce que l'acte de poser un système formel est toujours motivé par la volonté d'embrasser une réalité dont les modalités de réalisation *font toujours question dans leur a-postérioricité*.

Exemples : axiomes de Peano pour l'arithmétique ; théorie des cardinaux en relation avec l'hypothèse du continu ; introduction abstraite des nombres complexes comme clôture algébrique du corps des nombres réels ; métamorphose de la notion d'espace enracinée dans l'inspiration physique ; constitution d'une géométrie non commutative appliquée à la physique quantique ; ou encore : théorie grothendieckienne des *topos*, comme synthèse entre la géométrie algébrique, la topologie et l'arithmétique.

En outre, plus la réalité est riche et complexe, plus il est important que se multiplient les yeux pour la regarder, ce qui doit revenir à *disposer de plusieurs langages pour la cerner*.

> D'un côté, les moyens dont disposent les sociétés humaines pour mettre l'univers en mots sont très limités ; de l'autre, l'univers est infini. Il n'est pas nécessaire d'insister sur cette nature infinie de l'univers, même si l'on étend la notion aux galaxies. La limitation des moyens, quant à elle, tient d'abord à celle du petit appareil, dit phonateur, qui va des lèvres au larynx, et avec lequel on fabrique les sons des langues. Elle tient aussi au nombre restreint des procédés que les langues ont à leur disposition pour construire des phrases. Elle tient, enfin, à la pauvreté des modes de combinaisons des unités disponibles. Le développement de la composition et de la dérivation s'explique précisément par cette implacable et cruelle aporie des langues, par cette contradiction tenace entre l'infinité des choses de l'univers à dire et la finitude des moyens humains pour les dire. [**200**], 111–112

L'Ouvert, aussi, commande de maintenir en permanence *ouverte* la question de l'adéquation de tout langage.

> Mon attitude et celle d'autres mathématiciens consiste à dire qu'il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts. Je fais une distinction essentielle entre l'objet d'étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l'esprit humain élabore pour comprendre cette suite. [**117**]

De plus, en tant que principe régulateur, l'Ouvert se situe aussi *en amont* de toute controverse philosophique — que ce soit entre 'réalismes' et 'idéalismes' ou entre 'platonismes' et 'constructivismes' — parce que l'Ouvert demeure là entre les parties pour leur signaler la pér-existence de questions irrésolues dans lesquelles chacune enracine ses options et ses tentations de pensée. Et par l'effet d'une réflexivité spéculative remarquable, ce sont les mathématiques — notamment les mathématiques riemanniennes — qui sont le plus à même d'enseigner que les questions se maintiennent en se complexifiant tant qu'elles ne sont pas *irréversiblement* décidées.

Potentialité et expression. Ainsi, toute axiomatisation *pose*-t-elle des existences, et ce, par un acte décidé qui vise à inscrire le Potentiel dans un monde que structurent certaines virtualités prédéfinies de l'expression, *mais ce Potentiel n'est en rien inscriptible a priori dans un système langagier contextuel*. En effet, ce n'est qu'*a posteriori* que le potentiel actué peut être ressaisi dans un système formel. Certaines potentialités sont, il est vrai, purement syntaxiques, voire mécaniques, mais elles sont rares et souvent redevables elles aussi d'une métaphysique qui les dépasse. Mis à part en logique et en théorie de la démonstration, les virtualités sont combinatoires[2], plutôt que purement syntaxiques. La rumination des hypothèses est nécessaire, et nul langage ne parvient à circonscrire l'Obscur.

L'Ouvert intersubjectif. À un troisième niveau (intersubjectif, et corrélatif du premier niveau), des esprits mathématiciens vivent l'Ouvert, connaissent l'évolution historique de l'Ouvert, et assistent à certaines cloturations locales de l'Ouvert.

Exemple : pour la conjecture de Fermat, il y a un *avant* et un *après* toute démonstration finale, l'*après* étant irréversiblement spécifique pour tous les arithméticiens spécialistes du domaine.

Parce qu'ils fréquentent des questions ouvertes qui circulent ou qui se déploient d'elles-mêmes, les esprits des chercheurs sont *pareillement conscients* qu'il y a des questions dont la réponse semble, à une période donnée, inaccessible pour des raisons techniques, ou pour des raisons plus profondes.

Thèse du réel de l'Ouvert. On se rapproche ici d'une thèse principale qui commence enfin à se dessiner : afin de dépasser le constat conventionnel de la présence discrète de l'Ouvert, *il est nécessaire de conférer un statut de réalité indéniable et tangible à ce qui demeure toujours disponible pour le questionnement.*

Une preuve en est que les mathématiciens *vivent* les questions ouvertes sur lesquelles ils travaillent, et qu'ils se les transmettent, de maître à élève, de génération en génération. Les questions ouvertes ont donc une réalité véritable, fût-elle incorporelle, non-écrite, refoulée.

Au-delà, une seconde thèse se dégage : le réel, en mathématiques, est primordialement un *réel d'ouverture*, c'est-à-dire un *réel de questions et de problèmes ouverts*, seul 'réel' qui dynamise tout esprit de recherche, de manière trans-historique et sur un plan international. En affirmant, comme le fit Albert Lautman, la primauté antérieure du questionnement, impossible de ne pas l'ériger au statut d'aspect fondamental de la *réalité* mathématique.

Plus encore, ce réel d'ouverture est la condition de possibilité de la Recherche elle-même, comme pratique, comme échange, et aussi comme institution. L'esprit de certains mathématiciens est d'ailleurs souvent imprégné d'une innocence immédiate et de quelque chose qui remonte à l'enfance, *à cause de leur réceptivité et de leur concentration sur cette ouverture*. Il faut

---

[2]Sur l'aspect combinatoire de l'invention mathématique, voir H. Poincaré, *L'avenir des mathématiques*, Atti del $IV^{è}$ Congresso Internazionale dei matematici, Roma, Academia dei Lincei, I. Publ. G. Castelnuovo, Roma 1909.

donc entreprendre des lectures *in situ* de cette ouverture, des lectures dans les esprits et dans les textes de tous les germes d'ouverture. Car au-delà de cette analyse générale, le jaillissement des déterminations singulières possède des caractéristiques métaphysiques et didactiques inépuisables.

Les obscurités du travail inachevé. L'Obscur, ce sont aussi toutes les stratégies perdantes devant un grand problème, qui s'évanouissent et qui disparaissent lorsqu'une solution satisfaisante lui est apportée, ce sont donc ces travaux incomplets, délaissés, abandonnés. L'Obscur, c'est Andrew Wiles, déçu par une lacune dans sa première 'preuve' de la conjecture de Fermat, qui se retire ensuite pendant plus d'un an dans son 'grenier' ([**3**]) pour achever sa démonstration célèbre. L'Obscur, ce sont les virtualités recevables, mais inachevées qui « moisissent dans des tiroirs des mathématiciens », ce sont les innombrables manuscrits intermédiaires de Bourbaki, tous les chantiers en vue d'une de monographie nouvelle sur les équations différentielles abandonnés par Friedrich Engel à la mort de son maître Sophus Lie, ce sont les généralisations techniques sans lendemain, en un mot : c'est *tout l'impublié mathématique*.

L'Obscur, enfin, ce sont aussi les *théories abandonnées en chemin dans le passé*, telles que la théorie algébrique des invariants (travaux de Gordan et d'Emmy Nœther) ; la classification des groupes continus infinis de transformations et de leurs sous-groupes (Sophus Lie, Élie Cartan) ; ou encore : la géométrie algébrique en coordonnées projectives par l'École italienne à la charnière entre le XIX$^{\text{ème}}$ et le XX$^{\text{ème}}$ siècle.

Le Voir de l'Ouvert. Mais l'Ouvert discret et conventionnel peut sembler être peu de chose, peut sembler être négligeable, à cause d'une focalisation sur les objets, à cause de l'évidence du donné, et à cause d'une certitude sur la fermeture de l'acquis. Or ceci conduit à n'avoir qu'une vision restreinte de l'Ouvert, pourquoi ? à cause, sans doute, d'un nombre trop restreint de problèmes fréquentés, à cause, encore, d'une réceptivité insuffisante à l'Inconnu, ou à cause, enfin, du refus de reconnaître et de formuler comme telle la réalité de l'Ouvert.

Au contraire, il s'agit ici d'affirmer résolument qu'*il existe un Voir de l'Ouvert*, c'est-à-dire des *visions effectives de l'ouverture dans un champ technique donné, des appréhensions effectives et des compréhensions effectives de l'Ouvert*, dont l'expression dans le texte — et pas exclusivement dans les grands textes (Riemann, Poincaré, Hilbert, Gromov) — peut être remarquablement explicite. Un prototype de l'ouverture se lit dans l'introduction de la leçon orale d'habilitation [*Probevorlesung*] de Riemann :

> On sait que la Géométrie admet comme données préalables non seulement le concept d'espace, mais encore les premières idées fondamentales des contructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être. [**367**]

Il n'y a pas seulement une question de style, ou de présentation. *Il n'y a pas seulement, en mathématiques, une herméneutique implicite, passive, ou automatique.* Tout le problème est alors de savoir *comment* déchiffrer authentiquement cette ouverture, à la fois sur le plan informel (échanges oraux et pratiques scientifiques) et sur le plan formel (texte), afin d'analyser la communication de l'Ouvert et d'observer sa circulation entre ces deux niveaux.

L'ouverture désorientée totale. En amont, au niveau d'un commencement absolu qui serait indéfiniment réitérable, toute donation mathématique initiale est potentiellement mobile dans une *omnidirectionalité obscure et voilée*, ouverte *a priori* dans un *champ ubiquitaire d'inadéquations* qui sont profondément *désorientantes*.

L'ouverture, l'inadéquation et l'imperfection sont intrinsèquement consubstantielles à la réalité mathématique transhistorique et internationale. Plus important encore : puisque la réalité des mathématiques s'identifie à leur ouverture, *un inachèvement consubstantiel doit être lu et relu dans toute forme d'achèvement mathématique*.

À ce propos, on pourrait et on devrait inventer une « nouvelle méthode cartésienne » pour s'orienter dans la compréhension des mathématiques contemporaines : mise en suspension du donné et du langage constitué ; reconstructions singulières des théories pour le développement autonome du *cogito* ; transversalisation historique de l'ouverture mathématique.

Car il y a une observation de fait : le souci des grands mystères de la métaphysique non seulement tend *mystérieusement* à s'estomper dans la pensée scientifique contemporaine, mais aussi, il tend à n'être réservé qu'aux études universitaires, à l'histoire de la philosophie, et à la philosophie des sciences, comme si ce qui appartient aux époques passées ne pouvait plus être mobilisé *en synchronie* par les mathématiciens actuels producteurs de théorèmes.

La pensée disparaissante. Seules quelques 'figures' originales — par exemple : Arnol'd, Atiyah, Connes, Grothendieck, Gromov, Manin, Penrose, Ruelle, Siu — maintiennent encore, dans quelques textes sporadiques aussi précieux que l'étaient les *Fragmente Philosophischen Inhalts* de Riemann, un contact métaphysique avec les questions-mères de l'univers mathématique.

Toute époque de l'histoire des mathématiques navigue dans un passé qui lui échappe partiellement, en tant que ses acteurs n'en ont jamais une mémoire directe et vécue, et pour cette raison, il se pourrait donc bien que nous ne soyons pas du tout en mesure de comprendre le « *pourquoi* » de la disparition (partielle) des forces et des problèmes métaphysiques fondateurs dans les mathématiques contemporaines, — tel serait le signe supplémentaire de notre finitude actuelle. Pour ce qui est des causes, les réponses de fait habituelles : saturation technologique ; spécialisation ; complexification ; explosion des mathématiques ; seraient incomplètes.

Réflexions effectuées par d'autres mathématiciens : mystère, éloignement temporel, disparition des motivations et des spéculations initiales ; alors, comment ressaisir le sens ?

Le métaphysique dans les mathématiques. Qu'est-ce que le « *métaphysique* », dans les mathématiques ? On pourrait tenter de préciser cette terminologie volontairement ambiguë sur le plan sémantique : sera qualifié de « *métaphysique* », en mathématique, ce qui rayonne aux sources renouvelées de la mathématique, ce qui irrigue, domine, dirige, problématise, fait mystère, en un mot, ce qui «*fait toujours question en amont*», dans un « *irrésolu de principe* », non transcendantal, non apodictique, non déterminable.

Réponse surprenante et plus pertinente à la disparition de la métaphysique : Le niveau « *conceptuel-métaphysique* » de la mathématique est maintenant dépassé à cause de son élémentarité — ce n'est plus que du B.A.-BA, et les mathématiques sont maintenant bien au-delà ! Les réponses non effectives et purement métaphysiques aux questions mathématiques techniques *ne sont qu'un premier moment initial* dans un vaste parcours imprévisible d'explorations toujours riche en surprises.

2. Discussion intercalaire

Avertissement terminologique. L'Ouvert ne se définit pas en termes dogmatiques ou fixistes. En vérité, l'Ouvert est une *multiplicité d'ouvertures* et le terme '*L'Ouvert*' au singulier et allégorisé, n'est qu'un pis-aller dénominatif. *Ce n'est ni un concept ni une réalité stable : ce n'est qu'une désignation de l'ouverture plurielle.* Toute connotation religieuse est donc à écarter. Seul compte le rapport à la mobilité et à la disponibilité, impliqué par le choix de ce terme. De plus, l'Ouvert mathématique fait référence implicitement à une réalité pratique tangible qui est inscrite dans les champs de recherche mahématique et qui se décline suivant leur variété. Bref, l'arrière-plan spectral de ce discours, ce sont les pratiques mathématiques effectives.

Il serait donc erroné de mettre en doute ce que désigne le syntagme nominal *L'Ouvert mathématique* en y décelant une quelconque connotation mystique.

Interprétation inappropriée de mysticisme. En effet, c'est d'abord la raison qui est à l'œuvre dans tous les procédés de recherche mathématique. La pensée mystique quant à elle s'arrête souvent au sentiment, ou à des explications en termes d'énergie ; parfois, elle exprime l'attrait vers des sources d'origine ineffable. L'expérience mystique procure à l'âme un sentiment de jouissance, un sentiment de complétude et d'achèvement, elle est

> saisie d'une réalité totale et comblante qui transcende la limite, la particularité, la clôture de l'individuation, et fait accéder, au moins pour un temps, à l'universalité et à la réconciliation de soi et du tout Louis GARDET

Rien de tout cela dans la méditation *philosophique* sur l'Ouvert mathématique, car le but est de questionner et de penser, l'objectif est argumentatif, l'objectif est spéculatif. Ceux qui objecteraient la tentation d'irrationalité du propos n'ignorent pourtant pas l'importance de l'action, de la tension, et de la motricité des concepts scientifiques dans les problématiques contextuelles, ainsi que leurs origines métaphysiques obscures. Sans compter la *transparence du déchirement entre le général et le particulier*, qui imprègne d'imperfection toutes les mathématiques dans leur ensemble.

Appréhension dynamique. Si c'est seulement dans l'appréhension *humaine* que peut résider l'illumination inventive, et non dans la matière objective, il n'en reste pas moins qu'on ne peut refuser d'analyser *dans leur apparition motrice* les idées ou les perspectives géniales qui débloquent des problèmes difficiles. Car s'il est possible de conceptualiser ce qui est de la pensée en acte, on doit forcément pouvoir conceptualiser aussi ce qui n'est que de la *pensée en gestation*, *en mettant en lumière les aspects dynamiques provisoires du réel dans le jeu spéculaire entre le sujet qui l'invente et l'objet qui le structure*. Ainsi, la représentation conventionnelle de l'acte rationnel néglige une réalité essentielle : la circulation à double sens qui va de l'objet au sujet, le sujet étant le seul des deux termes qui soit *apte à insuffler de l'inconscient et du conscient dynamique dans l'objet*.

Conserver la trace du mouvement. La métaphore informatique aidera à mieux saisir cette perspective, par analogie. Dans le monde du virtuel cybernétique, qui va du multimédia à la pratique de l'écriture sur ordinateur, en passant par l'Internet, c'est la puissance combinatoire du calcul et de la mémoire informatique qui permet l'enregistrement constant des données, par exemple : sauvegarde sur traitement de texte, pages Web conservées en mémoire dans des répertoires "cache", "cookies", *etc.* Cet enregistrement s'assimile ainsi à une *conservation immédiate de la trace du mouvement du* *langage et de la pensée*. Et pour cette conservation, une mémoire colossale est nécessaire. Le philosophe peut donc maintenant focaliser son regard sur l'importance de la trace du virtuel et lui conférer une réalité plus visible et plus solide pour l'appréhender comme un réel. L'informatique offre ainsi les prémisses séduisantes d'une synopsis langagière et visuelle du mouvement. Par analogie, l'appréhension des réels d'ouverture naît d'une inspiration homologue, qui est rendue possible par ce contexte technologique historique.

3. Choisir un style de discours sur l'Ouvert

Métaphores lumineuses. Alors que la lumière et l'obscurité naturelles pénètrent les espaces terrestres avec l'aisance du rayonnement physique et de son absorption, lumières et obscurité de l'esprit tirent leur impulsion d'énergies laborieuses et ingrates. Pour caractériser la luminescence, voir l'incandescence des idées, c'est-à-dire leur capacité de rayonnement, de réflexion et de diffraction, l'allégorie lumineuse est peu représentée dans la langue. Tout au plus parle-t-on des 'lumières', d'une présentation ou d'un exposé lumineux, à travers quelques expressions typiques. C'est la clarté qui supplante la lumière dans les acceptions abstraites appartenant au lexique de l'intellect. Ainsi, la lumière, toute puissante dans les champs sémantiques concrets, est en retrait dans le champ lexical de la pensée, et elle exigerait, pour s'imposer, une nouvelle perspective sur les efforts de l'énergie d'invention. Au contraire, même s'il est globalement péjoratif, le registre métaphorique de l'Obscur doit sa richesse à une présence abstraite, et indélébile, de l'Inconnu dans le connu. *Persistance de zones d'ombres…*

Limites du discours didactique. Pour discourir de l'Obscur, il faut envisager d'abord la congédiation de toute approche qui ne désigne pas comme intrinsèquement problématique le type de discours qu'il est possible de tenir sur l'Inconnu, en mathématiques.

Domination universelle de la problématicité !

Ensuite, il faut être

> comme les philosophes d'origine, dont l'existence, l'inspiration, la vue, l'arête et l'expression ne supportent que peu de temps l'intérieur cloisonné de la pensée didactique. [**101**], 719

Il faut être — au moins en partie et à certaines heures, c'est sûr ! — mû par un *rejet instinctif du discours didactique unilatéral*, car les arguments inventifs foisonnent dans la zone obscure des inversions et des réversions topologiques du réel, et seul un discernement audacieux *non rhétorique, non argumentatif, non explicatif* sait les capter par approches obliques.

Un tel rejet est motivé, aussi, par une *croyance en la valeur du style authentiquement spéculatif*, lequel, hélas, disparaît peu à peu, supplanté par l'uniformité d'un style véhiculé dans des parutions formatées par la *science of scientific writing*. Enfin, la langue qu'il faut inventer pour parler de l'Obscur est peut-être avant tout homologue à celle du poème.

Proximité de la parole poétique. Par proximité, présence en filigrane, inspiration sporadique et étonnement fulgurant, le grand verbe poétique est en fait immanent à une rêverie sur l'Ouvert, qui en est une figure, une variation. Chez Héraclite, Charles Baudelaire, René Char, c'est un même discours âpre et tacite qui roule par le monde, en affronte le mystère. Car seule la parole poétique peut transmettre authentiquement l'attrait irrésistible de l'Obscur et de l'Incertain, et le désir de trouver du Nouveau.

> Plonger au fond du gouffre, Enfer ou Ciel, qu'importe ?
> Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau !
> [**28**], LXXXII
> Insatiablement avide
> de l'obscur et de l'incertain
> [**28**], CXXVI

Ce n'est donc pas un hasard si Grothendieck, dans *Récoltes et Semailles*, lorsqu'il analyse ses propres travaux, excelle en métaphores et en lyrisme spontané. Dans les écrits de Gilles Châtelet — même dans ses écrits philosophiques — le travail de composition d'expressions percutantes témoigne aussi de l'importance de la lettre.

En vérité, toute méditation sur la métaphysique des mathématiques porte le sceau d'une prédilection pour les textes poétiques. Comme le dit une expression d'Alain Badiou, il faut *suturer* la langue épistémologique à la langue du poème. Geste qui s'illustre nettement dans ses livres et dans ceux de Bachelard. D'où la nécessité de s'inspirer du verbe poétique, d'inviter la poésie dans l'expression de la pensée spéculative, lorsqu'il s'agit de l'Ouvert.

Tous ceux qui parlent des mathématiques avec une inspiration de *philosophes de l'origine*, mais sans égard pour la parole poétique, ignorent un aspect essentiel de la quête. C'est un peu comme si on ignorait dans une recherche mathématique que tout ce que l'on cherche a souvent déjà été médité et publié dans un autre pays, ou des décennies auparavant, et qu'après l'avoir découvert, on se refuse encore à admettre cette existence de travaux antérieurs.

Arbres mathématiques, mathématiques luxuriantes. Quelles que soient les appréciations nuancées et controversées que l'on pourra formuler au sujet du «virage formaliste» qu'ont subi mathématiques au vingtième siècle, on devra reconnaître que c'est grâce à l'approche axiomatique que les mathématiciens sont parvenus à *discipliner rigoureusement leur jeu spéculatif*, en énonçant toujours un problème avec précision avant de proposer des réponses partielles ou définitives, elles mêmes formulées dans un langage formel rigoureux et précis. Aussi, les mathématiciens sont-ils fiers de pouvoir s'adonner à la dialectique rationnelle, en formulant des questions significatives à l'intérieur de systèmes hypothético-déductifs adéquats et dénués de toute ambiguïté, systèmes qui ne sont pas pour autant immuables.

> On doit commencer tout de bon à s'appliquer à la vraie philosophie, dont la première partie est la métaphysique qui contient les principes de la connaissance entre lesquels est l'explication [···] de toutes les notions claires et simples qui sont en nous. [···]. En suite de quoi il est besoin aussi d'examiner en particulier la nature des plantes, celle des animaux, et surtout celle de l'homme, afin qu'on soit capable par après de trouver les autres sciences qui lui sont utiles. Ainsi toute la philosophie est comme un arbre dont les racines sont la métaphysique, le tronc est la physique et les branches qui sortent de ce tronc sont toutes les autres sciences, qui se réduisent à trois principales : à savoir la médecine, la mécanique et la morale. [**131**]

Le géomètre contemporain Mikhaïl Gromov suggère ([**196**]) alors de visualiser le corps des mathématiques comme un « arbre » immense qui se développe de manière exponentielle, « l'arbre de toutes les formules mathématiques possibles », dont les racines seraient les axiomes de systèmes fondamentaux, tels que par exemple la théorie des ensembles, l'algèbre, la topologie générale, ou encore l'analyse non standard. Les branches maîtresses d'un tel arbre seraient constituées de disciplines majeures qui ont un intérêt transversal, comme par exemple l'algèbre linéaire, la géométrie différentielle, ou la théorie de l'intégration. Avec une spécialisation qui s'accentue encore, en prenant de l'altitude dans cet arbre, on se rapprocherait des branches plus récentes, telles que les formules de représentation intégrale, les systèmes dynamiques holomorphes ou la topologie symplectique, on s'éleverait ensuite aux ramures et aux nervures contemporaines pour y découvrir les innombrables « théorèmes centraux » qui coagulent des sujets de recherche actifs. On atteindrait enfin les feuillages viridescents et terminaux qui recueillent l'énergie précieuse à la croissance du tout. À ces extrémités, le *sujet-mathématicien* jouerait le rôle d'une précieuse chlorophylle, mortelle mais essentielle.

Si «arbre» il y a, c'est en effet parce que les résultats mathématiques se solidifient et se «lignifient» sous le «cambium» des surfaces actives. La croissance de cet arbre procède d'une accrétion synonyme de progrès et de stratification théorique. De plus, l'horizon des mathématiques vivantes se « ramifie vers l'inconnu par projection multivaluée », de même que les branches d'un chêne se projettent dans l'air pénétrable en laissant éclater leurs ramures. Et surtout, à cause d'une exponentiation incessante des possibles, et à cause de bifurcations imprévisibles, la croissance de cet arbre mathématique est de nature intrinsèquement «hyperbolique» : elle possède une demesure interne qui dépasse largement toute taille humaine.

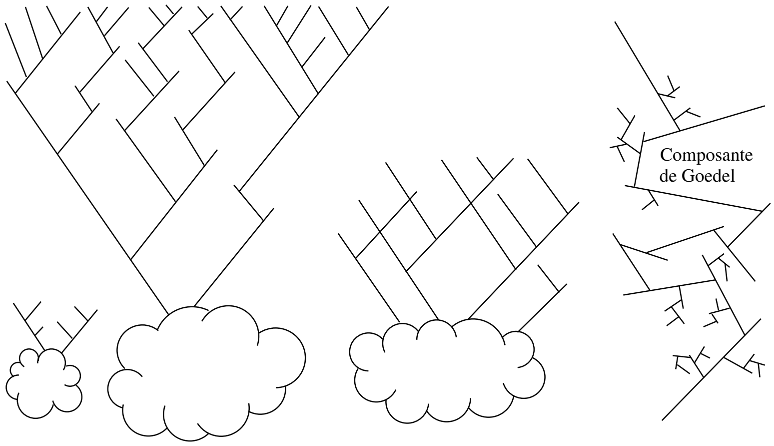
> Impression de force, de puissance et de gloire, mais aussi un sentiment d'absurde à l'aspect de cette cathédrale végétale dont la façade luxuriante, les fûts géants couronnés de feuillages, les nefs sauvages, les arcades béantes, les ogives qui se ramifient à l'infini, les portails multipliés dans toutes les directions donnent toutes également sur le vide et sont étrangement déserts. [**98**]

Telle est donc l'image allégorique de l'arbre mathématique règnant dans l'immensité presque invisible de son ouverture.

Questions gromoviennes. Mais cette idée d'un tout architectural bien enraciné sur ses bases et ramifié à ses extrémités créatrices n'est pas exactement celle que Mikhaïl Gromov souhaite suggérer, car elle serait essentiellement inexacte par imperfection de pensée.
En effet, l'arbre mathématique n'existe pas vraiment en tant qu'arbre actualisé comme « cathédrale végétale », fût-il d'une réalité idéale et supérieure, car en fait, l'arbre mathématique n'a pas de forme définitivement fixées et il n'est pas clairement embrassable comme un tout se donnant immédiatement au regard dans un acte simple de perception. S'il est un arbre de la connaissance mathématique, ce doit être un arbre dont la présence reste en partie imprécise et indécise. Si donc les mathématiques sont arbre au sens d'une métaphore allusive, ce doit surtout être quant à ce qu'elles suggèrent d'immensité abstraite et de potentialité irréalisée.

> La première pierre de la Sagrada Familia, la cathédrale d'Antonio Gaudi, a été posée en 1882. L'architecte n'ayant pas laissé de plans, nul ne sait aujourd'hui si elle sera terminée un jour et quel pourrait être précisément son aspect final. Il en est de même de certaines théories en mathématiques, théories pour lesquelles les conjectures représentent les échafaudages temporaires. [**302**]

Enfin, quant à cette immensité arborescente potentielle que serait les mathématiques pour l'esprit poétique, on peut se livrer, avec Mikhaïl Gromov, à un jeu de pure spéculation pseudo-rationnelle qui soulève néanmoins des problèmes philosophiques extrêmement profonds. En effet, des questions naïves, simples, et métaphysiques affluent aisément : Comment mesurer les dimensions de cet « arbre » ? Quelle est la topologie, quelle est la géométrie globale de cet « arbre » ? Quelle est l'« échelle humaine » vis-à-vis de cet arbre ? Quels sous-ensembles de cet « arbre » représentent les entités que nous appelons des théorèmes ? Quelles sont les échantillons de cet « arbre » qui recèlent le plus de « sens » mathématique ?



L'ARBRE DE HILBERT, SELON M. GROMOV

Escaladons alors cet « arbre de Hilbert », continue Gromov, où nous nous voyons confinés dans une région minuscule, c'est la région de nos « mathématiques humaines », une sorte de petit nuage allant à la dérive dans l'immensité de branches qui s'élargissent exponentiellement. Nous nous demandons : quelles sont la taille, la forme et la position de ce petit nuage ? Comment se métamorphose-t-il avec le temps ? Pourquoi possède-t-il des affinités avec certains nœuds de l'arbre ? Quelles parties de cet arbre appelons-nous « inintéressantes », et que considérons-nous comme de « bonnes » mathématiques ? Pourquoi en est-il ainsi, et non pas autrement ?

4. Thèses sur l'Ouvert et sur le principe de non-savoir

Axiome d'existence. Délaissons ces questions inaccessibles et revenons à l'Ouvert, frange de désir abstrait en notre petit nuage.

La première thèse le concernant est un axiome d'existence : *L'Ouvert dans la pensée existe au même titre que le mouvement dans les réalités matérielles.* Autrement dit, l'Ouvert, qui existe, est un '*impensable*' de type réflexif, et il continue à être aussi mystérieux *pour la pensée* que le mouvement pour la métaphysique de la physique. De plus, l'Ouvert s'articule fondamentalement à un *principe de non-savoir décidé dans la pensée*.

> Il ne suffit pas que tu comprennes dans quelle ignorance vivent l'homme et l'animal ; il faut encore que tu aies la volonté d'ignorance et que tu en fasses l'apprentissage. Il est nécessaire pour toi que tu comprennes que sans ce genre d'ignorance la vie elle-même serait impossible, qu'elle est une condition nécessaire pour que le vivant se conserve et prospère : une grande, une solide cloche d'ignorance doit t'enclore de toutes parts. [**343**], 254

Principe de non-savoir. En résumé, ce principe de non-savoir énonce qu'il y a du non-savoir pur. Il énonce aussi que l'on sait qu'il y a du non-savoir. De plus, il se trouve que ce principe est 'le' principe même de *suspension* *du savoir* que la méditation philosophique rigoureuse prend pour guide dans sa progression, en tant qu'elle ressasse indéfiniment le message socratique, d'après lequel :

Je sais [surtout] que je ne sais pas.

Je sais, et qui plus est, *je dois savoir*, que je ne sais pas. Ce sera donc ce philosophème (ou cette devise) dû (due) à Socrate que l'on prendra pour formulation du principe de non-savoir, à condition bien sûr de l'entendre aussi au sens impersonnel :

Le savoir doit surtout savoir qu'il ne sait pas.

Et enfin aussi, de manière quasi-équivalente lorsqu'on applique ce principe aux mathématiques pour qui l'aspect « devoir » du « non-savoir » est une évidence sous-entendue :

Le savoir mathématique sait ne pas savoir.

Ainsi s'exprime la conscience abstraite que possède le savoir mathématique, de l'incessant et de l'irréversible décalage entre des hypothèses provisoires et des résultats idéalement définitifs.

Thèse générale de mobilisation. *Le principe de non-savoir concerne la pensée dans son intégralité ; il s'exerce donc évidemment dans la philosophie et aussi dans les sciences, où il est actif, structurant et producteur à terme de connaissance concrète.*

De plus, le principe de non-savoir est une condition *sine qua non* de saine mobilité pour l'interrogation mathématique effective. C'est bien parce que les mathématiques pensent, conformément au *principe de raison* leibnizien, que tout a une raison, qu'elles peuvent indéfiniment puiser de l'énergie conceptuelle effective dans leur propre non-savoir. Pour argumenter cette thèse, tout l'enjeu est alors de décrire *comment* le non-savoir mathématique exerce une action sur le savoir mathématique, et d'estimer aussi la nature de cette action.

Suspension et volonté. L'Ouvert vit en suspens, toujours *a priori*, et en attente perpétuelle. Il s'inscrit aussi dans les mises en abyme de sa propre histoire. Il se pose virtuellement pour lui-même dans son propre destin. Aussi le mathématicien réceptif à l'Ouvert est-il toujours à l'affût d'une intuition disruptive qui ne se traduira peut-être pas d'emblée dans un langage constitué. En outre, l'Ouvert, en attente, s'articule à une *volonté réalisante*, mouvement de l'esprit qui exige l'actualisation du Potentiel et qui cherche à déceler tous les germes possibles d'*irréversible-synthétique* qui se trouvent dans les contenus mathématiques.

Si l'entreprise ne se révélait pas *a posteriori* totalement irréalisable en raison d'une complexité numéraire évidente, on pourrait d'ailleurs songer, en analogie-prolongement avec des travaux récents de génétique littéraire ou scientifique, à dresser un « *plan cadastral* » des psychologies de chercheurs, afin de localiser les endroits où, et de déterminer les moments où, germent *les idées ouvertes qui sont déclenchées par des questions provisoires*.

Indices d'ouverture. Tout le problème est alors d'attester et d'analyser *ce qui fait signe* — comme l'écrit Alain Badiou ([**21**]) — pour l'Obscur dans le Clair, ce qui fait signe pour l'impersonnel dans le personnel, ce qui fait signe pour le virtuel dans l'actuel, pour le départ dans le retour, pour le nomadisme des concepts dans le fixisme des doctrines, ce qui fait signe, ce qui le peut et ce qui le doit — *tout le problème est d'attester ce qui fait signe pour l'Ouvert dans le Clos*.

Comment l'Ouvert est-il ouvert ? Mais alors, comment ? Comment le Clos, qui existe en acte, peut-il instaurer une communauté hétérogène de singularités *qui font signe sans être actualisées* ?

Ainsi, *par la seule question du comment*, toute l'évidence de la méditation de l'Ouvert pourrait s'annuler d'un seul coup. Car il faudrait que l'être de l'Ouvert se trouvât distribué en catégories susceptibles de rendre compte au moins partiellement de ce qui fait que l'Ouvert s'ouvre, est ouverture, est protension créatrice, est constructivité, il faudrait des catégories qui thématisent et qui expliquent l'accrétion du '*vrai en gestation*' au '*vrai en acte*' dans les mathématiques, qui éclairent de conceptualisations adéquates ce qui fait que la pensée s'oriente dans la non-orientation et se contemple avec confiance comme productrice de rationalité nouvelle.

La question cruciale n'est donc pas de savoir pourquoi il y a de l'Ouvert, voire à un niveau transcendantal de savoir comment l'Ouvert est possible, ou encore de déterminer si l'Ouvert est pérenne : son existence et sa stabilité seront admises au titre d'une simple postulation théorique initiale, valable pour les mathématiques en tant que Recherche.

Non, l'enjeu brûlant, le vrai travail, c'est de décrire *comment* l'Ouvert est ouvert. Et ceci constitue un vaste programme de recherche, notamment au contact des mathématiques où l'analyse de l'ouverture commande, en particulier, de *déceler les indices de non-réponse dans tout théorème qui semble se prétendre satisfaisant*.

Nouvelle thèse postulée sur l'Ouvert. *L'Ouvert mathématique forge une réalité d'un type supérieur, simultanément objective et subjective, évidente, partageable et réellement présente. Ainsi, ce réel d'ouverture est attestable intersubjectivement comme partage de problèmes ouverts entre spécialistes d'un champ. Ce réel multiplie les occasions de se manifester à la manière d'une algèbre spontanée de questions et d'un clinamen*[3] *des hypothèses.*

[3] Dans la théorie physique d'Épicure, le *clinamen*, mouvement de déviation des atomes sans cause externe, est un principe physique de *liberté* analogue au mouvement volontaire

Cette nouvelle thèse *décalque immédiatement sur les concepts une nouvelle saisie universelle de leur problématicité*. La thèse dit que nous sommes *noyés d'ouverture*.

> Prenons, par exemple, le problème des trois corps : ne peut-on pas se demander si l'un des corps restera toujours dans une certaine région du ciel ou bien s'il pourra s'éloigner indéfiniment ; si la distance de deux corps augmentera, ou diminuera à l'infini, ou bien si elle restera comprise entre certaines limites ? Ne peut-on se poser mille questions de ce genre ? [**357**]

La thèse dit aussi que les questions mathématiques sont aussi présentes que les théories mathématiques ; et seule un réalisme spontané nous persuade que l'Ouvert ne tient au Clos que par un 'fil ténu'.

> Le tout réel pourrait bien être une continuité indivisible. *Le tout n'est jamais un ensemble clos*, mais au contraire ce par quoi l'ensemble n'est jamais absolument clos, jamais complètement à l'abri, ce qui le maintient ouvert quelque part, comme un fil ténu qui le rattache au reste de l'univers. [**127**]

Non, l'Ouvert s'ouvre du Clos vers l'Ouvert par une fenêtre d'une dimension aussi hyperbolique que le sont toutes les structures mathématiques non classifiables (exemples : variétés compactes lisses de dimension $\geqslant 4$; groupes de Lie non semi-simples ; groupes transitifs de permutations). Mais cette fenêtre s'offre difficilement au regard, car un exercice soutenu du regard et une attention obsessionnelle de l'esprit sont requises. La nouvelle thèse dit que

> *les concepts mathématiques sont inséparables des questions ouvertes, même dans les théories les plus achevées*.

À cause de cette conséquence, la nouvelle thèse s'écarte visiblement de la philosophie des mathématiques d'Albert Lautman, qui cherche à serrer de près le mécanisme de l'opération par laquelle l'analyse des Idées dialectiques se prolonge en créations mathématiques effectives, et ce, sans porter attention au fait que de nombreuses questions restes complètement ouvertes même dans les théories qui se présentent comme les plus achevées.

---

que la doctrine place à l'origine des choses ultimes afin d'*expliquer la liberté humaine*. Inscrit au cœur du procès d'auto-approfondissement, et essentiel aux déplacements conceptuels et spéculatifs, le *clinamen des hypothèses mathématiques* rayonne à tous les niveaux dans le travail mathématique : c'est seulement en changeant volontairement et stratégiquement la direction des hypothèses que la réalité mathématique peut se métamorphoser dans le travail de la pensée. Exemple : l'inversion des intégrales elliptiques dans la théorie d'Abel fait découvrir des relations algébriques nouvelles et plus harmonieuses.

> Nous croyons que le mouvement propre d'une théorie mathématique dessine le schéma des liaisons que soutiennent entre elles certaines idées abstraites, dominatrices par rapport aux mathématiques. Le problème des liaisons que ces idées sont susceptibles de soutenir entre elles peut se poser en dehors de toute mathématique, mais l'effectuation de ces liaisons est immédiatement théorie mathématique. [**265**]

Bien conduite, cette nouvelle thèse pourra contribuer aussi à déstabiliser définitivement l'empire du langage, ses jeux, ses rituels, et à mettre en joue l'effarouchement absurde du positivisme logique devant l'Ouvert mathématique. Cette thèse montre enfin comment les concepts se forgent parfois à partir d'expériences immatérielles et 'métaphysiques', où la question pure domine sans l'aide de certitudes matérielles préparatoires, en accord avec la philosophie que Hilbert mettait implicitement au fondement de ses 23 problèmes.

En conclusion, l'Ouvert, par l'ubiquité de sa présence, instaure la seule pratique non discursive, non matérielle et non gestuelle qui *suscite des expériences de pensée articulées bien avant tout saisie conceptualisante*[4].

Le sujet idéalement réceptif à l'Ouvert. C'est avec sincérité que Grothendieck, dans son testament mathématique[5], analyse ses propres créations et sa puissance d'invention en termes de « propension naturelle » à élaborer les « bonnes notions » et les concepts « visiblement cruciaux ». « Écrire sous la dictée », suivre la pulsion qui pousse à « voir des *questions* visiblement cruciales que personne n'avait vues », tel est le réel des mathématiques de Grothendieck. D'innombrables questions et points de vue féconds

> *naissent* spontanément, avec la force de l'évidence ; à la même façon qu'une lumière (même diffuse) qui surgit dans la nuit noire, semble faire naître du néant ces contours plus ou moins flous ou nets qu'elle nous révèle soudain.

---

[4] En ceci, on vise aussi une homologie de pensée avec la maxime de Gilles Châtelet :

> Les stratagèmes allusifs induisent une discipline de gestes et suscitent des expériences de pensée articulées bien avant toute saisie formalisante.

Mais en vérité, une perspective socratique rigoureuse conduirait à effacer la prééminence du geste et de l'opérativité (Granger) au profit de la question pure. L'ouverture des questions n'est qu'accidentellement ressaisissable dans des actes effectifs. L'acte n'est qu'un accident *révocable* de l'ouverture.

[5] *Récoltes et Semailles*, *Prélude en quatre mouvements*, *Promenade à travers une œuvre — ou l'Enfant et la Mère*, 65 p. dactylographiées. Des éléments biographiques et historiques précieux concernant la vie et la pensée de Grothendieck qui complètent *Récoltes et Semailles* sont donnés par Pierre Cartier, *La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich*, *Évolution des notions d'Espace et de Symétrie*, Fetschrift for the 40^{th} anniversary of the IHÉS, Publications de l'IHÉS, Bures-sur-Yvettes, 1998.

Ces questions naissantes sont soumises à la *dynamique de l'Ouvert*, ces « notions tellement naturelles que personne n'avait songé à les dégager », parce que cela était impossible

> *aussi longtemps que les questions qui les ont suscitées, et les notions qui permettent de les formuler n'étaient pas apparues encore.*

L'Ouvert, c'est donc la suscitation et le jaillissement des questions, c'est leur rapport à l'adéquation, en relation avec toute réalisation, mais sans finalisme *a posteriori*. Ainsi, les auto-analyses que nous transmettent l'âme poétique de Grothendieck dans *Récoltes et semailles* sont donc un exemple paradigmatique de *sujet idéalement réceptif à l'Ouvert, et cette réceptivité idéale d'un sujet a pour corrélat objectif et intersubjectif une réceptivité idéale à l'Ouvert de toute matière spéculative impersonnelle.*

5. Insuffisance de l'épistémologie du Concept

Magnétisme de l'*a posteriori*. Les mathématiques ne sont pas seulement une histoire imprévisible, qui ne serait interprétable que dans l'*a posteriori* événementiel de son déroulement. La position de Jean Cavaillès, pour qui :

> Ce qui est après est plus que ce qui était avant, non pas parce qu'il le contient ou même qu'il le prolonge, mais parce qu'il en sort nécessairement et porte dans son contenu la marque de sa supériorité ; il y a en lui plus de conscience — et ce n'est pas la même conscience. [**96**], 560

cette position est insuffisante, car elle conduit à éclipser l'existence de la *conscience prospective*, plus encore, à la comparer à une *conscience cristallisée*, et elle conduit aussi à regarder aussi bien l'achevé que l'inachevé seulement à travers le prisme de la conscience *rétrospective*. C'est une position d'historien, de spectateur, non d'acteur.

Cavaillès passe en effet à côté d'un réel essentiel aux mathématiques. Plus précisément, en privilégiant trop l'interprétation *a posteriori* des contenus, le philosophe du Concept passe à côté de réalités profondes : l'existence *et la permanence* d'intentions liminaires et de virtualités attendues ; toute la *structure en attente* des mathématiques conçues comme étude d'objets qui résistent. *Et cet aspect s'exprime* aussi *explicitement dans les textes mathématiques*.

Albert Lautman, à travers sa théorie des *Idées dialectiques* productrices de réalité mathématique, semble avoir mieux défendu l'idée que les mathématiques sont ouvertes dans l'indéfinitude d'attentes renouvelées et métamorphosables. Ce n'est donc pas un hasard si le mathématicien Élie Cartan, en 1939, a saisi plus profondément l'intervention de Lautman que celle de Cavaillès dans les communications qu'ils ont prononcées ([**95**]) à la Société française de Philosophie, le 4 Février 1939.

Cavaillès et le problème du fondement des mathématiques. En vérité, la philosophie des mathématiques de Cavaillès s'enracinait dans le difficile et délicat *problème du fondement des mathématiques* dont le destin, très imprévisible dans les années 1900 à 1920 lorsque Hilbert engageait sa conviction intime sur la non-contradiction des mathématiques, et lorsqu'il poussait de nombreux jeunes mathématiciens à développer la logique et la métamathématique ([**404**]), a débouché sur une remise en cause assez flagrante des attentes initiales, notamment avec les théorèmes d'incomplétude que Gödel avait soupçonnés et établis, à l'encontre du finitisme que Hilbert avait raffiné grâce à Brouwer.

Cavaillès bénéficiait ainsi, à la fin des années 1930 où le problème avait considérablement mûri, d'apports importants et quasi-définitifs de l'*Irréversible-synthétique* qu'avait produit la logique et la métamathématique, et ce, à un niveau proprement historique qui concernait plusieurs communautés de chercheurs à un niveau international. Voici donc un rappel concis des conclusions négatives de Cavaillès sur le problème du fondement, à partir desquelles il rebondit pour formuler des thèses générales qui ont souvent été interprétées comme valant pour les mathématiques tout entières (*cf.* [**405**]).

D'après Cavaillès, l'insuffisance philosophique croisée des solutions empiriste, logiciste, formaliste, intuitioniste et platonicienne devant le problème des genèses, où s'opère le passage de la puissance à l'acte et de l'essence à l'existence, a le double mérite : **1)** d'exiger la réactivation des champs réflexifs immanents aux mathématiques ; et : **2)** d'accentuer le mystère de l'activité formelle.

En effet, les travaux logiques des années 1930 ont révélé, dans leur appareil technique même, le *destin négatif de la question du fondement des mathématiques*, l'illégitimité du réductionnisme hilbertien, et les incohérences de l'attitude d'empirisme intuitif.

Conséquences pour la philosophie des mathématiques (d'après Cavaillès) :

1) L'expérience mathématique est expérience de contenus objectifs, et donc la pseudo-expérience de la conscience disparaît. Seule une philosophie du Concept peut donner une doctrine de la Science.

2) Nécessité d'adopter un point de vue *interne* au mouvement des mathématiques. Objectivité du devenir conceptuel et de l'enchaînement des contenus.

3) L'effectivité inhérente aux mathématiques leur provient d'une dialectique interne *historiée*. Libération du contingent par l'effectif, mais l'effectif dans son effectuation est contingent.

4) La théorie de la science est ainsi *théorie de l'histoire de la science*. C'est dans l'enchaînement historique des concepts qu'il faut la chercher.

Ainsi, concept contre conscience, dialectique interne contre activité génératrice, et épistémologie historienne contre phénoménologie fonderaient ce paradigme rêvé grâce auquel se déploierait le mouvement qui explique l'atteinte de la vérité et la surrection du sens, en mathématiques, et aussi dans les sciences en général, *cf.* l'œuvre de Canguilhem.

Toutefois ce n'est pas là exactement ce que prétend Cavaillès, car avec ses exigences d'autonomisation, la solution cavaillésienne authentique en appelle davantage à la procession illimitée de modes intuitifs originaux par l'analyse sans fin du noyau des gestes sensibles, qu'à la médiation du cercle historique. L'intelligibilité d'un résultat imprévisible se produit toujours à la rencontre de gestes réglés.

Il n'y a pas d'auto-mouvement des mathématiques. Néanmoins, ce qui fait problème pour le mathématicien en action, dans cette philosophie des mathématiques *de philosophe*, c'est que les travaux de recherche et leurs résultats partiels ne sont ni considérés, ni analysés, ni approfondis — ils semblent être tout simplement escamotés, comme si le philosophe s'octroyait le droit de restreindre le champ de son discours à une image qu'il se fait des mathématiques, en vertu d'un illusoire principe de partage des compétences. Les points **2)** et **4)** des conclusions cavaillèsiennes ci-dessus ([**96**], *cf.* aussi [**405**]) sont symptomatiques à cet égard : on y sent que les mathématiques, ramenées *a posteriori* à leur histoire autonome afin de faire preuve de l'objectivité la plus irréprochable et la plus louable sous le regard des philosophies immanentistes et des systèmes transcendantaux, semblent être contemplées de loin comme mues par un auto-mouvement pur et réglé, fascinant de rigueur et de beauté pour tout les philosophes *philosophes* des mathématiques, alors que les mathématiciens en action savent combien c'est un travail difficile et exigeant de produire des résultats nouveaux, et que cela n'a absolument rien d'automatique. Contrairement aux mouvements permanent des corps qu'on observe en physique avec la dynamique des corps céleste, avec les tourbillons l'atmosphère, ou avec les courants marins :

Il n'y a pas d'auto-mouvement des mathématiques.

parce que les idéalités mathématiques ne sont pas substances traversées par des champs de forces qui les auto-organiseraient. Aucun théorème mathématique, en effet, n'est obtenu en prélevant de l'information sur une substance qui évoluerait par elle-même — au moins en partie — indépendamment de toute intervention humaine. C'est pour cette raison restrictive profonde que la programmation sur ordinateur limite toujours son champ d'exploration à ce qui se décide et se re-décide en amont de toute effectuation sur machine.

De plus, l'une de thèses qui sera constamment développée dans ce mémoire cherchera à montrer qu'il est préférable, pour faire des mathématiques fertiles, de déployer dans sa pensée un *syncrétisme hétéronome des idées et des pratiques*, sans *a priori*, sans jugement, sans unilatéralisation. Autrement dit, la solution cavaillésienne négative (légitime) quant à un hypothétique fondement ultime des mathématiques doit servir de levier pour la recherche, et inciter à synthétiser autant que possible tous les aspects possibles de l'activité mathématique pour en augmenter l'efficience.

L'ouverture commande aussi d'être libre de tout préjugé sur les domaines des mathématiques qui peuvent être nécessaire à la résolution de toute question spécifique. Par exemple, le destin d'une question de géométrie algébrique complexe peut faire appel à des champs habituellement dédaignés, tels que la combinatoire et le calcul formel effectif (*cf.* [**319**]). Autre exemple : la conjecture de Poincaré, d'après laquelle toute variété compacte de dimension trois dont le groupe fondamental est réduit à l'identité devrait être homéomorphe à la sphère tridimensionnelle S^3, question d'origine topologique et étudiée par de nombreux auteurs avec des méthodes purement topologiques, a été résolue par Hamilton (avec une hypothèse de positivité sur la courbure de Ricci) et par Perelman (sans aucune hypothèse), grâce à une technique d'Analyse qui consiste à faire évoluer la métrique riemannienne le long de l'équation du *flot de Ricci* et à effectuer un nombre fini de chirurgies jusqu'à ce que les portions inconnues de la variété s'évanouissent grâce à une action d'homogénéisation progressive par *réaction-diffusion* du flot. Autrement dit, à l'encontre de tout préjugé, l'unité interne des mathématiques impose non seulement un syncrétisme hétéronome des idées et des pratiques, mais aussi une utilisation transversales d'outils, de théories, de domaines mathématiques.

En résumé, l'impossibilité de fonder ultimement les mathématiques — thèse cavaillésienne négative convaincante et admise —, que ce soit sur les actes de la conscience, sur le langage formel, ou sur la métaphysique du mouvement, n'empêche nullement d'exploiter tous ces aspects dans la pensée pour s'armer le mieux possible dans la recherche mathématique. Puisque l'on est à présent en quelque sorte *irréversiblement libéré* de la tentation de fonder ultimement les mathématiques, et puisque le problème du fondement est en lui-même inassumable, on peut s'autoriser à multiplier tous les points de rattachements possibles à des domaines qui structurent l'activité mathématique.

Subsumer les mathématiques. Pour la philosophie des mathématiques, l'un des dangers que le mythe de Cavaillès contribue à entretenir et à développer serait de *subsumer sommairement* toutes les mathématiques sans chercher à les apprendre, à les explorer, à s'y confronter, en tenant néanmoins un discours général sur elles dans leur ensemble. Pour les mathématiciens professionnels, au contraire, les mathématiques doivent constamment être apprises, travaillées, comprises.

Subsumer c'est englober tout une catégorie d'étants corporels ou incorporels diversifiés — par exemple, toutes les mathématiques, dont chacun d'entre nous (sauf M. Cartier) ignore des continents entiers — sous une seule et même dénomination.

Le « A » qui *subsume un genre possible du divers* — c'est-à-dire qui réfère à une espèce, qui rapporte à un ensemble de types, ou qui établit le rapport d'un objet à l'essence à laquelle il appartient — c'est donc bien le « A » archétypal de la pensée mathématique, susceptible d'héberger, sous un seul symbole choisi arbitrairement, tout une catégorie multiple d'êtres mathématiques rassemblés par une propriété définitionnelle commune. Se représenter un objet spécifique mais quelconque est en effet un acte universel de la pensée : « Soit A une algèbre associative et commutative » ; « Soit G un groupe de Lie compact connexe semi-simple» ; « Soit X un espace analytique normal $(n-1)$-complet », en un mot et en un seul :

« Soit « A » un 'objet' mathématique défini mais général et quelconque »,

incipit mathématique absolu, plus chargé de métaphysique *tacite* que ne l'est l'existence des objets sensibles. « Métaphysique », lance Hegel dans un opuscule,

> ainsi que 'abstrait', et à peu de chose près aussi, 'penser', est le mot devant lequel chacun plus ou moins fuit, comme on détale devant un pestiféré. [**208**]

Trvialité de l'abstraction : Hegel n'a pas hésité dans ce manuscrit non publié à fournir un exemple violemment polémique et ironique[6] tiré de la vie courante qui montre à quel point la conscience, telle un mauvais spin quantique, a la capacité malsaine de *projeter brutalement* tout objet de jugement dans l'espace bipolaire du '*bien-jugé*' ou du '*mal-jugé*'. En effet, plus forte que tout, l'*abstraction qui projette* constitue un *acte archétypal de subsomption et d'englobement* qui est aussi essentiel à notre survie dans un monde qui ne cesse de se complexifier.

[6] L'acheteuse pense abstraitement en *subsumant* [und subsumiert sie] la marchande tout uniment — avec son foulard, ses bonnets, sa chemise, *etc.*, ses doigts et d'autres parties, son père et sa famille entière — sous le crime d'avoir trouvé ses œufs pourris ; tout en elle se trouve de part en part coloré par ces œufs pourris, tandis que ces officiers dont la marchande parlait — si tant est, ce dont on peut douter, qu'il y ait eu quoi que ce soit à propos — ont pu parvenir à voir en elle de tout autres choses. [**208**]

C'est pour cette raison, entre autres, qu'il y a un réel danger, pour la saine pensée épistémologique, de subsumer sommairement les mathématiques sans s'y confronter comme elles l'exigent.

Retour sur les nécessités internes a posteriori. À ce stade des réflexions, il est temps de récapituler l'*élément d'ouverture pré-platonicienne* qu'il faudrait apporter à la philosophie du Concept pour l'enrichir d'une philosophie d'acteur scientifique.

On ne va pas se demander d'où parle Cavaillès, ni s'interroger sur l'absence singulière de l'auteur devant son objet dans ses deux thèses. D'une certaine manière, l'effacement de Cavaillès n'est que partiel. Se lit clairement dans ses textes l'intention de restituer les marques d'une *nécessité historique*. À propos de la notion de groupe intégrable, dégagée par Du Bois-Reymond, Cavaillès écrit en effet :

> Si la théorie des ensembles est ici latente, elle n'a pas trouvé encore l'*obligation d'apparaître*. [**96**]

Dans sa première thèse, le paragraphe qui introduit au passage sur les séries trigonométriques témoigne encore d'une volonté d'affirmer fermement des nécessités d'essence.

> On sait l'importance centrale des travaux sur les séries trigonométriques dans le développement de l'analyse au XIX$^{\text{ème}}$ siècle : c'est grâce à eux que la notion générale de fonction a pu se dégager, c'est à leur occasion que les principales extensions de l'intégrale ont été effectuées, de Lejeune-Dirichlet à Riemann, et même à Lebesgue. D'où la mise en jeu de la théorie des ensembles, à propos tant du but des recherches – théorie générale des fonctions – que des moyens utilisés – intégrale de Fourier. [**96**]

L'épistémologie de Cavaillès — initiatrice de l'épistémologie du Concept — n'hésite donc jamais entre le *descriptif* et le *normatif* : elle affirme constamment qu'il y a des nécessités *a posteriori*, sans égard pour tout ce qu'il reste d'ouverture et d'inachèvement dans chaque théorie.

Au contraire, il faut saisir sur fond de décalages successifs le jeu des exigences d'élargissement, l'écart perpétuel d'un devenir creusé de l'intérieur. Le regard d'un philosophe peut alors s'introduire afin de désigner les articulations immanentes de ces élargissements. L'épistémologie doit inscrire ses démarches dans l'intériorité séparée, afin de « saisir sur le vif la conceptualité propre aux mathématiques comme immanente à leur devenir même ».

L'intérêt de la méthode cavaillésienne réside bien entendu dans l'exigence d'authenticité et de fidélité qu'elle impose à l'analyse des singularités discursives. Mais l'immersion cavaillésienne dans l'élément mathématique contribue à renforcer l'opacité métaphorique de son discours. Avec ses catégories de pensée, l'historien risque de mettre un voile sur la problématicité réelle qui est à l'oeuvre dans le texte mathématique.

En effet, loin de se manifester sous forme de gestes imprévisiblement déviants et de réactivations thématiques pour les dispositifs opératoires :

La question mathématique se développe dans l'espace de ses hésitations.

En témoignent, à l'oeuvre dans la textualité authentique et présentées comme des ouvertures explicites, les question-idées fédératrices et prélautmaniennes que sont : qu'est-ce qu'une fonction ? qu'est-ce que l'intégrale ? qu'est-ce qu'une série trigonométrique convergente ? qu'est-ce qu'une singularité analytique ? Le trait essentiel de la question mathématique est de s'inscrire dans une mouvance indéfiniment réactivable. C'est bien ce lieu que nous désignerions, si on nous demandait : « où gît le principe des rectifications incessantes ? »

Il faudra donc admettre l'existence, sinon la présence, d'un *champ interrogatif immanent*, pour faire écho au *champ réflexif immanent* de Desanti. Dans ces conditions, rien d'étonnant à ce que la philosophie échoue à ordonner les recherches, à s'ériger en « monitrice de la science ». Le questionnement scientifique, contrairement à tout logicisme diffus, est constamment éprouvé, dans son contact à l'ouverture, par l'expérience des autocorrections. Sans compter les errances parfois dogmatiques d'une thématique seulement métaphorique du geste.

Il suffira donc de produire une philosophie de l'interrogation effective immanente aux mathématiques pour rendre compte de manière satisfaisante du progrès matériel entre essences singulières. Son moteur, l'exigence de dépassement, entretient des relations complexes avec la doctrine de la vérité qui se dégage de la constitution de champs apocritiques[7] entiers dans la mathématique. Il y a, en elle, plus de conscience des réponses absentes que ne le laisse transparaître ensuite la médiation historique.

La question de l'existence des idéalités mathématiques, ou le problème de savoir si les mathématiques constituent une ontologie, sont peut-être des questions dont il faut savoir se libérer pour aller de l'avant. *Le problème crucial est celui du lien entre les réponses et les questions*, non celui d'une problématisation exagérée et captatrice au sujet des existences. Contrairement aux problèmes d'ontologie. Le noeud problématique qui articule les genèses mathématiques neutralise

À l'issue de ces réflexions, on retiendra :

1) Il est nécessaire de poser des *conditions explicites* pour obtenir des réalisations effectives, mêmes partielles, au sujet de questions-mères intuitives ;

2) Toute question mathématique est impliquée dans une *herméneutique indécise de la position d'hypothèses* (*cf.* ce qui va suivre).

[7] — de *apocrisis*, « la réponse », en grec —

À sonder ces indications, on se demandera si la réponse mathématique n'est pas congénitalement et nécessairement *position de conditions* en liaison avec une question-idée, et si par là s'expliquerait sa structure intrinsèquement axiomatique. *Loin de constituer seulement l'émergence d'un structuralisme et d'un style d'exposition, l'axiomatique serait dépositaire de formes nécessaires de réalisation pour tout questionnement autonome de «type» mathématique.* Autrement dit, la méthode hypothético-déductive répondrait à une exigence transhistorique de liaison entre questions et réponses qui lui est supérieure.

Ainsi, l'autonomie des mathématiques navigue dans un questionnement où la «puissance» des énoncés et les réalisations qui en dérivent reproduisent des schémas apocritiques difficilement conquis, mais *sûrs*. Symétriques à l'origine, les intentions de Cavaillès et de Lautman demeurent remarquablement complémentaires. Du fait d'un commerce incessant entre l'*a priori* d'une liaison problématique et l'*a posteriori* d'une synthèse, la philosophie des sciences ne cesse de se débattre avec cette dualité, ayant perdu l'espoir d'une fondation dans la conscience, dans le symbole ou dans le geste, mais étant heureusement toujours mobilisée par la production d'*irréversible-synthétique*.

6. Figures allégoriques de l'Obscur, du non-voilement et de la vérité

Métaphores terrestres. Comment alors se représenter, allégoriquement, la progression de la connaissance, scientifique ou encyclopédique ? *Il y a là un réel besoin de récit et d'images en réseau.* Obscurité dynamique et motrice, pénétration dans l'ombre, éclaircissement progressif de places obscures, *telle est l'arcane*, affirme Diderot :

> Je me représente la vaste enceinte des sciences comme un grand terrain parsemé de places obscures et de places éclairées. [**132**], § 14

Cette comparaison spatiale est riche en intuitions quant à l'exploration scientifique : il y a là un air de famille avec les métaphores de Grothendieck bâtisseur de maisons. Diderot poursuit :

> Nos travaux doivent avoir pour but, ou d'étendre les limites des places éclairées, ou de multiplier sur le terrain les centres de lumière. L'un appartient au génie qui crée ; l'autre à la sagacité qui perfectionne. [**132**], § 14

Au-delà de cette vision et pour la renforcer, c'est à un cortège de métaphores concrètes, topographiques, terrestres, astronomiques, géologiques, c'est à une allégorisation de la vision, c'est à l'hallucination du spéléologue, c'est à une sonde glissée dans l'espace fractal de la géographie terrestre, de prolonger et d'enrichir ces intuitions dans l'imaginaire.

Nécessité des allégories de la connaissance. L'allégorie la plus simple possède un double sens absolu, elle est *transitive* : le sens figuré y est énoncé en dehors du sens propre, et *hétéro-télique* : le sens propre ne vaut pas pour lui-même, mais pour le sens figuré[8]. Contrairement à la métaphore scientifique selon Gilles Châtelet, qui est habilitée à exhiber des agencements et des pratiques qui secrètent de la naturalité et de l'évidence — *stratagèmes allusifs*, *métaphores-orchestre*, figures sensibles vues comme des diagrammes, *dispositifs d'extraction de gestes* —, l'allégorie n'a d'autre visée que la représentation poétique et la suggestion plastique d'un mystère ou d'une théorie philosophique. Ceci en fait la faiblesse, du point de vue de l'effectivité, lorsqu'on la compare à la métaphore scientifique, mais aussi la force : il y a un réel besoin de puiser des représentations visuelles dans le monde sensible, d'établir des analogies, et d'exciter les résonnances et les homologies archaïques entre l'abstraction et le monde sensible. Deux allégories se présentent : l'allégorie de la caverne de Platon, et l'allégorie des immeubles mathématiques, de Grothendieck.

L'allégorie de la caverne. Il faut avant tout intepréter ici l'allégorie comme une décision philosophique volontaire, et non arbitraire, de faire droit à *l'exigence de vivification des idées*. L'allégorie philosophique est une invention, un récit, un stratagème didactique qui ne se réduit en rien à un 'illustratif subsidiaire'. Et Platon, en écartant l'influence des mythes ancestraux, leur substitue des allégories à visée formatrice, pédagogique et éducative ; par exemple — la plus célèbre d'entre elles et qui nous intéresse — l'allégorie de la caverne. Celle-ci met en scène comme un mystère de la connaissance, une *réminiscence de l'ombre et du non-dévoilé* qui ne s'expliquent bien que par l'allégorie, parce que l'allégorie met en scène le *mouvement de décèlement de l'Idée* : le regard des prisonniers ne s'accoutume que progressivement à la lumière, après leur libération, car ils sont tout d'abord éblouis par l'éclat du soleil et incapables de voir le réel, puis ils découvrent, dans leur parcours vers la lumière, des simulacres qui projetaient des ombres sur la paroi de la caverne, et enfin, montent vers l'Idée du Bien, montent vers l'absolu ; bref, *l'accession se fait par étapes*, ce qui confirme l'existence fondamentale du *mouvement d'assomption de la connaissance vers le vrai*.

Théorie de la vérité et du non-voilement. En amont d'une théorie des Idées, l'allégorie de la caverne présente donc une dialectique de la présence éloignée au regard, ou une dialectique de la visibilité de l'ombre, bien plus qu'une dialectique de la genèse des essences. Les analyses de Heidegger ([**210**]) affirment que l'*essence originelle* de la vérité réside dans le *non-voilement* — ἀλήθεια, dont l'étymologie stricte est "non-latent", puisque

[8] *Cf.* l'article *Allégorie* dans [**145**].

lateo = $\lambda\alpha\nu\vartheta\acute{\alpha}\nu\omega$ — qui apparaît comme le trait fondamental de l'étant lui-même dans la pensée grecque. *Ce qui demeure essentiel pour le non-voilé, c'est que le non-voilé surmonte constamment un voilement du voilé.* Il y une victoire de tous les instants sur l'absence de formation, une victoire de tous les instants de l'éclaircissement sur l'obscur. *Le non-voilé doit être arraché constamment à son occultation.* En vérité, c'est le *mouvement vers le vrai*, et non l'Idée, qui occupe la place essentielle. Les vérités mathématiques seraient comme des fruits mûrs concentrant tous les germes de mouvements qui les ont rendues possibles. Une telle image départagerait équitablement réalisme et constructivisme. Dans cette alternative, on serait presque tenté, pour montrer combien la synthèse du réel mathématique est empreinte d'une dynamique indélébile, de risquer, pour l'expliquer, l'oxymoron de '*constructivisme platonicien*'.

7. Indécision de la position d'hypothèses et construction du vrai

Grothendieck bâtisseur de maisons. Autre registre allégorique, complétement différent : la maçonnerie et le bâtiment. Il ne s'agit plus de la mathématique comme organisme ou comme protention, mais de la mathématique comme architecture et comme construction. Il s'agit de la mathématique comme *action*, celle de l'ouvrier et celle du maçon, dont les mains travaillent au contact du béton. Comme pour se dédouaner de son inventitvité abstraite, Grothendieck esquisse à grands traits deux portraits : celui du « *mathématicien casanier*, qui se contente d'entretenir et d'embellir un héritage », et celui du « *bâtisseur-pionnier*, qui ne peut s'empêcher de franchir sans cesse les cercles invisibles et impérieux qui délimitent un Univers ». Quand les premiers s'affairent, c'est pour « réparer un meuble bancal, crépir une façade, affûter un outil, voire même parfois, pour les plus entreprenants, fabriquer à l'atelier, de toutes pièces, un meuble nouveau ». Faisons alors abstraction ici du ressentiment, du jugement et de l'amertume de Grothendieck, qui poursuit ensuite sur un plan très personnel son allégorie. Citons plutôt *in extenso* un passage de *récoltes et semailles* qui, bien qu'il soit beaucoup moins célèbre que le texte de Platon, complète par une philosophie de l'action les éléments allégoriques de l'accession aux vérités mathématiques :

> Je me sens faire partie, quant à moi, de la lignée des mathématiciens dont la joie spontanée est de construire sans cesse des maisons nouvelles. Chemin faisant, ils ne peuvent s'empêcher d'inventer aussi et de façonner au fur et à mesure tous les outils, ustensiles, meubles et instruments requis, tant pour construire la maison depuis les fondantions jusqu'au faîte, que pour pourvoir en abondance les futures cuisines et les futurs ateliers, et installer la maison pour y vivre et y être à l'aise. Pourtant, une fois tout posé jusqu'au dernier chêneau et au dernier tabouret, c'est rare que l'ouvrier s'attarde longuement dans ces lieux, où chaque pierre et chaque chevron porte la trace de la main qui l'a travaillé et posé. Sa place n'est pas dans la quiétude des univers tout faits, si accueillants et si harmonieux soient-ils — qu'ils aient été agencés par ses propres mains, ou par celles de ses devanciers. D'autres tâches déjà l'appellent sur de nouveaux chantiers, sous la poussée impérieuse de besoins qu'il est peut-être le seul à sentir clairement, ou (plus souvent encore) en devançant des besoins qu'il est le seul à pressentir. [**197**], 12–13

Schéma de l'indécision de la position d'hypothèses. Quittons ce registre, qui ne ménage guère de place à l'Obscur[9], pour étudier rapidement le dispositif qui étaye conceptuellement la théorie du dé-voilement mathématique, dispositif qui sera désigné sour le nom de *schéma abstrait de l'indécision de la position d'hypothèses* (*voir* aussi *infra*). À un premier niveau, ce schéma présente les énoncés mathématiques en les articulant à un faisceau de problèmes dans lesquels ils s'insèrent. Tout théorème incorpore des hypothèses imbriquées les unes dans les autres, et une ou plusieurs conclusions. *Les hypothèses demeurent indécises, c'est-à-dire en question et en suspension pour un remplacement possible, tant qu'elles peuvent être déplacées pour obtenir le même résultat.* Existe ainsi une dynamique de déplacement d'hypothèses en vue de trouver des énoncés optimaux : c'est une manifestation *in situ* de l'Ouvert mathématique technique. À un deuxième niveau, réciproque du premier et qui lui est supérieur, ce sont les conclusions qui sont affectées de mobilité. L'indécision se manifeste alors en tant que les hypothèses doivent être choisies pour fournir une étude adéquate d'objets qui résistent par leur richesse et par leur profondeur. À ce niveau, les hypothèses se confondent avec le choix et l'invention des concepts, *et l'indécision du choix demeure omniprésente dans l'étude actuelle des objets constitués*. Enfin, à un troisième niveau, il s'agit de l'*indécision de la position d'axiomes*. Exemple historiquement célèbre et canonique : le problème du continu. Il

---

[9] Tout est clarté (!) pour la philosophie des mathématiques de Grothendieck :

> Si j'ai excellé dans l'art du mathématicien, c'est moins par l'habileté et la persévérance à résoudre des problèmes légués pas mes devanciers, que par cette propension naturelle en moi qui me pousse à voir des *questions* visiblement cruciales, que personne n'avait vues, ou à dégager les '*bonnes notions*' qui manquaient. [**197**]

s'agit de la question du choix (ou du non-choix) de l'*axiome de détermination complète* des cardinaux, après que Kurt Gödel (1947) et Paul Cohen (1963) ont démontré qu'il ne découlait pas des axiomes de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel ([**184**]). Mais dans la perspective dite platonicienne de Gödel, *le problème crucial est celui de la vérité*, et non du statut d'Idées préexistantes ; autrement dit, la question centrale est de savoir quel choix pourrait être *le vrai choix*, au sujet de l'existence, ou de la non-existence d'un cardinal qui serait intermédiaire entre celui des nombres entiers et celui des nombres réels. Il est bien connu que l'analyse de ce problème ne s'est pas révélée avoir une incidence sur le développement des mathématiques hors de la logique, de sorte que la question d'un tel choix demeure pour l'instant une question privée de motivation supérieure vis-à-vis des mathématiques. Mais le problème philosophique pensé par Gödel a eu au moins le mérite de mettre en lumière l'importance d'« appels répétés à l'intuition mathématique pour obtenir des réponses non ambiguës aux questions de la théorie des ensembles », c'est-à-dire ([**20**]) l'importance des *décisions (choix d'axiomes) au regard de l'indécidable (questions pures)*. À un niveau supérieur concernant l'attente de la vérité, c'est-à-dire du point de vue de la philosophie riemannienne des mathématiques, la question du cardinal intermédiaire soulevée par Gödel en relation avec le choix d'un système d'axiomes, si elle n'est pas résolue, doit être rigoureusement maintenue dans sa non-résolution rémanente au cœur des explorations les plus récentes (*cf.* les travaux de Woodin).

Dynamique de l'éclaircissement. En définitive, *l'allégorie de l'Obscur ne vise qu'à illustrer visuellement la présence de germes d'ouverture qui circulent dans les mathématiques à tous les niveaux et qui se reproduisent et essaiment, ou se retirent dans l'opérativité, voire se tarissent, le tout à un niveau historique*. De plus, cette allégorie ne se cantonne pas à l'illustration, elle est étayée par un dispositif de *fluidification des questions techniques* et elle vise à l'exigence de ressaisir les champs de problématiques, de diagrammatiques et d'incarnations linguistiques, qui sont au cœur des théories. Enfin, la dialectique de l'incertitude, qui est au cœur des pratiques heuristiques, possède de véritables *structures de provocation à la question*, lesquelles, même si rien ne peut jamais les fixer dogmatiquement, même si elles menacent de se renouveler et de s'enrichir sans cesse, possèdent néanmoins une force de reproduction et de réactivation, qui sont déjà suffisantes à la promulgation des lois d'une *mathématique indéfinie*. Ces éléments généraux doivent s'accompagner d'une étude des aspects spéculatifs particuliers de l'Ouvert mathématique, étude rivée au mystère du *mouvement* de la pensée mathématique, que l'on peut mener à bien en examinant des mémoires et articles mathématiques.

Généralités sur l'herméneutique, en philosophie. L'herméneutique moderne — terme qui apparaît chez Schleiermacher et chez Dilthey — comprend, comme sous-discipline, une composante philosophique qui analyse les fondements de l'interprétation en général, qui étudie en particulier l'interprétation des textes proprement philosophiques, et qui cherche à comprendre comment la réflexion interprétative ouvre potentiellement vers le glissement continu des idées et vers la métamorphose progressive de l'explications des textes. Bien entendu, l'herméneutique au sens large n'est pas forcément cantonné aux études théologiques, et elle explore aussi des champs tels que la poétique, la rhétorique, la littérature, mais aussi la sociologie, la psychologie, l'histoire, l'anthropologie, voire même, mais plus exceptionnellement, les mathématiques. À la Renaissance, la nécessité d'un retour aux sources véridiques de la connaissance et à la littéralité authentique des textes de l'Antiquité s'est fait ressentir, et c'est ce qui a progressivement conduit à la fondation d'un nouveau domaine, celui de la philologie. Un 'axiome' de l'herméneutique veut qu'il n'y ait pas d'acheminement direct au texte, et qu'une médiation, plus ou moins implicite, soit toujours requise.

Dans une perspective phénoménologique, l'herméneutique philosophique cherche à analyser ce qui se manifeste et ce qui se présente par soi-même dans le donné des phénomènes. Elle vise à ériger une théorie de l'interprétation et de la réception des œuvres, notamment littéraires et artistiques. Enfin, elle *questionne* la textualité en elle-même, et elle interroge le double rapport du texte à son (ses) auteur(s) et à ses lecteurs.

S'il n'y a plus de norme transcendante externe qui fixe l'interprétation de la lecture (par exemple, la Religion), il faut en effet apprendre par soi-même à déceler les mécanismes qui sont internes à tout texte donné, et ce, afin d'analyser le sens qui est produit en lui-même, sans en multiplier à l'infini les significations possibles. D'après Dilthey, les sciences de la nature chercheraient à expliquer [*Erklären*] tout mode donné dans l'externalité autonome du monde physique, tandis que les sciences humaines, en particulier l'histoire, exigeraient au contraire que l'on comprenne [*Verstehen*] toutes les choses de l'intérieur, et c'est en cela que les catégories de pensée de l'herméneutique s'adapteraient à une lecture du déploiement autonome des mathématiques.

Pour les partisans du schéma herméneutique ([**381**]), la mathématique est, dans ses déploiements, la mise en acte d'un rapport herméneutique à des énigmes. C'est le texte mathématique qui véhicule la relance implicite des *tenants de question*. La prolifération axiomatique serait symptomatique de l'ouverture indéfinie d'au moins trois questions principales : l'Infini, le Continu, l'Espace. Mais une telle vision exagérément globale de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Géométrie, en reste à un niveau trop liminaire sans se donner les moyens d'entrer réellement dans les contenus mathématiques tels qu'ils se développent au niveau de la spécialisation. Ainsi la valeur herméneutique articulée comme discours vague et non technique à destination de non-mathématiciens occulte-t-elle les processus de réalisation conceptuelle afférents à des questions mathématiques précises. Sans compter que l'intensité d'une ouverture dirime peut-être tout renvoi à des textes, du moins les dépasse, en tant que toute ouverture peut se poser à nouveau pour elle-même dans une indécision absolument pure. Toutefois, la valeur herméneutique possède un sens dans le concret des élaborations spécialisées qui demeurent invisible à l'herméneute ne s'y confrontant plus.

L'herméneutique indécise de la position d'hypothèses, en mathématiques. Schématiquement, tout théorème mathématique qui pivote autour d'une causalité centrale « C » s'énonce de la manière suivante. On reviendra ultérieurement sur la puissance d'expressivité rhétorico-synthétique de certains théorèmes étendus que l'on trouve dans les trois volumes de la *Theorie der Transformationsgruppen*[10] par Friedrich Engel et Sophus Lie, comme illustration d'une plus haute complexité à laquelle peuvent conduire des synthèses de la pensée mathématique (plus de conditions que dans le schéma ci-dessous, et des liens plus étroitement adéquats avec la conclusion).

Théorème. *Soient I, J, K, L, M et $\mathscr{O}$ un certain nombre d'objets mathématiques qui vérifient par hypothèses certaines conditions* (i), (ii), (iii)*. On suppose qu'une condition centrale «* C *» est vérifiée. Alors une* conclusion positive *$\mathscr{A}$ est réalisée, à savoir l'objet mathématique à comprendre $\mathscr{O}$ est « réfléchi », « maîtrisé », « connu », « classifié », ne serait-ce qu'en partie et au moins partiellement dans l'horizon provisoire d'une attente de réponse qui ne serait pas infiniment exigeante.*

L'herméneutique mathématique intervient alors au moment où la lecture d'un tel énoncé-théorème *déclenche chez tout lecteur-chercheur quelconque un germe de questionnement et d'ouverture*. En particulier, c'est l'*élimination d'hypothèses* qui provoque le plus régulièrement la recherche d'interprétations en direction de vérités nouvelles. Ici, sur un tel exemple paradigmatique, la recherche d'une élimination revient schématiquement à se demander si l'une des sous-hypothèses présentes dans la supposition que I, J, K, L, M satisfont les conditions **(i)**, **(ii)**, **(iii)** est réellement nécessaire, et lorsqu'une telle nécessité semble faire défaut au terme d'une analyse spéculative qui peut s'avérer délicate, il faut ensuite se demander si un énoncé analogue au théorème connu et maîtrisé ne pourrait pas être encore

10 [**146**], [**147**], [**148**] ; *voir* aussi [**322**] pour une traduction anglaise commentée du premier volume.

vrai plus généralement sous des hypothèses plus faibles. Il y a alors *herméneutique indécise* en tant que l'interprétation ignore *a priori* quelles sont les bonnes décisions qui doivent être prises pour métamorphoser ainsi l'énoncé en direction d'une vérité supérieure, ce qui exige le plus souvent un effort plus intense pour construire de nouveaux raisonnements irréversiblement synthétiques, tandis que dans certaines circonstances favorable, la vérité relativement plus adéquate se réalise en supprimant tout le superflu d'hypothèses dont le caractère accessoire n'était pas entrevu auparavant. Tant sur le plan qualitatif que sur le plan quantitatif, l'élimination fait question, et donc pour le mathématicien-acteur qui cherche à interpréter le théorème, l'énoncé *porte potentiellement en lui toute les virtualités de ses métamorphoses*.

Élimination complète : toutes les hypothèses doivent être supprimées, car elles ne sont pas en relation adéquate avec la *liaison* qui doit exister entre la conclusion $\mathscr{A}$ et la causalité centrale « C ». C'est parce qu'on se meut *peut-être* dans un espace logiquement correct mais extrinsèque à la question posée qu'il est nécessaire de prétexter une indécision forte quant aux hypothèses, et il y a par conséquent *herméneutique* en tant que c'est de la textualité propre à l'énonciation que jaillissent des questions nouvelles.

Éliminations partielles : elles conduisent à des généralisations qui augmentent la charge synthétique de l'énoncé (*cf.* l'analyse p-adique), ou qui ouvrent sur des objets ontologiquement affaiblis (*cf.* la théorie des distributions). Pour que la conclusion soit réalisée, *est-il vraiment nécessaire* de supposer la donnée, par exemple, de I et de L, ou est-il nécessaire que la condition **(ii)** soit satisfaite ? Sont-ce des hypothèses techniques provisoires qui sont seulement destinées à simplifier la démonstration ?

Condition centrale « C » : Enfin, le pivot de causalité mathématique appelle à une recherche potentielle, après élimination d'hypothèses inadéquates, d'une condition nécessaire et suffisante qui manifesterait le resserrement maximal d'un irréversible-synthétique spécifique.

Approfondir les interstices d'un enchaînement d'hypothèses. On trouve dans l'*habilitationsvortrag* de Riemann ([**367**]) une *stratification potentiellement continue des concepts géométriques* par laquelle il propose d'*approfondir tous les interstices d'un enchaînement d'hypothèses* ; cette approche universalisable inspirée par la philosophie de Herbart conduit à repérer des failles imprévisibles d'ouverture dans toute conceptualisation, notamment pour fonder une *théorie absolument questionnante* au sujet du lieu et de l'espace (*cf.* [**320**] pour une analyse plus détaillée). Chez Riemann en effet, l'« être géométrico-topologique problématique », dévoile progressivement son ontologie : étendue amorphe ; topologie amorphe ; quantum de localité ; espaces discrets ou continus ; choix des modèles locaux ; topologie des espaces continus ; homéomorphisme local ; dimension ; structures continues ; structures différentiables ; structures analytiques ; structures algébriques.

Du point de vue de la philosophie générale des mathématiques, le morphisme « *synthèse et réalisation* » invite à se déplacer — tout en s'interrogeant à la manière de Riemann — d'un niveau hypothétique $\mathscr{H}_n$ à un autre niveau hypothétique $\mathscr{H}_{n+1}$, et il demande en même temps quelle est la mesure de l'*écart* entre ces deux niveaux, quitte à ouvrir d'aurtes niveaux interstiels :

$$\cdots \longrightarrow (\mathscr{H}_n) \longrightarrow (\mathscr{H}_{n+1}) \longrightarrow \cdots .$$

8. Bilan et résumé.

Les mathématiques comme Recherche. Certaines thèses centrales ont été formulées au cours des réflexions généralistes qui précèdent, d'autres viendront. L'intention liminaire était d'affirmer tout d'abord la co-présence, l'insistance et la *mobilisabilité* du questionnement mathématique afin d'ouvrir une voie vers une nouvelle appréhension systématique de la *pensée mathématique en tant que recherche*. Ce type d'approche exige comme approfondissement une étude en situation des pensées tacites qui ne peuvent s'empêcher de ré-émerger pendant la lecture des textes spécialisés, ainsi que dans les pratiques mathématiques effectives. La postulation d'existence pour l'*Ouvert mathématique technique* s'accompagne ici d'une pensée qui vise à conférer un statut de réalité solide, à la fois objective et subjective, à toute ouverture mathématique, ce qui nécessite un recours constant à l'allégorie comme représentation imagée de la pensée mathématique. On a souligné aussi les aspects mobiles et duplicatifs de l'Ouvert. Enfin, par manque de temps, de nombreux aspects strictement spéculatifs n'ont pas été abordés ici, par exemple : la position de l'Ouvert par rapport au platonisme originel ; l'articulation *in situ* de l'Ouvert aux mathématiques *spécifiques* ; la permanence réflexive des métaphysiques ; le positionnement par rapport à la philosophie des mathématiques d'Albert Lautman.

Résumé théorique intercalaire. La situation d'ouverture inhérente aux mathématiques impose de congédier toute épistémologie qui analyserait les créations mathématiques seulement dans l'*a posteriori* de leurs synthèses. Aussi la réduction historiciste immanentiste pure est-elle irrecevable, car les mathématiques exigent une implication *transhistorique* dans les questions — rarement complètement résolues — qu'elles étudient : impossible de se mettre à distance des soucis mathématiques authentiques.

Toutefois, l'immanentisation pure des contenus est nécessaire. La dialectique herbarto-riemannienne de la « *question-interstice* » génératrice d'impulsions conceptuelles doit conduire la philosophie des mathématiques à remonter du platonisme et du transcendantalisme vers un socratisme plus originaire, où la Question demeure libre de toute ses réalisations partielles connues. L'*herméneutique indécise de la position d'hypothèses* schématise, par exigence d'auto-épuration, une mobilisation des énoncés-théorèmes en direction de l'amélioration de leur adéquation.

La dialectique entre le réalisable et l'irréalisable indique qu'il existe des *nécessités réalisationnelles.* Une théorie mathématique n'est telle que par des *intentions centrales* qui dirigent vers certaines *réalisations* effectives. De là découle la *contextualité fondamentale* de toute théorie par rapport aux problèmes qu'elle déclare.

La puissance des réalisations de l'esprit se mesure surtout aux exigences de respect d'un abstrait interrogatif pur. D'où la bimodalité du mathématique philosophique : métaphysique ayant enfin surmonté ses prolégomènes dans une Science qui est Pensée.

L'approfondissement s'inscrit dans une nécessité indifférente au sensible comme à sa réévaluation formelle. La relance et le processus d'axiomatisation ne sont donc pas les seuls et ne possèdent en tout cas de signification que relativement au concret interrogatif déjà existant (persistant).

1) *L'ouverture mathématique questionnante possède une structure universelle, inamovible et reproductible.*

De là surgit alors le problème de rechercher les natures simples interrogatives au moyen desquelles puisse s'établir le système de la pensée mathématique. La présentation formaliste de théories axiomatisées répond peut-être seulement à l'éclatement nécessaire des concepts provoqué par *l'exigence de question pure* (Abel, Galois et Riemann), et (ré)habilitée malgré lui par l'école de Hilbert (Zermelo, Gödel). Exemples : destin riemannien de la géométrie ; théories quadratiques sur des corps de nombres ; nature récursive de la calculabilité.

D'où l'impératif riemannien :

2) *Il est nécessaire d'approfondir les interstices d'un enchaînement d'hypothèses.*

Le point de vue qui l'emporte ici est celui de la *synthèse des conditions nécessaires*, et non celui de l'analyse des notions premières (Lautman contre Carnap). Double conséquence : la Question-Idée fédératrice déploie le champ d'une cloturation espérée :

(a) évidemment impossible pour la question : «*Et d'abord, que doit-on entendre par* $\int_a^b f(x)dx$ *?*», (Riemann, 1854, *Habilitation*) *cf.* intégrales de Cauchy, Riemann, Jordan, Borel, Lebesgue, Stieltjes, Radon, Daniell, Haar ;

(b) mais possible pour la quasi totalité des problèmes mathématiques (Hilbert, 1900) : description d'invariants complets ; classification de structures ; équivalences entre espaces fonctionnels et nature géométrique ou topologique d'un domaine ; conditions optimalement suffisantes ; conditions nécessaires et suffisantes ; caractérisations.

Ainsi, l'exigence d'autonomisation est reconnaissance de l'intimement mathématique : procession illimitée de *tensions interrogatives* qui provoquent à la manière platonisante d'un horizon de réponse préexistant. L'opératoire y est subordonné, le geste l'accompagne : *contre Cavaillès*. Tout platonisme, fût-il transcendantalement constitué, se heurte à ses propres exigences : la pensée n'avance sur des terres sûres qu'en rabotant l'extrinsèque et en éliminant les hypothèses.

3) *Les mathématiques sont impliquées dans une herméneutique indécise de la position d'hypothèses* (Riemann, Lebesgue, Hilbert, Grothendieck).

Ainsi s'explique *a posteriori* la *dialectique des liaisons* que soutiennent entre elles :

(i) certaines idées abstraites, dominatrices par rapport aux mathématiques ;

(ii) la multitude des idées géométrico-conceptuelles issues d'un *Ars Inveniendi* éclaté (mathématiques riemanniennes).

La question de l'existence réelle d'une dialectique des Idées dans l'édification mathématique ne remet pas en cause l'analyse d'Albert Lautman : l'enjeu véritable est la compréhension de l'engagement de l'Abstrait dans la genèse du Concret. D'où la nécessité, pour la philosophie *générale* des mathématiques, d'aborder aussi le champ de la physique : déduction du temps ; déduction de la relativité générale ; déduction de la contextualité quantique (Lautman).

Au niveau **(i)**, comme au niveau **(ii)** :

4) *L'essence de la vérité mathématique est de se dévoiler dans un mouvement corrélatif d'assomption vers l'anhypothétique.*

De ces remarques, il semble que l'on puisse admettre et suggérer :

• En accord avec l'épistémologie historienne : la nécessité d'immersion dans l'élément *destin d'une théorie*, histoire d'un problème ou approfondissement d'un champ thématique ;

• Afin de sonder la pensée mathématique : l'urgence d'une analyse philosophique concernant la *profondeur* des théories incarnées et des réponses complétées.

5) *Une nécessité réalisationnelle est à l'oeuvre dans les mathématiques.*

Exemples : indépendance du système des axiomes de Zermelo-Fraenkel et de l'Hypothèse du Continu, d'après Gödel et Cohen ; équivalence entre pseudoconvexité et convexité holomorphe, d'après Oka, Lelong, Bremermann et Hörmander ; cohérence de l'anneau local des germes de fonctions holomorphes, d'après Oka-Cartan ; résolution des singularités, d'après Zarisky et Hironaka ; conjectures de Weil, d'après Grothendieck-Deligne ; grand théorème de Fermat, d'après Taniyama-Weyl, Ribet, Hellegouarch et Wiles ; théorème des quatre couleurs ; classification des groupes finis simples ; *etc.*

Il appartient au philosophe des mathématiques de tenter de répondre à la question de la polymorphie du réussible.

Exigence abstraite, satisfaction abstraite, Inconscient mathématique

1. Prologue

Il existe un niveau antéprédicatif et infralinguistique dans les mathématiques. Zone obscure ? Pensée sans mots ? Mystère de la découverte ? Mais alors, quel est le principe moteur véritable des mathématiques ?

(i) Suggestion : s'il y a prolongement, dans les mathématiques, d'une *force de création* dont l'origine profonde reste encore mystérieuse, elle entretient alors des rapports intimes avec une *philosophie de la volonté*. Car invention et inconscient apparaissent au moment seulement où le réalisable se réalise, seulement parce qu'il est réalisable, et lorsqu'une volonté d'actuation cherche à le réaliser.

(ii) Thèse : le procès historique et effectif des mathématiques est le fruit d'une *volonté rationnelle et impersonnelle*. Corollaire : absence idéale de vide dans la pensée mathématique, le tout entretenu par des nécessités rationnelles. Ces dernières s'exercent de plusieurs manières : ici force de remplissement, là émergence de connexions nécessaires, ou encore mûrissement total des concepts, le tout assimilable à une cristallisation simultanée de la conscience et de la volonté.

(iii) Et de son côté, l'inconscient aide involontairement — c'est-à-dire par un effet de volonté subsidiaire et inertiel — à l'absence de vide : tel est son rôle moteur principal, par un effet d'entraînement automatique et impulsionnel. En définitive, le sujet conscient dévoile et insuffle de son inconcient moteur dans l'objet mobilisable. Mais un tel propos impose un retour à la philosophie du mobile, un retour aux causes motrices et un *retour aux naturalités discursives*, afin de ne pas faire reposer la constitution du réel mathématique uniquement sur la catégorie de sujet.

(iv) Les mathématiques sont en effet universellement *dominées par certaines structures métaphysiques de la vérité mathématique*. Partant, se dessine une contemplation activante du rôle de l'inconscient, en tant que facette de la méthode génétique. Cette dernière invite à focaliser l'analyse sur les 'bonnes questions', sur les 'objets naturels' et sur les 'objets pertinents'. En mathématiques, la dimension objective est le théâtre principal des protensions subjectives, qui sont essentielles en tant qu'elles révèlent et *véhiculent* la nécessaire existence de protensions objectives.

(v) Mais pourtant, hésitation, obscurité et confusion du sujet vu comme support de l'actuation et de l'objectivation jouent un rôle majeur dans l'édification des théories mathématiques : c'est dans un mouvement descendant (abyssal) que s'oblitèrent les évidences dans lesquelles le vrai est celé, et c'est dans un mouvement d'approfondissement que se révèlent les concepts cachés dans les pratiques intuitives du calcul. *L'inconscient, tel un essaim d'abeilles en pérégrinations, se suspend à l'occultation du vrai pour l'ouvrir à l'opérable.*

Quadrilogie fondamentale. Le sujet dont nous allons traiter est loin d'être inexploré[1] et l'on pourrait souligner de manière liminaire l'existence de nombreuses tentatives pour aborder les liaisons mystérieuses qui existent entre les termes d'un quadrangle fondamental qui est au cœur de la production mathématique :

$$\begin{tikzcd} \textbf{Inconscient} \arrow[r, "?"] & \textbf{Découverte} \arrow[d, "?"] \\ \textbf{Travail} \arrow[u, "?"] & \textbf{Conscient.} \arrow[l, "?"] \end{tikzcd}$$

Cette réflexion s'organise autour du thème « *Mathématiques et Inconscient* », et l'on s'intéressera à la mise en question — par les mathématiciens eux-mêmes — de ce qui fait sens en mathématiques. Aujourd'hui, la difficulté de ce sujet : l'étude philosophique, sociologique et psychanalytique de l'invention mathématique, à travers le prisme de cette quadrilogie, cette difficulté a cessé d'être seulement intrinsèque. Autrement dit, elle n'est plus seulement due au caractère intrinsèquement contingent et imparfait de toute activité humaine, que l'on étudierait dans son inachèvement, comme l'artisanat, la composition musicale ou le travail d'écriture mathématique. Car à la difficulté intrinsèque du sujet se superpose une difficulté extrinsèque : *l'enjeu de ce qu'on peut dire et de ce que l'on choisit de dire sur la création mathématique* et par conséquent aussi, *l'enjeu de ce que dit le discours des autres*, et ce dernier enjeu constitue d'ailleurs l'un des obstacles les plus évidents et les plus difficiles à surmonter dans tout travail réflexif. *Car il s'agirait avant tout de trouver une posture d'inscription originale et neuve dans des champs prédéterminés d'analyse*. Il s'agirait à cette fin d'enfoncer

[1] Clin d'œil à l'ouverture de l'ouvrage [**199**] de Jacques Hadamard.

le coin dans plusieurs failles essentielles du discours épistémologique classique. Et l'inconscient mathématique signalerait à merveille l'existence de ces failles !

Enfin, ce sujet est devenu d'autant plus délicat que les orientations de la psychologie cognitive et les exigences de la philosophie des mathématiques semblent maintenant converger pour désigner un objet de pensée, une objectivité adéquate pressentie, dont on attendrait qu'elle rende compte pleinement des forces de création (plutôt incontrôlées !) qui sont à l'œuvre dans *notre* contexte socio-culturel. Cette objectivité se déclinerait de plusieurs manières — on n'en dira rien pour l'instant, tout l'enjeu est bien là ! — , mais elle ne serait plus aujourd'hui réductible au paradigme structuraliste qui a connu son apogée en France dans les années 1950 à 1970. Il n'est donc pas étonnant qu'un déploiement nouveau doive être mis en œuvre par rapport à la primauté accordée dans la plus grande période du vingtième siècle au langage et à la formalisation.

Organisation rhétorique et théorique. Les Sections n° 2 à 10 étant de nature essentiellement argumentative et introductive, la partie spéculative originale de ce travail sera présentée en fin de parcours, dans les paragraphes n° 11 à 20 ci-dessous. On souhaite ici faire éclater au préalable le cercle de l'hésitation traditionnelle quant au thème délicat de l'inconscient mathématique.

2. Difficultés liminaires

La spécialisation : obstacle à la pensée des mathématiques ? Mais d'un côté, l'exigence actuelle de se dessaisir du catéchisme formaliste — trahison d'une mode ? — est saisie dans une pure attente d'analyses entièrement nouvelles de la création en mathématiques, et d'un autre côté, sans cesse, le dispositif de la science se *durcit*. La science progresse. La science se spécialise. Elle échappe de plus en plus à l'emprise de la philosophie, mue ses concepts en opérations, et *métamorphose de plus en plus finement le mouvement en langages*. De tels dispositifs ne se contentent pas, hélas, de protéger la souveraineté de la science par la spécialisation, prétexte pour elle de 'tour d'ivoire', dû à son organicité et à sa complexité inexorables. Il y a en sus un phénomène bien connu d'*autonomisation* de plus en plus marquée par rapport à la pensée philosophique, par rapport à la « pensée universelle ». Ainsi, si la mathématique s'enfouit dans des terres granitiques, et organisées en profondeur, si elle subit le travail constant et sûr des déformations métamorphiques (les mathématiques sont une roche qui pénètre comme le gneiss dans les profondeurs terrestres pour en modifier la structure), on ne voit pas bien alors comment recentrer la question psychologique ou la question psychanalytique, et comment satisfaire la tentation de *saisir les mathématiques* *comme dominées par le désir*, le désir d'originalité, par le besoin, le *besoin d'élévation*, par une force unique, la *force motrice*, par une quête, une *quête du sens*, qui ne se réduisent pas au sens esthétique (tentation d'une vision réductrice et partielle du travail d'harmonisation nécessaire de la pensée), et encore moins au sens logique (apanage paradoxal d'un positivisme anglo-saxon routinier lui aussi hautement menacé de ringardise) !

Premier doute quant au transfert des catégories psychanalytiques dans les mathématiques. Car le dispositif de la science confronte actuellement tant l'historien que le philosophe aux formes de scepticisme et de découragement que ressentent les spécialistes eux-mêmes devant l'inertie et la lourdeur des techniques spécialisées lancées au galop. Notre époque saura-t-elle déplacer, modifier puis repenser sous un angle de visée universel, l'équilibre de la mathématique acquise ? Saura-t-elle réhabiliter le statut du sujet mathématique ? Saura-t-elle reconsidérer l'*émergence subjective* des objets actuels avec un sage recul interne et immédiat ? Ou bien, au contraire, ces formes de révolutions paradigmatiques locales, ces charnières de la pensée, ces présences de l'irrationnel, ces *fulgurations silencieuses de l'intuition* qui sont oubliées par l'histoire, toutes ces *couleurs subjectives* de l'inventivité et de la constructivité mathématique, ne sont-elles pas déjà acquises, cristallisées, durcies, *scellées* au point que leur *exigence* et que leur *méditation* passent pour une *évidence* ? *On peut se demander finalement à fort juste titre si l'expérience, le geste, la pulsion, la satisfaction, ne sont pas à présent enveloppés, involués, implicités et cachés, à l'intérieur même des mathématiques et dans le travail de la preuve*. Même le métaphorique, supplanté dans l'exposition par le technique, serait réduit à n'être plus qu'une coulisse subsidiaire du vérificatoire.

2.3. La métaphysique silencieuse de la satisfaction. Insistons. Comme on le sait, les acquis métaphysiques d'une époque percolent jusqu'à nous, ils traversent toutes nos pensées comme autant d'évidences assimilées à travers l'histoire, évidences qui sont aussi inscrites fondamentalement dans une dialectique hégélienne de la phénoménologie de l'esprit. L'empire métaphysique, qui semble si invisible au non-philosophe, imprime en vérité à nos actes des mouvements qui semblent se régler sur des typographies en filigrane. Par des démarches indépendantes, l'algèbre, la géométrie et la théorie des équations différentielles rencontrent sur leur route l'objet « *groupe de Galois* », puis le développent, le thématisent, le retrouvent dans la théorie des équations différentielles holomorphes, l'enveloppent dans une théorie générale, et enfin le naturalisent : comment ne pas voir là l'existence d'une *réalité de compréhension transversale dominant la genèse de cet objet algébrique (groupe de Galois)* ?

Voici donc un exemple paradigmatique de ce que l'on pourrait appeler un concept mathématique essentiel, un concept mathématique naturel (groupe d'une équation, groupe abstrait), une naturalité *conquise*, parce qu'immanente à de nombreuses situations mathématiques, sans être pour autant immédiate. Alors, par analogie avec le phénomène général des *naturalités conquises* en mathématiques, lesquelles apparaissent de manière complètement autonomes, indépendantes de tel ou tel inventeur, lesquelles peuvent être découvertes en Moldavie comme en Belgique, et redécouvertes ailleurs et dix ans plus tard, *il se pourrait très bien que le besoin de la satisfaction et le désir des bons objets et des bons théorèmes soient d'une certaine manière niés et refoulés par la plupart des mathématiciens*, tout en rayonnant de manière effective comme l'inconscient dans le conscient, au sens que la psychanalyse freudienne a attribué à ces termes. Et il se pourrait très bien aussi qu'ils soient sublimés volontairement par le sujet, en tant que les mathématiques entretiennent un rapport absolument fondamental avec une *exigence de vérité*. En résumé, il se pourrait très bien que le sujet oriente sciemment ses pulsions de vie (l'ancrage dans le corps) vers la réalisation d'un idéal mathématique.

3. Prospection préliminaire des attentes

Mais dans cet objectif quelque peu amphibologique concernant une analyse psychanalytique des mathématiques, il faudrait fournir d'abord, au seuil, avant de rompre le pain, un travail épistémologique considérable, qui n'est pas un travail philosophique, mais un *travail de prospection préliminaire et d'examen des attentes et des espoirs*. C'est-à-dire une analyse critique liminaire, basculant l'*a priori* d'une approche originale sur l'*a posteriori* d'une tradition assimilée. Après observation prolongée, on constate en effet que dans toute pensée théorique abstraite, tout pivote primordialement autour d'*intentions centrales* et d'*orientations effectives*. Fréquemment laissées en pâture aux exégètes d'une théorie, intention centrale et orientation effective font aussi la une des querelles de chapelles et dilapident souvent les forces de la philosophie des sciences dans une vaine *épistémologie comparée*. Mais au demeurant, leur prise en charge réelle et leur assomption sans concession font souvent défaut au discours, par manque d'engagement philosophique et par peur d'explicitation des *a priori*, voire d'*auto-exposition du discours*. La critique que l'on pourrait le plus spontanément adresser aux tentatives de ressaisir l'activité mathématique comme protension, à travers notamment des catégories psychanalytiques, c'est leur manque d'engagement dans la pensée et leurs insuffisantes motivations, comme si l'on pouvait se contenter de faire circuler et de véhiculer un discours sur un sujet réservé à l'amateurisme, par opposition à l'activité professionnelle des mathématiciens spécialisés. Ainsi, attendu que l'intention centrale doit se dégager de toute présentation théorique, on pourrait soutenir ici, d'une manière certes paradoxale, qu'il faudrait *voir tout ce que l'on* veut *savoir avant même de commencer, et d'ailleurs aussi, le voir beaucoup mieux avant même de commencer qu'après avoir dégagé certains concepts*. Bref, si le savoir s'articule à une volonté impersonnelle, mais décidée par une conscience, le psychanalytique en mathématiques est tenu quant à lui aussi de *formuler ses hypothèses, ce qu'il attend, et ce qu'il espère*. Par analogie, axiomes, objectifs et théorèmes ne sont-ils pas antéposés à toute démonstration ?

4. Attentes et dominations externes

Mais pourquoi faudrait-il se représenter tout ce que l'on veut savoir avant de commencer le travail ? N'est-ce pas anticiper exagérément sur l'imprévisibilité de toute connaissance ? Réponse : mis à part la nécessité mystique, mais éclairée, mais rationnelle, d'être *possédé par son sujet* pour le propulser suffisamment loin, l'exposition des intentions de fond nous sera tout simplement nécessaire parce qu'il nous faudra contourner *deux écueils lovés dans la tradition de la philosophie des mathématiques*.

4.1. Deux écueils dialectiques « duals ». Le premier, proposons de l'appeler l'écueil d'une *domination faussement externe, et prétendument universelle, du concept et des structures*. Celle-ci est accompagnée d'un certain refoulement du sujet lié à un mythe (d'obédience philosophique) de l'universalité du concept. Cet écueil pourrait s'assimiler à un trop-plein d'épistémologies dogmatiques harcelant notre mémoire et nous exposant à la répétition des paradigmes. Dans les paragraphes 6 à 8, nous allons exposer un exemple de plaidoyer aveuglant pour les structures, *dégagées a posteriori d'une invention gaussienne*, qui interdirait toute analyse de l'inventivité subjective, voire du génie. Le second écueil, c'est la menace concrète de vide dû au faible et difficile ancrage historique et traditionnel de la psychanalyse dans les sciences, dont se méfie spontanément presque tout scientifique. Trop-plein du concept, vide relatif du psycho-logique : il y a quasiment dualité, avantage et désavantage en induction réciproque.

4.2. Le concept contre la conscience. Premier écueil à notre projet : l'objectivité du concept jouée contre la subjectivité de la conscience. L'un des acquis indéniables de la philosophie des mathématiques au vingtième siècle, attaché au nom de Jean Cavaillès, est le *principe d'immanence et d'autonomie des mathématiques*, lesquelles ne seraient en rien constituées dans le sujet, dans la conscience ou dans le cognitif. La théorie de la science, écrit Cavaillès, est théorie de l'histoire conceptuelle de la science et c'est dans l'« enchaînement dialectique des concepts » qu'il faut la chercher. Conséquence implicite : l'invention, l'idiosyncrasie, l'*hubris* de la production scientifique, l'isolement des chercheurs et la perspicacité des esprits ne sont alors que des épiphénomènes. Dans cette optique, très défendue par les historiens canguilhemiens et post-cavaillésiens, les critères de satisfaction, s'il en existe, sont plutôt à placer « hors sujet », peut-être dans le concept, si jamais l'on pouvait faire dire à Cavaillès que des critères de satisfaction puissent exister et appartenir au concept et être par là-même intersubjectifs, partageables et transmissibles. Bref, dans l'esprit de nombre d'historiens non praticiens des mathématiques, le concept à travers l'histoire constituerait le seul principe dominateur légitime de l'activité mathématique.

4.3. Ce qui se joue en nous. Or la question de savoir s'il existe un *principe dominateur*, voire même une multiplicité de principes moteurs dominateurs, par rapport auxquels s'articulerait le développement des mathématiques est une question vraiment délicate, *minée par des orientations idéologiques diverses*, hautement et légitimement refoulable il est vrai, mais qui est en fin de compte *inspirée par le désir de comprendre ce qui se joue en nous* et ce par quoi nous sommes joués, dans l'espoir d'accéder à quelques explications satisfaisantes des caractéristiques mystérieusement anthropologiques de la pensée, d'accéder aussi à une quiétude de la raison, à une paix de l'âme, bref, dans l'espoir de se rasséréner sur ce par quoi l'activité humaine (qu'elle soit mathématique ou autre) est fondamentalement dominée. *Désir, satisfaction* et *besoin de se rasséréner*, voilà bien des catégories liées à la psychanalyse : belle auto-suggestion du problématique !

En résumé, jouer le concept contre la conscience, en occultant les problématiques cruciales concernant la *motricité du conscient*, voilà pour nous un écueil d'importance.

4.4. Le désert de la psychologie des sciences. Second écueil à notre projet, l'ancrage flottant dans une tradition de pensée. Cette deuxième obstruction s'amplifie même des *dispositifs effectifs de réponse* que définit tout contexte interrogatif, toute recherche philosophique, dont notre recherche semble complètement privée ! On ne peut que constater l'inexistence de ces dispositifs, dans le domaine, quasi-désertique, de la psychologie des sciences. Il ne faudrait pas s'engager dans une voie dont les échecs sont *a posteriori* prévisibles et qui n'engendrerait que peu de *matière spéculative*. Autrement dit, avant même d'entreprendre une démarche psychanalytique consacrée aux mathématiques, on pourrait s'interroger sur le vide quasi-total, sur l'absence réelle de réussite convaincante dans ce domaine et sur la relative més-estime dans laquelle sont tenus les épistémologues qui ont frayé avec une philosophie, inaccessible et toujours fausse, de la création et du génie. En l'occurence, quelle pourrait être l'explication de l'absence de tradition de

« psychologie des mathématiques » aux côtés d'une anthropologie et d'une psychologie cliniques, sinon la vacuité plus ou moins fatale de son objet ? Cet écueil, lui aussi, est de taille !

4.5. Scepticisme de principe à l'égard de la psychologie. Par conséquent, la tentation de voir la psychanalyse apporter ses propres outils pour éclairer la question de la création en mathématiques doit se modérer d'un *scepticisme de principe* permanent. Lorsqu'on assiste soi-même à son propre travail inconscient, il semble clair que *l'évolution des idées subconscientes soit redevable d'une surexcitation préalable de la conscience, bien plus que d'une passivité acquise et offerte aux circonstances d'une apparition*. À savoir, donc, si l'on s'en remet à l'existence d'un processus mental antérieur inconnu de l'inventeur, en d'autres termes, à l'existence d'un processus inconscient, il ne faut pas se méprendre sur ce qu'on est en droit d'attendre et d'espérer de lui. Son externalité et la relation de domination qu'il exerce sont toutes relatives et partielles et il n'est pas question de croire à une avancée considérable sur le plan de la pensée en s'intéressant à la psychologie de l'invention.

4.6. Abondance de dominations. Comme nous souhaitons le démontrer, tous les principes dominateurs de l'expérience mathématique sont emboîtés les uns dans les autres, s'interpénètrent et sont décalés les uns par rapport aux autres, ils constituent comme un polyptyque recouvert d'une surface aveugle que nul regard ne parvient à traverser. Ainsi, *Si la domination est externe, elle doit être vraiment externe, et par conséquent, multiplement externe. Elle doit se dire de multiple manière, comme l'Être au sens aristotélicien* (*cf.* Thèse 4 *infra*). Il y a hétéronomie, donc, des constitutions.

4.7. Illuminations subliminales. Par exemple, on ne pourra se contenter d'approcher les sentiments de certitude immédiate décrits par Poincaré, les apparences d'illumination subite, les intuitions, les signes manifestes d'un long travail inconscient, sans les rapporter aussi aux *forces non moins manifestes* d'oblitération du sujet et aux exigences d'objectivité. L'hypothèse de l'inconscient, l'hypothèse du hasard, l'hypothèse du choix, l'hypothèse de l'évidence automatique, l'hypothèse du moi subliminal, l'hypothèse de la conscience marginale, toutes ces hypothèses doivent être soupesées comme autant d'hypothèses dont on ne saurait se satisfaire. C'est pourquoi, on peut ne pas accorder complètement son crédit aux orientations générales de Jacques Hadamard, dans son *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* (encore la belle naïveté des scientifiques, disent les philosophes !), Hadamard pour qui « la question est de savoir si l'inconscient représente un mystère – ou plus exactement un mystère spécial », l'entendant par là comme une force productrice intéressante venant adjuver le travail conscient sur ses terres, et non comme une entité d'analyse stratifiée à la manière clinicienne de Freud. Bien sûr, notre esprit ressemble à un mystère en pleine lumière, quand rien ne garantit *a priori* ses limites spirituelles et ses instances d'examination. Mais le philosophe, qui se méfie toujours de la passivité inexplicable, et néanmoins réelle, qui alourdit l'entendement, *le philosophe exige la réactivation du problématique*, cause primordiale du travail conscient et du travail inconscient. Ce n'est donc pas par peur de l'inconscient que l'on doit se retrancher sur une position acceptant l'hétéronomie des constitutions et l'agrémentant d'un « scepticisme de principe », mais en vertu d'une exigence de lucidité : l'inconscient mathématique relève de mystères encore plus mystérieux que lui.

5. Formulation abrégée de ces attentes

Nos attentes sont d'ordre spéculatif. Il s'agirait, à terme, de disposer d'une dialectique catégoriale de l'invention conceptuelle, qui soit aussi mise à l'épreuve des émergences et des résurgences effectives. On voudrait savoir *comment* se déplacent les idées et *comment* elles se placent dans l'espace de l'impulsion corporelle et spirituelle. L'inconscient producteur s'expliquerait alors peut-être comme l'une des *forces inertielles secondaires de la mobilisation de la conscience sur son objet*.

6. Un exemple : analyse de l'« inconscient » par Gauss et triomphe structuraliste de l'a posteriori du concept

Pour introduire aux thèses qui se dégageront à la fin de cette intervention, pour les propulser d'un tremplin dynamique et critique, nous allons emprunter à Jules Vuillemin ([**448**]) la dialectique structuraliste qu'il dégage d'un exemple historiquement célèbre d'invention algébrique : la construction à l'aide de la règle et du compas par Gauss de certains polygones réguliers, notamment celui à 17 côtés. Dans quel but Vuillemin fait-il cette telle analyse[2] ? Pour faire apparaître la différence entre *mathématique génétique* et *mathématique structurale*, pour faire abstraction de l'aspect subjectif des méthodes, pour porter son attention sur la signification objective et le style des méthodes, le philosophe va raisonner de la manière suivante. On verra combien est réduite la part qu'il accorde, *a posteriori*, à l'imagination, aux processus inconscients, au génie et au travail, qui fondent pourtant l'accès à des réalités nouvelles.

---

[2] Outre *La philosophie de l'algèbre* ([**448**]), on pourra consulter aussi J.-P. Colette ([**115**]).

Avertissement. C'est donc un point de vue structuraliste et restrictif, ménageant une trop faible part à l'inconscient dynamique, qui s'exprimera longuement et dans les paragraphes 6, 7, 8 ci-dessous. L'objectif est de démontrer que ce point de vue est insatisfaisant parce qu'il fonde ses analyses sur une vision entièrement *a posteriori* des découvertes scientifiques. Dans les paragraphes 9 et 10, nous redresserons donc l'argumentation dans le sens qui nous intéresse.

6.1. La construction du polygone régulier à dix-sept côtés à l'aide d'une règle et d'un compas. Inspirée par la mathématique grecque[3], une classe importante de problèmes algébriques a pour origine des constructions géométriques à l'aide de la règle et du compas : duplication du cube, trisection d'un angle, équivalence avec la construction à l'aide de la règle seule, division du cercle unité en parts égales, quadrature du cercle. Parmi ces problèmes, celui de la construction des polygones réguliers reçut une solution complète grâce aux célèbres travaux de Gauss, bien avant que la théorie abstraite, qui expliquait structurellement et rendait possible cette solution (la théorie d'Abel et de Galois) n'ait été dégagée. La solution de Gauss fournit un bel exemple de théorème individuel et spécialisé, qui est l'illustration souveraine de la « *méthode génétique* » propre à l'esprit du $18^{ième}$ siècle et de la *virtuosité* du *Princeps Mathematicorum*.

Le 30 Mars 1796, à 19 ans[4], Gauss, qui hésitait encore entre la philologie et les mathématique, obtint à partir d'une étude systématique des équations cyclotomiques la construction du polygone régulier à dix-sept côtés avec la règle et le compas. Il étendit ainsi la connaissance (ancienne, car datant de l'antiquité !) des divisions possibles du cercle en 2^n, 5.2^n, 3.2^n, 15.2^n côtés au cas du polygone régulier de 17 côtés. En 1802, il démontrait d'une manière générale que la division du cercle en p parties égales, avec p premier,

[3] « Il y a certainement bien lieu de s'étonner que la divisibilité du cercle en 3 et 5 parties égales ayant été connue dès le temps d'Euclide, on n'ait rien ajouté à ces découvertes dans un intervalle de deux mille ans, et que tous les géomètres aient annoncé comme certain, qu'excepté ces divisions et celle qui s'en déduisent (les divisions en 2^μ, 15, 3.2^μ, 5.2^μ, 15.2^μ parties), on ne pouvait en effectuer aucune par des constructions géométriques », *Recherches arithmétiques*, trad. Poullet-Delisle, Blanchard, Paris, 1953. Le grand mérite de Gauss est d'avoir dissipé cette apparence, due peut-être au fait parce qu'il était connu que le 7-gone, le 11-gone et le 13-gone ne sont pas constructibles à la règle et au compas ; 17 était tout simplement le prochain nombre premier. . .

[4] 19 est aussi le nombre de pages du célèbre journal de mathématiques (retrouvé en 1898 seulement et publié par Felix Klein en 1901) que Gauss commença à remplir à cette époque où il obtint la résolution par radicaux carrés du problème cyclotomique d'ordre 17. Dans ce cahier mythique, le prince des mathématiciens aura consigné pendant dix-huit année 146 énoncés extrêmement brefs des résultats de ses travaux qui ont permis aux historiens d'élucider nombre de questions relatives à la priorité de certaines découvertes.

est possible si et seulement si $p = 2^{2^\mu} + 1$, autrement dit, si et seulement si l'entier p est un *nombre de Fermat*. Quel est l'intérêt de cette découverte ?

6.2. Un exemple d'ingéniosité arithmétique. En résumé, la démonstration de Gauss a consisté à regrouper ingénieusement par paires certains sous-groupes des racines $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{15}, \zeta_{16}$, où :

$$\zeta_k := e^{k\frac{2i\pi}{17}} \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant k \leqslant 16)}$$

de l'équation cyclotomique :

$$(x^{17} - 1)/(x - 1) = x^{16} + x^{15} + \cdots + x + 1 = 0,$$

de manière à faire apparaître trois équations quadratiques satisfaites par les sommes partielles de ces trois paires de racines en cascade, *ces regroupements étant inspirés par la réordination de ces racines via la suite des puissances :*

$$\omega_n := (\zeta_1)^{3^n} = e^{3^n\frac{2i\pi}{17}} \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant n \leqslant 16).}$$

En voici pour rappel une description plus précise.

I. Tout d'abord, on constate aisément que les 16 premières puissances de 3, à savoir $3^1 \equiv 3$, $3^2 \equiv 9$, $3^3 \equiv 10$, $3^4 \equiv 13$, *etc.*, sont incongrues deux à deux modulo 17 :

$$\begin{array}{cccc} \omega_1 \equiv \zeta_3, & \omega_2 \equiv \zeta_9, & \omega_3 \equiv \zeta_{10}, & \omega_4 \equiv \zeta_{13}, \\ \omega_5 \equiv \zeta_5, & \omega_6 \equiv \zeta_{15}, & \omega_7 \equiv \zeta_{11}, & \omega_8 \equiv \zeta_{16}, \\ \omega_9 \equiv \zeta_{14}, & \omega_{10} \equiv \zeta_8, & \omega_{11} \equiv \zeta_7, & \omega_{12} \equiv \zeta_4, \\ \omega_{13} \equiv \zeta_{12}, & \omega_{14} \equiv \zeta_2, & \omega_{15} \equiv \zeta_6, & \omega_{16} \equiv \zeta_1. \end{array} \tag{6.2.1}$$

II. Ensuite, en formant la somme des ω_j pour j pair, et celle des ω_j pour j impair, on définit deux valeurs x_1 et x_2 :

$$\begin{aligned} x_1 &= \zeta_9 + \zeta_{13} + \zeta_{15} + \zeta_{16} + \zeta_8 + \zeta_4 + \zeta_2 + \zeta_1 \\ x_2 &= \zeta_3 + \zeta_{10} + \zeta_5 + \zeta_{11} + \zeta_{14} + \zeta_7 + \zeta_{12} + \zeta_6, \end{aligned} \tag{6.2.2}$$

Ces deux valeurs sont réelles, puisque l'on a $\zeta_j = \overline{\zeta_{17-j}}$. De plus, elles satisfont l'équation quadratique :

$$x^2 + x - 4 = 0,$$

ce que l'on vérifie en calculant directement les carrés x_1^2, x_2^2 à partir de l'éq. (6.2.2), en utilisant les relations $\zeta_a \cdot \zeta_b = \zeta_c$, où $c = a + b \,(\mathrm{mod}\, 17)$ et $\zeta_1 + \zeta_2 + \cdots + \zeta_{16} = -1$.

III. À nouveau, formons la somme des termes de cran pair et des termes de cran impair dans l'éq. (6.2.2). On obtient deux paires de nombres :

$$\begin{aligned} y_1 &= \zeta_{13} + \zeta_{16} + \zeta_4 + \zeta_1, \qquad y_2 = \zeta_9 + \zeta_{15} + \zeta_8 + \zeta_2, \\ y_3 &= \zeta_{10} + \zeta_{11} + \zeta_7 + \zeta_6, \qquad y_4 = \zeta_3 + \zeta_5 + \zeta_{14} + \zeta_{12}, \end{aligned} \tag{6.2.3}$$

dont on vérifie, par un calcul direct tout à fait similaire, qu'elles satisfont les équations quadratiques $y^2 - x_1 y - 1 = 0$ (pour y_1 et y_2) et $y^2 - x_2 y - 1 = 0$ (pour y_3 et y_4).

IV. À nouveau, formons la somme des termes de cran pair et des termes de cran impair dans l'éq. (6.2.3). On obtient quatre paires de nombres :

$$\begin{aligned} z_1 &= \zeta_{16} + \zeta_1, & z_2 &= \zeta_{13} + \zeta_4, \\ z_3 &= \zeta_{15} + \zeta_2, & z_4 &= \zeta_9 + \zeta_8, \\ z_5 &= \zeta_{11} + \zeta_6, & z_6 &= \zeta_{10} + \zeta_7, \\ z_7 &= \zeta_5 + \zeta_{12}, & z_8 &= \zeta_{13} + \zeta_{14}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

On observe pour finir que z_1 et z_2 satisfont l'équation quadratique $z^2 - y_1 z + y_4 = 0$, et d'autres similaires pour les couples (z_3, z_4), (z_5, z_6) et (z_7, z_8).

V. En résolvant par radicaux quadratiques ces trois équations de degré deux en cascade, on trouve la valeur de la grandeur :

$$\begin{aligned} z_1 = 2\cos(2\pi/17) = & \frac{-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}{8} + \\ & + \frac{\sqrt{68 + 12\sqrt{17} - 16\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - 2(1 - \sqrt{17})\sqrt{34 - 2\sqrt{17}}}}{8} \end{aligned}$$

qui, parce qu'elle s'exprime bien par des radicaux carrés superposés, est constructible à la régle et au compas en partant d'un segment de longueur 1 donné.

6.3. Les structures : raisons cachées de la réussite de la méthode ? Les périodes dont Gauss a eu l'idée de se servir dans cette preuve, données par ζ_1^3, $(\zeta_1^3)^3$, $((\zeta_1^3)^3)^3$, *etc.*, n'apparaissent pas en plein jour comme la raison d'être du succès de la méthode : pourquoi donc les équations cyclotomiques de degré premier égal à un nombre de Fermat $p = 2^{2^\mu} + 1$ sont-elles résolubles par radicaux[5] carrés ? Gauss observe que les deux périodes x_1 et x_2 de $8 = (17 - 1)/2$ termes, sont les puissances de ζ_1 qui sont respectivement les résidus quadratiques modulo 17 et les résidus non quadratiques. Est-ce une explication ou une coïncidence fortuite ? Au moins, une interprétation causale adéquate — mais anachronique — pourrait facilement être trouvée dans la théorie de Galois des groupes d'équations algébriques, la

[5] Les nombres $F_\mu = 2^{2^\mu} + 1$ $\mu = 1, 2, 3, \ldots$, que Fermat (encore un cas paradoxal d'intuition !) croyait tous premiers, sont premiers au moins pour $\mu = 1, 2, 3, 4$: $F_1 = 5$, $F_2 = 17$, $F_3 = 257$, $F_4 = 65537$. Euler en 1732 établit que F_5 est divisible par 641. Legendre en 1780 établit que F_6 est divisible par 274 177. Mais ironie de l'histoire : on ne connaît explicitement *aucun* F_μ premier pour $n > 4$. On a établi depuis que F_μ est non premier pour $7 \leqslant \mu \leqslant 16$ et $\mu = 18, 23, 36, 38, 39, 55, 63, 73$. Autrement dit, le destin d'ouverture d'une question telle que celle-ci réserve de surprenantes surprises quant à la non-résolution complète dont elle reste *tenacement* entachée.

méthode de Gauss cachant l'idée galoisienne de suite de composition du groupe de l'équation $x^{16} + \cdots + x + 1 = 0$, qui est abélien, *cyclique*, transitif, d'ordre 16 et contient trois sous-groupes distingués d'ordre 8, 4 et 2, la réordination des puissances de ζ_1 via les $(\zeta_1)^{3^n}$ correspondant à l'automorphisme de corps $T\ \omega \mapsto \omega^3$ de son corps des racines. L'inventeur, doté d'un cerveau de calculateur exceptionnel, aurait donc suivi sans le vouloir la trame structurelle aveugle de l'équation : la cyclicité de son groupe de Galois (Galois démontra par ailleurs en 1821 qu'une équation est résoluble par radicaux si et seulement si son groupe G contient une suite de sous-groupes $S_0 = G \supset S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_k = I$ dans laquelle chaque groupe est cylique par rapport au précédent (S_{j-1}/S_j est cyclique)). Sans se subordonner au vérificatoire, la postérité aurait résorbé l'arbitraire de la méthode en exhumant les structures qui étaient dissimulées sous le calcul virtuose. Commentaire bien connu sur la mathématique en perpétuel auto-approfondissement et rature ! Dans son analyse de Gauss, Jules Vuillemin le reprend à son compte pour défendre sa thèse d'une mathématique universelle (et comme par hasard en 1962, *structurale*) habilitée à infléchir la théorie philosophique de la raison, laquelle exigerait quatre préceptes de saveur cartésienne inspirés plus précisément par les travaux de Lagrange, de Gauss d'Abel et de Galois :

1. l'élimination de tout arbitraire dans les solutions ;

2. la division des difficultés de tout problème *conformément aux structures élémentaires dont dépend la solution*.

3. la purification de tout élément extrinsèque et la mise en relation de tout énoncé aux hypothèses minimales dont il dépend réellement ;

4. le dénombrement complet des éléments d'un problème et la mise en relation de chacun d'entre eux avec des structures adéquates.

6.4. Conclusion dogmatique provisoire. Voici donc un extrait conclusif de l'analyse de Vuillemin :

> Si, conformément aux idées romantiques, le génie est une invention inconsciente qui produit des intuitions sans pouvoir les penser dans des concepts correspondants, les mathématiques de Gauss sont le meilleur exemple de mathématiques géniales. [**448**]

Si puissante que soit en Gauss la faculté de réflexion, elle ne canaliserait pas les débordements de la création.

> Les structures abondent dans l'œuvre de Gauss, mais elles affleurent plus qu'elles n'apparaissent, elles demeurent implicites. [**448**]

En poussant à bout les analyses du dogmatisme structuraliste, on en viendrait à dire que Gauss serait l'auteur de mathématiques seulement géniales (!), marquées par le caractère enveloppé et comme « timide » de l'invention, enfouies dans l'implicite de leurs pratiques intuitives et destinées à être résorbées par des explications causales supérieures, puis réécrites dans un autre style, le style axiomatique, lequel seul serait habilité à entraîner le lecteur dans un mouvement de contemplation des articulations du causal et du définitionnel.

6.5. Vers une thèse négative sur le génie ? C'est donc le caractère *enveloppé* de l'invention qui fera l'objet d'une réflexion voire d'une critique philosophique, en liaison avec une *théorie négative sur le génie*. Et pourquoi négative ? Car dès que transparaît la raison d'être structurale des processus qui sont la *cause cachée* d'une découverte mathématique, on ne voit guère comment maintenir une idée positive du génie. *Domination de l'a posteriori*.

6.6. Premières objections. Ici-même, on pourrait objecter qu'il existait probablement dans l'esprit de Gauss calculateur un *contrôle intuitif conscient* des potentialités qui articulent le champ théorique des équations cyclotomiques, même si l'hypostase structurelle et la thématisation symbolique n'ont pas encore fait l'objet d'une expression axiomatique. Lors de *l'actuation du calcul*, il est à croire qu'existaient en Gauss, certaines visions aptes à articuler un champ du possible dans la découverte des *périodes* (éqs. (6.2.2-3-4) *supra*) qui sont la clé combinatoire du processus — théorie de Galois ou pas !

Mais au fait, qu'est-ce que le génie[6] ?

7. Kant, les facultés et la théorie du génie dans la critique de la faculté de juger

7.1. Deux facultés. On peut, avec Kant, assigner aux Beaux-Arts deux facultés principales.1) L'une nous rend capables de juger, c'est le goût, par lequel un accord est établi, via l'imagination, entre nos concepts et nos intuitions, sans que nous puissions toutefois fournir la règle de cet accord. 2) La seconde de ces facultés rend certains hommes capables de créer des

---

[6] Réponse d'un travailleur de la preuve ou d'un observateur dans les sciences de la nature (?) : « *Le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience* », mot attribué à Buffon et aphorisme séduisant, mais très restrictif. Laissons plutôt la parole à un phare (Baudelaire, l'Art romantique, XXI, IV), pour exprimer un « écho redit par mille labyrinthes » :

> Tout ce qu'impliquent les mots : *volonté, désir, concentration, intensité nerveuse, explosion*, se sent et se fait deviner dans ses œuvres (*Wagner*). Je ne crois pas me faire illusion ni tromper personne en affirmant que je vois là les principes caractéristiques du phénomène que nous appelons *génie* ; ou du moins, que dans tout ce que nous avons jusqu'ici légitimement appelé *génie*, on retrouve lesdites caractéristiques. **[28]**

Cette perspective d'un poète « philosophe » serait-elle plus appropriée que la perspective kantienne du §7 ?

œuvres belles ou sublimes. C'est le *génie* ou « talent » (don naturel) qui dicte la règle de l'art.

7.2. Le génie selon Kant. On pourrait donc s'exprimer ainsi : le génie est la disposition innée de l'esprit (*ingenium*) par laquelle la nature donne ses règles à l'art (*Critique du Jugement*, §46). C'est donc, d'après Kant, le *débordement des représentations de l'imagination par rapport aux concepts* qui donne leur âme, c'est-à-dire leur apparence vivante, aux production du génie. Dans ce cas, ou par l'écart entre la règle et l'image, ou par l'absence d'une telle règle, l'entendement et l'intuition ou bien ne s'accordent que dans les arcanes cachées de l'imagination, ou bien refusent tout accord, mais *manifestent toujours l'excès*, ici de l'idée rationnelle, là du concept objectif par rapport à toute représentation individuelle. Dans le cas des créations du génie, cette différence se renverse. *L'intuition fournit un excès par rapport au concept* ou même par rapport à l'idée, en sorte que cette détermination donne l'impression d'une pluralité de sens et d'interprétations possibles pour une même image. Par conséquent, le génie est l'*harmonie inconsciente* entre l'imagination et l'entendement.

7.3. Félix Klein. Félix Klein définit quant à lui l'originalité de Gauss comme

> l'équilibre parfait entre l'imagination mathématique, la rigueur de la mise en œuvre et le sens pratique pour l'application poussés jusqu'à l'observation et la mesure les plus soigneuses, et comme la présentation des immenses richesses de la création dans une forme absolument parfaite.

Ce langage semble tout-à-fait approprié, si l'on pense au caractère enveloppé de l'invention chez Gauss, et à l'affleurement parfois *inconscient* des structures algébriques enfouies dans la gangue des cas particuliers. Malgré cette déclaration, Félix Klein, à la lumière de sa connaissance des travaux de Riemann, et de ses propres travaux mathématiques, est peut-être à l'origine d'une appréciation structuraliste critique des travaux de Gauss.

7.4. Remarque intercalaire. En vérité, le problème crucial ici serait d'articuler théoriquement la dualité motrice du conscient et de l'inconscient et d'approfondir l'enracinement de l'inconscient dans la mobilité incontrôlée de l'esprit de génie. Mais poursuivons auparavant le raisonnement du philosophe prototypique.

8. Thèses négatives sur le génie, refoulement de l'inconscient et privilège des méthodes structurales

En définitive, si l'on fait abstraction des traits psychologiques singuliers d'une découverte pour ne retenir que le rapport de notre conscience à la possibilité de l'objet :

Thèse de philosophe. « Nous constatons que l'on doit refuser le génie au savant. »

Démonstration : « Une œuvre scientifique fait toujours apercevoir les règles, parfois cachées à l'inventeur, qui l'ont rendue possible. Tandis qu'une telle illumination rétrospective fait *a priori* défaut aux œuvres d'art. »

> Aussi, les plus belles découvertes scientifiques sont-elles destinées à grossir les connaissances anonymes que l'on rassemble dans les manuels. Elles cessent alors d'appartenir à leur auteur, qui ne peut être dit génial que psychologiquement ou provisoirement, *par suite d'un simple défaut dans la réflexion, auquel remédie toujours la postérité.* [**448**]

« Ainsi, ce qui paraît illusoirement dû au génie de Gauss dans les *Disquisitiones Arithmeticae* est transformé en une simple méthode uniforme. »

Alors toutes les données romantiques s'évaporent. « Illusoirement, provisoirement et psychologiquement », tels sont les seuls adverbes que retiendra la pensée consciente quand il lui reviendra de caractériser le moment de l'invention par rapport au travail logique de vérification. L'imagination scientifique n'est-elle pas le théâtre d'un jeu d'espoirs, d'artifices, d'ombres et de simulacres déçus !

Explicitation de la thèse précédente :

Thèse de philosophe. « Le mouvement rétrograde de la réflexion destructrice du génie est lié à l'essence même de la connaissance scientifique. »

Argumentation : « Tant que notre entendement ne construit pas organiquement l'objet, en vertu des structures qui le commandent explicitement, tant qu'il ne révèle que du dehors son rapport au contenu de l'intuition sensible », il m'est impossible de connaître et de *savoir* si la relation impliquée dans la construction possède autre chose qu'une apparence de vérité, valable seulement pour moi et pour ce cas singulier dans lequel la construction est effectuée. Rien ne garantit la vérité de l'abstraction. « *Des structures expliquent les propriétés des figures qui demeurent cachées. Ces sont les véritables* causes *de ces propriétés.* »

8.1. L'étalon des mathématiques structurales. Ainsi s'explique et se déploie cette *philosophie intrinsèque aux mathématiques structurales*, ancrée dans un dualisme profond, une différence inconditionnée entre matière et forme, entre genèse et structure. On n'insistera jamais assez sur cette aporie qui se joue au point précis où l'*a posteriori* refuse de céder la prééminence à la pensée prospective. Alors nécessairement l'inconscient devra disparaître des méthodes mathématiques, qui pourront être dites intégralement et en toute pureté rationnelles. La mathématique de Gauss, la mathématique du génie, n'est rationnelle qu'en puissance : l'essence même de la connaissance mathématique, c'est de restructurer et de rhabiller les « mathématiques géniales » dans l'*a posteriori* d'une synthèse. *L'histoire entière des mathématiques prouve que leur mouvement de réécriture perpétuelle contraint toujours à dépasser l'évènement singulier, à retravailler la matière brute et à privilégier les structures essentielles.*

8.2. Obstructions à une psychanalyse mathématique. On peut donc prédire maintenant que les modalités d'une explication pschanalytique de l'inconscient mathématique seront extrêmement difficiles à articuler d'une manière probante. Comment résister alors à la captation du mouvement par l'*a posteriori* dogmatique du structuralisme et par *la spiritualité administrative du formalisme* ?

Mais les obstructions ne proviennent pas seulement de la philosophie. On peut noter en effet chez la plupart des mathématiciens une sorte de rejet de l'inconscient, imprimé par une pratique constante des *déformations structurales conscientes* que subit leur pensée au contact des objet mathématiques. Notamment, Grothendieck parle d'un travail d'*action* et de *structuration systématiques*. D'après Grothendieck, *résoudre* un problème consiste en effet à élaborer un *énorme édifice théorique pour montrer que la pensée de l'objet se déduit d'une interrelation démultipliée entre des concepts*, d'où à nouveau l'exigence structurale, qui semble en conclusion dominer le champ des mathématiques, même de l'avis d'un esprit par ailleurs hors cadre. Dans l'*Esquisse d'un programme*, Grothendieck annonce que son projet incarne la volonté d'être *galoisien* sur des mathématiques structurales. Grothendieck était tellement convaincu de la primauté absolue de l'édification théorique que sa géométrie-topologie-algèbre a transcendé l'urgence des conjectures particulières. Même Gauss aurait reconnu le primat des unifications théoriques (qui devaient métamorphoser ses découvertes entre les mains de ses successeurs), lorsque, parlant du calcul barycentrique de Möbius, il déclare que : « Grâce à de telles conceptions, des problèmes en nombre illimité qui, autrement, demeurent isolés, et *exigent à chaque fois de nouveaux efforts* (plus ou moins grands) *de l'esprit d'invention*, s'intègrent dans un royaume organique. »

8.3. Résumé et conclusion : la raison philosophique contre les mathématiques génétiques. En résumé, d'après Vuillemin :

> Pour qu'une genèse soit possible, *il faut que le Moi réfléchi accède à son principe, dissipe son obscurité et l'éclaircisse de sa propre lumière* (résonance fichtéenne). **[448]**

« Il faut par conséquent que le *dogmatisme larvé* lié au préjugé d'un facteur opaque à la réflexion disparaisse dans le *mouvement* même par lequel la réflexion s'en empare. »

Le passage de l'observation du phénomène brut à la compréhension de sa cause a lieu pour les mathématiques elles-mêmes « lorsque le point de vue de la raison se substitue au point de vue de l'entendement, qui n'est autre que la *raison cachée* dans ses applications individuelles, ou la structure enveloppée dans la figure ».

« Ainsi, lorsqu'on fait abstraction de l'aspect subjectif des méthodes pour porter son attention sur la signification objective et le style de la nouvelle méthode, voici comment les choses se présentent. »

> Quelles que soient leurs préférences, Galois, Cantor, Grassmann, Hilbert, Grothendieck, appartiennent à un *mouvement commun de pensée*. Ce qui les rejoint, c'est l'idée révolutionnaire de développer pour eux-mêmes et abstraction faite des objets auxquels ils peuvent s'appliquer, des *formalismes* et des *structures* qu'ils mettent au jour : ensembles, groupes, anneaux, corps, espaces vectoriels, variétés, faisceaux, schémas, topoï. [**448**]

9. Critique forte du structuralisme triomphant à l'aide du paradoxe de l'*a posteriori*

Une telle vision ultrastructuraliste des mathématiques bénéficie pour elle du privilège de nécessités rationnelles captées *après-coup* et prétendument universelles dans leur relation aux choses en elles-mêmes. Telle est en fin de compte la conclusion que nous souhaitons faire valoir ici : s'il y a submersion par l'*a posteriori*, elle est universelle, et comme sous le déluge, aucune cime n'en émerge : l'*a posteriori* noie tout grâce au privilège temporel, mais il n'a en définitive aucun mérite à un tel surpassement. Tel est le *paradoxe de l'a posteriori*.

9.1. Retour sur le premier écueil. Ainsi, plus qu'un *écueil*, qu'un deuxième écueil, la présentation structurale du travail mathématique constitue une *obstruction* importante à l'intrusion de concepts psychanalytiques ou psychologiques pour rendre compte de la dynamique et de la fécondité des sciences. Jusqu'à présent, les philosophes, les épistémologues, les historiens, se sont contentés de ranger les remarques mathématiciennes dans le compartiment très connoté de la *psychologie de l'invention*. Parce que « *Les choses elles-mêmes sont indifférentes aux modalités de l'invention.* »

Du point de vue de la philosophie structuraliste des sciences (inspirée par le désir d'être aussi purement structuraliste que les sciences dures), cette conviction a été renforcée par le fait que pendant une longue période (qui ne s'est achevée que très récemment, dans les années 1970), vérité et objectivité semblaient renvoyer seulement à une grammaire correcte des énoncés censée établir une communication transparente et immuable des idées. Vérité et objectivité ne seraient traversées d'imprégnations anthropologiques qu'épiphénoménalement. « Tout ce qui était évocation de l'intuition, pire encore, de l'inconscient, paraissait éminemment suspect. Tout au plus était-il admis de parler de « beauté » pour expliquer un sentiment, inexplicable par le calcul, de la supériorité de certaines constructions sur d'autres » (Bernard Teissier, *Le mur du langage*). Privée ainsi de toute humanisation, la science était certainement pure : les structures structuralistes elles-mêmes étaient indifférentes mêmes aux modalités de leur *intentions structurelles*.

9.2. Nécessité d'un renversement partiel et d'un relèvement. Soyons plus clairs. La puissance de pensée déployée par la philosophie a tendance a étouffer par la loi du prince toutes les tentatives naïves qui se laissent séduire par l'idée du génie et par les sirènes de l'invention, tentatives qui s'incarneraient dans une philosophie de l'induction, de la constructivité ou de l'heuristique (*cf.* les discussions autour de la résolution de problèmes mathématiques par Polyà, Lakatos, Polyani). Très vite, Spinoza, Kant ou Hegel nous rappellent à l'ordre dans un silence qui s'élève aussi haut que nous pourrions nous abaisser dans le non conceptuel et dans la séduction. Alors il ne nous reste peut-être qu'une seule chance : *anéantir, au moins partiellement, la philosophie de la nécessité rationnelle* (entreprise vraisemblablement désespérée !), laquelle fonctionne dans le cercle trop vertueux, trop policé, trop cohérent, des corrélations de l'*a posteriori*, avant de pouvoir balbutier quelques catégories spéciales de la potentialité et de la virtualité de l'inconscient mathématique. En philosophe, je te détruis, toi philosophe, afin de me construire. Même si l'entreprise est il faudrait critiquer à fond le spinozisme cavaillésien qui a inspiré l'œuvre de Jules Vuillemin. Il faudrait donc une « *Aufhebung* » très singulière qui absorbe, digère et pulvérise systématiquement toutes les intentions fades du catéchisme de la vérifiabilité, pour saisir l'absence d'une réponse percutante aux questions les plus brûlantes.

9.3. Les profondeurs de ce qui cherche à se dire. Par conséquent, notre tentative sur les mathématiques et l'inconscient demeurera imprégnée de ce slogan aveugle que le philosophe du mobile érige comme principe méditationnel :

L'a posteriori n'explique rien !

Et nous ignorons les profondeurs de ce que nous cherchons à dire car ce qui se joue en deçà du dire dépasse toujours le cadre trop étroit d'une expérience de pensée particulière. Devant l'abîme, l'écriture et le discours font souvent semblant. Parce qu'il n'existe pas de formule magique, si notre parole ne tient pas compte des insuffisances qui grèvent la philosophie du concept, elle risque de demeurer entièrement vaine et frustrante.

« *La philosophie doit affronter résolument le réel aux avant-postes de l'obscur* » (Gilles Châtelet).

10. Redressement de l'argumentation

10.1. Objection galoisienne. Et comment ! Mais Pourtant ! Le mathématicien Galois, que l'on a vu érigé en champion précurseur du structuralisme par tous, n'écrit-il pas dans ses manuscrits :

> La science progresse par une série de combinaisons, où le hasard ne joue pas le moindre rôle ; *sa vie est brute* et ressemble à celle des minéraux qui croissent par juxtaposition. Cela s'applique non seulement à la science telle qu'elle résulte des travaux d'une série de savants, mais aussi aux recherches particulières à l'un d'eux. En vain les analystes voudraient-ils se le dissimuler, ils ne déduisent pas, ils combinent, ils comparent. *Quand ils arrivent à la vérité, c'est en heurtant de côté et d'autre qu'ils y sont tombés.* [**17**]

Cette remarque n'a vraisemblablement pas seulement rapport à la psychologie de l'invention ou encore aux impondérables anthropologiques de la recherche scientifique. Elle n'a pas non plus rapport à l'eugénisme larvé que le structuralisme scientifique souhaiterait imposer à la méthode : il y a bien de la *vérité mathématique*, entend dire Galois, mais *les circonstances dans lesquelles on la rencontre sont bien souvent obscures.*

10.2. Hasard et force. Nous voilà inopinément (?) au cœur du point fort de la problématique galoisienne[7]. Une virtuosité brute, primaire, rocailleuse et incorporant douleurs et extases a dû être profondément expérienciée par ce jeune homme prodige pour qu'il en rapporte de cette manière : l'acte, la force, la pulsion et l'intensité d'un geste sans cesse renouvelé en direction de la vérité, qui se dérobe derrière une combinatoire non dominable, telles sont les catégories qui faisaient défaut à l'approche passive de Hadamard. Commencerions-nous par là à *désensevelir* l'une des pièces du puzzle de l'*action* mathématique ?

10.3. Questions. Avançons prudemment. En définitive, si l'on adopte le point de vue du tout structural, on aboutit aux interrogations suivantes, dont pas une ne semble réellement envisageable dans le cadre des épistémologies classiques des mathématiques, mis à part peut-être celle d'Albert Lautman.

Quelles sont les modalités motrices des structures mères ? Quelles sont les modalités d'appréciation des notions axiomatiques mêmes ? Par exemple, quels sont les degrés de satisfaction abstraite qui conduisent à considérer que la définition d'*espace topologique* est « satisfaisante » et remplit bien son rôle ? Comment échapper à l'aporie de la nécessité des corrélations dans l'*a posteriori* ? Où gît le principe des rectifications incessantes ?

[7]– Bien qu'aucun texte suffisamment explicite ou systématique sur ce sujet n'ait été écrit par la main de Galois.

Quelles sont les caractéristiques de la volonté rationnelle ? Dans quels principes sont déposées les intentions centrales des théories régionales ? Comment la recherche en acte, comment l'opération effective s'articulent-t-elles au sujet de conscience et y puisent-t-elles leurs *impulsions* primordiales ?

10.4. Permanence de l'infralinguistique. Cette « nouvelle » dynastie de questions ne cessera de se démultiplier si, parallèlement, on demande : cela a-t-il un sens de chercher un chemin reliant les mathématiques à un en-deçà du langage, dans un être mythique *comme si cet être manifestait ainsi sa force et sa protension créatrices* ? Tentation d'intuitionnisme, de mysticisme, voire d'obscurantisme douteux ? Toujours est-il que l'infralinguistique rayonne dans le langage.

Il nous serait bien sûr aisé d'entreprendre une démarche rigoureuse au parfum philosophique convenable, de mettre en perspective les bifurcations de la raison face à ses interrogations kantiennes et de conclure brillamment une belle analyse, en façonnant des concepts sur mesure, pour répondre à ces belles apories. Malheureusement, elles sont à la fois aussi essentielles et inessentielles que celles de la métaphysique classique et nous savons bien, hélas, que la dialectique hégelienne, décourageante de profondeur, pulvérise d'emblée toutes nos tentatives éventuelles de dialectiser ces idées !

10.5. Le primate du philosophe. *Mais alors, comment satisfaire notre primate*[8] *?* Car en fait, le mathématicien, le physicien, le bilogiste, le philosophe, le journaliste le négociateur, l'industriel, le technocrate, *les lecteurs*, *les auditeurs*, tous ne comprennent vraiment un discours que lorsqu'ils ont *réussi à expliquer la situation à leur primate*. Autrement, comment le primate qui est en nous pourrait-il s'approprier l'extérieur ? Évidemment, primate ne s'entendra pas ici ni au sens d'animal, lémurien, tarsien, simien, hominien ou anthropoïde, ou au sens d'homme brutal, grossier et inintelligent, mais on souhaite l'entendre comme une sorte d'*homunculus métaphorique de la compréhension s'agitant en nous et catalysant une chimie d'appréhension de la connaissance*.

Les philosophes ont donc aussi en eux un primate-philosophe !

Alors le primate qui est en nous, le primate qui est en vous, le *primate philosophe* qui est en moi et qui est avide d'argumentations liminaires, *tous ces primates vont commencer à devenir très impatients !, si nous continuons sans cesse à reculer les limites de ce propos*.

10.6. Satisfactions, pulsions. Ainsi, toute la positivité que l'on peut mettre en avant dans les mathématiques ne peut cacher cependant qu'existent aussi des satisfactions d'un ordre autre que purement rationnel. Il s'agit justement d'analyser, à l'œuvre dans le travail mathématique, ces attentes qui nous dominent, cette pulsion que l'on exprime et qui s'exprime — par exemple dans notre primate.

11. Pour une philosophie de la volonté mathématique

La suite du texte va être organisée de la manière suivante. Nous allons essayer de réhabiliter en filigrane une des composantes négligées de la philosophie mathématique de Descartes, à savoir qu'elle est une *philosophie de la volonté*.

Thèse principale 1. Le possible — l'efficience des potentialités — ne se révèle à nous que par l'action et sous l'aspect des lois de la volonté. Cette volonté oriente des désirs rationnels et des exigences de satisfaction abstraite, qui sont classiquement soumis à une mise entre parenthèse fondamentale dans l'intersubjectivté civilisée, mais qui n'en demeurent pas moins réels et agissants.

L'orientation générale de des thèses qui vont suivre s'articulera donc autour d'une philosophie de la volonté encore embryonnaire, implicite et imparfaite. Mais l'engagement métaphysique qu'impliquerait la mise au point de tout un système catégoriel structuré venant charpenter cette *philosophie de la volonté rationnelle et impersonnelle* bien distincte du *cogito* cartésien et d'un immanentisme abstrait, est tel que nous ne serons pas en mesure pour l'instant d'en exposer une théorie satisfaisante. La suite de l'argumentation est consacrée à donner quelques indications dans cette direction.

12. Introduction aux thèses principales

Cette thèse principale sera illustrée et suivie par une série d'une dizaine de thèses spéculatives secondaires, formulées ici d'une manière assez approximative et encore provisoire. On renvoie donc à des réflexions ultérieures pour l'approfondissement de ces points de vue.

12.1. Avertissement : candeur interrogative. Ces thèses s'articulent en se focalisant sur un point précis qui est *obsessionnel* et *primordial* à travers les mathématiques tout entières, à savoir l'exigence *abélienne, galoisienne, riemannienne* et *hilbertienne* de traiter *dans leur pur pour soi* les *questions innocentes* qui naissent sur le parcours des mathématiques *et de les résoudre complètement*. On se rapportera aux Thèses 4, 5, 7, 8 et 10 ci-dessous. Il est bien connu que c'est souvent une simple candeur interrogative quasiment informulée car implicite, qui peut être mise à l'origine des théories mathématiques les plus spécialisées, *en tant que germe de déploiement d'intentions centrales*. C'est pourquoi il me semble pertinent de l'analyser en liaison

[8] Entendons : le primate à la Teissier qui est en chacun de nous.

avec une *théorie positive* sur l'inconscient et sur le génie (« *Nous sommes tous des génies* », écrivait Bernard Teissier en marge d'une version préliminaire de ce texte) réévalués comme *orientation*, comme *action* et comme *réalisation*. On tentera de développer alors l'idée d'une *nécessité d'obscurcissement* et d'une *discipline de non-savoir*, comme exigence inconsciente, à un niveau subjectif et intersubjectif, en vue d'atteindre *un vrai qui ne se révèle qu'à travers les difformités du travail* (*cf.* les Thèses 2, 3, 6 et 9 ci-dessous). Malgré les connotations péjoratives qui sont attachées à l'idée de confusion, de désordre et d'ombre, on doit déceler que ce champ de forces exerce une action positive et confère à l'inconscient un statut en acte plutôt qu'en puissance : ici, l'acte produit la *dé-conscientialisation volontaire de la « matière à pensée » grâce à laquelle la conscience peut rejaillir et rebondir au-delà d'elle-même*. Enfin, pour parer à l'objection d'hétéronomie du vrai qu'induit une telle thèse sur l'inconscient comme moteur obscur décidé, c'est un *besoin de satisfaction* par le vrai qui légitimera en dernier recours cette motricité interne à la bipolarité conscience — inconscience mathématique.

12.2. La sublimation. On fera remarquer aussi que nous éviterons soigneusement d'introduire le champ thématique de la *sublimation*, ou du moins de laisser croire qu'on s'affranchira simplement desdites questions (§10.3) en se ramenant avec élégance au champ de la sublimation, ou à l'esthétique mathématique. Afin d'éviter la canalisation, la récupération voire le détournement naïf d'un champ de forces envisagé ici comme primitif et primordial. Ce champ de force primitif ne se révèlera vraiment que dans les lieux adéquats à son essence motrice.

13. Présence de zones motrices infralinguistiques obscures

D'autant que les forces obscures et confuses ne sont pas moins importantes dans l'émergence des notions mathématiques révolutionnaires. Bien mieux, il me faudra démontrer l'*interdépendance* des exigences de la satisfaction, relier les acquis mathématiques d'une théorie au *besoin d'expression* et à l'*urgence d'un problème*, sans envisager les cristallisations mathématiques comme des involutions de formes incurvées sur elles-mêmes ou des structures enveloppées dans la guangue des cas particuliers.

13.1. Thèse d'existence. La *première* de ces thèses secondaires est une constatation :

Thèse 2. Il existe, y compris dans la mathématique la plus technique, un niveau antéprédicatif, originaire, infralinguinstique, bref, une zone obscure où s'exprime et se déploie une pensée sans mots.

13.2. Scholie : rayonnement de l'infralinguitique. Bien entendu, les lignes de forces qui le sillonnent, l'entière disponibilité dans laquelle se tient par nature ce niveau, ne doivent pas nous faire croire qu'il s'agit seulement d'un jeu d'ombres (Platon, mythe de la caverne). D'une certaine manière, le souvenir des *murs métaphysiques* qu'ont franchi Abel, Galois, Grothendieck, subsiste dans le sein même des théories acquises, à la manière du rayonnement fondamental de l'univers. *L'infralinguistique ne saurait disparaître.* Et pas seulement en vertu d'une exigence de réactivation, ou d'un devoir philosophique (ou épistémologique) de remonter jusqu'aux choses mêmes dans la création de l'objet singulier. Bien mieux, parce que *la raison évolue dans le souvenir de ses réalisations*, et par là même doit s'apprêter sans cesse à effectuer un pas de côté, devant la nécessité d'effectuer une liaison inconnue. *Essentiel à la transduction, le clinamen des hypothèses*[9]*rayonne dans une zone infralinguistique.*

13.3. Pédagogie et métaphysique. Par exemple, on connaît bien certaines apories fondamentales de l'enseignement des mathématiques : rien n'efface la singularité métaphysique de la géométrie différentielle, de la notion de continuité, de la notion d'espace vectoriel ou encore de la théorie des groupes, de la théorie de Galois, de la théorie des schémas, *etc.* La raison a beau s'aider des béquilles d'un formalisme peaufiné par des générations de mathématiciens et de manuels, *rien n'efface l'obstacle que représente l'apprentissage personnel et subjectif d'une théorie*. Le geste tarde à venir, l'évidence renchérit sur des non-évidences et peut-être chaque mathématicien cultive-t-il en lui-même et malgré lui sa *part de non-évidence, d'ignorance et de doute personnels* que seul un apprentissage forcené peut corriger et effacer. Le texte ne peut jamais faire apparaître *toute* la métaphysique qu'il met en œuvre. La formalisation n'enclôt jamais *toute* la pensée qu'elle exprime.

13.4. Nécessité de se cloîtrer hors du langage. D'où :

Thèse 3. La nécessité d'inventer s'accompagne en quelque sorte du devoir de cloîtrer une partie de son esprit (fût-elle infime) hors du langage, audelà des mots, en deçà des lettres, et plus particulièrement dans les mathématiques. Conséquence : il faut exercer son intuition (y compris l'intuition langagière) à passer de l'autre côté du mur du langage, en élaborant des

[9]Dans la théorie physique d'Épicure, le *clinamen*, mouvement de déviation des atomes sans cause externe, est un principe physique de *liberté* analogue au mouvement volontaire et placée à l'origine des choses. Inscrit au cœur du procès d'auto-approfondissement, et essentiel aux déplacements conceptuels et spéculatifs, le clinamen des hypothèses mathématiques rayonne dans le travail mathématique à tous les niveaux : c'est seulement en changeant volontairement et stratégiquement la direction des hypothèses que la réalité mathématique peut se métamorphoser sous le regard de la pensée.

schèmes géométriques et des diagrammes intuitifs inventés sur mesure. Il faut cultiver ses capacités de deviner le vrai hors langage.

13.5. Scholie : le don de solitude. Cette thèse corrèle le célèbre *principe de solitude et d'isolement* que nombre de mathématiciens connus ont prôné pour préserver leur activité, et notamment Gauss, qui s'était convaincu à partir d'expériences vécues qu'il lui était préférable de s'isoler presque complètement du champ des influences de l'activité mathématique de l'époque. Autre exemple : à la fin du *Prélude en quatre mouvements* des *Récoltes et Semailles*, Alexandre Grothendieck parle en des termes autobiographiques émouvants et presque poétiques de ce qu'il appelle le *don de solitude* pour expliquer sa « marginalité' dans le monde mathématique officiel[10].

13.6. Discussion. Maintenant, la question de l'interprétation anthropologique, culturelle et sociale d'une telle zone obscure non langagière est peut-être une fausse question, puisqu'elle conduirait à écarter purement et simplement cette zone, sans lui reconnaître aucune espèce d'influence. D'ailleurs, les structures du langage peuvent être interprétées réciproquement comme le refoulement de la zone infralinguistique, la mise en place d'un espace moins tendu et plus supportable que le monde du silence. Mais toutefois, force nous est de constater que, si le « moi subliminal » peut réussir là où le moi conscient échoue, il doit pouvoir laisser croître et grandir ses cristaux à l'ombre d'un ailleurs inaccessible au langage et à la communication courante entre hommes honnêtes.

13.7. L'intuition de vérité. Comment analyser la zone infralinguistique ? Et comment interpréter ce mythe que les mathématiciens aiment à se raconter : tout grand mathématicien serait en possession d'un réservoir de *lemmes secrets*, mais non démontrés, guides de leurs recherches au plus près de *l'intuition de vérité*, qui ne s'incarneraient que sous une forme partielle et dégradée, dans leurs écrits et dans le langage ? La philosophie des sciences s'intéresse à l'émergence contextualisée des formes et des structures. La psychanalyse souhaiterait aborder l'invention, le plaisir et la satisfaction. Dans les mathématiques, pendant ce temps-là, les arcanes de l'imagination et la recherche de la profondeur semblent persévérer dans la reproduction de

[10]Le célèbre *don de solitude* de *Récoltes et Semailles* apparaît dans le dernier paragraphe du *Prélude* :

> Cette « propension », ou cette aptitude intérieure, n'est pas le privilège d'une maturité, mais bien celui de l'enfance. C'est un don reçu en naissant, en même temps que la vie — un don humble et redoutable. Un don souvent enfoui profond, que certains ont su conserver tant soit peu, ou retrouver, peut-être... On peut l'appeler aussi le *don de solitude*. **[197]**

l'obscur et du clair. Il reste encore à analyser comment fonctionne l'intuition de vérité, ce qui la provoque et comment elle *déclenche des germes de mouvements dans la conceptualité résistante*.

14. Multiplicité et hétérogénéité des influences sur la pensée

La troisième suggestion que nous proposons est la suivante. On assiste dans les mathématiques au prolongement d'une *force* créatrice sans limites, dont personne ne tient les clés, une véritable mixtion entre création consciente, création inconsciente, geste volontaire, flèche involontaire, actualisation indécise, et *potentialités provisoires*. Quel est alors le principe moteur véritable de la science ?

Thèse 4. La question de la possibilité d'une domination des mathématiques par un principe moteur universel, physique, spéculatif, logique, psychologique, restera sans réponse. En vérité, des dominations partielles et abondantes structurent cet espace problématique d'influences.

14.1. Discussion. Et pourtant : la nécessité n'est rien sans l'approfondissement du *champ intensif* immanent à une théorie. Seuls les fantômes traversent le mur du langage sans effort. La réalité mathématique ne réside pas seulement dans les différences qui sépareraient les êtres achevés des êtres inachevés. Cette réalité n'est pas non plus celle d'êtres statiques, objets de pure contemplation. S'il existe, dans les mathématiques, une réalité distinctive, elle caractérise la *réalisation* comme *mouvement*, comme *protension* et comme *effort* : *tel est le principe dominateur, négligé par les épistémologies classiques, que je propose ici à l'analyse*. Le souci de resituer cette réalité dans son champ originaire doit donc s'accompagner d'une révocation préalable de toute orientation fixiste, structurale, formaliste, et d'une suspension du jugement. Aussi, l'éventuelle et prévisible inanité d'un projet de réévaluation du dynamique et du moteur dans l'*action* mathématique, ne devrait en rien nous décourager de l'entreprise. *Car l'excès de lucidité que procure la méditation sur les réalisations de la pensée nous prépare d'emblée à l'éventualité d'un échec, comme tant de philosophies des sciences dont circulent les insuffisances, on le sait.* Kierkegaard mesurait la *profondeur* d'une personnalité aux auto-corrections que s'inflige le penseur, l'écrivain, le philosophe, dans ses manuscrits. Il s'agirait par métaphore et à un niveau abstrait d'auto-corrections indéfinies que la pensée réflexive infligerait à la pensée réflexive. Tandis que les mathématiques se réécrivent et se purifient sans cesse de l'extrinsèque, la philosophie des sciences se crisperait sur des principes dominateurs et explicateurs qu'elle rejetterait indéfiniment.

15. Intentionnalité rationnelle

En vérité, une chose est sûre. L'effectuation consciente ne réactive qu'approximativement – et peut-être aussi ne réactive qu'arbitrairement – *l'espace inouï qui sépare la pensée de ses réalisations*, le lieu indécis où se joue le théâtre des espoirs, des illusions et des conquêtes, ce lieu imprécis qui est à la fois *la vérité de la recherche* et l'*erreur du concept*. Car, pour que l'entreprise mathématique réussisse, pour qu'elle parvienne à désigner des objets, à constituer des *champs apocritiques* (*apocrisis*, la réponse) entiers, à redoubler des espaces de gestes qui se sont révélés convaincants dans un autre domaine, il faut qu'elle soit orientée, poussée, interrogeante, attentive et forcée. *Sans l'existence d'une volonté purement rationnelle*, les mathématiques comme sommet seraient inexistantes. L'épistémologie ne peut pas ignorer l'existence de cette tension, de cette attente, *liée au possible comme à l'impossible*, et qui rayonnent dans un silence préliminaire.

Notre quatrième thèse s'énoncera donc de la manière suivante :

Thèse 5. Les marques de la profondeur, les marques de la synthèse, sont reconnaissables à l'aune d'une *intentionnalité purement rationnelle* qui définit et per-définit les projets de réalisation mathématique.

15.1. Dynamique de la réalisation. La distinction entre *réalité* mathématique et *réalisation* mathématique, provient de ceci : il n'y a pas de réalité sans acte et il n'y a pas d'acte sans volonté d'acte. L'absolue volonté ne trouve pas en elle d'absolue vérité. Elle crée, sans s'y subordonner, les lois logiques en posant des synthèses qui soutiennent l'analyse, et ces dernières donnent à la logique et à la vérité leur contenu réel.

15.2. Intentionnalité rationnelle. En mathématiques, cette *intentionnalité purement rationnelle* parvient à esquisser des orientations, à dessiner des structures, à *constituer de l'objectivité*, selon un schéma particulièrement auto-correctif et particulièrement rigoureux, voire (mais *a posteriori* seulement) « irréprochable ». Ici, l'adjectif « irréprochable » possède une connotation morale dont on voudrait bien le défalquer, s'il existait un terme analogue dans la langue française pour désigner ce sur quoi la raison correctrice ne peut pas revenir, parce que rien de *répondu* ne s'y trouve qui ne respecte entièrement un abstrait interrogatif pur : c'est un cas où la raison n'invente aucune hypothèse extrinsèque (*Hypotheses non fingo*).

16. La satisfaction mathématique

Ce qui fonde le caractère de stabilité et l'intérêt des acquis de la pensée mathématique, c'est sa capacité à évoluer dans la cohérence, en dernier recours, *avec des objectifs et des stratégies précises*. Ce n'est donc pas une science seulement engagée dans l'élaboration d'une philosophie de la nature, dans le calcul, dans l'engendrement des formes. C'est aussi une pensée qui cherche à éclore dans des lieux d'éclosion vierges, avec le souvenir de ses réalisations authentiques.

Thèse 6. Il ne serait donc pas difficile d'imaginer un concept de satisfaction en mathématiques qui soit lié à des processus extraordinairement conscients, pourvu que ces processus soient assimilables à un projet.

Car, de même que la raison est accablée par des questions en surnombre auxquelles elle ne sait pas répondre (Préface à la *Critique de la raison pure* de Kant), de même que, selon Auguste Comte, nos moyens de concevoir des problèmes sont beaucoup plus puissants que nos ressources pour les résoudre (notre esprit étant plus apte à imaginer qu'à raisonner, les questions naïves étant plus faciles à dégager par reproduction, qu'à résoudre), la raison est de surcroît accablée de la nécessité de *faire voir a priori qu'elle pourrait répondre à ces problèmes en intensifiant toujours plus le désir d'accéder*. Sans volonté, Cartan, Oka, Hironaka n'auraient démontré aucun résultat profond. Mais quel statut accorder à cette satisfaction qui se transmet dans la pratique, dans l'expérience et dans le travail mathématiques ?

16.1. Dialectique lautmanienne des problèmes. Il est difficile d'interpréter Albert Lautman sans plaquer sur son œuvre les catégories platoniciennes vulgaires qu'il a au contraire et avec soin évité d'employer pour ses propres analyses. À plusieurs reprises, il rappelle que les commentateurs de Platon ont insisté sur le fait que les Idées ne sont pas des essences immobiles et irréductibles, d'un monde intelligible, mais qu'elle sont *liées* entre elles selon les schèmes d'une dialectique supérieure qui préside à leur venue. Au fond, la référence lautmanienne au platonisme se justifie par l'existence de relations entre les théories mathématiques et les problèmes logiques qui les *dominent*. « La philosophie mathématique telle que nous la concevons, ne consiste pas tant à retrouver un problème de la métaphysique classique au sein d'une théorie mathématique, qu'à appréhender globalement la structure de cette théorie pour *dégager le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence de cette théorie* ».

16.2. Effort de l'esprit et nécessité de réalisation. Une *expérience spirituelle* est ainsi attachée à l'*effort de l'intelligence* pour créer ou comprendre un problème, mais cette expérience a un autre contenu que la mathématique qui se fait en même temps qu'elle. Cette expérience n'est pas non plus seulement la conscience du pouvoir infini de la pensée.

Nous voudrions montrer comment cette conception d'une expérience qui gouverne la réalité des mathématiques s'inscrit dans ce qu'on pourrait désigner sous le nom de « *nécessité réalisationnelle* », ou « nécessité d'aboutir » à quoi est attaché un statut d'*intention*, de *visée* et de *satisfaction* rationnelles. Cette nécessité s'articulant à des problèmes concrets et effectifs.

La question de savoir qui décide, entre la métaphysique et la science, de la capacité qu'ont les mathématiques d'obtenir des *résultats entièrement satisfaisants*, qui arbitre la question « *comment une mathématique satisfaisante est-elle possible* ? », nous l'ignorons. C'est bien la difficulté tout entière. Mais il faut une *force spirituelle*, sinon les processus conscients n'engendreraient que du formel superficiel. Les philosophes ont déjà souvent cédé à la tentation d'affirmer : « une fois le bon système d'axiomes, le bon langage, la bonne langue formulaire posés, tout se déroule par la double intervention de la forme et de l'opération sur l'objet. » Au contraire, il doit être clair que les potentialités s'accumulent en vertu d'exigences de satisfaction beaucoup plus *profondes* et insondables que ne le suggère l'opérativité.

16.3. Contre l'opérativité logique constituante. En effet :

Thèse 7. L'opérativité est la servante des focalisations potentialisatrices de la pensée. Toute opération effective est subordonnée à une intentionnalité collatérale. Le calcul est dirigé et les synthèses manifestent de l'orientation et de l'irréversibilité.

17. Conditions de possibilité

Pour expliquer cette dernière suggestion, venons-en à la huitième thèse. L'action de l'inconscient sur l'invention n'est possible que dans un horizon de réalisable qui est déposé comme un faisceau de connexions et de médiations effectuables. Pour la philosophie cartésienne des mathématiques, les attitudes d'ouverture se manifestent dans et par des médiations ineffectives, *mais réalisables*. Si la chose est laissée là comme *racine d'une discursivité possible* qui la concerne et demeure en suspens, sa fragilité se mesure justement à sa proximité médiane. De même, les analyses de Hadamard sur le merveilleux pouvoir qu'a l'inconscient de nous éclairer subitement là où la recherche consciente avait échoué par excès de proximité de l'objet, ne doivent pas nous faire oublier que :

Thèse 8. Les conditions de possibilité d'une découverte ou d'une théorie doivent être réunies pour qu'elle soit réalisée. En créant des liaisons inopinées mais possibles et réalisables à l'intérieur même des théories sophistiquées, un inconscient abstrait et procédural est à l'œuvre dans le développement du spéculatif.

17.1. Exemple. Si une théorie géométrique de la stratification des ensembles analytiques singuliers est possible, à l'aide seulement d'outils conceptuels relativement limités (variétés, polynômes, fonctions analytiques, inégalités, récurrence sur la dimension) et d'une combinatoire restreinte de gestes, d'« orientations désingularisantes » et de « briques élémentaires », il faut peut-être en trouver la raison (du moins en partie) dans *le rapport fondamental du réalisable à l'irréalisable*, en tant que ce rapport trouve son lieu d'expression à l'intérieur même des horizons de possibilité que définit la raison elle-même dans la théorie. L'harmonie des simplicités intuitives est fidèle à la nature de la matière traitée.

17.2. Discipline de non-savoir. Les liens entre implicite et explicite, les médiations du négatif, du creux, ne doivent pas nous faire oublier que le privilège du possible sur le réel incorpore des degrés et agit dans la conscience d'une manière extraordinairement contrastée. Si la pensée doit saisir dans la chose même l'exigence d'une surrection qui donne le signal du déploiement discursif par quoi le contenu de la chose se manifeste, il n'en reste pas moins que :

Thèse 9. Une discipline de non-savoir doit définir des sources « épochales » absolues par lesquelles se manifestent des impossibles exigibles.

C'est à cette condition seulement : volonté de vaincre les concepts cachés, que la résolution de problèmes difficiles peut prendre tout son sens.

En résumé :

Thèse 10. Le besoin de satisfaction est dominé par le besoin d'élévation, et la dialectique du réalisable par rapport à l'irréalisable est inscrite dans les structures fondamentales de l'idéalité.

18. Éclaircir chaque question. Contempler des généalogies de problèmes. Ne se satisfaire que de solutions complètes

Pour donner sens à l'idée d'une zone obscure et d'une pensée sans mot comme *en attente*, et *inscrite dans les structures fondamentales de l'idéalité réalisable*, pour rendre compte de la *plasticité intrinsèque* au travail mathématique et pour rendre compte des déformations morphogénétiques de l'idéalité conquise, il faut donc surélever l'exigence de satisfaction en mathématiques. Hilbert, pour l'avoir saisi, l'aura souvent écrit :

> Éclaircir chaque question qui se présente en examinant en même temps, si on peut, par un procédé fixé d'avance, lui répondre en n'utilisant que des moyens auxiliaires limités. *Ce principe me paraît contenir un précepte universel et naturel.* En réalité, lorsque nous rencontrons un problème ou que nous avons le sentiment de la vérité d'une proposition, notre *désir de connaissance* n'est satisfait que lorsque, ou bien nous parvenons à la complète solution du problème et à la preuve rigoureuse de la proposition, ou bien quand nous reconnaissons clairement la raison pour laquelle un tel succès est impossible, et, par conséquent, la nécessité de l'échec. [**222**]

Ce *désir de connaissance*, le chef de file de l'école formaliste l'évoque fréquemment. Loin d'être une évidence de toute éternité, l'exigence de complète satisfaction rationnelle qui accompagne ce désir n'est pas due à Hilbert, mais elle aura été l'un des acquis majeurs des mathématiques du dix-neuvième siècle, grâce aux raisonnements précurseurs de Gauss, Abel, Galois, Dirichlet et Riemann.

L'après-Riemann (hiérarchies conceptuelles) est au moins aussi destinal pour les mathématiques que l'est l'après-Kant (limites de l'entendement) pour la philosophie.

19. Portée et limites de l'inconscient

Mais revenons sur l'intervention de l'inconscient dans l'invention mathématique. Si l'inconscient est à l'œuvre, s'il y a des germes d'inconscient, si l'inconscient est multiple, s'il n'existe guère d'opérations dans notre esprit qui ne l'impliquent pas, s'il permet de n'examiner dans un éclair que les combinaisons qui sont utiles, s'il nous permet de sortir de l'ornière dans laquelle nous aurions insensiblement glissé, en fait, il est parfaitement clair qu'aucune découverte ou invention importante ne peut avoir lieu sans la volonté de découvrir. Il doit être parfaitement clair aussi que l'inconscient ne saisit qu'un possible, le possible qui est saisissable.

19.1. Effusions d'incohérence. C'est pourquoi il paraît tout à fait possible d'adopter une position philosophique entièrement en retrait sur la question de l'inconscient, non pas par crainte de l'irrationnel, mais en vertu des structures logiques de l'idéalité, envisagée en puissance ou en acte. Poussée à bout, cette option conduit néanmoins à reconnaître qu'il existe, à l'œuvre dans les mathématiques les plus « émergentes », des processus difficiles et purement intuitifs de conquête de l'idéalité, qui impliquent des *expériences psychologiques singulières*. Plus on s'approche du vrai, plus il se dérobe derrière une *effusion d'incohérence*, propre au vrai potentiel non structuré. Il est vraisemblablement nécessaire d'aborder la science avec la plus grande candeur et la plus belle innocence pour traverser le mur de la confusion et s'installer de l'autre côté, dans cet espace où les gestes du génie ne font qu'obéir à une dialectique pure de la vérité. Grothendieck, et bien avant lui Newton, ont exprimé cette idée, *cf.* la belle introduction aux *Récoltes et semailles*[11]. Dans quelle mesure cette expérience d'un accès à la fois conscient et inconscient au vrai constitue-t-elle une illustration de ce que nous avons appelé ci-dessus l'*effusion d'incohérence* ? Comment se manifeste-t-elle ? Cela reste mystérieux.

[11] Voici le passage, p. 33 du *Prélude* :

19.2. Béance des questions simples. Nous soutenons aussi que les mathématiques « platoniciennes » instituent des *béances inaugurales* sous la forme de *questions pures et simples*, ultra-métaphysiques, qui peuvent être déposées dans la *conscience* du chercheur comme racines d'une discursivité potentielle, c'est à dire racines primitives pour une solution pure qui est en attente et « à venir ». Bien entendu, ce niveau est inférieur au niveau d'action et de structuration systématiques, d'édification et de constitution formelle d'une « objectivité » mathématique pertinente, et de théories mathématiques adéquates – par exemple d'une ou de plusieurs « géométries algébriques ». Ce premier niveau est si profond que très peu de mathématiciens l'ont expérimenté en acte. Par exemple, Alain Connes l'évoque dans *Matière à pensée*, et l'appelle le troisième niveau. Le second niveau que nous évoquons intervient au moment où la raison s'interroge sur ses propres acquis (c'est un mouvement kantien) et sur les possibilités réelles de la synthèse par rapport à l'analyse, lorsque ces dernières portent sur des énigmes clairement formulées. Hilbert les appelle des *problèmes déterminés*. Au premier niveau, en l'absence de théorie, les questions flottent dans une indétermination originelle et nous croyons deviner que si l'on veut analyser l'exigence d'accéder à de nouveaux objets formels pertinents, cela nécessite l'introduction de catégories absolument nouvelles. Bernard Teissier parle de communication avec le côté préverbal du mur et introduit l'existence de « notre » *primate*, *i.e.* du *primate qui est en nous*.

19.3. Questions déterminées. Or, revenons au deuxième niveau, qui est *déterminé*. Il s'agit par exemple de la question « À quelle condition, nécessaire et suffisante, une équation algébrique est-elle résoluble par radicaux ? » (Galois, 1831, *cf. supra*), ou encore de la question « Que doit-on entendre par $\int_a^b f(x)dx$? » (Riemann, 1854, *Mémoire d'habilitation*), ou d'une multitude d'exigences de conditions nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes qui *animent* les différents mémoires et articles mathématiquesclassiques ou contemporains.

19.4. La méthode générale d'Abel. Cette méthode préconise la règle de travail suivante. On doit toujours donner à un problème mathématique « une forme telle qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème mathématique » : cette phrase visionnaire a été

Dans notre connaissance des choses de l'Univers (qu'elles soient mathématiques ou autres), le pouvoir rénovateur en nous n'est autre que l'*innocence*. C'est l'innocence originelle que nous avons reçue en partage à notre naissance et qui repose en chacun de nous, objet souvent de notre mépris, et de nos peurs les plus secrètes. Elle seule *unit l'humilité à la hardiesse* qui nous font pénétrer au cœur des choses, et qui nous permettent de laisser les choses pénétrer en nous et de nous en imprégner. **[197]**

écrite par Abel en 1826 et constitue une étape décisive dans l'histoire de la pensée mathématique. Très couramment, le mathématicien au travail interprète cette suggestion méthodologique avec pragmatisme : on doit toujours donner au problème mathématique une forme concrète, en ajoutant des hypothèses suffisantes à la démontrabilité d'un certain nombres de théorèmes. Inutile de dire que c'est exactement le contraire qui est préconisé par Abel : on doit défalquer la matière mathématique des hypothèses superflues qui en encombrent la *compréhension* et la *genèse* pour trouver la vraie réponse au problème, ce qui nécessite d'abord de trouver la vraie formulation dudit problème. Telle est la *méthode générale* d'Abel : formulation, puis résolution de vrais problèmes.

19.5. Motifs de la méthode axiomatique. Ce précepte est devenu tellement évident pour les mathématiciens contemporains qu'on a peine à croire qu'il ait fallu attendre le dix-neuvième siècle pour qu'il naisse dans les esprits d'Abel, Galois et Riemann et qu'il a fallu attendre Bourbaki au vingtième siècle pour que sa systématicité (en fait, sa « systématisabilité ») soit mise en œuvre de manière universelle : l'axiomatisme pourrait en effet être interprété comme une méthode d'exposition et de clarification des *liens théoriques* qui peuvent exister entre diverses notions mathématiques nuancées et hiérarchisées, qui éclatent dans une telle différence nécessaire, que seule la présentation axiomatique est à même de tisser le réseau de questions et de réponses locales qui articulent un champ théorique éclaté. La *méthode axiomatique* intervient en effet comme *renfort de structuration du questionnement* devant la diversification « babélienne » des hypothèses qui répondent à une multitude de questions premières ou secondaires. Abel écrivait déjà, un siècle plus tôt : « Ce qui a fait que cette méthode (générale), qui est sans contredit la seule scientifique, parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est l'extrême complication à laquelle elle paraît assujettie dans la plupart des problèmes, surtout quand ils ont une certaine généralité ». Ainsi, la généralité et la pureté des questions implique leur éclatement. C'est dire combien la raison mathématicienne s'interroge sans cesse sur ses propres possibilités.

20. Conclusion : parabole de l'obscurité et de la confusion

Or, c'est ici-même pour conclure que nous souhaiterions formuler à nouveau la parabole de l'obscurité et de la confusion. À la suite des réflexions précédentes, nous pouvons dire qu'une *epoche* fondamentale (c'est-à-dire une suspension de l'opinion, de l'intuition et du jugement devant l'indétermination des questions qui ont une certaine généralité) anime la pensée mathématique : il y a une oblitération de la tentation d'effectuer des gestes superflus, simplificateurs et rassérénants. On sait la différence d'essence qui sépare les mathématiques dites appliquées, en tant que modélisatrices, des mathématiques dites pures : les premières autorisent l'introduction de faisceaux d'hypothèses simplificatrices pour répondre à la complexité congénitale des formes qu'elles étudient, tandis que les secondes *resserrent sans cesse l'étau métaphysique du vrai*. Aux dépens du confort intellectuel, aux dépens des paradigmes existants, aux dépens de la cohérence du savoir acquis. Toute question pure déterminée a vu jaillir à partir d'elle des formes qui auraient été ignorées sans cette abnégation spirituelle que commande l'impératif d'Abel.

20.1. Mouvement abyssal. Eh bien, il s'agit, pour la conscience du chercheur, d'un mouvement descendant en direction des profondeurs de l'ignorance mathématique. Pour employer une métaphore, un supplément aporétique nous rapproche toujours plus du « centre de la Terre ». Afin de recueillir plus de corps, plus d'objet, plus de structure, il est nécessaire d'*oblitérer l'acquis*, de s'*installer dans la confusion* et d'engendrer d'abord cette effusion d'incohérence d'où jaillira ensuite par cristallisation et avec une force inouïe le vrai qui nous aurait été caché si nous nous étions contentés de céder au désir de savoir tout d'emblée. Nous croyons que les expériences singulières vécues par Tartaglia, Bolyai, Grassmann, Turing et Gödel illustrent ce propos. *Obscurité et confusion vivent dans la conscience du chercheur parce qu'il est cinglé d'énigmes*. On ne voit pas trop en définitive quelles sont les structures conscientes et inconscientes de l'esprit créateur qui expliquent la possibilité d'accès à une cohérence finale de la pensée, ou qui lui donnent une valeur pour la société et pour la civilisation. Vraisemblablement, ces expériences singulières sont *dominées* par des *liaisons* (des relations précises) entre les idéalités, mais nous n'ignorons pas combien il est difficile de voir clair dans la question du réalisme que soulève une telle explication. Le point important pour nous est de savoir que les thèses rationalistes qui ont été évoquées au début de l'exposé rendent compte de manière très satisfaisante de la domination *a posteriori* de la synthèse, de l'acte, et de l'effectuation, mais que les mathématiques en train de se faire, comme toute activité humaine en train de se faire, échappent à une analyse qui ne ferait pas intervenir l'inconscient comme emblème. Ce sont des processus non contrôlés par l'acquis qui animent l'inventivité polymorphique des mathématiques.

20.2. Prégnance des structures interrogatives. Ma tentation pour l'instant est de suggérer, en adéquation avec l'évocation de la pensée d'Abel, qu'il existe néanmoins une structure ou une « sémantique » interrogative universelle, laquelle institue des attentes insatisfaites, et que cette structure brise la frontière qui semble exister entre conscience et concept (contre l'épistémologie classique et l'option cavaillésienne). Nous pensons rejoindre aussi cette phrase très juste de Bernard Teissier : « Le mathématicien ne *comprend* » (conscience conceptuelle) « que lorsqu'il a réussi à expliquer la situation à son *primate* » (in-conscience primitive et infralinguistique, fonctionnement caché d'un cognitif singulier, idiosyncrasie du langage intérieur). Le besoin de compréhension secrète ses tensions, au niveau objectif comme au niveau subjectif. Enfin, espérons que ces éléments contribueront à convaincre mon lecteur de l'existence d'une expérience très singulière de la conscience dans les mathématiques, dont l'exploration pourrait se révéler indéfiniment prometteuse, à travers peut-être les sciences cognitives, mais surtout à travers une analyse dynamique ou psychanalytique de la création et de l'action mathématique.

Théorèmes d'existence, en mathématiques[1]

1. Prologue

L'objectif est de méditer sur les *preuves d'existence* et sur les '*dérivations ontologiques*' telles qu'elles s'explicitent dans les mathématiques contemporaines. Le paradoxe de la notion d'explicite se dessinera au cours du troisième moment et on se demandera à cette occasion dans quelle mesure il est légitime de croire que les mathématiques tiennent ou constituent un discours *sur l'être*.

Dans un premier moment, nous allons considérer l'interrogation philosophique sur l'existence en général, dans un deuxième moment, nous allons faire une exposition et un rappel de la philosophie de Lautman, évoquer ce que Lautman appelle les *schémas de genèse*, et dans un troisième moment, nous allons envisager la question de l'existence en tant que telle, comme question d'existence *amorphe* pour des solutions d'une équation donnée.

2. Paradoxe de la notion d'être

La première chose que nous désirons savoir à propos d'un objet connaissable quelconque, c'est s'il existe ou non. Or, puisque le concept d'une chose réelle ne diffère en rien de cette même chose en tant que simplement possible, notre représentation du réel est congénitalement aveugle à l'existence. Tous nos concepts présentent un même caractère de *neutralité existentielle*. Quoi que contienne notre concept d'un objet, disait Kant, nous sommes toujours obligés d'en sortir pour lui attribuer l'existence. Mais ce qu'il y a ici d'étrange, c'est que ce soit vrai du concept d'être lui-même : il semble même complètement indifférent au concept dêtre que ce qui est soit ou ne soit pas. C'est cette ambiguïté fondamentale que nous appellerons *le paradoxe de la notion d'être*, en nous inspirant des analyses d'Étienne Gilson.

Dans la langue française, être peut s'entendre soit comme verbe, soit comme un nom. Il y a une fonction existentielle du verbe être. S'il est vrai qu'un X soit un être, il s'en faut de beaucoup que X soit. En français, c'est le verbe exister qui s'est chargé du rôle d'assumer la fonction existentielle non propositionnelle. En revanche, en latin, *existere*, ou mieux, *ex-sistere* (en

[1] À la mémoire de Maurice Loi, organisateur du Séminaire « *Philosophie et Mathématiques* », à l'École Normale Supérieure.

deux mots), est composé manifestement de *ex* et de *sistere*, de *sisto*, se placer, se tenir, se maintenir, et par conséquent, subsister. « Ex sistere » signifie, ainsi d'ailleurs que l'usage latin le plus courant l'atteste, moins le fait même d'être que son rapport à quelque origine. C'est pourquoi les sens les plus fréquents d'*existere* sont : paraître, se montrer, sortir de. Il est remarquable que les scolastiques, dont la langue philosophique est la source de la nôtre, aient si longtemps résisté à la *tentation de remplacer esse par existere*. Pour eux, *existere* signifie proprement *ex alio sistere*. De même que le mot *existentia* évoquait d'abord à leur esprit *essentiam cum ordine originis*, *existere* désignait d'abord dans leur langue, l'acte par lequel un sujet accède à l'être en vertu de son origine. Un tel sujet subsiste donc, mais à partir d'un autre : *ex alio sistere, hoc est substantialiter ex aliquo esse.* La notion d'origine est donc en principe connotée à chaque fois que l'on emploie ce terme dans son sens précis. On sait qu'il n'en est pas ainsi dans la langue philosophique du dix-septième siècle. Dans la Métaphysique de Scipion Du Pleix, notamment, on parle de l'existence comme la nue entité, le *simple et nu être des choses*. Pour lui comme pour Descartes, *existentia* s'est déjà spécialisé dans la signification du pur fait d'être. Manifestement, le titre de la troisième méditation est caractéristique à cet égard, « de Dieu, qu'il existe ». Ici exister veut dire être.

Ce *glissement de sens*, qui transforme *existere* en simple substitut d'*esse* s'explique assez aisément. Dans l'expérience sensible, l'existence signifie le seul mode d'être dont nous ayons l'expérience et c'est pourquoi, de tous les êtres appréhendés par nous, il est correct de dire qu'ils *existent* pour signifier qu'ils sont. Pourtant, si la métaphysique devait s'exprimer dans une langue technique faite à la mesure de nos concepts, elle dirait ici de chaque étant qu'il est par suite de son existence, au lieu de dire qu'il existe pour signifier qu'il est. Ces *confusions* entre être et exister, nous allons les voir se développer dans les problématiques philosophiques concernant le statut des idéalités mathématiques.

3. L'essence

Lorsque nous parlons absolument de l'essence, ce n'est pas à l'être que nous pensons, mais à ce qui fait qu'une chose est ce qu'elle est. C'est là, dit-on, *l'essence de la chose*. Alors tout se passe comme si l'intellect cherchait dans l'*essentia* le moyen de dissocier l'être du fait même qu'il existe, car si l'essence de la chose est vraiment ce qu'il y a en elle d'essentiel, il est remarquable que cette essence reste la même, que la chose existe, ou n'existe pas. On aperçoit déjà les amphibologies dont souffre le langage dont use inévitablement toute métaphysique de l'être. Ce sont précisément certaines attitudes fondamentales de la philosophie que nous nous proposerons d'examiner. Et nous allons essentiellement examiner l'argument ontologique de Descartes, non pour réfuter les preuves de l'existence de Dieu, mais pour discerner les *embarras* dont elles *souffrent*. Il doit donc y avoir dans l'être quelque chose de trop visible pour que le reste soit aisément perçu.

4. La critique par Leibniz de l'argument ontologique de Descartes

Nous allons passer un certain temps à analyser cette critique, à analyser ensuite une critique de cette critique pour en reverser les acquis sur des questions de philosophie des mathématiques.

Des diverses critiques dirigées par Leibniz, contre la philosophie de Descartes, l'une des plus connues est celle qu'il a faite de la célèbre preuve de l'existence de Dieu. Cette critique s'articule de la manière suivante : la preuve, bien qu'excellente aux yeux de Leibniz, souffrirait d'un défaut radical : pour que Dieu soit possible, puis existe, il faudrait d'abord vérifier que l'idée de Dieu, prise en elle même, n'enveloppe aucune contradiction.

1) En effet, c'est la première condition pour que, de l'idée d'un être souverainement parfait, on puisse déduire légitimement qu'il existe. En d'autres termes - *contre la clarté comme critère* —, Leibniz critique le préjugé favorable tiré de l'apparente clarté de la notion du parfait. « Celle-ci ne saurait suffire », dit-il. Et il oppose directement des exemples de notions très claires et pourtant contradictoires, comme le plus grand de tous les cercles, ou le mouvement de la dernière vitesse.

2) *Défense d'une condition nécessaire*. Il fallait apporter une preuve en règle de la possibilité de Dieu. Or, Descartes, abusé par le critère insuffisant de la clarté de nos idées, a commis la faute logique de ne pas s'en soucier.

3) L'accusation de sophisme — selon Leibniz lui-même — est tout de même injustifiée. Tout ce que l'on peut dire, c'est qu'il faut corriger la preuve, puisqu'elle est imparfaite.

Faisons une parenthèse, une remarque. C'est sur ce point précis que s'enracinent les profondes oppositions qui sont à l'origine des querelles entre l'école formaliste hilbertienne et les intuitionnistes. Elles ont, dans un certain sens, tourné autour de la définition absolue et *critérante* pour l'existence des idéalités mathématiques. Pour les formalistes, *en réponse à une exigence interne envisagée comme l'absolu critère par soi de la vérité*, l'existence est identifiée à la non contradiction. Pour les intuitionnistes, au contraire, on pose l'insuffisance en tant que telle de ce critère. La condition est nécessaire, bien évidemment, mais elle n'est pas suffisante.

Analysons de manière un peu plus serrée l'*option* formaliste et la *réponse à l'exigence* que l'option formaliste *se propose* de produire.

Si l'interlocuteur privilégié de l'être est le symbole, si les systèmes formels, une fois posée leur structure axiomatique, deviennent en eux-mêmes un objet d'étude, avec une morphologie propre, alors, dans une perspective métathéorique, on est en droit et une fois de plus tenté de leur attribuer une existence complètement *dessaisie* des principes d'origine. Que la contradiction implique la non existence, c'est une exigence qui va de soi. Inversement, si l'on peut, d'après Hilbert, démontrer que les attributs conférés à une notion ne peuvent jamais, par l'application d'un nombre fini de réductions logiques, conduire à une contradiction, « je », dis Hilbert, dirai que l'on a ainsi démontré *l'existence mathématique* de la notion en question. Ceci appelle deux commentaires.

1) Il ne s'agit nullement d'un théorème mathématique d'existence, mais il est question d'un *principe non philosophique*, et il faudrait ajouter : *non mathématique*, d'accession à l'existence. C'est d'une certaine façon un *principe métamathématique non précisé*. Non précisé, car encore relatif. Le système axiomatique de référence peut en droit et en fait varier. Il n'est pas question d'engendrer une multitude de systèmes axiomatiques sans lien unificateur, et de définir l'existence mathématique en la spécifiant en fonction du domaine dans lequel elle se dévoilerait. Mais *l'interrogation* porte bien en effet, à l'horizon, sur la *constitution* d'un système mathématique *réduit* aux principes minimalement nécessaires, et l'existence toute mathématique prendrait tout simplement place au sein de ce tout, aisément scrutable et non contradictoire, à la manière d'une brique supplémentaire dans l'édifice. Toute notion existe mathématiquement, du moment qu'elle est non contradictoire.

2) *L'existence mathématique, comme dérivé non ontologique du système formel.* Cette charge d'accession à l'être est *reportée* sur la position antécédente d'un système formel, pour être simultanément et dans le même ordre de pensée, *déportée* et déchargée de sa position et de sa prétention à l'être. Le système lui-même est soumis au même critère : l'existence équivaut à la non contradiction. On a position et positivité de l'axiomatisme, *dessaisissement de la problématique de l'existence*, puisqu'on a identification de l'existence avec la consistance, objectivation dans le formel étudiable comme tel. La condition nécessaire pour le possible s'érige en critère. Seule l'arithmétique est à examiner : la consistance des mathématiques tout entières s'y ramène, et cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant.

Cette exigence de dessaisissement constitue ce que nous appelerons une *autonomie dessaisie de tout critère* pour l'existence.

Revenons aux intuitionnistes. Ainsi, nous avons retrouvé une application particulière du principe leibnizien « *l'essence est la raison suffisante de l'existence* », ou « *la possibilité de l'essence implique son existence* ». Les intuitionnistes ou les constructivistes sont en général d'un autre avis. Ils refusent la résorption de l'existence dans l'essence — mais pour quelle raison exactement ?

Les intuitionnistes *maintiennent* qu'il faut un *acte* pour passer de l'essence à l'existence.

Cet acte, qui a été thématisé par St Thomas, cet acte qui a été thématisé par Hegel, est chez eux ce qu'ils appellent l'*intuition* ou la *construction*. Ils supposent de plus un sujet de conscience, une liberté, un arbitraire apparent. L'acte chez Platon peut être identifié à l'idée du Bien producteur de l'être. L'acte chez St Thomas D'Aquin est divisé en deux actes. Le premier acte est le suivant : la forme est cause constitutive de la substance. Le deuxième acte ajoute à ce premier acte un acte qui fait que la substance existe. Et l'acte que nous allons essayer de considérer et dont nous allons essayer de formuler la structure est cet acte que nous appellerons la *naissance des synthèses*.

Dans l'intuitionnisme brouwerien, la cause efficace des entités mathématiques est le mathématicien. On pourra diviser les deux critères, formaliste et intuitionniste, en parlant d'*existence logique* pour le critère qui ne relève que du principe de non contradiction, en terme imagé, d'un « germe d'existence ». Au contraire, du point de vue constructiviste ou intuitionniste modéré, on accorde que la contradiction est preuve de non existence, mais il faut reconnaître que *le principe de contradiction empêche sans qu'il ait aucun pouvoir d'engendrement*.

Fermons la parenthèse sur la liaison entre la philosophie de Leibniz et la tentation formaliste d'identifier, pour se dessaisir du problème philosophique, l'existence à la non contradiction, et revenons à la critique de la preuve ontologique cartésienne.

5. La preuve ontologique cartésienne

Leibniz critique la mineure. Il dit que cette mineure, qui s'énonce de la façon suivante : « l'être dont j'ai l'idée est l'être tout parfait, c'est-à-dire un être dont la nature enveloppe toutes les perfections. » Leibniz demande la preuve de la mineure et la déclare impossible. Il faut renoncer à saisir aucun lien d'identité, aucun lien analytique entre l'être et le parfait. De l'idée que nous avons de toute la perfection, nous ne saurions tirer ce qu'elle ne contient pas, à savoir l'existence. Selon Leibniz, cette notion de parfait est donc inutile, elle rend de plus précaire la preuve cartésienne. L'idée de perfection dans la pensée de Descartes n'avait d'autre but que de nous faire saisir une liaison indissoluble dans la nature de Dieu entre son essence et son existence. Omettons donc l'idée de perfection, inutile à la preuve, et raisonnons de la manière suivante :

Ens de cujus essentia est existentia necessario existit
Deus est ens de cujus essentia est existentia
Ergo Deus necessario existit.

Est-ce à Leibniz que revient l'honneur d'avoir remarqué la nature synthétique qui affirme l'existence de l'être tout parfait ? À quoi tend tout l'effort de Leibniz ? Non, à coup sûr, à concentrer la preuve dans cette première synthèse, mais au contraire à l'en débarrasser comme d'un élément qui ne fait qu'en ruiner la force démonstrative. *Sa correction : substituer à l'être parfait, l'être par soi, l'ens per se, n'a d'autre effet que de rendre analytique au suprême degré l'argument cartésien et d'en faire disparaître, du moins en apparence, toute trace de synthèse.*

Selon Leibniz, le passage de l'essence à l'existence s'effectue de lui-même, pourvu que l'on établisse la non contradiction de l'idée de l'être par soi. Pour prouver que Dieu existe, c'est assez de démontrer seulement qu'il est possible. Comme dit Leibniz, nous disposons ici de l'unique modale qui jouisse du privilège d'atteindre l'existence. La parfaite convenance logique de la notion du triangle n'entraîne pas qu'il existe, ni qu'il soit possible qu'il existe en fait un triangle conforme à la définition géométrique.

Mais revenons à Leibniz. Selon Leibniz, le vrai logique *exprime par l'avance* toute la réalité de l'être, en même temps qu'il la fonde et la rend possible. À la réalité de l'essence, l'existence n'ajoute rien qui se puisse définir.

Cette critique de la preuve ontologique cartésienne peut être critiquée en suivant Hannequin en deux moments. Le premier moment va faire la distinction entre la possibilité logique et la possibilité réelle. Avec Hannequin, on va se demander s'il est juste d'accuser Descartes de s'être soustrait au devoir de prouver la possibilité de Dieu, voir même de l'avoir complètement méconnu.

On écourtera le premier moment et on se contentera de dire qu'il faut poser qu'il y a une distinction entre les définitions nominales et les définitions réelles. Distinction qui a d'ailleurs été introduite par Leibniz. Nous avons deux sortes de notions. Celles qui ont un objet dans une essence réelle, dans un intelligible, dans une vérité, et qui sont vraies par là même. Et celles qui, au contraire, n'ayant pas un tel objet, dépendent en quelque façon, sinon tout à fait, de l'arbitraire de l'esprit. *Ainsi, toute la question est de pouvoir déterminer si, à ce que nous appelons une idée de notre esprit, correspond en quelque façon une essence réelle qui en assure à la fois la consistance et l'existence.* Ceci nous rapproche de la critique de Kant. Selon Kant, l'être n'est pas un prédicat réel : « Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles, car sinon, mon concept n'exprimerait plus l'objet tout entier, et par conséquent, il n'y serait plus conforme. » Si vous ne posez que l'idée, tout prédicat de l'idée, fût-ce l'existence, n'appartient qu'à l'idée, mais nullement à la chose, et alors l'attribution en devient manifestement une tautologie. En même temps que l'idée, il faut donc poser l'être que représente l'idée.

La thèse de Kant sur l'être est une thèse de position de l'être.

On y reviendra. Répétons-le : la thèse de Kant sur l'être — et cela est emprunté à Heidegger — est une thèse de position de l'être.

Passons au deuxième moment de la critique de la critique de Leibniz, qui s'enracine dans le lien démonstratif et exhibe nettement la nature synthétique de la preuve ontologique. Si Dieu est possible, reste à prouver qu'il l'est réellement. Leibniz ne croit pas utile ce supplément de preuve. D'ailleurs, oui, il est superflu, si l'on part de la définition de Dieu comme « l'être par soi », ou encore « l'être nécessaire. » Mais Descartes, en partant de la définition de Dieu conçu comme tout parfait, assumait deux charges :

1) celle d'établir qu'il est possible que l'idée que nous en avons n'est pas une pure idée mais enveloppe une essence,

2) et celle de montrer que par un privilège unique, cette essence enveloppe au surplus l'existence.

6. Vers le dévoilement des synthèses

On l'a dit à l'instant : ce qui fait que la chose est ce qu'elle est est indépendant de son existence ou de sa non existence. C'est donc ce qui est de l'ordre du concept par opposition à ce qui est de l'ordre du donné, du sensible, ou de l'existence. Rappelons qu'il y a une opposition dans le discours que nous tenons, une opposition capitale et réelle entre l'être et la pensée, entre l'être et le concept, opposition qui est au fondement de toute la philosophie de Heidegger, et ici, ce que nous essayons de faire, c'est de m'amener progressivement vers le *dévoilement des synthèses* dans les preuves d'existence, et d'éviter de les rendre analytiques. Mais nous allons terminer sur Descartes, parce que quelque chose va considérablement s'éclaircir à ce sujet, et ensuite, on pourra enclencher sur la philosophie de Lautman et interroger véritablement ce qu'il en est des synthèses au niveau de la mathématique. Puisque nous sommes engagés à parler des théorèmes d'existence en mathématiques, donc des preuves d'énoncés qui dérivent de certaines données, donc des liens synthétiques qui nous font accéder au synthétisé, nous devons analyser conceptuellement ce qu'il en est de cette existence mathématique synthétisée.

D'où vient que Leibniz se croyait en état de se passer de ce second moment ? En dépit de l'apparence, il n'y a pas identité entre l'être par soi et

Dieu, qui n'est pour nous que l'être tout parfait. L'être de Dieu n'existe qu'autant qu'il a la force d'exister par soi, autrement dit, d'être *causa sui*, et cette force, seule sa richesse infinie, son absolue perfection, selon Descartes, peut en rendre compte. Par conséquent, c'est la perfection seule qui peut donner à l'être nécessaire la *force d'exister par soi*. Ce n'était donc pas assez de prouver la possibilité de Dieu, il fallait en outre établir la liaison indissoluble dans sa nature de l'existence et de la perfection. Leibniz, en corrigeant le syllogisme cartésien, a pu croire identifiables l'être nécessaire et l'être parfait. Quand on raisonne ainsi que Leibniz, le nerf de l'argument semble résider dans l'identité, au sens logique du mot, de l'existence et de la perfection. Mais il faut reconnaître que c'est Leibniz qui, le premier, non seulement a contesté cette mineure, mais a découvert le motif véritable qui la rend contestable. L'existence, en effet, il est vrai, ne saurait passer pour une perfection. Rappellons la critique de Kant : « Cent thalers réels ne contiennent rien de plus que cent thalers possibles, car sinon, mon concept n'exprimerait plus l'objet tout entier, et par conséquent, il n'y serait plus conforme. » Donc, ou bien le lien est nul entre la perfection et l'existence, ou, s'il est très réel, et s'il n'est point analytique, il reste à reconnaître qu'il est synthétique, et à le justifier. On pourrait aussi faire un rappel sur la théorie des possibles chez Leibniz, qui s'organise autour d'une *tendance à être*, et il n'est pas étonnant dans ces conditions que Leibniz ait fait converger ses efforts pour mettre cette synthèse hors de l'argument.

Mais revenons à Descartes. La nature de ce lien, qui est un lien synthétique de convenance ou de raison, Descartes l'aurait-il méconnue ? Et bien, nous allons essayer de nous en tenir à la conclusion que, pour Descartes, comme pour Leibniz, l'attribution de l'existence à l'être tout parfait ne se fait point en vertu du principe d'identité, mais en vertu du principe de raison suffisante, et le jugement qu'il affirme n'est point analytique, *il est nettement et franchement synthétique*.

La vérification du fait que le lien est non analytique est presque tout immédiate. Comme le dit Descartes, dans l'idée ou le concept de chaque chose, l'existence est contenue, parce que nous ne pouvons rien concevoir sous la forme d'une chose qui n'existe pas. Une opposition forte entre le concevoir, le concept, et l'existence, une inconcevabilité de l'existence, qui, comme nous le rappelions, mine Heidegger philosophe au travail. Mais avec cette différence que dans le concept d'une chose limitée, l'existence possible et contingente est seulement contenue, et dans le concept d'un être souverainement parfait, la parfaite et nécessaire y est comprise.

Résumons ces deux moments. Deux jugements réellement synthétiques doivent être maintenus dans la preuve de l'existence de Dieu. Pour que cette preuve soit une démonstration, il faut que l'on puisse affirmer deux rapports.

D'une part, celui de l'existence et de l'idée, d'autre part, celui de l'essence et de l'existence. Et ces deux rapports enveloppent chacun une synthèse irréductible. La faute de Leibniz vient donc d'une intention formelle d'améliorer l'argument, non en lui restituant les formes synthétiques sans lesquelles il n'a plus de portée, mais en les excluant.

La philosophie de Descartes, il faut le rappeler, est une *philosophie synthétique*. Elle l'est pour deux raisons. *Parce qu'elle fut inspirée par les mathématiques*, et surtout, *parce qu'elle est une philosophie de la volonté.* Sous les marques de la synthèse, le possible ne se révèle à nous que par l'action et sous l'aspect des lois de la volonté. L'absolue volonté ne trouve pas en elle d'absolue vérité, elle *crée*, sans s'y subordonner, les relations logiques en posant des synthèses qui soutiennent l'analyse, et ces dernières donnent à la logique et à la vérité leur contenu réel et leur fondement premier. *Les formes de la synthèse, les marques de la synthèse, ne sont reconnaissables qu'une fois parcouru le chemin qui sépare les hypothèses insuffisamment dessinées de la conclusion révélée sous l'aspect des lois de la volonté.*

Cette seule phrase pourrait nous mettre en communication avec avec la lune cachée de l'oeuvre de Cavaillès.

L'élément clé dans une preuve d'existence réside dans la naissance des synthèses. C'est ce que nous allons voir à l'oeuvre, analysé et interprété au contact des mathématiques contemporaines, notamment celles où se jouent de véritables *questions d'existence*, et nous insisterons sur le terme *questions*, *véritables en ce qu'elles ne sont reconnaissables et corrélatives que de la constitution de synthèses démonstratives et irréductibles.* Elles sont d'un aspect forcément plus complexe que les preuves de l'existence qu'ont produites jusqu'à nos jours les métaphysiciens.

7. Schémas de genèse

Pour commencer à caractériser ces schémas de synthèse, autrement dit, les schémas de genèse, faisons un exposé de la philosophie de Lautman. Un bref rappel, disons, allant à l'essentiel de ce qui a travaillé Lautman.

Nous allons donc partir d'un exemple mathématique traité par Lautman. Ajoutons d'emblée que nous nous démarquerons des réserves philosophiques usuelles concernant la puissance d'engendrement des idées dialectiques lautmanniennes : pour restituer l'évocation fondamentale des réalisations mathématiciennes, le philosophie hésite, choisit, propose. Sa solution n'occulte en rien le rapport universel des mathématiques à un réel prétexté auquel elles confèrent l'expression.

Chez Lautman, il y a une dialectique des idées qui est *ontologiquement constituante*. Le rapport entre les idées et les théories qu'elles réalisent est un rapport qui est analogue au rapport entre l'ontologie et l'ontique chez Heidegger. La philosophie transcendantale de Jean Petitot pose que l'ontologie est identifiable à la constitution d'objectivité mathématique ou d'objectivité physico-mathématique.

Chez Lautman, on trouve majoritairement une philosophie des problèmes. Philosophie méconnaissable, par conséquent, refoulée, ignorée, travaillée elle-même par un faisceau de questions muettes qui l'inscrivent d'emblée dans une relation ambiguë avec la tradition critique. Avant d'être génératrices, les idées dialectiques sont purement problématiques, donc incomplètes. Il y a une intuition extra-mathématique de l'urgence d'un problème. Le projet philosophique général de Lautman est de *retrouver* au sein d'une théorie mathématique *le problème logique qui se trouve à la fois défini et résolu par l'existence de cette théorie.* Les idées problématiques s'incarnent et passent sous la forme de théories réalisées, de la même façon que l'essence passe dans l'existence. Lautman le dit explicitement. Rappellons la difficulté philosophique qu'ont rencontrée tous les métaphysiciens pour *penser* ce passage impensable de l'essence à l'existence. Mais Lautman le pose comme un passage qui ne pose pas véritablement de problème. (Au fond, toutes les critiques de la philosophie de Lautman se résument à une réexpression des réserves que l'histoire de la philosophie a pu émettre à l'encontre de l'ontologisation (Platon) ou de la propositionnalisation (Aristote) des questions socratiques.) Pour Lautman, ce passage est redevable de la *compréhension*, laquelle devient la source de la *genèse* des théories réelles. Il y a d'une certaine façon incarnation des idées dans des théories. Lautman effectue d'ailleurs des rapprochements avec la différence heideggerienne entre l'étant et l'être. Par après, il y a *transformation de la compréhension en genèse*. Transformation et articulation entre la transcendance des idées et l'immanence de la structure logique de la solution d'un problème mathématique donné. Ce lien, la possibilité de l'articulation, c'est la genèse qui nous le donne. Citons Lautman : « *l'antériorité de la dialectique est celle du souci ou de la question* » (ce que nous traduisons maintenant dans l'oeuvre de Heidegger en français par le *digne-de-question*) « *par rapport à la réponse* ».

> Il s'agit d'une antériorité ontologique, pour reprendre l'expression de Heidegger, exactement comparable à celle de l'intention par rapport au dessein. Le philosophe n'a ni à dégager des lois, ni à prévoir une évolution future, son rôle consiste seulement à prendre conscience du drame logique qui se joue au sein des théories. Le seul élément a priori que nous concevions est donné dans l'expérience de cette urgence des problèmes antérieurs à la découverte de leurs solutions. [**267**]

8. Les théorèmes d'existence vus par Albert Lautman

Cette genèse des genres de l'être, Lautman l'illustre de manière explicite : l'intention de Lautman est de montrer que l'achèvement d'un être s'affirme dans son pouvoir créateur. Cette thèse implique deux aspects réciproques : le premier aspect est celui de l'essence d'une forme se réalisant au sein d'une matière qu'elle crée. Ce premier aspect s'enracine dans les systèmes logiques constitués et Lautman l'analyse à part entière. Le deuxième aspect est le suivant : l'essence d'une matière faisant naître les formes que sa structure dessine. Cet aspect est le plus intimement relié aux théories mathématiques standard. Mais les schémas de genèse décrits par Lautman abandonnent l'idée trop simpliste de domaines concrets et d'opérations abstraites. En effet, cette conception fixiste tendrait à stabiliser les êtres mathématiques dans un rôle immuable, elle ne rendrait pas compte du mouvement de *thématisation*, au sens où l'entend Cavaillès. Par conséquent, ce n'est qu'au sein d'un problème déterminé que l'on peut assigner des fonctions distinctes à des genres de l'être différents. Comme exemple de domaine privilégié de l'existence, Lautman aborde la théorie des fonctions algébriques de Riemann, la théorie du corps de classes de Hilbert et la théorie de la représentation des groupes de Weyl, les deux dernières représentant des théories relativement récentes à l'époque de la thèse de Lautman.

Expliquons le deuxième rapport, qui est, comme nous l'avons dit : l'essence d'une matière faisant naître des formes que sa structure dessine. Et présentons le schème général : c'est un cas où la *structure* d'un domaine est immédiatement interprétable en termes d'existence pour certaines fonctions définies sur ce domaine. Il pose la thèse suivante : la structure préforme l'existence d'êtres abstraits sur le domaine que ces structures définissent. Soit une fonction algébrique d'une variable, à laquelle Riemann a été d'une certaine façon contraint à associer un objet radicalement nouveau, que nous appelons aujourd'hui la « surface de Riemann » de la fonction, et qui est constituée d'un certain nombre de feuillets soudés en croix le long de certaines coupures. Par déformation, on peut se ramener à un disque à deux faces percé de p trous, bref, topologiquement un tore à p trous, et on note S cette surface de Riemann, sur laquelle il y a $2p$ rétrosections.

Le problème du rapport de la structure à l'existence est issu d'un *problème inverse* qui a été posé et résolu par Riemann. Nous pourrions digresser interminablement sur les potentialités inavouables de l'*inversion* comme éveil de la problématicité mathématique. Laissons-les s'exprimer librement ici. Riemann se donne une surface arbitraire et se pose la question de savoir s'il existe une fonction algébrique dont cette surface soit la « surface de Riemann. » Insistons sur la question spécifique de Riemann : étant donné la condition d'apparence d'un être, savoir, en dessaisissant cet être de ses conditions d'origine, si ce que l'on a construit à partir de ces données effectue le lien complet et satisfaisant avec la structure décisive que l'on a pu poser *a posteriori*. C'est l'aspect qui a travaillé la lecture cavaillèssienne de la théorie cantorienne des ensembles. Toute l'analyse que le philosophe des mathématiques a eu le bonheur d'écrire dans sa deuxième thèse a consisté à mettre en lumière le fait

1) d'une part qu'il y a une différence de potentiel entre les conditions suffisantes pour l'expression en termes de séries trigonométriques de certaines classes de fonctions et celles qui seraient nécessaires mais qui naviguent encore dans l'ombre,

2) d'autre part, que par un hasard mystérieux, par un effet de clôture imprévisible, ce hiatus s'incarne parfois dans la position de domaines d'existence prétextée ou dans des caractérisations entièrement satisfaisantes.

Son analyse vise a essayer de comprendre philosophiquement comment Riemann, comment Dedekind, comment Lebesgue sont parvenus à faire disparaître cette différence de potentiel entre des faisceaux de conditions insuffisamment dessinées, sur quelques problèmes précis, dont la nature, sans que rien ne puisse le laisser prévoir a priori, invitait à une « cloturation », problèmes qui, enfin, restent déposés dans la tradition comme autant de *synthèses irréprochables* sur le plan de la pensée mathématique pure. La théorie des fonctions algébriques s'inscrit donc encore dans cette philosophie des mathématiques conceptuelles.

Le théorème de Riemann consiste à faire naître de la structure topologique un nombre déterminé d'intégrales abéliennes de première espèce. Le théorème énonce : *le nombre des intégrales abéliennes de première espèce linéairement indépendantes est égal au genre* g *de la surface* ($g = p$). La structure topologique induit donc l'apparition d'intégrales abéliennes partout définies sur la surface. L'argument consiste à faire une rétrosection sur la surface. Il y a de manière sous-jacente un théorème crucial d'existence pour une fonction potentielle à pôle logarithmique fixé. Et il y a une version topologique qui permet d'en rendre compte. La rétrosection est un acte topologique — naturel et irréprochable. On découpe la surface de telle façon que le morceau qui reste soit simplement connexe, et à ce moment-là, on peut définir partout une intégrale abélienne. Ainsi, comme annoncé, il y a une *liaison*, sur le plan des *virtualités de désignation et de découpe gestuelles*, entre la structure topologique de la surface et l'existence de l'intégrale abélienne définie partout sur la surface.

Lautman l'analyse de la façon suivante : il dit qu'on voit dans cette théorie l'importance du découpage canonique de la surface. La surface brute ne laisse rien apparaître sur elle. Par contre, la structure topologique simplifiée qu'elle reçoit de ses rétrosections possibles la rend apte à une *création fonctionnelle.* Le *moment précis de la genèse* réside dans l'*acte* par lequel on confère à la structure une *double interprétation* : d'abord rendre la surface simplement connexe, ensuite en repérant les sauts de certaines expressions fonctionnelles. Ces dernières répartissent à l'avance ces intégrales sur la surface. La thèse est la suivante : le *passage à l'existence* devient ainsi et plus généralement aussi, une *liaison*, une synthèse peut-être, ou plutôt, une réflexion, un basculement, voir une trappe ?, mais au moins, Lautman dit : *une liaison entre la décomposition structurale d'un être et l'existence d'autres êtres que cette décomposition fait naître.*

En fait, cette liaison est ce qu'il y a de moins clair possible. *C'est la liaison qui est elle-même en question, c'est la liaison qui mérite d'être interrogée.* On peut et on doit aussi l'envisager comme une *traduction* fonctionnelle d'une structure topologique dans une structure algébrique ou dans une structure analytique. Alors finalement, et pour finir, oui, ce passage à l'existence pourrait *aussi* être analysé comme un passage qui n'est pas vraiment un passage à l'existence, car au fond, peut-être bien que chaque chose « désexiste » aussi facilement qu'elle a existé, mais que ce *quid passagium* est plus fondamentalement quelque chose qui est *travaillé* par la *nécessité* de *poser des conditions*, nécessaires, suffisantes, ou de caractérisation. On reviendra sur cette suggestion. La naissance des genres de l'être à partir des domaines d'existence chez Lautman pourrait fort bien échouer ici dans son intention de caractériser complètement cette liaison comme révélatrice ou démonstrative d'*existence.* Non pas seulement pour les raisons de philosophie qui se rallient à la théorie de l'intention rationnelle que nous venons d'évoquer plus haut, mais parce que cette liaison vit comme un château suspendu, nul ne sait à quoi, sur l'océan !, comme les diagrammes que voici.

9. Les schémas de genèse de Lautman

Il en distingue essentiellement trois. L'existence d'un être émerge de la décomposition structurale d'un domaine de base, c'est la thèse que nous venons d'énoncer. Ici, la structure préforme l'existence. Le deuxième schéma de genèse qu'il distingue est un *mixte* : l'existence d'un être découle de la constitution d'un ensemble qu'il contient avant même qu'on sache l'y voir. Ce schéma de genèse est explicitement relié à la naissance des espaces de Hilbert, en relation avec les travaux de Hilbert pour résoudre les *équations intégrales* à l'aide des méthodes L^2. Dans cet ordre d'idées, l'existence d'un être résulte de la *sélection* d'un élément distingué par ses propriétés *exceptionnelles*. L'extremum détermine ici l'existant.

Revenons sur cette *liaison*. Nous allons maintenant faire un bilan *en questions* de la présentation de Lautman. La liaison en fait, ne situe que le fondement de ce qui se passe dans les mathématiques, la chose que l'on ne parvient pas à thématiser, l'incompréhensible. Cette liaison entre la décomposition structurale et l'existence d'autres êtres mathématiques doit être interrogée selon deux veines qui se divisent selon la relation qu'elles entretiennent avec la dialectique de l'*a priori* et de l'*a posteriori*. Il y a une première veine, qui rassemble les *questions d'émergence.* Ces questions sont reliées aux travaux de Gilles Châtelet et à la philosophie des semi-intuitionnistes français, c'est la question de savoir s'il y a une clause intuitive constituante, si l'on peut parler d'un *jaillissement* à partir d'une structure qui *capte* les êtres à l'avance, ou prégnance générale d'un *imprévisible*. Savoir si l'on peut parler de constitution de cette liaison à travers et par un *geste*, ou une *découpe*. Un deuxième ordre de questions, qu'on dira d'inspiration rationaliste, disons même *problématologique*, en référence à la philosophie de Michel Meyer, et qui sont les suivantes : faut-il attendre un resserrement des conditions équivalentes pour dominer complètement la liaison, c'est-à-dire attendre de savoir que, à une structure topologique donnée correspond exactement un espace d'intégrales abéliennes de première espèce, et que cette liaison soit dominée complètement et que l'on sache qu'il n'y a aucun intervalle qui sépare l'existence des intégrales abéliennes et la structure topologique, donc une correspondance entièrement satisfaisante entre deux visions mathématiques. Évoquons une autre question : le passage est-il corrélatif de l'actualisation d'une rigueur ? C'est une question qui est complètement insoluble, pensons-nous. D'ailleurs, l'entreprise de ce qu'on appelle aujourd'hui l'*histoire des mathématiques* navigue et se débat avec et dans cette question. Dans quelle mesure l'imitation fonctionnelle d'une propriété topologique constitue-t-elle *au sens propre une preuve d'existence ?* Cela aussi, à mon sens, c'est une question importante, dirimante.

Dans ce qui va suivre, on va donc se proposer comme but de comparer les schémas de genèse lautmaniens avec les *schémas explicites de dérivation d'existence*, tels qu'ils se dessinent dans la mathématique contemporaine. Et ce que nous allons dire, c'est qu'il y a un *passage à l'explicite* — on va essayer de l'illustrer sans le théoriser véritablement — qui est radical, restrictif, nécessaire, par exemple pour des théorèmes comme ceux issus du problème de Dirichlet, le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Kowalewskaïa, les estimées de Schauder, les opérateurs elliptiques, les théorèmes d'existence dus à Hörmander, ou un théorème géométrique d'existence avec création d'homologie dû à Gromov.

Il y a un passage à l'explicite qui est radical, restrictif, et ressoulève de nouvelles questions. On dira de ce passage à l'explicite qu'il est *assimilable à une prise de conscience de l'ordre du concept.*

Posons la question de l'existence en mathématiques en général. Au total, il y a deux sens du mot *exister*, plus exactement de la question d'existence, appliqué aux mathématiques. Il y a un sens métaphorique, un sens impalpable, ce sens se ramène à une possibilité de définition en liaison avec des théories antérieures et les questions par exemple sont de l'ordre : existe-t-il des géométries non euclidiennes, existe-t-il un nombre x tel que $x^2 = 1$? Et ces questions signifient en fait : peut-on adjoindre par des postulats nouveaux un X, un inconnu ? Nous estimons que la pensée de cette liaison est redevable d'une philosophie du possible en général. Et elle est profondément difficile, parce qu'elle repose sur des problèmes qui sont implicités par eux-mêmes. Donc on a auto-référence et imprédicativité philosophique dans ce genre de questions. Mais il y a un sens intra-théorique qui est plus facile à thématiser, puisque le rapport à la philosophie du possible n'y est plus primordial. Il est défini à l'intérieur d'une théorie, à la différence du premier. Il s'applique aux objets de cette théorie et les questions sont de l'ordre : existe-t-il un point, un nombre, une fonction, une clôture, un espace, un revêtement, etc., tel que (C), parmi les objets de la théorie, où (C) est une *condition* quelconque, faisant ou ne faisant pas sens. Ce deuxième sens, le sens intra-théorique, est clairement relié aux théorèmes d'existence en mathématiques. Dans ces conditions, il faudra dire que le sens intra-théorique *dérivatif* (au sens ou dériver = fournir une preuve, démontrer, montrer, prouver) de l'existence d'entités mathématiques est *irréductible à la notion de possible*, et nous pensons que c'est là une *première gradation à l'explicite.*

Revenons à l'*existence mathématique*. Elle se distribue en deux ordres divisés. Un ordre qui a plus profondément rapport avec l'association des deux termes « philosophie et mathématiques », et un ordre qui a plus profondément rapport avec le syntagme nominal « philosophie des mathématiques ».

Le premier ordre, la première veine de questions, est une veine qui a été très largement considérée, à la suite de l'oeuvre de Cavaillès, par l'école française de philosophie des mathématiques. L'autre aspect, qui est plus intra-théorique et qui est plus technique, a été quasiment exclusivement considéré par Cavaillès et Lautman. On a une réflexion dans le premier ordre sur l'objectivité mathématique. Ou sur le type d'être qui revient aux entités mathématiques. Ce sont les options que développent respectivement Jean Petitot et Jean-Michel Salanskis. Dans cette galaxie, s'inscrivent des débats entre idéalisme, réalisme et positivisme, ou entre intuitionnisme, formalisme et logicisme. Ces débats ne sont pas exclusivement redevables de ce qui se passe dans les mathématiques, mais sont vraiment co-impliqués par des problématiques philosophiques générales. Et ce type d'existence aboutit à une thèse de l'existence comme position de l'être. Nous retrouvons — miraculeusement — la thèse kantienne : l'être ne peut être qu'un être posé. Et donc les réflexions, les problèmes philosophiques qui se posent en mathématiques dans cette veine, sont des réflexions qui se posent la question de l'utilité ou de l'adéquation d'un système formel, de son rapport à la vérité. Nous retrouvons toutes les problématiques de l'axiome du choix, du continu, nous retrouvons la philosophie de Gödel, spectre de platonisme décisionnel obscur et troublant. Ces questions dont redevables d'une problématique philosophique universalisable.

Dans un autre ordre d'idées, qui va nous conduire à ce que nous avons appelé la *naissance des synthèses*, il y a un *implicite pur de la question* qui peut, en droit et en fait être *opposé* à un *explicite méthodologique*. On va y revenir sur des exemples précis qui déclenchent, au second ordre, un débat sur la préexistence et sur la convergence inter-harmonieuse des méthodes, laquelle fait naître de nouvelles problématiques, si l'on constate cette unité cohérente des mathématiques. *Le problème du rapport entre une intuition constituante et le projet déductif est présent ici*, et c'est l'aspect des synthèses qui est ici crucial en ce qui concerne l'existence mathématique. *L'existence des objets mathématiques*, comme l'a écrit Cavaillès, *est corrélative de l'actualisation d'une méthode.*

C'est ce genre de problématique sur les synthèses qui est présent quand on parle de résultats virtuels, de résulats conjecturaux, quand on « sent » qu'on a un résultat, mais qu'on ne l'a pas encore, qu'on sent que les choses sont vraies, mais qu'on n'arrive pas à les formuler. L'aspect de la synthèse est présent dans la conjecturalité en mathématiques, mais, pour ainsi dire, bénéficiant d'un langage supérieur au langage formulaire. Et nous pensons que le problème de l'existence doit être posé en relation avec la conjecturalité. Nous revenons donc sur *l'acte, la virtualité et la puissance des synthèses*, et ceci nous tire peut-être en direction de questions universalisables.

Rappelons la comparaison entre la structure assez réduite des preuves d'existence, comme les preuves de l'existence de Dieu des métaphysiciens, qui se ramènent finalement à des syllogismes *assez courts*, et en revanche la structure synthétique étendue, qui incorpore des strates d'idéalisation et de thématisation, dans les théorèmes d'existence en mathématiques.

Voici un diagramme qui permet de voir certaines réalisations de l'être comme être posé dans les mathématiques, incorporant des exemples. Nous sommes partis de la thèse de l'être comme position de l'être, comme existence de structures posées, structures qui existent parce qu'elles sont posées. Le dialogue avec les prétextes de la position est très actif quand on parle de la théorie des ensembles, de l'arithmétique des nombres entiers, de l'arithmétique primitive récursive. En analyse, cette thèse de position de l'être débouche sur plusieurs notions d'espace topologique, par exemple : les espaces de Banach, de Fréchet, de Sobolev. On dispose de structures algébriques variables *ad libitulm*. On se contentera de rappeler, en géométrie, celles-ci : structure de variété différentiable, de fibrés vectoriels, principaux, notions de courants, de formes différentielles, etc. En géométrie analytique, on a des notions d'ensembles analytiques, semi-analytiques, sous-analytiques, et une condition de clôture renfermée dans un théorème dû à Gabrielov (d'après lequel la classe des sous-analytiques est stabilisée par les opérations ensemblistes élémentaires — on pourrait d'ailleurs interroger l'analogie entre le fonctionnement de la preuve en géométrie sous analytique, les gestes dont on apprend qu'ils constituent une stratégie théorique gagnante, notamment la *projection*, et la condition de clôture sous-jacente à la définition des ensembles récursivement énumérables : y trouverait-on une unité d'affaiblissement (la projection), congénitalement universelle, et scrutable par la pensée ?). Tout cela pour dire que *la thèse de position de l'être d'une structure est aussi redevable d'un relèvement synthétique* qui n'est jamais évident a priori.

Envisageons maintenant l'interrogation en direction de l'existence reliée à la naissance des synthèses. Profondément, la synthèse est une interrogation en direction de l'existence. Et cela, nous allons le montrer sur des exemples précis au sein desquels on verra s'introduire des *réalisations* qui elles-mêmes reposent sur des schémas démonstratifs, par exemple, pour les plus connus, schémas de convergence, d'approximation, de discrétisation, ou de régularisation. Ces synthèses sont présentes dans les résolutions d'équations différentielles, dans la théorie du spectre des opérateurs, et plus généralement, toutes les fois qu'interviennent des approximations. L'interrogation en direction de l'existence se réalise partiellement en posant des notions provisoires et arrive à *dominer son indécision devant l'existence* grâce à cette idée de convergence. Pour le dire de manière plus explicite, les équations aux dérivées partielles s'articulent autour de notions de positivité, d'« explicitité », d'ellipticité, d'hyperbolicité, de parabolicité, qui sont des conditions fortes et non dégénérées, donc qui se révèlent insuffisantes pour certains problèmes. Certaines méthodes utilisant de la positivité, appelées « inégalités L^2 » (Hörmander, Skoda, Sibony, Demailly, Ohsawa), donnent accès à des théorèmes d'existence très nombreux en géométrie analytique complexe, grâce à l'ellipticité de l'opérateur de Cauchy-Riemann. Mais cette interrogation en direction de l'existence se réalise sous forme d'autres synthèses, lorsqu'on a inscription dans la dialectique du local et du global. Elle se réalise avec l'idée de submersion, de transversalité, de stratification, d'éclatement, etc. Mais elles se réalisent aussi, de manière générale et transversale, sous la gouverne et la domination des idées d'invariant et de caractérisation. On a aussi des réalisations inattendues ou miraculeuses qui sont des raffinements de ces schèmes d'origine, qui sont des schèmes « en position générale », pour parler de manière métaphorique (entendons que les notions de submersion, de positivité, sont des notions fortes, « en position générale », coercitives, stables, au sens où, si on perturbe les données initiales du problème, il demeure encore résoluble, et avec les mêmes solutions à une petite perturbation près). Ainsi, en géométrie, peuvent se produire des raffinements des schèmes d'origine. Pour l'illustrer, citons les travaux de Mikhail Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, et un de ses théorèmes d'existence accompagné de création d'homologie pour une solution non triviale.

10. La question pure d'existence

La question de l'existence en mathématiques est tout simplement posée quand on se trouve devant des équations dont on ne sait rien. Le schéma général est le suivant : on rencontre certaines équations et on se pose simplement la question de l'existence de solutions.

Il y a une embryogénèse des synthèses dès que l'on se pose la question : quel type d'hypothèses vais-je pouvoir ajouter à mon équation pour qu'il y ait quand même des solutions, hypothèses hypothétiquement en relation avec l'existence d'invariants que je sache désigner à partir de ce que je ne sais pas. Envisagée à sa racine, cette interrogation est caractérisée par son *amorphisme*, elle est complètement *amorphe*, elle est sans forme, elle est sans structure, *et elle ne demande qu'à se réaliser*. Elle est vide, elle est nulle, elle est sans structure, elles est indécise, et elle est très profondément indécise, elle est préplatonicienne, elle est *socratique*. Nous ne savons pas ce que nous allons faire, nous savons seulement que nous ne savons rien et que nous devons ne pas oublier cette ignorance, sous peine d'inventer une méthode qui trahira la question d'origine. À la suite de Baire, de Lusin et de Lebesgue, on rappellera que *les hypothèses simplificatrices sont toujours des hypothèses faussement simplificatrices.* Cette éducation méthodologique, elle aussi, débouche sur l'être posé. On s'égare à nouveau facilement dans les territoires flous de la position de l'être. Parfois, l'existence est réalisée par position de structure, le continu est rédimé par la notion de complétude, laquelle est nécessaire pour pouvoir poser la convergence des processus itératifs. Mais pour ce qui est des théorèmes d'existence, en eux, les existences se réalisent *progressivement*. Et elles se *réalisent*, parce que, ce qu'elles réalisent progressivement, c'est que *traduire un théorème d'existence appelle le* *biais de l'explicite*, il faut *prendre levier sur des majorations*, avoir quelque chose de majorant, *une position de positivité scrutable à l'étape finale* — une propriété cruciale de positivité, ou encore des *propriétés de convexité* qui assurent des extériorités suffisantes entre certains compacts, ou encore des *conditions de transversalité*, des conditions différentielles qui puissent permettre d'aller plus loin dans les théorèmes d'existence, et maintenant se constituent des *maximes explicites* prêtes à la *reproduction* et au *redoublement*. Jean Leray résume tous les travaux possibles dans le domaine des équations aux dérivées partielles par sa maxime : « *résoudre, c'est majorer.* » Ensuite, il peut se produire une prise de conscience supplémentaire. Nous aurions voulu parler longuement de Lebesgue, l'un des mathématiciens qui a vraiment pris conscience qu'il faut *lire dans l'équation elle-même, dans sa structure même, la possibilité d'existence des solutions.* Lebesgue donne vie à une *exigence mathématicienne*, exigence au sens des lectures cavaillèsiennes des oeuvres de mathématiciens du début du vingtième siècle, et qui débouche presque toujours comme nous l'avons dit, sur des conditions de positivité explicites, mais qui, dans les travaux de Lebesgue, débouche sur les conditions minimalement suffisantes.

Enfin, après un dernier mouvement de prise de conscience, on peut poser des schémas explicites de dérivation d'existence. Ainsi le schéma standard de l'analyse des équations aux dérivées partielles consiste à traduire d'abord l'existence de solutions faibles et à récupérer ensuite l'existence de solutions fortes, c'est-à-dire de la régularité.

À partir de là, on assiste alors à un *ressoulèvement de questions pures d'existence*. Si les conditions ne sont pas les plus fines, en particulier, si elles sont trop non dégénérées, trop elliptiques, elles ne rendent absolument pas compte de l'existence de solutions de systèmes différentiels beaucoup plus généraux. Ainsi, le dessin de conditions explicites et positives ressoulève la question pure d'existence pour *répondre au besoin de généralisation*. Ce ressoulèvement des questions pures d'existence, par exemple, a été illustré en 1957, quand Hans Lewy a, le premier, parce qu'il en eut l'intuition, produit un contre-exemple : une équation aux dérivées partielles n'ayant aucune solution, à une époque où presque tous les spécialistes étaient convaincus ou tentés de penser que tout système linéaire d'équations aux dérivées partielles possédait toujours une solution non nulle. Toute question d'existence, dès qu'elle s'incarne, ressoulève la question et *retourne au moment où l'existence de la solution était imprégnée d'indécision*. Chaque propriété décisive est prétexte à une insatisfaction de la raison.

11. L'idée de déductibilité et les systèmes formels

On aurait pu mettre ces éléments en rapport avec un diagramme analogue que voici : l'incarnation progressive de l'idée de déductibilité, issue du discours et du raisonnement, issu du logos grec originel. L'interrogation du discours sur lui-même provoque des synthèses, provoque la naissance de structures syntaxiques, il y a prise progressive de conscience de la nécessité de thématiser la déductibilité en tant que telle — laquelle a reçu plusieurs incarnations dans divers systèmes philosophiques. Les premiers travaux de Cantor et de Frege... on a pris conscience progressivement que cette incarnation de la déductibilité était redevable de questions supplémentaires, à savoir, si les systèmes formels que l'on était tenté de proposer et dans lesquels devait se refléter tout ce que nous pouvions croire comme étant le lieu de déploiement du vrai et de sa constitutivité potentielle, si ces systèmes étaient vraiment non contradictoires. Intense moment de lucidité ! Et ensuite, ce mouvement a connu un *éclatement historique* remarquable, à cause du théorème de Gödel. Moment où l'*interprétation* d'un résultat débusque les péripéties de sa preuve.

Pour illustrer, revenons au schéma posé précédemment. On part d'une équation ou d'un théorème, et on se pose la question de l'existence de la solution sous-jacente. Évoquons un résultat d'existence bien connu et ancien : le théorème des fonctions implicites. Ce sera l'occasion de montrer que la recherche d'un théorème des fonctions implicites dans les espaces de Fréchet présente des obstacles techniques contournables à condition seulement de poser des schémas explicites supplémentaires. Géométriquement, le théorème des fonctions implicites admet une interprétation bien connue : si l'on se donne un ensemble de zéros d'une fonction réelle de variables réelles, disons $f(x, y)$, on souhaite remplacer ce lieu par un lieu plus simple, de la forme « bien visible » $y = f(x)$. L'interprétation est donnée par la figure : il faut que l'on puisse trouver une direction d'axe non tangente à un tel lieu, s'il est non singulier. Maintenant, il est parfois nécessaire d'opérer une rotation des axes de coordonnées, mais la condition est bien assimilée avec la figure. Le problème : *trouver des conditions* pour que l'on puisse résoudre localement par rapport à une variable, peut déjouer l'implicitation d'origine de sa position. Faisceau de conditions suffisantes, ou condition suffisante unique qui assimile les étapes de sa métamorphose et de ses généralisations, celle qui est bien connue et très intuitive porte sur la différentielle d'ordre un de la fonction. Il faut bien voir que le projet intuitif déborde le cadre trop étroit des manipulations opératoires. Ici, la condition portant sur $\frac{\partial f}{\partial y}$ est accompagnée d'hypothèses à la fois muettes et facilement explicitables, une fois parcouru le chemin des réalisations conceptuelles de la géométrie différentielle. Hypothèse de différentiabilité, hypothèses de continuité de la différentielle, *hypothèses explicites* et donc par celà même synonymes de clôturation partielle d'un champ de questions emporté avec la seule question d'origine : comment comprendre comme intrinsèquement *régulier* le *lieu des zéros* d'une fonction de plusieurs variables ? On pourrait insister sur la nature de seule suffisance de ces hypothèses, comme l'est l'hypothèse de convergence uniforme pour assurer l'intégrabilité ou la différentiabilité terme à terme, suffisance que l'on hésite à mesurer avec le nécessaire pour des raisons qu'il reste à élucider. Mais le point qui fait l'objet d'un commentaire est l'état d'éclaircissement et de resserrement corrélatif que subit la question de la régularité locale des hypersurfaces : double accès à la rigueur et à la certitude qu'entraîne l'exigence des explicitations.

Voici une version du théorème des fonctions implicites dans les espaces de Banach. Juste une remarque : on passe du cas des espaces de dimension finie aux espaces vectoriels normés complets de dimension infinie « *at no extra cost* », comme l'écrit LANG. Par idéalisation modérée, pourrait-on dire. En effet, démonstration et méthode, hypothèses et énoncés sont isomorphes entre les deux cas. Le schéma explicite pose deux hypothèses : l'*existence d'un inverse à droite continu* de la dérivée de notre application et la *continuité de la différentielle* de l'application différentielle. Elles interviennent comme la cheville ouvrière lisible dans la démonstration classiquement connue. On se ramène à un processus itératif, lequel se ramène à la question de savoir si la composition illimitée d'applications converge vers une application constante. C'est oui, on s'y attend, si l'application est *contractante*, mais reste à savoir si la limite existe dans l'espace sous-jacent. Heureusement, cette question est déjà répondue, est c'est justement pour assurer cette convergence que l'on a supposé que E et F étaient des espaces *complets*.

En résumé, un résultat aussi intuitif que le théorème des fonctions implicites emporte avec lui un faisceau de conditions — toujours révocables au regard des raffinements possibles — qui peuvent s'interpréter comme des *réalisations explicites* ou des *synthèses* nées du *faisceau de questions coexistentes*. Si le platonisme en mathématiques est possible, à la fois comme un vécu de la *conscience chercheuse*, comme une croyance naïve ou encore comme une confiance dans l'avenir d'une réponse prédéterminée, c'est sûrement parce que les hypothèses à rechercher prétextent inlassablement le résultat en vue. Il existe un *double intuitif* de tout le basculement originel du socratisme au platonisme, dont l'étude serait peut-être un cercle, sinon une contradiction dans les termes. Retenons surtout la désignabilité de l'explicite et l'interprétabilité de son rôle crucial dans le schéma de dérivation que constitue le théorème des fonctions implicites. Un tel discours motivé sur l'explicite, on s'en doute, est corrélatif du mouvement de *prise de* *conscience de l'ordre du concept* qu'a engendré la modernisation des mathématiques et de son *effectivité travailleuse* dans les pratiques de la recherche aujourd'hui.

La question d'existence d'un inverse pour une fonction différentiable se pose aussi dans les espaces de Fréchet. Ceux-ci sont des espaces vectoriels « presque normés » au sens où ils sont munis d'une famille infinie de semi-normes qui décrivent une sorte d'exhaustion à l'infini par des pseudo-normes. Typiquement, ce sont : l'espace des applications $\mathscr{C}^\infty$ sur une variété compacte à valeurs dans un certain $\mathbb{R}^q$, muni de l'ensemble des semi-normes suivantes : $|f|_k = \sup_{x\in M} ||D^k f(x)||$. Ou encore, l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$, muni de la famille des semi-normes suivantes : pour une exhaustion de Ω par des compacts, $\Omega = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m$, $K_m \subset K_{m+1}$, on pose : $p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x\in K_m} |\partial^\alpha f(x)|$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$. La question est donc de trouver, de formuler, de dessiner, des conditions suffisantes pour qu'il existe un inverse différentiable au sens de Fréchet, d'une application $\Phi : E \to F$ donnée. Bien entendu, on s'attend à ce que l'idéalisation sous-jacente à cette interrogation nous invite à supposer, comme dans le cas banachique, que l'application dérivée soit inversible, avec de bonnes propriétés de régularité. On se convainc assez vite de l'insuffisance de cette seule condition, ce qui relance d'autant plus la question. L'enjeu s'affine, les conditions étant invisibles. On peut parler du problème, de la motivation d'origine de cette recherche. Il s'agissait pour Nash, de donner un sens à un problème perturbé de plongement d'une structure riemanienne abstraite en tant que structure riemanienne induite par la métrique standard d'un bon $\mathbb{R}^n$. Plus généralement, une telle version des fonctions implicites dans les Fréchet s'appliquerait à plusieurs équations aux dérivées partielles non linéaires qui exigent, pour leur résolution, l'interposition d'un schéma itératif qui incorpore une dérivation à chaque étape (sans que le schéma puisse être réduit à un processus inverse d'intégration, comme cela est le cas pour les équations différentielles ordinaires). La dérivation doit être corrigée. Si on applique le processus directement, au bout d'un nombre fini d'étapes, toute la régularité des données initiales s'évanouit. Alors la structure même de l'équation inspire l'idée d'introduire une régularisation à chaque étape : c'est l'issue naturelle.

L'imprécision supplémentaire introduite par l'étape de régularisation doit être corrigée par un processus itératif rapidement convergent. Si nous posons la recherche d'un schéma explicite, nous pourrions nous inspirer de l'algorithme de Newton, connu par exemple pour les très bonnes solutions approchées de la racine carrée qu'il peut donner. Une des raisons connues de ce phénomène est l'approximation quadratique de la différence à chaque étape.

Ainsi, à travers la recherche de ce schéma explicite se jouent des questions que nul texte mathématique n'explicite complètement, que nulle analyse philosophique ne pourrait peut-être comprendre en totalité, mais qui finissent par prendre forme et se constituer en une réalisation précise et rigoureuse. On reprend pour l'exposer la liste des conditions dégagées par Lojasiewicz et Zehnder, dans un article assez tardif par rapport aux deux articles de Nash et de Moser. Le problème est formulé en termes abstraits, les conditions sont posées en s'inspirant des conditions habituellement connues, comme par exemple la condition (2) sur les opérateurs régularisants ou les inégalités de convexité (3). La spécificité du théorème obtenu se lit dans le coefficient qui mesure la perte de dérivées associée au processus itératif pour l'application linéraire tangente (7). On y retrouve aussi, en faisant $\lambda = 1$, le théorème des fonctions implicites classique dans les espaces de Banach.

Dans le peu de temps qu'il nous reste, abordons les méthodes L^2 dans la théorie linéaire des équations aux dérivées partielles. Le but est de *trouver des conditions* pour l'*existence* de solutions d'une équation $Pg = f$, où P est un opérateur aux dérivées partielles, à coefficients peut-être constants. Comme bien souvent, on commence par affaiblir les conditions d'origines de la question et on la traduit d'abord dans le langage des distributions. De nombreuses interrogations philosophiques naissent ici, au contact de ce schéma général d'affaiblissement d'un problème, ou encore, de la dualité fondamentale et centrale entre l'accès aux solutions au sens des distributions et l'accès aux solutions dites fortes. Toujours est-il que notre problème se transforme en un problème au sens des espaces de solutions intégrables, possédant de bien meilleures propriétés de clôture que les espaces de fonctions lisses. La genèse conceptuelle de cette transformation ou transformabilité reste à éclaircir. Mais acceptons-la. Maintenant, la propriété d'existence d'une solution de $Pg = f$ est équivalente à des inégalités dans L^2. C'est le point crucial et mathématiquement simple qui permet de comprendre comment il faut devoir lire dans la structure de l'opérateur la possibilité de l'existence d'une solution. Le fait est que le théorème 1, assigne cette correspondance entre l'action de l'opérateur sur les fonctions-test et l'existence de la solution. Il s'agit juste d'une dualisation bien éclaircie dans les espaces de Hilbert et d'une application du théorème de représentation d'une forme linéaire continue dû à Riesz.

Ainsi, la question est re-traduite une seconde fois : il faut trouver des conditions pour que l'inégalité (ii) soit satisfaite. Ici joue la forme de P. Nous avons une classification des opérateurs du second ordre, (dont l'analyse remonte aux travaux du dix-septième siècle sur les cordes vibrantes), qui est convoquée ici pour une nouvelle compréhension de l'existence de leurs solutions. En résumé, et pour terminer rapidement, la recherche de conditions explicites se réalise et l'on peut lire encore sur cet exemple l'histoire artificielle de la position d'hypothèses explicites se dessinant dans une dialectique de la « prise de conscience conceptuelle ».

12. Bilan et conclusions

Nous arrivons au terme de cette réflexion. Par ces exemples, nous avons essayé de montrer :

1) qu'il est nécessaire de poser des conditions explicites pour obtenir des théorèmes d'existence,

2) que toute question d'existence est impliquée dans une herméneutique indécise de la position d'hypothèses.

Ainsi, la question d'existence en général, ou le problème de savoir si les mathématiques constituent une ontologie, est peut-être une fausse question. Une question qui feint d'ignorer l'herméneutique virtuelle et auto-interprétative de la recherche en mathématiques. L'*epokhê* problématologique dirime sensiblement l'ontologie. Mais qu'on ne s'y trompe pas : l'antiréalisme positiviste n'a à aucun moment été convoqué au cours de cette réflexion, en raison des incompréhensions fondamentales qu'il manifeste quant à la problématicité même de toute pensée. Pour affirmer cette thèse encore plus précisément, ajoutons que l'on peut voir chez Lebesgue un travail des conditions nécessaires au regard des conditions suffisantes que le mathématicien est tenté de proposer, et que ce travail de la condition nécessaire s'incarne souvent et se réalise de manière spectaculaire, de manière prodigieuse, comme il est parvenu à s'incarner dans la théorie des ensembles. Ce que nous avons essayé de défendre se résume de la façon suivante : les démonstrations d'existence en mathématiques ne confèrent pas l'existence à la notion, puisque l'existence est et se meut dans le non conceptuel. Nous aurions pu suivre de plus près le philosophe Étienne Gilson, en évoquant à nouveau les difficultés philosophiques réelles qui sont impliquées par la pensée de l'existence, en évoquant les illusions essentialistes vilipendées par l'après-scolastique. Nous aurions pu parler plus longuement de la condition dégagée par Kant et revenir sur le rapport de l'esprit avec les nécessités internes de positions de l'être. Une nuance d'anti-objectivisme se module toujours de contextualisme, *mais ici-même, la contextualité ne désigne rien d'autre que celle de la question.* Ce que nous avons voulu mettre en lumière, c'est que la recherche en mathématiques est impliquée dans des questions d'existence amorphes, qui se situent à un niveau complètement indécis, et que les mathématiciens sont en présence de la nécessité de réaliser quelque chose face à ces interrogations. Et cette nécessité de réaliser est une exigence ici co-impliquée de l'idée de réponse complètement satisfaisante, donc de l'idée de condition nécessaire et suffisante, et aussi de l'idée de caractérisation. De plus, l'idée de caractérisation consiste la plupart du temps à effectuer des jeux interprétatifs entre algèbre, géométrie et topologie, au risque de recueillir des signes inattendus d'interdépendance, ou, au contraire, de scruter beaucoup plus consciemment l'irréductibilité réciproque d'un problème et d'un autre, leur étrangeté. Cette exigence est une exigence qui prend souvent racine dans l'affaiblissement des conditions d'origine. Parfois *besoin* gratuit de *généralisation* (mais besoin *pulsionnel* dont la forme et la communicabilité sont par celà-même très universelles), l'affaiblissement des hypothèse entretient un rapport dérivé aux « bonnes questions ». Pierre Cartier l'a évoqué cette année : les questions à choisir doivent être bonnes. Mais est-ce seulement à l'équipe de recherche qu'incombe le dessein ou le désir de ces bonnes questions, ou ne faut-il pas conserver la mémoire du rapport de la raison à ses réalisations pour les engendrer ? Les modes en mathématiques seront toujours *dominées par le rapport du réalisable à l'irréalisable*.

À sonder ces indications, on comprendra que les mathématiques s'inscrivent de toute éternité dans une bipolarité de la réponse, en quête d'interprétation, ouverture amorphe d'un côté et faisceau de synthèses positives de l'autre, *une bipolarité de la réponse dans l'a priori d'une corrélation.* De même que, selon Jean-Toussaint Desanti, l'intentionnalité est le mode d'être de la conscience d'objet au coeur de ses objets, nous devons soulever le problème philosophique de rendre compte du réel mathématique pur a priori en décrivant cette nouvelle *intentionnalité questionnante*, laquelle serait, pour paraphraser la formule de Desanti, *le mode d'être de la conscience de question au coeur de ses questions.* En réhabilitant une lecture cavaillèsienne des textes mathématiques, on rejoindrait l'*esprit mathématique* de Lebesgue, pour resserrer l'ininterprétativité de notre approche. *En amont de l'expérience, en amont de l'autonomie, en amont de l'exigence, il y aurait la question.*

Comme conséquence, nous aurions une relativisation de la notion d'objet, d'abord, une relativisation de ce que l'on peut dire sur l'être, ensuite, sachant que ce que l'on peut dire de l'être est redevable d'une problématique philosophique universalisable, et enfin une relativisation du réel. Et donc une disqualification modérée de l'ontologie, sachant que l'ontologie n'est pas le discours que tiennent les mathématiques :

Le discours mathématique est un discours qui est tenu sur des questions qui se réalisent.

Dans cette structure problématologique, où prime le rapport au problème-logos, au discours sur les problèmes, les théorèmes d'existence constituent ce qu'on appellera des *noyaux de synthèse* reproductibles et décalcables, souvent organisés comme des mixtes, au sens de Lautman, des briques de dérivation redevables d'une propriété cruciale. L'apport de la réflexion, s'il est mesuré puis comparé à des notions mathématiques instables, semblera très insatisfaisant. Ceci montre la distance qui sépare toujours la question amorphe de l'existence de ses réalisations apocritiques imprévisibles.

13. Diagrammes philosophiques et résultats mathématiques.

LA $\boxed{\text{LIAISON}}$ INTERROGÉE

Décomposition structurale

Existence d'autres êtres mathématiques

Questions problémato-logiques

Faut-il attendre un resserrement de conditions équivalentes pour dominer complètement la liaison ?
Le passage est-il corrélatif de l'actualisation d'une rigueur ?
Dans quelle mesure l'imitation [fonctionnelle p. ex.] d'une propriété [topologique, p. ex.] constitue-t-elle, au sens propre, une démonstration *d'existence* ?

Questions d'émergence

Y a-t-il une clause intuitive constituante ?
Jaillissement à partir d'une structure qui capte les êtres à l'avance ?
Prégnance générale d'un imprévisible ?

Comparaison des **schémas de genèse** lautmaniens avec les « **schémas explicites de dérivation d'existence** » tels qu'ils se dessinent dans [quelques domaines] de la mathématique contemporaine.

Thèse. Il y a [par exemple pour le problème de Dirichlet, pour le théorème de Cauchy-Kowalewskaïa, pour les estimées de Schauder, les estimées de Hörmander, pour les théorèmes d'existence de Gromov] un PASSAGE À L'EXPLICITE qui est : (1) radical, (2) restrictif, (3) assimilable à une « *prise de conscience de l'ordre du concept.* »

LA QUESTION DE L'EXISTENCE MATHÉMATIQUE

(*Général*)

au total, il y a deux sens du mot [i.e. de la question]

« EXISTER », appliqué aux objets mathématiques

Sens intra-théorique : défini à l'intérieur d'une théorie, il s'applique aux objets de cette théorie.
Les questions sont de l'ordre : existe-t-il un point, un nombre, une fonction, une clôture, un espace, un revêtement, tq (C).
[parmi les « objets » de la théorie.]

Sens métathéorique : ce sens se ramène à une possibilité de définitions en liaison avec des théories antérieures. Les questions sont de l'ordre :
existe-t-il des géométries non euclidiennes ?
existe-t-il x tel que $x^2 = -1$?
Et signifient : Peut-on adjoindre ?
Peut-on introduire par des postulats nouveaux un « X » ?
La pensée de cette *liaison* est redevable d'une philosophie du possible (*Sur les problématiques implicitées par elles-mêmes*).

Thèse. Le sens intra-théorique ou « dérivatif » de l'existence d'entités mathématiques est irréductible à la notion de possible.

Première gradation à l'explicite.

EXISTENCE MATHÉMATIQUE

Implicite pur de la question/ Explicite méthodologique.
Débat sur la préexistence et sur la convergence [harmonie] des méthodes.
Unité et interexpressivité des mathématiques.
Le problème du rapport entre l'intuition constituante et le projet déductif.

SYNTHÈSES

L'existence des « objets » en mathématiques est corrélative de l'**actualisation** d'une méthode.
ACTE ET EXISTENCE
Résultats virtuels : « théorèmes conjecturaux »
L'Acte, la Puissance et la virtualité des **synthèses**.

Réflexions sur :
L'objectivité mathématique
Le « type d'être » qui revient aux entités mathématiques
Débats :
Idéalisme/Réalisme/Positivisme
Intuitionnisme/Formalisme/Logicisme

POSITIONS

Questions redevables d'une problématique philosophique universalisable.

Comparaison « brute » entre

1. la structure relativement réduite des preuves philosophiques d'existence

2. la structure synthétique étendue [ac cumulation de strates d'idéalisation et de thématisation] des démonstrations d'existence en mathématiques.

Émergence mathématique de la **synthèse**.

Autonomie de la **constructivité**.

théorie des ensembles
arithmétique des nombres entiers
arithmétique primitive récursive
herméneutique du continu

théorie des catégories

LA THÈSE DE L'ÊTRE COMME
EXISTENCE DE STRUCTURES POSÉES

« groupes, anneaux,
corps, espaces vectoriels »

espaces de Banach
espaces de Fréchet
espaces de Sobolev

variétés topologiques
variétés différentiables
fibrés vectoriels
fibrés principaux
formes différentielles
courants

ensembles algébriques
ensembles analytiques
ensembles semi-algébriques
ensembles semi-analytiques
ensembles sous-analytiques

Idée de convergence,
approximation, discrétisation,
régularisation
équations intégrales, différentielles
spectres d'opérateurs

Local/global.
Idées de submersion,
de transversalité,
de stratification,
d'éclatement.
Conditions différentielles,
géométrie et topologie,
invariants de noeuds,
résolutions de singularités.

L'INTERROGATION EN DIRECTION DE L'EXISTENCE (**DES réalisations**)

Idée d'« invariants »
« Jeux d'enfants »
à la Grothendieck

Idée de caractérisation
(**IDÉE TRANSVERSALE**)

Positivité, ellipticité
(conditions non dégénérées)
coercitivité, inégalités L^2
théorèmes d'existence
en géométrie analytique complexe

raffinements des schèmes d'origine
courbes pseudoholomorphes (Gromov)
existence avec création d'homologie
non triviale

ÉQUATION(S)

« Quelles conditions assurent... ? » EXISTENCE DE SOLUTIONS (QUESTION)

« Existence d'invariants ? »

interrogation caractérisée par son amorphisme, vide, quasi-nulle, indécise.

naissance des synthèses

DÉDUCTION PARTIELLE

RÉALISATION PROGRESSIVE

EXISTENCE SYSTÉMATISÉE
POSITION DE DOMAINES
ONTOLOGIQUES

EXIGENCE DE LECTURE DANS
LA STRUCTURE MÊME (LEBESGUE)

EXISTENCE $\boxed{\text{RÉALISÉE}}$,
GÉOMÉTRIE ET CONTINU
ENRACINEMENT DANS LA
GÉNÉRICITÉ ET SES ÉVIDENCES

POSITIVITÉ(S)

re-soulèvement
de questions pures
d'existence.

SCHÉMAS EXPLICITES
DE DÉRIVATION D'EXISTENCE

relèvement

$\boxed{\text{PROPRIÉTÉS DÉCISIVES}}$

interrogation du discours sur lui-même

DISCOURS ET RAISONNEMENT

naissance des synthèses

le déductif : désigné, découpé, autonomisé

DÉDUCTIBILITÉ

SYSTÈMES PHILOSOPHIQUES

SYSTÈME DÉDUCTIF SCIENTIFIQUE

la question de la
POSITION du SYSTÈME

DIALECTIQUE RATIONNELLE

SYSTÈME FORMEL

UNIVERSEL RÉEL
SAVOIR ABSOLU

. Interprétation
. Non contradiction
. Complétude
. Existence
. Référence

questions internes

système comme dispositif symbolique

syntaxe générative

perspective métathéorique :

le système formel est lui-même

objet d'étude, il a une morphologie,

il fournit une représentation du raisonnement.

systèmes et métasystèmes : « thématisation ».

ÉCLATEMENT,
RELATIVISME,
OUVERTURE

échec des démonstrations
de non contradiction

INDÉCISE POSITION DES AXIOMES

RÉPONSES INASSUMABLES :
LE VRAI EXCÈDE
LE PROUVABLE

LE FONDEMENT INACCESSIBLE, EN MANQUE D'ÉLÉVATION

SCHÉMAS DE GENÉSE

émerge (structure) :

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE ÉMERGE DE LA
DÉCOMPOSITION STRUCTURALE
D'UN DOMAINE DE BASE

découle (mixte) :

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE DÉCOULE
DE LA CONSTRUCTION D'UN ENSEMBLE
QUI LE CONTIENT AVANT MÊME QU'ON SACHE L'Y
VOIR

résulte (extremum) :

L'EXISTENCE D'UN ÊTRE RÉSULTE DE LA SÉLECTION
D'UN ÉLÉMENT
DISTINGUÉ PAR SES PROPRIÉTÉS EXCEPTIONNELLES

Exemples d’équations

$$F(x,y)=0,\ \ x\in E, y\in F$$

$$F(x,y',y'',...,y^{(n)})=0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k},\frac{\partial u}{\partial x_l}\right)=g_{kl},\ 1\leqslant k,l\leqslant n$$

$$\Phi\circ\Psi=\mathrm{Id}$$

$$\varphi(s)+\lambda\int_0^1 K(s,t)\varphi(t)dt=f(s)$$

$$x=-T_1H(x,w,\lambda)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-6u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right)=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\nabla u=f-\nabla p+\nu\Delta u$$

Théorème des fonctions implicites

$f : \mathbb{R}^2 \supset U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, $f(0,0) = 0$.

$$f(x,y) = 0 \quad \overset{??}{\Longleftrightarrow} \quad y = \varphi(x) \; [ou \; x = \psi(y)].$$

Trouver des conditions : afin que l'on puisse résoudre par rapport à une variable.

Condition suffisante : $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \neq 0$.

$$f(x,y,z) = 0 \quad \overset{??}{\Longleftrightarrow} \quad z = \varphi(x,y) \; [ou \; x = \psi(y,z) \; ou \; y = \chi(x,z)].$$

Condition suffisante : $\frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0) \neq 0$.

$$\begin{array}{ccc} f_1(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = 0 & & y_1 = \varphi_1(x_1, ..., x_p) \\ \cdots\cdots\cdots & \overset{??}{\Longleftrightarrow} & \cdots\cdots\cdots \\ f_q(x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = 0 & & y_q = \varphi_q(x_1, ..., x_p) \end{array}$$

$$\text{dét} \, \left(\frac{\partial f_j}{\partial y_k} \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant q} (p_0) \neq 0.$$

Version dans les espaces de Banach.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés complets.

THÉORÈME D'INVERSION LOCALE. *Soit $f : (U \subset E) \to F$, f' continue. S'il existe $A : F \to E$ linéaire, continu, tel que $f'(x_0)A = Id_F$, alors il existe g de classe $\mathscr{C}^1$ près de $y_0 = f(x_0)$ tel que $f \circ g(y) \equiv y$. Si $f'(x_0) : E \to F$ est un isomorphisme, f est un $\mathscr{C}^1$ difféomorphisme d'un voisinage de x_0 sur un voisinage de $f(x_0)$.*

Hypothèses explicites :

(1) $\exists\ A$ inverse à droite **continu** : $||A|| < \infty$, $f'(x_0)A = \mathrm{Id}_F$.

(2) $||f'(x_1) - f'(x_2)|| \leqslant \varepsilon(x_1, ||x_1 - x_2||)$, $\varepsilon(x, \delta) \to 0$, si $\delta \to 0$.

Méthode : itérations à la PICARD ; énoncé de « point fixe. ».

THÉORÈME DES FONCTIONS IMPLICITES. *E_1, E_2, F espaces de Banach. $f : U_1 \times U_2 \to F$ de classe $\mathscr{C}^1$, $(x_0, y_0) \in U_1 \times U_2$. Si $\exists\ A = U_2 \to U_1$ linéaire continu tel que*

$$f'_y(x_0, y_0)A = Id_{U_2},$$

alors $\exists\ g : V_1 \to U_2$ de classe $\mathscr{C}^1$ tel que $f(x, g(x)) \equiv f(x_0, y_0)$, i.e.

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) \Longleftrightarrow y = g(x).$$

Preuve. Appliquer le théorème d'inversion locale à :

$$F(x, y) := \big(x, f(x, y)\big). \quad \square$$

Théorème de Nash-Moser

Méthode itérative à la PICARD : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \theta |u_n - u_{n-1}|$, $0 < \theta < 1$. Elle devient défectueuse lorsque se produit un phénomène de « perte de régularité » : si l'on ne peut estimer $|u_{n+1} - u_n|_{\mathscr{C}^r}$ qu'en termes de $|u_n - u_{n-1}|_{\mathscr{C}^{r+s}}$, $s > 0$, toutes les dérivées finissent par être consommées au bout d'un nombre fini d'approximations par itération. *cf.* NASH 1956.

IDÉE : Inscrire à chaque étape une opération de *régularisation*. Ex. :

$$v = \sum_k v_k e^{ikx},\ k = (k_1, ..., k_d) \quad T_N v = \sum_{|k| \leqslant N} v_k e^{ikx}.$$

Possibilité de dominer l'imprécision supplémentaire ainsi introduite si, par exemple, une étape correspond à un algorithme à convergence rapide de type Newton : $|u_{n+1} - u_n|_r \leqslant c|u_n - u_{n-1}|^2_{r+s}$.

RECHERCHE D'UN SCHÉMA EXPLICITE

Motivation. Problème du plongement d'un tore riemannien de dimension deux dans $\mathbb{R}^5$. On pose $\mathscr{B}_r := \mathscr{C}^2_{2\pi-per}([0, 2\pi]^2)$, $\mathscr{U}_r = \{(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5);\ f_j \in \mathscr{B}_r\}$, $f(x_1, x_2)$, $|u|_r$, $u \in \mathscr{U}_r$. $\mathscr{G}_{r-1} := \{g_{11}(x), g_{12}(x), g_{22}(x)\}$, g_{11}, g_{12}, g_{22} composantes de la première forme fondamentale. **Équation :**

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}, \frac{\partial u}{\partial x_l}\right) = g_{kl},\ \ 1 \leqslant k, l \leqslant 2.$$

Le problème est de trouver u pour une métrique g donnée. Comme d'habitude, on suppose que g se trouve suffisamment proche d'une solution *plongée* (u^0, g^0) *donnée* et on suppose que le déterminant

$$\Delta(u) = \text{dét}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right) \neq 0.$$

Le système linéarisé de l'équation, en notant $f(u) = \{(u_{x_k}, u_{x_l}) - g_{kl}\}$

$$f'(u)v = \{(u_{x_k}, v_{x_l}) + (u_{x_l}, v_{x_l})\} = h_{kl}$$

auquel on ajoute les conditions $(u_{x_k}, v) = 0$, $k = 1, 2$, se simplifie et devient $-2(u_{x_k x_l}, v = h_{kl})$, et il est inversible, d'après $\Delta(u) \neq 0$, et il définit Lh.

Espaces de Fréchet

(D'après Lojasiewicz and Zehnder)

E : espace vectoriel muni d'une famille infinie de semi-normes. Typiquement : $\mathscr{C}^\infty(M, \mathbb{R}^q)$, M variété compacte, avec

$$|f|_k = \sup_{x \in M} ||D^k f(x)||,$$

ou bien : $\mathscr{C}^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, exhaustion $\bigcup_m K_m = \Omega$, $K_m \subset K_{m+1}$ compacts, avec

$$p_{\alpha,m}(f) := \sup_{x \in K_m} |\partial^\alpha f(x)| \ \ \alpha \in \mathbb{N}^n.$$

Soit $\Phi : E \to F$ différentiable au sens de Fréchet, $\Phi(0) = 0$.

TROUVER DES CONDITIONS [Suffisantes] pour que :

$$\exists \Psi : F \to E$$

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}.$$

Exemple. $\Phi : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$

$f \mapsto \exp f$

Φ n'est pas inversible bien que $D\Phi(f)u = e^f u$ le soit.

Abstraction. E muni d'une suite de semi-normes $|.|_n$, $n \in \mathbb{N}$

(6.2.4) $$|x|_n \leqslant |x|_m \ \text{ si } \ n \leqslant m.$$

Famille d'opérateurs régularisants $S_\theta : E \to E, \theta \geqslant 1, \theta \to \infty$,

(6.2.4) $$|(1 - S_\theta)(x)|_k \leqslant C\theta^{-(n-k)}|x|_n$$

$$|S_\theta x|_n \leqslant C\theta^{n-k}|x|_k, \ \ x \in E, \theta \geqslant 1, 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Inégalité de convexité :

(6.2.4) $$|x|_l \leqslant C|x|_k^{1-\alpha}|x|_n^\alpha, \ \ l = (1-\alpha)k + \alpha n, \ \ 0 \leqslant \alpha \leqslant 1.$$

Exemple. M variété compacte, $\mathscr{C}^\infty(M)$, $\mathscr{C}^K(M)$, $\mathscr{C}^{k,\varepsilon}(M)$, Sobolev.

Condition de croissance sur Φ :

(6.2.4) $$|\Phi(x)|_n \leqslant C|x|_{n+d_1}, \ \ d_1 > 0.$$

Typiquement : $\mathscr{C}^\infty(M)$, Φ = opérateur différentiel *non linéaire*
$l = d_1$ = degré de l'opérateur
= « perte de dérivées ».

Différentiabilité de Φ :

(6.2.4) $$|\Phi'(x)v|_n \leqslant C(|x|_{n+d_2}|v|_l + |v|_{n+d_2}).$$

Existence d'un inverse à droite continu

(6.2.4) $$\Phi'(x)L(x)y = y, \quad (x,y) \in U \times F$$

(6.2.4) $$|L(x)y| \leqslant C(|x|_{\lambda n+d}|y|_d + |y|_{\lambda n+d}), \ \textit{some}\ \lambda \geqslant 1.$$

On permet $\lambda > 1$, *i.e.* la perte de régularité autorisée pour résoudre le problème linéarisé (6) augmente avec n.

(6.2.4) $$|R(x;v)|_n \leqslant C(|x|_{n+d_2}|v|_l^2 + |v|_l|v|_{n+d_2}),$$

où R = reste = $\Phi(x+v) - \Phi(x) - \Phi'(x)v$. Cas $\lambda = 1 \leftrightarrow$ théorème classique des fonctions implicites.

THÉORÈME. *Supposons que* $\Phi : (U \subset E) \to F$, $\Phi(0) = 0$, *satisfait les conditions de croissance et de régularité* $(4) - (8)$ *avec* $1 \leqslant \lambda < 2$. *Alors il existe des constantes* $s_0, \delta, l > 0$, $s_0 = O_2((2-\lambda)^{-1})$ *et une application* $\Psi : (V \subset F) \to U$, $\Psi(0) = 0$, *définie dans l'ouvert* $V := \{y \in F;\ |y|_{s_0} < \delta\}$, *satisfaisant*

$$\Phi \circ \Psi(y) = y, \quad y \in V,$$

et l'estimation

$$|\Psi(y)|_l \leqslant C|y|_{s_0}.$$

$\lambda = 2$: cas limite, contre-exemple (voir LOJASIEWICZ and ZEHNDER). La condition $\lambda < 2$ est liée [explicitement] à l'itération dans la méthode :

Modification (insertion de régularisations)
de l'algorithme de Newton.

Équations aux dérivées partielles
(*d'après Bernard Malgrange*)

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $P = \sum_{|\alpha| \leqslant m} a_\alpha D^\alpha$, $a_\alpha \in \mathscr{C}^\infty$,

$$i^{|\alpha|} D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha_1|+\cdots|\alpha_n|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

CHERCHER DES CONDITIONS POUR QUE $PL^2(\Omega) \supset L^2(\Omega)$,

i.e.

$$\forall\, f \in L^2(\Omega),\ \exists\, g \in L^2(\Omega) \text{ tq } Pg = f.$$

Assertion : une telle **propriété d'existence** dans $L^2(\Omega)$ des solutions de l'équation $Pg = f$ **est équivalente à des inégalités dans** $L^2(\Omega)$**.**

Soit P^* l'adjoint formel de P : $(P\varphi|\psi) = (\varphi|P^*\psi)$, $\phi, \psi \in \mathscr{D}(\Omega)$.

THÉORÈME 1 [Partie Analyse Fonctionnelle]. *On a l'équivalence entre :*

(i) $PL^2(\Omega) \supset L^2(\Omega)$ *;*

(ii) $\exists C > 0, \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \ ||\varphi||_{L^2(\Omega)} \leqslant C||P^*||_{L^2(\Omega)}$.

Équations à coefficients constants

$$P \in \mathbb{C}[X_1, ..., X_n] \qquad P^{(\alpha)}(\xi) = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} P(\xi).$$

Inégalité de HÖRMANDER : Supposons Ω borné. Alors :

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n, \exists C_\alpha > 0, \forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega)$$

$$||P^{(\alpha)}(D)\varphi||_{L^2(\Omega)} \leqslant C_\alpha ||P(D)\varphi||_{L^2(\ Omega)}.$$

On dit que P est *plus fort* que Q dans Ω, $Q < P$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall\, \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),\ \ ||Q(D)\varphi||_{L^2(\Omega)} \leqslant ||P(D)\varphi||_{L^2(\Omega)}.$$

$$Q < P \Longleftrightarrow \exists C > 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, |Q(\xi)|^2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \geqslant 0} |P^{(\alpha)}(\xi)|^2.$$

Opérateurs elliptiques. P elliptique d'ordre m si

$$\forall\, \alpha,\ |\alpha| = m,\ X^\alpha < P (\Longleftrightarrow \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, P_m(\xi) \neq 0).$$

Opérateurs de type principal.

$$\forall\, \alpha, |\alpha| \leqslant m-1, X^\alpha < P_m\ (\Longleftrightarrow \sum_{|\alpha|=m-1} \xi^{2\alpha} \leqslant C \sum_{\beta \geqslant 0} |P_m^{(\beta)}(\xi)|^2).$$

Exemples. Δ : elliptique.
$\partial = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}$ et $\overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}$ elliptiques.
$\sum a_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$, elliptique ssi $(a_{ij})\ >> 0$
type principal ssi (a_{ij}) non dégénérée.
$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ type principal.
$\frac{\partial}{\partial t} - \sum \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ non principal (parabolique, en fait).
Version à coefficients variables : uniformité dans $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.
THÉORÈME 2. *Si P est de type principal dans Ω, $\forall\ a \in \Omega$, $\exists U \subset \Omega$ voisinage ouvert de a, $\exists C > 0$, tels que*

$$\sum_{||\alpha|| \leqslant m-1} ||D^\alpha \varphi||^2 \leqslant C(||P\varphi||^2 + ||P^*\varphi||^2)\ \ \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Pour l'obtention de théorèmes d'existence des solutions de $P(x, D)g = f$, *nous devons chercher à éliminer* $||P\varphi||$ *ou* $||P^*\varphi||$ *de cette inégalité* (*cf.* th. 1). **Il est nécessaire, pour cela, de faire certaines hypothèses.**

Si la partie principale de P est réelle, $P^*\varphi = P\varphi + Q\varphi$, deg $Q \leqslant m - 1$. D'où

$$(*) \quad \sum_{|\alpha| \leqslant m-1} ||D^\alpha \varphi||^2 \leqslant C||P\varphi||^2.$$

Soit $c(x, \xi)$ la partie principale de degré $2m-1$ du commutateur $[P, P^*]$; si $c(x, \xi)$ peut s'écrire sous la forme

$$c(x, \xi) = A(x, \xi)P_m(x, \xi) + B(x, \xi)\overline{P}_m(, \xi),$$

deg A, deg $B \leqslant m - 1$ en ξ, on a aussi $(*)$.

On ne peut démontrer l'inégalité $(*)$ sans hypothèse supplémentaire sur P. En vérité, il existe des opérateurs de type principal P tels que $Pg = f$ n'admette aucune solution, pour certaines fonctions g de classe $\mathscr{C}^\infty$. Il en est ainsi de l'opérateur de hans LEWY :

$$(n = 3) \quad \frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2} - 2i(x_1 + ix_2)\frac{\partial}{\partial x_3}.$$

THÉORÈME DE NON EXISTENCE DE HÖRMANDER. [**Condition nécessaire**]. *Soit P linéaire d'ordre m à coefficients $\mathscr{C}^\infty$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Notons $c(x, \xi)$ la partie homogène de degré $2m-1$ en ξ du commutateur $PP^* - P^*P = [P, P^*](x, \xi)$. Si $P(\mathscr{D}'(\Omega)) \supset \mathscr{D}(\Omega)$, on a*

$$(**) \qquad \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,\ P_m(x, \xi) = 0 \Rightarrow c(x, \xi) = 0.$$

Les zéros de $[P, P^*]_{2m-1}$ recouvrent ceux de P_m.

COROLLAIRE. [**Non existence**]. *Supposons que la condition du théorème ne soit pas vérifié sur un ensemble de points dense dans Ω. Alors il existe* [!] *$f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$* [*commune*] *telle que pour tout ouvert U relativement compact dans Ω, on a*

$$P(\mathscr{D}'(U)) \not\ni f|_U.$$

Estimées L^2 et géométrie algébrique
(*d'après J.-P. Demailly*)

On cherche des solutions de l'équation $d''u = v$ avec des estimées L^2 explicites [very precise]. L'idée centrale, due à HÖRMANDER, est d'introduire des poids du type $e^{-\varphi}$, où φ est une fonction satisfaisant des conditions de convexité adéquates. Cette méthode procure de nombreuses généralisations des théorèmes standard d'annulation de la cohomologie sur des variétés faiblement pseudcoconvexes : on retrouve notamment les estimées originales de Hörmander pour les domaines pseudoconvexes de $\mathbb{C}^n$, avec des applications à la géométrie algébrique, les estimées de Skoda pour les morphismes de fibrés vectoriels [holomorphes] surjectifs, une solution élégante du problème de Levi et des théorèmes de type Nullstellensatz.

Présentation du SCHÉMA ;

1. PARTIE ANALYSE FONCTIONNELLE.

2. Répercussion des CONDITIONS DE POSITIVITÉ.

(X, ω) variété hermitienne complète, E fibré vectoriel holomorphe de rang r sur X.

$$A_{E,\omega} = [ic(E), \Lambda] + T_\omega.$$

BOCHNER-KODAIRA-NAKANO-DEMAILLY : Si $A_{E,\omega}$ est *semi-positif* sur $\Lambda^{p,q}T^*X \otimes E$, on a

$$||D''u||^2 + ||\delta''u||^2 \geqslant \int_X < A_{E,\omega}u, u > dV.$$

THÉORÈME D'EXISTENCE L^2. *(X, ω) complète, $A_{E,\omega} \geqslant 0$ en bidegré (p, q). Alors $\forall\ g \in L^2_{p,q}(X, E)$ telle que $D''g = 0$ et*

$\int_X < A_{E,\omega}^{-1} g, g > dV \leqslant \infty$, $\exists f \in L^2_{p,q-1}(X, E)$ *tq* $D''f = g$ *et*

$$||f||^2 \leqslant \int_X < A_{E,\omega}^{-1} g, g > dV.$$

Domaine d'application. (**Présence d'une exhaustion positive.**)
X variété faiblement pseudoconvexe

$\iff \exists \psi \in \mathscr{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ d'exhaustion tq $id'd''\psi \geqslant 0$ sur X.

Notamment si :
$X = \Omega \subset \mathbb{C}^n$ pseudoconvexe, ou $X =$ variété compacte.

PROPOSITION. *Si* (X, ω) *est faiblement pseudoconvexe, elle porte une métrique kählérienne complète* $\widehat{\omega}$.
Annulation(s) de cohomologie $\iff$
résolubilité en certains bidegrés,
existence de formes satisfaisant
certains systèmes d'équations.

THÉORÈME. *Si* E *est un fibré en droites* positif *sur une variété faiblement pseudoconvexe, alors*

$$H^{p,q}(X, E) = 0, \quad p + q \geqslant n + 1.$$

□ Extensions par **idéalisation(s)**.
□ Géométrie **complexe** et **positivité**.]

Conjectures mathématiques et preuves mathématiques

> In brief, a philosophy of Mathematics is not convincing unless it is founded on an examination of Mathematics itself. Wittgenstein (and other philosophers) have failed in this regard. Saunders MAC LANE, *Mathematics Form and Function*

Prologue. Trop fréquemment, les mathématiques sont assimilées lointainement et sans nuances — même par les philosophes les plus ouvertement antiréalistes — à une entité immuable douée d'une autonomie de principe par rapport au champ hétéronome de l'expérience physique, biologique ou sociologique dans le monde. Mais depuis plus d'une cinquantaine d'années, on ne sait plus comment spéculer systématiquement sur le statut des théorèmes mathématiques en tenant compte de manière globale et survolante de leur explosion et de leur spécialisation, comme si ce monde dont la « réalité » encore jugée problématique se « réalisait » sous nos yeux malgré l'éternelle (et avantageuse) tentation de la dubitation philosophique, qui s'est vue contrainte de se professionnaliser en se détachant des sciences en action. Bien que le domaine philosophique contemporain assigné comme tel semble en effet ne plus pouvoir suivre en pensée cette complexification des contenus, et bien que la mathématique engendre, de concert avec l'avancée du temps historique, ses propres « irréversibles-synthétiques » dont le raffinement s'amplifie, il est néanmoins du devoir de l'*être-source du spéculatif philosophique* de se confronter à l'*être-ramifié du spéculatif mathématique* pour y puiser des ressources dynamisantes et structurantes. Si la mathématique pouvait enfin être reconnue comme une philosophie dialectique réalisée et productrice à plein régime de contenus argumentatifs authentiques, la philosophie générale devrait lui emboîter le pas sans réticence et se défier méthodiquement des cercles inactuels et reproductibles de raisonnements fermés.

Ce texte non théorisant n'a ici qu'une unique visée critique : limiter la portée du général nominal dont on sait abuser lorsque les raisonnements s'enlisent ; centrifuger et éclater les cercles ; ouvrir et ramifier les questions en visant les niveaux contemporains ; en un mot : raffiner les analyses épistémologiques jusqu'au point où notre temps y éprouve ses résistances fertiles.

Quel statut pour la proposition mathématique non démontrée ? D'après la conception réaliste en mathématiques, la vérité des énoncés mathématiques peut être réalisée sans que nous soyons en mesure de la connaître, de la reconnaître ou de la démontrer pleinement : des connexions rigoureuses existent toujours « en réserve », dans un « matériau » hypothético-déductif « potentiellement indéfini » que l'on « explore » ou que l'on « découvre ». Tout à l'opposé des visions « réalistes » et pour se démarquer des « naïvetés » qui les accompagnent, Wittgenstein affirme à divers endroits de ses remarques philosophiques qu'il existe une différence de nature profonde entre les propositions « pressenties », non démontrées, et celles qui sont déjà insérées dans une grammaire formelle et autonome, conçue comme système prédéfini de règles du jeu tel que l'arithmétique, ou la théorie des ensembles ou la topologie générale. Ce fossé conceptuel majeur est incontournable, inexpugnable et ne peut en aucune façon être comblé.

> La démonstration se distingue radicalement de la vérification d'une proposition ordinaire déjà comprise, en ce sens que « la démonstration fait partie de la grammaire de la proposition » (PG, p. 370) ; de sorte que « la proposition avec sa démonstration appartient à une tout autre catégorie que la proposition sans la démonstration » (PG, p. 371). La proposition non démontrée ne représente pas un fait mathématique dont nous ne savons pas encore et dont nous cherchons à savoir s'il est réalisé ou non. Son sens est uniquement celui d'une incitation à la recherche mathématique et d'une directive ou d'une suggestion pour la recherche. Mais, alors qu'une hypothèse empirique (par exemple, une hypothèse médicale) conserve le même sens, lorsqu'elle est vérifiée, la démonstration mathématique modifie la position de la proposition dans le langage lui-même, et donc son sens. [**59**], p. 60.

Différence de catégorie parce que seul l'effectivement démontré est inséré dans l'architecture syntaxique des énoncés mathématiques. Mais rien de tel pour le non-démontré : il est suspendu dans l'hypothétique, indécis et non sanctionné ; il est « autre », parce qu'il appartient à un autre univers de langage et de pensée. Voilà une démarcation bien claire et bien nette.

L'irréversible-synthétique en mathématiques. Pour l'intuition de compréhension, aucune difficulté à résumer cette thèse : les oppositions de nature sur lesquelles on insiste en philosophie appartiennent en effet aux informations les plus immédiatement saisissables par la pensée « archaïque et reptilienne » qui contrôle toutes les mobilisation neuronales du cerveau, donc de la pensée humaine effective. Répéter un *distinguo* est non seulement autorisé, mais cela est aussi nécessaire ; c'est une manière de chercher à circonscrire un fait essentiel, en le soumettant, sans l'épuiser, à une méditation variée qui éclaire les premières parois d'un fossé conceptuel.

Réexprimons donc l'idée en d'autres termes. Si l'on admet sans discuter, comme semble le faire Wittgenstein, que l'univers du non syntaxiquement sanctionné ne doit pas faire l'objet d'une recherche visant à lui conférer structures internes et logiques autonomes qui entretiennent des liens complexes et délicats avec l'ordre du discours formalisé, une chose est pour l'instant certaine : le champ mathématique est universellement traversé par ce que nous appellerons dorénavant l'*irréversible-synthétique*. Est *synthétique* tout raisonnement qui compose avec des objets de pensée et qui rassemble des éléments de connaissance en un tout cohérent, en travaillant de manière locale ou (partiellement) globale. Est *irréversible* tout phénomène physique qui ne fonctionne que dans un seul sens, sans pouvoir être renversé spontanément, comme par exemple la formation d'un précipité chimique ou l'oxydation du fer. Mais dans le domaine abstrait, l'irréversible ne peut pas être caractérisé en termes organiques, ou être quantifié en termes d'entropie. Parler d'« irréversibilité mathématique » ne constituerait certainement pas une expression adéquate, parce qu'il n'y a pas, dans le domaine de la pensée pure, de démonstrations en marche par elles-mêmes qu'il suffirait de déclencher en confrontant les définitions aux questions, dans un creuset magique et hypothétique que personne n'a encore découvert.

En mathématiques, nul automatisme empirique, et il n'y a pas d'essence motrice séparée.

Aussi l'« irréversible » doit-il se rapporter dans sa notion propre[1] à ce qui fait que l'essence des mathématiques est de démontrer synthétiquement, chaque démonstration *synthétique* faisant *basculer les contenus de manière irréversible dans le champ expansif des résultats rigoureusement établis*.

En résumé, la thèse forte autour de laquelle se concentre la pensée de Wittgenstein dit simplement que l'irréversible-synthétique domine le statut de la proposition mathématique : c'est dans l'*a posteriori* d'une synthèse, et seulement dans cet *a posteriori*, que s'affirme la signification mathématique d'un énoncé.

Insuffisances spéculatives. Toutefois, un réel danger de circularité menace toute position qui affirme unilatéralement une thèse d'opposition, quelle qu'en soit la portée. Parce qu'elle s'inscrit dans la temporalité propre du monde, l'opposition fondamentale entre l'« avant » et l'« après » appartient en effet aux dialectiques les plus évidentes et les plus omniprésentes pour ce qui est de la vie continue de l'esprit. D'un point vue spéculatif, on ne peut pas se cantonner à répéter cette constatation chaque fois qu'on la voit se manifester dans la vie propre des étants abstraits et concrets que l'on fréquente, *parce que* de très nombreuses questions théoriques invitent à explorer les failles imprécises de ce « fossé conceptuel » qui sépare démonstrations achevées et supputations provisoires.

[1] Le biologique du rationnel doit notamment y consacrer son potentiel d'irréversibilité.

• Quand peut-on parler de validation définitive d'un résultat mathématique ? Quel critère choisir ? Quelle ligne de démarcation proposer ?

• La pensée du conjectural doit-elle être considérée par principe comme définitivement éliminée à l'instant même où la proposition mathématique formalisée confirme l'attente de vérité ? Comment alors s'effectue une telle « cristallisation-élimination » ?

• À quel moment peut-on être certain que la proposition s'incrit véritablement dans le système grammatical autorisé ? Doit-on établir des nuances en fonction de la structure, de la longueur et de la complexité des preuves ? Si l'on décompose un théorème donné en fractions partiellement ou totalement vérifiées, doit-on être conduit à parler d'hétéronomie du champ démonstratif ?

• Lorsqu'il est soumis à révision (correction), comment un théorème donné modifie-t-il son inscription dans la grammaire générale des énoncés mathématiques ?

• Quel statut donner aux preuves formelles qui ont été publiées dans des revues de mathématiques internationales, mais qui se sont en vérité avérées incorrectes après examen ultérieur, et souvent imprévisible, par d'autres mathématiciens ? Le philosophe du « fossé conceptuel » a-t-il été victime d'une illusion, d'un mirage ? Quand et comment peut-il être certain qu'il s'en rend compte[2] ?

• À quel moment « *cela* » bascule-t-il ? et à quel moment « *cela* » repivote-t-il en arrière en cas d'erreur ? Où et quand mémoriser l'erreur ? Quel statut lui réserver ?

Dérobade philosophique. Or face à de telles questions préliminaires, Wittgenstein semble choisir de se soustraire sciemment, intentionnellement au devoir d'analyser et de penser la complexité des liens qui unissent la pensée intuitive, prospective et informelle au régime d'appropriation réglée qu'offrent axiomatisation et formalisation.

---

[2] Wittgenstein dit bien : « La proposition avec sa démonstration appartient à une tout autre catégorie que la proposition sans la démonstration ». Onze années séparent les deux « preuves » du théorème des quatre couleurs publiées par Kempe en 1879 et Tait en 1880 de la découverte par Petersen en 1891 de la présence d'un « trou » tellement important qu'il fallut encore attendre 1976 (Appel et Haken, après des idées décisives de Birkhoff, Heesch et d'autres) pour que l'on domine la « zoologie » des milliers de noyaux « inévitables » qui remplaçaient le « centre » de la carte dont était parti Kempe.

> La proposition mathématique non démontrée ne contient pas une anticipation d'un fait qui a pu être suggéré par des expériences et dont la démonstration se chargera d'établir l'existence. Wittgenstein dit d'elle qu'elle est « un poteau indicateur pour la recherche mathématique, une incitation à des constructions mathématiques » (PG, p. 371). Ce qui lui donne pour l'instant un sens mathématique est essentiellement le complexe de résonances, d'associations, d'analogies, *etc.* qu'elle suscite dans le système des mathématiques et qui fournit à la fois un stimulant et une direction à la recherche. [**59**], p. 195.

Poteau indicateur, poteau télégraphique, poteau-frontière, résonances imprécises, analogies — voilà ce à quoi semble être réduite la pensée en acte dans la recherche effective. Boîte noire, dirons-nous tout simplement : opaque au philosophe, elle fonctionne à une distance éloignée de lui ; et c'est bien de la tête « noire » du mathématicien qu'il est question ici ; pourtant, la tâche que s'assigne le philosophe wittgensteinien met *a priori* entre parenthèses le devoir de comprendre et de fréquenter les réseaux de raisonnements qui *produisent* les constructions mathématiques formalisées. C'est cela que pourrait être tenté de lui reprocher tout mathématicien professionnel habitué à *jongler entre les deux niveaux en diluant des frontières imprécises*, habitué à métamorphoser des briques de rigueur formelle en *forces argumentatives douées de mobilité questionnante*, habitué à *vivre pendant des années en compagnie de problèmes ouverts partiellement explorés*, et dont il est incapable, tout autant que ses collègues et concurrents directs, d'évaluer l'horizon de difficulté rémanente, c'est bien cela en effet qu'on serait tenté d'opposer à Wittgenstein, si son discours portait véritablement sur les mathématiques tout entières, comme semblerait le prétendre son vocabulaire qu'il ne veut jamais spécifique ou spécialisé ; et même sans chercher la polémique — je dirais même plus, sans chercher l'affrontement avec des adversaires peut-être inconsistants à qui les vraies difficultés, tant qu'ils s'y dérobent, restent invisibles — on pourrait de surcroît se demander véritablement comment il a pu être possible, dans l'histoire des idées, que la parole très assertorique de certains qui n'ont jamais « créé » de mathématiques soit parvenue à énoncer et à faire circuler un discours qui puisse faire autorité, dans certains milieux philosophiques, quant à la manière dont les mathématiques « se » créent, l'emploi du pronominal réfléchi « se » montrant ici *cum grano salis* à quel point il s'agit d'une « boîte » absolument « noire » pour ceux qui tentent d'échafauder un discours universel à ce sujet.

Liberté mathématique. Aucun discours universel sur les actes de « basculement » vers des résultats vrais, nouveaux et sanctionnés n'est parvenu à s'ériger, à aucune période de l'histoire des mathématiques, en tant que champ de principes stables, série de méthodes directives, ou ordre réglé de découvertes potentielles.

Les mathématiques sont un outil de liberté. Adrien DOUADY.

Tous les mathématiciens professionnels savent la mathématique trop libre de par son caractère imprévisible, notamment parce qu'ils éprouvent journellement l'« exoticité » et l'« incompréhensibilité » de tous les résultats mathématiques qui sont éloignés de ce qu'ils connaissent de très près. Naïvetés, donc, que les séduisantes formules wittgensteiniennes ! — lorsqu'elles extrapolent dogmatiquement leur portée en abusant de généralité terminologique.

Au contact des mathématiques contemporaines et s'il se décidait à les fréquenter véritablement et à les analyser dans leur complexité actuelle, Wittgenstein ressuscité démultiplierait peut-être sa pensée, mais on ne pourrait pas alors tout à fait exclure que ses lecteurs épigones ne puissent plus être à même d'étudier ses travaux pour asseoir une autorité philosophique. Imaginons en effet ses paragraphes compacts de deux à vingt ou trente lignes — si faciles à lire pour le commun des philosophes — se métamorphoser en centaines de pages ciselées qui exigent des années de formation mathématique préalable ?

L'irréversible mathématique doit forcer à complexifier les règles du jeu exégétique.

Conjectures expérimentales étrangères aux démonstrations rigoureuses. Après cette brève contre-argumentation, reprenons l'examen des thèses wittgensteiniennes au sujet de l'induction en mathématiques.

> Wittgenstein soutient qu'il existe un gouffre conceptuel infranchissable entre la conjecture, qui anticipe les résultats d'une série d'expériences de calcul hypothétiques, et la démonstration, qui prescrit, de façon complètement impersonnelle et intemporelle, quelque chose à propos des résultats en question. La première, pour autant qu'elle ressemble à ce qu'on appelle ordinairement une conjecture, dit simplement qu'aucun contre-exemple ne se présentera, la seconde exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple. [**59**], p. 194.

Effectivement, la différence est radicale : rappelons par exemple le destin « attentiste sur plus d'un siècle » de la loi *quantitative* de répartition des nombres premiers[3] : par des arguments élémentaires, Legendre a montré en 1808 que l'ensemble des nombres premiers admet une densité nulle sur $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$; mais comme Euler avait déjà établi auparavant que la somme des inverses des nombres premiers diverge : $\sum_{p\,\text{premier}} \frac{1}{p} = +\infty$, cette densité nulle ne pouvait pas signifier une très forte raréfaction. Existe-t-il alors une loi mathématique qui décrit cette raréfaction de manière quantitative ?

---

[3] *cf. e.g.* J.-P. DELAHAYE, *Merveilleux nombres premiers. Voyage au cœur de l'arithmétique*. Belin, Paris, 2000.

Ce fut semble-t-il dès 1792 qu'à l'âge de 15 ans, Gauss émit la toute première *hypothèse quantitative précise* de raréfaction[4] : en examinant les tranches de 1 000 entiers dans les tables de nombres premiers (qu'il corrigeait au passage jusqu'à des entiers dépassant plusieurs millions), Gauss observa qu'au voisinage d'un entier n quelconque, la densité des nombres premiers est de l'ordre de $\frac{1}{\log n}$. Alors il émit l'hypothèse que le nombre $\pi(n)$ de nombres premiers inférieurs ou égaux à n devrait être asymptotiquement égal au logarithme intégral[5] $\int_2^n \frac{dt}{\log t}$. L'approximation équivalente un peu moins précise $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ a été conjecturée[6] par Legendre en 1808.

[4] Ce fait est attesté en 1848 dans une réponse de Gauss à l'astronome allemand Johan Encke qui aurait découvert une loi similaire ; les mentions éparses que Gauss formulaient dans sa maturité quant à ses découvertes de jeunesse sont à prendre très au sérieux, étant donné qu'il se refusait à publier la plupart de ses résultats partiels, et *a fortiori* les conjectures qu'il n'était pas parvenu à démontrer.

[5] Extraits de la lettre de Gauss à Encke, 24 décembre 1849, traduite en anglais dans : L.J. GOLDSTEIN, *A history of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 599–615 : « Your remarks concerning the frequency of primes were of interest to me in more ways than one. You have reminded me of my own endeavors in this field which began in the very distant past, in 1792 or 1793 after I have acquired the Lambert supplements to the logarithmic tables. [...] I counted the primes in several chiliads [...]. I soon recognized that behind all of its fluctuations, this frequency is on the average inversely proportional to the logarithm, so that the number of primes below a given bound n is approximately equal to $\int \frac{dn}{\log n}$, where the logarithm is understood to be hyperbolic. Later on, when I became acquainted with the list in Vega's tables (1796) going up to 400 031, I extended my computations further, confirming that estimate. In 1811, the appearance of Chernau's cribrum gave me much pleasure and I have frequently (since I lack the patience for a continuous count) spent an idle quarter of an hour to count another chiliad here and there ; although I eventually gave it up without quite getting through a million. Only some time later did I make use of the diligence of Goldschmidt to fill some of the remaining gaps in the first million and to continue the computation according to Burkhardt's tables. Thus (for many years now) the first three millions have been counted and checked against the integral.

n	$\pi(n)$	$\int \frac{dn}{\log n}$	ERROR	YOUR FORMULA	ERROR
500 000	41 556	41 606,4	+50,4	41 596,9	+40,9
1 000 000	78 501	79 627,5	+126,5	78 672,7	+171,7
1 500 000	114 112	114 263,1	+151,1	114 374,0	+264,0
2 000 000	148 883	149 054,8	+ 171,8	149 233,0	+350,0
2 500 000	183 016	183 245,0	+229,0	183 495,1	479,1
3 000 000	216 745	216 970,6	+225,6	217 308,5	+563,5

[...] The chiliad from 101 000 — 102 000 in Lambert's Supplement is virtually crawling with errors ; in my copy, I have indicated seven numbers which are not primes at all, and supplied two missing ones. [...]. »

[6] En fait, dès 1798, Legendre affirmait que l'on a exactement $\pi(n) = \frac{n}{\log n + A(n)}$, « où $A(n)$ est approximativement égal à $1,08366\cdots$ ». Mais cet énoncé incorrect devait être mis en défaut assez rapidement.

Premier moment expérimental, donc, purement observationnel et simplement cantonné à un suivi comptable ; patience obstinée de calculateur prodige et ingénu était ici requise[7]. Pour tester ou deviner des lois plausibles, il est *nécessaire*, sinon incontournable, d'*ériger au préalable d'arides pyramides numériques* pour en scruter les structures translucides noyées dans une opacité primordiale[8] — sinon, quelle vision transcendante viendrait secourir l'intuition prospective ? Et actuellement, la théorie dite « computationnelle » des nombres regorge de conjectures observationnelles quantitatives parfaitement certaines, sans qu'aucune des expériences numériques automatisées lancées sur des ordinateurs super-performants ne puisse offrir d'indication quant à un hypothétique champ démonstratif afférent : raison est donc donnée à Wittgenstein sur ce point, si l'on s'en tient aux exemples pour lesquels l'inconnu déductif reste sensiblement à l'écart du scruté expérimental.

Inexactitudes et expressions inappropriées. Toutefois, dans le court extrait de [**59**] reproduit ci-dessus p. 125, la manière même de s'exprimer est

[7] Gauss a donc poursuivi ces recherches bien des années après avoir publié ses *Disquisitiones Arithmeticae*. Mille pages environ sont nécessaires pour écrire ces 216 745 nombres premiers à raison de deux cent dix nombres premiers par page sur trois colonnes. Compter $\pi(n + 1000) - \pi(n)$ est immédiat. Calculer une valeur numérique précise du logarithme intégral prend quelque temps. S'assurer que les tables ne comportent pas d'erreur est beaucoup plus délicat.

[8] Voici un autre exemple célèbre que le labyrinthe de l'induction nous a transmis dans l'histoire des mathématiques. Soit n un entier naturel $\geqslant 1$. Question : de combien de manières distinctes peut-on casser n en morceaux discrets, *i.e.* écrire $n = a + b + c + \cdots$, où a, b, c, $\ldots$ sont des entiers $\geqslant 1$? En fait, il y a *deux* questions, suivant que l'on décide (ou non) de tenir compte de l'ordre dans lequel sont écrits les constituants de n. Avec distinction de l'ordre de sommation, la réponse est essentiellement *trop* simple : une démonstration par récurrence montre en effet qu'il y a juste 2^{n-1} possibilités, par exemple : $3 = 2+1 = 1+2 = 1+1+1$. Mais les choses sont incroyablement plus compliquées lorsqu'on néglige l'ordre ; notons donc $p(n)$ le nombre de *partitions* de n ; par exemple pour $n = 5$, on a $p(5) = 7$, car $5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$.

> There is a famous story concerning the search for some kind of pattern in the table of the $p(n)$'s. This is told of Major Mac Mahon who kept a list of these partition numbers arranged one under another up into the hundreds. It suddenly occured to him that, viewed from a distance, the outline of the digits seemed to form a parabola ! Thus the number of digits in $p(n)$, the number of partitions of n, is around $C\sqrt{n}$, or $p(n)$ itself is very roughly $e^{\alpha\sqrt{n}}$. The first crude assessment of $p(n)$!
> Among other things, however, this does not tell us not to expect any simple answers. Indeed later research showed that the true asymptotic formula for $p(n)$ is $\frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4\sqrt{3}\,n}$! D.J. NEWMAN.

imparfaite et inadéquate, voire tout simplement « **fausse** », si l'on doit s'autoriser à employer, au sein d'un débat de philosophie des mathématiques, une terminologie typique de la pratique des mathématiciens.

Tout d'abord, l'adjectif « infranchissable » dans l'expression « gouffre conceptuel infranchissable » est absurde : au contraire, certaines conjectures ont été, sont et seront démontrées. Justement les mathématiciens inventent des concepts dont ils « remplissent » ces « fossés conjecturaux » jusqu'à pouvoir les *franchir*. Toute la difficulté est de pouvoir penser ce mouvement complexe et mystérieux. Place aux paradoxes, aux questions et à la philosophie !

> The brain of every mathematician carries a fragment of our "cloud in the tree", a little personal cloud where our synapses touch Hilbert's tree. These little clouds may have fractal geometry and thus relatively large boundaries. Hard to tell at this stage but one may take analogy from the study of the human movements where our neuron's system *avoids* most paths through many degrees of freedom as experiments show. This may be also the mathematical strategy of our brain, responsible for instance, for the equality $P = NP$ of everyday mathematics. We solve our problems essentially as fast as we state them. It took, probably, a couple of thousand brain-hours to state the Fermat theorem and mere instance (compared to $\exp 2000$) to solve it, no more than 10^5 brain-hours. (Actually, one has to compare the length of the proof to the time needed to find it. Maybe, the *shortest* proof of Fermat in reasonable units is of the order $\log$(time spent on the search of the proof).) This "practical equality" $P = NP$ is in flagrant contradiction with our mathematical intuition as we expect NP to be far away from P. Here is a fundamental gap in our understanding (if there any) of how mathematics works. We need, besides pure thought, biological, psychological study and/or computer experimentation. But as a community we shy away from such problems, scared of contamination by philosophy. Mikhail GROMOV.

Ensuite, la démonstration mathématique ne « prescrit » pas[9], elle *établit* (des propositions, des résultats, des théorèmes). On pourra certes admettre qu'elle « empile » des arguments, qu'elle « aligne » des raisonnements, qu'elle « combine » des techniques diverses. Mais le terme inapproprié « prescrire » est vraiment à proscrire, ne serait-ce que parce qu'il suggère quelque chose comme une décision de législateur ou un acte médical, bref une espèce de recommandation expresse, d'exigence, d'obligation ou d'ordre qu'il serait déraisonnable et fou de proférer face à certains problèmes très ouverts qui se posent avec tout un réservoir de potentialités imprévisibles.

---

[9] Nous poursuivons l'analyse critique de l'extrait en question, p. 125.

Même s'il doit s'agir de règles, d'axiomes, ou de déclarations syntaxiques de concepts, « prescrire » ne peut en aucun cas absorber la portion principale de l'énergie de recherche en mathématiques. En effet, le champ mathématique n'est pas simplement « prescrit » ou « déclaré » par des démonstrations ou par des règles de langage, fussent-elle dûment établies avec toute la rigueur formelle, parce que la « prescription » ou plutôt la « déclaration » et la « mise en place » des « règles » n'est qu'un prologue au déploiement du champ de l'irréversible-synthétique, qui s'éclaire ensuite grâce à des quanta argumentatifs articulés et mobilisés dynamiquement *dans* les démonstrations.

De plus, affirmer que la « démonstration mathématique prescrit [...] quelque chose à propos des résultats en question » constitue une périphrase raccourcie, maladroite et trop rapide pour nommer le lien complexe qui unit les énoncés aux arguments, comme si ce que la démonstration dévoile du résultat qu'elle démontre devait subir un dédoublement et se constituer en même temps comme une réalisation exemplaire du point de vue grammatical prescriptif ; comme si les chaînes formalisées d'arguments lançaient, dans le champ de l'indéfini axiomatisé, un éclair qui se pétrifierait du même coup pour confirmer l'immanence fixée de l'univers des règles ; bref, comme si toute démonstration mathématique devait nécessairement être entraînée dans une métaphysique wittgensteinienne.

Ici encore, la généralité du vocabulaire invite à négliger la complexité des situations : le caractère toujours partiel des saisies axiomatico-formalistes dans la pratique mathématique, et la permanence des horizons imprécis de questionnement font que la démarcation même entre l'argumentatif et le déductif se fragmente à la fois dans l'histoire d'une spécialité et dans l'appréhension mentale des théorèmes. En tout cas, que l'on n'objecte pas que la rapidité d'exécution des phrases examinées expose inévitablement à certaines imperfections, car il s'agit bien ici d'un des problèmes les plus difficiles de la philosophie des mathématiques : penser la réalisation de l'irréversible-synthétique. Finesse de la spéculation et précision dans la terminologie doivent être d'emblée exigées.

Continuons : que fait la conjecture ? Non, elle n'« anticipe » pas « les résultats d'une série d'expérience de calculs hypothétiques » ! Même en se restreignant aux aspects purement expérimentaux de la théorie des nombres (le conjectural s'exerce en fait dans toutes les spécialités mathématiques), il serait fort réducteur de n'y voir qu'une prévision tout expérimentale d'expériences numériques futures. Bien que la phrase citée soit contrainte ici de continuer à maintenir une nette démarcation afin de garantir la cohérence locale de sa thèse, il nous faut rappeler que la conjecture énonce des règles, prétend des régularités, soupçonne des théorèmes, devine des lois, et s'exprime la plupart du temps dans le même langage formalisable que toutes les propositions qui sont dûment établies dans le sanctuaire hypothético-déductif. Une conjecture ordinaire, c'est un énoncé sans démonstration, l'énoncé vraiment possible d'un théorème vraisemblable que l'on pose dans un moment de suspens face à de l'inconnu qui résiste. Par définition, la conjecture est un énoncé potentiel fort d'une pensée structurée, bien que transversale au régime réglé des grammaires formelles, c'est un énoncé qui appelle une démonstration, ou qui subira une réfutation.

Dans la communauté internationale des mathématiciens, rares sont les conjectures qui s'affirment comme citadelles de pensée résistant à de multiples assauts intellectuels : en un mot, rares sont les conjectures dignes de ce nom, parce que la conjecture requiert d'embrasser des abysses synthétiques spécifiques qui focalisent un fort enjeu mathématique et face auxquelles on doit se sentir écartelé et trop faible pour s'autoriser à en dire quelque chose.

> As you said, Don [Zagier], the conjecture is the most responsible thing one can do and sometimes people make conjectures when they absolutely have no right to make conjectures. A conjecture really comes hard. I agree with you, Don, that one could make a serious conjecture once or twice in one's life, after deep thinking. You come to a deep understanding, and you cannot finish it, and you make a conjecture. You just cannot turn any question into a conjecture. Mikhail GROMOV

Il est par ailleurs surprenant de lire dans le même extrait (p. 125 *supra*) que la conjecture « dit simplement qu'aucun contre-exemple ne se présentera », car dans la forme même de son énonciation, la conjecture ne s'attarde en général pas à se contraposer elle-même : le spectre de sa fausseté contre-exemplifiable fait partie de sa rhétorique archaïque — inutile de rappeler cette donnée —, et seuls les mathématiciens les plus avisés seront à même de prendre à rebours les conjectures encore plus rares qui se trompent d'orientation, parmi celles qui sont connues comme étant d'un enjeu central[10]. Pour la même raison, il est fort inapproprié d'écrire — même en acceptant l'intrusion de points sophistiques involontaires — que la démonstration « exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple » : inapproprié en effet premièrement parce que les démonstrations mathématiques n'orientent presque jamais[11] leurs parcours en excluant des contre-exemples potentiels : leur structure manifeste en général un caractère argumentatif direct ; mais ce n'est pas tout, cela est inapproprié aussi, deuxièmement et même d'un

[10] Le conjectural alimentaire de la recherche mathématique courante est ici tenu à l'écart de l'argumentation.

[11] La démonstration courante du théorème des quatre couleurs offre un exemple exceptionnellement riche de stratégie d'élimination systématique de contre-exemples potentiels.

point de vue wittgensteinien « puriste », puisque, si l'on admet comme le soutient Wittgenstein que la structure logique intrinsèque de toute démonstration doit s'identifier au seul sens que l'on peut conférer à l'énoncé qu'elle démontre, alors toutes les fois qu'une démonstration ne procède pas en éliminant tous les contre-exemples imaginables (ce qui arrive la plupart du temps), il est faux qu'une démonstration « exclut que quelque chose puisse être appelé un contre-exemple ». À tout le moins, une démonstration sanctionnée doit exclure toute recherche de contre-exemple à l'énoncé précis qu'elle démontre, sans pour autant empêcher de réfléchir à l'optimalité des hypothèses en recherchant des contre-exemples à des énoncés légèrement modifiés plus ambitieux. Tout énoncé est accompagné d'un horizon coprésent de virtualités indécises concernant les hypothèses qui le constituent.

Reprise sur le théorème des nombres premiers. *Lucidité parfaite sur le fait que le sens de la proposition s'identifie au contenu de sa démonstration effective ; rigueur sur l'étrangeté irréductible de nature entre l'inductif et le déductif* : tel semble être l'apport majeur que Wittgenstein exprime de manière récurrente comme s'il s'agissait de sa « crispation spéculative » principale sur les mathématiques.

Sur le même exemple arithmétique continué, voici une confirmation historique des écarts temporels importants qui peuvent séparer les preuves des conjectures : après des travaux de Riemann, Bertrand, Tchebychev, Mertens et d'autres, ce ne fut qu'un siècle après les premières observations de Gauss, en 1896, que l'hypothèse quantitative de répartition fut dûment et rigoureusement démontrée par Hadamard et de la Vallée Poussin, en utilisant les méthodes transcendantes de la théorie des fonctions d'une variable complexe : *Le nombre $\pi(n)$ d'entiers positifs $p \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ qui sont premiers tend vers l'infini de la même façon que $\frac{n}{\log n}$.* Autrement dit :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{\frac{n}{\log n}} = 1,$$

ce que l'on écrit parfois $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$.

Ainsi, la loi expérimentale pressentie se révèle correcte. Seule une démonstration est à même de spécifier comme vraie cette estimation quantitative. En l'occurence ici, les premières démonstrations étaient longues et délicates. Raison est donc donnée au philosophe analytique wittgensteinien, car tester ou découvrir expérimentalement cette loi en examinant une liste de nombres premiers avec l'aide des tables de logarithmes constitue une suite de gestes et d'actes de pensée (assez simples et plutôt répétitifs) qui n'ont absolument rien à voir avec des arguments de preuve délicats.

Concluons localement ces considérations : en revenant à l'extrait cité *supra* page 125, il s'agit encore et toujours du même « fossé conceptuel », ou plus exactement d'une *distinction fondamentale* entre :

1) les énoncés mathématiques (notamment en théorie des nombres) qui sont conjecturés grâce à des tests expérimentaux, à des calculs numériques effectués automatiquement, à des listes exhaustives de nombres, *etc.*, et :

2) les démonstrations mathématiques rigoureuses.

Approfondissons cela. En quoi et pourquoi est-il presque toujours beaucoup plus facile de formuler des conjectures expérimentales que de trouver des démonstrations ? Cette question est subtile. Commençons par une conjecture simple qu'aucune théorie n'accompage.

Conjecture de Collatz. Considérons le procédé suivant, que l'on peut expérimenter sur de nombreuses sites Internet. Étant donné un nombre entier initial arbitraire $n \geqslant 1$, le remplacer par $n/2$ s'il est pair, ou par $3n + 1$ s'il est impair ; itérer ce calcul ; observer que pour toutes les valeurs de n jusqu'à, disons 100 ($\sim 10^{18}$ en 2007), on redescend toujours à 1 (suivi du cycle $1 \to 4 \to 2 \to 1$) après un certain nombre d'itérations. *Conjecturer qu'il en va de même pour tout entier* n.

Il n'existe pas de « recette mathématique » plus simple. Par exemple, pour $n = 6$, on obtient la suite 6, 3, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1. On peut en remplir le ventre des ordinateurs. Seule limite physique : la taille des données stockées. Pour $n = 11$, quatorze itérations sont nécessaires ; pour $n = 27$, cent-onze (!), et les termes intermédiaires montent jusqu'à 4 858, redescendent à 911, remontent à 9232, avant de redescendre à 1 en sursautant plusieurs fois. Où est la difficulté ? Dans l'absence de loi simple ? Dans le chaotique ?

En 1996, T. Oliveira e Silva a écrit un programme en langage C qui calcule les trajectoires de toutes les valeurs initiales n inférieures à une limite donnée. Une fois lancé, le programme couvre des intervalles de 2^{50} entiers. Sur un ordinateur d'une mémoire vive de 266 MHz, en tenant compte de raffinements algorithmiques suggérés par E. Roosendaal (un concurrent international), près de 400 millions d'entiers (en moyenne) peuvent être traités à chaque seconde. Ce test fut stoppé quand $100 \cdot 2^{50}$ fut atteint.

Depuis Juin 2004, les efforts de vérification ont repris. Les calculs tournent depuis plus de trois ans. Il sont distribués sur une vingtaine d'ordinateurs, utilisent des algorithmes révisés qui sont trois fois plus rapides que les précédents, et permettent de couvrir des intervalles de 2^{58} entiers (facteur d'amélioration : $2^8 = 256$). Au printemps 2007, Collatz est confirmé pour tous les entiers jusqu'à $14 \cdot 2^{58} \simeq 4 \cdot 10^{18}$. Par ailleurs, Collatz se vérifie rapidement[12] pour des entiers $n \leqslant 10^{500}$ tapés au hasard sur un clavier, parce que les calculs sont triviaux pour la machine.

La maxime capitale de l'induction. Soit une conjecture *ouverte* quelconque $\mathsf{Cjct}(n)$ portant sur une quantité qui dépend d'un entier n arbitraire. Voici ce que rappelle la « *maxime capitale de l'induction* » : quelle que soit la hauteur impressionnante — $n \leqslant 3\,000\,000$, $n \leqslant 10^{18}$, $n \leqslant 10^{20}$, *etc.* — jusqu'à laquelle $\mathsf{Cjct}(n)$ a été confirmée, elle *peut toujours* être fausse. Sa probabilité de justesse, comme sa probabilité de fausseté, sont essentiellement inquantifiables.

> On a essayé d'évaluer la probabilité des inductions ou des hypothèses en introduisant le concept de degré de confirmation d'une hypothèse relativement à des faits. Ce degré de confirmation coïncide à peu près avec une probabilité conditionnelle. Les logiques inductives que l'on construit sur cette relation se sont révélées des formalismes encombrants et inféconds. Il serait raisonnable de renoncer à trouver à l'induction un fondement logique. Jean LARGEAULT.

L'indécision pure quant à la potentialité d'être ou de ne pas être nous est imposée par l'imprévisibilité des mondes temporels. Misère et dénuement de l'entendement qui ignore !

Parfois, après des décennies de recherches, les réponses sont crucifiantes. Plus d'une conjecture importante s'est révélée contredite à des hauteurs exceptionnellement élevées de l'entier n[13].

> XXXV. Il n'est pas possible à celui qui commet clandestinement quelque chose de ce que les hommes ont convenu entre eux de ne pas commettre pour ne pas faire de tort ni en subir, d'être sûr qu'il ne sera pas découvert, même si, dans le présent, il y échappe dix mille fois, car, jusqu'à sa mort, l'incertain est s'il continuera à n'être pas découvert. ÉPICURE, *Maximes capitales*.

Aussi l'évidence expérimentale ne *doit*-elle pas exister. L'empiriste anti-inductif insiste : pour l'induction, il *doit* ne pas y avoir de principe heuristique ou pseudo-probabiliste, *parce que* le faux est toujours disponible dans l'ouvert. Le philosophe analytique wittgensteinien navigue aussi dans ces prologues de la spéculation mathématique spécialisée. Peut-il alors y avoir un dogmatisme de l'indécision ? À tout le moins, le *maintien rigoureux de l'ouverture* constitue un *impératif catégorique* de la pensée mathématique.

Mais la croyance en la véracité ou en la fausseté de $\mathsf{Cjct}(n)\ \forall\, n$ doit forcer à engager des actes irréversibles. Encore une fois : s'orienter, se confronter,

[12] `did.math.uni-bayreuth.de/personen/wassermann/fun/3np1.html`

[13] Citons par exemple la conjecture de Pólya, la conjecture de Mertens et les nombres de Skewes.

c'est se potentialiser, donc s'imprévisibiliser. Il va ainsi dans le monde mathématique.

Pour la conjecture de Collatz (ouverte depuis 1937), aucun appareil théorique n'existe : c'est un cas exceptionnel. La sonde innocente :

$$n \longmapsto \begin{cases} n/2 \ \text{ si } \ n \ \text{ est pair} \\ 3n+1 \ \text{ si } \ n \ \text{ est } \textit{im}\text{pair} \end{cases}$$

est lancée dans l'indéfini potentiel primordial $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$. Il y a une *règle de calcul*, au sens de Wittgenstein. Mais aucun encadrement théorique n'est connu, y compris pour d'autres sondes analogues[14].

Mathematics is not yet ready for such problems. Paul ERDÖS.

Quel contraste entre cette règle d'itération simplissime et le chaos des résultats obtenus ! L'« écart », le « fossé conceptuel » se fait d'autant plus sentir qu'aucune démonstration n'existe en germe. On ne dispose que d'un raisonnement probabiliste non rigoureux pour se convaincre d'une éventuelle véracité de cette conjecture[15].

S'il doit y avoir des lois prédisant le comportement de ces suites, il faut les extraire du chaos expérimental. Deux lois conjecturales ont été observées[16]. Elles raffinent la perception de ce problème, sans donneraucune indication de preuve.

- L'*excursion maximale* de n, à savoir la valeur entière maximale de sa trajectoire (9 232 pour $n = 27$) semble se comporter asymptotiquement comme n^2, tout en fluctuant autour de cette valeur.

---

[14] LAGARIAS, J.C. : *The* $3x + 1$ *problem and its generalizations*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 3–23.

[15] Si l'on considère seulement les nombres impairs dans la suite de Collatz, alors *en moyenne* le nombre impair suivant est multiplié par $3/4$. Voici l'argument heuristique.

Prenons un entier n_0 *impair* et itérons le procédé de Collatz jusqu'à obtenir un prochain entier impair n_1. Que vaut en moyenne le rapport n_1 / n_0 ? En supposant que le devenir est soumis à des lois probabilistes équidistribuées et mélangeantes, on a : une fois sur deux $n_1 = (3n_0 + 1)/2$; une fois sur quatre $n_1 = (3n_0 + 1)/2^2$; une fois sur huit $n_1 = (3n_0 + 1)/2^3$; *etc.* ; par conséquent, la croissance moyenne de taille attendue entre deux entiers impairs consécutifs n_0 et n_1 devrait être égale à :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{1/2} \left(\frac{3}{2^2}\right)^{1/4} \left(\frac{3}{2^3}\right)^{1/8} \cdots = \frac{3}{4} < 1.$$

Ainsi, cet argument suggère qu'en moyenne, les itérés impairs décroissent d'un facteur $\frac{3}{4}$. Mais l'hypothèse d'équidistribution et de mélange n'a pas encore pu être démontrée ; de plus, comme le raisonnement est probabiliste, même s'il était rigoureux, il ne pourrait pas exclure l'existence de cycles élevés qui seraient exceptionnels par rapport au comportement moyen.

[16] Sur la page : `www.ieeta.pt/~tos/3x+1.html`, le lecteur trouvera deux graphiques convaincants.

- Le *temps d'arrêt* d'un entier n, à savoir le plus petit nombre d'itérations nécessaires pour passer en-dessous de n (et se ramener, par récurrence à un entier déjà examiné), semble se comporter comme $\log n$, avec des fluctuations plus importantes.

Libération par le contre-exemple ? Phénomène radicalement irréversible, l'avènement d'un contre-exemple libère immédiatement de la question initialement posée, il libère d'un travail de calcul indéfini, il arrête net une poursuite aveugle du programme. À cet instant, toutes les intentions doivent changer, tous les projets doivent être réorientés, toutes les intuitions être réorganisées, et on stoppe les 20 ordinateurs calculant en parallèle depuis plus de trois ans, et les 50 chercheurs concernés dans le monde se remettent en question. C'est cela l'« *irréversible mathématique* ».

Virtualités pérennes du principe de raison. Mais très souvent, le contre-exemple révélé ne libère en rien de la question en tant que question, parce que la question ne s'était qu'imparfaitement exprimée dans la conjecture. La conjecture prétendait que les êtres qu'elle interrogeait jouissaient d'une certaine simplicité comportementale encadrée par certaines loi quantitatives, mais elle n'effaçait pas toutes les complexités adventices de ces êtres qui s'étaient déjà pré-exprimées dans les moments de virtualisation collatérale.

Le conjectural commence toujours par prétendre pour lui-même que le simple domine, en tant que forme d'ensemble des phénomènes. Puis, s'il se trompe, il corrige, il affine, il repousse, il accepte, il complexifie. Curieusement, la dialectique du conjectural ne cesse de remobiliser le même mouvement inépuisable de pensée qui cherche à prévoir et à deviner des lois mathématiques régulatrices. Si le « principe de raison » a envahi la pensée technicienne, comme l'a parfois déploré Heidegger, cela même reste un mystère pour nous de savoir ce qu'il y reste de pensée métaphysique et comment cette pensée métaphysique irrigue encore continûment la pensée technique.

Actifier la question. Supposons découvert un cycle de Collatz très élevé — un contre-exemple — mais faisons rigoureusement abstraction des questions nouvelles qui surgiraient après coup. Le chaos stochastique des boucles attirées par le cycle $1 \to 4 \to 2 \to 1$ *que l'on avait déjà observé avant l'avènement dudit contre-exemple* n'en serait pas moins mystérieux, *toujours* en question. Les questions demeurent parce que le questionnement focalise son faisceau sur des affirmations hypothétiques transitoires. Mais le questionnement est toujours déjà éclaté au moment où il s'exprime. Le questionnement est un acte spécifique de décision multiple que l'on peut toujours reproduire, exporter, ramifier et faire éclater. *Le questionnement est un <u>acte</u> élémentaire*, un acte naturel qui va de soi, et cet acte est analogue dans sa finitude aux actes argumentatifs élémentaires du discours déductif (nous y reviendrons). La forme même des questions mathématiques est essentiellement simple, atomique.

Pourquoi la question mathématique atomique produit-elle de l'irréversible-synthétique organique ?

Ici transparaît une thèse de philosophie des mathématiques que nous jugeons capitale mais que nous ne dévoilerons pas encore pour l'instant.

> We have to assume that we are very stupid and our natural questions are stupid, and only by hard work, by conceptualizing, working hard, calculating, whatever, we can make good questions or good mathematics. And it's naive to think that we all have intuition or something. It's a stupid opinion. That's what I believe.
>
> Mikhail GROMOV.

Conjecture de Proth-Gilbreath. Deuxième exemple de conjecture purement expérimentale sans arrière plan théorique dont on peut abreuver les ordinateurs. Voici la recette, attribuée à Gilbreath, mais qui remonte à Proth au 19$^{\text{ième}}$ siècle. L'idée consiste à « dévisser » la complexité des nombres premiers en calculant leurs différences successives, ce à quoi Euler s'était adonné avec succès sur de multiples exemples.

Écrire les nombres premiers les uns à la suite des autres sur une première ligne ; écrire sur une seconde ligne la valeur absolue des différences entre deux nombres consécutifs ; itéter cette opération ; conjecturer que chaque ligne commence par **1** :

$k \diagdown n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	**2**	**3**	**5**	**7**	**11**	**13**	**17**	**19**	**23**	**29**	**31**	**37**	**41**	**43**	**47**	**53**
1	**1**	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4	6	
2	**1**	0	2	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	2		
3	**1**	2	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0	0			
4	**1**	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0				
5	**1**	2	0	0	0	2	0	0	0	2	0					
6	**1**	2	0	0	2	2	0	0	2	2						
7	**1**	2	0	2	0	2	0	2	0							
8	**1**	2	2	2	2	2	2	2								
9	**1**	0	0	0	0	0	0									
10	**1**	0	0	0	0	0										
11	**1**	0	0	0	0											
12	**1**	0	0	0												
13	**1**	0	0													
14	**1**	0														
15	**1**															

Plus précisément, soit $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, \ldots,$ les nombres premiers listés dans l'ordre croissant et posons :

$$\left[\begin{array}{ll} d_0(n) := p_n, & n \geqslant 1, \\ d_{k+1}(n) := \big|d_k(n) - d_k(n+1)\big|, & k \geqslant 0, \quad n \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Le tableau montre que $d_k(1) = 1$ pour $1 \leqslant k \leqslant 15$. En 1959, la conjecture $d_k(1) = 1$ pour tout k a été confirmée par Killgrove et Ralston jusqu'aux profondeurs $k \leqslant 63\,419$, et pour tous les entiers premiers $< 792\,731$. En 1993, A.M. Odlyzko[17] confirme le phénomène pour tous les entiers premiers $< 10^{13}$, de telle sorte que $d_k(1) = 1$ jusqu'à une profondeur $\lesssim 3,4 \cdot 10^{11}$.

Pour une première ligne $d_0(n)$ qui serait constituée d'entiers quelconques, le calcul de $d_k(1)$ requiert en général *a priori* la connaissance de tous les $d_j(i)$ pour $i + j \leqslant k + 1$, de sorte que pour $k \sim 3,4 \cdot 10^{11}$, il faudrait calculer aproximativement $5 \cdot 10^{22}$ nombres — au-delà des capactités technologiques actuelles. Mais pour une première ligne constituée des nombres premiers $d_0(n) = p_n$, le tableau montre qu'après un temps assez court, il n'y a plus que des 0 et des 2 après le **1** attendu, et dans un tel cas, *i.e.* si, pour un N on peut trouver un K avec $d_1(1) = \cdots = d_K(1) = 1$ tel que $d_K(n) = 0$ ou 2 pour tout $2 \leqslant n \leqslant N$, alors il est immédiat que l'on a ensuite $d_k(1) = 1$ pour tout $K \leqslant k \leqslant N + K - 1$. Ce phénomène se confirme et permet de réduire considérablement les temps de calcul.

> A rigorous proof of Gilbreath's conjecture appears out of reach, given our knowledge of primes. [...] About half of the machine time was spent in sieving for primes, and half in computing the iterated absolute values of the differences. A.M. ODLYZKO.

Retour sur Wittgenstein : deux universalités incomparables. Reprenons l'opposition wittgensteinienne.

> Ce qui n'est pas concevable, aux yeux de Wittgenstein, est que l'universalité qui nous est fournie par la démonstration, lorsque nous avons réussi effectivement à démontrer la proposition, puisse être celle-là même que des expériences répétées, effectuées avec la méthode de contrôle, nous avaient permis de supputer : « Où est censée ressortir de la démonstration la même universalité que les essais antérieurs rendaient probables ?» (PG, p. 361.) Je peux assurément formuler l'hypothèse douée de sens que, si je teste l'un après l'autre les nombres pairs pour voir s'ils satisfont ou non la proposition de Goldbach, je ne rencontrerai aucun contre-exemple de mon vivant. Mais comment une démonstration de la proposition dans laquelle il n'est question ni de moi, ni de qui que ce soit, ni de ce que je ferai ou ne ferai pas, pourrait-elle démontrer cette supposition ? [**59**], p. 194.

[17] *Iterated absolute values of differences of consecutive primes*, Math. Comp. **61** (1993), no. 203, 373–380.

Certainement, la démonstration ne ressort pas d'une série de tests numériques. La nécessité universelle argumentée transcende la confirmation expérimentale. Mais ici, encore une fois, on projette le débat sur une opposition dualiste simplifiée. Alors que l'irréversibilité historique de la mathématique impose une complexité toujours grandissante aux dialectiques de la découverte, les oppositions en restent ici à un stade non ramifié. L'histoire des confirmations expérimentales s'étend sur plusieurs siècles ; les pratiques ont évolué ; et l'ontologie physique du calcul s'est considérablement enrichie à cause de la reproduction planétaire des machines électroniques. Atteindre un record de confirmation expérimentale pour la conjecture de Goldbach n'a vraiment rien de trivial actuellement ; nous en reparlerons dans un instant.

De plus, l'affirmation « si je teste l'un après l'autre les nombres pairs pour voir s'ils satisfont ou non la proposition de Goldbach, je ne rencontrerai aucun contre-exemple de mon vivant » part d'une prémisse insensée : aucun individu n'a jamais consacré, et ne consacrera jamais l'intégralité de la durée de sa vie à énumérer les cas d'une conjecture telle que celle de Goldbach les uns à la suite des autres jusqu'à son dernier souffle. Résumer sa vie à une finitude éprouvée sur le parcours répétitif d'une seule conjecture, ce serait se condamner et se crucifier. Mais en vérité, nul ne songe à se priver du jeu de l'imprévu et du plaisir de décider de ses propres changements d'orientation intellectuelle.

Autre objection : aujourd'hui, les confirmations expérimentales ne s'effectuent plus à la première personne. Le « je » de l'activité mathématique singulière n'a plus aucun sens, parce qu'il y a un « nous » commun et international de la confirmation expérimentale, qui tend de plus à se dépersonnaliser à cause de l'électronisation du calcul, et de sa transmissibilité par les canaux de communication. Les travaux de confirmation expérimentale se partagent entre les chercheurs.

Poursuivons la critique. Afin de défendre strictement sa thèse dualiste du « fossé » entre expériences numériques et grammaires formelles, le philosophe analytique wittgensteinien affirme que la démonstration rigoureuse d'une proposition mathématique ne peut avoir aucune incidence sur les suppositions qui se formulent *en tant que telles* dans le champ de l'expérience. Ou tout du moins, il affirme que l'universalité hypothétique qui est suggérée dans l'expérience n'est pas subsumée par l'universalité logique de la démonstration, et partant, que l'universalité présumée conserve son autonomie et son irréductibilité de principe. Cette affirmation unilatérale est erronée, et ce, pour quatre raisons.

- Parce qu'elle change le statut de la supposition expérimentale en certitude universelle, la démonstration a un impact immédiat : le caractère hypothétique, problématique et ouvert de la confirmation disparaît du même coup, et toutes les tâches de vérification calculatoire se métamorphosent en simples exercices d'application numérique.

- Pour ce qui concerne la production et l'assimilation de l'irréversible-synthétique, le principe de libre circulation entre l'*a priori* et l'*a posteriori* exige que l'étudiant ou le chercheur doive toujours pouvoir *se réinscrire temporairement dans une situation d'ignorance artificialisée*[18].
- Dès qu'une conjecture est confirmée par une preuve, d'autres suppositions plus ambitieuses peuvent être formulées en partant de raisonnements heuristiques analogues. L'homologie de structure se reproduit.
- La métaphysique audacieuse de la recherche entrelace tous les niveaux formels et informels, avec toujours la même confiance affirmée qu'il doit exister des lois et des démonstrations potentielles.

Certes, la nécessité apodictique de la démonstration ne *démontre* pas quelque chose à propos des suppositions que nous formulons en interrogeant les structures arithmétiques, ni même au sujet de la mystérieuse faculté que nous avons d'énoncer de telles suppositions, mais à tout le moins, il y a là un grand problème de métaphysique des mathématiques qu'on ne peut pas se contenter d'écarter obsessionnellement comme l'a fait Wittgenstein. L'optimisme de Hilbert (*non ignorabimus*) et la méditation rétrograde de Heidegger (domination universelle du principe de raison) ressurgissent comme questions ouvertes de philosophie des mathématiques.

Exemple. Ainsi, nous affirmons que même après qu'une démonstration rigoureuse a été produite, on peut exiger un retour vers l'expérimental numérique, soit comme confirmation d'une sorte d'harmonie préétablie, soit comme pénétration indépendante dans la réalité problématique des mathématiques. Par exemple, dans les années 1910 à 1920, G. Hardy et S.Ramanujan[19] ont découvert une formule approchée pour le nombre $p(n)$ de partitions d'un entier n, dont le terme principal est :

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{2}}\,\frac{d}{dn}\,\frac{e^{\frac{2\pi}{\sqrt{6}}\sqrt{n-\frac{1}{24}}}}{\sqrt{n-\frac{1}{24}}}.$$

[18] C'est bien parce qu'on y efface les marques de l'indécision dialectique originelle quant à l'irréversible-synthétique que les textes mathématiques sont si difficiles à lire.

[19] *cf.* G.H. Hardy, *Some famous problems of the theory of numbers and in particular Waring's problem. An inaugural lecture delivered before the University of Oxford*, Oxford, Clarendon Press, 1920.

[This formula] enables us to approximate to $p(n)$ with an accuracy which is almost uncanny. We are able, for example, by using 8 terms of our formula, to calculate $p(200)$, a number of 13 figures, with an error of $0,004$. I have set out the details of the calculation :

$$\begin{array}{r} 3\,972\,998\,993\,185,896 \\ 36\,282,978 \\ -87,555 \\ 5,147 \\ 1,424 \\ 0,071 \\ 0,000 \\ 0,043 \\ \hline 3\,972\,999\,029\,388,004 \end{array}$$

The value of $p(200)$ was subsequently verified by Major MacMahon, by a direct computation which occupied over a month.
G.H. HARDY.

Conjecture de Goldbach. Venons en maintenant à un autre exemple célèbre de conjecture ouverte : *tout nombre entier pair* $\geqslant 4$ *est somme de deux nombres premiers*. Plus précisément, pour tout entier pair $2n \geqslant 4$, il existe p et q appartenant à l'ensemble $\mathscr{P}$ des nombres premiers tels que $2n = p + q$.

Le principe initial de la confirmation expérimentale est extrêmement simple : il suffit en principe de se constituer au préalable une liste de tous les nombres premiers (en utilisant par exemple le crible d'Ératosthène, ce qui expose à la question d'efficacité et aux difficultés d'implémentation) jusqu'à une certaine grandeur, de les additionner deux à deux et d'examiner si tous les nombres entiers n sont ainsi obtenus jusqu'à une certaine grandeur.

Pour confirmer cela dans un intervalle d'entiers $[a, b]$, deux méthodes ont été utilisées. On doit trouver deux ensembles de nombres premiers $\mathscr{P}_1 \subset \mathscr{P}$ et $\mathscr{P}_2 \subset \mathscr{P}$ tels que

$$\big\{2n:\ a \leqslant 2n \leqslant b\big\} \subset \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 = \big\{p_1 + p_2:\ p_1 \in \mathscr{P}_1,\ p_2 \in \mathscr{P}_2\big\}.$$

Fixons un entier $\delta \geqslant 1$. Dans la première méthode on choisit :

$$\mathscr{P}_1 = \big\{p_1 \in \mathscr{P}:\ 2 \leqslant p_1 \leqslant b{-}a{+}\delta\big\}, \qquad \mathscr{P}_2 = \big\{p_2 \in \mathscr{P}:\ a{-}\delta \leqslant p_2 \leqslant a\big\}.$$

Dans la seconde méthode on choisit :

$$\mathscr{P}_1 = \big\{p_1 \in \mathscr{P}:\ 2 \leqslant p_1 \leqslant \delta\big\}, \qquad \mathscr{P}_2 = \big\{p_2 \in \mathscr{P}:\ a - \delta \leqslant p_2 \leqslant b\big\}.$$

Les calculs montrent que δ peut en fait être choisi très petit par rapport à b pour trouver au moins un couple $(p_1, p_2) \in \mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_2$ tel que $2n = p_1 +$

p_2. L'évidence numérique supportant cette conjecture est très forte, car le nombre $g(2n)$ de *partitions de Goldbach*, *i.e.* de manière d'écrire $2n = p+q$ avec $p, q \in \mathscr{P}$ et $p \leqslant q$, croît rapidement avec $2n$.

La première méthode a été implémentée sur des ordinateurs dès les années 1960. Parce qu'elle exige d'effectuer des tests de primalités sur de grands intervalles d'entiers $[a - \delta, b]$, la seconde est moins économique, mais elle seule permet d'accéder à la *partition de Goldbach minimale* d'un entier pair $2n$ quelconque, c'est-à-dire au couple d'entiers premiers $\big(p_{\min}(2n), q_{\min}(2n)\big)$ avec $p_{\min}(2n) \leqslant q_{\min}(2n)$ tels que *pour tout autre* partition de Goldbach $2n = p + q$ avec $p \leqslant q$, on a $p_{\min} < p$.

En vérité, la recherche des partitions de Goldbach minimales expose à une difficulté imprévisible : lorsque $2n$ augmente régulièrement, les entiers premiers $p_{\min}$ sautent de manière assez chaotique[20]. Par exemple, juste avant $100 = \mathbf{3} + 97$, on a $98 = \mathbf{19} + 79$. Ce phénomène pourra-t-il être embrassé dans une démonstration d'une longueur raisonnable ? Sinon, pourra-t-on le contourner grâce à une structure globale de l'ensemble des partitions de Golbach de tous les entiers pairs ?

L'expérimental numérique force à éclater les questions.

Calculs au front. Depuis février 2005, T. Oliveira e Silva (en compétition avec d'autres concurrents internationaux) pilote une cinquantaine d'ordinateurs qui travaillent en parallèle pour chercher la partition de Goldbach minimale d'entiers pairs appartenant à des intervalles de longueur 10^{12}. En avril 2007, 10^{18} a été atteint. Les calculs mémorisent le nombre de fois que chaque (relativement petit) nombre premier p est utilisé dans une partition de Goldbach minimale, ainsi que le plus petit entier pair $2n$ pour lequel $p_{\min}(2n) = p$.

> On a 2.2GHz Athlon64 3500+ processor, testing an interval of 10^{12} integers near 10^{18} takes close to 75 minutes. The execution time of the program grows very slowly, like $\log(N)$, where N is the last integer of the interval being tested, and it uses an amount of memory that is roughly given by $13\sqrt{N}/\log N$. The program is now running on the spare time of around 50 computers (20 DETI/UA and 30 at PSU), either under GNU/Linux or under Windows 2000/XP. We have reached 10^{18} in April 2007, and are now double-checking a small part of the results. T. OLIVEIRA E SILVA

Pour tout entier premier p, les spécialistes se sont aussi intéressés à $S(p)$ = le plus petit entier pair $2n$ tel que p apparaît dans la partition de Goldbach minimale de $2n$. Le record actuel (automne 2007) est détenu par J. Fettig et N. Sobh : c'est $p = 9341$ pour $2n = 906\,03057\,95622\,79642$. En

[20] Le lecteur trouvera une représentation graphique de la *voile de Goldbach* à la page : `wardley.org/images/misc/goldbach/`

1989, A. Granville, J. van de Lune et H.J.J. te Riele[21] ont conjecturé, en invoquant un argument probabiliste, que p ne devait par croître plus rapidement que $\log^2 S(p) \log\log S(p)$. Mais les données expérimentales contredisent cette estimation qui devrait être remplacée par $\frac{1}{3}\left[\log S(p)\log\log S(p)\right]^2$.

L'expérimental numérique éprouve les cohérences heuristiques.

> Explorer l'univers des nombres comme le monde physique ? Aucun domaine n'a engendré autant de conjectures indémontrées (mais en partie vérifiables à l'aide de calculs) que l'arithmétique des nombres premiers. Contrairement à l'idée que les mathématiciens proposent le plus souvent de leur discipline, les démonstrations y semblent parfois reléguées au second plan. De toute façon, disent les mathématiciens eux-mêmes, nous n'arrivons pas à démontrer nos conjectures, et l'état actuel de nos connaissances rend impensable que nous réussissions dans un proche avenir. J.-P. DELAHAYE.

Digression sur la nature physique du calcul. Mais quelle *magie* alors nous délivrent les ordinateurs ? Rien d'autre qu'une mécanisation des gestes de calcul de type eulérien ou gaussien, lorsque lesdits gestes s'astreignent *sans pensée latérale* à aligner les résultats successifs obtenus par application d'une certaine règle définie d'engendrement arithmétique.

> D'un bout à l'autre du calcul [dans la preuve du théorème des quatre couleurs], n'importe qui peut étudier et vérifier chaque détail. Le fait qu'un ordinateur puisse traiter en quelques heures plus de cas particuliers qu'un humain ne pourrait espérer le faire dans toute sa vie ne change rien au concept même de démonstration. W. HAKEN.

L'ordinateur programmé par le théoricien expérimental des nombres n'est donc rien de plus qu'un « Train de calculs à Grande Vitesse » lancé dans l'indéfini primordial et irréductible qu'est la suite des nombres entiers.

> Tous les calculs sont empiriques au sens trivial où ils supposent la mise en œuvre d'une manipulation de symboles, que ce soit mentalement, avec du papier et un crayon, ou à l'aide d'une machine ! Martin GARDNER.

Grâce aux microprocesseurs, la « physicalité du calcul » est ainsi enrichie à un niveau micro- ou nano-scopique toujours plus profondément lointain des bouliers orientaux, tables de calculs, bâtonnets de Neper, machines à calcul mécaniques (Vinci, Schikard, Pascal) ou machines à calcul électromécaniques, qui étaient initialement conçues à l'échelle physique de l'homme. *En dernier recours, les symboles en mouvement nécessitent toujours un support matériel pour s'exécuter dynamiquement*. Les « gestes de calcul » peuvent

[21] *Checking the Goldbach conjecture on a vector computer*, Number Theory and Applications, R.A. Mollin (ed.), pp. 423–433, Kluwer Academic Press, 1989.

être compressés dans l'espace-temps et augmentés en volume : telle est la seule et unique « magie » des ordinateurs. Et pour ce qui est de l'essence même du calcul, la vraie et seule « magie » qui nous entoure tous remonte aux babyloniens : c'est la possibilité — au lieu de solliciter membres et neurones — de piloter cailloux ou électrons dans l'univers mobile du monde physique pour que ces éléments physiques calculent automatiquement.

PHYSICALITÉ FONDAMENTALE DU CALCUL. *Qu'il soit manuel ou digital, arithmétique, algébrique, numérique, probabiliste ou diagrammatique, tout calcul exécuté ou programmé par les hommes est irréductiblement discret, fini et imprimé de manière transitoire sur des supports physiques. Aucun calcul « transcendant » à une effectuation incarnée physiquement n'est possible. Tous les calculs pour lesquels l'ordinateur est très performant (décimales de π ; bases de Gröbner ; tests de primalité ; analyse matricielle ; schémas numériques des équations aux dérivées partielles ; statistiques ; tris de données) sont dans leur principe effectif identiques à ceux que l'on conduit en ayant recours à n'importe quel autre véhicule physique pour le mouvement des symboles.*

(Il reste toutefois très incertain que la puissance des ordinateurs soit sans conteste effectivement supérieure à celle d'un Euler ou d'un Gauss, même envisagés artificiellement comme n'étant que calculateurs de génie : nous y reviendrons en temps voulu. Par ailleurs, il existe de nombreux domaines des mathématiques qui ne se prêtent absolument pas à une « physicalisation », ni à aucun type d'assistance électronique.)

Dialectique a priori de l'existentiel. L'atomicité symbolique du quantificateur « $\exists$ » qui sert à exprimer conjectures et théorèmes dans le même langage formel ne doit pas faire croire que l'existence se réduise à un concept non problématique. En mathématiques, l'existence ouverte est d'une complexité dialectique imprévisible ; ses variations spéculatives peuvent s'avérer troublantes.

Rappelons que le débat philosophique entre l'existence abstraite et l'existence effective en mathématiques (formalistes contre constructivistes, Hilbert contre Gordan) est causé, en amont des polémiques, par le fait que certains énoncés mathématiques peuvent souvent être jugés comme imparfaits, partiels et donc encore ouverts du point de vue de la connaissance mathématique[22].

Ici — phénomène surprenant et paradoxal —, la conjecture de Goldbach montre qu'*un trop-plein d'existence peut faire obstacle à une connaissance mathématique achevée* : l'expérience montre en effet que le nombre de couples de nombres premiers (p_1, p_2) tels que $n = p_1 + p_2$ augmente très

[22] Nous développerons cette thèse en temps voulu.

rapidement avec n. La dialectique *a priori* de l'existentiel ouvert doit donc s'enrichir de ce cas de figure, et le considérer comme métaphysiquement disponible à l'avenir.

Heuristique semi-rigoureuse. En 1923, grâce à des arguments informels mais pertinents, Hardy et Littlewood ont conjecturé que le nombre $\pi_2(n)$ de représentations de tout entier n assez grand comme somme de deux nombres premiers $n = p_1 + p_2$ devait être asymptotiquement égal à :

$$2\,\varpi_2\,\frac{n}{\big(\log n\big)^2}\prod_{p|n;\ p\geqslant 3}\frac{p-1}{p-2},$$

où n est pair et où ϖ_2 est la *constante des nombres premiers jumeaux* : $\varpi_2 = \prod_{p\geqslant 3}\Big(1-\frac{1}{(p-1)^2}\Big) = 0,66016\cdots$. Cette valeur asymptotique est bien confirmée jusqu'à $n \leqslant 10^{17}$. Les manuels ou digitaux confirment la présence du facteur $\prod_{p|n;\ p\geqslant 3}\frac{p-1}{p-2}$ découvert par Sylvester en 1871 et qui produit de petites oscillations dans la valeur expérimentale de $\pi_2(n)$ lorsque n varie. Nous y reviendrons.

Considérons maintenant quelques conjectures ou questions ouvertes en arithmétique des nombres premiers qui sont simples à comprendre et à énoncer.

Conjecture des nombres premiers jumeaux. *Il existe un nombre infini de paires de nombres premiers* $(p, p+2)$ *séparés seulement par un écart de* 2. Autrement dit :

$$\liminf_{n\to\infty}\; p_{n+1} - p_n = 2.$$

Conjecture de Polignac. *Pour tout écart pair* $2k$*, il existe une infinité de paires de nombres premiers* $(p, p+2k)$ *séparés par* $2k$.

Existe-t-il une infinité de nombres premiers de la forme n^2+1 **?** On sait qu'il en existe une infinité de la forme n^2+m^2 ou n^2+m^2+1.

Existe-t-il toujours un nombre premier entre n^2 **et** $(n+1)^2$ **?** En 1882, Opperman conjectura que $\pi(n^2+n) > \pi(n^1) > \pi(n^2-n)$, ce qui est aussi très probable.

Écarts entre nombres premiers consécutifs. En 1936, Cramér conjectura que

$$\limsup_{n\to\infty}\;\frac{p_{n+1}-p_n}{\big(\log p_n\big)^2} = 1,$$

d'où en particulier : il existe des écarts arbitrairement grands entre nombres premiers qui se suivent.

Fréquence des écarts entre nombres premiers consécutifs. Wolf, Odlyzko et Rubinstein ont conjecturé que l'écart le plus fréquent entre deux nombres premiers est égal au produit des n premiers nombres premiers

$$\mathsf{E}(n) := 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times p_n$$

pour tous les nombres compris entre

$$\mathsf{h}(n) := \exp\left(\frac{2 \times 3 \times \cdots \times p_{n-1}(p_n - 1)}{\log\big[(p_n - 1)/(p_n - 2)\big]}\right)$$

et $\mathsf{h}(n+1)$. Ici, $\mathsf{h}(3) \simeq 10^{36}$ est déjà bien au-delà du domaine accessible à une expérimentation systématique[23], et *a fortiori* aussi $\mathsf{h}(4) \simeq 10^{428}$, $\mathsf{h}(5) \simeq 10^{8656}$, *etc.*

Métaphysique du « tout ce qui est possible se réalise ». Dans le domaine des nombres premiers, on peut formuler de très nombreuses conjectures simples au sujet d'ensembles de nombres astreints à satisfaire un certain nombre de propriétés définies. Tout le possible qui n'est pas exclu par des conditions nécessaires raisonnables et évidentes semble pouvoir prétendre à une plénitude d'être, à une infinitude, à une quantifiabilité explicite. Face à la réalité problématique irréductible des nombres entiers, et bien qu'il semble ne pas y avoir de principe supérieur pour expliquer comment les réalisations mathématiques sont possibles, la posture métaphysique du conjectural engageme vers les potentialités du possible. Parce que l'expérience acquise par l'histoire des mathématiques témoigne de réussites passées, les actes conjecturaux sont généralisables, universalisables et reproductibles. Les formes du questionnement mathématique s'organisent en une algèbre libre, ouverte et non systématisable.

Mais d'un autre côté, la conjecture n'est qu'une forme d'accès préliminaire aux réalités problématiques des mathématiques. Les formes abstraites générales de l'interrogation exposent à de l'irréversible-synthétique qui exige une circulation permanente des questions dans les preuves.

[23] Contrairement aux conjectures précédentes, l'expérimentation numérique ne peut pas constituer ici la source principale d'alimentation prospective. Le dispositif initial du philosophe analytique wittgensteinien est donc spéculativement incomplet : il faut aussi tenir compte des conjectures qui hybrident un champ expérimental insuffisant à des raisonnements heuristiques semi-rigoureux.

> The achievement of the mathematicians who found the Prime Number Theorem was quite a small thing compared with that of those who found the proof. [...] The whole history of the Prime Number Theorem, and the other big theorems of the subject, shows that you cannot reach any real understanding of the structure and meaning of the theory, or have any sound instincts to guide you in further research, until you have mastered the proofs. It is comparably easy to make clever guesses ; indeed there are theorems, like the "Goldbach's theorem", which have never been proved and which any fool could haved guessed. G. H. HARDY.

Raisonnement absurde. Reprenons maintenant notre analyse critique des expressions qui sont employées par le philosophe analytique wittgensteinien. Voici un autre extrait.

> Cette idée qu'il existe une différence de nature, et non pas simplement de degré, entre la démonstration et l'expérience, qui fait que la démonstration ne peut pas démontrer exactement ce qui a été conjecturé (*sic*), est liée au fait que, dans la proposition mathématique, l'expression « nécessairement tous » constitue pour ainsi dire un mot unique (*cf.* PG, p. 429) et que l'on ne peut en détacher le « tous » pour le comparer à celui de l'expérience. Supposer que tous les nombres naturels ont une certaine propriété veut dire supposer que, si on les passait tous en revue successivement, on constaterait que chacun d'entre eux a cette propriété. Mais que peut vouloir dire supposer que tous les nombres naturels ont *nécessairement* une certaine propriété, si ce n'est précisément supposer l'existence d'une démonstration de la proposition universelle ? [**59**], p. 195.

Ici, la spéculation dérape : aveuglée par le même et unique dipôle conjectures/preuves, elle exagère les différences conceptuelles en extrapolant la signification de l'écart. Ici, *la tentation sophistique menace l'exégète*. Même en admettant que les énoncés visés se métamorphosent souvent au cours d'une recherche, et donc que les démonstrations ne démontrent pas toujours nécessairement ce qui a été initialement conjecturé ou visé, l'affirmation brutale « la démonstration ne peut pas démontrer exactement ce qui a été conjecturé » est <u>inadmissible</u> :

- Sans autre nuance restrictive que par insertion furtive de l'adverbe « exactement », cette affirmation péremptoire se présente comme valable pour *toute* proposition conjecturée et pour et *toute* démonstration ! Indignation chez les mathématiciens !
- Par une sorte d'argument d'autorité philosophique, cette affirmation semble suggérer que celui qui démontre est toujours naïf de croire que ce qu'il démontre est effectivement ce qu'il annonce comme ce qu'il va démontrer.
- De plus, cette affirmation élimine brutalement tout ce qui fait l'intention d'un projet déductif.

- Enfin, plus grave encore, par l'insertion du verbe modal « peut », cette affirmation catégorique se présente comme une vérité de fait qui limite *a priori* la portée de toute démonstration par rapport à un énoncé.

Et pour justifier cette absurde affirmation, en faisant un appel rhétorique distendu et indirect à la périphrase imprécise « est liée au fait que », on greffe un appel au quantificateur logique universel afin de convaincre définitivement son lectorat de philosophie analytique : en tant qu'il est porteur d'une nécessité logique, le quantificateur universel « $\forall$ » transcende le caractère inductif de la conjecture.

Ensuite, l'obsession portant sur le « fossé conceptuel » entre expériences et preuves conduit à écrire une phrase surprenante : « Supposer que tous les nombres naturels ont une certaine propriété veut dire supposer que, si on les passait tous en revue successivement, on constaterait que chacun d'entre eux a cette propriété » : éh bien justement non ! Sauf de manière accessoire et partielle, ce n'est vraiment pas d'une vérification indéfinie que parle une supposition mathématique ! Et ce, pour deux raisons.

Premièrement, à l'échelle humaine, l'infini n'existe pas ; on ne peut jamais supposer qu'une infinité de nombres entiers soient passée en revue : cela n'existe pas ; cela ne peut pas exister. La thèse lucide sur la physicalité du calcul que nous avons énoncée il y a quelques instants a pour conséquence immédiate de borner (disons par 10^{70}) le nombres d'opérations jamais effectuables dans l'univers.

Deuxièmement, qu'elles soient conjecturales-ouvertes, conjecturées-établies, ou simplement établies-admises, la plupart des propositions mathématiques s'expriment dans un langage logique, avec des quantificateurs existentiels ou universels. Il est lointain, le temps où le langage axiomatique balbutiait !

Le conjectural s'inscrit d'emblée dans le langage du démonstratif.

En mathématiques, l'universalité et l'existentialité du conjectural sont du même type métaphysique que l'universalité et l'existentialité du démonstratif. La différence entre les deux est toute modale : elle a trait au caractère d'*ouverture* des énoncés. Bien que la tradition classique de philosophie des mathématiques semble s'être résolument écartée de l'ouverture comme concept, de grands mathématiciens comme Riemann ou Hilbert nous ont légué quelques précieuses pensées à ce sujet. Nous y reviendrons ultérieurement.

Poursuivons la critique. En mathématiques, un raisonnement est absurde lorsqu'il est contradictoire. Jusqu'à nouvel ordre, le principe de non-contradiction doit être rigoureusement respecté. En philosophie spéculative, notamment dans la *Weltanschaaung* hégélienne, on admet que ce principe puisse être remis en cause. Mais en philosophie analytique, il est encore considéré à juste titre comme exigence minimale. Or dans cet extrait, la cohérence locale des raisonnements n'est pas respectée, parce que l'universalité et l'existentialité de la proposition mathématique conjecturale s'expriment la plupart du temps dans un langage formalisé qui attend une démonstration complète exprimée dans le même langage et qui est accompagnée de démonstrations partielles, d'idées initiales, d'arguments heuristiques.

Maintien du fossé conceptuel. Encore une citation témoignant de la circularité de la spéculation. Le commentaire critique est laissé en exercice.

> La tentation à laquelle il faut résister, en l'occurence, est celle qui consiste à considérer une série d'expériences de mesure susceptibles de conduire à l'idée du théorème de Pythagore et la démonstration du théorème comme deux symptômes différent du même état de chose, le deuxième ayant simplement sur le premier l'avantage d'être beaucoup plus sûr, et pour tout dire, infaillible. Wittgenstein réagit à ce genre de suggestion en remarquant que : « rien n'est plus funeste pour la compréhension philosophique que la conception de la démonstration et de l'expérience comme étant deux méthodes de vérification différentes, donc tout de même comparables » (PG, p. 361). [**59**], p. 195.

Retour sur le théorème des nombres premiers ; doxas anachroniques. La régularité $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ est surprenante : elle aurait tout aussi bien pu se révéler fausse, si l'on s'en était tenu à l'exercice spéculatif universel que nous offre la *doxa* pure et *a priori* du conjectural. À partir du moment où la suite des nombres premiers est considérée comme irréductible à toute saisie formelle totalisante parce qu'indéfiniment riche et complexe, comment cette suite pourrait-elle jouir de régularités aussi simples que $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$? Et si l'on doit admettre que de telles régularités simples existent effectivement, comment se constituer une intuition fiable des structures plausibles ?

Voilà encore un autre type de question qui demeure toujours en suspens et toujours disponible : *comment un résultat établi s'insère-t-il dans l'intuition provisoirement constituée qu'on a d'un champ rationnel* ?

Bien que l'irréversible-synthétique engendre ses raisonnements rigoureux, il est totalement faux que l'*a posteriori* démonstratif efface l'ouverture fondamentale qui est inhérente à la proposition non démontrée. L'imparfait demeure et l'ouverture latérale non écrite reste coprésente. La faculté d'interrogation est intacte : dès lors qu'on cherche à comprendre une démonstration en profondeur, on doit métamorphoser, retourner et dés-*a postérioriser* tous les raisonnements. On doit faire ressurgir les questions décisives qui ont orienté l'irréversible-synthétique vers la mise au point d'arguments spécifiques. La consignation des résultats mathématiques dans un langage formel élague des dialectiques qu'il faut reconstituer.

Le penseur wittgensteinien se trompe donc ici sur un point crucial : le temps de la pensée circule dans tous les sens et voyage de manière anachronique entre l'*a priori* et l'*a posteriori*, entre la démonstration actuelle et sa saisie comme horizon, même si l'irréversible biologique et la flèche du temps imposent que ces voyages s'effectuent au détriment du vieillissement corps, même si les répétitions, les hésitations, les reprises, les corrections se déploient linéairement dans un temps biologique irréversible. On ne fait jamais réellement abstraction du fait qu'un énoncé dit quelque chose que l'esprit embrasse aisément en un instant, alors que l'étude des démonstrations exige en général des heures de concentration et de réflexion.

De plus, la démonstration ne supplante jamais définitivement son champ expérimental originaire. Quiconque est intéressé par la répartition des nombres premiers aura avantage à reprendre les tests de Gauss, et il découvrira, comme Gauss, des oscillations locales presque chaotiques dans cette répartition, oscillations que le théorème $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ est visiblement incapable de quantifier et au sujet desquelles il ne dit rien. En extrayant les régularités essentielles, le conjectural se focalise sur les grandes structures. Mais l'expérimental latéralise, complexifie et ramifie les intuitions questionnantes. Les lois ne sont pas données d'emblée avec les listes expérimentales : tout ce que l'on peut dire, c'est qu'elles y transparaissent *peut-être*. L'expérience scientifique confirme toujours la déraisonnable efficacité du principe de raison. Formuler une loi conjecturale requiert toujours un acte synthétique de l'esprit.

Permanence du provisoire et de la problématicité. Aussi le schéma simplifié « conjectures versus preuves » que le philosophe analytique retient d'une lecture de Wittgenstein ne correspond-il vraiment pas à la complexité des situations de recherche que provoque l'interrogation expérimentale, toujours ouverte à des phénomènes subsidiaires. Dire que des questions nouvelles renaissent une fois les résultats acquis serait encore insuffisant, parce que :

Les questions intrinsèques perdurent au sein des architectures achevées.

Au sein même des démonstrations purifiées, l'ouverture se maintient dans les questions qui sont déjà tranchées.

Par ailleurs, et d'une manière générale, dans la pratique mathématique, il y a un certain nombre de questions universelles reproductibles. Ici par exemple, au sujet de la preuve de type Hadamard et de la Vallée-Poussin, quelques questions à caractère essentiellement universel peuvent être posées :

- comment les nombres premiers s'intègrent-ils dans l'analyse complexe ?

- quels sont les arguments décisifs ? comment les distinguer des arguments élémentaires ?
- quelles sont les intuitions globales survolantes de la preuve ?
- *la démonstration que je lis constitue-t-elle la « bonne » démonstration ?*

Rien de plus permanent et de plus ineffaçable que les questions de compréhension, notamment en mathématiques. C'est parce que le conjectural contient des traces indélébiles de problématicité qu'il est ineffaçable.

Considérons par exemple la quatrième question. À ce jour, essentiellement deux démonstrations de l'équivalence $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ sont connues. La première, due à Hadamard et de la Vallée Poussin, utilise la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, la théorie des intégrales, les séries et produits infinis, l'intégration dans le champ complexe, l'étude des valeurs au bord de fonctions holomorphes, et des arguments de type taubérien : elle n'est décidément pas « élémentaire ». Hadamard et de la Vallée Poussin ont d'abord démontré que $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans le demi-plan fermé $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$, et ensuite établi des estimées techniques de croissance $\zeta(s)$ en ∞, afin d'intégrer sur certains contours de Cauchy allant à l'infini pour obtenir les coefficients de séries de Dirichlet (comme $\zeta(s)$). L'étude préliminaire de $\zeta(s)$ a été simplifiée par Tchebychev, Titchmarsh et Mertens. Le recours aux séries de Fourier (Wiener, Ikehara, Heins) offre une alternatives aux arguments finaux de Hadamard et de la Vallée Poussin. Mais actuellement, la preuve la plus concise et la plus directe, qui n'utilise presque rien de plus que la formule de Cauchy, a été mise au point par D. J. Newman[24] en 1980, en modifiant astucieusement les contours d'intégration de Hadamard et de la Vallée Poussin. Par ailleurs,

---

[24] Dans un article dédié au centième anniversaire du théorème des nombres premiers qui est paru en 1997 à l'*American Mathematical Monthly*, vol. **10**, 705–708, Don ZAGIER restitue la preuve de Newman en trois pages d'une limpidité et d'une concision remarquables. La preuve procède en six moments. Pour $s \in \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, définissons :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \qquad \Phi(s) := \sum_{p} \frac{\log p}{p^s}, \qquad \vartheta(x) := \sum_{p \leqslant x} \log p,$$

où la lettre p est utilisée pour désigner les nombres premiers.
I : $\zeta(s) = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$ pour $\mathrm{Re}\, s > 1$.
II : $\zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ se prolonge holomorphiquement à $\{\mathrm{Re}\, s > 0\}$.
III : $\vartheta(x) = \mathrm{O}(x)$.
IV : $\Phi(s) - \frac{1}{s-1}$ est holomorphe et $\zeta(s)$ ne s'annule pas dans $\{\mathrm{Re}\, s \geqslant 1\}$.
V : $\int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\, dx$ est une intégrale convergente.
VI : $\vartheta(x) \sim x$.
Le théorème des nombres premiers découle alors aisément de **VI**, puisque, pour tout $\epsilon > 0$:

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leqslant x} \log p \leqslant \sum_{p \leqslant x} \log x = \pi(x) \log x$$

en 1949, Selberg et Erdös ont élaboré une deuxième preuve « épurée » qui évite le recours à l'analyse complexe, mais cette preuve est relativement longue (une trentaine de pages) et elle ne semble pas motiver ou offrir des développements ultérieurs.

Démultiplication artificielle des énoncés. Les démonstrations sont mobiles, transitoires, modifiables, améliorables. Wittgenstein dit que toute nouvelle démonstration *fabrique* une nouvelle connexion. Rien de plus exact. Mais dans certains cas de figure tels que le théorème des nombres premiers, la position wittgensteinienne absolutiste s'expose à une difficulté spéculative qui lui sera immédiatement objectée par tout mathématicien en acte : comment maintenir l'irréductibilité de nature entre énoncé et démonstration, quand l'énoncé en question dont on cherche une démonstration nouvelle a déjà été démontré par plusieurs voies rigoureuses ? L'énoncé reste-t-il irréductiblement ouvert et conjectural ? Doit-on exiger de la philosophie des mathématiques qu'elle respecte le principe logique de non-contradiction ?

Parfois, deux démonstrations distinctes fournissent deux théorèmes essentiellement équivalents mais qui sont légèrement différents, leur différence pouvant être exprimée visiblement dans les énoncés : raison est alors donnée à Wittgenstein. C'est notamment le cas dans les mathématiques contemporaines, fortes d'un extrême raffinement, où des équipes en compétition internationales développent des approches concurrentes et bien distinctes pour étudier un même type de problèmes : la différence des techniques utilisées remonte alors jusqu'aux énoncés dans les publications. Est nouveau tout résultat dont la démonstration est nouvelle.

Mais pour maintenir la cohérence globale de sa posture philosophique, Wittgenstein semble prétendre que deux énoncés sont réellement distincts dès lors que leur démonstrations diffèrent. Mais que dire des énoncés tels que $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ qui sont exactement les mêmes parce qu'ils sont déjà atomiques et simples ? Faut-il chercher à faire transparaître à tout prix les différences argumentatives des preuves dans les énoncés ? Comment penser les degrés de la différence ? Faut-il supprimer les énoncés et ne mémoriser que les démonstrations spécifiques ?

On se trouve ainsi ramené à une vaste question : qu'est-ce qu'un énoncé (une proposition, un théorème) mathématique ? Tous les mathématiciens se posent la question suivante : quelle forme donner à un énoncé que l'on vient de démontrer ? Aucune réponse définitive ou dogmatique ne peut être proposée. Élasticité stylistique et souplesse du langage complexifient encore le

---

$$\begin{aligned}\vartheta(x) \geqslant \sum_{x^{1-\epsilon}\leqslant p\leqslant x} \geqslant \sum_{x^{1-\epsilon}\leqslant p\leqslant x} (1-\epsilon)\log x \\ = (1-\epsilon)\log x\left[\pi(x) + \mathrm{O}(x^{1-\epsilon})\right].\end{aligned}$$

jeu de la publication. Pensée et écriture mathématiques sont incapables de fixer définitivement leur rhétorique.

Par convention au moins, l'énoncé doit extraire une information synthétique essentielle. La règle usuelle veut que l'énoncé soit relativement court par rapport à la démonstration, ce qui est la plupart du temps le cas.

Mais en vérité, nous retrouvons ici un des caractères distinctifs fondamentaux de l'irréversible-synthétique : c'est bien parce que les mathématiques sont faites d'obstacles, c'est bien parce que les problèmes à résoudre exigent d'escalader ou de contourner lentement des montagnes que l'irréversible-synthétique existe et se divise en énoncés et démonstrations. Il y a là encore un problème crucial et très difficile que la philosophie des mathématiques ne doit pas avoir la tentation d'occulter : comment l'irréversible-synthétique est-il possible ?

Arguments heuristiques en théorie analytique des nombres. En suivant Hardy[25], restituons deux arguments heuristiques simples qui conduisent à l'équivalence $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ du théorème des nombres premiers, ou, ce qui revient au même, à la conclusion :

$$p_m \sim m \log m,$$

où p_m est le m-ième nombre premier.

Voici le premier argument. Partons de l'identité d'Euler, valable uniformément pour $\mathrm{Re}\, s > 1$:

$$\prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} = \frac{1}{(1-2^{-s})(1-3^{-s})(1-5^{-s})\cdots} = \frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots = \sum_{m\geqslant 1} \frac{1}{m^s},$$

où le produit porte sur l'ensemble des nombres premiers $\mathscr{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$. Il est naturel que le produit $\prod \frac{1}{1-p^{-s}}$ et la série $\sum \frac{1}{m^s}$ divergent de la même manière[26] lorsque s tend vers 1 en restant dans le demi-plan $\mathrm{Re} s > 1\}$. Clairement, la série tronquée $\sum_{m\leqslant n} \frac{1}{m}$ diverge

[25] *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Chelsea, New York, 1940.

[26] La manière dont ces deux quantités divergent est nécessairement la même, puisque l'identité d'Euler est valide quel que soit s satisfaisant $\mathrm{Re}\, s > 1$. Toutefois, c'est en estimant la contribution principale de divergence pour chacun des deux membres qu'on peut être amené soit à commettre une erreur, soit (si on ne s'est pas trompé sur le choix des termes divergents principaux, ce qui est le cas ici) à éprouver de réelles difficultés à transformer le raisonnement heuristique en démonstration rigoureuse.

comme $\log n$. Par ailleurs, si on développe le logarithme du produit :

$$\begin{aligned}\log \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} &= \sum_p \log \frac{1}{1-p^{-s}} \\ &= \sum_p \frac{1}{p^s} + \left(\sum_p \frac{1}{2\,p^{2s}} + \sum_p \frac{1}{3\,p^{3s}} + \cdots \right)\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que tous les termes $\sum_p \frac{1}{k\,p^{ks}}$ pour $k \geqslant 2$ convergent, on s'attend à ce que, lorsque $s \to 1$, la première somme $\sum \frac{1}{p}$ diverge comme $\log \Big(\sum \frac{1}{m} \Big)$, ou plus précisément :

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \sim \log \Bigg(\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m} \Bigg) \sim \log \log n.$$

Comme par ailleurs :

$$\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m \log m} \sim \log \log n,$$

cette dernière formule pourrait indiquer que p_m est asymptotiquement égal à $m \log m$, ce qu'on voulait obtenir.

Métaphysique des raisonnements heuristiques. Ici, pétition de principe : sachant que la série de Bertrand $\sum_{m \leqslant n} \frac{1}{m \log m}$ diverge comme $\log \log n$, on annonce que le comportement asymptotique *inconnu* de $\frac{1}{p_m}$ doit être le même que $\frac{1}{m \log m}$. Mais il se pourrait très bien qu'une infinité d'autres séries différentes $\sum_m \frac{1}{q_m}$ de termes généraux $\frac{1}{q_m}$ essentiellement distincts de $\frac{1}{m \log m}$ diverge aussi comme $\log \log n$. Dans l'absolu, ce raisonnement très périlleux devrait donc être considéré comme irrecevable, à cause de la diversité *a priori* du possible : les grandes catégories métaphysiques restent omniprésentes en mathématiques.

Mais à l'époque où écrit Hardy, la loi attendue $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$ (ou, de manière équivalente, $p_m \sim m \log m$) avait été anticipée sur le plan expérimental depuis plus d'un siècle par Legendre, Gauss et d'autres — sans compter que les démonstrations rigoureuses de Hadamard et de la Vallée Poussin circulaient depuis plus d'une vingtaine d'années. On assiste donc ici à un phénomène intéressant de *cristallisation de la cohérence*. La spéculation mathématique est une machine à voyager dans le temps irréversible du démonstratif. Elle scrute librement l'embryogénèse du déductif.

Épilogue critique. Le philosophe analytique wittgensteinien n'a peut-être pas encore pris conscience du fait que la distinction capitale entre conjectures et démonstrations n'est guère qu'une pièce initiale dans un puzzle mathématique indéfini. Se crisper sur cette distinction expose aux circularités spéculatives, aux répétitions désorganisées. En mathématiques, parce que tout se ramifie au-delà des racines, on structure la pensée (c'est une règle d'or), on élimine l'extrinsèque, on désigne l'inconnu, et on travaille au front. Le mathématicien en acte joue en permanence avec les grands concepts de la métaphysique classique : *a priori*/*a posteriori* ; jugement analytique/jugement synthétique ; irréversible-synthétique ; dialectique ; heuristique. Et ses pensées jouent avec souplesse du technique comme du médidatif.

Penser le calcul. Depuis une décennie, les logiciels de calcul formel tels que Maple, Mathematica, Singular, Macaulay, Pari, *etc.* sont régulièrement enseignés dans les cursus de la Licence. Beaucoup de démonstrations sont maintenant assistées par ordinateur. La recherche s'hybride. En géométrie, la pensée du continu ramifie ses discrétisations conceptuelles. Tous ces éléments ne sont pas encore pensée par la philosophie comme ils devraient l'être.

Directions ouvertes de philosophie des mathématiques.

- Édifier une *pensée de l'ouverture mathématique technique*.
- Spéculer sur la nature des questions mathématiques.
- Ramifier la question kantienne : « comment les jugements synthétiques *a priori* sont-ils possibes ».
- Penser l'irréversible-synthétique.
- Actifier, reproduire, propager, mécaniser, automatiser et désacraliser le questionnement mathématique.
- Formuler expressément les ouvertures rémanentes.
- Constituer des catégories de pensée pour systématiser la nature de ce qui demeure dans le domaine du non-exploré.
- Désigner l'indécision.
- Typiser et hiérarchiser les questions spécifiques.
- Démasquer les ignorances paradoxales qui se présentent comme connaissances entrevues.
- Réhabiliter le philosophique des mathématiques.

Écriture mathématique, écriture littéraire

1. Syncrétisme de l'idée-forme

« Plus j'acquiers d'expérience dans mon art, et plus cet art devient pour moi un supplice ». Gustave FLAUBERT.

Deux préjugés de la pensée face au langage. Toute analyse réflexive portant sur l'*écriture* — qu'il s'agisse d'un simple travail de formulation au quotidien, de *génétique littéraire* ou d'analyse du langage scientifique — est confrontée à deux faits inhérents à la pensée :

- (i) la compréhensibilité quasi-immédiate du langage ;
- (ii) le préjugé dualiste, d'après lequel l'idée anticipe l'expression et le contenu domine la forme, aussi bien en lettres que dans les sciences les plus abstraites.

En mathématiques, la croyance de compréhensibilité universelle du langage est tempérée par un faisceau de difficultés mentales manifestes : les concepts sont abstrus ; les démonstrations sont techniques ; la compréhension achoppe ; tout parle une langue ésotérique et presque « étrangère » ; et de plus, à un degré supérieur, les savants eux-mêmes n'accèdent qu'à une infime partie de la science contemporaine, à cause d'une spécialisation grandissante. Ainsi, la langue mathématique n'a vraiment rien d'automatique.

En vérité, la fraction du langage qui circule et qui se répète domine en quantité, mais elle est négligeable en profondeur et en qualité. Écrivains, romanciers, poètes, dramaturges et cinéastes créent tous à leur manière une « matière intellectuelle spontanée » grâce à certains processus de gestation particulièrement lents, qui nécessitent parfois des années de travail, où rien ne se donne automatiquement, bien que la réception de l'œuvre par le public puisse s'effectuer en quelques heures, voire en quelques jours. Par conséquent, seule une certaine naïveté « propre au spectateur » peut entretenir l'illusion d'après laquelle l'écriture est aussi spontanée que la lecture.

Le second obstacle **(ii)** est plus subtil. On s'imagine toujours que les contenus évoqués sont externes au texte, le sous-tendent, le dirigent et le transcendent, non seulement au moment de la lecture (l'herméneutique déployant des interprétations ramifiées à travers l'histoire des idées), mais encore *au moment même de la mise en forme par l'écrivain*. La rémanence agaçante des imperfections de l'expression confirmerait cette croyance : l'Idée serait dominatrice[1], le Contenu primerait sur la Forme, et le Concept serait toujours soumis à l'épreuve de la Réalité[2]. Guidée secrètement par des contenus orientés, l'écriture ne s'égarerait que temporairement dans des labyrinthes « truffés de boussoles salvatrices ».

Inséparabilité de la Forme et du Contenu. Gustave FLAUBERT s'opposait radicalement à de telles superstitions.

> Tant qu'on ne m'aura pas, d'une phrase donnée, séparé la forme du fond, je soutiendrai que ce sont là deux mots vides de sens. *Lettre à Louise Colet*, 18 septembre 1846

« *Pour moi* », prétend Flaubert, « *la forme et l'idée, c'est tout un : c'est comme la matière et l'esprit, et je ne peux concevoir l'un sans l'autre : ce sont des parties d'un tout indivisible* ».

Que veut-il dire ? Qu'il y a là un concept « atomique » que les lois de la création littéraire interdisent de scinder ? Pour saisir sa pensée plus en profondeur, il vaut mieux raisonner par l'absurde, en se plaçant à la fois du côté du lecteur et de celui de l'écrivain, comme suit.

Dès que le texte écrit « révèle » ses « contenus » à travers l'analyse, le commentaire ou la méditation, il est clair que des actes de pensée se surajoutent, que des variations naissent, que des nuances nouvelles apparaissent et que tout ce « grésillement mental imprévisible » s'insinue dans la mémoire. L'intuition rebondit, remodèle, virtualise. On entrevoit d'autres actes d'écriture, on écrit autrement, on écrit autre chose, telle est la contradiction ! Autrement dit, tous les contenus qui préexisteraient en filigrane devraient *ipso facto* constituer d'autres formes, pour autant que ces contenus virtuels aient été eux aussi soumis à un travail actif de morphogénèse.

Poursuivons et approfondissons. Ce que l'écrivain a choisi d'exprimer est le résultat de multiples « écholocalisations réciproques » entre Forme et

[1]Dans sa deuxième thèse intitulée *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématiques*, Albert LAUTMAN défend une position platonicienne élaborée, d'après laquelle les créations mathématiques effectives (théorèmes, propositions, résultats, découvertes) procèdent en règle générale d'une réalité supérieure constituée de principes « dialectiques » et de questions dominatrices qui ont un réel pouvoir d'engendrement.

[2] Platoniste lucide, le mathématicien Alain CONNES soutient que la plupart des théorèmes mathématiques sont imparfaits, voire inadéquats, parce que tous les concepts de la langue symbolique abstraite, comme ceux de la physique, doivent par principe pouvoir être soumis à une révision permanente.

> Mon attitude et celle d'autres mathématiciens consiste à dire qu'il existe une réalité mathématique qui précède l'élaboration des concepts. [...] Je fais une distinction essentielle entre l'objet d'étude, par exemple la suite des nombres premiers, et les concepts que l'esprit humain élabore pour comprendre cette suite. *Entretien*, La Recherche **332** (2000), 109–111

Contenu. Ces deux parois réfléchissantes, d'abord envisagées comme séparées dans les moments provisoires de la gestation, fusionnent au final en un instant de rencontre ultime qui anéantit leur réverbération indéfinie. Fruit d'hésitations réactives, la convergence expressive synthétise des « formes-contenus » devenues « atomiques ».

Ainsi, Flaubert prétend qu'*il y a immanence totale du contenu à ce qui a été calculé pour être écrit sous une forme définitive*. Flaubert dit que la pensée créatrice limite exactement ses processus d'actuation à ce qu'elle choisit d'inscrire définitivement sur le papier.

Seule une métaphysique qui assumerait pleinement le caractère éminemment chaotique des actes d'écriture pourrait en dévoiler réellement les ressorts constructifs et les micro-mécanismes cognitifs ou matériels. Le texte, en tant que totalité dynamique arborescente, est parsemé d'errances expressives, de tentatives provisoires et de corrections stylistiques. On pourrait dire sous forme imagée que l'« écrivain-élagueur se taille à la machette un jardin à la française dans une forêt vierge d'Idées-Formes imparfaites ».

Il reste encore à confronter un tel *syncrétisme de la forme-contenu* aux deux points de vue dualistes et platoniciens qu'expriment Alain Connes et Albert Lautman (*cf.* les notes de bas de page). Dans les sciences mathématiques, le rapport problématisant au réel se situe à un niveau d'instabilité supérieur, dans une région indécise et trans-historique où les structures implicites de l'Inconnu disqualifient la plupart des réponses qui se donnent comme définitives, parce que les questions demeurent, rebondissent ou renaissent, parce que le provisoire « reprend toujours du terrain », et parce que souvent, les résultats nouveaux généralisent et englobent des résultats anciens.

En fait, il serait tout à fait possible et bienvenu d'extrapoler la thèse flaubertienne aux recherches scientifiques, en soutenant que les maneuvres d'ajustement entre la Forme et le Contenu se jouent à un niveau plus complexe qu'en littérature, à un niveau « communautaire » qui englobe les publications de plusieurs chercheurs sur plusieurs décennies. Cependant, nous ne nous engagerons pas ici plus avant vers ce que la réflexion comparative serait susceptible d'apporter aussi bien à l'analyse littéraire qu'à la métaphysique des mathématiques.

2. Micro-mécaniques du style

Champs magnétiques perturbés de la microstylistique. Telle de la limaille de fer aimantée, l'Idée qui s'in-forme vibrionne, irradiée toujours d'imperfections morphologiques. Des polypes de questions se hérissent, s'enracinent et se nourrissent du décalage perpétuel qui les déchire. Chacune des poussières métalliques qui constituent une phrase exige plusieurs opérations de chirurgie scripturale, jamais définitives, toujours soumises à révision. Sans nécessairement produire des virtualités d'ordre supérieur dans les moments de gestation, *l'électronisation des textes décuple leurs dislocations*. Des dizaines de petits drapeaux pulvérulents, désarticulés et en partie invisibles palpitent sous le spectre zénonien du discontinu absolu des syllabes. Quel que soit le support, c'est en poussant une à une lentement des billes de mercure éclatées que la pensée bascule vers de l'irréversible orchestré. Avec ce stylet infime qui laboure le texte en gestation.

Acupuncture querelleuse. Dès le stade embryonnaire, cribler le texte écrit de fléchettes interrogatives, questionner, attaquer, reprendre, et toujours : *s'insatisfaire*, jusqu'à ce que mots et symboles mathématiques se transforment en une multiplicité organique de petits détonateurs maîtrisés qui éclatent en une pétarade continue d'explosions intuitives.

> La tête me tourne et la gorge me brûle d'avoir cherché, bûché, creusé, retourné, farfouillé et hurlé, de cent mille façons différentes, une phrase qui vient enfin de se finir. Elle est bonne, j'en réponds ; mais ça n'a pas été sans mal ! Lettre à Louise Colet, 25-26 mars 1854

Virtualités par maintien des indécisions. À la plume, au stylo ou sur clavier chaque lettre, chaque mot, chaque groupe, chaque phrase, chaque paragraphe doit rester « nu d'indécision ». Des tiroirs amovibles ensorcelés palpitent dans tout texte en gestation. Ratures, brassages, coupes, refontes, reprises, pivotements : ni l'écriture ni les registres informatiques ne sont assez puissants pour corporéiser les virtualités de l'écriture. Seule notre « cervelle » corporéise cette complexité. Lutter contre et avec l'aide du temps.

Micro-corrections morphologiques. On s'exténue à la micro-correction perpétuelle. Chasse aux disharmonies locales ; relectures et réorganisations ; reprises de phrases ; amélioration de vocabulaire : ce n'est pas un travail secondaire.

> Voilà trois semaines que je suis à écrire *dix* pages ! Je passe des journées entières à changer des répétitions de mots, à éviter des assonances. Lettre à Louise Colet, 20 avril 1853

En mathématiques, que l'on écrive un article de 35 pages, ou un livre de 270 pages, d'autres difficultés se superposent à toutes les exigences (microscopiques) d'harmonie linguistique :

- visibilité des conventions implicites ;
- emploi des symboles purement mathématiques ;
- choix de lettres pour noter les objets mathématiques ;
- écriture d'équations ;

- limpidité et autonomie des énoncés (théorèmes, propositions, lemmes) ;

Exemple : démonstration de l'identité de Jacobi pour les algèbres associatives. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif, par exemple pour fixer les idées : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, comme dans la théorie de Sophus Lie. Une *algèbre abstraite* $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{K}$ est un espace vectoriel muni d'une loi d'algèbre (« multiplication ») notée xy qui est bilinéaire par rapport à chacune des deux variables $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$. L'algèbre est dite *commutative* si l'on a : $\mathsf{xy} = \mathsf{yx}$ pour tous $\mathsf{x}, \mathsf{y} \in \mathfrak{g}$; elle est dite *associative*, si l'on a : $\mathsf{x(yz)} = \mathsf{(xy)z}$ pour tous $\mathsf{x}, \mathsf{y}, \mathsf{z} \in \mathfrak{g}$.

Une algèbre abstraite — supposée être ni commutative ni associative — est dite être une *algèbre de Lie* si sa « multiplication », alors notée $[\mathsf{x}, \mathsf{y}]$ au lieu de xy, satisfait les deux propriétés suivantes :

(a) $[\mathsf{x}, \mathsf{x}] = 0$ pour tout $\mathsf{x} \in \mathfrak{g}$, d'où découle l'*anti-commutativité* :

$$[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = -[\mathsf{y}, \mathsf{x}];$$

(b) l'*identité de Jacobi*, d'après laquelle la somme, sur toutes les permutations circulaires, de crochets doubles à trois membres s'annule :

$$\big[[\mathsf{x}, \mathsf{y}], \mathsf{z}\big] + \big[[\mathsf{y}, \mathsf{z}], \mathsf{x}\big] + \big[[\mathsf{z}, \mathsf{x}], \mathsf{y}\big] = 0.$$

Soit maintenant $\mathfrak{g}$ une algèbre qui est associative pour une première « multiplication » initiale xy, comme l'est par exemple l'algèbre des matrices de taille $n \times n$ sur $\mathbb{K}$ pour le produit matriciel. On peut alors définir un nouveau produit :

$$[\mathsf{x}, \mathsf{y}] := \mathsf{xy} - \mathsf{yx}$$

qui est clairement antisymétrique. Pour établir que ce produit fait de $\mathfrak{g}$ une véritable algèbre de Lie, il faut ensuite *vérifier* l'identité de Jacobi **(b)**. Citons alors un ouvrage spécialisé qui ne se dispense pas de mettre en forme ce calcul élémentaire.

> Let $\mathfrak{g}$ be an associative algebra. Then $\mathfrak{g}$ becomes a Lie algebra under $[\mathsf{x}, \mathsf{y}] = \mathsf{xy} - \mathsf{yx}$. Certainly $[\mathsf{x}, \mathsf{x}] = 0$. For the Jacobi identity we have
>
> $$\begin{aligned} &\big[[\mathsf{x}, \mathsf{y}], \mathsf{z}\big] + \big[[\mathsf{y}, \mathsf{z}], \mathsf{x}\big] + \big[[\mathsf{z}, \mathsf{x}], \mathsf{y}\big] \\ &\quad = [\mathsf{x}, \mathsf{y}]\mathsf{z} - \mathsf{z}[\mathsf{x}, \mathsf{y}] + [\mathsf{y}, \mathsf{z}]\mathsf{x} - \mathsf{x}[\mathsf{y}, \mathsf{z}] + [\mathsf{z}, \mathsf{x}]\mathsf{y} - \mathsf{y}[\mathsf{z}, \mathsf{x}] \\ (*) &\quad = \mathsf{xyz} - \mathsf{yxz} - \mathsf{zxy} + \mathsf{zyx} + \mathsf{yzx} - \mathsf{zyx} \\ &\qquad - \mathsf{xyz} + \mathsf{xzy} + \mathsf{zxy} - \mathsf{xzy} - \mathsf{yzx} + \mathsf{yxz} \\ &\quad = 0. \end{aligned}$$
>
> **[247]**, 25

Micro-commentaire de la démonstration. Bien que trivial et généralement « laissé en exercice » dans les manuels, ce calcul manifeste quelques caractères essentiels de la pensée mathématique en relation avec sa dynamique algébrique, que nous conceptualiserons comme suit.

☐ Exhaustivité symbolique : chaque double crochet déploie, sans abréviation, chacun de ses quatre termes en deux moments symboliques successifs.

☐ Lisibilité rigoureuse : la trace écrite (et publiée) de ces deux déploiements est ajustée exactement *de telle sorte que nul lecteur n'ait besoin de recourir à des calculs auxiliaires* : évidence du développement du premier double crocher emboîté $\big[[x, y], z\big]$ vers $[x, y]z - z[x, y]$, puis vers $xyz - yzx - zxy + zyx$, et il en va de même pour les deux autres doubles crochets emboîtés.

☐ Harmonies combinatoires : on perçoit au passage les alternances des signes $+$ et $-$, d'après des règles qui évoluent et dont on retrace l'origine et la provenance en remontant les lignes de calcul ; des harmonies symboliques nouvellement observées tracent des lignes transversales complémentaires dans le contenu littéral brut ; chasser les possibles erreurs de signe devient alors plus aisé.

☐ Annulation contrôlée : les douze termes obtenus s'annulent par paires d'après un mécanisme de vérification visuelle qui est considéré, par l'auteur-écrivain, comme se donnant par lui même dans la lecture.

☐ Gestes implicites : néanmoins, les six gestes de repérage de paires de trinômes qui s'annulent *ne sont pas* notifiés formellement dans le texte. Ceci révèle une certaine incomplétude des moyens symboliques qui permettent l'expression dynamique des actes mathématiques. On peut alors se demander par quels moyens on pourrait *enrichir l'écriture mathématique de nouveaux symboles* qui retranscriraient toute une panoplie d'actes calculatoires courants qui sont en général sous-entendus dans les textes, actes souvent implicités qui font occasionnellement obstacle à la compréhension.

☐ Signaler l'annulation par un nouveau symbole : Voici au moins un symbole nouveau que nous avons introduit dans notre pratique et utilisé régulièrement dans plusieurs publications spécialisées de mathématiques ([**314, 316, 317, 319, 4**]). En accord avec cette pratique, on devrait souligner les expressions qui s'annulent par paires, dans la dernière étape du calcul :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} \underline{xyz}_{\circ} - \underline{yxz}_{\circ\circ} - \underline{zxy}_{\circ\circ\circ} + zyx + yzx - zyx \\ &\quad - \underline{xyz}_{\circ} + xzy + \underline{zxy}_{\circ\circ\circ} - xzy - yzx + \underline{yxz}_{\circ\circ} \\ &= 0; \end{aligned}$$

le travail restant de soulignement, peut être complété à l'œil nu, ou directement au(x) stylo(s) (de couleurs) sur la mouture imprimée.

Exemples de pratiques de soulignement. Dans certaines circonstances où le nombre de termes à considérer est élevé, on peut éventuellement aussi, par souci de clarté et de complétude, attribuer un numéro à chaque groupe de termes soulignés qui, mis ensemble, s'annihilent. Exemple ([**314**]) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\left(\square^0_{xx}\right)_y - \left(\square^0_{xy}\right)_x = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\Delta(xx|y)}{\Delta(x|y)}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Delta(xy|y)}{\Delta(x|y)}\right) = \\
&= \frac{1}{[\Delta(x|y)]^2}\Big\{\underline{\Delta(xxy|y)\cdot\Delta(x|y)}_{\text{a}} + \Delta(xx|yy)\cdot\Delta(x|y) - \\
&\qquad\qquad - \underline{\Delta(xy|y)\cdot\Delta(xx|y)}_{\text{b}} - \Delta(x|yy)\cdot\Delta(xx|y) - \\
&\qquad\qquad - \underline{\Delta(xxy|y)\cdot\Delta(x|y)}_{\text{a}} - \underline{\Delta(xy|xy)\cdot\Delta(x|y)}_{\text{c}} + \\
&\qquad\qquad + \underline{\Delta(xy|y)\cdot\Delta(xx|y)}_{\text{b}} + \Delta(xy|y)\cdot\Delta(x|xy)\Big\} = \\
&= \frac{1}{[\Delta(x|y)]^2}\left\{\Delta(xx|yy)\cdot\Delta(x|y) - \Delta(x|yy)\cdot\Delta(xx|y) + \right. \\
&\qquad\qquad \left. + \Delta(xy|y)\cdot\Delta(x|xy)\right\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Souligner sans barrer : sur les manuscrits (mais pas encore dans les publications), des couleurs peuvent être utilisées afin de mieux solliciter le système perceptif visuel lors de l'effectuation des calculs. Dans l'exemple qui suit ([**4**]), l'annulation des termes qui sont soulignés provient d'une collection de 150 équations différentielles algébriques d'ordre 1 qui a été énoncée auparavant dans le déroulement de l'article :

$$
\begin{aligned}
\kappa_j^{h_1h_2} &= \widehat{J}^*([\widehat{H}_1, \widehat{H}_2] \\
&= -4\widehat{T}) - \widehat{H}_2(\alpha_{h_1j}) + \alpha_{h_1h_2}H_2(\alpha_{h_2j}) + \alpha_{h_1h_1}H_1(\alpha_{h_2j}) + \beta_{jh_1}\big(\alpha_{h_1h_1}\underline{H_1(\alpha_{h_2h_1})}_{\circ} - \\
&- \alpha_{h_2h_1}\underline{H_1(\alpha_{h_1h_1})}_{\circ} - \alpha_{h_2h_2}\underline{H_2(\alpha_{h_1h_1})}_{\circ} - \alpha_{h_2i_1}\underline{\widehat{I}_1(\alpha_{h_1h_1})}_{\circ} - \alpha_{h_2i_2}\underline{\widehat{I}_2(\alpha_{h_1h_1})}_{\circ} - \alpha_{h_2j}\underline{\widehat{J}(\alpha_{h_1h_1})}_{\circ} + \\
&+ \alpha_{h_1h_2}\underline{H_2(\alpha_{h_2h_1})}_{\circ} - \alpha_{h_2d}\underbrace{\widehat{D}(\alpha_{h_1h_1})}_{-\alpha_{h_1h_1}} - \alpha_{h_2r}\underbrace{\widehat{R}(\alpha_{h_1h_1})}_{-\alpha_{h_2h_1}}\big) + \beta_{jh_2}\big(-\alpha_{h_2d}\underbrace{\widehat{D}(\alpha_{h_1h_2})}_{-\alpha_{h_1h_2}} - \alpha_{h_2r}\underbrace{\widehat{R}(\alpha_{h_1h_2})}_{-\alpha_{h_2h_2}} + \\
&+ \alpha_{h_1h_1}\underline{H_1(\alpha_{h_2h_2})}_{\circ} - \alpha_{h_2h_1}\underline{H_1(\alpha_{h_1h_2})}_{\circ} - \alpha_{h_1h_2}\underline{H_2(\alpha_{h_2h_2})}_{\circ} - \alpha_{h_2h_2}\underline{H_2(\alpha_{h_1h_2})}_{\circ} - \\
&- \alpha_{h_2i_1}\underline{\widehat{I}_1(\alpha_{h_1h_2})}_{\circ} - \alpha_{h_2i_2}\underline{\widehat{I}_2(\alpha_{h_1h_2})}_{\circ} - \alpha_{h_2j}\underline{\widehat{J}(\alpha_{h_1h_2})}_{\circ}\big) + \beta_{jt}\big(4\alpha_{h_1h_1}\alpha_{h_2h_2} - 4\alpha_{h_1h_2}\alpha_{h_2h_1}\big),
\end{aligned}
$$

Dans le prochain exemple (*cf.* aussi la monographie [**247**] qui pratique le même style explicatif en de nombreux endroits), on signale en marge les raisons de chaque acte intermédiaire de calcul :

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathsf{coeff}_{d^{n+1}}\Big[u_1^{i_1}\cdots u_{n-2}^{i_{n-2}}\big(-c_1^{[n-2]}u_{n-1}^{n-1} - \underline{c_2^{[n-2]}u_{n-1}^{n-2} - \cdots - c_n^{[n-2]}}_{\circ}\big)\Big] \\
&= \mathsf{coeff}_{d^{n+1}}\big[u_1^{i_1}\cdots u_{n-2}^{i_{n-2}}\big(-c_1^{[n-2]}\,u_{n-1}^{n-1}\big)\big] \qquad \text{[degree-form reasons]} \quad \text{[use (17)]} \\
&= \mathsf{coeff}_{d^{n+1}}\big[u_1^{i_1}\cdots u_{n-2}^{i_{n-2}}\big(-c_1 - \underline{(n-1)u_1 - \cdots - (n-1)u_{n-2}}_{\circ}\big)\,u_{n-1}^{n-1}\big] \\
&= \mathsf{coeff}_{d^{n+1}}\big[-c_1u_1^{i_1}\cdots u_{n-2}^{i_{n-2}}u_{n-1}^{n-1}\big] \qquad \text{[apply } \mathbf{(i)} \text{ again]}.
\end{aligned}
$$

Enfin, souligner ne se réduit pas à indiquer des annihilations, on peut par exemple aussi signaler, quand on utilise les bases de Gröbner, des termes de têtes [*leading terms*] dans tout polynôme que l'on écrit ([**316**]) :

$$0 \overset{41}{\equiv} -6\,Q^{14}L^{12}V^{19} - Q^{14}Q^{14}U^{17} + 5\,\underline{X^{21}L^{12}L^{12}}_{\text{LT}} - 5\,f_1'M^8R^{15}X^{21}.$$

2.44. Interlude : about hand-computed formulas. In Section 4 below, when dealing with several dependent variables $y^1, \dots, y^m$, many simplifications of identities which are much more massive than (2.42) will occur several times. It is therefore welcome to explain how we manage to achieve such computations, without mistakes at the end and strictly by hand. One of the trick is to use colors, which, unfortunately, cannot be restituted in this printed document. Another trick is to *underline and to number the terms which disappear together*, by pair, by triple, by quadruple, *etc.* This trick is illustrated in the detailed identity (2.45) below, extracted from our manuscript, which is a copy of (2.42) together with the designation of all the terms which vanish together. Hence, *we keep a written track of each intermediate step of every computation and of every simplification*. Checking the correctness of a computation simply by reading is then the easiest way, both for the writer and for the reader, although of course, it takes time, anyway. [**314**]

On the contrary, when relying upon a digital computer, most intermediate steps are invisible ; the chase of mistakes is by reading the program and by testing it on several instances. Alas, all the finest intuitions which may awake in the extreme inside of a long computation are essentially absent, the mind believing that the machine is stronger for such tasks. This last belief is in part true, in the case where straightforward known computations are concerned, and in part untrue, in the case where some new hidden mathematical reality is concerned. [**314**]

For us, *the challenge is to control everything in a sea of signs*. Computations are to be organized like a living giant coral tree, all part of which should be clearly visible in a transparent fluid of thought, and permanently subject to corrections. [**314**]

Indeed, it often happens that going through a problem involving massive formal computations, some disharmony or some incoherency is discovered. Then one has to inspect every living atom in the preceding branches of the growing coral tree of computations until some very tiny or ridiculous mistake is found. In addition to making easy the reading, *a perfectly rigorous way of writing the formal identities which respects a large amount of virtual conventions facilitates to reorganize rapidly the coral tree after a mistake has been found*. The accumulation of new virtual conventions, all of which we cannot speak, constitutes another coral meta-tree and another profound collection of trick. Finally, we use a blank fluid corrector to avoid copying to much. [**314**]

Insertion volontaire d'ingrédients intuitifs. Relisons à présent de manière linéaire l'exemple initial, et commentons quelques une des intentions d'écrivain qui ont été calculées.

□ On incorpore : « par exemple, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ » afin de concrétiser l'appel conceptuel — peut-être exagérément abstrait ici — à un corps $\mathbb{K}$ absolument général. C'est un acte 'philosophique', en tant que le général est relié au particulier en termes de rappel d'exemplification co-présente. Sans doute, les algébristes purs considéreraient que cet acte est nul et non avenu, puisque la généralité ontologique de tout énoncé est essentielle.

□ Entre parenthèses, le terme « multiplication » évoque les nombres habituels : tout le monde comprend, si la visée est pédagogique ; mais même en s'adressant à un lectorat expert, le dosage de mots informatifs bien choisis permet de mieux entraîner son lecteur dans un mouvement de pensée que l'on crée.

□ On écrit « pour tous $x, y \in \mathfrak{g}$ » et on répète « pour tous » afin de conférer, par ce parallèle, un coup de pouce rhétorique à l'énonciation.

□ On est contraint de présenter la notion d'algèbre associative avant celle d'algèbre de Lie parce que l'objectif principal est de présenter le calcul ($*$), et parce que les concepts classique de commutativité et d'associativité sont plus élémentaires. Comme on enchaîne directement avec la définition d'une algèbre de Lie, on est contraint de signaler au lecteur que l'algèbre ne sera supposée ni commutative, ni associative. Il y a encore un défaut infinitésimal : on n'est pas parvenu à inscrire un élément de phrase anticipateur qui motive le lemme en vue, à savoir que $\mathfrak{g}$, associative, sera de Lie si on la munit de l'opération dérivée $[x, y] := xy - yx$. Dans l'hypothèse où ce court passage appartiendrait à un ensemble global (texte philosophique sur les groupes de Lie ; cours dactylographié ; livre), des motivations anticipées pourraient apparaître en amont, où à l'inverse, être escamotées intentionnellement par choix : tout l'*enfer* de la *pensée disparaissante* menace chaque acte d'écriture !

□ On reprend le terme « multiplication » afin que l'intuition et la compréhension du lecteur se déplacent d'autant mieux vers l'endroit où on souhaite l'attirer, que l'introduction de la nouvelle notation $[x, y]$ justifie implicitement le changement conceptuel de la notion d'algèbre.

□ On mentionne l'antisymétrie entre parenthèses avec un « d'où découle », qui sous-entend que le lecteur est capable de reconstruire immédiatement la démonstration qui fait passer de : '$[x, x] = 0, \; \forall\, x$' à : '$[x, y] = -[y, x], \; \forall\, x, y \in \mathfrak{g}$'. Un autre choix de présentation eût été de faire apparaître directement (et seulement) l'antisymétrie. En tout cas, il y a choix, et les choix sont modifiables. Le problème, quand on évoque ces micro-aspects de l'écriture mathématique, c'est que les mathématiciens sont des monstres de rapidité en ce qui concerne la compréhension, et qu'ils jugeraient sans doute inutile de s'appesantir sur le raffinement de l'écriture de chaque détail. Cela explique la si grande diversité stylistique des textes qui paraissent. Toutefois, négliger les liaisons infinitésimales ne contribue qu'à affaiblir la lisibilité de la pensée.

3. Génétique du littéral

Élongation temporelle ; alentissement. Seule la lenteur intensive des actes de pensée dans l'écriture peut répondre au plaisir de la compréhension-éclair. Tracer ses propres court-circuits intuitifs dans un labyrinthe que l'on crée soi-même à l'échelle d'une vie tout entière, tel est le jeu supérieurement mystérieux de la pensée dans lequel tout homme se trouve engagé. Merveilleuse promesse d'individuation !

> Pourquoi donc voulais-tu avoir fini ta *Servante* pour le 1er avril ? Voilà de ces choses que tu me permettras de blâmer ! Il ne faut se rien fixer en ces matières, car on se dépêche alors, avec la meilleure bonne foi du monde et sans s'en douter. On doit toujours s'embarquer dans une œuvre comme un corsaire dans son navire, avec l'intention d'y faire fortune, des provisions pour vingt campagnes, et un courage intrépide.
>
> Tu travailles *encore trop vite*. Rappelle-toi le vieux précepte du père Boileau : « écrire difficilement des vers faciles ». Lettre à Louise Colet, 25-26 mars 1854

Mécanique du naturel. Dans l'écriture, nul automatisme ne guide vers l'universel ; pour saisir, les phrases exigent de l'imprévu, du nerveux et du racé. Tout, dans chaque texte, réfère au monde immense du mouvement et de la perception, ce grand « mystère phénoménologique » qui tenaille les philosophes du sensible, mais face auquel l'écrivain, modeste serviteur du langage, ne possède pour piètres armes qu'une suite de lettres toujours maladroites. Que de sueur pour une seule phrase qui frappe ! Pour une phrase qui pénètre comme une flèche à l'intérieur du cerveau de *tout* lecteur ! pour une phrase qui embrase l'intuition jusqu'à rejaillir dans les sphères du mouvement, de la perception et de la compréhension de *chaque* lecteur !

Compréhension et appropriation. Plus encore, c'est bientôt au tour de la pensée reptilienne de se rebeller contre les dures lois de l'écriture : nihiliste elle-même comme nous le sommes tous à nos heures, cette pensée primordiale, fondamentale et archaïque objecte : « que valent ces heures interminables passées à forger une version élaborée de ce que nos méditations continues ont déjà parfaitement capturé ? ». La pensée parcourt en effet comme l'éclair tout ses territoires conquis, qu'ils soient écrits, oraux ou déployés à l'abri du langage.

Travailler, construire, conquérir, établir, raffermir : tout cela pour offrir ses douloureuses secrétions abstraites en pâture à la mémoire comprimante !

Quel paradoxe ! Pendant ce temps, tout vieillit et se précipite à vers une perte certaine. Les fondements neurobiologiques du nihilisme resurgissent et menacent.

Mobilisations neuro-moléculaires Dans la balance idéale du grand réductionnisme physico-biologico-neurophysiologique, comparons par exemple les quelques centaines de caractères que totalise une fable de Lafontaine aux milliards de milliards de milliards d'atomes que notre corps doit mobiliser pour la lire. Le miel scriptural que butine l'intellectuel ne représente qu'une partie au plus infinitésimale de l'« être corporel dans le monde ». Pourquoi la Création n'accélère-t-elle pas la transsubstantiation ultime de la chair moléculaire en chaînes signifiantes de symboles ? Quel gâchis de voir tant de corps et de boîtes craniennes occupées à des cultures intellectuelles aux rendements misérables !

Génétique des textes littéraires. À la fin des années 1970 naît une nouvelle discipline d'étude critique des textes, la *génétique littéraire*, qui se pose non sans polémiques comme alternative « scientifique » aux approches interprétatives traditionnelles, telles que la rhétorique classique, l'histoire contextuelle, l'analyse référentielle, la statistique occurentielle, ou encore l'herméneutique classique. Cette approche se propose de scruter la production effective de quelques grandes œuvres sélectionnées dans le corpus classique et de reconstituer leur genèse grâce à une lecture minutieuse (et ascétique) de plusieurs milliers de pages de notes, de brouillons et de variantes que certains écrivains célèbres, à l'instar de Victor Hugo, ont décidé de léguer aux bibliothèques nationales, comme passeport fétiche vers la postérité. L'« écriture en train de se faire », ses mouvances, ses errances, ses délinéaments, ses règles, tel est l'objet d'étude. Élaborer des connaissances exactes sur les techniques d'écritures propres à tel ou tel écrivain, règles discursives implicites, méthodes d'élaboration

Jusqu'à présent, cette discipline n'apparaît pas comme un corps de doctrine établi et rigide, mais la permanence de ses hésitations théoriques témoigne de son caractère encore largement ouvert. À cause de la très grande complexité des actes techniques, la génétique littéraire n'est pas encore en mesure, en inter-textualisant et en globalisant les analyses, de subsumer toute une collection de textes produits par un écrivain donné

En génétique littéraire, on ne rêve donc pas tant d'accéder à la téléologie des chefs-d'œuvres ou encore de découvrir l'alchimie secrète du génie, mais on cherche à élaborer un « discours scientifique effectif » sur la

Hybridations, croisements, multiplicités. Nul alors ne pourra se dispenser des processus de fixation et de transcription qui sont à l'œuvre dans l'écriture. Toute intuition architecturée se débat à chaque seconde contre la corruption infime et permanente de ses supports neuronaux. La mémoire aime à devoir mourir. Nécessité du vide faisant loi, cette ogresse efface elle-même et brûle les précieux rouleaux de papyrus qu'elle dispose dans ses cases libres. Tout geste, aussi, vit sa propre disparition ; inégalité, en effet, des échelles temporelles de l'éphémère ; universalité du transitoire, malgré tout les « réels » possibles. Il est triste de constater que l'échelle temporelle d'individuation intellectuelle sature à cause de l'accumulation écrasante des créations passées. Comment se créer un espace de liberté ?

> Il s'agit pour l'écrivain de travailler à l'échelle même des représentations internes en laissant se former et se développer en lui, sous forme de petites hallucinations, les images mentales des scènes-clefs de l'histoire, l'architecture des liens logiques entre les différents moments du récit, la vision précise des lieux où va se dérouler l'action, les effets de lumière sur le panorama, le mouvement des corps, la démarche, l'attitude, les costumes des personnages, l'enchaînement des scènes, comme dans une sorte de théâtre optique. [...] Cette phase de travail presque entièrement psychique ressemble à une rêverie dirigée. L'écrivain projette mentalement son histoire [...]. Au cours de cette période qui peut durer quelques jours ou quelques semaines, Flaubert « travaille » généralement allongé sur son lit, confortablement installé sur le dos, les yeux au plafond : c'est ce qu'il appelle « rêvasser ». De temps en temps, il se lève d'un bond pour prendre une ou deux notes télégraphiques sur un détail aperçu ou sur une expression qui lui est venue et qu'il ne voudrait pas oublier, ou pour aller consulter un ouvrage — texte ou iconographie — dans lequel, il en est sûr, se trouve un élément essentiel pour valider ou relancer sa rêverie. Puis il retourne s'allonger, ou se carre dans son fauteuil, devant la croisée, les yeux noyés dans le lointains, en laissant se reconstituer derrières ses pupilles la familière procession des images. Le travail de conception se poursuit, et Flaubert reprend inlassablement ses séances de projection mentale jusqu'á ce qu'il parvienne à voir nettement se dérouler le « film » du récit, plan après plan, séquences après séquences. [**37**]

> Il y a des milliers de pages, toutes noires de ratures, où ont lit jusqu'à huit ou dix rédactions d'un même passage. On reste anéanti devant ce qu'un tel labeur représente de patience, de volonté, d'obstination, et, il faut le dire aussi, de résistance physique.
>
> Flaubert écrit par surcharges. D'abord quelques notes indiquant les idées d'un paragraphe. Il reprend ensuite, il développe, la phrase s'épanouit. Il relit alors et il refait. La naïveté de ces refontes est inconcevable. C'est le tâtonnement continu. On se demande comment un style si parfait a pu sortir d'un si informe chaos.
>
> Flaubert retravaille la page achevée, la recommence, change les tournures, essaie des variantes, cherche les mots.
>
> Le morceau devient illisible. La phrase déborde. On perd le sens. Il recopie le tout et continue ainsi quatre fois, six fois, huit fois. Il a même criblé de ratures la rédaction qu'il destinait au copiste ; et cette dernière, calligraphiée et officielle, il la retouche encore. [**5**]

4. Sur les illustrations

Illustration, ou non-illustration. Flaubert est célèbre par son refus de toute illustration. Maintes fois proposées, il n'y en eut aucune, de son vivant, dans les éditions qu'il put contrôler. Aucun art, selon lui, ne peut en expliquer un autre. Chacun a sa vérité propre. Voici une des meilleures explications qu'il ait données dans sa *Correspondance* : « jamais, moi vivant, on ne m'illustrera, parce que : la plus belle description littéraire est dévorée par le plus piètre dessin. Du moment qu'un type est fixé par le crayon, il perd ce caractère de généralité, cette concordance avec mille objet connus qui font dire au lecteur : « j'ai vu cela » ou « cela doit être ». Une femme dessinée ressemble à une femme, voilà tout. L'idée est dès lors fermée, complète, et toutes les phrases sont inutiles, tandis qu'une femme écrite fait rêver à mille femmes. Donc, ceci étant une question d'esthétique, je refuse formellement toute espèce d'illustration » (lettre à Ernest Duplan, 12 juin 1862).

Impossible codification des illustrations en mathématiques ? C'est un fait singulier du développement historique de la géométrie, un trou béant et presque inexplicable dans la pratique mathématique : nulle mise au point n'a jamais été décidée en commun pour codifier rigoureusement l'insertion du diagrammatique dans le texte formel. Trop grande richesse des intuitions créatrices, trop grande variabilité des tracés, trop grande puissance d'appréciation esthétique du système visuel, ou trop grande pauvreté du croquis mathématique exécuté à la sauvette, ou même encore : volonté systématique de bannir toute illustration comme susceptible de détourner l'attention vigilante de la rigueur par une séduction intempestive de l'appareil perceptif, quelles qu'en soient les causes, rien ne s'est jamais présenté dans l'histoire des mathématiques, en tant que nécessité ressentie de manière purement interne, comme un devoir de codifier spécifiquement le géométral, au même titre et avec la même dignité que l'on a graduellement donné de l'ampleur à la méthode axiomatique comme le fit Bourbaki. Visiblement, la complexité objective de l'appropriation subjective des concepts n'est pas encore suffisamment comprise ou étudiée, tant sur le plan biologique que sur un plan purement spéculatif.

5. Mathematics is amazingly compressible

Alchimie cognitive de la compréhension. Nous savons pour l'avoir pratiqué à l'école ou en faculté que la pensée scientifique, lorsqu'elle est gestualisée, c'est-à-dire accompagnée par le corps dans sa mobilité disponible, s'enrichit d'une dynamique intuitive qui guide l'esprit vers l'élémentaire, le concret et le compréhensible. Grâce au mouvement physique et à la parole, une construction mentale s'opère de manière beaucoup plus rapide, efficace, et prégnante qu'à la lecture, car nous sommes tous, en tant qu'êtres humains, principalement structurés par nos appareils moteurs et perceptifs, y compris lorsqu'il s'agit de s'approprier des concepts très abstraits. C'est pour cette raison, entre autres, que nous éprouvons souvent de réelles difficultés à accéder aux significations profondes des théories, lorsqu'elles ne nous sont présentées que sous forme écrite et désincarnée, pour peu qu'elles ne nous soient pas encore familières ou que nous n'en maîtrisions pas les fondamentaux, et nous avons pour confirmation de cet état de fait que parfois, par la suite, au hasard d'un séminaire ou d'une conférence, lorsque cette théorie nous est dévoilée oralement, nous faisons l'expérience psychologiquement douloureuse de découvrir que nous n'étions pas parvenus à reconstituer les bons paysages conceptuels par notre seule force de pensée à partir d'un simple déchiffrement de l'écrit. L'alchimie d'appropriation de la pensée qu'on appelle la *compréhension* exige en effet une dépense mentale bien plus extraordinaire quand on lit que lorsque les choses nous sont expliquées par un être humain, parce que celui qui nous parle use et abuse de ses capacités de parole, de répétition, de désignation et de raccourci, ce qui fait voler en éclat tous les handicaps artificiels auxquels nous nous soumettons au contact de l'écrit imprimé.

Orchestrer les actes de pensée. Toutefois, après avoir signalé notre incapacité à faire le plein d'essence intuitive aussi rapidement qu'on téléchargerait des textes électroniques sur un ordinateur (on pourrait rêver de posséder un cerveau susceptible d'ingurgiter des mathématiques directement « à la pompe » sur le *web*, ou qui puisse apprendre des langues étrangère la nuit pendant le sommeil par simple branchement à des canaux de fibres optiques), il est absolument hors de question pour nous de disqualifier l'écriture, parce que, dans le rapport de complémentarité qu'elle entretient au domaine plus aisé de l'oralité, l'écriture a pour objectif principal de fixer une *concentration orchestrée d'actes de pensée*, en les purgeant de la contingence et du chaos des gestes. Jamais aucun exposé oral ne sera en mesure de supplanter l'écriture sur ce point, et nous savons que certaines théories mathématiques compilées dans des traités d'ampleur exigent des années d'apprentissage, même lorsque l'esprit bénéficie du secours des exposés oraux. En sciences, les livres, monographies, ouvrages, traités ou notes de cours, compactifient chacun des milliers d'actes de connaissance, avec l'espoir de faciliter un accès ordonné au désordre gigantesque d'hésitations, de refontes, de remanipulations de réécritures, de calculs inexacts et de microcorrections qu'ils ont subi, sans oublier que le contenu interne est souvent le fruit d'années de méditations. Chaque bible scientifique « *lyophilise* » une pensée que ses lecteurs doivent « *réhydrater* » avec leur seule « *sueur intellectuelle* ». Et comme le nombre de ces ouvrages augmente exponentiellement, les efforts de lecture que chacun peut entreprendre ne peuvent, depuis bien longtemps, plus suivre le rythme.

Ces considérations soulignent notre finitude, cette « rétrécitude » que l'on ressent de manière accentuée à cause de l'explosion du nombre de publications scientifiques. Il s'agit d'une limitation intrinsèque, et le « nous » doit renvoyer ici à l'individualité propre de l'appareil biologique de pensée, ainsi qu'à sa durée de vie, qu'on dit ordinairement « limitée ».

Mais alors, toute décision d'écrire s'expose à de formidables difficultés.

Comment écrire ? En effet : *comment inventer une écriture qui diminue la lenteur, dilate la finitude du compréhensible et resserre au maximum l'écart entre la pensée vivante et le texte symbolique ?* Cet écart, nous l'avons dit, agit comme une différence de potentiel ineffaçable.

Le réflexe du pourquoi et du comment. Et d'autres obstacles encore, d'ordre cognitif, s'interposent — en voici un qui nous paraît déterminant : dans le domaine de la pensée, nos cerveaux exigent des explications à chaque instant ; par l'effet d'un réflexe sain qui date de l'enfance, *la question du « pourquoi » et la question du « comment » surgissent à chaque nouvelle information reçue* ; et c'est grâce à cela que nous pouvons orienter notre corps et notre pensée à tous les instants de la vie, chaque *question* subissant la pression d'une exigence de *décision*. Tout aussi puissant et disponible que le système perceptif, le « *système spéculatif* » — c'est-à-dire l'ensemble des structures qui nous permettent de penser en questionnant — exige des explications, demande des motivations, cherche les nécessités, souhaite des informations historiques et désire une possession intuitive totale des choses.

> Mathematics is amazingly compressible : you may struggle a long time, step by step, to work through some process or idea from several approaches. But once you really understand it and have the mental perspective to see it as a whole, there is often a *tremendous mental compression*. You can file it away, recall it quickly and completely when you need it, and use it as just one step in some other mental process. The insight that goes with this compression is one of the real joys of mathematics. [**438**]

Principes, préconisations. Comment alors satisfaire le « *désir spéculatif avide* » du lecteur, cet ingénu du pourquoi qui ne possède pas encore sa toile préférée de perspectives mentales ? Reprenons donc la question : comment se constituer un *style d'écriture scientifique* qui procure au mieux les compressions intuitives ? Voici en résumé quelques principes élémentaires, compilés dans une liste non exhaustive que chacun pourra amender ou corriger :

☐ respecter rigoureusement la successivité, la progressivité et la continuité des raisonnements ;
☐ illustrer les constructions par des figures ;
☐ piloter au mieux l'intuition du lecteur ;
☐ écrire l'ignorance ;
☐ formuler de la pensée littérale au sein même des paragraphes les plus techniques ;
☐ détailler scrupuleusement les calculs ;
☐ virtualiser et anticiper ;
☐ expliquer, commenter et interpréter les énoncés de théorèmes ;
☐ charpenter la clarté rhétorique ;
☐ rappeler et redéfinir les notions qui interviennent dans un énoncé ;
☐ formuler des questions ouvertes ;
☐ expliciter des motivations ;
☐ articuler soigneusement les moments d'opposition dialectique ;
☐ décrire l'architecture des démonstrations en langage ordinaire ;
☐ temporaliser le cours des démonstrations en utilisant les temps des verbes ;
☐ **filtrer mentalement l'écriture par la relecture et par les reprises** ;
☐ **tester inlassablement la lisibilité en se dédoublant** ;
☐ **réordonner, impitoyablement, toujours**.

Courbure des surfaces dans l'espace : le *Theorema Egregium* de Gauss

Nihil actum reputans si quid superesset agendum.
Devise de Gauss

1. Présentation de la *formula egregia*

En 1827–28, après plus de quinze années de méditation, Gauss[1] publie un mémoire intitulé *Disquisitiones generales circa superficies curvas* qui signe l'acte de naissance de la géométrie différentielle moderne. Il s'agit là d'un des articles les plus célèbres de l'histoire des mathématiques, article qui frappe encore le lecteur contemporain par la perfection achevée de son contenu, par la richesse de ses idées novatrices et par la netteté de son architecture. Le point d'orgue de ce texte est une formule mathématique centrale, complexe et remarquable qui aura coûté plusieurs années de recherche au génie calculatoire de Gauss. Cette formule exprime la courbure d'une surface bidimensionnelle plongée dans l'espace tridimensionnel à l'aide de données métriques purement intrinsèques, libérées de la troisième dimension supplémentaire.

---

[1] GAUSS, Carl Friedrich (Bunswick 1777 - Göttingen 1851), mathématicien, astronome et physicien allemand, fils d'artisan issu d'un milieu modeste, remarqué pour la précocité de ses talents, put conduire ses études grâce à la protection et au soutien du duc de Brunswick. Adolescent, il développe sa virtuosité technique en calculant des logarithmes et il corrige la table des nombres premiers de G. von Vega et J. Lambert. À 19 ans, il démontre que le polygone régulier à dix-sept côtés inscrit dans un cercle est constructible à la règle et au compas — résultat très inattendu sur un sujet qui n'avait pas fait de progrès substantiels depuis l'Antiquité. En 1799, il soutient sa thèse à l'université d'Helmstedt, donnant les premières démonstrations rigoureuses du théorème fondamental de l'algèbre, d'après lequel tout polynôme non constant à coefficients complexes possède au moins une racine réelle ou imaginaire. En 1801, à 24 ans, celui qu'on allait appeler le « prince des mathématiciens » publie un ouvrage majeur de cinq cents pages intitulé *Disquisitiones arithmeticae*, qui incorpore une nouvelle théorie des congruences, une théorie des formes quadratiques et dont le dernier chapitre est consacré à énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un polygone à un nombre premier p de côtés soit constructible à la règle et au compas. Nommé directeur de l'observatoire de Göttingen en 1807, il consacrera son énergie à la mécanique céleste, au magnétisme, à la théorie des erreurs, poursuivant occasionnellement ses travaux mathématiques, qu'il ne publiait pas et dont il faisait état par lettre et de manière confidentielle à quelques interlocuteurs choisis.

Plus précisément[2], en 1827, Gauss a démontré qu'étant donné une surface bidimensionnelle paramétrée par deux coordonnées $(u,\, v)$ et munie d'une métrique infinitésimale

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2, \tag{6.2.4}$$

où E, F et G sont des fonctions des deux variables u et de v, il est toujours possible de calculer en tout point de coordonnées $(u,\, v)$ sa « courbure » $\kappa = \kappa(u,\, v)$, fonction elle aussi des deux variables u et v. La courbure d'une surface en un point de coordonnées $(u,\, v)$ est une notion tridimensionnelle conçue par Gauss lui-même qui sera redéfinie en termes géométriques ci-après. La formule par laquelle Gauss calcule la courbure κ est spectaculaire en ceci qu'elle ne fait intervenir que la métrique infinitésimale bidimensionnelle (6.2.4), sans aucune référence à l'espace dans lequel est plongée la surface ; elle sera appellée « *formula egregia*[3] » ou « formule remarquable » :
(6.2.4)

$$\boxed{\begin{aligned}\kappa = \frac{1}{4\,(EG-F^2)^2}\bigg\{ & E\bigg[\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\bigg] + \\ & + F\bigg[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + 4\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\bigg] + \\ & + G\bigg[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + \frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial E}{\partial v}\bigg] + \\ & + 2\,\big(EG-F^2\big)\bigg[-\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} + 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} - \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\bigg]\bigg\}.\end{aligned}}$$

Cette expression mathématique, publiée en 1828, a été découverte en 1827 grâce à un calcul virtuose.

Dans ce texte, il va être question de reconstituer les spéculations méthodiques et les calculs formels qui ont conduit Gauss, après de nombreuses tentatives infructueuses, à découvrir et à élaborer cette « *formula egregia* ». Son caractère presque ésotérique et la complexité quasi-incompressible des calculs formels qui sont nécessaires pour l'obtenir en ont fait un objet que l'on est parfois tenté de reléguer à un rang secondaire dans les manuels contemporains de géométrie différentielle. Mais ici, loin d'écarter les difficultés calculatoires, il faudra accepter cette complexité interne afin de disséquer la

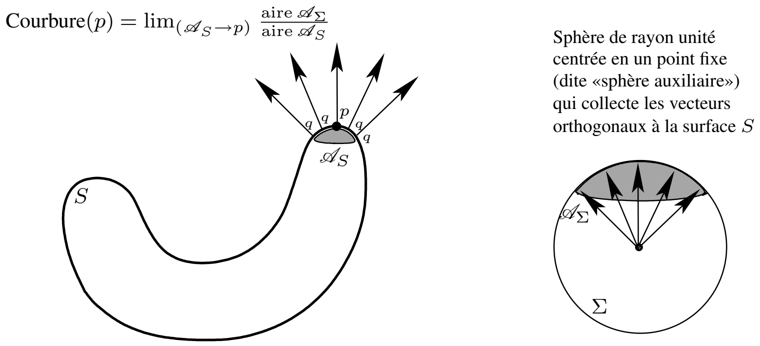
[2] Les Sections qui suivent sont consacrées à présenter la théorie des courbes et des surfaces. Ici, la notation standard $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ désigne la dérivée partielle d'une fonction $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n)$ par rapport à la variable x_i.

[3] Cette dénomination n'est pas usuelle, mais elle fait écho à la dénomination « *theorema egregium* » (ou « théorème remarquable ») que la postérité a fixée pour désigner la conséquence principale (et élémentaire) de la formule (6.2.4), à savoir que la courbure d'une surface resterait inchangée en chacun de ses points au cours de toute déformation qui respecterait ses rapports métriques internes (6.2.4).

démonstration originale de Gauss en la comparant aux simplifications partielles et relatives que la postérité a apportées.

Définition géométrique de la courbure. Le côté paradoxal et remarquable de cette formule se dévoilera en se rapportant à la définition première de la courbure, due à Gauss lui-même. La courbure κ d'une surface mathématique plongée dans l'espace est une notion quantitative précise qui témoigne des ondulations qu'une surface physique réelle présente à l'œil dans l'espace. En différents points d'une surface, la courbure est en général variable.

Pour la calculer, on introduit d'abord une sphère fixe Σ de rayon 1 (dans un système prédéfini d'unités, *e.g.* de rayon 1 mètre, s'il s'agit de l'unité de longueur qui est standard en physique) centrée en un point de l'espace, et appelée par Gauss *sphère auxiliaire*. Soit S une surface quelconque, par exemple celle qui est dessinée sur la figure ci-dessous, et soit p l'un de ses points.



APPLICATION DE GAUSS ET COURBURE

On délimite une petite région autour du point p sur la surface S — par exemple la région appelée $\mathscr{A}_S$ que l'on a dessinée en grisé sur la figure. En tout point q de cette région $\mathscr{A}_S$, on considère le vecteur orthogonal à la surface [4] de longueur 1, et on le déplace parallèlement jusqu'à ce que son origine coïncide avec le centre de la sphère auxiliaire. Les extrémités de ces vecteurs décrivent alors une région que l'on appelle $\mathscr{A}_\Sigma$ sur la sphère auxiliaire Σ et que l'on dessine en grisé sur la figure. Cette région $\mathscr{A}_\Sigma$ dépend de la région $\mathscr{A}_S$; lorsque la région $\mathscr{A}_S$ se rétrécit autour du point p, la région correspondante $\mathscr{A}_\Sigma$ diminue aussi autour du point de la sphère auxiliaire qui se situe à l'extrémité du vecteur orthogonal à la surface en p.

[4] Pour cela, on sous-entend que la surface a été orientée, au moins localement autour du point p. Sur la figure, l'orientation choisie est telle que l'extérieur « physique » et intuitif de la surface coïncide avec l'extérieur « mathématique ». En fait, la courbure reste inchangée si la surface est munie de l'orientation opposée.

Pour fixer rigoureusement la terminologie, on appellera *aire* d'une surface ou d'une portion limitée de surface le *nombre qui mesure son extension*, calculée dans un système prédéfini d'unités, *e.g.* en « mètres-carré » (m^2) s'il s'agit d'une mesure physique standard.

D'après la définition première due à Gauss, la courbure $\kappa(p)$ d'une surface S en l'un de ses points p est égale à la limite — quand la région $\mathscr{A}_S$ se rétrécit autour de p, ce qui sera noté « $\mathscr{A}_S \to p$ » — d'un quotient dans lequel l'aire de la région $\mathscr{A}_S$ apparaît au dénominateur, et dans lequel l'aire de la région $\mathscr{A}_\Sigma$ apparaît au numérateur (*cf.* à nouveau la figure ci-dessus) :

$$\kappa(p) = \lim_{\mathscr{A}_S \to p} \frac{\text{aire de la région } \mathscr{A}_\Sigma \text{ sur la sphère auxiliaire}}{\text{aire de la région } \mathscr{A}_S \text{ sur la surface}}. \tag{6.2.4}$$

La sphère unité Σ étant considérée comme la surface canonique de référence, cette formule exprime visiblement un *principe de comparaison des aires « courbées »*, valable dans l'infiniment petit.

Sur la figure en question, la région $\mathscr{A}_\Sigma$ est plus grande que la région $\mathscr{A}_S$, y compris lorsque la région $\mathscr{A}_S$ rétrécit autour du point p. Il en découle que le quotient des aires et sa limite sont supérieurs à 1 : la surface est en effet plutôt « assez courbée » au point p. Comme on pourra le constater en exerçant son intuition, plus la surface est « courbée » ou « pointue » au voisinage du point p, plus l'aire $\mathscr{A}_\Sigma$ est grande, par rapport à l'aire $\mathscr{A}_S$. La plupart des surfaces — par exemple, celle de la France — ont une courbure non nulle, positive ou négative, qui varie beaucoup d'un point à l'autre — notamment en montagne[5]. Au contraire, si la surface S est un plan, tous les vecteurs qui lui sont orthogonaux sont parallèles entre eux ; la région $\mathscr{A}_\Sigma$ est alors réduite à un point, donc son aire est nulle et le numérateur de la formule (6.2.4) est toujours nul ; par conséquent : *la courbure d'un plan dans l'espace est nulle en tout point* p — fort heureusement !

Paradoxe remarquable. De manière cruciale, pour définir la courbure d'une surface en l'un de ses points, on utilise l'application de Gauss qui transporte les vecteurs orthogonaux à la surface jusqu'à une sphère auxiliaire de rayon égal à 1. De même qu'il suffit seulement de deux coordonnées pour repérer un point quelconque du plan euclidien, il suffit seulement de deux coordonnées (u, v) pour repérer un point quelconque q de la surface proche de p. Toutefois, il faut disposer aussi d'une troisième coordonnée pour représenter les vecteurs orthogonaux à la surface et pour définir la région $\mathscr{A}_\Sigma$ qui entre dans la définition géométrique de la courbure. Il semble alors impossible de parler de la courbure en se limitant aux deux seuls degrés de liberté

[5] On ne pense jamais assez souvent à la surface terrestre comme réservoir très riche d'exemples transcendant le caractère parfois exagérément sobre de l'intuition mathématique.

internes dont jouit une surface ; la troisième dimension et le plongement de la surface dans l'espace semblent absolument indispensables ; une saisie externe semble nécessaire tant pour l'appréhension intuitive de la courbure que pour sa définition. Ainsi, au premier abord, la courbure est une notion « extrinsèque », c'est-à-dire extérieure à la surface, n'appartenant pas à son essence interne et semblant dépendre fondamentalement de sa forme dans l'espace.

> Gauss reconnaissait lui-même que sa supériorité venait de son entêtement.
>
> Félix KLEIN

Mais la perspicacité de Gauss aura deviné la nature « intrinsèque » cachée de cette notion de courbure : en effet, grâce à la *formula egregia* (6.2.4), la courbure de la surface S — dont les points arbitraires sont repérés par les deux coordonnées (u, v) — peut être saisie de manière interne et bidimensionnelle, sans sphère auxiliaire, sans vecteurs normaux à la surface, sans troisième dimension : tel est le paradoxe remarquable. Il fallait donc toute la persévérance de celui qu'on a appelé le « *princeps mathematicorum* » pour parachever la découverte de la courbure des surfaces par l'élaboration d'une formule aussi complexe que (6.2.4), grâce à laquelle le concept de courbure est envisageable sans aucun recours à une spatialité externe. À la fois pour l'exégète historien et pour le métaphysicien mathématicien, le mystère est donc de comprendre, ne serait-ce qu'*a posteriori* et pour l''honneur' de la philosophie des mathématiques, comment Gauss a su, par des enchaînements intuitifs et des méditations complexes, entrevoir l'existence de la *formula egregia*, et comment, aussi, il a pu achever le tour de force calculatoire qui exprime *intrinsèquement* l'extrinsèque illusoire.

Entendu comme anticipation des théories d'Élie Cartan qui traitent plus systématiquement des problèmes d'équivalence entre structures géométrico-différentielles, le *Theorema egregium* montre que la formation des concepts mathématiques tente de répondre à des tensions organisationnelles dans des labyrinthes de calculs formels.

L'objectif analytique principal de cette ouverture sera donc — sous toutes ses facettes — :

$$\boxed{\text{la genèse conceptuelle et \underline{calculatoire} de la \textit{formula egregia} (6.2.4).}}$$

Méthodologie expositionnelle. Les analyses écrites[6] seront organisées de manière à rendre intuitivement accessibles tous les concepts mathématiques utilisés.

Excepté une formation mathématique honnête et une pratique minimale du calcul formel, nulle autre connaissance spécifique n'est requise pour aborder la lecture de ce texte. Un style « littéraire-spéculatif » résumera l'essentiel des commentaires les plus techniques, en liaison fréquente avec une *pratique spéculative plus large du calcul*. Certains paragraphes techniques pourront être mis entre parenthèses afin d'offrir une lecture plus rapide, le Calcul étant par ailleurs régulièrement analysé et replacé *au centre* de la pensée mathématique.

Ainsi, plusieurs types de discours seront associés, assemblés et coordonnés. L'exposé didactique, volontairement développé, structuré très progressivement et agrémenté d'illustrations géométriques épurées donnera un aspect « vulgarisation scientifique » aux analyses techniques. Toujours, la précision et la rigueur intuitive l'emporteront sur le discours mathématique standard, souvent peu accessible à cause d'un excès d'abstraction et d'idéalisation. Toutefois, le caractère descriptif « agréable » de certains passages ne devra pas faire oublier qu'il existe des résultats mathématiques extrêmement précis et « impeccables » qui constituent le véritable soubassement des résultats cités. L'originalité d'une telle approche réside probablement dans le fait que ce seront les calculs de Gauss *en tant que calculs* qui seront analysés, sans céder à la tentation — récurrente dans l''après-Hilbert' — d'un certain finalisme conceptuel.

Dans ces analyses, le discours philosophique viendra s'enchâsser — presque implicitement — à la manière d'un « réveil » des métaphysiques internes et d'une reformulation des causalités conceptuelles, trop souvent masquées et sous-entendues dans le discours mathématique usuel ou formel. Ainsi seront privilégiées en premier lieu : la clarté intuitive, l'accessibilité des concepts et la lisibilité des mouvements dialectiques.

En somme, des réflexions philosophico-mathématiques *spécialisées* seront élaborées afin de reformuler en langue naturelle quelques-unes des innombrables dialectiques implicites dans lesquelles circule le mathématicien

[6] *Cf.*, pour l'intervention orale, la Journée « Philosophie et mathématiques », organisée par le *Centre international d'étude de la philosophie française contemporaine* le Samedi 24 Mai 2003 à l'École Normale Supérieure de Paris, en Salle des Actes. Programme : 10h : Ivahn SMADJA (ENS-Ulm) : *Schèmes et structures : réflexion sur le savoir mathématique* ; 11h : Joël MERKER (CNRS) : *Métaphysique de l'ouverture mathématique* ; 14h : Quentin MEILLASSOUX (ENS-Ulm) : *Sur la portée spéculative des mathématiques : le problème du fossile et le problème de Hume* ; 15h : Jean-Jacques SZCZECINIARZ (Paris 7) : *Philosophie et métaphysique de la finitude* ; 16h. : Alain BADIOU (ENS-Ulm) : *Concepts à la lisière des mathématiques et de la philosophie. Un exemple : l'Ouvert.*

en action. Des trésors de spéculation aux formes insoupçonnées parsèment l'œuvre publiée de Gauss ainsi que sa correspondance, et ces pensées qui sont extrêmement précieuses pour accéder à la réalité mathématique adéquate sont nées dans le berceau arithmétiques de ses *calculs* virtuoses.

> Gauss est attiré par l'art du calcul et compte sans se lasser avec une énergie infatigable. Et c'est grâce à ces exercices incessants de manipulation des nombres (notamment des nombres décimaux avec un nombre incroyable de chiffres après la virgule) qu'il acquiert cette faculté étonnante de tout calculer, que sa mémoire devient capable d'emmagasiner un nombre de données extraordinaire et de jongler avec les chiffres comme personne ne le fit jamais ni ne le fera par la suite. À force de manier les chiffres, il découvre « expérimentalement » les principales lois ; cette méthode qui va à l'encontre des principes professés aujourd'hui en mathématiques s'était répandue au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, on la rencontre par exemple chez Euler. Félix KLEIN.

2. Courbes mathématiques dans le plan

Filaments et trajectoires. Deux catégories d'objets mathématiques suggérés et transmis par l'expérience physique possèdent une caractéristique que l'on appelle communément la « courbure » : ce sont les *lignes courbes* et les *surfaces courbes.* Cette caractéristique s'oppose à la « droiture » parfaite qui se manifeste extérieurement dans l'espace, à la vue des lignes droites et des surfaces planes dont regorge l'architecture classique et contemporaine.

Si l'on fixe un plan mathématique abstrait dans lequel les courbes sont tracées, on parle alors de *courbes planes.* Dessinées à l'intérieur d'une telle surface absolument droite et sans aucune épaisseur, elles ont néanmoins toute la liberté de se courber, de s'enrouler et de s'entortiller avec souplesse.

Grâce à un long processus d'idéalisation conceptuelle, les courbes *mathématiques* planes parviennent à incarner abstraitement la notion intuitive, suggérée par l'expérience, de *ficelle continue et infimement fine*, déposée par exemple sur une table. Elles parviennent aussi à incarner abstraitement la trajectoire d'un point matériel — poussière, molécule aromatique ou atome ionisé — se déplaçant dans un plan (ou dans l'espace), autre exemple physique simple de courbe ayant une épaisseur infime.

Les mathématiques fondamentales sont donc parvenues à idéaliser de tels exemples ; elles ont élaboré en leur sein tout un arsenal de concepts abstraits pour se libérer des intuitions physiques et briller de tous leurs feux en apportant des réponses parfaitement rigoureuses à des problématiques autonomes.

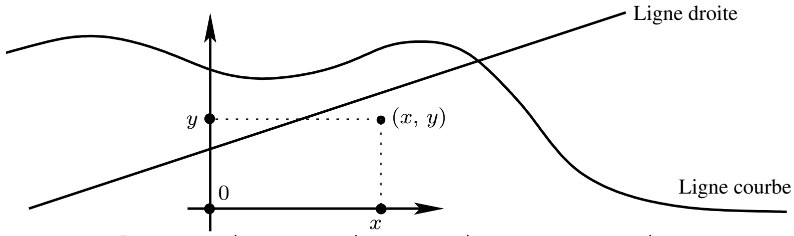
Toutefois, la justesse partielle d'une telle « image d'Épinal » ne doit jamais faire oublier que les mystères historiques et philosophiques abondent dans toute théorie achevée et qu'il existe encore bien des aspects intuitifs, transmis imparfaitement par l'expérience physique du monde, qui attendent leur conceptualisation mathématique.

Identification du continu et coordonnées. En géométrie analytique contemporaine, toute ligne droite idéale est *identifiée* au *continu fondamental unidimensionnel*, c'est-à-dire à l'ensemble, noté $\mathbb{R}$, de tous les nombres x possibles, dits *nombres réels*. Ces nombres sont tous ceux que l'on peut écrire en base 10 avec une infinité de décimales. Ainsi l'essence géométrique d'une droite est-elle identifiée à l'essence numérique du continu. Ce dernier est ordonné linéairement, il est complet et il n'a aucun « trou » en lui-même, exactement comme pourrait l'être une ligne droite idéale dont la conception aurait été approfondie par l'intuition.

En vérité, l'un des plus profonds abîmes épistémologiques aux jalons historiques multiples s'ouvre au cœur d'une telle identification. Il s'agit là d'un véritable « tour de passe-passe » métaphysique qui magnétise encore l'attention de la philosophie des mathématiques. Mais pour simplifier, sans évoquer les difficultés spéculatives auxquelles conduit cette identification, on considérera les nombres réels comme connus, et on admettra que toute droite est en correspondance biunivoque avec la succession des nombres réels.

Par définition, le plan mathématique idéal est identifié à la collection de tous les couples (x, y) de *deux* nombres réels quelconques x et y. Chaque point du plan est repéré par un unique couple (x, y) de nombres réels appelés *coordonnées* de ce point. Dans ce plan numérique, un point particulier et deux droites spéciales méritent attention :

- l'origine, point central par excellence, dont les deux coordonnées $(0, 0)$ sont nulles ;
- la droite qui est constituée de tous les points de coordonnées $(x, 0)$, où $x \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque ; cette première droite est « *horizontale* » sur la figure ; on l'appelle *axe des* x ;
- la droite qui est constituée de tous les points de coordonnées $(0, y)$, où $y \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque ; cette deuxième droite est « *verticale* » sur la figure ; on l'appelle *axe des* y.



PLAN MATHÉMATIQUE IDÉAL ET SYSTÈME DE COORDONNÉES

On oriente ces deux droites dans le sens des x et des y croissants, d'où les flèches sur la figure. Géométriquement parlant, les deux coordonnées x et y d'un point (x, y) sont obtenues par projection sur la droite horizontale et sur la droite verticale, respectivement. Ainsi, travaille-t-on dans ce plan mathématique idéal : on peut y tracer des droites variées et des courbes diverses. Or les deux nombres réels x et y peuvent avoir un nombre infini de décimales ils sont toujours sans aucune « épaisseur » physique ou mathématique. Donc comme l'intuition semble effectivement le deviner sur une figure, les courbes idéales seront d'une finesse infinie dans ce plan cartésien abstrait. Mais alors, *comment définit-on mathématiquement une courbe* ?

Trois saisies analytiques des courbes dans le plan. Il existe essentiellement trois façons de définir mathématiquement une courbe, comme l'illustreront les trois figures qui vont suivre. La numérotation **I**, **II** et **III** de ces trois définitions est celle que Gauss a choisie dans [**181**] pour présenter la théorie des surfaces ; ultérieurement, on constatera en effet qu'elles se généralisent aisément aux surfaces sises dans l'espace des x, y, z.

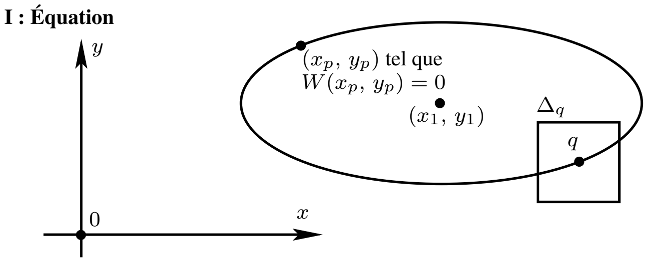
La représentation **III** d'une courbe sous forme de graphe $y = f(x)$ est celle que l'on apprend le plus couramment dans l'enseignement secondaire, mais on commencera par la représentation **I** sous la forme d'une équation implicite, qui est la plus immédiatement riche sur le plan fonctionnel.

Représentation implicite I. Dans ce premier cas, on représente une courbe comme le lieu de tous les points (x_p, y_p) du plan en lesquels s'annule une certaine fonction $W(x,\, y)$ des deux variables $(x,\, y)$, mais toutes les fonctions ne conviennent pas, il est nécessaire d'en exclure quelques unes qui sont trop dégénérées ou pas assez régulières. Du point de vue de la théorie des ensembles, la courbe est donc l'ensemble des points $(x,\, y)$ tels que $W(x,\, y) = 0$. Par exemple, l'axe des x est représenté par l'équation $y = 0$; de même, l'axe des y est représenté par l'équation $x = 0$; un cercle de rayon 1 centré à l'origine est tout simplement représenté par l'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$; enfin, une *ellipse générale* est représentée par l'équation

$$\frac{(x-x_1)^2}{a^2} + \frac{(y-y_1)^2}{b^2} - 1 = 0,$$

où $(x_1,\, y_1)$ est un point quelconque du plan et où $a > 0$ et $b > 0$ sont des nombres réels arbitraires[7].

[7] Sur la figure, le point $(x_1,\, y_1)$ est au centre de l'ellipse ; autour d'un point quelconque q de la courbe, on a dessiné un petit carré Δ_q pour signifier qu'on *localise* la courbe dans ce petit voisinage. Cet *acte de localisation* qui possède un statut à la fois mental et conceptuel est fondamental en géométrie, parce qu'il permet de focaliser l'attention de l'esprit sur une fraction de la courbe en *oubliant* sa forme globale.



COURBE DÉFINIE PAR UNE ÉQUATION $W(x,\, y) = 0$

Dans les traités de géométrie différentielle, on dit que la représentation par l'équation $W(x,\, y) = 0$ est *implicite*, parce que ni y n'est exprimé explicitement en fonction de x, ni x n'est exprimé explicitement en fonction de y. Mais en vérité, dans l'équation $W(x,\, y) = 0$, il existe une dépendance implicite cachée entre x et y grâce à laquelle on a effectivement affaire (en général) à un objet unidimensionnel, c'est-à-dire à une vraie courbe.

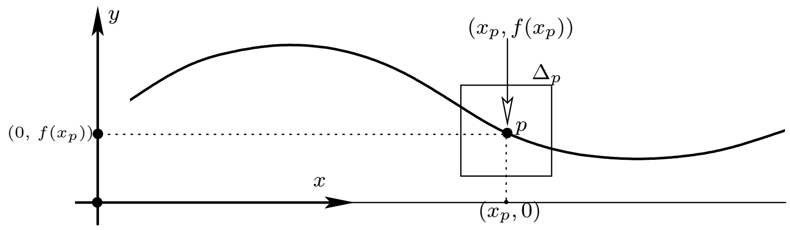
Dialectique de l'ontologie imprécise. En tout cas, il importe avant tout d'observer que *toute la diversité et la variabilité des courbes ainsi définies repose sur le choix de la fonction* $W(x,\, y)$. Et il va sans dire qu'il existe un très grand nombre de telles fonctions de deux variables x et y, puisque par exemble tous les polynômes sont concernés, aussi bien que toutes les fonctions analytiques, toutes les fonctions différentiables, et même en un certain sens toutes les fonctions fractales qui satisfont certaines conditions de non-dégénérescence. Il est vrai aussi qu'il est essentiellement impossible de se représenter par la pensée dans une généralité pure ce que seraient ces fonctions $W(x, y)$, polynomiales, analytiques, différentiables ou fractales, afin d'embrasser véritablement toute l'extension du concept de courbe. Mais par ailleurs et du point de vue de l'intuition géométrique en recherche de pensée — laquelle tente de se représenter les courbes possibles en exerçant de délicats efforts afin de variabiliser mentalement la mobilité idéale de filaments sans épaisseur dans le plan —, la richesse ontologique de l'Idée mathématique de courbe plane semble se dessiner sans parvenir à se réaliser pleinement par une saisie définitive. Toujours duelle, la géométrie fonctionnelle, ou 'fonctionnellité' géométrique, ne parvient jamais à mobiliser la mobilité absolue des êtres idéels.

Thèse fondamentale. [Dialectique de l'ontologie imprécise] *Ni le fonctionnel* pur*, ni le géométral* pur *ne se départissent du caractère éminemment* potentiel *de la saisie qu'ils proposent.*

Autrement dit et à un niveau plus élevé, l'extension ontologique, en mathématiques, n'est jamais donnée comme un monde (erreur du « cela est là »), ni postulable par pétition de principe (erreur du positivisme symbolique), mais elle demeure éternellement contrainte de respecter l'universalité catégorique du potentiel, forcée par les labyrinthes à ne se déployer que partiellement dans des imperfections non prévisibles qui lui deviennent propres.

Représentation graphée III. Contrairement à la représentation implicite, la représentation graphée consiste à exprimer l'une des deux variables, y par exemple, comme une fonction *explicite* de l'autre variable, ici x. La courbe est alors le lieu des points $(x,\ f(x))$ du plan, où x varie et où $f(x)$ est une fonction déterminée.

III : Graphe



COURBE DÉFINIE PAR UN GRAPHE $y = f(x)$

Cette troisième saisie (présentée ici dans un second temps) pré-oriente donc *par la pensée* la représentation *unidimensionnelle* de la courbe afin de *briser immédiatement* l'ambiguïté inorientée de la liaison du x et du y à travers l'équation $W(x, y) = 0$. D'une certaine façon, la représentation graphée *refuse* la généralité initiale du concept et se *projette d'emblée dans l'unidimensionnalité décidée qu'elle rend expressément visible*.

Sur la figure ci-dessus, on voit aisément que le nombre $f(x)$ mesure la « hauteur » du point de la courbe qui se situe à la verticale du point x de l'axe horizontal. Lorsqu'on se déplace horizontalement sur l'axe des x, la hauteur $f(x)$ varie tandis que le filament infiniment fin se déforme continûment et ondule librement.

À nouveau, *toute la diversité et toute la variabilité des courbes reposent sur le choix de la fonction* $f(x)$, mais cette fois-ci, au lieu de considérer une fonction de deux variables $W(x, y)$, on a affaire à une fonction d'une seule variable $f(x)$ et il s'avère alors que l'extension ontologique du concept (au moins local) de courbe dans le plan s'identifie mieux avec la collection de toutes les fonctions possibles d'une seule variable.

Scholie. Cette dernière affirmation est à nuancer car les identifications ne sont pas absolument exactes sans faire d'hypothèses mathématiques légèrement restrictives. En tout état de cause, si l'on ne choisit pas d'effectuer de telles hypothèses, l'ontologie se ramifie et se diversifie (pour le plus grand bien des mathématiques), en tant que le définitionnel multiple ouvre vers des objets de type « courbe » non équivalents entre eux et non univoquement saisissables. « Comment saisir ? » demeure une question mathématique permanente. □

En vérité, à partir de l'équation $W(x,\, y) = 0$, il est possible de reconstituer une certaine dépendance cachée entre x et y grâce au théorème dit « des fonctions implicites », dont l'énoncé est le suivant. À dessein, ce théorème ne sera pas énoncé ici formellement, c'est-à-dire avec toute la rigueur qui siérait à un texte mathématique technique, puisque cela pourrait freiner l'expression des intuitions métaphysiques archaïques — lesquelles demeurent nécessairement coprésentes dans toute approche qui exige d'elle-même un cadencement par la rhétorique de la rigueur.

Soit donc p un point de coordonnées $(x_p,\, y_p)$ appartenant à la courbe. Si l'on suppose qu'une (au moins) des deux dérivées partielles[8] suivantes :

$$\frac{\partial W}{\partial y}(x_p,\, y_p) \quad \text{[premier cas]} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial W}{\partial x}(x_p,\, y_p) \quad \text{[deuxième cas]}$$

ne s'annule pas, alors dans un voisinage suffisamment petit du point p, l'ensemble des points $(x,\, y)$ tels que $W(x,\, y) = 0$ peut être représenté explicitement soit par une équation graphée le long de l'axe des x de la forme $y = f(x)$ [premier cas] soit par une équation graphée le long de l'axe des y de la forme $x = g(y)$ [deuxième cas]. Lorsque les deux dérivées partielles en question ci-dessus ne s'annulent pas (ce qui se produit très souvent), les deux représentations graphées $y = f(x)$ et $x = g(y)$ sont possibles. Sur la figure, un tel petit voisinage de p a été noté Δ_p.

Dans les tous les cas, les fonctions $g(y)$ et $f(x)$ dépendent de la fonction $W(x,\, y)$. Il existe un théorème mathématique et des algorithmes numériques implémentés sur ordinateur, qui permettent de construire de telles fonctions $f(x)$ et $g(y)$ à partir de la donnée de base qu'est la fonction $W(x,\, y)$.

Scholie. La nécessité de tels algorithmes provient du fait qu'en général, la liste des fonctions « connues » ou « classiques » ne contient pas toutes les fonctions $g(y)$ et $f(x)$ que l'on peut obtenir de la sorte à partir des fonctions $W(x,\, y)$ « classiques ». Par exemple, la fonction $y = f(x)$ implicitement définie par $\sin(y) + y^2 = x$ au voisinage de $(x_p,\, y_p) = (0,\, 0)$ n'est pas « classique » et ne possède pas de dénomination particulière, bien que la fonction $W(x,\, y) := \sin(y) + y^2 - x$ soit une fonction « classique ».

En fait, une multitude innombrable de fonctions sans nom apparaissent lorsque l'on veut résoudre y (ou x) en fonction de x (ou de y) dans les diverses équations implicites $W(x,\, y) = 0$. Tout domaine de fonctions

[8] Classiquement, la dérivée $\frac{df}{dx}(x_p)$ d'une fonction $f(x)$ d'une variable x en un point x_p est la limite, quand ε tend vers zéro, du quotient $\frac{f(x_p+\varepsilon)-f(x_p)}{\varepsilon}$, si cette limite existe. Pour les fonctions $W(x,\, y)$ de deux variables, la définition est analogue : la dérivée partielle $\frac{\partial W}{\partial y}(x_p,\, y_p)$ est la limite, quand ε tend vers zéro, du quotient $\frac{W(x_p,\, y_p+\varepsilon)-W(x_p,\, y_p)}{\varepsilon}$, si cette limite existe. De même et bien évidemment aussi, pour calculer $\frac{\partial W}{\partial x}(x_p,\, y_p)$, on étudie l'existence de la limite du quotient $\frac{W(x_p+\varepsilon,\, y_p)-W(x_p,\, y_p)}{\varepsilon}$ lorsque ε tend vers zéro.

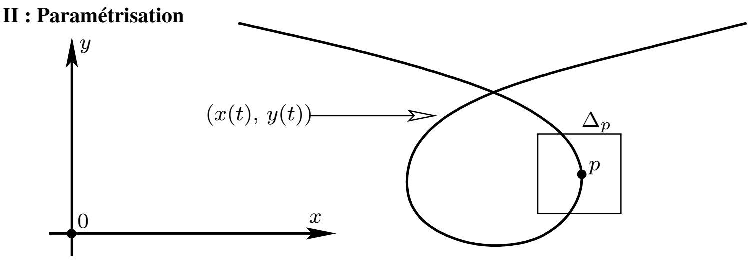
« classiques », « explicites » ou « concrètes », tel que l'univers des fonctions algébriques et des fonctions circulaires, est immédiatement épuisé et dépassé par l'application de ce théorème. C'est pourquoi le théorème des fonctions implicites possède un caractère métaphysique spécial, en tant qu'il impose par nature le dépassement de toute donation première, pensée comme explicite ou concrète. On comprend qu'il ait fallu attendre le vingtième siècle pour que ce théorème soit formulé comme un énoncé mathématique pourvu d'une démonstration rigoureuse (théorème du point fixe *via* des itérations « à la Picard ») qui cèle en fait l'incroyable extension ontologique que le procédé impose. En effet, il fallait accepter un nouvel univers d'existence abstrait que l'on appelle maintenant la classe des *fonctions différentiables*, et accepter des moyens de travail concrets mais limités sur le plan de l'explicitation des fonctions impliqués. Avec l'apparition du théorème des fonctions implicites dans des contextes non résolubles par des formules finies, il fallait en quelque sorte accepter que le monde des êtres se réduise à la plus simple expression de leur différentiabilité, sans référence à des caractéristiques individuantes, structurales, internes. Quant à une justification fondationnelle, on peut s'accorder pour dire que de tels êtres — les fonctions que l'on peut extraire d'une relation implicite donnée explicitement, voire même aussi implicitement sont en dernier recours de nature purement numérique, à savoir des correspondances univaluées entre nombres decimaux.

Ainsi, pour que les considérations précédentes, ainsi que celles qui suivront, aient un sens, certaines hypothèses de régularité doivent être satisfaites par toutes les fonctions impliquées dans la discussion. Mais afin de rester strictement dans le sujet du calcul, on laissera de côté les considérations historiques et philosophiques soulevées par la recherche de ces hypothèses, et on supposera toujours que les fonctions utilisées sont différentiables jusqu'à un ordre suffisant. □

En conclusion, dans la représentation implicite et dans la représentation graphée, il faut retenir l'idée qu'il *existe une dépendance fonctionnelle — implicite ou explicite — entre les deux variables x et y*. Cette dépendance ne laisse plus qu'un seul degré de liberté pour la mobilité et le déplacement interne le long de la courbe. Une telle contrainte confirme l'intuition fondamentale d'après laquelle les courbes sont par nature unidimensionnelles.

Caractère intrinsèque de la représentation paramétrée II. Enfin, la dernière possibilité consiste à faire dépendre chacune des deux variables x et y d'une variable t auxiliaire unique. Cette représentation correspond à l'intuition d'une courbe paramétrée par un paramètre temporel : le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ se déplace alors dans le plan « sur la courbe » lorsque le « temps » t s'écoule. Cette deuxième manière de voir inscrit d'emblée l'unidimensionnalité au cœur de la saisie de la courbe.

Il est vrai que l'unidimensionnalité est aussi inscrite au cœur de la représentation graphée $y = f(x)$, puisque seule la variable x varie, mais cette représentation présente l'inconvénient de privilégier, sans raison suffisante, l'une des deux coordonnées, en l'occurence ici, la première coordonnée. Dans certains cas, il faut plutôt privilégier la coordonnée y. À cet égard d'ailleurs, par rapport à la représentation graphée, la représentation implicite possédait l'avantage de ne privilégier aucune des deux coordonnées, bien qu'elle eût le défaut de laisser dans l'ombre la relation de dépendance précise entre x et y.



COURBE DÉFINIE PAR UNE PARAMÉTRISATION $(x(t),\, y(t))$

La représentation paramétrée **II** *est la plus adéquate des trois*. En effet, elle ne possède aucun des deux défauts sus-mentionnés : premièrement, dans l'expression $(x(t),\, y(t))$, l'unidimensionnalité est clairement exprimée ; et deuxièmement, les deux variables sont traitées sur le même plan sans que l'une d'entre elles soit privilégiée. Ici, la variable t est un paramètre *interne* pour la courbe : *l'intrinsèque s'inscrit d'emblée dans la représentation paramétrée*.

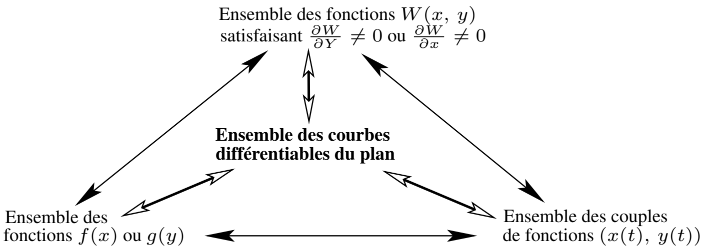
Dans les paragraphes consacrés aux surfaces sera formulée une définition analogue — aussi numérotée **II**, d'après la dénomination originale de Gauss — dans laquelle ce seront deux paramètres *internes* $(u,\, v)$ qui permettront de représenter la surface.

Équivalence locale entre les trois représentations. Toute courbe peut être *localisée* au voisinage de l'un de ses points p. Cette opération consiste à choisir un voisinage suffisamment Δ_p de p — le petit carré sur les figures précédentes — et à restreindre la considération de la courbe dans ce petit voisinage. Mathématiquement parlant, on démontre l'énoncé suivant.

Théorème. *Du point de vue local, les trois représentations* **I**, **II** *et* **III** *sont équivalentes.*

Ces équivalences seront utiles, puisque dans toute la suite des analyses, les considérations seront exclusivement locales. Autrement dit, *dans un voisinage suffisamment petit de l'un de ses points, une courbe peut être représentée aussi bien par une équation, que par une paramétrisation ou par un graphe*.

La figure suivante diagrammatise ce théorème, au moyen de trois grandes flèches doubles dessinant un triangle ; chacune de ces flèches correspond à un raisonnement mathématique rigoureux ; par exemple, la flèche oblique située à l'extrême gauche de la figure correspond au théorème des fonctions implicites.

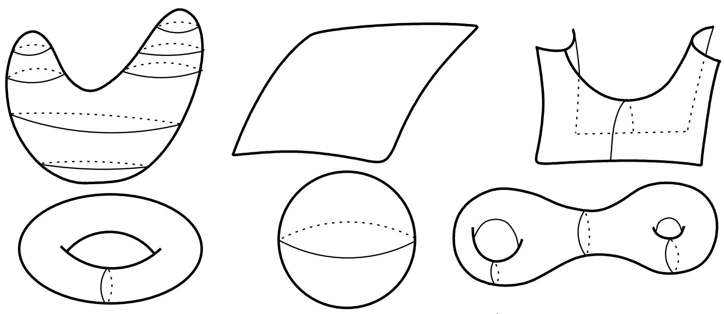


UNIVERS DES COURBES LOCALES ET UNIVERS DE FONCTIONS

Les trois doubles flèches creuses situées au centre du diagramme indiquent trois « transsubstantiations » mathématiques remarquables et équivalentes entre elles : l'idée géométrique de courbe se transmue, de trois manières différentes, en l'idée de fonction mathématique ; on passe de l'univers géométrique à l'univers fonctionnel, de telle sorte que du point de vue technique, ce ne sont plus que les fonctions qui existent. La suite des événements montrera que les questions qui étaient géométriques au départ se transforment rapidement en des problèmes purement algébriques ou analytiques qui portent sur un ensemble de fonctions ainsi que sur la collection de leurs dérivées.

3. Préliminaire sur les surfaces.

Illustrations. Dans l'espace euclidien standard de dimension trois, tel que l'espace « physique » de la mécanique newtonienne, les surfaces peuvent revêtir des formes innombrables, tant le monde physique en regorge. Du point de vue de l'idéalisation mathématique cependant, seules les structures générales comptent, et les morphologies se limitent à quelques échantillons de surfaces-types, intéressantes à titre de modèles ou en vertu de théorèmes abstraits de classification.



QUELQUES SURFACES MATHÉMATIQUES

Or il n'est question dans ce texte que des propriétés locales de courbure (gaussienne) qu'ont les surfaces, et dans ces conditions, le deuxième schéma géométrique (archaïque) ci-dessus, à savoir un « petit morceau » de surface (de tissu, de feuille, de peau) suffira amplement pour diagrammatiser le concept de surface locale. Bien entendu, tout petit morceau découpé par la pensée dans l'une quelconque des cinq autres surfaces dessinées conviendrait aussi. La surface peut alors être imaginée comme le bord d'un solide plein, comme la limite entre deux profondeurs-épaisseurs (l'air et le solide), ou comme l'interface sans épaisseur entre deux milieux physiques intrinsèquement cohésifs. Elle devient donc pour la pensée mathématique « instinctive » une généralisation naturelle et presque évidente du concept de courbe, puisqu'il suffit d'admettre que la dimensionnalité d'extension de l'objet initial en lui-même (la courbe) augmente d'une unité par l'effet d'une mobilité douée d'un degré de liberté, et que simultanément aussi, la dimensionnalité d'extension dans lequel est plongé l'objet s'élargit aussi par spatialisation. Du point de vue de la métaphysique archaïque des mathématiques, l'« un-deux » en s'étoffe en un « deux-trois ».

Trois saisies analytiques des surfaces dans l'espace. Aux trois représentations possibles d'une courbe dans le plan correspondent alors de manière complètement analogue exactement trois possibilités de représenter une surface et on démontre, comme dans le cas des courbes, que ces trois manières de représenter les surfaces sont équivalentes entre elles, d'un point de vue mathématique rigoureux.

I : Représentation implicite.

II : Représentation paramétrée.

III : Représentation graphée.

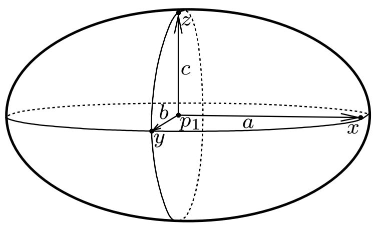
Il y a deux méthodes générales pour l'étude des propriétés d'une surface courbe. Dans la *première*, on se sert de l'équation entre les coordonnées x, y, z que l'on supposera ramenée à la forme $W = 0$, où W sera une fonction des indéterminées x, y, z. [...] Dans la *seconde* méthode, on exprime les coordonnées en forme de fonctions des deux variables p et q. [...] À ces deux méthodes générales se rattache une *troisième* méthode, dans laquelle l'une des coordonnées, par exemple z, est exprimée en fonction des deux autres, x, y ; cette méthode n'est évidemment autre chose qu'un cas particulier, soit de la première méthode, soit de la seconde. GAUSS, [**181**], 10–13

Soient donc x, y, z trois coordonnées qui permettent de repérer tous les points possibles d'un espace à trois dimensions de type euclidien ou cartésien tel que conceptualisé par la mécanique classique ; z décrit la troisième dimension.

Dans la représentation implicite **I**, on devine alors aisément qu'une surface devra être définie comme le lieu de tous les points (x_p, y_p, z_p) en lesquels s'annule une certaine fonction $W(x, y, z)$ des trois variables (x, y, z). En y réfléchissant plus avant, on se convainc effectivement qu'une unique équation du genre $W(x, y, z) = 0$ prive les points d'un seul degré de liberté parmi les trois qu'ils possèdent au départ, et il ne leur en reste alors plus que deux, et c'est bien là ce qu'on attend d'une surface[9]. Par exemple, un ellipsoïde quelconque dans l'espace (généralisation de la notion d'ellipse dans le plan) est défini par une équation du type général :

$$\frac{(x - x_1)^2}{a^2} + \frac{(y - y_1)^2}{b^2} + \frac{(z - z_1)^2}{c^2} - 1 = 0,$$

où le centre p_1 de coordonnées (x_1, y_1, z_1) est un point quelconque dans l'espace et où $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$ sont des nombres réels positifs arbitraires.



AXES PRINCIPAUX D'UN ELLIPSOIDE GÉNÉRAL

Un tel ellipsoïde provient d'une sphère ronde (cas $a = b = c$) par déformation, élongation ou aplatissement, le long des axes de coordonnées.

Dans la représentation graphée **III**, la plus explicite et la plus concrète des trois, l'une des trois coordonnées, par exemple z, est fonction des deux

[9] En toute rigueur, comme dans le cas des courbes, il faut effectuer une hypothèse sur la fonction W, et la plus naturelle est de demander qu'en tout point de l'ensemble $\{W = 0\}$, au moins une des trois dérivées partielles $\frac{\partial W}{\partial x}$, ou $\frac{\partial W}{\partial y}$, ou $\frac{\partial W}{\partial z}$ ne s'annule pas.

autres, par exemple fonction de x et de y, de telle sorte que les points de la surface sont exactement tous les points (x, y, z) de l'espace tels que :

$$z = f(x, y),$$

pour une certaine fonction f qui dépend de la surface[10]. Cette représentation graphée peut d'ailleurs être envisagée comme un cas particulier de la représentation implicite, si l'on introduit simplement la fonction :

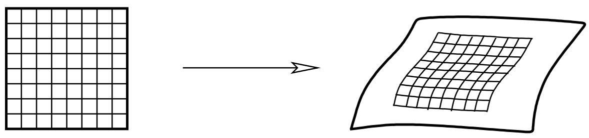
$$W(x, y, z) := z - f(x, y),$$

mais en toute rigueur, elle exprime davantage que la représentation implicite, puisqu'elle explicite la coordonnée z comme fonction des deux autres coordonnées, lesquelles désignent sans ambiguïté l'horizontalité bidimensionnelle relative[11].

Enfin, dans la représentation paramétrée **II**, la bidimensionnalité de la surface est rendue visible d'emblée, puisqu'on se donne une application :

$$(u, v) \longmapsto \big(x(u, v),\, y(u, v),\, z(u, v)\big)$$

d'un espace de deux variables (u, v) à valeurs dans la surface qui en représente ses trois coordonnées x, y et z comme certaines fonctions spécifiques $x(u, v)$, $y(u, v)$ et $z(u, v)$ de ces deux variables. Autrement dit, un petit morceau de surface est constitué de l'ensemble des points de coordonnées $(x(u,\, v),\, y(u,\, v),\, z(u,\, v))$ dans l'espace, lorsque le point de coordonnées $(u,\, v)$ varie dans un plan auxiliaire bidimensionnel.



COORDONNÉES CURVILIGNES (u, v)

[10] — et qui dépend aussi des coordonnées (x, y, z) choisies au départ sur l'espace.

[11] Presque immédiatement, on devine les généralisations de ces concepts analytiques dans un espace réel à un nombre arbitraire $n \geqslant 2$ (au lieu de $n = 2$ ou $n = 3$) de dimensions, muni de coordonnées $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$: la représentation d'une *hyper*surface (telle est la terminologie consacrée) s'effectue ou bien par une équation implicite $W(x_1, \dots, x_n) = 0$, ou bien par une équation graphée $x_n = f(x_1, \dots, x_{n-1})$, ou bien par une une paramétrisation :

$$(u_1, \dots, u_{n-1}) \longmapsto \big(x_1(u_1, \dots, u_{n-1}),\, \dots\dots,\, x_n(u_1, \dots, u_{n-1})\big).$$

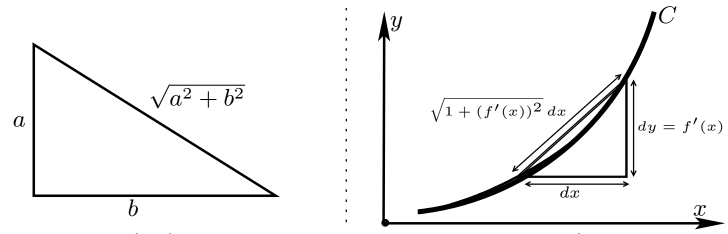
Ce qui est surprenant dans ces formulations par le langage mathématique, c'est que toute la difficulté réelle et légitime que l'on a à se représenter mentalement des objets géométrique possédant un grand nombre de dimensions *s'efface* derrière la simplicité troublante du « n quelconque » et des morphèmes syntaxiques. Il faut en déduire que la pensée mathématique peut constamment être porteuse de ce qu'elle ne sait pas mentaliser complètement, surtout lorsqu'il s'agit des représentations géométriques.

Intuitivement, on peut s'imaginer que l'on déforme en pensée le plan « droit » des (u, v) dans l'espace grâce à la liberté que fournit la troisième dimension, avec une liberté illimitée, comme s'il s'agissait d'une membrane idéale infiniment plus élastique et plus mobile que toute membrane existant dans le monde physique. Dans ces conditions, deux réseaux orthogonaux de courbes parallèles deviennent deux réseaux de courbes (pas forcément orthogonales) et approximativement parallèles sur la surface, si tant est qu'on puisse parler de courbes parallèles.

Bien entendu, il est nécessaire de préciser la régularité de l'application qui associe aux deux coordonnées (u, v), le point ayant les trois coordonnées $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ dans l'espace tridimensionnel : on supposera que cette application est *continue*, c'est-à-dire que des petites variations des coordonnées (u, v) induisent des petites variations des coordonnées $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ — la membrane ne se déchire pas — et de plus que cette application est *différentiable*, c'est-à-dire que les dérivées partielles de x, de y et de z par rapport à u et v existent, au moins jusqu'à l'ordre deux — la membrane ne présente pas de lignes d'angle et elle est bien « lisse ».

4. Courbure des courbes planaires

Longueur d'une courbe. D'après le théorème de Pythagore, un segment rectiligne dans le plan dont les projections horizontale et verticale sont égales à a et à b, respectivement, possède une longueur égale à $\sqrt{a^2 + b^2}$.



THÉORÈME DE PYTHAGORE ET SA VERSION INFINITÉSIMALE

Pour calculer la longueur d'une courbe graphée $\{y = f(x)\}$ entre deux bornes x_1 et $x_2 > x_1$, on la décompose en une infinité de segments rectilignes infinitésimaux. Puisque le segment infinitésimal situé au point x possède une projection horizontale égale à dx et une projection verticale égale à $dy = f'(x)\, dx$, en appliquant Pythagore dans l'infinitésimal, on en déduit que la longueur du segment rectiligne infinitésimal est égale à :

$$\begin{aligned}\sqrt{dx^2 + (f'(x)\, dx)^2} &= \sqrt{dx^2[1 + f'(x)^2]} \\ &= |dx|\, \sqrt{1 + f'(x)^2}.\end{aligned}$$

Si l'on identifie alors la courbe à une chaîne infinie de tels segments infinitésimaux placés les uns à la suite des autres, sa longueur est bien évidemment égale à la somme des longueurs de ces segments infinitésimaux. Les fondements du calcul intégral permettent alors d'obtenir la formule suivante.

Théorème. *La longueur d'une courbe graphée continûment différentiable $y = f(x)$ entre deux bornes x_1 et $x_2 > x_1$ est égale à :*

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

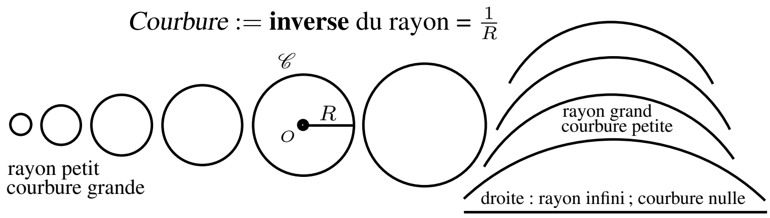
Courbure des cercles et des droites. Dans le plan euclidien, après les droites, ce sont les cercles qui sont les courbes les plus simples. Tout cercle $\mathscr{C}$ est caractérisé par son centre O et par son rayon R. Les petits cercles sont très « courbés », *i.e.* leur « courbure » est très accentuée ; les grands cercles sont peu « courbés », *i.e.* ils sont presque « droits », comme la surface de la mer à l'échelle des cartes géographique. Sur l'autoroute, la « courbure » des virages est beaucoup moins sensible — *via* la force centrifuge — que sur une route de montagne en épingle à cheveux.

Quelle quantité peut-on alors proposer pour parler de la *courbure mathématique* d'un cercle ? Pour répondre à cette question, il faudra tenir compte de trois faits élémentaires :

(1) plus le cercle est petit, plus il est « courbé », intuitivement parlant ;

(2) un cercle étant invariant par rotation autour de son centre (*cf.* l'invention de la roue), sa courbure doit être la même en tout point ;

(3) les droites n'ont pas de « courbure » et peuvent être identifiées à des cercles de rayon infini.



COURBURE DES CERCLES DANS LE PLAN

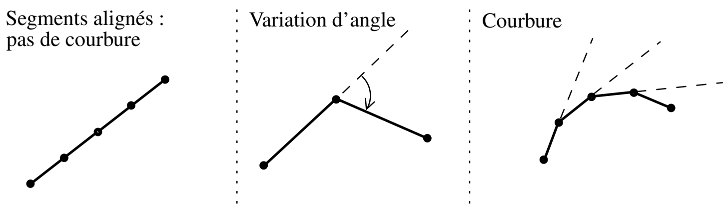
L'idée la plus simple[12] consiste alors à définir *courbure mathématique* d'un cercle (ou d'une droite) comme l'*inverse* de son rayon :

$$\frac{1}{R} := \textit{courbure} \text{ d'un cercle de rayon } R.$$

[12] Toute autre fonction $\kappa(R)$, définie sur l'ensemble des rayons, décroissante et satisfaisant $\lim_{R\to 0} \kappa(R) = +\infty$ ainsi que $\lim_{R\to\infty} \kappa(R) = 0$, pourrait aussi convenir.

En bref, la courbure est inversement proportionnelle au rayon. C'est cette définition simple que les mathématiques ont retenue. Aux droites dont le rayon est infini correspond alors une courbure nulle : $\frac{1}{\infty} = 0$, ce qui est en accord avec l'intuition élémentaire.

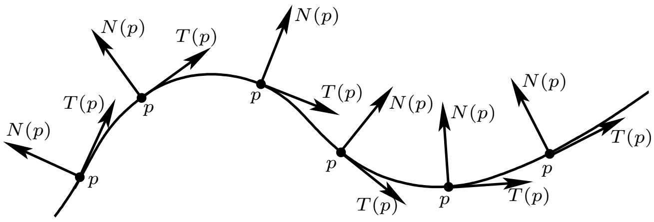
Chaîne de segments rectilignes et courbure. Cependant, en identifiant une courbe à une collection infinie de segments de droite pour en calculer la longueur à l'aide du calcul intégral, ne perd-on pas irrémédiablement toute représentation de sa courbure ? La réponse à ce paradoxe se devine aisément sur une figure macroscopique.



COURBURE DE SEGMENTS ARTICULÉS ET VARIATION D'ANGLE

Lorsque les segments sont alignés, la courbure est évidemment nulle ; au contraire, lorsque les segments ne sont pas alignés, la variation d'angle entre deux segments adjacents devrait permettre de mesurer une « courbure approximative » de la chaîne. En effet, si la chaîne se courbe dans une certaine direction, la variation des angles se fait toujours dans le même sens. Pour étudier cette variation des angles, il faut introduire la notion de *vecteur unitaire normal* à une courbe.

Soit donc C une courbe quelconque et soit p l'un de ses points. Dans la suite, on appellera *unitaire* tout vecteur de longueur égale à 1. Sur la tangente en p, on trace un vecteur unitaire d'origine p. Deux possibilités se présentent (vers la droite ou vers la gauche ; vers le haut ou vers le bas), mais on sous-entendra que la courbe est orientée, *i.e.* qu'on a convenu à l'avance d'un sens de parcours sur la courbe — et alors il existe un seul vecteur tangent unitaire qui se dirige dans le même sens que la courbe. Soit $T(p)$ ce vecteur tangent unitaire orienté, la lettre « T » étant l'initiale de l'adjectif « tangent ». Par une rotation de 90 degrés, chaque vecteur $T(p)$ se transforme en un vecteur unitaire $N(p)$ orthogonal à la droite tangente en p. On appelle $N(p)$ le *vecteur normal unitaire à la courbe en* p, la lettre « N » étant l'initiale de l'adjectif « normal ».



VECTEURS UNITAIRES TANGENTS ET NORMAUX

Sur la figure, par souci de simplicité, on donne le même nom « p » aux six points choisis sur la courbe pour tracer les vecteurs unitaires tangents et normaux. On obtient ainsi deux champs de vecteurs, tracés sur la courbe C.

Courbure des cercles via l'application de Gauss. Maintenant, sur une telle courbe quelconque C, puisque le vecteur normal unitaire $N(p)$ se déduit par une rotation d'angle fixe du vecteur tangent unitaire $T(p)$, la variation d'angle des vecteurs $T(p)$ est évidemment égale à la variation d'angle des vecteurs $N(p)$, lorsque le point p se déplace sur la courbe. On se concentrera donc sur le vecteur normal unitaire $N(p)$, puisqu'il est plus facile de représenter sa variation sur les diagrammes. Tout d'abord, est-il possible de comprendre et de voir sous un autre angle la courbure des cercles ?

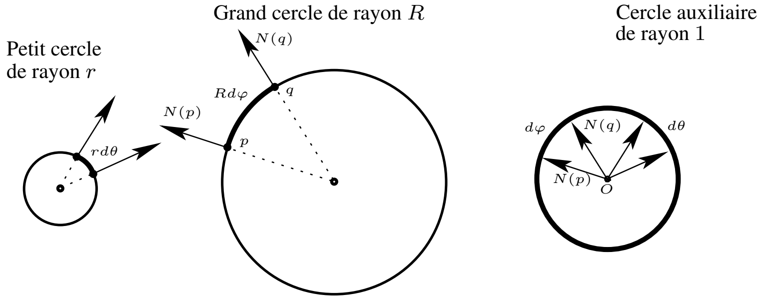
Scholie. Question universelle d'ordre proprement métaphysique, et question indéfiniment reproductible : étant donné un concept mathématique, défini ou appréhendé d'une certaine manière, n'est-il pas possible qu'il existe d'*autres* manières de l'appréhender ou de le définir, sachant que de telles *autres* manières ont, à cause d'un passé mathématique sédimenté, la capacité *métaphysique* de se poser dans l'attente de fécondations intuitives rétroactives. Principe de raison inductive, aussi, basé sur la constatation « aristotélicienne » que la multiplicité ramifiée du dire de l'être — l'être mathématique en l'occurrence — ne s'interrompt jamais. Enfin, au-delà d'une démultiplication de l'Un conceptuel par la pensée, l'examen du caractère problématique de l'Idée pousse inlassablement aux genèses en généralisation. □

La *courbure de Menger* pour les compacts du plan complexe $\mathbb{C}$, par exemple, étend la conceptualisation de l'Idée de courbure planaire bien au-delà des objets unidimensionnels, à des compacts arbitraires du plan complexe $\mathbb{C}$ relativement à une mesure de Radon, et ce, comme suit. Tout d'abord, si z_1, z_2, z_3 sont trois points de $\mathbb{C}$ distincts deux à deux, et si $S(z_1, z_2, z_3)$ désigne l'aire (absolue) du triangle $z_1 z_2 z_3$, on vérifie que la quantité :

$$c(z_1, z_2, z_3) := \frac{S(z_1, z_2, z_3)}{|z_1 - z_2|\,|z_1 - z_3|\,|z_2 - z_3|} = \frac{1}{R(z_1, z_2, z_3)}$$

est égale à l'inverse du rayon $R(z_1, z_2, z_3)$ du cercle circonscrit à ce triangle, quantité qui est nulle lorsque, et seulement lorsque ces trois points sont alignés. Ensuite, si $K \Subset \mathbb{C}$ est un sous-ensemble compact arbitraire, à savoir un sous-ensemble qui est fermé pour la topologie induite de $\mathbb{C}$ et qui est aussi borné, □

Dans le plan euclidien, soient alors par exemple deux cercles, un « petit » cercle de rayon r et de courbure $\frac{1}{r}$, ainsi qu'un « grand » cercle de rayon R et de courbure $\frac{1}{R}$.



COURBURE DES CERCLES ET VECTEURS NORMAUX UNITAIRES

À côté d'eux, on trace aussi un cercle de rayon 1 que l'on appellera *cercle auxiliaire* ; la longueur de sa circonférence est égale à 2π. Dans un tel cercle mathématique idéal, les angles sont mesurés non pas en degrés, mais en *radians* — la plus simple des unités de mesure : par définition, la *mesure en radians* d'un angle est égale à la longueur de l'arc de cercle qu'il découpe sur le cercle auxiliaire. Par exemple, le tour complet vaut 2π radians — au lieu de 360 degrés — et le quart de tour vaut $\frac{\pi}{2}$ radians — au lieu de 90 degrés. Pour simplifier, les angles considérés ne seront pas orientés.

Soient donc deux angles infinitésimaux $d\theta$ et $d\varphi$ tracés sur le cercle auxiliaire. En admettant sans s'y attarder que la métaphysique du calcul infinitésimal est bien fondée, on dessinera tous les infinitésimaux avec une certaine extension physique ; toutefois, sous une autre perspective, l'intuition idéale doit les « embrasser » comme de vrais infiniment petits.

Scholie. Troublante puissance de l'intuition mathématique experte ! Capable à la fois d'emboîter le pas au sensible et de maintenir vivante l'exigence de traductibilité théorique rigoureuse, elle parcourt les espaces de la pensée à tous leurs étages. □

Ainsi les deux angles $d\theta$ et $d\varphi$ coïncident chacun avec une longueur d'arc de cercle infinitésimal. On translate alors l'angle $d\theta$ jusqu'au petit cercle et on translate l'angle $d\varphi$ jusqu'au grand cercle. La longueur des deux arcs de cercle ainsi découpés est égale — respectivement — à $rd\theta$ et à $Rd\varphi$.

Réciproquement, si l'on se donne la longueur d'un arc infinitésimal situé sur l'un des deux cercles (par exemple le grand), c'est-à-dire, si l'on se donne la longueur d'un arc situé entre deux points p et q infiniment proches, on peut construire un arc de cercle infinitésimal *associé*, situé sur le cercle auxiliaire : il suffit de translater le vecteur normal *unitaire* $N(p)$ jusqu'au centre du cercle auxiliaire, de translater aussi le vecteur $N(q)$ et de mesurer l'angle qui est délimité sur la sphère auxiliaire par les extrémités de ces deux vecteurs. Ce procédé de translation était en fait déjà illustré sur la figure précédente.

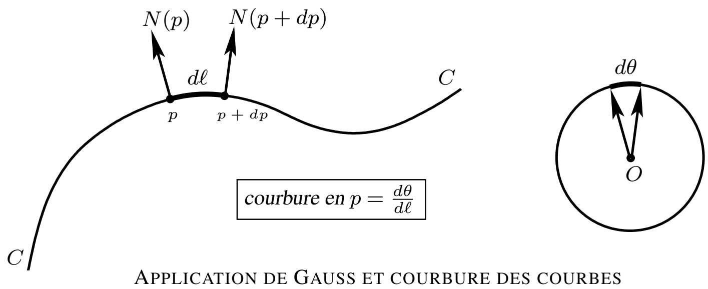
Or on constate une identité algébrique triviale : la courbure de chaque cercle s'identifie au quotient de ces deux longueurs infinitésimales[13] :

$$\frac{1}{r} = \frac{d\theta}{rd\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{R} = \frac{d\varphi}{Rd\varphi}.$$

En résumé, la courbure de tout cercle s'identifie au quotient :

$$\frac{\text{longueur correspondante sur le cercle auxiliaire}}{\text{longueur d'un arc infinitésimal sur la circonférence}}.$$

Définition de la courbure des courbes quelconques dans le plan. Soit maintenant C une courbe arbitraire tracée dans le plan euclidien et soit à nouveau le cercle auxiliaire de rayon unité, placé à droite de la figure explicative ci-dessous. Soit p un point de la courbe, soit $p + dp$ un point infinitésimalement proche de p et soit $d\ell$ la distance infinitésimale qui sépare les deux points. On translate alors[14] les deux vecteurs unitaires normaux $N(p)$ et $N(p + dp)$ jusqu'au cercle auxiliaire et et on calcule la distance infinitésimale $d\theta$ qui est délimitée par ces deux vecteurs sur le cercle auxiliaire.



APPLICATION DE GAUSS ET COURBURE DES COURBES

Définition. La courbure d'une courbe C quelconque en l'un de ses points p est le quotient infinitésimal :

$$\frac{d\theta}{d\ell} = \frac{\text{longueur correspondante sur le cercle auxiliaire}}{\text{longueur d'un arc infinitésimal sur la courbe}},$$

lequel peut s'interpréter rigoureusement comme une limite qui est bien définie lorsque la courbe est au moins deux fois continûment différentiable (on dit alors que la courbe est *de classe* $\mathscr{C}^2$).

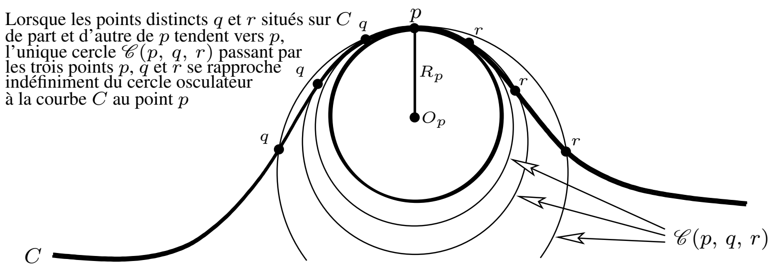
[13] Grâce à l'homogénéité de la courbure d'un cercle, les mêmes propriétés sont satisfaites par des arcs de longueur finie, non infinitésimale. Au contraire, pour une courbe arbitraire, la considération des variations d'angle infinitésimales — qui sera généralisée *infra* — est incontournable.

[14] On appellera *application de Gauss* cette opération de translation des vecteurs unitaires normaux.

Scholie. Compréhension et cohérence de la définition par variation d'angle dans un cas simple (les cercles) ; généralisation-idéalisation de la même définition au cas de courbes de classe $\mathscr{C}^2$ absolument quelconques ; saisie intuitive de la mesure de la courbure par « déroulement » sur un cercle unité auxiliaire ; vérification méditative de l'adéquation de cette désarticulation mesurante ; inspiration implicite qu'un certain « blotissement de cercle » épouse et dirige la courbure de la courbe en chaque point.

□

Cercle osculateur à une courbe en un point. Soit à nouveau C une courbe arbitraire du plan et soit p l'un de ses points. Si q et r sont deux points distincts situés sur C de part et d'autre de p, il existe un unique cercle passant par les trois points p, q et r, cercle se réduit à une droite lorsque ces points sont alignés. Soit donc $\mathscr{C}(p,\, q,\, r)$ ce cercle (ou droite), qui dépend de la position de q et de r, comme sur la figure ci-dessous.



CERCLE OSCULATEUR COMME LIMITE DE CERCLES SÉCANTS

On démontre mathématiquement[15] que lorsque les deux points q et r se rapprochent indéfiniment du point p, le cercle $\mathscr{C}(p,\, q,\, r)$ se rapproche indéfiniment d'un unique cercle passant par le point p. Ce cercle est appelé *cercle osculateur*[16] *à la courbe C au point p*.

Soit $\mathscr{C}_p$ ce cercle, soit O_p son centre et soit R_p son rayon. Intuitivement parlant, ce cercle « osculateur » est le cercle qui approxime le mieux[17] la courbe dans un voisinage infime du point p. Aussi pourrait-on définir aussi

[15] — en supposant que la courbe est (au moins) deux fois continûment différentiable, *i.e.* de classe $\mathscr{C}^2$ —

[16] Du latin *osculari* « embrasser », pour exprimer que le cercle a un ordre de contact élevé avec la courbe, plus élevé que sa droite tangente.

[17] La propriété de meilleure approximation du cercle osculateur raffine et améliore la propriété d'approximation de la droite tangente. En effet, on démontre mathématiquement que lorsqu'un point r varie sur le cercle osculateur $\mathscr{C}_p$ et se rapproche de p, la distance de r à son projeté orthogonal q_r sur la courbe C devient infiniment petite par rapport au *carré* de la distance de r à p, c'est-à-dire que le quotient :

$$\frac{\text{distance}\,(r,\, q_r)}{[\text{distance}\,(r,\, p)]^2}$$

tend vers zéro quand le point r tend vers le point p.

la courbure mathématique de la courbe C au point p comme étant l'inverse du rayon de son cercle osculateur en p :

$$\frac{1}{R_p} = \text{courbure de la courbe } C \text{ au point } p,$$

et on admettra, sans le redémontrer, le résultat élémentaire suivant.

Théorème. *Les deux définitions de la courbure, par variation infinitésimale d'angle du vecteur normal unitaire ou par inversion du rayon du cercle osculateur, coïncident.*

Scholie. Convergence et coïncidence de deux multiples définitionnels qui sont « naturels » chacun de leur côté : il faut y voir la manifestation, à un niveau supérieur, d'une cohérence *métaphysique* des mathématiques. La tangente à une courbe offre un principe de comparaison avec (ou d'approximation par) une droite ; l'osculation par des cercles raffine le principe par simple enrichissement d'une panoplie-modèle.

Bien entendu, l'ontologie génétique intuitive commande immédiatement d'étendre ces principes de comparaison (ou d'approximation) à des cadres plus généraux, voire les plus généraux possibles. Formules de Taylor-Young à divers ordres, ou variétés de jets en dimension supérieure ouvrent la voie vers des univers calculatoirement extrêmement riches, qui naissent en partie ici, dans le « berceau simplissime » des courbes. En théorie de Cartan, les courbures que possèdent les déformations d'espaces homogènes quelconques recèlent une *ontologie indéfinie, imprévisible et inépuisable*, non seulement parce que les algèbres (groupes) de Lie non semi-simples se ramifient à l'infini de manière non totalement classifiable, mais encore parce que la construction des structures de parallélisme absolu à la Cartan-Tanaka, virtuellement possibles dans tous les cas de figure, exige en fait dans chaque situation spécifique de très longs calculs d'élimination qui sont très emboîtés les uns dans les autres et presque jamais effectués(ables) en totalité ! Arbres de Hilbert-Gödel (incomplétude) et arbres de calculs (indéfinitude), telle est l'incroyable *situation universelle d'ouverture* à laquelle sont exposées les mathématiques. □

Scholie. Toutefois, les considérations géométriques précédentes n'apportent aucune information quantitative. On soupçonne en effet facilement qu'il devrait exister une *formule* qui exprime *quantitativement* la courbure d'une courbe en fonction des éléments qui la définissent. Autrement dit, si l'être d'une courbe est saisissable non pas seulement en tant qu'être géométrique, mais en tant qu'être fonctionnel effectif à cause du mystérieux et indubitable

$\boxed{\text{principe de transsubstantiation du géométral en le fonctionnel-calculatoire pur}}$, alors puisque la courbure géométrique dépend directement des caractères de la courbe, et donc puisque l'on ne sait pas encore de quelle manière la dépendance a lieu, c'est-à-dire puisque la courbure géométrique peut *a priori* dépendre sans restriction de *tous* les caractères potentiellement étudiables de la courbe, il doit être possible de donner la parole à *certains* caractères adéquats de cette courbe afin d'en extraire, *par le raisonnement et par le calcul pur*, une formule qui exprime la courbure sous une forme explicite satisfaisante. Pétition de principe métaphysique — objecterait Heidegger —, et domination du principe de raison — ajouterait-il —, mais toutefois, accepter une telle « règle du jeu supérieure » comme le font les mathématiciens ne limite en rien la composante proprement *méditative et spéculative* de l'exploration technique. □

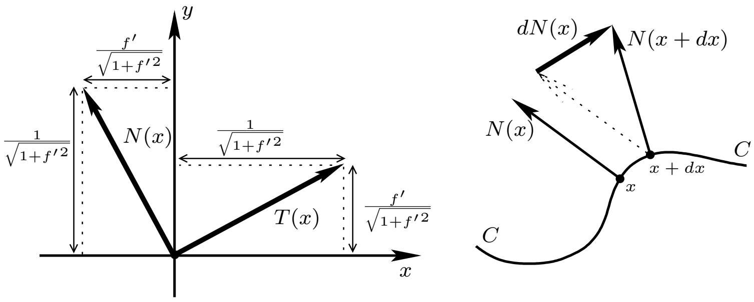
Scholie. Encore une fois, chaque élément de spéculation métaphysico-mathématique compte. Ici, il faut affirmer fermement que le calcul n'est jamais « un calcul » placé en position secondaire ou latérale par rapport à des raisonnements conceptuels abstraits ou géométriques purs. Seul le calcul effectif pousse la recherche de vérité dans les retranchements de son inexpression initiale et de son inexplicitation embryonnaire. Poursuivre des raisonnements en direction d'une complétude exige qu'on accepte, tant qu'une question n'est pas résolue, qu'elle n'est pas encore résolue. □

Heureusement, il se trouve qu'il est relativement facile de *calculer* l'expression explicite de la courbure d'une courbe graphée $y = f(x)$ en chacun de ses points. Ce calcul constitue un préliminaire important aux calculs plus élaborés que Gauss a conduits pour les surfaces.

5. Expression analytique de la courbure des courbes planaires

Vecteurs tangents et vecteurs normaux. En un point arbitraire de coordonnées $(x, f(x))$, le vecteur infinitésimal tangent a pour composantes $(dx, f'(x)\,dx)$. Après division par dx, le vecteur macroscopique (non infinitésimal) de coordonnées $(1,\ f'(x))$ est tangent à la courbe. La norme de ce vecteur étant égale à $\sqrt{1+f'(x)^2}$, on en déduit que le vecteur unitaire tangent $T(x)$ à la courbe en ce point a pour coordonnées :

$$T(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}},\ \frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right).$$



PROJECTIONS SUR LES AXES DE COORDONNÉES DE $T(x)$ ET DE $N(x)$

Après une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$, le vecteur normal unitaire $N(x)$ a donc pour coordonnées :

$$N(x) = \left(-\frac{f'(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}},\ \ \frac{1}{\sqrt{1+f'(x)^2}}\right).$$

La figure aide à deviner — ou à se souvenir — pourquoi il y a un signe « $-$ » devant la première composante de $N(x)$. D'après sa définition en termes de variation de l'angle du vecteur normal, la courbure $c(x)$ de la courbe au point de coordonnées $\big(x,\ f(x)\big)$ est donnée par le quotient :

$$c(x) = \frac{\text{norme de } dN(x)}{\text{longueur de } x \text{ à } x+dx}.$$

Or la longueur infinitésimale de la courbe entre le point repéré par x et le point repéré par $x+dx$ est égale à $\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$: c'est le dénominateur. Pour calculer le numérateur, il faut prendre la norme des deux membres de la différentielle $dN(x) = N'(x)\cdot dx$, ce qui donne :

$$\text{norme de } dN(x) = |dx| \cdot \text{norme de } N'(x),$$

la notation classique $|a|$ désignant la *valeur absolue* d'un nombre réel a. Maintenant, pour calculer la dérivée $N'(x)$, puis sa norme, il faut appliquer des formules classiques :

(1) la dérivée de la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est égale à $-\frac{1}{2\,x\,\sqrt{x}}$;

(2) la dérivée d'une fonction composée $\frac{1}{\sqrt{g(x)}}$ est égale à $-\frac{g'(x)}{2\,g(x)\,\sqrt{g(x)}}$;

(3) la dérivée d'une fonction dérivée $f'(x)$ est appelée *dérivée seconde* et notée $f''(x)$;

(4) la dérivée de la fonction $g(x) := 1+f'(x)^2$ est égale à $2\,f'(x)\,f''(x)$;

(5) la dérivée d'un produit de fonctions $f'(x)\,h(x)$ est égale à $f''(x)\,h(x) + f'(x)\,h'(x)$.

En appliquant toutes ces formules, on déduit l'expression de la dérivée des deux composantes du vecteur normal unitaire ; pour alléger l'écriture, l'argument (x) des fonctions f' et f'' sera sous-entendu :

$$\begin{aligned} N'(x) &= \left(\frac{-f''}{\sqrt{1+f'^2}} + \frac{f'^2\, f''}{(1+f'^2)\,\sqrt{1+f'^2}},\ \frac{-f'\, f''}{(1+f'^2)\,\sqrt{1+f'^2}} \right) \\ &= \left(\frac{-f''}{(1+f'^2)\,\sqrt{1+f'^2}},\ \frac{-f'\, f''}{(1+f'^2)\,\sqrt{1+f'^2}} \right), \end{aligned}$$

d'où il découle que la norme de $N'(x)$, notée $\|N'(x)\|$, est égale à :

$$\begin{aligned} \|N'(x)\| &= \sqrt{\frac{f''^2}{(1+f'^2)^3} + \frac{f'^2\, f''^2}{(1+f'^2)^3}} \\ &= \frac{|f''|}{1+f'^2}. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de remplacer les valeurs du numérateur et du dénominateur qui viennent d'être calculées :

$$c(x) = \frac{\|N'\| \cdot dx}{\sqrt{1+f'^2} \cdot dx} = \frac{|f''|}{(1+f'^2)\sqrt{1+f'^2}}.$$

Jusqu'à présent, pour simplifier la présentation des calculs, il n'a pas été question de l'*orientation* de la courbe C, *i.e.* de son sens de parcours. Il existe toujours deux orientations opposées l'une à l'autre. Si l'on choisit une orientation, il est possible de définir la *courbure orientée*, concept qui permet de déterminer de quel côté de la courbe se trouve son cercle osculateur. Cette courbure orientée est donc positive ou négative, sa valeur absolue restant bien entendu égale à l'inverse du rayon du cercle osculateur. Pour l'obtenir, il suffit d'éliminer le signe de valeur absolue dans le numérateur $|f''|$ et de choisir l'un des signes « $+$ » ou « $-$ » devant l'expression complète, par exemple le signe « $+$ ». En définitive, on a le :

Théorème. *La courbure* orientée $c(x)$ *d'une courbe graphée* $y = f(x)$ *en un point repéré par son abscisse* x *s'exprime quantitativement par la formule :*

$$c(x) = \frac{f''(x)}{\big(1+f'(x)^2\big)\sqrt{1+f'(x)^2}}.$$

Scholie. Au premier ordre, le raisonnement infinitésimal a permis d'identifier une courbe à une chaîne infinie de segments rectilignes infinitésimaux, comme si la courbure disparaissait totalement à une telle échelle. L'orientation de ces segments rectilignes est représentée par le vecteur unitaire tangent à la courbe $T(p)$, ou encore — à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ près —, par le vecteur unitaire normal $N(p)$, tous deux obtenus par différentiation infinitésimale. C'est donc en étudiant les *différences infinitésimales entre ces vecteurs obtenus par différentiation* que l'on peut appréhender la courbure. Autrement dit, la courbure se perçoit après deux différentiations, ce qui est confirmé par la présence de la dérivée seconde $f''(x)$ dans l'expression quantitative complète de $c(x)$. On dit que la courbure est une quantité *du second ordre*. $\square$

Expression de la courbure en représentation paramétrée. Par des calculs analogues à ceux qui viennent d'être conduits, on trouve l'expression explicite de la courbure d'une courbe, lorsqu'elle est représentée sous une forme paramétrique :

$$t \longmapsto \big(x(t),\, y(t)\big),$$

où la variable t appartient à $\mathbb{R}$.

Théorème. *Dans une telle représentation paramétrée, la courbure* orientée *d'une courbe en un point de coordonnées* $\big(x(t),\, y(t)\big)$ *s'exprime quantitativement au moyen de la formule :*

$$c(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - y'(t)\, x''(t)}{\big[(x'(t))^2 + (y'(t))^2\big]^{3/2}}.$$

DÉMONSTRATION. Le vecteur normal unitaire $N(t)$ à la courbe paramétrée $(x(t),\, y(t))$ en un point repéré par t a pour coordonnées :

$$N(t) = \left(-\frac{y'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}},\ \ \frac{x'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \right).$$

La longueur infinitésimale de la courbe entre le point repéré par t et le point repéré par $t + dt$ est égale à $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$. La courbure (non orientée) est donnée par :

$$c(t) = \frac{\text{norme de } N'(t)}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}.$$

Il suffit donc de calculer les deux composantes de $N'(t)$:

$$N'(t) = \left(\frac{y'\, x'\, x'' - y''\, x'\, x'}{(x'^2 + y'^2)\sqrt{x'^2 + y'^2}},\ \ \frac{x''\, y'\, y' - x'\, y'\, y''}{(x'^2 + y'^2)\sqrt{x'^2 + y'^2}} \right),$$

puis la norme de $N'(t)$, pour trouver l'expression annoncée. $\square$

Expression de la courbure en représentation implicite. Enfin, on peut supposer que la courbe est donnée sous forme implicite :

$$0 = W(x, y),$$

où W est une fonction de classe au moins $\mathscr{C}^2$ par rapport à ses deux variables (x, y), et où l'on suppose qu'en tout point du lieu des zéros

$\{(x_p, y_p) \in \mathbb{R}^2 \colon W(x_p, y_p) = 0\}$, l'une au moins des deux dérivées partielles $W_x(x_p, y_p)$ ou $W_y(x_p, y_p)$ ne s'annule pas, condition qui assure que la courbe est géométriquement lisse. Cette condition s'accorde avec le fait que l'on doit diviser par $W_x^2 + W_y^2$ pour calculer quantitativement la courbure.

Théorème. *Dans la représentation implicite, en un point quelconque de coordonnées* $(x,\, y)$ *appartenant à la courbe d'équation* $W(x,\, y) = 0$*, la courbure s'exprime quantitativement au moyen de la formule :*

$$c(x,\, y) = \frac{W_{xx}\,(W_y)^2 - 2\,W_{xy}\,W_x\,W_y + W_{yy}\,(W_x)^2}{\big[(W_x)^2 + (W_y)^2\big]^{3/2}}(x, y).$$

DÉMONSTRATION. Deux démonstrations s'offrent : la première, indirecte car basée sur le précédent théorème, est peu coûteuse en calcul ; la seconde est directe et indépendante, mais elle requiert des calculs d'élimination différentiels moins élémentaires. Il sera néanmoins utile d'effectuer de tels calculs afin de mieux préparer la présentation de la courbure dans le cas beaucoup plus délicat des surfaces.

Pour la première démonstration (indirecte), localement au voisinage d'un point $p = (x_p, y_p)$ quelconque de la courbe, on peut, par symétrie des coordonnées, supposer que $W_y(x, y) \neq 0$ ne s'annule pas. Grâce au théorème des fonctions implicites, la courbe est alors en fait représentable comme le graphe $y = f(x)$ d'une certaine fonction de classe au moins $\mathscr{C}^2$, définie dans le voisinage de p et satisfaisant $y_p = f(x_p)$. Par définition, ce graphe entier est contenu dans l'ensemble des zéros de f, d'où il découle que l'équation :

$$0 \equiv W\big(x, f(x)\big)$$

est satisfaite identiquement[18] pour tout x dans un certain voisinage ouvert non vide de x_p. En tout état de cause, cette équation doit dans l'instant être différentiée par rapport à x, ce qui donne une autre équation identiquement satisfaite :

$$0 = W_x + f'\,W_y$$

i.e. avec les arguments :

$$0 \equiv W_x\big(x, f(x)\big) + f'(x)\,W_y\big(x, f(x)\big),$$

d'où l'on tire la valeur, en un point arbitraire $\big(x, f(x)\big)$ de la courbe proche de p, de la dérivée de la fonction graphante :

$$f' = -\tfrac{W_x}{W_y} \qquad \textit{i.e. } \text{avec les arguments :} \qquad f'(x) = -\tfrac{W_x(x, f(x))}{W_y(x, f(x))},$$

[18] Dans les œuvres de Sophus Lie, des raisonnements par équations identiquement satisfaites s'avèrent être très fréquemment nécessaires et constamment utiles, et ils sont aussi poussés, presque toujours avec un nombre quelconque de variables, à un niveau de généralité qui dépasse de mille coudées le cas des courbes.

comme simple quotient des dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction implicitante W. Maintenant, dans l'expression de la courbure :

$$c(x) = \frac{f''(x)}{\big(1+f'(x)^2\big)^{3/2}}$$

en termes de cette fonction graphante $f = f(x)$, non seulement la dérivée d'ordre 1, mais encore la dérivée d'ordre 2 de f interviennent. Rien de plus immédiat que la suggestion de dériver encore une fois l'équation identiquement satisfaite, ce qui donne, en n'oubliant aucun terme dans le calcul des dérivées partielles, une nouvelle équation identiquement satisfaite :

$$0 \equiv W_{xx} + W_{xy}\, f' + f''\, W_y + f'\, W_{xy} + (f')^2\, W_{yy},$$

écrite maintenant sans les arguments $\big(x, f(x)\big)$ des dérivées partielles de la fonction W. Résoudre f'' est aisé :

$$f''\, W_y = -\, W_{xx} + 2\, W_{xy}\, \tfrac{W_x}{W_y} - W_{yy}\, \tfrac{W_x^2}{W_y^2},$$

et lorsqu'on remplace f' et f'' par les valeurs ainsi obtenues en fonction de W_x, W_y, W_{xx}, W_{xy} et W_{yy}, on obtient effectivement, après harmonisation, l'expression annoncée pour la courbure :

$$c = \frac{W_{xx}\,(W_y)^2 - 2\, W_{xy}\, W_x\, W_y + W_{yy}\,(W_x)^2}{\big[(W_x)^2 + (W_y)^2\big]^{3/2}}.$$

Deuxième preuve directe systématique. La deuxième preuve ne supposera pas qu'une expression de la courbure ait déjà été obtenue par une autre voie, elle calculera *directement* la variation d'angle du vecteur normal à la courbe en se rapportant à l'équation implicite. Mais tout d'abord, comment s'écrit le vecteur normal à une courbe en représentation implicite ?

Si deux points infiniment proches l'un de l'autre $(x+dx, y+dy)$ et (x,y) appartiennent à la courbe, à savoir si :

$$\begin{aligned} 0 = W(x,y) &= W(x+dx, y+dy) \\ &= \underline{W(x,y)}_{\circ} + W_x(x,y)\, dx + W_y(x,y)\, dy, \end{aligned}$$

alors le vecteur infinitésimal (dx, dy) est évidemment tangent à la courbe et la condition ainsi obtenue :

$$0 = W_x\, dx + W_y\, dy$$

exprime visiblement que (dx, dy) est orthogonal au vecteur (W_x, W_y) pour le produit scalaire euclidien standard sur $\mathbb{R}^2$. De manière immédiatement équivalente, ce vecteur (W_x, W_y) est orthogonal à la droite tangente, et donc il suffit de le diviser par sa norme pour obtenir le vecteur normal unitaire :

$$N = N(x,y) = \left(\tfrac{W_x}{(W_x^2+W_y^2)^{1/2}},\ \tfrac{W_y}{(W_x^2+W_y^2)^{1/2}}\right)$$

à la courbe au point (x,y).

Maintenant par définition, la courbure s'exprime comme la variation infinitésimale du vecteur normal divisée par la longueur du segment infinitésimal de (x,y) à $(x+dx, y+dy)$, c'est-à-dire :

$$c(x,y) = \frac{\big\|N(x+dx,y+dy) - N(x,y)\big\|}{\sqrt{dx^2+dy^2}}.$$

Il est donc nécessaire de calculer la différentielle :

$$\begin{aligned} dN &= N(x+dx,y+dy) - N(x,y) \\ &= N_x(x,y)\,dx + N_y(x,y)\,dy \end{aligned}$$

du vecteur normal en fonction des dérivées partielles de la fonction W, et c'est ici-même que les calculs commencent à se déployer.

En effet, une application soignée des règles classiques de différentiation de fonctions composées, produit ou quotient, donne les différentielles des deux composantes du vecteur normal N :

$$\begin{aligned} dN = \bigg(&\frac{W_{xx}\,dx + W_{xy}\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{1/2}} - \frac{[W_x^2\,W_{xx} + W_x\,W_y\,W_{xy}]\,dx + [W_x^2\,W_{xy} + W_x\,W_y\,W_{yy}]\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{3/2}}, \\ , \ &\frac{W_{xy}\,dx + W_{yy}\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{1/2}} - \frac{[W_y\,W_x\,W_{xx} + W_y^2\,W_{xy}]\,dx + [W_y\,W_x\,W_{xy} + W_y^2\,W_{yy}]\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{3/2}} \bigg), \end{aligned}$$

et l'on va constater, après réduction (nécessaire) au même dénominateur :

$$\begin{aligned} dN = \bigg(&\frac{W_{xx}(\underline{W_x^2}_{\circ} + W_y^2)\,dx + W_{xy}(\underline{W_x^2}_{\circ\circ} + W_y^2)\,dy - [\underline{W_x^2\,W_{xx}}_{\circ} + W_x\,W_y\,W_{xy}]\,dx - [\underline{W_x^2\,W_{xy}}_{\circ\circ} + W_x\,W_y\,W_{yy}]\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{3/2}}, \\ , \ &\frac{W_{xy}(W_x^2 + \underline{W_y^2}_{\circ})\,dx + W_{yy}(W_x^2 + \underline{W_y^2}_{\circ\circ})\,dy - [W_y\,W_x\,W_{xx} + \underline{W_y^2\,W_{xy}}_{\circ}]\,dx - [W_y\,W_x\,W_{xy} + \underline{W_y^2\,W_{yy}}_{\circ\circ}]\,dy}{(W_x^2+W_y^2)^{3/2}} \bigg), \end{aligned}$$

que pour chacune des deux composantes de ce vecteur infinitésimal $dN \in \mathbb{R}^2$, deux paires de termes, soulignées, s'annihilent, d'où il reste, après ces simplifications agréables :

$$\begin{aligned} dN = \frac{1}{(W_x^2+W_y^2)^{3/2}} \bigg(&[W_y^2\,W_{xx} - W_x\,W_y\,W_{xy}]\,dx + [W_y^2\,W_{xy} - W_x\,W_y\,W_{yy}]\,dy, \\ &, \ [W_x^2\,W_{xy} - W_x\,W_y\,W_{xx}]\,dx + [W_x^2\,W_{yy} - W_y\,W_x\,W_{xy}]\,dy \bigg). \end{aligned}$$

Il est maintenant possible de calculer la norme au carré de la différentielle, après placement à gauche du dénominateur :

$$\begin{aligned} (W_x^2+W_y^2)^3\,\|dN\|^2 &= dx^2\Big[W_y^2(W_y\,W_{xx} - W_xW_{xy})^2 + W_x^2(W_x\,W_{xy} - W_y\,W_{xx})^2\Big] + \\ &+ 2dxdy\Big[W_y^2(W_yW_{xx} - W_xW_{xy})(W_yW_{xy} - W_xW_{yy}) + W_x^2(W_xW_{xy} - W_yW_{xx})(W_xW_{yy} - W_yW_{xy})\Big] + \\ &+ dy^2\Big[W_y^2(W_y\,W_{xy} - W_x\,W_{yy})^2 + W_x^2(W_x\,W_{yy} - W_y\,W_{xy})^2\Big]. \end{aligned}$$

Scholie. Rappel sur l'intention du calcul : en principe, la courbure au carré $c(x,y)^2$ de la courbe en un point (x,y) situé sur le lieu implicite des zéros $\{W(x,y) = 0\}$ s'obtient en *divisant* cette norme au carré $\|dN\|^2$ par $dx^2 + dy^2$. Or, il n'est nullement évident ici que le membre de droite soit effectivement divisible par $dx^2 + dy^2$! Outre l'inévitable erreur de calcul (évitée ici dans l'*a posteriori* de la constitution textuelle d'un manuscrit élaboré et relu de nombreuses fois), l'intuition chercheuse doit *interroger* ce membre de droite et lui demander instamment s'il ne serait pas possible de le réécrire comme dx^2+dy^2 que multiplie une certaine expression algébrico-différentielle. Outre aussi l'inévitable facilité que procure la connaissance, offerte auparavant, de l'expression à obtenir — à savoir justement, le carré du numérateur déjà présenté dans le théorème ci-dessus —, l'intuition chercheuse doit examiner tous les germes possibles de transformations symboliques signifiantes qui demeurent peut-être déposés au sein de la dernière équation écrite. Aboutissement, suspension, rebondissement : telle est la dynamique, fût-elle itérée de nombreuses fois au cours des analyses. En tout cas, le carré caché est toujours invisible, tel est le suspens.

On se rapproche ici de l'idée tentatrice qu'un certain *créationnisme de l'algébrique et du conceptuel* se développe au contact même et à l'intérieur même des calculs ardus, comme une *rencontre de réalités mathématiques potentielles* le long de ces chemins tracés dans l'inconnu que sont les intentions (ou conjectures) *provocatrices* de mouvements de recherche. □

Scholie. Quelles que soient les tentatives, il est en effet remarquable ici que le chemin direct vers la courbure, en partant de l'équation implicite, engendre d'imprévisibles obstacles d'illisibilité dans le flot continu et interne des calculs. En effet, contre l'attente précédente, puisque les cinq quantités W_x, W_y, W_{xx}, W_{xy} et W_{yy} peuvent recevoir des valeurs réelles arbitraires en tout point (x,y) de la courbe, il est en fait impossible, en général, que le membre de droite ci-dessus soit multiple de $dx^2 + dy^2$: errances de l'intuition, fausses pistes dans le labyrinthe partiel d'un Inconnu pré-exploré. Or pourquoi ? Pourquoi en est-il ainsi ? Pourquoi cet obstacle qui obstrue et qui bloque ?

Dans toute exploration mathématique, seuls les *retours en arrière* et les *reprises générales* permettent de sauver dialectiquement les phénomènes : remise en cause d'options ou d'hypothèses, relèvement aux points de bifurcations incidemment ignorés et défiance à l'égard de pseudo-métaphysiques non supportées par des spéculations adéquates.

Ici, c'est la mémoire qui a failli : oubli regrettable que les projections dx et dy sur les axes de coordonnées de l'élément différentiel infinitésimal étaient en fait *liées depuis le début* par une relation fondamentale :

$$0 = W_x\,dx + W_y\,dy,$$

dont il fallait fatalement tenir compte dans tous les calculs. Mais à présent, l'espoir renaît de *faire aboutir les calculs*. L'erreur conscientisée est en fait salvatrice. □

Ainsi, on supposera que $W_y \neq 0$ (ce qui est justifié par interchangeabilité des variables x et y), et on remplacera dy partout par $-\frac{W_x}{W_y}\,dx$. Mais à l'instant même de la relecture de la précédente équation dans laquelle on s'apprêtait à effectuer cette substitution de dy, une observation imprévue car insoupçonnée et agréable se révèle : *les trois différentielles quadratiques* dx^2*,* $2dxdy$ *et* dy^2 *sont toutes multiples de* $W_x^2 + W_y^2$, et donc l'on peut *simplifier à gauche et à droite* par ce facteur commun avant d'effectuer le remplacement, ce qui donne pour commencer :

$$\begin{aligned}(W_x^2+W_y^2)^2\,\|dN\|^2 = dx^2&(W_y\,W_{xx}-W_xW_{xy})^2+\\&+2dxdy(W_yW_{xx}-W_xW_{xy})(W_yW_{xy}-W_xW_{yy})+\\&+dy^2(W_y\,W_{xy}-W_x\,W_{yy})^2.\end{aligned}$$

Scholie. Ce sera seulement quand les machines à calcul symbolique posséderont une panoplie d'actes dialectiques suffisamment riche pour *réagir dialectiquement* dans l'imprévisibilité bifurcationnelle du calcul irréversiblement synthétique-orienté que l'on pourra prétendre que le calcul est véritablement automatisable. □

Une fois cette simplification acquise, on peut remplacer dy comme convenu par $-\frac{W_x}{W_y}\,dx$ d'abord dans le dénominateur dx^2+dy^2 de la courbure au carré :

$$c(x,y)^2 = \frac{\|dN\|^2}{dx^2+dy^2} = \frac{1}{W_x^2+W_y^2}\,\frac{W_y^2\,\|dN\|^2}{dx^2},$$

puis effectuer ce même remplacement dans $W_y^2\,\|dN\|^2$, en constatant que le facteur W_y^2 élimine les dénominateurs, ce qui donne au total :

$$\begin{aligned}c^2 = \frac{1}{(W_x^2+W_y^2)^3}\bigg\{&\frac{\underline{dx^2}_\circ\,W_y^2(W_y\,W_{xx}-W_xW_{xy})^2}{\underline{dx^2}_\circ}-\\&-\frac{2\underline{dx^2}_\circ W_xW_y(W_yW_{xx}-W_xW_{xy})(W_yW_{xy}-W_xW_{yy})}{\underline{dx^2}_\circ}+\\&+\frac{\underline{dx^2}_\circ W_x^2(W_y\,W_{xy}-W_x\,W_{yy})^2}{\underline{dx^2}_\circ}\bigg\},\end{aligned}$$

et après la simplification évidente de dx^2 au numérateur et au dénominateur, il reste une expression entre crochets :

$$\begin{aligned} c^2 = \frac{1}{(W_x^2+W_y^2)^3} \bigg\{ & W_y^2 (W_y\, W_{xx} - W_x W_{xy})^2 - \\ & - 2\, W_x W_y (W_y W_{xx} - W_x W_{xy})(W_y W_{xy} - W_x W_{yy}) \\ & + W_x^2 (W_y\, W_{xy} - W_x\, W_{yy})^2 \bigg\}, \end{aligned}$$

que l'œil averti du calculateur reconnaîtra comme étant de la forme générale $A^2 - 2AB + B^2 = (A-B)^2$:

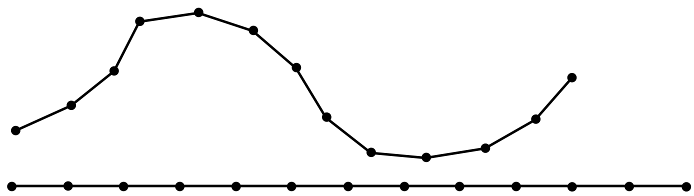
$$c^2 = \frac{1}{(W_x^2+W_y^2)^3} \bigg\{ \Big(W_y (W_y\, W_{xx} - W_x W_{xy}) - W_x (W_y\, W_{xy} - W_x\, W_{yy}) \Big)^2 \bigg\},$$

ce qui se simplifie pour terminer en :

$$c(x,y)^2 = \frac{W_x^2\, W_{yy} - 2 W_x W_y\, W_{xy} + W_y^2 W_{xx}}{(W_x^2+W_y^2)^3},$$

et qui conclut finalement la deuxième démonstration du théorème. □

Évanouissement intrinsèque de la courbure des courbes. Toute courbe suffisamment régulière (de classe $\mathscr{C}^1$ convient) s'identifie essentiellement à une succession de segments rectilignes infinitésimaux. Si l'on imagine que chacun de ces segments est relié aussi bien à celui qui le précède et à celui qui le suit par un pivot autour duquel la rotation est libre, de telle sorte que la courbe est articulée comme une règle de charpentier, il est alors clair pour des raisons mécaniques évidentes, que l'on peut « dé-courber » la courbe et la transformer en une chaîne absolument rectiligne en tirant simplement avec ses mains sur les deux extrémités.



DISPARITION DE LA COURBURE D'UNE CHAÎNE ARTICULÉE

Cette opération conserve non seulement la longueur de la courbe, mais elle conserve aussi la longueur de chacun de ses segments infinitésimaux, qui sont représentés par des segments de longueur finie sur la figure.

Observation. *Toute courbe dans le plan peut être transformée en un segment de droite par une transformation qui conserve la longueur de tous ses éléments infinitésimaux.*

Plus généralement, on peut transformer toute courbe quelconque en toute autre courbe quelconque de telle sorte que leurs longueurs infinitésimales se correspondent. Autrement dit, on peut *supprimer intrinsèquement la courbure de toutes les courbes*.

6. Opposition dialectique imprévisible du dimensionnel

Anticipation du Theorema egregium. Au contraire, la plupart des surfaces ne peuvent *pas* être transformées en un plan par une transformation qui conserve les longueurs de leurs éléments infinitésimaux. Par exemple, pour aplatir (écraser) l'écorce d'une demi-orange posée sur une table, il est nécessaire qu'elle se déchire en plusieurs endroits. C'est Gauss qui le premier a su élaborer un concept adéquat de *courbure* d'une surface et a pu « expliquer » mathématiquement l'inéquivalence entre une surface plane et une surface sphérique. Avant de présenter la théorie générale, on développe l'énoncé difficile et fondamental que Gauss a obtenu comme une conséquence directe de la *formula egregia* (6.2.4).

Theorema egregium. *Si l'on transforme une surface S en une autre surface S' de telle sorte que les longueurs infinitésimales de toutes les courbes tracées sur les surfaces soient conservées, alors la courbure de Gauss en un point p de la première surface S est égale à la courbure de Gauss en le point p' qui lui correspond sur la seconde surface S'.*

Ainsi naît une *opposition dialectique imprévisible* entre la dimension 1 (les courbes) et la dimension 2 (les surfaces) :

- la courbure des courbes planes est modifiable à volonté en conservant les longueurs infinitésimales : il suffit de se représenter une ficelle souple mais *inextensible* ;
- au contraire, la courbure de Gauss des surfaces dans l'espace demeure *invariante* à travers toutes les transformations qui préservent infnitésimalement les longueurs : pour modifier la courbure d'une surface, seules des surfaces qui sont à la fois *souples* et *extensibles* conviendraient.

Scholie. Dans son réservoir infini et inépuisable de complexité et de nouveauté — dont le théorème d'incomplétude de Gödel fournit une image partielle — , le monde mathématique réserve des surprises qui anéantissent les espoirs trop simplistes de l'induction hâtive. Incomparabilité des théories à une variable et des théories à deux variables (ou plus) : ce phénomène général traverse toutes les mathématiques récentes, *cf.* le *phénomène de Hartogs* (1906), fondateur de l'analyse moderne à plusieurs variables complexes. □

7. Courbure des surfaces dans l'espace

Détermination du plan tangent à une surface. À la suite de travaux précurseurs de Parent au début du dix-huitième siècle[19], Clairaut, Euler et Monge utilisent la notion géométrique et différentielle de plan tangent à une surface, en admettant que la lissité est génériquement satisfaite lorsque l'équation de la surface s'exprime au moyen de fonctions élémentaires générales. Le fameux théorème de Clairaut — qu'il obtint à l'âge de seize ans — énonce que le long d'une géodésique C tracée sur une surface S de révolution, on a :

$$r(p)\sin\theta(p) = \text{const.},$$

où $r(p)$ est le rayon du cercle parallèle passant par un point quelconque $p \in S$ de la surface, et où $\theta(p)$ est l'angle que la géodésique C fait avec le méridien passant par p.

En 1803, Lacroix interprète la condition de tangence d'un plan à une surface en termes de proximité maximale possible, c'est-à-dire à l'ordre deux, précisément comme pour le cas plus simple des droites tangentes à une courbe. Dupin en 1813 et Cauchy en 1826 établissent que la collection des droites tangentes à toutes les courbes tracées sur une surface passant par un point fixe engendrent — et sont contenues dans — un unique *plan tangent* à la surface, et ils en donnent l'équation affine :

$$0 = (\xi - x)\,W_x + (\upsilon - y)\,W_y + (\zeta - z)\,W_z,$$

lorsque la surface est fournie en représentation implicite par une équation générale du type :

$$0 = W(x, y, z),$$

pour une certaine fonction $W = W(x, y, z)$ définie au voisinage de la surface dans $\mathbb{R}^3$.

Vecteurs unitaires normaux à une surface. Soit maintenant $S \subset \mathbb{R}^3$ une surface locale ou globale, saisie dans l'une des trois représentations possibles : graphée, implicite, ou paramétrique — comme dans la Section p. 185 ci-dessus. Soit $p \in S$ un point quelconque. Le plan tangent T_pS à la surface en p étant de codimension 1 dans $\mathbb{R}^3$, il existe une unique droite *orthogonale* à ce plan — soit donc D_p cette droite passant par p. Les considérations de courbure qui vont suivre étant locales, on peut supposer que la surface est munie d'une certaine orientation ; lorsque S est globale, on supposera implicitement qu'elle est orientable, et qu'elle est munie d'une orientation choisie parmi les deux orientations opposées qui sont possibles.

Ainsi, des deux directions de sortie que définit la droite D_p, l'une d'elles est privilégiée, à savoir celle qui forme un trièdre direct dans $\mathbb{R}^3$ avec tout dièdre de T_pS direct pour l'orientation de la surface. Par conséquent, sur la surface, on peut définir une certaine collection $p \mapsto \mathbf{n}(p)$ de vecteurs dirigés

[19] *Cf.* Liberman [**279**], pp. 181–183 et Kreyszig [**254**].

par les droites $D(p)$ dans la direction privilégiée en question, donc *normaux* (*i.e.* orthogonaux à la surface), et qui sont de plus *unitaires*, c'est-à-dire de norme 1, deux conditions qui les déterminent en tout point de manière unique et sans ambiguïté. On a vu que dans le cas des courbes, y compris celles qui seraient tracées sur les surfaces, c'est la variation infinitésimale du vecteur unitaire normal qui permet d'introduire un concept adéquat de courbure. Comment cette vision doit-elle se généraliser en dimension supérieure ?

Scholie. Les liens entre les dimensions d'étude s'expriment par analogie et généralisation. Tout concept acquis en petite dimension appelle son extension dans le cas des dimensions immédiatement supérieures, puis dans le cas le plus général possible de la dimension arbitraire. Dans les travaux ultérieurs de Lie, l'étude de la dimension quelconque n avec un nombre arbitraire r de paramètres de mouvement constituera un objectif décidé et systématique de la théorie des groupes de transformation.

En vérité, l'exigence de généralisation exprime une tension universelle et immédiatement éprouvable, tension à laquelle doivent se soumettre les réalisations mathématiques. La philosophie des mathématiques quant à elle se trouve en quelque sorte *déchirée* par l'incapacité actuelle de l'esprit humain qui aurait à embrasser l'extension métaphysique de cette exigence universelle, puisque à la fois le général est du ressort de la philosophie, et à la fois le général n'est pas un général abstrait et indifférencié dans les mathématiques, puisqu'il se réalise dans tous les domaines de l'Algèbre, de l'Analyse, de la Géométrie en s'individuant de manière imprévisible et extrêmement diverse. Quel peut être alors le statut épistémologique de l'exigence mathématique de généralité ? Faut-il y voir un aspect transcendantal ? Ou bien seulement voir en elle un principe simple, accessible et reproductible qui signale indéfiniment l'ouverture en tant que *recherche* ? En tout cas, la tension en direction de la généralité est omniprésente dans les mathématiques, toujours germe fertile de travaux nouveaux et originaux, et c'est donc, à tout le moins, un *principe moteur* qu'on doit voir en elle dans la pratique. □

Maintenant, lorsque la surface dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est représentée sous la forme d'un graphe $z = z(x, y)$ pour lequel la troisième coordonnée est une certaine fonction définie mais quelconque des deux premières coordonnées, un petit vecteur infinitésimal de coordonnées (dx, dy, dz) placé en un point $\big(x, y, z(x, y)\big)$ de la surface est *tangent* à la surface en ce point si et seulement si la variation infinitésimale de la troisième coordonnée z suit, par simple prise de différentielle, la contrainte de son égalité à la fonction $z(x, y)$:

$$dz = z_x\, dx + z_y\, dy.$$

Ainsi, les deux vecteurs de coordonnées :

$$\mathbf{t}_x := (1, 0, z_x) \qquad \text{et} \qquad \mathbf{t}_y := (0, 1, z_y)$$

appartiennent à ce plan tangent et ils l'engendrent linéairement. Quelles sont alors les trois coordonnées :

$$\big(X(x,y),\, Y(x,y),\, Z(x,y)\big) = \mathbf{n}(x,y)$$

du vecteur normal unitaire à la surface en un point quelconque repéré par ses deux coordonnées horizontales (x,y) ? La réponse est simple : l'orthogonalité aux deux vecteurs tangents ci-dessus :

$$0 = \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{n} \qquad \text{et} \qquad 0 = \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{n}$$

s'exprime de manière équivalente comme système de deux équations linéaires :

$$\begin{aligned} 0 &= X + 0 + z_x\, Z \\ 0 &= 0 + Y + z_y\, Z, \end{aligned}$$

mais alors la condition que le vecteur $\mathbf{n}$ est de norme unité :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

permet de résoudre uniquement à un signe $\pm$ global près — ledit système :

$$\pm X = \frac{z_x}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}}, \qquad \pm Y = \frac{z_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}}, \qquad \pm Z = \frac{-1}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}}.$$

Transfert sur la sphère auxiliaire et orientation. Sans réveiller la métaphysique du passage à la dimension supérieure, ni même expliciter les motivations astronomiques de repèrage de la voûte céleste sur une sphère projective orientée idéale située à l'infini du monde observable, Gauss introduit d'emblée dans son mémoire la mesure de courbure — *mensura curvaturæ* — d'une surface en termes purement géométriques, d'abord non analytiques, de *représentation imagée* sur le 'miroir-modèle' de la sphère.

> De même qu'en imaginant par le centre de notre sphère auxiliaire des droites respectivement parallèles à chacune des normales d'une surface courbe, à chaque point déterminé de la deuxième surface vient correspondre un point déterminé de la première ; de la même manière, toute ligne ou toute figure tracée sur la surface courbe sera représentée par une ligne ou une figure tracée sur la surface sphérique. Dans la comparaison des deux figures qui se correspondent ainsi, et dont l'une sera comme l'image de l'autre, on peut se placer à deux points de vue : on peut avoir égard seulement aux quantités ; ou bien ne s'occuper que des relations de position, abstraction faite des relations de quantité. GAUSS, [**181**], 13–14

Scholie. Ici, le langage est visiblement inspiré par les catégories de la philosophie : quantité, qualité, deux points de vue possibles et complémentaires sur la *correspondance* des figures, de la surface, vers la sphère auxiliaire, *via* l'application de Gauss qui transporte tous les vecteurs unitaires normaux à l'origine du système de coordonnées. Une mentalisation difficile du transfert, notamment du transfert des courbes, est évoquée, puisque Gauss pense à des figures quelconques tracées sur la surface, mais cet aspect de la conception géométrique disparaît essentiellement complètement lorsqu'il est ressaisi symboliquement, dans un traité moderne, en termes d'*application ensembliste* d'une surface S vers la sphère auxiliaire. En effet, le problème de concevoir une *transformation* entre deux espaces bidimensionnels, qui est un problème de pensée spécifique à l'étude des surfaces beaucoup plus délicat que dans le cas unidimensionnel — car les graphes d'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ vivent dans un espace à quatre dimensions alors que les graphes de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vivent simplement dans le plan — ce problème est en quelque sorte noyé et éliminé par l'option théorique — auquel les enseignements et traités se cantonnent depuis des décennies — d'architecturer 'ensemblistement' les mathématiques. On définit la notion d'application ou de fonction entre deux ensembles abstraits quelconques, et on relègue en ce lieu préliminaire l'effort de conception mentale sous forme de quelques exercices élémentaires sur des ensembles finis ou sur de simples fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Autrement dit, la structuration par inclusions théoriques prend en quelque sorte le risque de faire *disparaître* — au moins localement au niveau des abstractions — les conceptualisations régionales qui sont néanmoins nécessaires dans les contextes déterminés. Il n'est donc pas avisé de croire que la conceptualisation axiomatico-formelle puisse fixer l'extension des idées par déclarations formelles, puisque les questions que l'on se pose parfois inopinément pour *comprendre et méditer* un concept peuvent toujours éventuellement *ouvrir* vers des domaines nouveaux des mathématiques, comme par exemple la dynamique des applications entre *ensembles* fractals, absolument invisibles pour l'intuition des ordinaux et des cardinaux formée au contact de la théorie abstraite des ensembles. □

Scholie. Plusieurs niveaux de pensée s'expriment en géométrie différentielle. L'ambition de tout géomètre synthétique vise à mettre entre parenthèses, si ce n'est éliminer, toute trace d'exposition symbolique. Mais la puissance d'engendrement de la pensée analytico-algébrique est telle que, pour d'autres fibrés principaux que celui de groupe $\mathrm{SO}(2)$, de nombreux invariants dans la théorie de Cartan du problème d'équivalence entre structures géométriques s'introduisent *sans incarnation géométrique évidente*. □

Plus loin, Gauss discute du *signe* qu'il faut affecter à la mesure de courbure d'une surface (redéfinie dans le prochain paragraphe), et il montre qu'un tel signe peut être déterminé en examinant si la disposition relative d'une paire de segments est préservée, ou inversée.

> La position de la figure tracée sur la surface sphérique peut être ou semblable ou opposée (inverse) à celle de la figure qui lui correspond sur la surface courbe ; le premier cas a lieu lorsque deux lignes sur la surface courbe partant du même point et dans deux directions différentes, mais non opposées, sont représentées sur la surface sphérique par deux lignes placées semblablement, c'est-à-dire lorsque l'image de la ligne située vers la droite est aussi à droite ; le second cas, lorsque c'est le contraire qui a lieu. GAUSS, [**181**], 14–15

Mais comme en général la courbure des surfaces est variable, lorsqu'on veut estimer quantitativement la mesure de courbure contenue dans une certaine région finie de la surface, un problème imprévu de topologie de l'espace s'interpose, analogue mais géométriquement plus complexe, au problème du signe d'une fonction réelle.

> Le signe positif ou négatif dont nous affectons la *mesure* de la courbure d'une figure infiniment petite d'après la position de cette figure, nous l'étendons aussi à la courbure intégrale d'une figure finie sur la surface courbe. Toutefois, si nous voulions embrasser ce sujet dans toute sa généralité[20] certains éclaircissements seraient nécessaires. GAUSS, [**181**], 15

Scholie. À cause d'une question aussi anodine que le découpage d'une région bidimensionnelle en sous-régions dans lesquelles une certaine quantité — ici la courbure de Gauss — est ou bien strictement positive, ou bien strictement négative, ou bien nulle, on entre incidemment dans le domaine de recherche absolument autonome des ensembles de niveaux de fonctions absolument *quelconques*. La thèse d'*ouverture* pour les mathématiques, maintes fois défendue ici, s'illustre alors comme éclatement de questionnements multiples coprésents. Une véritable phénoménologie, non pas seulement des pratiques, mais aussi des actes d'interrogation éprouvés par le sujet mathématicien, non pas seulement d'un point de vue cognitif, mais aussi du point de vue des structures de la pensée, serait à inventer, en tant qu'une telle phénoménologie pourrait être encadrée par quelques principes universels du questionnement mathématique. □

En tout cas ici, au début de ses *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gauss dépense une certaine énergie textuelle à exprimer ses efforts de pensée pour comprendre la manière dont le positif et le négatif de la courbure s'entrelacent dans la surface à travers le miroir de la sphère auxiliaire.

> Lorsqu'une figure tracée sur une surface courbe est telle qu'à chacun des points qu'elle comprend il correspond, sur la sphère auxiliaire, des points *différents*, alors nulle ambiguïté. Mais si cette condition n'est pas remplie, il sera nécessaire de faire entrer deux ou plusieurs fois en ligne de compte certaines portions de la surface sphérique, et de là suivant que la similitude sera directe ou inverse, des termes qui s'ajouteront ensemble ou se détruiront partiellement. GAUSS, [**181**], 15

[20] Expression explicite d'une exigence mathématique universelle et reproductible.

> Ce qu'il y aura de plus simple, en pareil cas, sera d'imaginer qu'on ait divisé la figure tracée sur la surface courbe en parties telles, que chacune d'elles, considérée isolément, satisfasse à la condition énoncée tout à l'heure, d'attribuer à chaque partie la courbure qui lui convient, courbure dont la grandeur sera donnée par l'aire de la figure qui lui correspond sur la surface sphérique et dont le signe dépendra de la position même de la figure, et enfin de prendre pour la courbure totale de la figure entière la quantité qu'on obtiendra en ajoutant ensemble les courbures intégrales correspondant à chacune des parties de la figure. GAUSS, [**181**], 15–16

Au total, la somme de la mesure de courbure comprise dans une certaine région $V \subset S$ de la surface sera égale à l'*intégrale de surface* :

$$\int_V \kappa \cdot d\sigma,$$

étendue à V, de la courbure ponctuelle que multiplie l'élément infinitésimal d'aire $d\sigma$ induit sur S par la métrique euclidienne de $\mathbb{R}^3$. Ainsi la notion d'intégrale double pour une fonction dont le signe varie sans restriction élimine-t-elle — grâce à l'emploi sous-jacent de l'infini pour la sommation — toute la difficulté qu'il y avait à penser la complexité des zones de positivité et de négativité de la fonction. En géométrie algébrique complexe, la positivité partielle et la négativité partielle, au sens de Green-Griffiths, des fibrés vectoriels holomorphes de rang $\geqslant 2$, est relativement mal comprise quant à la cohomologie et quant aux directions dans l'espace cotangent. Une stratégie analogue d'élimination provisoire des difficultés par élévation et submersion consiste à tensoriser par une très grande puissance d'un fibré en droites ample, et à faire tendre cette puissance vers l'infini de manière à ce que sa positivité auxiliaire *absorbe* toutes les traces de négativité non comprises dans le fibré vectoriel initial. Autrement dit et d'un point de vue plus général, les difficultés, en mathématiques, sont réellement omniprésentes, et dans des contextes variés, certaines *stratégies d'évitement* sont déployées afin d'apporter au moins quelques réponses partielles à des questions qui ouvrent sur des problèmes d'une trop grande complexité à une époque donnée.

Contrairement à ce qu'on observe chez Riemann, l'ouverture chez Gauss se manifeste rarement, mais dans ce passage, Gauss discute de la manière dont on doit penser le *bord* des régions sur lesquelles on intègre la courbure — bord constitué d'un nombre fini de courbes lisses dans les cas simples.

> Le périmère de la figure tracée sur une surface courbe correspondra toujours, sur la surface sphérique auxiliaire, à une ligne fermée. Que si cette ligne ne se coupe elle-même en aucun point, elle divisera la surface sphérique en deux parties ; la courbure intégrale de la figure sera donnée par l'aire de cette partie, cette aire étant positive ou négative suivant que, par rapport à son périmètre, elle aura une position semblable ou inverse à celle que la figure a elle-même par rapport à son propre périmètre. Mais lorsque cette ligne se coupera elle-même une ou plusieurs fois, elle donnera une figure compliquée, à laquelle cependant on peut attribuer légitimement une aire déterminée, comme s'il s'agissait d'une figure sans nœuds ; et cette aire, convenablement entendue, sera toujours la valeur exacte de la courbure intégrale.
> GAUSS, [**181**], 15–16

En fait, au moment où il finalise son mémoire et où il rédige ce passage, Gauss pense certainement à un résultat qu'il exposera plus loin et qui devint l'un de ses plus célèbres théorèmes :

> La somme des angles d'un triangle formé par des lignes géodésiques sur une surface quelconque, est supérieure à $180°$ si cette surface est concavo-concave, et inférieure à $180°$ si cette surface est concavo-convexe, d'une quantité qui a pour mesure l'aire du triangle sphérique qui lui correspond, d'après les directions des normales, en comptant la surface totale de la sphère pour $720°$. GAUSS, [**181**], 15–16

Autrement dit, sur une surface dont la courbure est ou bien partout positive, ou bien partout négative, si $\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ sont les mesures des angles d'un triangle curviligne $\mathscr{T} = ABC$ découpé sur la surface dont les trois côtés sont des géodésiques, alors on a :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \iint_{\mathscr{T}} \kappa \, d\sigma.$$

On peut aussi deviner dans ce passage qui évoque une ouverture le germe des travaux ultérieurs de Bonnet[21] sur la relation entre la topologie globale des surfaces à bord et la courbure intégrée[22].

[21] En 1848, Ossian Bonnet a généralisé un théorème de Gauss relatif à l'aire d'un triangle géodésique (*cf.* Libermann, [**279**]). Pour une courbe C tracée sur une surface S, il définit en un point p de C la *courbure géodésique* $\frac{1}{\rho_g}$ de C comme étant la courbure, au point p, de la projection orthogonale de C sur le plan tangent à S en p ; pour une géodésique, on a donc automatiquement $\frac{1}{\rho_g} = 0$ en tout point. Si $\mathscr{U}$ est une portion de S limitée par une courbe *fermée* $C \subset S$, Bonnet établit la formule :

$$\int_C d\omega - \int_C \frac{ds}{\rho_g} = \iint_{\mathscr{U}} \kappa \, d\sigma,$$

où κ est la courbure de Gauss, où $d\sigma$ est l'élément d'aire de S et où ω est l'angle que fait la tangente à C avec une direction qui reste fixe par transport parallèle.

[22] L'importance de la formule 'locale' de Bonnet provient du fait qu'elle a effectivement été généralisée au vingtième siècle en une formule globale (*cf.* à nouveau Libermann, [**279**]). Soit S une surface orientable, compacte et sand bord. En appliquant la formule de

Toutefois, même s'il mentionne des ouvertures coprésentes au champ interrogatif de la théorie des surfaces, Gauss doit choisir de s'écarter de ces questions qui se rapportent en fait à d'autres branches futures de la topologie et de la géométrie en général.

> Au surplus, nous croyons devoir réserver pour une autre occasion des explications plus amplement développées, concernant les figures envisagées au point de vue le plus général. GAUSS, [**181**], 16

Exigence, donc, proprement gaussienne, de penser les domaines découpés sur les surfaces *de la manière la plus générale possible*, la question reste d'actualité en tant que l'approfondissement de la notion de lieu concerne l'histoire de la Topologie.

Définition géométrique de la courbure de Gauss. Si donc $\mathbf{n}(q)$ est le vecteur unitaire normal à la surface S en l'un de ses points quelconque q, Gauss le *transporte* systématiquement à l'origine du système des coordonnées : telle est la fameuse *application de Gauss*, qui décalque sur une sphère auxiliaire pure Σ la variation normale au second ordre de toute surface S.

Pour une région quelconque $V_\varepsilon(p)$ délimitée autour du point p dans la surface qui se rétrécit autour de p lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0, l'ensemble des extrémités des vecteurs $\mathbf{n}(q)$ pour tous les points $q \in V_\varepsilon(p)$ décrit alors une certaine région $\mathbf{n}\big(V_\varepsilon(p)\big)$ sur la sphère auxiliaire Σ. Avec ces deux régions $V_\varepsilon(p)$ et $\mathbf{n}\big(V_\varepsilon(p)\big)$, la *courbure de Gauss* de la surface au point p est définie comme étant la limite, quant ε tend vers 0, du quotient de l'aire infinitésimale image par l'aire infinitésimale initiale :

$$\kappa(p) := \lim_{V_\varepsilon(p)\to p} \frac{\text{aire}\,\big[\mathbf{n}\big(V_\varepsilon(p)\big)\big]}{\text{aire}\,V_\varepsilon(p)},$$

de manière exactement analogue à la définition connue pour les courbes. On peut prendre par exemple comme région $V_\varepsilon(p)$ simplement l'intersection $V_\varepsilon(p) := \mathbb{B}_\varepsilon(p) \cap S$ de la surface avec la boule dans $\mathbb{R}^3$ de rayon ε et de centre p :

$$\mathbb{B}_\varepsilon(p) := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 < \varepsilon^2\big\}.$$

Bonnet à chaque triangle d'une triangulation de S, on obtient ce qu'on appelle maintenant le *Théorème de Gauss-Bonnet* :

$$\iint_S \kappa\, d\sigma = 2\pi\,(n_2 - n_1 + n_0),$$

où n_2, n_1 et n_0 sont, respectivement, le nombre de triangles, d'arêtes et de sommets de la triangulation. Dans cette relation d'égalité, le premier membre étant visiblement indépendant de la triangulation, il en découle que le second l'est aussi. En fait, le nombre entier $\chi(S) := n_2 - n_1 + n_0$, appelé aujourd'hui *caractéristique d'Euler-Poincaré* de S, ne dépend que de la topologie de S, et non de sa métrique infinitésimale. Une telle relation fondamentale entre la géométrie différentielle et la topologie algébrique a reçu ultérieurement de très nombreuses extensions et généralisations.

En vérité, la limite — quand elle existe, par exemple lorsque la surface est de classe au moins $\mathscr{C}^2$ —, ne dépend pas de la forme de la région $V_\varepsilon(p)$ qui rétrécit autour de p, fait qui peut et qui doit être démontré. Bien entendu, Gauss raisonne directement en termes d'infinitésimaux, ayant à l'esprit que les différences de forme entre éléments infimes de surface s'évanouissent dans l'infiniment petit grâce à la présence du quotient. De plus incidemment, Gauss sait qu'une formule analytique quantitative va réaliser sous peu cette définition géométrique, à savoir d'un point de vue plus métaphysique : le premier moment géométrique de la définition sait par avance qu'il va être dépassé dialectiquement par un calcul d'explicitation qui rendra immédiatement visible une indépendance vis-à-vis de la forme.

Scholie. Bifurcations possibles, ici, pour la pensée structurante : ou bien on choisit de spécifier une forme simple de voisinages V_ε en des termes qui peuvent être définis géométriquement, et on démontre ensuite éventuellement aussi qu'une et une seule quantité de courbure serait obtenue avec d'autres régions de forme quelconque, ou bien on choisit d'emblée la généralité dans la définition, mais on doit alors établir rapidement que le résultat existe indépendamment de la forme de la région. En tout état de cause, la limite s'avère plus complexe qu'en dimension 1, où le dx horizontal, simple segment infinitésimal, a un bord constitué de deux points seulement. Donc d'un point de vue général, la pensée structurante est-elle en permanence confrontée à des choix de présentation qui ne sont pas métaphysiquement équivalents, bien que techniquement interchangeables ; c'est là l'un des aspects les plus labyrinthiques des mathématiques qui contribue régulièrement à parsemer d'embûches supplémentaires l'appropriation intuitive et la compréhension des théories. □

8. Deux expressions analytiques extrinsèques de la courbure des surfaces

Courbure des surfaces graphées. On cherche maintenant — poursuit Gauss — une formule propre à exprimer la mesure de la courbure en chaque point d'une surface courbe. Il s'agit de calculer, en termes des éléments analytiques différentiels de la surface, un quotient de deux aires infinitésimales, et donc évidemment, il est nécessaire de commencer par calculer effectivement ces aires. Parmi les deux représentations possibles : graphée ou implicite, d'une surface dans l'espace, c'est la représentation graphée qui fournit la formule renfermant le nombre minimal d'éléments, et donc, c'est par cette formule que l'on commencera.

L'élément de surface $V_\varepsilon(p)$ choisi par Gauss sur la surface est un simple triangle infinitésimal non dégénéré de sommets p, $p + dp$ et $p + \delta p$ sur la surface, où dp et δp sont deux vecteurs infinitésimaux tangents en p qui ne sont pas colinéaires. En projection horizontale sur le plan des (x, y), ces trois points forment un triangle non dégénéré dont les coordonnées seront notées :

$$p^\pi := (x,\, y), \quad p^\pi + dp^\pi := (x+dx,\, y+dy), \quad p^\pi + \delta p^\pi := (x+\delta x,\, y+\delta y).$$

Comme le montrent des raisonnements pythagoriciens élémentaires, l'aire (infinitésimale) du triangle infinitésimal de sommets p, $p + dp$ et $p + \delta p$ est dans une relation de proportionalité simple avec l'aire (infinitésimale) du triangle projeté de sommets p^π, $p^\pi + dp^\pi$ et $p^\pi + \delta p^\pi$, le coefficient de proportionalité étant simplement égal à la troisième composante Z du vecteur normal.

> En appelant $d\sigma$ l'aire d'un élément de cette surface, $Z\, d\sigma$ sera l'aire de la projection de cet élément sur le plan des coordonnées x et y ; et de même, si $d\Sigma$ est l'aire de l'élément correspondant sur la surface sphérique auxiliaire, $Z\, d\Sigma$ sera l'aire de la projection de cet élément sphérique sur le même plan ; et il est manifeste que ces projections auront entre elles les mêmes relations de grandeur et de position que les éléments eux-mêmes. GAUSS, [**181**], 16–17

Autrement dit, pour la surface infinitésimale initiale et pour sa surface image sur la sphère auxiliaire, *les deux coefficients de proportionalité entre l'aire et son aire projetée :*

$$\frac{d\Sigma^\pi}{d\Sigma} = \frac{d\sigma^\pi}{d\sigma} = Z$$

sont égaux entre eux et égaux à la troisième composante Z de leur vecteur normal commun. Cette circonstance est très favorable, car pour calculer la courbure définie par Gauss comme quotient d'aires infinitésimales :

$$\kappa = \frac{d\Sigma}{d\sigma} = \frac{d\Sigma^\pi}{d\sigma^\pi},$$

on peut se ramener, grâce à une identité algébrico-géométrique dont la connaissance intuitive ou pratique remonte vraisemblablement jusqu'aux mathématiques de la Préhistoire[23] :

$$\tfrac{a}{b} = \tfrac{c}{d} \Longrightarrow \tfrac{a}{c} = \tfrac{b}{d},$$

à calculer seulement les quotients des aires infinitésimales *projetées :*

$$\kappa = \frac{d\Sigma^\pi}{d\sigma^\pi}.$$

À un signe près qui dépend seulement d'un choix d'orientation, la formule qui exprime l'aire, dans le plan des (x, y), de tout triangle formé par trois points est bien connue elle aussi.

> Considérons maintenant un élément triangulaire de la surface courbe, et supposons que les coordonnées des trois points qui forment la projection de cet élément sont :
>
> $$\begin{array}{cc} x, & y, \\ x+dx, & y+dy, \\ z+\delta z, & z+\delta z; \end{array}$$
>
> le double de l'aire de ce triangle sera alors exprimé par la formule :
>
> $$dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x,$$
>
> expression positive ou négative, suivant que la position du côté qui se dirige du premier point au troisième, comparée à celle du côté qui se dirige du premier au second, est semblable ou inverse à la position de l'axe coordonné y par rapport à l'axe coordonné x. GAUSS, [**181**], 17

La *même* formule s'appliquera alors aussi immédiatement pour calculer le double de l'aire du triangle formé par les trois points projetés sur l'espace des (X, Y) du triangle infinitésimal correspondant :

$$\begin{array}{cc} X, & Y, \\ X+dX, & Y+dY, \\ Z+\delta Z, & Z+\delta Z, \end{array}$$

tracé sur la sphère auxilaire, à savoir :

$$dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X.$$

[23] Telle est en fin de compte implicitement ici, l'une des thèses défendue dans ce mémoire : chaque principe élémentaire des mathématiques renvoie à une métaphysique propre que l'on peut réveiller à tout instant dans la pensée, comme s'il existait une phénoménologie de la mobilisation des aspects historico-philosophiques qui enrichirait constamment les raisonnements techniques. En effet, l'échange de numérateur et de dénominateur à travers l'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ est un acte archaïque, très ancien dans l'histoire humaine des mathématiques, présent peut-être sans traces écrites et sans formalisation dans une tradition orale disparue, et ce mouvement atomique de 'calcul' n'en possède pas moins une importance cruciale pour accéder à la formule explicite $\kappa = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}$ qui exprime la courbure d'une surface graphée $z = z(x, y)$, *cf.* ce qui va suivre. Autrement dit, l'élémentarité la plus antique rayonne dans les mathématiques les plus sophistiquées.

La mesure de la courbure sera donc, en ce point de la surface courbe :

$$\kappa = \frac{dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X}{dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x}.$$

GAUSS, [**181**], 17

Prémices d'élimination différentielle systématique. Cette dernière formule est encore loin d'expliciter la courbure en termes de la fonction graphante $z(x, y)$, puisqu'elle incorpore encore l'élément d'arbitraire que constitue l'aire d'un triangle infinitésimal quelconque dirigé par les deux vecteurs dp^π et δp^π. Si donc on admet que la courbure ne dépend pas de la région infinitésimale choisie sur la surface, on peut prévoir que le numérateur $dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X$ devrait s'avérer divisible par le dénominateur $dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x$, le facteur de proportionalité *rémanent* se réduisant à être une *fonction* déterminée des deux variables x et y, celle que l'on aimerait connaître. Cet argument anticipateur montre donc qu'un principe métaphysique de simplification et d'annihilation devrait s'exercer ici. La dynamique du calcul est donc dominée et dirigée par les principes de la pensée spéculative.

En effet, les deux différentielles d et δ appliquées aux deux composantes horizontales X et Y du vecteur normal $\mathbf{n}$ donnent, si on les écrit systématiquement toutes les quatre :

$$\begin{aligned}
dX &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) dy, \\
dY &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) dy, \\
\delta X &= \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right) \delta x + \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right) \delta y, \\
\delta Y &= \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right) \delta x + \left(\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \delta y.
\end{aligned}$$

Scholie. Dans toutes ses approches de la réalité mathématique du calcul, Gauss procède en effet d'une manière systématique et par *complétude exploratoire*. On peut dire que le principe d'une systématicité décidé *a priori* est une saine *méthode* de recherche en mathématique, si ce n'est que la complétude des parcours demande toujours un travail considérable. □

Quand on calcule alors le numérateur de la courbure :

$$\begin{aligned}
dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X = \big(X_x\, dx + X_y\, dy\big) \cdot \big(Y_x\, \delta x + Y_y\, \delta y\big) - \\
- \big(Y_x\, dx + Y_y\, dy\big) \cdot \big(X_x\, \delta x + X_y\, \delta y\big),
\end{aligned}$$

deux produits de deux termes sont soustraits l'un à l'autre ; rien que de très élémentaire pour tout calculateur expérimenté, mais il est toutefois nécessaire d'interroger les symétries formelles du résultat afin de savoir si l'intuition d'anticipation va réellement se confirmer, *i.e.* afin de savoir si ce numérateur est effectivement multiple de l'aire infinitésimale $dx \cdot \delta y - dy \cdot \delta x$ lorsqu'on développe lesdits produits :

$$\begin{aligned} dX \cdot \delta Y - dY \cdot \delta X &= \underline{X_x\, Y_x\, dx\delta x}_{\circ} + X_x\, Y_y\, dx\delta y + X_y\, Y_x\, dy\delta x + \underline{X_y\, Y_y\, dy\delta y}_{\circ\circ} - \\ &\quad - \underline{Y_x\, X_x\, dx\delta x}_{\circ} - Y_x\, X_y\, dx\delta y - Y_y\, X_x\, dy\delta x - \underline{Y_y\, X_y\, dy\delta y}_{\circ\circ} \\ &= \big(X_x\, Y_y - X_y\, Y_x\big) \cdot \big(dx\, \delta y - dy\, \delta x\big). \end{aligned}$$

Ainsi comme on aura su l'anticiper, l'expression de la courbure se change-t-elle — *irréversiblement pour ce qui concerne l'acquisition corrélative de connaissance mathématique* — en une expression maintenant purement fonctionnelle et parfaitement déterminée :

$$\kappa = X_x \cdot Y_y - X_y \cdot Y_x,$$

dans laquelle a disparu tout l'arbitraire du triangle infinitésimal. Cette fois-ci en effet, on ne voit plus que des dérivées partielles d'ordre 1 des deux composantes X et Y du vecteur normal **n**. Cette expression de la courbure est donc potentiellement définitive. Toutefois, en mathématiques, la question se pose en permanence de savoir si un résultat obtenu est complet et définitif.

$\boxed{\textit{Nihil actum reputans si quid superesset agendum}}$,

telle était la devise *métaphysique* de Gauss, devise qui exprime notamment l'exigence permanente de s'*interroger en pensée* sur l'achèvement des travaux de calcul.

Or puisque X et Y s'exprimaient en fait en termes de la fonction graphante $z(x,y)$, il est clair que le calcul n'est pas achevé, et par conséquent, il reste encore à insérer ces formules et aussi, à simplifier, à symétriser et à harmoniser les formules qu'on sera susceptible d'obtenir. Mais Gauss ne procède pas de manière directe pour effectuer ce calcul. Pour faire face à une multiplicité de dérivées partielles d'ordre 2, il introduit comme Euler et Lagrange le faisaient régulièrement des *lettres* avec lesquelles il va raisonner algébriquement et organiser les calculs de manière synoptique : il faut y voir les prémices du calcul d'élimination beaucoup plus considérable qu'il présentera dans la suite de son mémoire afin d'établir que la courbure s'exprime en fonction de la métrique infinitésimale *intrinsèque*.

En posant comme ci-dessus :

$$\frac{dz}{dx} = t, \qquad \frac{dz}{dy} = u,$$

et en outre :

$$\frac{d^2z}{dx^2} = T, \qquad \frac{d^2z}{dxdy} = U, \qquad \frac{d^2z}{dy^2} = V,$$

ce qui équivaut à :

$$dt = T\,dx + U\,dy, \qquad du = U\,dx + V\,dy,$$

nous aurons, d'après des formules données précédemment :

$$X = -t\,Z, \quad Y = -u\,Z, \quad (1 + t^2 + u^2)\,Z^2 = 1,$$

et par suite :

$$\begin{aligned} dX &= -Z\,dt - t\,dZ, \\ dY &= -Z\,du - u\,dZ, \\ (1 + t^2 &+ u^2)\,dZ + Z\,(t\,dt + u\,du) = 0, \end{aligned}$$

ou bien :

$$\begin{aligned} dZ &= -Z^3\,(t\,dt + u\,du), \\ dX &= -Z^3\,(1 + u^2)\,dt + Z^3\,tu\,du, \\ dY &= Z^3\,tu\,dt - Z^3\,(1 + t^2)\,du, \end{aligned}$$

et de là on tire :

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dx} &= Z^3\big[-(1 + u^2)\,T + tu\,U\big], \\ \frac{dX}{dy} &= Z^3\big[-(1 + u^2)\,U + tu\,V\big], \\ \frac{dY}{dx} &= Z^3\,\big[tu\,T - (1 + t^2)\,U\big], \\ \frac{dY}{dy} &= Z^3\,\big[tu\,U - (1 + t^2)\,V\big]. \end{aligned}$$

En substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il vient :

$$\kappa = Z^6(TV - U^2)(1 + t^2 + u^2) = Z^4(TV - U^2) = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)}.$$

GAUSS, **[181]**, 18

Scholie. Fluidité enchaînée d'une longue phrase de calculs en synthèse : le style de présentation frappe de netteté quant aux opérations sous-entendues qui sont laissées à la compréhension du lecteur. Or excepté pour le résultat final, Gauss *élimine ici intentionnellement toute fraction rationnelle et toute trace de division*. En effet, au lieu de calculer directement les dérivées partielles par rapport à x et à y des deux fractions :

$$\pm X = \frac{z_x}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}} \qquad \text{et} \qquad \pm\,Y = \frac{z_y}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^{1/2}},$$

pour en soustraire ensuite les paires croisées multipliées entre elles — ce qui conduirait à des expressions fort développées[24]et quelque peu inélégantes en raison de la présence d'une racine carrée au dénominateur —, Gauss travaille en éliminant ledit dénominateur grâce à l'introduction d'une indéterminée auxiliaire Z satisfaisant :

$$(1 + t^2 + u^2)\, Z^2 = 1,$$

et qui apparaîtra au final élevée à une puissance *paire*, de telle sorte que toute racine carrée présente implicitement dans les calculs intermédiaires disparaîtra. Non seulement le calcul est plus économique ainsi, mais il s'articule aussi d'une manière exclusivement polynomiale, donc plus satisfaisante pour l'esprit du calculateur. On notera aussi au passage que l'ambiguïté du signe commun $\pm$ de X et de Y causée initialement par le choix d'une orientation de la normale d'un côté ou de l'autre de la surface s'évanouit dans la formule de départ $\kappa = X_x\, Y_y - X_y\, Y_x$, puisque l'on a $\pm \cdot \pm = +$ où la multiplication s'effectue ligne à ligne. □

Courbure des surfaces en représentation implicite. Dans un second moment, Gauss cherche à déduire de cette première formule une deuxième formule pour la courbure, valable lorsque la surface est représentée par une équation implicite de la forme :

$$0 = W(x, y, z),$$

pour une certaine fonction $W = W(x, y, z)$.

> La formule donnée précédemment pour la mesure de courbure est la plus simple de toutes les formules générales, en ce qu'elle ne renferme que cinq éléments ; nous arriverons à une formule plus compliquée, renfermant neuf éléments, si nous voulons employer la première des méthodes que nous avons dit être propre à étudier les caractères des surfaces. GAUSS, [**181**], 21

Ainsi, dans les notations de Gauss qui consistent à introduire des lettres spécifiques et différenciées pour désigner les dérivées partielles des fonctions et à travailler *algébriquement* avec ces lettres, la première différentielle

[24] Un calcul direct donnerait en effet :

$$\pm X_x = \frac{z_{xx} + z_{xx}\, z_y^2 - z_x\, z_y\, z_{xy}}{\left(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\right)^3}, \qquad \pm X_y = \frac{z_{xy} + z_{xy}\, z_y^2 - z_x\, z_y\, z_{yy}}{\left(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\right)^3},$$

$$\pm Y_x = \frac{z_{xy} + z_{xy}\, z_x^2 - z_x\, z_y\, z_{xx}}{\left(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\right)^3}, \qquad \pm Y_y = \frac{z_{yy} + z_{yy}\, z_x^2 - z_x\, z_y\, z_{xy}}{\left(\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\right)^3},$$

quantités qu'il faudrait ensuite multiplier par paires puis soustraire pour simplifier finalement $X_x\, Y_y - X_y\, Y_x$. Il se trouve que l'on devrait réaliser que le numérateur est divisible par $1 + z_x^2 + z_y^2$, ce que Gauss réussit à faire voir de manière directe.

$dW = W_x\,dx + W_y\,dy + W_z\,dz$ de la fonction définissante W sera écrite :

$$dW = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

En poursuivant ces notations, il est alors judicieux d'introduire la collection de toutes les dérivées partielles du second ordre de la fonction W, puisqu'il semble clair, du point de vue de la pensée anticipante, que la formule de la courbure en termes de W va les faire intervenir :

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z} = P'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial z} = Q'', \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = R''.$$

Évidemment, ces dérivées partielles interviennent comme coefficients des trois 1-formes dP, dQ, dR, à savoir on a :

$$\begin{aligned} dP &= P'\,dx + R''\,dy + Q''\,dz, \\ dQ &= R''\,dx + Q'\,dy + P''\,dz, \\ dR &= Q''\,dx + P''\,dy + R'\,dz, \end{aligned}$$

collection tabulaire de neuf termes dont les éléments diagonaux n'incorporent qu'un seul 'prime', les éléments extra-diagonaux en comportant deux et étant égaux un à un symétriquement par rapport à la diagonale principale.

Scholie. Ainsi s'explique le fait que la lettre P'' a été choisie intentionnellement pour correspondre à la dérivée partielle seconde de W par rapport à y et z, et non à celle par rapport à x et y, comme on aurait pu le croire si l'ordre lexicographique commun choisi pour les fonctions P', Q', R' et pour les variables x, y, z avait été à nouveau appliqué pour les fonctions P'', Q'', R'' : chez un calculateur prodige, la micro-organisation algébrique fourmille de choix subtils non notifiés au lecteur par des explications langagières ; car le jeu avec des calculs délicats exige une pensée autonome riche de principes non écrits.

En outre, tout calcul exprime à chaque étape un dynamisme de mobilité potentielle qui doit chercher à se *manifester* et à se *déclencher* à travers une organisation synoptique, structurée et harmonieuse de ses éléments atomiques. Les choix de notation chez Gauss sont donc gouvernés par certaines micro-structures formelles qu'il aura par exemple découvertes lors d'explorations manuscrites. □

L'objectif est maintenant de *traduire* en termes de la fonction W la formule pour la courbure obtenue dans le cas d'un graphe, à savoir la formule : $\kappa = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}$. De la relation différentielle déduite de l'équation $0 = W$ par différentiation :

$$0 = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

on tire par identification que si la surface est imaginée comme représentée aussi par une équation graphée de la forme : $z = z(x, y)$ de telle sorte que l'équation suivante :

$$0 \equiv W\big(x, y, z(x, y)\big)$$

soit satisfaite identiquement par rapport à x et y, alors en dérivant cette identité par rapport à x et à y, on voit que les deux dérivées partielles du second ordre de la fonction z sont données par :

$$z_x = t = -\tfrac{P}{R} = -\tfrac{W_x}{W_z} \qquad \text{et} \qquad z_y = u = -\tfrac{Q}{R} = -\tfrac{W_y}{W_z},$$

lorsque l'argument (x, y, z) appartient à la surface.

Maintenant, puisqu'on a $t = -\frac{P}{R}$, nous obtenons, par la différentiation :

$$\begin{aligned} R^2\, dt &= -R\, dP + P\, dR \\ &= (PQ'' - RP')\, dx + (PP'' - RR'')\, dy + (PR' - RQ'')\, dz, \end{aligned}$$

ou bien, en éliminant dz à l'aide de l'équation $P\, dx + Q\, dy + R\, dz = 0$:

$$\begin{aligned} R^3\, dt = (-R^2\, P' + 2\, PRQ'' - P^2\, R')\, dx + \\ (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2 R')\, dy. \end{aligned}$$

GAUSS, [**181**], 22

En effet, sur la surface graphée, seules dx et dy sont des différentielles internes, la troisième dz s'exprimant nécessairement en fonction d'elles ; aussi cette étape de calcul est-elle *nécessaire*, nullement entachée d'indécision.

Scholie. Micro-organisation gaussienne non explicitée : l'ordre alphabétique entre les trois lettres P, Q, R passe en seconde position par rapport à l'ordre concernant le nombre de 'primes'. □

On a de même :

$$\begin{aligned} R^3\, du = (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2 R'')\, dx + \\ + (-R^2 Q' + 2\, QRP'' - Q^2 R')\, dy. \end{aligned}$$

Et de là nous concluons :

$$\begin{aligned} R^3 T &= -R^2 P' + 2\, PRQ'' - P^2 R', \\ R^3 U &= PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2 R'', \\ R^3 V &= -R^2 Q' + 2\, QRP'' - Q^2 R. \end{aligned}$$

GAUSS, [**181**], 22

Scholie. Ici, l'expression « on a de même » sous-entend qu'il y a des calculs entièrement analogues lorsqu'on considère dz_y au lieu de dz_x. Du point de vue du mathématicien professionnel, accepter la non explicitation d'un ou de plusieurs calculs fait partie des règles du jeu communément admises, surtout lorsque le calcul sous-entendu présente des similitudes directes et évidentes avec un calcul que l'auteur a déjà explicité en détail. Cette « règle du jeu » appelle de nombreux commentaires.

Dans son mémoire, Gauss ne cache essentiellement aucun calcul, contrairement à de nombreuses autres sources modernes des mathématiques, dans lesquelles il est de bon ton de faire admettre à son lecteur que certains calculs intermédiaires sont sans intérêt et en quelque sorte indignes d'être explicités ou plus encore publiés, notamment après l'avènement du formalisme de la géométrie différentielle globale depuis les années 1950–60. Ce fait pose une véritable question philosophique quant au *statut* littéral accordé au calcul dans les mathématiques, puisque qu'il prend le contrepied des disciplines littéraires pour lesquelles *tout le parcours de la pensée* doit s'écrire dans la continuité langagière d'une *complétude*. Les actes mathématiques seraient-ils trop complexes et trop nombreux pour que les pratiques de rédaction aient convergé, depuis des décennies, vers une abréviation opaque ?

D'un côté, la ré-effectuation complète et le re-parcours total des calculs est absolument nécessaire afin de *vérifier* la véracité d'un résultat et de *contrôler* qu'aucune erreur ne se cache. Souvent, de nombreux calculs intermédiaires non explicités sont soumis à des tensions formelles qui forcent les résultats finaux à être « habillés » d'harmonies internes qui sont *suffisantes* comme outils de contrôle de véracité, et dans de tels cas, le lecteur sait qu'il peut se dispenser d'avoir à ré-effectuer tout le parcours de l'auteur.

Mais dans d'autres cas, certains arguments cruciaux qui ne sont visibles ni *a priori* ni *a posteriori*, se jouent dans la conduite des calculs et se placent en des endroits spécifiques qu'il est difficile de localiser au moment de la recherche et des premières découvertes — c'est-à-dire *avant* qu'un irréversible de connaissance synthétique partagé par une communauté mathématique ne scelle définitivement l'acceptation d'un résultat —, et alors dans de telles circonstances, tous les calculs doivent être rigoureusement re-parcourables.

Ces paradoxes et ces difficultés soulèvent en définitive la question de savoir quel *statut* on devrait philosophiquement accorder au calcul en tant que sa non-effectuation partielle demeure conventionnelle, ce qui montre aussi qu'il y a une *localité spatio-temporelle* de nombreux théorèmes démontrés par les mathématiciens contemporains. □

En substituant ces valeurs dans la formule du $\S VII^{25}$, nous obtenons pour la mesure de la courbure κ l'expression symétrique suivante :

$$\begin{aligned}(P^2+Q^2+R^2)\,\kappa = P^2\,(Q'R'-P''^2)+Q^2(P'R'-Q''^2)+\\ +R^2(P'Q'-R''^2)+2\,QR\,(Q''R''-P'P'')+\\ +2\,PR\,(P''R''-Q'Q'')+2\,PQ\,(P''Q''-R'R'').\end{aligned}$$

GAUSS, **[181]**, 22

9. Genèse des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*

Cinq concepts novateurs. En ce qui concerne tant la maîtrise des calculs que la richesse des idées conceptuelles, Stäckel suggère dans [**415**] que le mémoire des *Disquisitiones Generales circa superficies curvas* long seulement d'une cinquantaine de pages est comparable aux 470 pages des *Disquisitiones arithmeticæ*. En effet, les recherches de Gauss en géométrie l'ont conduit à concevoir, à introduire et à ouvrir un champ entièrement nouveau, à savoir l'étude intrinsèque des sous-variétés de l'espace, et outre une dizaine de théorèmes profonds et mûrs, on trouve dans son mémoire cinq concepts novateurs[26] :

1) l'application de Gauss, qui transporte les vecteurs unitaires normaux à une surface au centre d'une sphère auxiliaire de rayon 1 ;

2) la notion géométrique et analytique de *mesure de courbure*, définie comme quotient des aires infinitésimales (orientées) sur la surface et sur une sphère auxiliaire ;

3) la courbure totale, intégrale de surface de la courbure ponctuelle sur n'importe quelle région de la surface ;

4) la variation angulaire Θ d'une paramétrisation de la surface en coordonnées (u, v), à savoir la 1-forme différentielle :

$$\Theta := \frac{1}{2\sqrt{EG - F^2}} \left(\frac{F}{E}\, dE + E_v\, du - G_u\, dv - 2\, F_u\, du \right);$$

5) les coordonnées géodésiques normales dans lesquelles existent deux familles parallèles de géodésiques qui sont mutuellement orthogonales en tout point, ce qui s'exprime, en termes des coefficients métriques, par les normalisations suivantes :

$$E \equiv 1, \qquad F \equiv 0, \qquad \text{d'où :} \quad ds^2 = du^2 + G\, dv^2.$$

En tout cas, l'historiographie contemporaine s'est beaucoup interrogée sur le *temps long* de la genèse gaussienne et sur les circonstances de l'apparition de cette théorie entièrement nouvelle. L'exigence — grandissante avec l'âge — d'achèvement et de maturité dans l'obtention de résultats que

---

[25] — à savoir dans la formule :

$$\kappa = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2} = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1 + z_x^2 + z_y^2)^2} \text{ —}$$

[26] *Cf.* Dombrowski, [**134**].

Gauss s'imposait, l'a conduit à différer pendant près d'une quinzaine d'année toute publication intermédiaire. En reprenant des éléments transmis notamment par Stäckel, Dombrovski et Keyszig, ce sera l'occasion d'expliciter les tensions mathématiques et les causalités philosophiques qui ont dirigé Gauss vers l'obtention de son *Theorema Egregium*. Comme convenu, l'objectif des analyses se focalisera ensuite principalement sur l'examen des *calculs* qui ont été conduits par Gauss.

Lien avec un mémoire d'Euler. On trouve, dans le § VIII des *Disquisitiones generales circa superficies curvas* un théorème classique qui fournit une autre interprétation géométrique de la courbure de Gauss.

> *La mesure de la courbure en chaque point d'une surface est égale à une fraction dont le numérateur est l'unité, et dont le dénominateur est le produit des deux rayons de courbure extrêmes dans les sections par des plans normaux.* GAUSS, [**181**], 22

En fait, on sait que dès 1813, Gauss était déjà en possession de cette formule :

$$\kappa = \frac{1}{r_{\mathsf{min}} \cdot r_{\mathsf{max}}}$$

qui égale la mesure de la courbure d'une surface en l'un de ses points à l'inverse du produit entre les deux rayons de courbure principaux en ce point, extrema découverts, introduits et étudiés auparavant par Euler.

> PROBLÈME. *Une surface dont la nature est connue étant coupée par un plan quelconque, déterminer la courbure de la section, qui en est formée.* [$\cdots$] Supposons donc qu'on tire par la différentiation[27] $dz = p\,dx + q\,dy$, de sorte que $p = \left(\frac{dz}{dx}\right)$ et $q = \left(\frac{dz}{dy}\right)$. [$\cdots$] Soit $z = \alpha\, y - \beta\, x + \gamma$ l'équation qui détermine le plan. [$\cdots$] Alors le rayon osculateur de la section sera exprimé en sorte :
>
> $$-\frac{(\alpha\alpha + \beta\beta - 2\alpha q + 2\beta p + (\alpha p + \beta q)^2 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}{\left((\alpha - q)^2\left(\frac{dp}{dx}\right) + (\beta + p)^2\left(\frac{dq}{dy}\right) + 2(\alpha - q)(\beta + p)\left(\frac{dp}{dy}\right)\right)\sqrt{1 + \alpha\alpha + \beta\beta}}.$$
>
> [$\cdots$] *Réflexion.* Dès qu'on connoit les rayons osculateurs pour trois sections différentes, ceux pour toutes les autres en sont parfaitement connues. [$\cdots$] *Réflexion.* Quelle que soit la courbure d'un élément, les deux sections, dont l'une contient la plus grande courbure et l'autre la plus petite, sont toujours normales entr'elles. EULER, [**153**], 2–4 ; 20–21

Les recherches géométriques d'Euler étaient motivées par ses travaux sur la mécanique du solide et par des problèmes issus du calcul des variations[28]. Ses publications consacrées aux courbes géodésiques tracées sur les surfaces paraissent entre 1728 et 1732, mais c'est surtout le mémoire [**153**] paru à l'académie des scienes de Berlin que la postérité paradigmatique a conservé en mémoire.

27 Euler considère la surface sous la forme d'un graphe $z = z(x, y)$. Pour être concis dans la présentation de la formule, les extraits ciblés sont très légèrement abrégés.

28 *Cf.* Kreyszig, [**254**].

Dans les années 1730, on trouve en effet une série d'articles sur les courbes planes dans lesquels Euler développe l'idée de relier systématiquement les deux coordonnées cartésiennes $x(s)$ et $y(s)$ — où s est une coordonnée par longueur d'arc sur la courbe — à une équation 'naturelle' $r = r(s)$ qui relie le rayon de courbure r au paramètre s. C'est à cette occasion qu'Euler démontre qu'une particule-test massive libre de champ de force sur une surface se déplace toujours le long d'une géodésique. En 1744, il découvrit en appliquant son calcul des variations que la *caténoïde*, à savoir la surface de révolution qu'on obtient par rotation autour de son axe de la chaînette d'équation polaire :

$$\rho = \mathrm{const} \cdot \cosh \theta,$$

est une *surface minimale*, théorie dont les aspects globaux sont encore très actifs aujourd'hui. Ce n'est que plus tard en 1776 (travail publié en 1785) que Meusnier, un élève de Monge, établit que l'annulation de la *courbure moyenne* :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{r_{\mathsf{min}}} + \frac{1}{r_{\mathsf{max}}}\right)$$

est une propriété nécessaire pour qu'une surface de classe au moins $\mathscr{C}^2$ soit d'aire minimale, localement dans l'espace de ses déformations $\mathscr{C}^2$. Ensuite, c'est dans son mémoire de 1760 qu'Euler montra que le rayon de courbure r_θ d'une section normale quelconque à une surface en un point p qui fait un angle θ avec la direction principale minimale est donné par la formule :

$$\frac{1}{r_\theta} = \frac{\cos^2\theta}{r_{\mathsf{min}}} + \frac{\sin^2\theta}{r_{\mathsf{max}}}.$$

> Ces conclusions renferment à peu près tout ce que l'illustre Euler a le premier enseigné sur la courbure des surfaces. GAUSS, [**181**], 20

Cette formule classique due à Euler est habituellement considérée comme l'une des premières contributions à une théorie générale des surfaces, en tant qu'elle propose une mesure de la courbure des surfaces relativement à toutes ses sections par des plans orthogonaux.

> RÉFLEXION. Pour comparer donc les courbures de deux élémens entr'elles, on n'a qu'à chercher pour chacun les sections qui donnent le plus grand et le plus petit rayon osculateur, et si l'on trouve ces deux rayons les mêmes dans l'une et l'autre, on peut prononcer hardiment que ces deux élémens sont doués de la même courbure. Et partant, pour connoitre la véritable courbure d'un élément quelconque de surface, il suffit d'en chercher le plus grand et le plus petit rayon osculateur : puisque ceux de toutes les autres sections en sont déterminés parfaitement, en sorte qu'aucune variété n'y sauroit plus avoir lieu. EULER, [**153**], 21

Scholie. On comprend maintenant mieux pourquoi Gauss prononçait cette appréciation quelque peu sévère « Ces conclusions renferment à peu près tout ce que l'illustre Euler a le premier enseigné sur la courbure des surfaces ». Deux raisons à ce 'jugement mathématique' : 1) la formule $\frac{1}{r_\theta} = \frac{\cos^2\theta}{r_{\mathsf{min}}} + \frac{\sin^2\theta}{r_{\mathsf{max}}}$ est si élémentaire, en comparaison de celles que l'on trouve dans la *vraie théorie proprement bidimensionnnelle des surfaces*, que Gauss est à même, en a peine moins de deux pages (§ VIII des *Disquistiones generales circa superficies curvas*), de la re-démontrer *presque sans calcul*, d'en énoncer les conséquences, et de la rapporter au *vrai* concept de la mesure de courbure qu'il vient d'introduire ; 2) Euler, qui avoue presque une petite réticence de s'autoriser sans plus ample justification à « prononcer hardiment » que la *courbure* d'une surface est parfaitement déterminée seulement par la courbure de paires de courbes orthogonales, n'a en vérité pas rigoureusement respecté la véritable métaphysique de l'*ouverture mathématique conceptuelle*, laquelle aurait commandé, d'après Gauss, de *maintenir fermement ouverte* la question de savoir s'il n'existe pas un concept plus adéquat de courbure qui serait proprement *bidimensionnel*. Il est vrai que la courbure de Gauss des surfaces plongées dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est connue dès que les rayons de courbure extrémaux *dans* $\mathbb{R}^3$ de ses courbes sont connus en chaque point, et donc d'une certaine manière, il est vrai que la métaphysique implicite de la pensée d'Euler, qui consistait à saisir la courbure d'un objet bidimensionnel par la collection de ses sous-objets unidimensionnels librement mobiles, possède un sens mathématique substantiel. N'est-il pas vrai aussi que l'étude des courbes holomorphes entières unidimensionnelles contenues dans des variétés projectives de type général de grand degré et de grande dimension sert à étudier, grâce à ces *courbes algébriques-tests*, la structure interne de ces variétés projectives, et éventuellement aussi, à déterminer la présence de points à coordonnées entières en relation avec l'arithmétique des équations diophantiennes ? N'est-il pas vrai aussi que les travaux de Lie sur les groupes continus de transformations commencent par étudier à fond la théorie des groupes à un terme [*einglidrige Gruppe*], *parce que* la structure d'un groupe quelconque se reflète dans la collection de tous ses sous-groupes à un paramètre — toujours notoirement plus nombreux que les sous-groupes à un nombre $r \geqslant 2$ de termes, puisque nulle condition de fermeture algébrique par crochets n'est exigible lorsque $r = 1$ —, *cf.* notamment l'importance des sous-algèbres de Cartan dans la présentation et l'organisation des travaux de classification par Killing des algèbres de Lie complexes semi-simples.

Autrement dit, la pensée qui inspire Euler procède d'une métaphysique mathématique légitime et toujours actuellement présente dans le développement des mathématiques, métaphysique qui déclare et décide une *option* *naturelle d'étude* face à des objets qui sont réellement complexes, notamment à cause de leur dimension élevée. Mais il n'en reste pas moins que Gauss — quelque peu implicitement puisque les pensées qu'il a certainement développées dans ses *méditations intérieures en recherche*, ne sont nullement (d)écrites — reproche en quelque sorte à Euler sans vraiment le dire de ne pas avoir su maintenir plus *ouverte* la question de la conceptualisation de la courbure, question qui devait se poser fermement dans un champ aussi neuf que la théorie des surfaces. Et en vérité, Gauss avait si fondamentalement raison de s'imposer une telle rigueur dans l'exigence de pensée que sans cela, le caractère *intrinsèque* de la courbure en dimension $\geqslant 2$ serait probablement resté invisible encore pendant quelques décennies, puisque la courbure des courbes n'a de sens qu'en relation avec une dimensionalité ambiante supplémentaire — fin de ce commentaire spéculatif étendu. □

Euler découvrit donc l'orthogonalité des directions principales dans lesquelles le rayon de courbure est minimal et maximal, hors des points qui sont des *ombilics* — terminologie introduite par Monge et passée dans la langue anglo-saxonne contemporaine de la géométrie différentielle — *i.e.* qui satisfont $r_{\mathsf{min}} = r_{\mathsf{max}}$. Ultérieurement, Meusnier a étudié la courbure des sections obliques, et obtenu ce qu'on appelle aujourd'hui classiquement le Théorème de Meusnier : *la courbure en un point p de la section (courbe) $S \cap \Pi_{\theta,\omega}$ d'une surface S par un plan $\Pi_{\theta,\omega}$ faisant un angle ω, où $|\omega| < \frac{\pi}{2}$, avec le plan normal Π_θ repéré par l'angle θ relatif la direction principale minimale et contenant la même droite tangente que Π_θ :*

$$\Pi_\theta \cap T_pS = \Pi_{\theta,\omega} \cap T_pS,$$

est égale au quotient par $\sin\omega$ de la courbure de la section par ce plan normal :

$$\frac{1}{r_{\theta,\omega}} = \frac{1}{\sin\omega}\,\frac{1}{r_\theta} = \frac{1}{\sin\omega}\bigg(\frac{\cos^2\theta}{r_{\mathsf{min}}} + \frac{\sin^2\theta}{r_{\mathsf{max}}}\bigg).$$

Cette formule et d'autres établies par Meusnier lui ont permis de démontrer que les seules surfaces dont les deux rayons de courbure sont égaux en tout point sont les plans et les sphères.

Chronologie sommaire de la genèse. Pour commencer, quelques dates-clé dans l'émergence[29] des idées de Gauss sur la géométrie différentielle[30].

---

[29] Gauss publiait en latin, et relativement peu, et attendait que les fruits de ses recherches soient vraiment parfaits – "*Pauca, sed matura*", disait-il. Ainsi, pour la plupart des datations historiques de ses découvertes, les historiens se sont basés sur deux sources d'information importantes : sa correspondance, et son célèbre *Journal mathématique*. Ce Journal, l'œuvre résumée d'une vie, long d'une vingtaine de pages seulement, contient 146 énoncés extrêmement brefs et datés précisément, de tous les résultats que Gauss a démontrés dans sa vie et qu'il jugeait importants.

[30] *Cf.* Stäckel [**415**], Dombrowski [**134**] et Kreyszig [**254**] pour ce qui va suivre.

• 1794 : premières réflexions sur les géométries non-euclidiennnes[31].

• 1810–13 : application de Gauss ; concept de mesure de courbure ; formule $\kappa = \frac{1}{r_{\text{min}} \cdot r_{\text{max}}}$.

• 1816 : *Schöne Theorem :* invariance (extrinsèque) de la courbure par isométries extrinsèques, *cf.* la prochaine Section p. 236 ci-dessous.

• 1822 : *Copenhagen Preisschrift.* Théorèmes de comparaison pour les angles d'un triangle géodésique. Coordonnées isothermes. Formules intrinsèques pour la courbure.

• 1825 : *Neue Untersuchungen.* Somme des angles dans un triangle géodésique. Lemme d'orthogonalité. Équations de Gauss. Expression intrinsèque de la courbure dans des coordonnées polaires géodésiques.

• 1826–27 : Conception du plan final et rédaction des *Disquisitiones generales circa superficies curvas*.

Débuts des Disquisitiones. Il s'agit maintenant d'explorer comment Gauss développa ses idées et conçut la rédaction finale des *Disquisitiones*.

De même que le développement du calcul infinitésimal doit beaucoup aux problèmes de la mécanique newtonienne classique, la théorie des surfaces s'est principalement développée en relation avec des problèmes appliqués de géodésie, de cartographie terrestre et d'astronomie, trois facteurs de motivation extrêmement importants qui ont su mobiliser les recherches générales de Gauss à un niveau supérieur d'abstraction.

Eu égard au fait que les calculs numériques ou formels de géodésie et de représentation conforme s'avéraient rapidement assez considérables, il convient de rappeler que Gauss entama dès son adolescence d'intenses calculs, d'abord numériques — inventant 'spontanément' la méthode des moindres carrés à l'âge de dix-sept ans —, puis d'une nature plus théorique. De 1795 à 1801, date de la publication finale des *Disquisitiones arithmeticæ*, Gauss débuta, entreprit et acheva ses travaux en arithmétique supérieure. Ses

---

[31] Dans une lettre adressées à Gerling le 10 octobre 1846, Gauss affirme :

> Le théorème que M. Schweikart vous a signalé, d'après lequel pour toute géométrie, la somme de tous les angles extérieurs à un polygone diffère de $360°$ degrés d'une quantité qui est proportionnelle à l'aire de sa surface, est le premier théorème au seuil de cette théorie, un théorème dont j'ai reconnu la nécessité déjà en 1794. [**134**], 126

découvertes en algèbre, sur la cyclotomie[32] et sur la théorie des fonctions elliptiques ont marqué ces années les plus créatives de sa vie mathématique, période durant laquelle la géométrie ne joua presqu'aucun rôle. Qui plus est, vu de l'extérieur, c'est-à-dire en se basant seulement sur les publications effectives, les travaux ultérieurs de Gauss en astronomie — n'impliquant que la géométrie élémentaire et la géométrie sphérique — n'indiquent aucune réorientation en direction de la géométrie abstraite ou supérieure. Il n'en reste pas moins que les lettres et manuscrits non publiés découverts dans son *Nachlass* ont montré que lorsque Gauss n'était pas encore officiellement astronome, il créait déjà régulièrement des concepts géométriques fondamentaux, et l'examen de ses notes a convaincu les exégètes qu'il a découvert progressivement, au cours de ces années 1810 à 1816, tous les théorèmes importants de sa théorie des surfaces, même si les *preuves* que Gauss continuait à améliorer ont évolué entretemps, c'est-à-dire de 1816 à 1827, toujours vers une plus haute *causalité-en-vérité-interne*. C'est donc *avant* de débuter ses travaux sur la géodésie (après 1816), que Gauss a entrepris ses recherches sur les surfaces, en relation avec les fondements de la géométrie et avec les géométries non euclidiennes. En effet, en 1816, l'année où il fut nommé directeur du nouvel observatoire de Göttingen, Gauss avait déjà finalisé l'idée de représentations paramétriques *intrinsèques* pour les surfaces ; il avait aussi finalisé la notion d'application conforme entre surfaces, le transfert des vecteurs unitaires normaux sur une sphère auxiliaire, la notion d'isométrie infinitésimale, la notion de mesure de courbure κ, la notion de courbure intégrée, l'invariance de la courbure à travers les isométries

[32] Il s'agit des extensions de corps liées à l'équation algébrique $x^n - 1 = 0$, dite *cyclotomique*, du grec *kyklos*, cercle et *tomê*, coupure. Dans le dernier chapitre des *Disquisitiones arithmeticæ*, Gauss élabore une théorie nouvelle qui lui permet de généraliser considérablement son résultat de 1796 sur la division du cercle en dix-sept parties égales, et d'obtenir une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'un polygone régulier à un nombre entier n de côté soit constructible à la règle et au compas. Gauss démontre en effet que ce polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas *si et seulement si* $n = 2^\mu p_1 p_2 \cdots p_k$ est le produit par une puissance de 2 de nombres *premiers* de la forme $p_j = 2^{2^j} + 1$, où j est un entier, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Un nombre p est dit *premier* s'il n'est pas divisible par un nombre q strictement inférieur à p. Ces nombres p_j sont appelés *nombres de Fermat*, car Pierre de Fermat (1601-1665), conseiller au Parlement de Toulouse, et renommé pour ses recherches en arithmétique, avait conjecturé que tous les nombres p_j sont premiers. Les nombres $p_0 = 3$, $p_1 = 5$, $p_2 = 17$, $p_3 = 257$, $p_4 = 65537$, sont premiers. Mais le mathématicien suisse Euler établit en 1732 que $p_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297$ n'est pas premier, et qu'il est divisible par 641 ; Legendre en 1780 montra que p_6 est divisible par 274 177 et *on ne connaît explicitement aucun p_j premier pour $j \geq 5$* ! Une telle remarque limite donc de manière inattendue la portée du théorème de Gauss, dans lequel tous les p_j apparaissant dans $n = 2^\mu p_1 p_2 \cdots p_k$ doivent, en plus, être des nombres premiers. Ainsi, une conjecture, même célèbre, peut très bien s'avérer être complètement fausse !

infinitésimales, les propriétés des géodésiques sur les sphéroïdes généraux ou elliptiques, et le théorème généralisé de Legendre pour les surfaces arbitraires. Cette liste de réalisations et d'accomplissements s'avère même encore plus impressionante si l'on rappelle que Gauss s'occupait aussi durant la même période de fonctions hypergéométriques, qu'il obtint deux nouvelles preuves du théorème fondamental de l'algèbre, qu'il trouva de nouvelles approches de la loi de réciprocité quadratique, qu'il effectua de nombreuses observations astronomiques, et bien entendu aussi, qu'il conduisit de très nombreux calculs numériques et formels.

Le Preisschrift de 1822. La période de géodésie pour Gauss commence avec ses travaux théoriques au sujet des géodésiques tracées sur les sphéroïdes — le modèle étant la surface de la Terre —, et du point de vue réellement pratique, cette période comprend aussi tous ses travaux topographiques sur la géographie du royaume de Hanovre entre 1821 et 1825. En 1822, Gauss prépare son *Copenhagen Preisschrift* ([**178**]), sur les applications conformes qui lui valut le prix de l'Académie de Copenhague. La *conformalité*, un terme suggéré par Gauss, est une condition naturelle pour les applications, puisque par exemple la projection stéréographique et la projection de Mercator sont toutes deux conformes, et des formules pour les applications conformes générales de la sphère sur un plan ont été obtenues dans les années 1770 par Lambert, Lagrange et Euler. Le progrès important de Gauss par rapport à ces idées[33], c'est qu'il traite des applications conformes entre surfaces quelconques munies d'une métrique infinitésimale arbitraire :

$$ds^2 = E\,dp^2 + 2\,F\,dpdq + G\,dq^2,$$

où p et q sont des paramètres internes de la surface. Dans le cas où toutes les données sont analytiques réelles, Gauss a établi dans ce mémoire qu'il existe toujours un changement de coordonnées locales :

$$(p,q) \longmapsto (u,v) = \big(u(p,q),\, v(p,q)\big)$$

[33] L'exigence inflexible en direction de la généralité s'exprime à ce sujet dans une lettre envoyée le 5 juillet 1816 à Schumacher[34] :

> J'ai aussi conversé avec Lindenau au sujet d'une question offerte à la compétition [*Preisfage*] qui devait être posée dans le même journal. J'avais déjà pensé à un problème intéressant : *Dans le cas général, projeter (appliquer) une surface donnée sur une autre surface donnée, de telle sorte que la surface image et la surface initiale soient en similitude dans l'infinitésimal.* Un cas spécial se produit lorsque la première surface est une sphère, et la seconde un plan. Dans ce cas, la projection stéréographique et la projection de Mercator sont deux solutions particulières. Cependant, on veut la solution générale pour tous les types de surfaces, de telle sorte qu'elle contienne tous ces cas particuliers. [**134**], 127

qui transforme ce ds^2 dans de nouvelles coordonnées (u, v) dites *isothermes* en un nouveau :

$$ds^2 = \lambda^2 \left(du^2 + dv^2\right)$$

normalisé de telle sorte que le coefficient central F s'annule identiquement et de telle sorte aussi que les deux autres coefficients E et G soient égaux à une certaine fonction strictement positive $\lambda^2 = \lambda^2(u, v)$. Il est intéressant de noter que la notion d'*isométrie infinitésimale* apparaît à cette occasion, lorsque Gauss considère deux surfaces S et $\overline{S}$ munies, respectivement, d'un ds^2 et d'un $d\overline{s}^2$, qui sont reliées par une relation *conforme* de la forme :

$$E\,du^2 + 2\,F\,dudv + G\,dv^2 = \lambda^2\big(\overline{E}\,d\overline{u}^2 + 2\,\overline{F}\,d\overline{u}d\overline{v} + \overline{G}\,d\overline{v}^2\big),$$

sachant que lorsque $\lambda^2 = 1$, la première surface est 'développable' [*abbildbar*] sur la seconde.

Dans la préface de son *Preisschrift*, Gauss écrivait :

$$\boxed{\textit{Ab his via sternitur ad majora}},$$

en s'inspirant visiblement de la conclusion aphoristique :

Et his principiis via ad major sternitur,

que Newton avait énoncée à la fin de son article fondateur sur le calcul infinitésimal. Très probablement, les 'accomplissements majeurs' auxquels Gauss pensait à travers cet aphorisme référaient à l'idée de *géométrie intrinsèque* qui résulte de la relation d'équivalence — nouvellement découverte — par isométries infinitésimales entre surfaces. Ceci montre donc que Gauss considérait son *Preisschrift* comme étant une *percée angulaire vers sa théorie générale des surfaces à venir*.

On a aussi trouvé dans son *Nachlass* un manuscrit non publié intitulé « *Stand meiner Untersuchungen über die Umformung der Flächen*[35] » dans lequel il consigne par écrit tous les résultats obtenus ou compris à l'époque de la publication de son *Preisschrift*. Notamment dans cette courte note à usage strictement personnel, il mentionne qu'en coordonnées isothermes $ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2)$, la mesure de courbure d'une surface se calcule grâce à une formule simple, brève et symétrique :

$$\kappa = -\,\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial v^2}\right).$$

Scholie. Eu égard aux objectifs philosophiques de ces analyses, il importe de faire remarquer le caractère d'ores et déjà *définitif* des arguments prouvant le caractère intrinsèque de la courbure, plusieurs années *avant* que Gauss ne soit en mesure d'établir la fameuse et complexe *formula egregia* valable dans tout système de coordonnées curvilignes. En effet, on a dit plus haut que

[35] « *État de mes recherches sur la transformation des surfaces* », [**175**], VIII, 374–384.

Gauss avait déjà établi l'existence de coordonnées isothermes dans toutes les circonstances dignes de considération à son époque — c'est-à-dire sous l'hypothèse quelque peu implicite que toutes les données géométriques et fonctionnelles soient toutes développables en série entière convergente —, et donc par conséquent, la formule précédente montre *dans toutes les circonstances possibles* que la mesure de courbure est indépendante du plongement des surfaces dans l'espace $\mathbb{R}^3$, et qu'elle dépend seulement de la métrique infinitésimale *intrinsèque* à la surface. □

Scholie. Telle est l'un des aspects du (long) chemin vers les vérités adéquates dans le labyrinthe de la recherche mathématique : plusieurs moments diachroniques de conquêtes progressives sur des territoires inconnus signalent des vérités eu égard à des parcours indirects et néanmoins complètement convaincants quant à la certitude mathématique ; il n'en reste pas moins que l'exigence de comprendre en profondeur les causes et le pourquoi des choses demande de *découvrir d'autres chemins plus satisfaisants qui mèneraient plus adéquatement aux mêmes vérités.* □

Scholie. Ainsi Gauss ne sera-t-il parfaitement satisfait des arguments qui prouvent le caractère intrinsèque de la courbure que lorsqu'il pourra montrer par une formule explicite *directe* que la courbure s'exprime en fonction d'un ds^2 absolument quelconque. □

Les Neue Untersuchungen de 1825. Après le *Preisschrift*, l'étape suivante en direction d'une théorie générale des surfaces avant la réalisation finale des *Disquisitiones* est la rédaction des *Neue Untersuchungen* ([**179**]), écrites vers la fin de l'année 1825, et conçues comme une extension de la théorie des géodésiques à un niveau supérieur et plus abstrait[36]. Cet avant-projet diffère des *Disquisitiones* non seulement par une plus petite quantité de matériel traité, mais aussi par la méthode générale des démonstrations, qui repose sur l'utilisation fréquente des coordonnées géodésiques au lieu des coordonnées paramétriques intrinsèques générales et quelconques. Mis à part les considérations sur la courbure géodésique, tous les thèmes traités dans l'avant-projet ont été inclus par Gauss dans son mémoire final.

Qu'en est-il alors, à ce dernier stade d'évolution, des aspects reliés à l'invariance de la mesure de courbure κ à travers les isométries infinitésimales ? Malheureusement, la source exégétique du *Theorema egregium* reste essentiellement inconnue, parce qu'aucune note relative à sa dérivation n'a été découverte dans le *Nachlass* pour la période qui précède l'année 1816. Stäckel ([**415**], p. 95) pense que c'est l'étude des géodésiques qui a ouvert la voie, et on y reviendra dans la prochaine Section p. 236 ci-dessous qui sera consacrée à l'action du principe de raison suffisante. De plus, Gauss était

[36] On doit à Stäckel d'avoir collecté avec grand soin et édité ces manuscrits de Gauss.

parfaitement en mesure dès 1822 de démontrer l'équivalent du *Theorema egregium* pour des coordonnées isothermes, et aussi à nouveau en 1825 pour des coordonnées polaires géodésiques dans lesquelles la métrique infinitésimale est de la forme simplifiée :

$$ds^2 = dp^2 + G(p,q)\,dq^2.$$

Dans ces coordonnées spéciales, les deux familles de courbes $\{p = \mathrm{const.}\}$ et $\{q = \mathrm{const.}\}$, dont la seconde est constituée de géodésiques, s'intersectent orthogonalement, et Gauss y exprime en effet la mesure de courbure κ en termes de G et de ses dérivées partielles du second ordre comme suit :

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2}{\partial u^2}\big(\sqrt{G}\big).$$

Pour ces raisons qui démontrent complètement l'invariance de la courbure à travers les isométries infinitésimales, Gauss était intimement convaincu qu'il devrait exister une formule analogue mais plus générale qui permettrait de calculer la courbure dans un système de coordonnées (u,v) quelconques en termes des coefficients métriques E, F, G et de leurs dérivées partielles d'ordre 1 et 2. Mais lorsqu'il se rendit compte que les preuves valables pour les systèmes normalisés de coordonnées ne se généralisaient pas aisément, il abandonna son travail sur les *Neue Untersuchungen* à la fin de l'année 1825, écrivant le 19 février 1826 à son proche ami Olbers, astronome à Bremen qui avait usé de son influence pour soutenir sa nomination à Göttingen :

> Je ne connais presqu'aucune période de ma vie durant laquelle j'aie obtenu un gain relativement si négligeable [*so wenig reinen Gewinn*] d'un travail aussi acharné que celui conduit cet hiver. J'ai découvert de *nombreux* beaux résultats, tandis que mes efforts concernant d'autres idées restaient souvent infructueux pendant des *mois*. GAUSS, [**254**], 103

Ainsi en 1825, Gauss s'était-il fixé comme objectif de développer et d'exposer une théorie générale des surfaces seulement après être parvenu, au prix d'efforts extraordinaires en calcul, à vaincre l'obstacle de la *formula egregia*, ce qu'il réalisa enfin à la fin de l'année 1826.

10. Action du principe de raison suffisante

Triangles géodésiques. L'obstacle d'insatisfaction mathématique aura été d'autant plus considérable que Gauss était en fait déjà en possession d'une preuve indirecte du caractère purement intrinsèque de la mesure de courbure *dès l'année 1816* — c'est-à-dire dix ans avant la rédaction des *Disquisitiones* — période à laquelle il maîtrisait la *formule d'écart angulaire* relativement à π de la somme des angles d'un triangle géodésique ABC tracé sur une surface :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \int\!\!\int_{ABC} \kappa \, d\sigma,$$

au moins dans les circonstances où la courbure ponctuelle $p \mapsto \kappa(p)$ est de signe localement constant sur la surface, quoique de magnitude *variable*.

> La somme des angles d'un (petit) triangle géodésique Δ sur une surface courbe dans $\mathbb{E}^3$ est égale à la somme de π et de l'aire orientée de l'image sphérique de Δ, où l'aire orientée est considérée comme positive ou négative, suivant que le bord de l'image sphérique de Δ tourne autour de l'image dans la même direction ou dans la direction opposée, en comparaison à la manière dont le bord de Δ tourne autour Δ. GAUSS, [**175**], VIII, 435

Cette formule *directement inspirée* de la géométrie sphérique était aussi largement connue dans le cas des surfaces développables. Gauss possédait par ailleurs depuis 1794 un résultat analogue valable dans le cadre de la géométrie hyperbolique, et par voie de conséquence, il maîtrisait en vérité ladite formule pour essentiellement toutes les surfaces de courbure constante[37], ce qu'il énonça notamment dans une lettre à Gerling en 1819[38].

> Non seulement le défaut de la somme des angles dans un triangle par rapport à $180°$ degrés croît lorsque sa surface augmente, mais encore il lui est exactement proportionnel. GAUSS, [**175**], VIII, 10

Il est donc tout à fait légitime de s'imaginer que Gauss ait pu être conduit à deviner, dès 1812, que la validité de cette formule devait être ensuite testée dans le cas des surfaces quelconques plongées dans l'espace, quelle que soit la variabilité de leur courbure, sachant qu'il était en outre motivé par l'étude des géodésiques sur des sphéroïdes *non* sphériques, et aussi par l'étude générale des applications conformes.

Scholie. Déformer un objet mathématique par extension en généralité, c'est l'exposer à une ouverture hypothétique qui consiste à *lever* une ou plusieurs conditions spécifiques auxquelles sa définition initiale le soumettait. La dialectique entre la constance et la non-constance — ici de la courbure — est toujours universellement susceptible de s'incarner en rapport avec toute fonction qui est construite en relation interne avec une catégorie d'objets mathématiques, quel que soit le niveau de sophistication de la construction en question, et la non-constance opposée à la constance d'une donation initiale est *fréquemment* susceptible de *créer* une ontologie nouvelle dont l'existence, si elle est attestée, confirme le nouveau type d'être à étudier.

[37] *Cf.* Dombrowski [**134**] pour ce qui va suivre.

[38] D'autres passages de cette lettre ont incité la tradition commentatrice à penser que les mesures terrestres ou astronomiques d'angle ont été effectuées par Gauss afin de 'tester' la validité ou la non-validité de la géométrie euclidienne dans l'espace physique.

D'un seul coup alors, une multiplicité automatique de questions mathématiques surgissent, dont la trame métaphysique se réduit à la conservation, ou à la disparition, en totalité, ou en partie, des vérités connues dans des circonstances déjà étudiées. Aussi du point de vue de la philosophie générale des mathématiques, la structure interne du questionnement mathématique se réduit-elle souvent à la plus simple interrogation au sujet d'une permanence ou d'une disparition de propriétés établies. À un niveau plus élevé, ce fait soulève la méta-question extrêmement délicate du statut des *questions* dans le développement des mathématiques, et il est vraisemblablement impossible d'apporter une 'réponse' à cette méta-question. □

Scholie. Spécialement ici, le concept — ici, de courbure — se retourne en lui-même dans la réflexivité de son expression. En effet, la formule quantitative pour l'excès angulaire $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} - \pi$ de tout triangle sur une sphère bordé par des grands cercles s'interprétait comme multiple (constant) de l'aire du triangle, donc comme dérivant d'un principe de distance à l'homogénéité, et c'est parce que la notion de courbure exprime le rapport infinitésimal de toute surface à une sphère qu'une formule *intégrée* pour la différence moyenne était vraisemblablement susceptible d'exister. Autrement dit, la variabilité se *reflète* infinitésimalement dans l'homogénéité, et son rapport en généralité par rapport à l'homogénéité *cause en quelque sorte métaphysiquement* l'extension de la formule d'écart angulaire grâce à l'intégration qui rend fini l'infinitésimal. □

Déduction du caractère intrinsèque de la courbure. C'est en 1816 que Gauss a découvert le caractère proprement intrinsèque de la courbure dans le cas général des surfaces quelconques, grâce à la formule d'écart angulaire rapellée à l'instant. Tel est le contenu du résultat qu'il appela 'joli théorème' [*Schöne Theorem*], et que l'on peut restituer comme suit :

Si une courbe sur laquelle une figure est fixée prend différentes formes dans l'espace, alors l'aire de l'image sphérique de cette figure sur la sphère auxiliaire est toujours la même, pour toutes les formes que la surface peut prendre par flexions sans extension, sans duplicature, sans déchirure.

L'attrait de ce théorème, c'est la découverte d'une invariance, d'une permanence de propriété lors de tout mouvement isométrique d'une surface. Effort de mentalisation, questionnements, visions, interrogations : la véritable *genèse causale*, chez Gauss, de la *rigidité bidimensionnelle* de la courbure ne pourra être connue en totalité, puisque cette genèse impliquait des jours, des mois, des années de réflexions et de méditations, riches d'aspects métaphysiques que tout texte mathématique formel se refuse à expliciter.

Le 5 juillet 1816, Gauss fait part dans une lettre à son ancien étudiant et ami (confident ?) Schumacher de son insatisfaction concernant ce 'joli théorème'[39], et on reviendra plus bas sur les aspects fondamentaux de l'exigence gaussienne qui légitimaient ses insatisfactions récurrentes.

> Ce résultat est sans doute tout à fait correct, mais il ne suffit pas à résoudre la question générale posée $[\cdots]$.

D'un point de vue géométrique moderne toutefois, l'argument de 1816 qui déduit l'invariance de la courbure à partir de la formule d'excès angulaire est correct, complet et convaincant — le voici donc. Soit comme supposé :

$$\phi\colon \quad S \to S', \qquad (u,v) \longmapsto (u',v') = \big(u'(u,v),\, v'(u,v)\big)$$

une application (analytique réelle) inversible entre deux surfaces munies, respectivement, de métriques quadratiques infinitésimales ds^2 et ds'^2, qui est une *isométrie* — ni flexion, ni duplicature, ni déchirure —, *i.e.* qui satisfait $\phi^*(ds'^2) = ds^2$, c'est-à-dire plus précisément :

$$E'\,du'^2 + 2\,F'\,du'dv' + G'\,dv'^2\Big|_{u'=u'(u,v),\,v'=v'(u,v)} = E\,du^2 + 2\,F\,dudv + G\,dv^2.$$

Puisque l'application ϕ respecte les distances dans l'infiniment petit, elle laisse aussi inchangée la longueur des courbes macroscopiques lors du passage de S à S', et *vice versa*. Comme les courbes géodésiques minimisent par définition localement les longueurs, ϕ transforme les géodésiques en géodésiques. Pour ce qui est des éléments d'aire infinitésimale associés par ds^2 à S et par ds'^2 à S', à savoir :

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,dudv \qquad \text{et} \qquad d\sigma' = \sqrt{E'G' - F'^2}\,du'dv',$$

il est clair aussi que ϕ les transforme aussi l'un vers l'autre :

$$\phi^*(d\sigma') = d\sigma,$$

puisque toute aire de rectangle infinitésimal orthogonal s'exprime comme produit de sa longueur par sa largeur.

---

[39] La suggestion qu'avait faite Gauss en 1816 aux éditeurs des *Astronomische Abhandlundgen* de mettre à la compétition le problème général des applications conformes au sujet duquel il possédait déjà de nombreuses idées n'avait pas été entendue. C'est pourquoi Schumacher usa en 1821 de la première opportunité qui lui fut offerte pour suggérer à la *Société scientifique de Copenhague* de mettre ce problème au concours ; toutefois, Gauss n'en fut pas immédiatement informé. Alors en 1822, le problème n'ayant toujours pas reçu de solution, il fut remis au concours, et Schumacher en informa Gauss le 4 juin. Dès le 10 juin, Gauss répondit : « Je suis désolé d'apprendre seulement maintenant le renouveau de cette compétition $[\cdots]$ ». Le 25 novembre, Gauss demanda à Schumacher quelle est la date limite pour la soumission des propositions : fin de l'année 1822, lui répondit-il. Le 11 décembre, sous la pression de ce délai, Gauss soumit son premier mémoire [**178**] sur la théorie des surface qui répondait à l'une de ses propres questions, et qui ne sera publié qu'en 1825 aux *Astronomischen Abhandlungen*, après avoir été récipiendaire du prix.

Par conséquent, ϕ envoie tout petit voisinage $V_\varepsilon(p)$ d'un point p bordé par trois ou plus géodésiques[40] vers un autre voisinage :

$$V'_\varepsilon(p') := \phi\big(V_\varepsilon(p)\big)$$

du point image $p' = \phi(p)$ qui est lui aussi bordé par trois ou plus géodésiques et qui possède en outre la *même* aire :

$$\mathsf{aire}\big(V'_\varepsilon(p')\big) = \mathsf{aire}\big(V_\varepsilon(p)\big).$$

Par ailleurs, en supposant pour fixer les idées que ledit voisinage est un triangle géodésique :

$$V_\varepsilon(p) = A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon,$$

l'application ϕ produisant une isométrie dans l'infinitésimal, elle préserve tous les angles entre courbes ou droites tangentes, et donc on a des égalités par paires pour les angles aux sommets entre le triangle et son triangle image :

$$\widehat{A}'_\varepsilon = \widehat{A}_\varepsilon, \qquad \widehat{B}'_\varepsilon = \widehat{B}_\varepsilon, \qquad \widehat{B}'_\varepsilon = \widehat{B}_\varepsilon.$$

Par conséquent, si l'on compare ces trois égalités d'angles aux deux formules respectives d'excès angulaire :

$$\begin{aligned}
\widehat{A}_\varepsilon + \widehat{B}_\varepsilon + \widehat{C}_\varepsilon &= \pi + \iint_{A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon} \kappa\, d\sigma, \\
\widehat{A}'_\varepsilon + \widehat{B}'_\varepsilon + \widehat{C}'_\varepsilon &= \pi + \iint_{A'_\varepsilon B'_\varepsilon C'_\varepsilon} \kappa'\, d\sigma',
\end{aligned}$$

on déduit immédiatement l'égalité entre intégrales de courbures :

$$\iint_{A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon} \kappa\, d\sigma = \iint_{A'_\varepsilon B'_\varepsilon C'_\varepsilon} \kappa'\, d\sigma',$$

d'où on déduit aussi en faisant tendre ε vers 0 — puisque l'on peut naturellement supposer que l'aire des triangles est un infiniment petit d'ordre deux en ε — :

$$\kappa(p) \cdot \underline{\mathsf{aire}\big(A_\varepsilon B_\varepsilon C_\varepsilon\big)}_{\circ} + \mathrm{O}(\varepsilon^3) = \kappa'(p') \cdot \underline{\mathsf{aire}\big(A'_\varepsilon B'_\varepsilon C'_\varepsilon\big)}_{\circ} + \mathrm{O}(\varepsilon^3),$$

40 Du théorème sur les triangles, Gauss déduit immédiatement par découpage un théorème analogue plus général sur l'excès angulaire de tout polygone géodésique :

> La somme de tous les angles d'un petit polygone géodésique Π à n côtés tracé sur une surface courbe S dans $\mathbb{E}^3$ est égale à la quantité $(n-2)\,\pi$ à laquelle il faut additionner l'aire de surface orientée de l'image sphérique de Π obtenue *via* l'application vers la sphère auxiliaire. GAUSS, [**175**], VIII, 435

ce qui donne en simplifiant de part et d'autre par les coefficients d'aires *qui sont égaux*[41] :

$$\boxed{\kappa'(p') = \kappa(p)}.$$

En conclusion, la courbure de Gauss au point p et celle au point-image $p' = \phi(p)$ sont égales entre elles à travers l'isométrie ϕ entre les deux surfaces S et S' : telle est la démonstration géométrique du *Theorema egregium* obtenue par Gauss dès 1816.

Insatisfaction gaussienne. Toutefois, Gauss ne publia jamais cette preuve. L'une des raisons tient à ce qu'elle en reste au niveau d'une présentation informelle, sans préciser rigoureusement la notion d'aire orientée de surface sur la sphère auxiliaire, sans réellement traiter le cas général des surfaces dont la courbure est alternativement positive ou négative — il faut attendre 1825 pour que tel soit le cas. Gauss jugeait durement les démonstrations non rigoureuses, et s'appliquait à lui-même une exigence mathématique dont il informait ses contemporains dans sa correspondance pour se justifier de publier relativement peu[42]. Refuser de publier comme le fit constamment Gauss dans sa maturité, c'est refuser de se libérer artificiellement de ce qui n'est pas encore compris.

Scholie. D'autres raisons plus profondes peuvent être considérées comme véritables causes d'une auto-critique récurrente chez Gauss, et donc aussi chez tout mathématicien conscient de l'imperfection ubiquitaire des mathématiques (« platonisme des terrains vagues »). Ces causes ont trait à l'*essence-en-recherche* des vérités mathématiques, c'est-à-dire à ce qui fait que la non-accession à des parcours de preuves réellement adéquats oblige à *maintenir intacte* l'exigence de tracer d'*autres* chemins démonstratifs qui soient plus convaincants, plus systématiques, plus inter-expressifs. Certes, l'informel, l'intuitif et l'approximatif offrent un premier contact avec les vérités mathématiques, mais dans des moments ultérieurs, on doit chercher à comprendre synthétiquement l'ensemble d'une manière unifiée tout

[41] Une autre manière de déduire l'égalité ponctuelle des courbures aurait été d'écrire :

$$\kappa(p) = \lim_{V_\varepsilon(p) \to p} \frac{\text{aire}\,\big[\mathbf{n}\big(V_\varepsilon(p)\big)\big]}{\text{aire}\, V_\varepsilon(p)} = \lim_{\phi(V_\varepsilon(p)) \to p'} \frac{\text{aire}\,\big[\mathbf{n}\big(V_\varepsilon'(p')\big)\big]}{\text{aire}\, V_\varepsilon'(p')} = \kappa'(p').$$

[42] La personnalité de Gauss et son choix de vie apparaissent habituellement très fascinants aux yeux des mathématiciens, et son expérience témoigne d'une possible *autonomie complète* de l'activité mathématique. Gauss s'était en effet convaincu, à partir d'expérience vécues, qu'il n'aurait que peu de choses à apprendre à vouloir communiquer et à échanger avec les autres mathématiciens ; aussi préféra-t-il s'isoler presque complètement du champ des influences de l'activité mathématique de l'époque.

en contrôlant mieux l'extension ontologique des objets concernés[43]. Autrement dit, les causes des vérités mathématiques exigent une maturation que seuls peuvent procurer des parcours démonstratifs *pluriels*, et la pensée du mathématicien se doit de comparer et d'évaluer les niveaux de satisfaction abstraite que procure telle ou telle preuve. C'est bien cela qui fascine dans la pensée épistolière de Gauss : la présence d'une philosophie implicite des mathématiques dont les aspects saillants demeurent universels et trans-historiques. □

Dans le manuscrit pré-finalisatoire de 1825 ([**179**]), on trouve une organisation plus élaborée des arguments de preuve, dans laquelle la démonstration géométrique de l'invariance de la courbure exposée ci-dessus est suivie du lemme d'orthogonalité aujourd'hui dit « de Gauss », puis d'une expression explicite $\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\big(\sqrt{G}\big)$ de la courbure en coordonnées polaires géodésiques. Dombrowski ([**134**], p. 135) suggère alors que la raison pour laquelle ce manuscrit s'achève abruptement à ce moment-là est vraisemblablement due au fait suivant : Gauss aurait réalisé qu'une *autre et meilleure preuve* du *Theorema egregium* découlait directement de cette formule $\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\big(\sqrt{G}\big)$, puisque toute quantité géométrique telle qu'un ds^2 se transforme d'une manière déterminée à travers tout changement de coordonnées, et donc cette formule pour la courbure devrait se transformer en une formule valable dans un système de coordonnées quelconque, quoique le calcul n'ait rien d'élémentaire ou d'aisé.

> Eu égard à l'article 21 des *Disquisitiones generales*, on pourrait même être conduit à conclure qu'à cette époque, Gauss perçut la possibilité — en principe — d'exprimer les coefficients E, F, G de la première forme fondamentale dans une carte locale de la surface en termes des coefficients E', F', G' d'une autre carte. Par conséquent, il aurait pu être possible d'exprimer la courbure $\kappa = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2}\big(\sqrt{G}\big)$ obtenue d'abord pour le cas spécial des coordonnées géodésiques polaires dans lesquelles $ds^2 = dp^2 + G\,dq^2$ sous la forme de l'équation de Gauss [*formula egregia*]. De cette manière, Gauss pourrait avoir découvert la formule explicite (6.2.4) p. 172 dans des coordonnés paramétriques quelconques sur la surface. Mais il est presque certain que Gauss ne trouva pas cette expression avant l'année 1826. [**134**], 135

Il est donc vraisemblable toutefois que Gauss ait été en mesure d'effectuer un tel calcul, qu'il ait découvert ainsi la *formula egregia*, mais qu'à

[43] Pour ce qui est des applications conformes, Gauss a dû en élargir considérablement le domaine ontologique, passant de transformations *géométrico-algébriques* simples et de bas degré à un univers fonctionnel arbitraire satisfaisant *seulement* des équations aux dérivées partielles d'ordre 1. Une extension ontologique analogue mais postérieure sera effectuée dans la thèse de Riemann, où les fonctions holomorphes seront définies *seulement* comme annihilées par l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

nouveau, il ait été insatisfait du caractère *toujours indirect* de l'accès à ladite formule.

> Ainsi, il semble que Gauss considéra d'une façon conclusive que sa première démonstration géométrique de l'invariance de la courbure était 'périmée' et 'détrônée'. [**134**], 135

Scholie. À cet instant précis, une spéculation cruciale sur la philosophie générale des mathématiques s'impose. L'*exploration-en-recherche* de la 'réalité' mathématique n'est aucunement prédéterminée par l'insertion du sujet dans des structures prédéfinies, fussent-elles transcendantales. Au contraire, la *pensée-en-recherche* se déploie comme un *mobile (dés-)articulé de questionnements multiples*, chaque décision pouvant être soumise à révision. L'irréversible-synthétique est une quête à travers laquelle il faut interroger, s'orienter, absorber, tel sera aussi le point de vue de Lie, systématique dans la ramification du possible qu'il déploiera sans relâche. Gauss réoriente inlassablement sa vision de la théorie des surfaces jusqu'à ce que tous les rôles y soient distribués réflexivement. *La vérité mathématique n'est pas indépendante des preuves, elle n'est pas non plus langagièrement démultipliable par identification à ses variations démonstratives, mais même acquise ou finalisée,* elle continue à s'interroger inlassablement et à s'évaluer réflexivement dans ses propres preuves métamorphosables. Aussi Gauss n'a-t-il multiplié les preuves — du *Theorema egregium*, du théorème fondamental de l'algèbre, de la loi de réciprocité quadratique — que parce que les mathématiques éprouvent toujours leurs réalisations dans la tension d'un *Multiple-du-parcours* qui est leur essence même. □

Raison suffisante leibnizienne. D'après Leibniz, *vérités nécessaires* et *vérités de fait* doivent être soigneusement distinguées. En effet, les *vérités nécessaires*, puisqu'elles sont nécessaires en elles-mêmes, ne pourraient pas ne pas être, et elles reposent en dernier recours sur des vérités primitives, et notamment sur le principe de contradiction d'après lequel tout ce qui est contradictoire est faux, et tout ce qui est logiquement non-contradictoire a des chances d'être nécessaire.

> 33. Il y a aussi deux sortes de vérités, celles de Raisonnement et celles de Fait. Les vérités de Raisonnement sont nécessaires et leur opposé est impossible, et celles de Fait sont contingentes et leur opposé est possible. Quand une vérité est nécessaire, on en peut trouver la raison par l'analyse, la résolvant en idées et en vérités plus simples, jusqu'à ce qu'on vienne aux primitives. [**273**]

En particulier, les vérités obtenues par le raisonnement mathématique sont nécessaires, puisqu'on y parvient, d'après une affirmation leibnizienne — approfondie au vingtième siècle avec les théories de la démonstration — par des raisonnements analytiques qui ramènent en dernier recours tous les énoncés à la certitude incontournable et absolue de la non-contradiction.

En revanche, toujours d'après Leibniz, les *vérités de fait* concernent des étants et des événements qui sont intrinsèquement contingents, comme l'existence de tels arbres ou de tels êtres humains, qui existent ici et là, mais qui auraient tout à fait pu ne pas exister, à cause d'un affouage, à cause d'une construction ou à cause d'une guerre, de la maladie. Mais ce n'est pas pour autant que l'existence contingente est sans raison, puisque chaque arbre existe parce qu'une graine a germé, et puisque chaque homme existe parce que ses parents se sont mutuellement fécondés.

Leibniz choisit alors de distinguer ces deux types de vérités à l'aide d'un critère de finitude ou d'indéfinitude dans la régression des raisons : en effet, la différence entre nécessité analytique et contingence mondaine, c'est que dans le premier cas, la Raison qui raisonne peut conduire en un nombre fini d'étapes l'analyse des raisons jusqu'à un terme, tandis que dans le second cas, la Raison ne peut jamais comprendre et embrasser tout le détail *potentiellement indéfini* des choses de l'univers afin de rendre complètement raison d'un fait contingent spécifique donné.

> 36. Mais la raison suffisante se doit trouver aussi dans les vérités contingentes ou de fait, c'est-à-dire, dans la suite des choses répandues par l'univers des créatures ; où la résolution en raisons particulières pourrait aller à un détail sans bornes, à cause de la variété immense des choses de la Nature et de la division des corps à l'infini. Il y a une infinité de figures et de mouvements présents et passés qui entrent dans la cause efficiente de mon écriture présente ; et il y a une infinité de petites inclinations et dispositions de mon âme, présentes et passées, qui entrent dans la cause finale. [**273**]

Racine métaphysique du principe. Malgré cette pluralité et cette indéfinitude des raisons contingentes et particulières, il reste néanmoins — en toute circonstance interrogative — de la nature, de l'*essence* de la *Raison* de penser que ce qui n'a aucune *raison* d'exister devrait n'exister pas, et partant aussi dans le sens inverse-réciproque, que tout étant qui existe, que ce soit de manière nécessaire ou de manière contingente, parce qu'il s'insère dans un certain tissu voilé de relations spatio-temporelles ou abstraites en vertu duquel il entretient des liens souvent mystérieux avec d'autres êtres nécessaires ou contingents, tout étant qui existe, donc, devrait trouver en lui-même et autour de lui-même certaines *raisons d'être* qui lui sont propres dans la localité métaphysique partiellement invisible de causes internes ou externes à son existence. C'est donc à cet instant-là qu'apparaît le si profond *Principe de raison suffisante* attribué à Leibniz :

> principe en vertu duquel nous considérons qu'aucun fait ne saurait se trouver vrai ou existant, aucune énonciation véritable, sans qu'il y ait une raison suffisante pourquoi il en soit ainsi et non pas autrement, quoique ces raisons le plus souvent ne puissent point nous être connues, [**273**]

à savoir au moment où la méditation métaphysique déclare au sujet du monde de tous les étants — qu'ils soient nécessaires ou contingents, corporels ou incorporels — que des raisons profondes doivent toujours agir en réponse au moins partielle à des interrogations spontanées et irrépressibles de la Raison.

Enfin, d'après Leibniz, le principe de raison suffisante est un des « deux grands principes de nos raisonnements », avec le principe de non-contradiction[44]. Il peut se résumer de manière aphoristique en l'expression latine : *nihil est sine ratione*, à savoir : « rien n'est sans raison ». Christian Wolff, qui reprend et étend le rationalisme de Leibniz, l'affirme à son tour : « *Rien n'existe sans qu'il y ait une raison pour qu'il en soit ainsi et non autrement.* »

Mathématique du principe de raison. Or du point de vue des mathématiques, il serait nul et non avenu de discuter du bien fondé de ce principe à caractère métaphysique — analysé par ailleurs et contesté d'un point de vue purement philosophique par un ouvrage éponyme de Heidegger — puisque la pensée mathématique est le domaine par excellence où la Raison se donne les moyens d'élaborer et d'approfondir les arguments les plus indubitables quant à des chaînes finies de raisons qui concernent le nombre, l'étendue, l'infini. Le principe de raison suffisante affirme donc en tant que principe moteur pour l'activité mathématique que l'on doit constamment croire qu'il y a des liens de genèse entre des propositions vraies et établies par ceraines voies, fussent-elles imparfaites et transitoires, et l'existence d'autres propositions et d'autres vérités mathématiques établies par d'autres voies qui sont posées dans l'attente d'une réalisation ou d'une découverte : *tout simplement* !

Exemple paradigmatique : la formula egregia. La recherche par Gauss et l'élaboration sur un temps long de la *formula egregia* constitue alors un

[44] Le principe de raison suffisante ne peut être réduit, chez Leibniz, au principe de raison nécessaire. Le principe de raison suffisante est lié au principe selon lequel tout prédicat est inhérent au sujet (*Praedicatum inest subjecto*). Il découlerait même de celui-ci, car s'il y avait une vérité sans raison, alors, nous aurions une proposition dont le sujet ne contiendrait pas le prédicat, ce qui est absurde. Mais il va sans dire que le concept d'*irréversible-synthétique* en mathématique annule complètement cette illusion que la connaissance mathématique soit analytique.

exemple paradigmatique de l'action du principe de raison suffisante dans la genèse des contenus mathématiques, puisque c'est bien parce qu'une première démonstration *extrinsèque* du caractère intrinsèque et invariant par isométrie de la courbure lui était connue (*Schöne Theorem*, 1816), que Gauss a pensé qu'il devait y avoir une *démonstration supérieure et purement intrinsèque qui établît au mieux cette invariance*.

Le principe de raison mobilise constamment la création de réalité mathématique.

11. Caractérisation différentielle des surfaces de courbure nulle

Équivalence à la métrique pythagoricienne. À la fin de l'année 1826, toujours en quête d'une formule qui eût exprimé la mesure de courbure κ explicitement en fonction des trois coefficients métriques E, F, G, Gauss conçut l'idée de caractériser les surfaces localement isométriques à un plan, c'est-à-dire celles pour lesquelles il existe un changement de coordonnées :

$$(u,v) \longmapsto \big(\overline{u},\, \overline{v}\big) = \big(\overline{u}(u,v),\, \overline{v}(u,v)\big)$$

qui transforme leur métrique en la métrique euclidienne standard ; cela revient à supposer que l'on a :

$$d\overline{u}^2 + d\overline{v}^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2,$$

après remplacement des nouvelles variables $\overline{u}$ et $\overline{v}$ dans le membre de gauche par leurs expressions en fonction de u et v. Si cette condition est satisfaite, on dira que la surface est *localement isométrique au plan euclidien*. Cette dernière étape fut cruciale dans la genèse de la *computatio egregia*, puisque Gauss découvrit à cette occasion le *numérateur* de l'expression de la courbure donnée par la *formula egregia* (6.2.4) p. 172.

Numérateur de la formula egregia. Autrement dit, dans des notes personnelles non publiées, Gauss parvint à établir la caractérisation différentielle suivante :

Théorème. *Une surface paramétrée en coordonnées* (u,v) *et munie d'une métrique infinitésimale :*

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

est localement euclidienne si et seulement si *les trois coefficients* E*,* F*,* G *satisfont l'équation différentielle non linéaire du second ordre suivante :*

$$\begin{aligned}
0 = E\big[&E_v\,G_v - 2\,F_u\,G_v + G_u\,G_u\big] + \\
&+ F\big[E_u\,G_v - E_v\,G_u - 2\,E_v\,F_v + 4\,F_u\,F_v - 2\,F_u\,G_u\big] + \\
&+ G\big[E_u\,G_u - 2\,E_u\,F_v + E_v\,E_v\big] + \\
&+ 2\,(EG - F^2)\big[-E_{vv} + 2\,F_{uv} - G_{uu}\big].
\end{aligned}$$

À un changement de notation près, on reconnaît effectivement le numérateur de la *formula egregia*, coïncidence remarquable, intéressante et avantageuse. Par un heureux effet d'économie, les calculs qui ont conduit Gauss à la démonstration de ce théorème sont notablement plus aisés et plus courts que les calculs de la *computation egregia* de 1827. D'après Kreyszig ([**254**], p. 106), Gauss aurait alors pu s'imaginer (avant de l'avoir vraiment établie) que la *formula egregia* ne différait de cette expression complexe que par un facteur inessentiel, à savoir le dénominateur $(EG - F^2)^2$. C'est donc grâce à un tel travail préliminaire que Gauss aurait été en mesure d'anticiper et de réaliser définitivement le calcul qui le conduisit à la *formula egregia*.

Factorisation par complexification. Soit donc une métrique gaussienne quelconque :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$$

telle qu'il existe une transformation $(u,v) \longmapsto (\overline{u},\overline{v})$ qui la transforme en la métrique pythagoricienne standard $d\overline{u}^2 + d\overline{v}^2$. Il s'agit d'établir que E, F et G satisfont le systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre exhibé ; la réciproque, simple application du théorème de Clebsch-Frobenius, sera laissée de côté.

Si l'on s'autorise à utiliser le nombre imaginaire $i := \sqrt{-1}$, on peut décomposer le carré $(d\overline{u})^2 + (d\overline{v})^2$ en facteurs linéaires :

$$(d\overline{u})^2 + (d\overline{v})^2 = (d\overline{u} + id\overline{v})(d\overline{u} - id\overline{v}) =: d\lambda\,d\mu,$$

en posant simplement :

$$\lambda := \overline{u} + i\overline{v} \quad \text{et} \quad \mu := \overline{u} - i\overline{v}.$$

Le fait que la fonction $\mu = \mu(u,v)$ à valeurs complexes soit la conjuguée de la fonction $\lambda = \lambda(u,v)$ ne sera pas utilisé dans les raisonnements qui vont suivre, et à partir de maintenant, on va *oublier* les deux fonctions réelles initiales $\overline{u}(u,v)$ et $\overline{v}(u,v)$ pour ne considérer que λ et μ en tant que *nouvelles* fonctions significatives de (u,v).

Soient ensuite les deux différentielles :

$$d\lambda = \lambda_u\,du + \lambda_v\,dv \qquad \text{et} \qquad d\mu = \mu_u\,du + \mu_v\,dv$$

de ces deux nouvelles fonctions de (u,v). Dans la nouvelle équation qui exprime la condition d'isométrie infinitésimale à la métrique pythagoricienne :

$$\begin{aligned} E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2 &= d\overline{u}^2 + d\overline{v}^2 = \\ &= d\lambda\,d\mu = \big(\lambda_u\,du + \lambda_v\,dv\big)\big(\mu_u\,du + \mu_v\,dv\big), \end{aligned}$$

si l'on identifie alors les trois coefficients de du^2, de $dudv$ et de dv^2 entre les deux membres situés aux extrémités gauche et droite, on obtient que E,

F et G doivent nécessairement être liés aux dérivées partielles du premier ordre de ces fonctions par les formules quadratiques suivantes :

$$\begin{aligned} E &= \lambda_u \, \mu_u, \\ 2F &= \lambda_u \, \mu_v + \lambda_v \, \mu_u, \\ G &= \lambda_v \, \mu_v. \end{aligned}$$

Relations différentielles systématiques. C'est ici que la combinatoire différentielle entre en scène. De la sorte, deux fonctions λ et μ imposent des conditions aux trois fonctions E, F et G. Puisqu'il y a quatre dérivées partielles d'ordre 1, à savoir : λ_u, λ_v, μ_u et μ_v, et seulement trois équations, ce système ne permet pas de déterminer immédiatement les inconnues λ et μ. C'est pourquoi il faut différentier par rapport à u et par rapport à v chacune de ces trois équations, ce qui donne six équations aux dérivées partielles écrites simplement à la suite les unes des autres :

$$\begin{aligned} E_u &= \lambda_{uu} \, \mu_u + \lambda_u \, \mu_{uu}, \\ E_v &= \lambda_{uv} \, \mu_u + \lambda_u \, \mu_{uv}, \\ 2F_u &= \lambda_{uu} \, \mu_v + \lambda_u \, \mu_{vu} + \lambda_{vu} \, \mu_u + \lambda_v \, \mu_{uu}, \\ 2F_v &= \lambda_{uv} \, \mu_v + \lambda_u \, \mu_{vv} + \lambda_{vv} \, \mu_u + \lambda_v \, \mu_{uv}, \\ G_u &= \lambda_{vu} \, \mu_v + \lambda_v \, \mu_{vu}, \\ G_v &= \lambda_{vv} \, \mu_v + \lambda_v \, \mu_{vv}. \end{aligned} \tag{6.2.4}$$

Dans ce système de six équations, il importe d'observer qu'il y a autant de dérivées partielles d'ordre deux des deux fonctions inconnues λ et μ que de dérivées partielles d'ordre un des fonctions données E, F et G. En effet, ce nombre commun est égal à six :

$$\begin{array}{cccccc} \lambda_{uu}, & \lambda_{uv}, & \lambda_{vv}, & \mu_{uu}, & \mu_{uv}, & \mu_{vv}, \\ E_u, & E_v, & F_u, & F_v, & G_u, & G_v, \end{array}$$

en tenant bien sûr compte de la commutativité des dérivées partielles, qui assure que $\lambda_{uv} = \lambda_{vu}$ et que $\mu_{uv} = \mu_{vu}$. On peut donc s'attendre à ce que le système linéaire (6.2.4) ci-dessus, où l'on envisage les quatre dérivées partielles du premier ordre λ_u, λ_v, μ_u et μ_v comme des coefficients, puisse être inversé de telle sorte que les six dérivées partielles λ_{uu}, λ_{uv}, λ_{vv}, μ_{uu}, μ_{uv} et μ_{vv} s'expriment en fonction des six dérivées partielles E_u, E_v, F_u, F_v, G_u et G_v. Cette intuition va se confirmer.

Pour commencer, on observe qu'il y a un certain déséquilibre[45] dans ce système (6.2.4) : les troisième et quatrième équations comportent plus de termes que les première, deuxième, cinquième et sixième. Pour rétablir

[45] Seuls des moments intermédiaires d'examen interrogatif peuvent déclencher de nouveaux actes significatifs de calcul.

l'équilibre, il suffit de retrancher la deuxième équation de la troisième et de retrancher la cinquième équation de la quatrième, ce qui donne, en recopiant simultanément les quatre équations non modifiées :

$$
\begin{aligned}
E_u &= \lambda_{uu}\,\mu_u + \lambda_u\,\mu_{uu},\\
E_v &= \lambda_{uv}\,\mu_u + \lambda_u\,\mu_{uv},\\
2F_u - E_v &= \lambda_{uu}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{uu},\\
2F_v - G_u &= \lambda_u\,\mu_{vv} + \lambda_{vv}\,\mu_u,\\
G_u &= \lambda_{vu}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{vu},\\
G_v &= \lambda_{vv}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{vv}.
\end{aligned}
\tag{6.2.4}
$$

Maintenant, il devient particulièrement aisé d'inverser ce nouveau système linéaire. En effet, on voit qu'il se décompose en trois sous-systèmes linéaires à deux inconnues :

(a) la première et la troisième équations, aux deux inconnues λ_{uu} et μ_{uu} ;

(b) la deuxième et la cinquième équations, aux deux inconnues λ_{uv} et μ_{uv} ;

(c) la quatrième et la sixième équations, aux deux inconnues λ_{vv} et μ_{vv}.

De plus, chacun de ces trois systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues fait apparaître le déterminant 2×2

$$
\begin{vmatrix} \lambda_u & \mu_u \\ \lambda_v & \mu_v \end{vmatrix} = \lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v,
$$

car chacun d'entre eux s'écrit sous la forme

$$
\begin{aligned}
A &= \lambda_u\,X + \mu_u\,Y,\\
B &= \lambda_v\,X + \mu_v\,Y,
\end{aligned}
$$

avec des constantes données A, B et des inconnues X, Y qui sont différentes dans les trois cas. Or il existe des formules algébriques élémentaires pour résoudre de tels systèmes :

$$
\begin{aligned}
X &= \frac{\mu_v\,A - \mu_u\,B}{\lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v},\\
Y &= \frac{\lambda_u\,B - \lambda_v\,A}{\lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v},
\end{aligned}
$$

valables lorsque le déterminant au dénominateur ne s'annule pas. Heureusement par hypothèse, les différentielles de λ et de μ sont linéairement indépendantes en tout point de coordonnées $(u,\, v)$, d'où il découle que le déteminant en question ne s'annule en aucun point. On en déduit immédiatement les formules de résolution pour les dérivées partielles du second ordre :

$$\begin{aligned}
\lambda_{uu} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[2\lambda_u\,F_u - \lambda_u\,E_v - \lambda_v\,E_u]\,,\\
\mu_{uu} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[\mu_v\,E_u - 2\mu_u\,F_u + \mu_u\,E_v]\,,\\
\lambda_{uv} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[\lambda_u\,G_u - \lambda_v\,E_v]\,,\\[1em]
\mu_{uv} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[\mu_v\,E_v - \mu_u\,G_u]\,,\\
\lambda_{vv} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[\lambda_u\,G_v - 2\lambda_v\,F_v + \lambda_v\,G_u]\,,\\
\mu_{vv} &= \frac{1}{\lambda_u\mu_v - \mu_u\,\lambda_v}\,[2\mu_v\,F_v - \mu_v\,G_u - \mu_u\,G_v]\,.
\end{aligned}$$

Ainsi, les six dérivées partielles d'ordre deux des fonctions λ et μ s'expriment-elles en fonction de leurs dérivées partielles d'ordre 1, et en fonction aussi des dérivées partielles d'ordre 1 des coefficients métriques E, F, G.

À présent, on peut vérifier que l'équation énoncée par le théorème est *nécessaire* pour l'existence de ces deux fonctions λ et μ.

Pour cela, on commence par redifférentier les équations (6.2.4) — mécaniquement, une fois encore — par rapport à u et à v, ce qui donne dix équations[46] :

$$\begin{aligned}
E_{uu} &= \lambda_{uuu}\,\mu_u + 2\lambda_{uu}\,\mu_{uu} + \lambda_u\,\mu_{uuu},\\
E_{uv} &= \lambda_{uuv}\,\mu_u + \lambda_{uu}\,\mu_{uv} + \lambda_{uv}\,\mu_{uu} + \lambda_u\,\mu_{uuv},\\
E_{vv} &= \lambda_{uvv}\,\mu_u + 2\lambda_{uv}\,\mu_{uv} + \lambda_u\,\mu_{uvv},\\[1em]
2F_{uu} - E_{uv} &= \lambda_{uuu}\,\mu_v + \lambda_{uu}\,\mu_{uv} + \lambda_{uv}\,\mu_{uu} + \lambda_v\,\mu_{uuu},\\
2F_{uv} - E_{vv} &= \lambda_{uuv}\,\mu_v + \lambda_{uu}\,\mu_{vv} + \lambda_{vv}\,\mu_{uu} + \lambda_v\,\mu_{uuv},\\
2F_{uv} - G_{uu} &= \lambda_{uu}\,\mu_{vv} + \lambda_u\,\mu_{uvv} + \lambda_{uvv}\,\mu_u + \lambda_{vv}\,\mu_{uu},\\
2F_{vv} - G_{uv} &= \lambda_{uv}\,\mu_{vv} + \lambda_u\,\mu_{vvv} + \lambda_{vvv}\,\mu_u + \lambda_{vv}\,\mu_{uv},\\[1em]
G_{uu} &= \lambda_{uuv}\,\mu_v + 2\lambda_{uv}\,\mu_{uv} + \lambda_v\,\mu_{uuv},\\
G_{uv} &= \lambda_{uvv}\,\mu_v + \lambda_{vv}\,\mu_{uv} + \lambda_{uv}\,\mu_{vv} + \lambda_v\,\mu_{uvv},\\
G_{vv} &= \lambda_{vvv}\,\mu_v + 2\lambda_{vv}\,\mu_{vv} + \lambda_v\,\mu_{vvv}.
\end{aligned}$$

[46] On vérifie que neuf d'entre elles seulement sont linéairement indépendantes, exactement le même nombre, neuf, des dérivées partielles d'ordre deux des trois fonctions E, F et G, *i.e.* E_{uu}, E_{uv}, E_{vv}, F_{uu}, F_{uv}, F_{vv}, G_{uu}, G_{uv} et G_{vv}. En effet, les équations numéro 3, 5, 6 et 8 sont évidemment linéairement dépendantes, car la combinaison linéaire $E_{vv} + (2F_{uv} - E_{vv}) - (2F_{uv} - G_{uu}) - G_{uu}$ donne trivialement un résultat nul.

Ce système paraît complexe au premier abord, mais pour y discerner des structures, il suffit de se concentrer[47] seulement sur les dérivées partielles d'ordre trois des fonctions λ et μ, en négligeant — au moins pour l'instant — la lecture des autres termes qui n'incorporent que des dérivées d'ordre deux. On utilisera alors le signe « $\equiv$ » pour signifier que les dérivées partielles d'ordre deux sont supprimées à la lecture :

$$\begin{aligned}
E_{uu} &\equiv \lambda_{uuu}\,\mu_u + \lambda_u\,\mu_{uuu}, \\
E_{uv} &\equiv \lambda_{uuv}\,\mu_u + \lambda_u\,\mu_{uuv}, \\
E_{vv} &\equiv \lambda_{uvv}\,\mu_u + \lambda_u\,\mu_{uvv}, \\[1ex]
2F_{uu} - E_{uv} &\equiv \lambda_{uuu}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{uuu}, \\
2F_{uv} - E_{vv} &\equiv \lambda_{uuv}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{uuv}, \\
2F_{uv} - G_{uu} &\equiv \lambda_u\,\mu_{uvv} + \lambda_{uvv}\,\mu_u, \\
2F_{vv} - G_{uv} &\equiv \lambda_u\,\mu_{vvv} + \lambda_{vvv}\,\mu_u, \\[1ex]
G_{uu} &\equiv \lambda_{uuv}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{uuv}, \\
G_{uv} &\equiv \lambda_{uvv}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{uvv}, \\
G_{vv} &\equiv \lambda_{vvv}\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_{vvv}.
\end{aligned}$$

Alors, après quelque examen attentif, l'œil avisé du calculateur verra apparaître une relation linéaire non triviale : en additionnant la cinquième et la sixième équations et en soustrayant la troisième et la huitième équations, on constate que :

$$-\,2\,E_{vv} + 4\,F_{uv} - 2\,G_{uu} \equiv 0.$$

Ainsi cette combinaison linéaire $-2(E_{vv}-2F_{uv}+G_{uu})$ de dérivées partielles d'ordre deux s'annule modulo les dérivées partielles d'ordre inférieur. Au facteur -2 près, c'est la même combinaison linéaire qui intervient dans la dernière ligne du théorème.

Complétion de la combinaison linéaire caractéristique. Il faut évidemment effectuer maintenant la même combinaison linéaire avec les équations complètes, c'est-à-dire : additionner la cinquième et la sixième équations, soustraire la troisième et la huitième équations, et diviser le tout par -2, ce qui donne :

$$E_{vv} - 2F_{uv} + G_{uu} = 2\lambda_{uv}\,\mu_{uv} - \lambda_{uu}\,\mu_{vv} - \lambda_{vv}\,\mu_{uu}.$$

Dans le membre de droite de cette équation, on doit à présent remplacer les valeurs de λ_{uv}, de μ_{uv}, de λ_{uu}, de μ_{vv}, de λ_{vv} et de μ_{uu} trouvées plus haut et

[47] La phénoménologie étudie le 'donné commun de la perception' pour les structures transcendantales de l'intentionnalité et de la conscience. La *lecture-en-recherche* des formules mathématiques ouvre vers d'autres caractères constitués de la donation à la pensée.

développer les produits :

$$\begin{aligned}
E_{vv} - 2\,F_{uv} + G_{uu} &= 2\lambda_{uv}\,\mu_{uv} - \lambda_{uu}\,\mu_{vv} - \lambda_{vv}\,\mu_{uu} \\
&= \frac{1}{[\lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v]^2}\big\{2(\lambda_u\,G_u - \lambda_v\,E_v)(\mu_v\,E_v - \mu_u\,G_u)+ \\
&\quad + (-2\lambda_u\,F_u + \lambda_u\,E_v + \lambda_v\,E_u)(2\mu_v\,F_v - \mu_v\,G_u - \mu_u\,G_v)+ \\
&\quad + (-\lambda_u\,G_v + 2\lambda_v\,F_v - \lambda_v\,G_u)(\mu_v\,E_u - 2\mu_u\,F_u + \mu_u\,E_v)\big\} \\
&= \frac{1}{[\lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v]^2}\big\{E_v\,G_u(\lambda_u\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_u)- \\
&\quad - E_v\,E_v(2\lambda_v\,\mu_v) - G_u\,G_u(2\lambda_u\,\mu_u)- \\
&\quad - F_u\,F_v(4\lambda_u\,\mu_v + 4\lambda_v\,\mu_u) + F_u\,G_u(2\lambda_u\,\mu_v + 2\lambda_v\,\mu_u)+ \\
&\quad + F_u\,G_v(4\lambda_u\,\mu_u) + E_v\,F_v(2\lambda_u\,\mu_v + 2\lambda_v\,\mu_u)- \\
&\quad - E_v\,G_v(2\lambda_u\,\mu_u) + E_u\,F_v(4\lambda_v\,\mu_v)- \\
&\quad - E_u\,G_u(2\lambda_v\,\mu_v) - E_u\,G_v(\lambda_u\,\mu_v + \lambda_v\,\mu_u)\big\}.
\end{aligned}$$

Pour achever d'établir l'équation du théorème, on observe que le dénominateur ci-dessus s'exprime en fonction de E, F, G :

$$\begin{aligned}
\big[\lambda_u\,\mu_v - \mu_u\,\lambda_v\big]^2 &= \lambda_u^2\,\mu_v^2 - 2\lambda_u\,\lambda_v\,\mu_u\,\mu_v + \mu_u^2\,\lambda_v^2 \\
&= -4\big[E\,G - F^2\big].
\end{aligned}$$

En définitive, on obtient l'équation annoncée sous la forme :

$$\begin{aligned}
E_{vv} - 2\,F_{uv} + G_{uu} = \frac{1}{2\,[E\,G - F^2]}\big\{ &- E_v\,G_u(F)+ \\
&+ E_v\,E_v(G) + G_u\,G_u(E)+ \\
&+ F_u\,F_v(4F) - F_u\,G_u(2F)- \\
&- F_u\,G_v(2E) - E_v\,F_v(2F)+ \\
&+ E_v\,G_v(E) - E_u\,F_v(2G)+ \\
&+ E_u\,G_u(G) + E_u\,G_v(F)\big\},
\end{aligned}$$

équivalente à celle annoncée par le théorème. □

12. Commentaire de la *computatio egregia*

Systématicité et complétude. Pour calculer la mesure de courbure d'une surface quelconque, Gauss procède — on l'a vu — d'une manière systématique et complète, traitant simultanément les trois représentations possibles d'une surface : la représentation implicite, la représentation paramétrée et la représentation graphée. Grâce à la totalisation qu'offre une telle approche, il se donne la possibilité de *circuler mathématiquement* d'une représentation à une autre, toujours par les voies du calcul, à la fois en complexité, et en *explicite-té*.

Scholie. En lui-même, le Calcul est non local, non sériel, non temporel, mais il est un réseau de liens multiples qui expriment *tous* les chemins qui peuvent être actualisables au sein de son graphe interne. □

Gauss pense donc les mathématiques comme un tout de calcul que l'esprit, enchaîné à la temporalité progressive des actes, doit — afin d'en synthétiser la totalité — parcourir et explorer jusqu'à en avoir compris (presque) tous les délinéaments co-présents. La charpente des *Disquisitiones* laisse en effet deviner une telle intention, confirmée par l'élégance formelle des expressions symboliques.

Spécialement pour l'exposition de la *computatio egregia*, la disposition préliminaire des éléments géométriques va faire bénéficier de la totalisation en parallèle qui avait été anticipée dans les premiers paragraphes. Un lien constant de *traduction fonctionnelle* depuis les formules graphées vers les formules paramétrées va être mis en œuvre, d'où l'importance d'avoir calculé d'abord la courbure $\kappa = \frac{z_{xx}\, z_{yy} - z_{xy}^2}{(1+z_x^2+z_y^2)^2}$ dans le cas où z est une certaine fonction de x et de y.

Au contraire, la présentation immédiatement intrinsèque des tenseurs de courbure que l'on apprend et que l'on reproduit dans les traités modernes de géométrie différentielle *perd en complétude d'explicitation* ce que Gauss mettait au fondement d'une saine et adéquate *compréhesion-en-totalité* des concepts. C'est pourquoi, dans ce commentaire — mathématique et spéculatif — de la *computatio egregia*, nulle référence ne sera faite aux concepts qui sont apparus ultérieurement pour encadrer le calcul et pour lui conférer un support géométrique, concepts tels que, par exemple : *dérivées première et seconde du rayon-vecteur* $\mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$; *formules de produit scalaire* ; *première forme fondamentale* ; *application de Weingarten* ; *coefficients de Christoffel* ; *transport parallèle* ; *connexion de Levi-Cività* ; *etc.*

L'objectif réflexif et métaphysique, ici, est surtout de démontrer par l'Exemple en quoi les tensions du Calcul impliquent une *morphogénèse* du réel mathématique qui est *antérieure à toute formation de concepts*.

Composantes du vecteur normal. En représentation graphée $z = z(x, y)$, le champ de vecteurs $\mathbf{n}\colon S \to T^3_{\mathbb{R}}|_S$ normal à la surface possède trois composantes (X, Y, Z) qui sont des fonctions de (x, y) satisfaisant :

$$0 = X\, dx + Y\, dy + Z\, dz,$$

lors de tout déplacement infinitésimal (dx, dy, dz) sur la surface, où $dz = z_x\, dx + z_y\, dy$ s'exprime en fonction de dx et de dy.

> Dans la *seconde* méthode, on exprime les coordonnées en forme de fonctions de deux variables p et q. Supposons que par la différentiation de ces fonctions, on ait :
>
> $$dx = a\,dp + a'\,dq,$$
> $$dy = b\,dp + b'\,dq,$$
> $$dz = c\,dp + c'\,dq;$$
>
> par la substitution de ces valeurs dans une formule donnée ci-dessus, nous obtenons :
>
> $$(a\,X + b\,Y + c\,Z)\,dp + (a'\,X + b'\,Y + c'\,Z)\,dq = 0.$$ **[181]**, 11

Ici donc, les trois composantes du vecteur normal en représentation paramétrique :

$$(p,q) \longmapsto \big(x(p,q),\, y(p,q),\, z(p,q)\big) =: \mathbf{x}(p,q)$$

ne sont *pas* calculées en partant de la condition d'orthogonalité de $\mathbf{n}(p,q)$ avec les deux vecteurs tangents indépendants $\mathbf{x}_p(p,q)$ et $\mathbf{x}_q(p,q)$, mais elles sont calculées en se ramenant au cas — exposé à l'instant par Gauss — d'un graphe. *Une seule et même surface est vue sous trois angles abstraitement équivalents mais calculatoirement différents*. La nécessité interne des mathématiques commande en effet de tracer à tout instant des voies de parcours pour passer d'une représentation à une autre.

Observation sur les notations : la majeure partie des calculs de courbure repose sur de l'algèbre différentielle dans des espaces de jets de fonctions à plusieurs variables, laquelle algèbre différentielle se ramène à de la pure algèbre commutative lorsqu'on envisage les dérivées partielles impliquées comme de nouvelles variables indépendantes. Par conséquent, la raison pour laquelle les *Disquisitiones* introduisent systématiquement de nouvelles lettres en lieu et place des dérivées partielles, telles que, ici-même :

$$a := \frac{dx}{dp},\;\; a' := \frac{dx}{dq},\qquad b := \frac{dy}{dp},\;\; b' := \frac{dy}{dq},\qquad c := \frac{dz}{dp},\;\; c' := \frac{dz}{dq},$$

ne tient donc pas seulement au fait qu'un gain en découle en termes d'abréviation, mais aussi à une réelle *conscience a posteriori* de l'essence algébrique des calculs.

> Comme cette équation doit avoir lieu indépendamment des valeurs des différentielles dp, dq, on aura évidemment :
>
> $$a\,X + b\,Y + c\,Z = 0, \qquad a'\,X + b'\,Y + c'\,Z = 0;$$
>
> d'où nous concluons que X, Y, Z doivent être respectivement proportionnels aux quantités :
>
> $$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'.$$ **[181]**, 11

La résolution formelle explicite d'un système linéaire de deux équations indépendantes à trois inconnues doit faire ici partie de la culture du lecteur. Point de calcul vectoriel, point de combinaisons linéaires, point de rappel sur la non-annulation d'un déterminant 2×2, mais plutôt : *expression formelle pure* de la solution (à un facteur multiplicatif près), symétrique, esthétique, rigoureuse. Rien de plus satisfaisant pour l'esprit que de voir 'jaillir' une formule adéquate, vérité offerte de la chose à saisir, en particulier lorsqu'elle est déjà connue par ailleurs.

Pour terminer, il reste seulement à *normaliser* à 1 la norme du vecteur orthogonal.

> Posant donc, pour abréger :
> $$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \Delta,$$
> on aura, soit :
> $$X = \frac{bc' - cb'}{\Delta}, \qquad Y = \frac{ca' - ac'}{\Delta}, \qquad Z = \frac{ab' - ba'}{\Delta},$$
> soit :
> $$X = \frac{cb' - bc'}{\Delta}, \qquad Y = \frac{ac' - ca'}{\Delta}, \qquad Z = \frac{ba' - ab'}{\Delta}.$$
> [**181**], 11

Transfert à la représentation paramétrique. L'objectif du § X des *Disquisitiones* est de *transférer à la représentation paramétrique* la formule extrinsèque pour la courbure obtenue précédemment au § VII :

$$\kappa = \frac{TV - U^2}{(1 + t^2 + u^2)^2}.$$

Si aucune relation d'inter-expression ne sera entreprise en liaison avec la formule obtenue juste auparavant dans le cas d'une représentation implicite :

$$\begin{aligned}(P^2 + Q^2 + R^2)\,\kappa = P^2\,(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2) + \\ + R^2(P'Q' - R''^2) + 2\,QR\,(Q''R'' - P'P'') + \\ + 2\,PR\,(P''R'' - Q'Q'') + 2\,PQ\,(P''Q'' - R'R''),\end{aligned}$$

c'est probablement que Gauss estime inutile de *fermer un triangle de calculs* dont deux côtés auront été explicités. En tout cas, il est suffisant pour satisfaire la nécessité de complétude d'avoir achevé les calculs dans les trois représentations, lesquels sont détaillés dans l'ordre progressif de leur complexité calculatoire.

> Nous obtiendrons une formule encore plus compliquée et renfermant quinze éléments, si nous voulons suivre la seconde des méthodes propres à l'étude des surfaces. Il est très-important cependant d'arriver à cette formule. [**181**], 22–23

À nouveau, des lettres algébriques se substitueront aux dérivées partielles en tant que notations nouvelles :

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \frac{d^2x}{dp^2}, & \alpha' &:= \frac{d^2x}{dp\,dq}, & \alpha'' &:= \frac{d^2x}{dq^2},\\
\beta &:= \frac{d^2y}{dp^2}, & \beta' &:= \frac{d^2y}{dp\,dq}, & \beta'' &:= \frac{d^2y}{dq^2},\\
\gamma &:= \frac{d^2z}{dp^2}, & \gamma' &:= \frac{d^2z}{dp\,dq}, & \gamma'' &:= \frac{d^2z}{dq^2},
\end{aligned}$$

propres à se combiner entre elles comme dans un simple anneau de polynômes.

> En outre nous ferons pour abréger :
>
> $$bc' - cb' = A,$$
> $$ca' - ac' = B,$$
> $$ab' - ba' = C.$$
>
> Cela posé, nous observons d'abord que l'on a :
>
> $$A\,dx + B\,dy + C\,dz = 0,$$
>
> ou bien :
>
> $$dz = -\tfrac{A}{C}\,dx - \tfrac{B}{C}\,dy;$$
>
> en sorte qu'en regardant z comme une fonction de x, y, on doit avoir :
>
> $$\frac{dz}{dx} = t = -\frac{A}{C},$$
> $$\frac{dz}{dy} = u = -\frac{B}{C}.$$
>
> [**181**], 23

Ici, les composantes du champ de vecteurs normal à la surface entrent nécessairement dans les calculs de différentielles, et elles vont devoir être différentiées par rapport à p et à q. Comme chacune de leurs expressions incorpore déjà quatre quantités fondamentales, les calculs ultérieurs, s'ils devaient être conduits de manière complètement explicites, s'avèreraient prendre des proportions inquiétantes, ce à cause de quoi l'œil du mathématicien risquerait de ne plus être à même de *discerner les structures formelles organisatrices*. L'acte d'introduire une notation temporaire pour une quantité semi-complexe, *i.e.* d'introduire une *dénomination résumée par lettre*, constitue un universel de la technique mathématique, en tant qu'il subsume un multiple sous une unité provisoire. Cette unité notationnelle entretiendra des relations algébriques contractées avec les autres quantités formelles pendant lesquelles certaines simplifications pourront être lisibles à un tel niveau, *sans qu'il soit nécessaire de deviner les mêmes simplifications formelles au* *niveau beaucoup plus foisonnant de l'expansion complète des formules*. Autrement dit, d'un point de vue strictement calculatoire qui se refuserait à céder à l'interprétation de ces trois déterminants 2×2 comme composantes du *produit vectoriel hamiltonien* $\mathbf{x}_u \wedge \mathbf{x}_v$, Gauss synthétise trois 'molécules formelles de calcul' qu'il s'autorisera ensuite, quand cela sera nécessaire, à désintégrer en atomes fondamentaux.

Mais des équations $dx = a\,dp + a'\,dq$, $dy = b\,dp + b'\,dq$, nous tirons :

$$C\,dp = b'\,dx - a'\,dy,$$
$$C\,dq = -b\,dx + a\,dy.$$

Par là, nous obtenons les différentielles complètes de t et de u :

$$C^3\,dt = \left(A\,\frac{dC}{dp} - C\,\frac{dA}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) + \left(C\,\frac{dA}{dq} - A\,\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy),$$
$$C^3\,du = \left(B\,\frac{dC}{dp} - C\,\frac{dB}{dp}\right)(b'\,dx - a'\,dy) + \left(C\,\frac{dB}{dq} - B\,\frac{dC}{dq}\right)(b\,dx - a\,dy).$$

[**181**], 23

Gauss ne signale pas que les valeurs du déterminant C sont automatiquement non nulles, puisque par hypothèse, C exprime le jacobien de l'application inversible (ou difféomorphisme local) $(p,q) \mapsto (x,y)$: c'est clair ; il n'y a pas d'erreur ; au lecteur de s'en rendre compte par lui-même. Cette hypothèse — toujours satisfiable — relative à la disposition du système de coordonnées par rapport à la surface permet alors non seulement de résoudre les deux différentielles dp et dq par rapport à dx et dy grâce à des formules élémentaires considérées comme connues, mais encore de *diviser* par C, et de raisonner ensuite dans un certain corps de fractions rationnelles. Toutefois, Gauss préfère calculer *sans écrire aucun dénominateur*, et c'est la raison pour laquelle il multiplie les membres de gauche par C ou par C^3, afin de gommer la lourdeur d'une réduction au même dénominateur, qui serait exigible après différentiation d'une expression rationnelle. On peut voir en cela un signe de *distinction de calculateur*, si doué qu'il *connaît déjà* toute l'élégance des raccourcis de ce type, d'autant plus que les expressions offertes à la lecture sont parfaitement polies et symétriques.

Par ailleurs, il faut aussi noter que l'évanouissement des dénominateurs dans le calcul intermédiaire non présenté :

$$\begin{aligned}
C^3\,dt &= C^3\bigg\{\bigg(-\frac{\partial A}{\partial p}\,\frac{1}{C} + A\,\frac{\partial C}{\partial p}\,\frac{1}{C^2}\bigg)\,dp + \bigg(-\frac{\partial A}{\partial q}\,\frac{1}{C} + A\,\frac{\partial C}{\partial q}\,\frac{1}{C^2}\bigg)\,dq\bigg\} \\
&= \bigg(-C\,\frac{\partial A}{\partial p} + A\,\frac{\partial C}{\partial p}\bigg)\,C\,dp + \bigg(-C\,\frac{\partial A}{\partial q} + A\,\frac{\partial C}{\partial q}\bigg)\,C\,dq \\
&= \bigg(A\,\frac{\partial C}{\partial p} - C\,\frac{\partial A}{\partial p}\bigg)(b'\,dx - a'\,dy) + \bigg(C\,\frac{\partial A}{\partial q} - A\,\frac{\partial C}{\partial q}\bigg)(b\,dx - a\,dy),
\end{aligned}$$

exige de *multiplier à l'avance* le membre de gauche par C^3 — et non pas par C^2 — sachant qu'un premier facteur C^2 sera absorbé par les dérivées partielles entre parenthèses, et qu'un second facteur C^1 sera nécessaire pour que les deux différentielles $C\,dp$ et $C\,dq$ apparaissent *sans dénominateur*, exactement comme elles avaient été calculées juste auparavant.

Scholie. En définitive, malgré une apparence de fluidité et de complétude, certains calculs intermédiaires sont néanmoins régulièrement sous-entendus ; seules les expressions finales nettes et symétriques sont offertes au lecteur.

Toujours à ce sujet, une question de philosophie générale des mathématiques demeure : quel statut conférer aux calculs intermédiaires, en tant que traces effaçables d'un parcours ? Un doute s'installe, car il est tout à fait possible que des causes importantes vis-à-vis du contenu se jouent et se poursuivent même dans les calculs élémentaires — que ces calculs soient sous-entendus (laissés au lecteur), ou inconsciemment éludés, voire même cachés intentionnellement. □

Maintenant, si dans ces formules nous substituons les valeurs suivantes :

$$
\begin{aligned}
\frac{dA}{dp} &= c'\,\beta + b\,\gamma' - c\,\beta' - b'\,\gamma,\\
\frac{dA}{dq} &= c'\,\beta' + b\,\gamma'' - c\,\beta'' - b'\,\gamma',\\
\frac{dB}{dp} &= a'\,\gamma + c\,\alpha' - a\,\gamma' - c'\,\alpha,\\
\frac{dB}{dq} &= a'\,\gamma' + c\,\alpha'' - a\,\gamma'' - c'\,\alpha',\\
\frac{dC}{dp} &= b'\,\alpha + a\,\beta' - b\,\alpha' - a'\,\beta,\\
\frac{dC}{dq} &= b'\,\alpha' + a\,\beta'' - b\,\alpha'' - a'\,\beta',
\end{aligned}
$$

et si nous remarquons que les valeurs des différentielles dt, du ainsi obtenues doivent être égales, indépendamment des différentielles dx, dy, aux quantités $T\,dx + U\,dy$, $U\,dx + V\,dy$ respectivement, nous trouverons, après quelques transformations assez aisées :

$$
\begin{aligned}
C^3\,T = \alpha\,A\,b'^2 + \beta\,B\,b'^2 + \gamma\,C\,b'^2 - \\
- 2\,\alpha'\,A\,b\,b' - 2\,\beta'\,B\,b\,b' - 2\,\gamma'\,C\,b\,b' + \\
+ \alpha''\,A\,b^2 + \beta''\,B\,b^2 + \gamma''\,C\,b^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
C^3\,U = & -\alpha\,A\,a'\,b' - \beta\,B\,a'\,b' - \gamma\,C\,a'\,b' + \\
& + \alpha'\,A\,(ab' + ba') + \beta'\,B\,(ab' + ba') + \gamma'\,C\,(ab' + ba') - \\
& - \alpha''\,A\,a\,b - \beta''\,B\,a\,b - \gamma''\,C\,a\,b, \\
C^3\,V = & \;\alpha\,A\,a'^2 + \beta\,B\,a'^2 + \gamma\,C\,a'^2 - \\
& - 2\,\alpha'\,A\,a\,a' - 2\,\beta'\,B\,a\,a' - 2\,\gamma'\,C\,a\,a' + \\
& + \alpha''\,A\,a^2 + \beta''\,B\,a^2 + \gamma''\,C\,a^2. \qquad \textbf{[181]},\ 24
\end{aligned}
$$

Ici, les calculs commencent à se déployer véritablement. Quelque peu paradoxalement, la théorie des surfaces — objets géométriques à *deux* variables seulement — implique des manipulations algébriques dans des anneaux de polynômes à un nombre beaucoup plus considérable de variables, puisque si l'on compte le nombre des quantités (en partie redondantes et hybrides à cause du choix des notations) qui interviennent dans les expressions rationnelles de U, V, T ci-dessus, à savoir : a, a', b, b', c, c', α, α', α'', β, β', β'', γ, γ', γ'', A, B, C, on trouve au total **18** lettres, c'est-à-dire nettement plus que la dimension **2** des surfaces étudiées.

Scholie. Le paradoxe de l'augmentation (explosion ?) de la dimension d'étude est ubiquitaire en géométrie différentielle computationnelle. Question ouverte de philosophie générale des mathématiques : pourquoi en est-il ainsi ? quelles sont les causes profondes ? *A priori*, le synthétique mathématique doit-t-il nécessairement s'exprimer dans un multiple qui le dépasse toujours sur le plan numéraire ? □

Dans un premier moment, les six dérivées partielles $\frac{dA}{dp}$, $\frac{dA}{dq}$, $\frac{dB}{dp}$, $\frac{dB}{dq}$, $\frac{dC}{dp}$, $\frac{dC}{dq}$ se calculent automatiquement en partant des expressions quadratiques de A, B, C et en appliquant la règle de Leibniz, raison pour laquelle Gauss n'en dit rien, laissant à la réactivité du lecteur le soin de deviner cela spontanément et de vérifier au besoin toutes les étapes de calcul.

À tout le moins pour une simple lecture passive, les six expressions sont écrites en totalisation, toutes leurs symétries symboliques étant intentionnellement rendues visibles, comme si une *Gestalt* du symbolique devait suffire pour confirmer la correction des expressions. Ensuite, dans un second moment, ces six dérivées partielles sont *insérées* dans les deux expressions précédentes de $C^3\,dt$ et de $C^3\,du$.

Actes non explicités : des expansions, des réorganisations de termes, des ordonnancements de monômes — la tâche est conséquente. Enfin, les quatre coefficients de dp, dq dans $C^3\,dt$ et de dp, dq dans $C^3\,du$ permettent d'extraire les valeurs désirées de $C^3\,T$, $C^3\,U$, $C^3\,V$: cela, n'est pas non plus explicitement écrit, exemple supplémentaire de '*non-littérarité*' du Calcul.

Si maintenant nous posons, pour abréger :

(1) $$A\,\alpha + B\,\beta + C\,\gamma = D$$

(2) $$A\,\alpha' + B\,\beta' + C\,\gamma' = D'$$

(3) $$A\,\alpha'' + B\,\beta'' + C\,\gamma'' = D''$$

il viendra :

$$\begin{aligned} C^3\,T &= D\,b'^2 - 2\,D'\,b\,b' + D''\,b^2, \\ C^3\,U &= -D\,a'\,b' + D'\,(ab' + ba') - D''\,a\,b, \\ C^3\,V &= D\,a'^2 - 2\,D'\,a\,a' + D''\,a^2. \end{aligned}$$ [**181**], 24–25

Certes, ces trois expressions D, D', D'' ne sont autres que de simples déterminants 3×3 de dérivées partielles du rayon vecteur $\mathbf{x}(u, v)$, mais il a été convenu ci-dessus de faire abstraction de toute réinterprétation vectorielle des calculs de Gauss. Davantage, il faut voir ici, dans une certaine opacité des calculs due à leur volume, un acte de synthèse visuelle par factorisation inévidente. D'ailleurs, Gauss avait finement anticipé cette *micro-découverte formelle locale* (que ses manuscrits ont dû scruter) : en effet, dans les expressions de $C^3\,T$, $C^3\,U$, $C^3\,V$, des sommes identiques de trois termes se reconstituaient en facteurs, puisque les équations brutes étaient *déjà présentées dans un ordre qui ferait facilement voir au lecteur après-coup l'émergence de D, D', D''.*

Par là nous obtenons, tous calculs faits :

$$C^6(TV - U^2) = (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 = (DD'' - D'^2)\,C^2,$$

d'où résulte l'expression suivante, pour la mesure de la courbure :

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$ [**181**], 25

La métamorphose importante et remarquable du terme carré au dénominateur :

$$1 + z_x^2 + z_y^2 = 1 + t^2 + u^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

passe ici dans un *tacet* implicite qui relègue une telle vérification au statut de l'évidence. Au niveau où en sont les calculs, l'auteur est en droit d'attendre que son lecteur soit apte à résoudre les exercices implicites qu'il lui laisse. Cette relation n'est pas explicitée par anticipation dans ce qui précède du mémoire, et en fait, elle apparaît plus bas, sans calcul détaillé. Toutefois elle est cruciale, puisque grâce à elle, le sort de la métamorphose vers l'intrinsèque s'avère maintenant définitivement réglé quant au dénominateur.

Scholie. Voici donc un exemple de la *pensée tue*, ce phénomène qui affecte toutes les mathématiques aussi bien dans leur transmission didactique que dans leur développement par la recherche. À aucun moment Gauss n'écrit qu'il cherche à *transsubstantier vers l'intrinsèque* la formule graphée pour la courbure. Un mouvement synthétique long et irréversible s'engage sans rien en dire. Du point de vue de l'exégète qui a pris connaissance des études sur le *Nachlass*, le paradoxe s'accentue quand on sait combien d'efforts Gauss a dépensés afin de réaliser l'intrinsèque par une formule mathématique. □

Élimination du dernier bastion d'extrinsèque. En résumé, la formule précédente pour la courbure :

$$\kappa = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2},$$

bien que relativement complexe lorsqu'on en explicite complètement les composantes, demeure essentiellement *sans mystère*, puisqu'elle découle de la formule graphée par simple transfert de ses termes différentiels. Mais elle fait encore intervenir dans son numérateur les trois dimensions de plongement : dernier bastion d'extrinsèque.

> À l'aide de la formule ci-dessus, nous allons maintenant en obtenir une autre qui peut être comptée au nombre des théorèmes les plus féconds dans la théorie des surfaces courbes. [**181**], 25

Le § XI des *Disquisitiones* entreprend alors sans le dire un *calcul final*, lequel change de nature, puisqu'il s'agit maintenant d'un véritable *calcul d'élimination*.

Scholie. Gauss *sait* qu'il a découvert une grande vérité mathématique. Pourquoi se dépenserait-il à en écrire les tenants et aboutissants[48] ? Tel est son choix métaphysique : seule compte la vérité, dite par un calcul à laquelle le résultat a conduit *irréversiblement*. □

Sans aucune explication à cet endroit précis, trois notations par lettres — *retenues par la postérité* ! — sont introduites pour les coefficients métriques en représentation paramétrique :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= E, \\ aa' + bb' + cc' &= F, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 &= G. \end{aligned}$$

[48] D'après l'article "*Gauss zum Gedächtniss*" écrit en 1856 par Sartorius von Waltershausen : « Une fois qu'un bâtiment a été construit [$\cdots$] il faut qu'on ne voie plus les échafaudages » répétait-il.

Systématiquement aussi, six autres notations sont introduites :

$$a\,\alpha + b\,\beta + c\,\gamma = m,$$
$$a\,\alpha' + b\,\beta' + c\,\gamma' = m',$$
$$a\,\alpha'' + b\,\beta'' + c\,\gamma'' = m'',$$
$$a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n,$$
$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n',$$
$$a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma' = n'',$$

et enfin, une dernière notation est introduite, qui ré-effectue une synthèse du dénominateur et qui explicite un acte passé sous silence un peu plus haut :

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \Delta.$$

> Éliminons des équations (1), (4), (7) les quantités β, γ, ce qui se fera en multipliant ces équations par $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$, et ajoutant ; nous aurons ainsi :
>
> $$\big[A\,(bc' - cb') + a\,(b'C - c'B) + a'\,(cB - bC)\big]\,\alpha$$
> $$= D\,(bc' - cb') + m\,(b'C - c'B) + n\,(cB - bC),$$
>
> équation que nous transformons facilement en celle-ci :
>
> $$A\,D = \alpha\,\Delta + a\,(nF - mG) + a'\,(mF - nE).$$ **[181]**, 25–26

Maintenant, les calculs d'élimination commencent, sans explication d'intention. Même en connaissance de l'objectif visé (la *formula egregia*), il se peut que l'on ne comprenne pas du premier coup ce que cherche à faire Gauss ici. En effet, il a choisi de ne pas dire tout de suite que les six quantités m, m', m'', n, n', n'' s'expriment en fonction des premières dérivées partielles de E, F, G, donc qu'elles conviennent pour la formule finale. On laissera donc temporairement en suspens la question de savoir à quoi sert l'élimination des quantités β, γ, et on modifiera légèrement l'ordre d'apparition de l'information.

Scholie. Au niveau de l'esprit, la *compréhension mathématique* est une synthèse qui embrasse une multiplicité d'actes de pensée suffisante pour qu'il soit possible de *circuler librement* d'un moment à un autre des raisonnements. Un désordre, certes, s'installe dans le flux des mentalisations, mais ce désordre d''*après coup*' est le *sang* d'une totalisation. □

Scholie. « Suivez le guide » ; « multipliez, additionnez, soustrayez telles et telles équations » ; « à la fin, vous obtiendrez le résultat désiré » : telles sont les (seules) informations que fournit un mémoire de mathématiques publié, mais ce n'est jamais de cette manière présentationnelle *a posteriori* que la pensée du calcul procède. La *vraie pensée causale des calculs* aura exploré le problème sous un *faisceau d'angles interrogatifs beaucoup* *plus complexes*. Elle aura développé complètement le numérateur $DD'' - D'^2$, réorganisé ses termes, examiné comment se combinent entre elles les trois dérivées partielles d'ordre le plus élevé $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$, $\mathbf{x}_{vv}$, du rayon vecteur $\mathbf{x}(u,v)$ et cherché à éliminer l'extrinsèque. □

Maintenant, il est évident que l'on a :

$$\frac{dE}{dp} = 2m, \quad \frac{dE}{dq} = 2\,m', \quad \frac{dF}{dp} = m' + n, \quad \frac{dF}{dq} = m'' + n',$$
$$\frac{dG}{dp} = 2\,n', \quad \frac{dG}{dq} = 2\,n'',$$

ou bien :

$$m = \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dp}, \quad m' = \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dq}, \quad m'' = \frac{dF}{dq} - \frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp},$$
$$n = \frac{dF}{dp} - \frac{1}{2}\,\frac{dE}{dq}, \quad n' = \frac{1}{2}\,\frac{dG}{dp}, \quad n'' = \frac{1}{2}\,\frac{dG}{dq};$$

de plus, il est facile de s'assurer que l'on a :

$$\begin{aligned}\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 &= \frac{dn}{dq} - \frac{dn'}{dp} = \frac{dm''}{dp} - \frac{dm'}{dq} \\ &= -\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2E}{dq^2} + \frac{d^2F}{dp\,dq} - \frac{1}{2}\cdot\frac{d^2G}{dp^2}.\end{aligned}$$

[**181**], 26–27

Le seul objectif de Gauss ici est de préparer une expression appropriée de $DD'' - D'^2$ qui guidera à l'avance — sans aucun moment d'exploration questionnante au sujet de son développement brut — vers une réorganisation de ses termes où les neuf dérivées partielles secondes apparaîtront seulement sous la forme quadratique :

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2.$$

Telle est l'intention 'technique' de ces calculs qui semblaient mystérieux au premier abord : que seule cette combinaison quadratique des dérivées partielles secondes apparaisse, puisqu'elle se ré-exprime comme :

$$-\tfrac{1}{2}\,E_{qq} + F_{pq} - \tfrac{1}{2}\,G_{pp}.$$

Scholie. Cette explication a l'air satisfaisante au premier abord. Toutefois, la vérité de l'*exploration-en-recherche* est beaucoup plus vaste et complexe, parce que de nombreuses *questions-idées* auront été éliminées à cause de l'accès irréversible à un but visé, et parce que de nombreuses autres explications n'auront pas été apportées.

En effet, est-ce la seule combinaison linéaire de dérivées partielles d'ordre deux qui s'exprime en fonction de E, F, G ? Comment les restes d'ordre 1 se réorganisent-ils ? Pourquoi cette combinaison quadratique est-elle multipliée par le dénominateur Δ ? Est-ce un phénomène universel ?

Que se passe-t-il en dimension supérieure ? Dans d'autres problèmes de géométrie différentielle, existe-t-il des phénomènes semblables de 'découverte' d'invariants par le biais de purs calculs ?

Toutes les questions de cette sorte, et d'autres encore situées plus au cœur des intentions techniques, sont irrémédiablement éliminées du texte publié — *pensée disparaissante* — bien qu'elles structurent la *pensée-productrice-en-recherche.* □

> En éliminant des mêmes équations, soit α et γ, soit α et β, on obtiendrait de même :
> $$BD = \beta\,\Delta + b\,(nF - mG) + b'(mF - nE),$$
> $$CD = \gamma\,\Delta + c\,(nF - mG) + c'(mF - nE).$$
> [**181**], 26

Ici comme auparavant, ces calculs élémentaires d'élimination exigent une pensée systématique de la réorganisation et de la symétrisation. Gauss place à dessein les trois dérivées partielles secondes α, β, γ en première position à droite du signe d'égalité, afin de reconstituer comme suit le produit DD'' :

> Multipliant ces trois équations respectivement par α'', β'', γ'' et ajoutant, nous obtenons :
> $$(10) \qquad \begin{cases} DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\,\Delta + \\ \qquad\qquad + m''(nF - mG) + n''(mF - nE). \end{cases}$$ [**181**], 26

Quasi 'miraculeusement', lorsqu'on multiplie ainsi ces trois équations par α'', β'', γ'', les deux combinaisons linéaires $a\,\alpha'' + b\,\beta'' + c\,\gamma'' = m''$ et $a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n''$ *reconstituent des quantités intrinsèques*. Il est vrai que ces calculs s'organiseraient plus économiquement si l'on s'autorisait à utiliser la théorie des déterminants 3×3 et leur développement le long de certaines colonnes, mais la systématicité symétrique des calculs d'élimination de Gauss perdrait de sa visibilité.

> Si nous traitons de même les équations (2), (5), (8), il vient :
> $$AD' = \alpha'\Delta + a\,(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E),$$
> $$BD' = \beta'\Delta + b\,(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E),$$
> $$CD' = \gamma'\Delta + c\,(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E);$$
> multipliant ces équations respectivement par α', β', γ' et ajoutant, on a :
> $$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\,\Delta + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E)$$ [**181**], 26

Systématiques, symétriques — beaux et élaborés, tels sont les calculs de Gauss.

La combinaison de cette équation avec l'équation (10) donne :

$$DD'' - D'^2 = \big(\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2\big)\,\Delta +$$
$$+ E\,(n'^2 - nn'') + F\,(nm'' - 2\,m'n' + mn'') + G\,(m'^2 - mm'').$$

[**181**], 26

Une fois ces calculs faits, le numérateur $DD'' - D'^2$ s'exprime enfin sous la forme d'un polynôme différentiel en les dérivées partielles d'ordre $\leqslant 2$ des trois coefficients métriques E, F, G.

Si maintenant nous substituons ces expressions diverses dans la formule établie à la fin du §précédent, pour la mesure de la courbure, nous parvenons à la formule suivante, qui ne renferme que les seules quantités E, F, G avec leurs quotients différentiels du premier et du second ordre :

$$\boxed{\begin{aligned} 4\big(EG - F^2\big)^2\,k = E\left[\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dq} - 2\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} + \left(\frac{dG}{dp}\right)^2\right] &+ \\ + F\left(\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dq} - \frac{dE}{dq}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\,\frac{dE}{dq}\cdot\frac{dF}{dq} \right. &+ \\ \left. + 4\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} - 2\,\frac{dF}{dp}\cdot\frac{dG}{dp}\right) &+ \\ + G\left[\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dG}{dp} - 2\,\frac{dE}{dp}\cdot\frac{dF}{dq} + \left(\frac{dE}{dq}\right)^2\right] &- \\ - 2\,\big(EG - F^2\big)\left(\frac{d^2E}{dq^2} - 2\,\frac{d^2F}{dp\,dq} + \frac{d^2G}{dp^2}\right)&. \end{aligned}}$$

[**181**], 27

Theorema egregium. Sur toute surface S plongée dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, la longueur au carré d'un élément infinitésimal de coordonnées (dx, dy, dz) tangent à la surface s'exprime, *intrinsèquement* dans des coordonnées paramétriques bidimensionnelles internes à la surface :

$$(p, q) \longmapsto \big(x(p,q),\ y(p,q),\ z(p,q)\big)$$

comme une certaine forme quadratique définie postive en le vecteur infinitésimal de coordonnées (dp, dq) :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dpdq + G\,dq^2,$$

dont les trois coefficients s'expriment naturellement par :

$$\begin{aligned} E &= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 = a^2 + b^2 + c^2, \\ F &= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v = aa' + bb' + cc', \\ G &= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2. \end{aligned}$$

La *formula egregia* de Gauss apprend donc que pour trouver la mesure de la courbure d'une surface en l'un de ses points quelconques de coordonnées (p, q), on n'a pas besoin de formules finies donnant les coordonnées extrinsèques (x, y, z) en fonction de coordonnées paramétriques internes (p, q), mais qu'il suffit de connaître l'expression générale de la grandeur de chaque élément linéaire *dans les coordonnées bidimensionnelles internes* (p, q).

L'application principale de cette *formula egregia* est la suivante. Si, à chaque point (x, y, z) d'une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ correspond, de manière différentiable ou analytique, un unique point (x', y', z') d'une autre surface $S' \subset \mathbb{R}^3$, la correspondance étant biunivoque et analytique réelle ou de classe au moins $\mathscr{C}^2$, alors les coordonnées images (x', y', z') pourront aussi être considérées comme des fonctions de p et de q, d'où pour l'élément linéaire pythagoricien induit $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}\big|_{S'}$ une autre expression similaire telle que :

$$\sqrt{E'\,dp^2 + 2F'\,dpdq + G'\,dq^2},$$

dans laquelle E', F', G' sont aussi certaines fonctions déterminées de p et de q. Mais par la notion même d'*application* entre les deux surfaces, les éléments infinitésimaux qui se correspondent sur chaque surface seront alors nécessairement égaux l'un à l'autre point par point, et l'on aura identiquement :

$$E' = E, \qquad F' = F, \qquad G' = G;$$

de sorte que la formule du § précédent conduit spontanément à ce théorème remarquable [*egregium*] :

Si une surface courbe est appliquée sur une autre surface courbe quelconque, la mesure de courbure en chaque point reste invariable.

Par suite, *La courbure intégrale d'une portion finie quelconque de la surface ne changera pas.* [**181**], 26

13. Leçons de métaphysique gaussienne

Différer et mûrir, différer pour mûrir. Comme la correspondance de Gauss le montre[49], l'élaboration de ses *Recherches générales sur les surfaces courbes* est le fruit *mûri* d'une quinzaine d'années de méditations continues, le produit d'efforts intellectuels soutenus et répétés, et aussi le résultat de plus d'un an de travail intensif durant la période qui précéda la publication effective du mémoire. La recherche du meilleur argument analytique qui démontrât l'invariance de la mesure de courbure par isométries infinitésimales — c'est-à-dire la quête renouvelée d'une formule telle que *formula egregia* qui eût été valable dans un système de coordonnées intrinsèques quelconques — aura constitué le *point de blocage principal* pour Gauss avant qu'il ne s'autorisât à engager tout travail de rédaction définitive.

Maintenir en tension la recherche de vérités. En effet, un principe métaphysique de raison déterminante commandait de soupçonner qu'une formule

[49] Pour les extraits de correspondance, *cf.* [**415, 134**].

centrale eût dû *expliquer à un niveau supérieur* l'invariance de la mesure de courbure, découverte aux alentours de 1816 grâce à la formule d'écart angulaire $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi + \iint_{\mathscr{T}} \kappa \, d\sigma$ valable pour tout triangle géodésique $\mathscr{T} = ABC$ tracé sur une surface plongée (*schöne Theorem*). Un impératif catégorique commandait donc à Gauss de poursuivre ses recherches jusqu'à ce qu'il découvrît une vérité qui ne pouvait se réaliser que dans et par un long calcul d'élimination.

Or, quant à la véritable nature de l'obstacle, ce calcul d'un genre nouveau requérait une habileté très différente de celle que Gauss avait développée au contact de l'arithmétique abstraite des nombres entiers, puisqu'il s'agissait d'algèbre différentielle effective, domaine qui ne s'est vraiment développé qu'après lui, d'abord avec les travaux précurseurs de Riemann, Christoffel, Lipschitz sur la courbure des variétés métriques, et surtout à la charnière du dix-neuvième et vingtième siècles avec les œuvres de Lie et Cartan, poursuivies aussi à la même époque par Engel, Scheffers, Kowalewski, Tresse, Cartan, Drach, Janet, et d'autres.

> Il est intéressant de constater que les déclarations de Gauss les plus connues et les plus profondes au sujet de son style propre de travail proviennent de sa période d'activité en géométrie différentielle. [**134**], 121

Calculer est une vérité de la chose mathématique en elle-même. Conséquence incontournable quant à l'interprétation philosophique : du point de vue supérieur auquel se place Gauss quant à l'exploration mathématique, le calcul explicite ne constitue *pas*, par conséquent, une simple réalisation en coordonnées d'un concept connu d'avance comme étant intrinsèque, voire même 'préempté' par une abstraction structuraliste qui ré-organise *a posteriori* un champ théorique — non, bien au contraire en fait : le calcul *est* vérité de la courbure en elle-même, il *forme* et il *in-forme* l'essence de la vérité mathématique concernée, c'est-à-dire qu'il confère intrinsèquement à la courbure la forme générale explicite et complète qu'elle doit posséder à l'intérieur même de son être véritable.

Voir émerger des entités autonomes organisées. Par ailleurs, dans une lettre à Olbers qu'il a écrite à Göttingen le 30 octobre 1825 (citée par Dombrovski), Gauss exprime une autre exigence métaphysique qui rappelle un motif récurrent de la philosophie hégélienne de la connaissance, en tant que ce n'est qu'après avoir effectué un parcours dialectique complet que la pensée peut se retourner et embrasser par compréhension la totalité d'une chose méditée.

> Bien que les aspects mathématiques d'une recherche m'apparaissent comme les plus intéressants, je ne peux pas contester d'un autre côté qu'afin d'éprouver du plaisir avec un travail aussi long que celui-là, je dois à la fin voir émerger une 'entièreté' harmonieuse, qui ne sera pas défigurée par une apparence bigarrée[50]. [**175**], vol. 8, 399

Publier, ou ne pas publier. Schumacher et d'autres correspondants de Gauss l'ont régulièrement encouragé, vu son âge grandissant, à rendre publiques ses nombreuses idées pour les générations futures et à accepter de leur offrir du travail d'exploration et d'approfondissement sur des sujets dans lesquels il avait déjà considérablement progressé. À ce sujet, Stäckel cite une lettre écrite par Gauss le 5 février 1850 à l'âge de soixante-treize ans qui révèle à quel point ce dernier était profondément investi par sa quête de la perfection des contenus et dans laquelle s'exprime l'importance de maintenir ouverte toute recherche tant qu'elle n'a pas abouti.

Nihil actum reputans si quid superesset agendum. Ainsi l'aspect le plus profond de la philosophie des mathématiques de Gauss exprime-t-il que la quête de l'irréversible-synthétique doit incontournablement s'étendre sur plusieurs années d'une vie de recherche, voire sur plusieurs générations de mathématiciens.

> Mes recherches sont devenues extrêmement difficiles pour moi à cause du désir que j'ai toujours eu de leur conférer un degré de perfection *ut nihil amplius desiderari possit* [*i.e.* telle que rien de plus ample en compréhension ne puisse être désiré][51]. [**175**], vol. 8, 400

Le levier symbolique. À cause de la grande difficulté qu'il y a à exposer pleinement la signification des notions géométriques, on se contente généralement de présenter seulement de manière formelle ou axiomatique les concepts de connexion, de dérivée covariante, de courbure, de torsion, ainsi que les identités de type Bianchi auxquelles satisfont les dérivées covariantes des tenseurs fondamentaux. Les présentations résumées des quantités g_{kl}, g^{pq}, Γ_{ij}^{k}, R_{ijk}^{l}, R_{ij}, R et E_{ij} que l'on s'autorise en relativité générale souffrent parfois de cette imperfection. À vrai dire, par l'effet d'un penchant au calcul auquel la pensée est entraînée dès que le langage symbolique s'introduit

---

[50] So wie die mathematische Seite einer Arbeit mir gewöhlich die interessanteste ist, so kann ich auch von der andern Seite nicht leugnen, dass ich, um an einer ausgedehnten Arbeit Freude zu haben, doch am Ende ein schön organisirtes Ganzes muss hervorgehen sehen, was durch ain zu buntscheckiges Ansehen nicht verunstaltet wird.

[51] Der Wunsch, den ich immer bei meinen Arbeiten gehabt habe, ihnen eine solche Vollendung zu geben, ut nihil amplius desidari possit, erschwert sie mir freilich ausserordentlich, eben so wie die Notwendigkeit, heterogener Sachen wegen oft davon abspringen zu müssen.

dans les raisonnements, l'« essence du tensoriel » incite à l'« algébrisation des contenus ».

> Il est dans la nature des mathématiques des temps modernes (en contraste avec celles de l'Antiquité) que nous possédons un levier sous la forme de notre langage symbolique et de notre terminologie, grâce à quoi les raisonnements les plus complexes sont réduits à un certain mécanisme. De cette manière, la science a gagné infiniment en richesse, mais elle a autant perdu en beauté et en caractère, comme on le fait ordinairement dans la pratique. Combien ce levier est-il fréquemment appliqué de manière purement mécanique ! bien que l'autorisation de l'employer implique, dans la plupart des cas, certaines hypothèses passées sous silence[52]. [**175**], **10**, 1, p. 434

Die Gaussche Strenge. Cependant, comme l'exigeait Gauss lui-même dans cette lettre du 1er septembre 1850 adressée à son fidèle interlocuteur Schumacher (où il critiquait l'absence de rigueur que Prehn manifestait dans un mémoire sur les séries divergentes paru la même année dans le *Journal de Crelle*) :

> Chaque fois que l'on utilise le calcul et chaque fois qu'on emploie des concepts, j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles [ursprünglichen Bedingungen], et que tous les résultats du mécanisme ne soient jamais considérés comme des propriétés en dehors d'une autorisation claire[53]. [**175**], **10**, 1, p. 434

Ainsi s'exprime la rigoureuse et austère sévérité mathématique de Gauss [*die Gaußche Strenge*] : jamais acte de calcul ne doit être engagé qui ne soit encadré au préalable par des conditions précises quant à l'extension de ses significations. Par exemple, quel que soit le sens qu'on donne aux séries divergentes en choisissant un procédé de sommation déterminé, de type Cesàro, Fejér ou Toeplitz, il faut impérativement justifier par des propositions dûment établies à partir des définitions initiales que l'on peut effectuer toutes les opérations algébriques élémentaires sur les séries ainsi « apprivoisées », et notamment la multiplication ; on ne pourrait certainement pas se contenter d'exécuter ces opérations au prétexte qu'elles sont

[52] « Est ist der Character der Mathematik der neueren Zeit (im Gegensatz gegen das Alterthum), dass durch unsere Zeichensprache und Namengebungen wir eine Hebel besitzen, wodurch die verwickeltsten Argumentationen auf einen gewissen Mechanismus reducirt werden. An Reichthum hat dadurch die Wissenschaft unendlich gewonnen, an Schönheit und Solidität aber, wie das Geschäft gewöhnlich betrieben wird, eben so sehr verloren. Wie oft wird jener Hebel eben nur mecanisch angewandt, obgleich die Befugniss dazu in den meisten Fällen gewisse stillschweigende Voraussetzungen implicirt. »

[53] « Ich fordere, man soll bei allem Gebrauch des Calculs, bei allen Begriffsverwendungen sich immer der ursprünglichen Bedingungen bewusst bleiben, und alle Producte des Mechanismus niemals über die klare Befugniss hinaus als Eigenthum betrachten. »

justifiées pour les séries convergentes. Tout calcul que l'on transfère graduellement à des objets qui s'élèvent en généralité expose en effet à des non-sens éventuels. Ainsi l'addition, la soustraction et la multiplication entre séries divergentes doivent-elle conserver la mémoire des processus sommatoires qui ont été choisis pour leur donner un sens. C'est donc la première interprétation immédiate de cette citation de Gauss : nécessité de se conformer au sens interne ; nécessité de respecter les bornes définitionnelles ; sous peine d'incohérence.

Science et conscience coprésente. Mais au-delà, Gauss évoque sans la développer une pensée plus profonde qui nous est suggérée par le membre de phrase « j'exige que l'on reste toujours conscient des stipulations originelles ». On sait combien il est délicat et malaisé de répondre à cet impératif de « conscientisation continue du sens », surtout lorsqu'il s'agit de calculs de type tensoriel qui sont assez longs ou considérables pour égarer l'intuition géométrique ou noyer l'esprit de synthèse, un peu comme si les « masses-pensées » chères à Riemann devaient se réserver à tout instant l'énergie de « se rendre présentes les totalités conceptuelles » ; toutefois, l'austérité ou la rigueur gaussienne [*die Gaußche Strenge*] sont là pour nous rappeler les *impératifs catégoriques de la pensée mathématique*, similaires aux impératifs que Kant théorisa dans sa *Critique de la raison pratique*, c'est-à-dire des règles qui sont constituées par des principes scientifiques abstraits et qui sont désignées par des devoirs.

L'impératif catégorique de la morale kantienne. D'après Kant, l'impératif moral est un *impératif catégorique* : il commande absolument la poursuite d'une fin morale, en elle-même et pour elle-même, et il détermine la volonté en indiquant une loi objective de la raison : la *loi morale*, valable universellement pour tout être raisonnable en tant que tel. D'une portée inférieure, les *impératifs hypothétiques* ne se rapportent qu'à la nécessité pratique d'une action considérée comme *moyen* de parvenir à quelque chose, la *fin* visée incitant à recourir à la technique, à l'habileté, à la prudence, à la méthode et au pragmatisme. Quant à lui, l'impératif catégorique représente une action comme nécessaire pour elle-même, cette action n'étant subordonnée en tant que moyen à aucune fin déterminante étrangère à son principe. Il commande de se conformer aux actions qui sont bonnes en elles-mêmes, et par l'effet d'une nécessité inconditionnée et véritablement objective, il soumet la volonté à une *loi morale* interne et autonome que Kant énonce comme suit : « *Agis uniquement d'après la maxime qui fait que tu peux vouloir en même temps qu'elle devienne une loi universelle parmi les hommes* ». Est donc *immorale* toute action qui, si on la supposait perpétrée par tous les hommes universellement en même temps, conduirait à une perte dommageable d'équilibre de la communauté des hommes, à un chaos des mœurs et des travaux, aux conflits, au crime, à la mort. L'impératif catégorique kantien énonce donc une règle absolue et universelle propre à déterminer l'action morale en toutes circonstances : il suffit de tester la moralité d'une action en s'imaginant les conséquences d'une universalisation pour se décider en conséquence. Ainsi, le catégorique domine et se ramifie dans l'hypothétique.

Impératifs catégoriques de la pensée mathématique. En mathématiques, l'impératif catégorique — si tant est qu'on puisse lui donner un sens tout analogue au sens kantien — doit nécessairement s'exprimer dans une pure abstraction immanente, parce que la matière même des mathématiques transcende les conditions biologiques ou neuronales de son exploration effective[54]. De plus les impératifs se démultiplient et se pluralisent pour se disposer en un tripôle fondamental abstrait qui n'influe pas aussi directement sur la volonté que dans le champ de la raison pratique.

☐ D'abord l'exigence absolue de *cohérence* : non-contradiction, vigilance architecturale, et vérité des raisonnements.

☐ Ensuite, le devoir pérenne et indéfectible de *recherche* : indéfini potentiel, ouverture dynamique, et *in situ* de l'Inconnu.

☐ Enfin, l'admission de la *nouveauté* comme critère et règle de participation : absorption effective, progrès (im)perceptibles, et enrichissement croissant des arborescences.

Trois impératifs, donc, inscrits dans une relation triangulaire où les hiérarchies sont interchangeables et où les connexions sont cycliques. Au centre du cercle circonscrit, l'exigence gaussienne de présence permanente de la pensée conceptuelle comme conscience : liée à chacun des trois pôles, elle exerce sa capacité d'activation en mesurant sa force au champ opaque de l'ouverture.

☐ Vérification constante de rigueur.

☐ Maintien absolu des questions indécidées.

☐ Évaluation conceptuelle des apports.

---

[54] D'autres langages imprévisibles ou approches dont la teneur reste insoupçonnée se révèleront probablement plus adéquats pour le traitement et la compréhension de problèmes encore ouverts à ce jour : tel est le *credo* fondamental en l'être-disponible de la chose mathématique que partagent tous les mathématiciens.

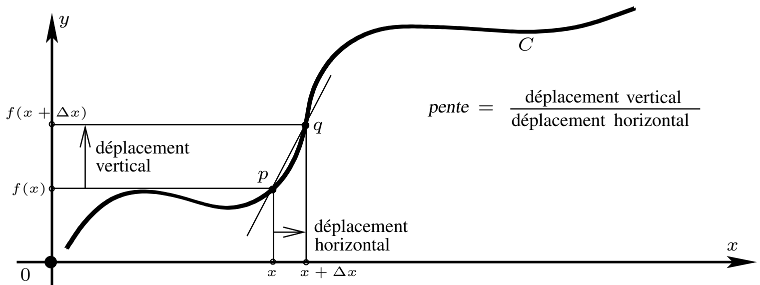
Formes différentielles : Darboux, Frobenius, Cartan

1. Métaphysique élémentaire de la différence infinitésimale

Tangente à une courbe tracée dans le plan. Soit C une courbe tracée dans le plan de classe au moins $\mathscr{C}^1$. Pour fixer les idées, supposons cette courbe représentée sous la forme d'un graphe local $y = f(x)$. Soit $p \in C$ un point quelconque fixé de cette courbe, de coordonnées $(x, f(x))$.

Comment calculer l'équation de la droite tangente à la courbe au point p à partir de l'équation de la courbe ? D'après la définition de la tangente comme limite de sécantes, il suffit de calculer l'équation d'une droite qui passe par le point p et par un point q proche de p, distinct de p et qui se rapproche indéfiniment du point p.

Notons alors $x + \Delta x$ la coordonnée horizontale du deuxième point q, en employant le symbole « $+\Delta x$ », afin de signifier que la coordonnée horizontale de q se déduit de la coordonnée horizontale x du point p par un « incrément » variable Δx, que l'on aura le loisir de faire tendre vers zéro.



DROITE SÉCANTE REPRÉSENTÉE PAR SA PENTE

Sur la figure, lorsqu'on se dirige du point p au point q, le « déplacement horizontal » est donné par :

$$x + \Delta x - x = \Delta x,$$

tandis que le « déplacement vertical » est donné par :

$$f(x + \Delta x) - f(x).$$

L'équation de la droite passant par les points p et q est caractérisée, de manière univoque, par sa *pente*, c'est-à-dire par le *quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal* :

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Sur la figure, cette quantité est positive, car le segment allant de p à q est ascendant.

Or, le point q doit tendre vers le point p. Autrement dit, Δx doit tendre vers zéro. Lorsque le point q tend vers le point p, l'unique droite passant par p et par q pourrait osciller et sauter indéfiniment sans que sa pente se rapproche d'une pente stable et unique. La tangente à la courbe au point p existe si et seulement si la pente des sécantes finit par se stabiliser vers une pente bien définie. De manière équivalente, le quotient (3.2) ci-dessus doit tendre vers une limite bien définie quand Δx tend vers zéro. Cette limite sera[1] la pente de la droite tangente au point p. Classiquement, on note $f'(x)$ cette limite, qui dépend de x :

$$f'(x) := \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Elle est appelée *dérivée de la fonction f en x*.

Théorème. *La tangente[2] à une courbe graphée en un point de coordonnées $(x,\, f(x))$ est caractérisée de manière univoque par la fonction dérivée $f'(x)$.* □

Ainsi, l'opération « analytique » de dérivation de la fonction $f(x)$ correspond à l'opération « géométrique » de tracé de la droite tangente, chacun des deux procédés requérant un passage à la limite.

Dérivée approchée. Les droites sécantes se rapprochent indéfiniment de la droite tangente. Cette propriété géométrique se traduit analytiquement par l'existence de la pente $f'(x)$, limite du quotient $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, lorsque Δx tend vers zéro. Par conséquent, si Δx est suffisamment petit, la différence entre ce quotient et sa limite est négligeable :

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\text{reste négligeable, qui tend vers zéro lorsque }\Delta x\text{ tend vers zéro.}$$

[1] La courbe est supposée continûment différentiable, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

[2] On vérifie alors aisément que l'équation de la droite tangente à la courbe au point $(x,\, f(x))$ est donnée par $Y-f(x)=f'(x)\cdot(X-x)$.

Appelons alors $\varepsilon_{x,\,\Delta x}$ ce reste négligeable, qui dépend de x et de Δx, et réécrivons l'identité précédente sous la forme :

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}-f'(x)=\varepsilon_{x,\,\Delta x}.$$

Déplaçons alors $f'(x)$ à droite du signe « $=$ » et chassons le dénominateur Δx, ce qui donne :

$$f(x+\Delta x)-f(x)=(f'(x)+\varepsilon_{x,\,\Delta x})\cdot\Delta x.$$

Dans la parenthèse, puisque le reste $\varepsilon_{x,\,\Delta x}$ est négligeable par rapport à $f'(x)$, on pourrait être tenté de le faire disparaître et d'écrire l'identité approchée :

$$f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\cdot\Delta x.$$

Rappelons que par définition de $f'(x)$, cette identité approchée ne devient exacte qu'à la limite, lorsque Δx devient nul. Mais alors — paradoxalement — à la limite, en posant $\Delta x = 0$ dans cette identité, on obtiendrait seulement la relation triviale « $0 = 0$ », dont l'intérêt est de toute évidence *nul* :

$$0=f(x)-f(x)=f(x+0)-f(x)=f'(x)\cdot 0=0.$$

Ce paradoxe est gênant, mais il n'est pas étonnant. En effet, si la relation exacte $f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x)\cdot\Delta x$ est satisfaite pour toutes les petites valeurs de Δx, alors visiblement, la courbe $y = f(x)$ est une droite — au moins localement. Mais la courbe $y = f(x)$ n'est presque jamais droite, les droites étant exceptionnelles dans l'univers infiniment riche et varié des courbes. En définitive, *la relation $f(x+\Delta x)-f(x)\cong f'(x)\cdot\Delta x$ n'est jamais exacte ; elle ne peut être qu'approchée*.

Élément différentiel infinitésimal. Néanmoins, l'allure de la courbe dans un voisinage infime de l'un de ses points s'identifie « presque » à celle d'un segment de droite. En vérité, un morceau de courbe ne peut s'identifier à un segment rectiligne que dans l'infime, dans le microscopique, dans l'infiniment petit.

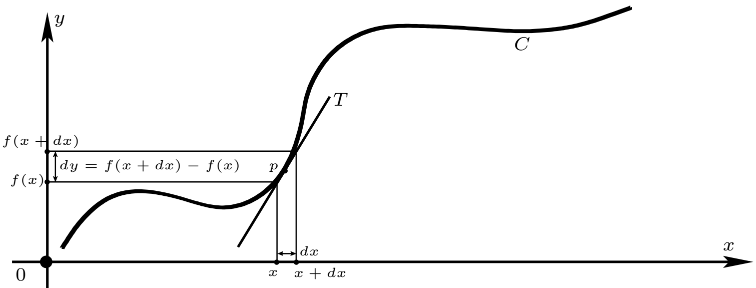
Aussi, pour répondre à une sollicitation « métaphysique » quasiment universelle qui exige l'élaboration d'une « actualisation conceptuelle » de l'infiniment petit, les inventeurs du calcul infinitésimal au dix-septième siècle ont proposé de conférer un statut exceptionnel à l'incrément Δx, lorsque cet incrément s'évanouit et tend vers zéro. Puisque la dérivée $f'(x)$ existe, puisque c'est la limite des quotients $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ lorsque Δx tend vers zéro, et puisque tout processus « limite » exige une actualisation[3], on introduira

[3] — la limite se réalisant grâce à un processus progressif, sa nature est intrinsèquement potentielle —

un nouvel être noté « dx » qui s'identifie avec l'« être-limite » des Δx et qui satisfait l'identité cruciale :

$$\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}=f'(x),$$

avec un vrai signe d'égalité « $=$ » et non un signe d'égalité approchée « $\cong$ ».



VECTEUR INFINITÉSIMAL ET DROITE TANGENTE

Évidemment, le paradoxe reste entier : ce n'est que lorsque Δx s'annule que la limite $f'(x)$ est atteinte ; aussi la limite des Δx est-elle bien connue : elle est égale à 0 ; par conséquent, il est inutile[4] d'introduire un nouvel être « dx », puisque $dx = 0$; mais alors l'identité précédente dans laquelle on remplace dx par sa vraie valeur 0 donne un quotient algébrique :

$$\frac{f(x+0)-f(x)}{0}\stackrel{?}{=}f'(x)$$

dans lequel on divise 0 par 0, opération strictement interdite en algèbre !

Néanmoins, le calcul infinitésimal classique a choisi d'accepter cette contradiction en conférant un double statut à l'incrément infiniment petit « dx » : à la fois non nul et égal à 0, pourvu que l'on choisisse la bonne valeur en fonction du contexte afin d'éviter les paradoxes algébriques. L'intuition dite « physicienne » confère quant à elle une valeur non nulle à dx, mais petite par rapport aux grandeurs expérimentales, c'est-à-dire que dx possède une valeur infime, non décelable par les appareils de mesure.

L'intuition mathématique « travaillée » — celle que nous convoquerons ici pour la compréhension intuitive de la théorie des courbes et des surfaces — devra aussi se représenter l'incrément infinitésimal dx comme non nul, mais « physiquement » infime, ne serait-ce que pour lire les diagrammes

[4] On observera que l'introduction d'un nouvel être dx, limite des incréments variables et régressifs Δx, était d'autant plus subtile que la limite actuelle des Δx existe : c'est 0 ! Impossible, ici, d'entrer plus avant dans l'histoire et la philosophie du calcul infinitésimal, et encore moins dans la théorie de l'analyse non-standard, puisque le seul objectif est de reformuler les éléments métaphysiques élémentaires connus par les mathématiciens qui ont vraiment développé le calcul et l'algèbre différentielle à *plusieurs* variables.

fondamentaux. Pour être efficiente, cette intuition mathématique travaillée s'enrichira de tous les caractères concrets de l'intuition physicienne. En vérité, pour saisir l'essence du calcul infinitésimal, c'est l'intuition physicienne qui est la plus adéquate, en raison de sa proximité avec les intuitions fondatrices et parce que le mouvement dynamique progressif qui se situe au cœur de tout processus limite vit encore pleinement en elle, tandis que la pensée du mouvement — en tant que tel — a tendance à disparaître derrière le langage formel, au sein des mathématiques rigoureuses.

En définitive, on pourra considérer que « dx », est un incrément « Δx » bien réel, pourvu qu'il soit d'une taille « négligeable » par rapport aux données fondamentales. Ce sera un incrément d'une petitesse telle que le morceau de courbe qui lui correspond puisse être effectivement considéré comme équivalent à un infime segment de droite. Dans la pensée abstraite, non figurale et non diagrammatique, ce sera un infiniment petit actualisé, quoique non représentable. On jouera donc délibérément avec l'ambiguïté entre un dx infime, quasi-visible, supporté par l'intuition concrète et un dx infiniment petit, invisible et actualisé par l'intuition abstraite, et on accentuera la force bipolaire de cette double perspective.

Il va sans dire que ces rappels élémentaires forment le B.A.-BA de la théorie de Lie des groupes continus de transformations et de la théorie de Cartan des systèmes différentiels extérieures.

Accepter le langage infinitésimal classique. Pour mettre un terme à ces considérations, mentionnons que la mathématique classique de la fin du dix-neuvième siècle et du début du vingtième siècle a su édifier une charpente syllogistique rigoureuse qui ramène tout le calcul infinitésimal à une notion première et parfaitement fondée : celle de limite. Les contradictions apparentes soulevées par les infiniment petits tels que dx sont absorbées et résolues dans une théorie générale cohérente par laquelle toutes les quantités infinitésimales — telles que dx — sont remplacées par des quantités finies — telles que Δx — qu'on a le loisir de rendre aussi petites que l'on veut, en termes de quantificateurs existentiels et universels.

Depuis la deuxième moitié du vingtième siècle, la géométrie différentielle contemporaine, quant à elle, a abandonné presque complètement tout appel aux différences infiniment petites, élaguant toutes les intuitions fondatrices concrètes, parce qu'elles conduisaient à des raisonnements imparfaits ou entachés de paradoxes. En privilégiant le style hypothético-déductif, la géométrie différentielle contemporaine définit en effet *in abstracto* et *per nominem* les objets qui possédaient auparavant un vrai sens dynamique et infinitésimal. C'est ainsi que 'dx' est remplacé par un vecteur d'un espace vectoriel abstrait appelé *espace tangent*, à un courbe, à une variété, en un point ; les relations fonctionnelles fondamentales telles que la linéarité de l'équation $df(x) = f'(x) \cdot dx$ sont essentiellement conservées, mais pensées à un niveau supérieur d'abstraction, avec le langage syncrétique des fibrés vectoriels d'où est potentiellement éliminée toute représentation explicite en coordonnées.

Toutefois, dans ce mémoire, nous choisissons en homologie avec les travaux de Lie et de Cartan, d'*utiliser le langage infinitésimal classique*, sans faire référence aux deux contextes de justification théorique précités. Cette approche présente plusieurs avantages quant à l'accessibilité des raisonnements : présentation directe des arguments essentiels, ceux-là seuls qui creusent un sillon durable dans la mémoire ; exposition claire des raccourcis spéculatifs ; mise entre parenthèse d'un discours théorique paradigmatique que l'on trouvera sans mal dans les manuels ; développement des raisonnements épurés, maîtrisés par une intuition mathématique travaillée ; suivi diagrammatique régulier.

Opérateur de différentiation. Au fondement de la notion de dérivation se trouve le concept d'*opérateur aux différences*, défini comme suit en dimension 1. À tout déplacement horizontal Δx situé au point x correspond le déplacement vertical

$$\Delta f(x) := f(x + \Delta x) - f(x),$$

que l'on envisage comme une « différence correspondante » entre les deux valeurs $f(x + \Delta x)$ et $f(x)$ de la fonction. Lorsque le point x et l'incrément Δx varient, on calcule ainsi toutes les différences possibles entre deux valeurs de la fonction, en mobilisant une *double articulation* par x et par Δx. Dans cette différence $\Delta f(x)$, si on actualise la valeur infinitésimale dx de l'incrément fini Δx, on obtient la *différence infinitésimale* de la fonction, définie par par la formule analogue :

$$df(x) := f(x + dx) - f(x).$$

Ici, il faut considérer que la valeur de l'infinitésimal dx est essentiellement *la même*, quel que soit le point x où il est situé : en infinitésimalisant sa seconde extrémité, le mobile à deux bras préserve sa capacité d'explorer l'infime au bout de sa première extrémité x. Grâce à l'identité $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx} = f'(x)$ qui actualise le quotient limite définissant la dérivée de la fonction $f(x)$, on peut réécrire la différentielle infinitésimale $df(x)$ comme le produit de la dérivée $f'(x)$ par l'infinitésimal dx, ce qui donne une équation fondamentale et importante qu'il convient d'encadrer :

$$\boxed{df(x) = f'(x) \cdot dx}.$$

Le tableau suivant résume les considérations précédentes sous la forme d'un parallélisme.

Différence finie :	**Différence infinitésimale :**
`opérateur :` «Δ»	`opérateur :` «d»
`déplacement :` Δx	`déplacement :` dx
`action sur la fonction :`	`action sur la fonction :`
$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ $\cong f'(x)\cdot\Delta x$	$df(x) = f(x+dx) - f(x)$ $= f'(x)\cdot dx$

DIFFÉRENCE FINIE ET DIFFÉRENCE INFINITÉSIMALE

Chaîne de triangles infinitésimaux. L'application de l'opérateur de différentiation à l'équation d'une courbe graphée $y = f(x)$ conduit à l'équation *linéaire* :

$$dy = f'(x)\cdot dx,$$

qui est de la forme générale :

$$dy = a\cdot dx,$$

où a est nombre réel appelé *coefficient de linéarité*. Crucialement, dans cette équation fondamentale $dy = f'(x)\cdot dx$, la dépendance de dy par rapport à dx est linéaire ; or, de même que les droites sont les plus simples des courbes mathématiques, les fonctions linéaires sont les plus simples des fonctions mathématiques ; par conséquent, la relation de dépendance linéaire entre dy et dx est dotée d'une simplicité exceptionnelle, quand on la compare à la complexité *a priori* arbitraire de l'équation définissante $y = f(x)$ de la courbe, dans laquelle la fonction $f(x)$ n'est presque jamais linéaire : *le passage à l'infinitésimal s'accompagne immédiatement d'une linéarisation des dépendances fonctionnelles*.

En fait, cette simple équation linéaire infinitésimale :

$$dy = f'(x)\cdot dx$$

exprime un lien fondamental entre *trois objets géométriques*, qui tous dépendent du point x où l'on est situé :

(1) le déplacement infinitésimal horizontal dx au point x ;

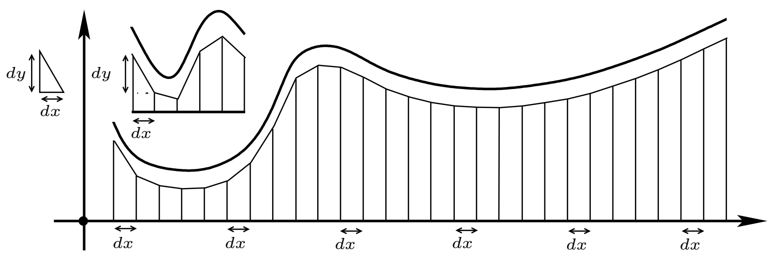
(2) le déplacement vertical *correspondant* dy le long de la courbe, *i.e.* :

$$dy = df(x) = f'(x)\cdot dx;$$

(3) la *pente* $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, quotient du déplacement vertical par le déplacement horizontal.

Seule la pente $f'(x)$ n'est pas un objet infinitésimal, car le nombre $f'(x)$ — quotient de deux infinitésimaux — possède en général une valeur réelle macroscopique. À l'extrême gauche de la figure ci-dessous, ces trois données s'organisent en un triangle infinitésimal élémentaire.

Cependant, dans l'équation linéaire infinitésimale $dy = f'(x) \cdot dx$, le coefficient de linéarité $a := f'(x)$ varie en fonction du point x. Aussi faut-il s'imaginer que la courbe $y = f(x)$ est essentiellement 'identifiée' à une infinité de segments de droite infinitésimaux accrochés l'un à la suite de l'autre. Sur la figure qui suit, de gauche à droite, les triangles infinitésimaux (non représentés) défilent les uns à la suite des autres. Pour plus de lisibilité, la courbe originale — dessinée en tracé gras — a été légèrement translatée au-dessus de son approximante. Le découpage le long de l'axe des x est uniforme : dx — ou plus exactement le Δx qui l'approxime — a la même valeur en tout point x : c'est un infinitésimal uniforme.



IDENTIFICATION DE LA COURBE À UNE INFINITÉ DE SEGMENTS

En examinant cette figure, on observera un phénomène visuel intéressant : bien que les segments élémentaires qui approximent la courbe soient tous de longueur finie — et non infiniment petite — la chaîne de segments rectilignes semble quasiment partout lisse et non anguleuse. C'est pourquoi, au centre gauche de la figure, nous avons représenté une courbe plus accentuée dont l'approximante présente une angularité clairement perceptible.

Ce phénomène perceptif montre que l'identification d'une courbe à une chaîne de segments de droite possède avant tout un sens physique ; l'ambiguïté, l'indécision et la confusion subtile entre le discret et le continu résonnent dans tout l'arbre de la connaissance physico-mathématique.

Métaphysique de la différence infinitésimale. À chaque courbe, nous avons associé une chaîne infinie de segments rectilignes infinitésimaux, grâce à un procédé universel qui est absolument fondamental en géométrie : *la différentiation intrinsèque, interne, locale et infinitésimale. L'être de la courbe* — un continu unidimensionnel différentiable — *laisse éclater immédiatement en lui-même la totalité des différences qui existent entre tous ses points les plus immédiatement voisins*. Dès que la représentation graphée

$y = f(x)$ est donnée[5], toutes les différences infinitésimales entre les points x et les points $x + dx$ sont gratuitement apportées au même moment : grâce à la relation $f(x + dx) - f(x) = f'(x) \cdot dx$, c'est alors la dérivée $f'(x)$ de la fonction $f(x)$ qui entre en scène.

On observera qu'il n'est pas nécessaire de calculer les différences :

$$f(x_2) - f(x_1),$$

pour toutes les valeurs x_1 et x_2 possibles, mais que l'on peut se restreindre seulement aux couples de points $(x_1,\, x_2)$ pour lesquels x_1 et x_2 sont infiniment proches. Ce procédé n'est donc pas analogue au calcul des distances respectives entre tous les couples de villes principales de France, que l'on trouve parfois sous la forme d'un tableau triangulaire complétant certaines cartes routières[6].

Ce qui est vrai pour les courbes sera vrai pour les surfaces et pour tous les objets géométriques que l'on qualifie d'« objets différentiels » : quelle que soit la dimension de l'espace de référence dans lesquels ils sont plongés et quel que soit le nombre de variables qu'ils incorporent : *tous les objets différentiels sont immédiatement saisis avec leurs différences infiniment proches*. La suite des évènements confirmera, précisera, développera et enrichira *ad libitum* cette affirmation.

2. Calcul différentiel à plusieurs variables

Passage à deux variables. Par exemple, considérons une fonction $W(x,\, y)$ de deux variables x et y — comme celle qui nous a permis de définir une courbe sous forme implicite — et soumettons-la au principe de la différentiation infinitésimale. Nous appellerons x et y *premier* et *deuxième* argument de $W(x,\, y)$. Appliquer un opérateur de différentiation infinitésimale à cette fonction reviendra à calculer la différence :

$$W(x + dx,\, y + dy) - W(x,\, y),$$

où dx et dy sont des déplacements infinitésimaux des variables x et y, respectivement. En effet, puisqu'il y a deux variables, il doit y avoir deux déplacements infinitésimaux, ou plus exactement *un seul* déplacement infinitésimal qui possède les deux composantes $(dx,\, dy)$. En insérant le terme

[5] — ou tout aussi bien l'une des deux autres représentations : implicite ou paramétrique —

[6] C'est comme s'il suffisait de connaître seulement toutes les infimes distances séparant deux à deux tous les gravillons qui sont emprisonnés sur les routes et enrobés dans du goudron, toutes ces riens négligeables mais innombrables sur lesquels reposent les pneumatiques des automobiles.

suivant — qui s'annule trivialement :

$$-W(x+dx,\,y)+W(x+dx,\,y)$$

dans la différence infinitésimale précédente, on ne change pas sa valeur et l'on obtient quatre termes que l'on regroupe en deux paires de différences infinitésimales comme suit :

$$\begin{aligned}W(x+dx,\,y+dy)-W(x+dx,\,y)+&\\+W(x+dx,\,y)-W(x,\,y).&\end{aligned}$$

Dans la première soustraction (*i.e.* les deux premiers termes situés à la première ligne), la valeur « $x + dx$ » du premier argument est la même ; dans la deuxième soustraction, la valeur « y » du second argument est la même. Par conséquent, si l'on fait abstraction du second argument « y », la seconde soustraction est du même type que la soustraction $f(x+dx)-f(x)=f'(x)\cdot dx$ qui définit la dérivée d'une fonction d'une seule variable. On appelle alors *dérivée partielle*[7] *par rapport à la variable* x et l'on note $\frac{\partial W}{\partial x}(x,\,y)$ la dérivée de la fonction de la seule variable x qu'est la fonction $W(x,\,y)$, lorsque l'on considère la variable y comme fixe. Cette dérivée partielle satisfait donc l'équation :

$$W(x+dx,\,y)-W(x,\,y)=\frac{\partial W}{\partial x}(x,\,y)\cdot dx,$$

ce qui nous permet de transformer la deuxième ligne de (3.26).

Par un procédé analogue[8], on transforme la première ligne de (3.26) :

$$W(x+dx,\,y+dy)-W(x+dx,\,y)=\frac{\partial W}{\partial y}(x,\,y)\cdot dy.$$

En conclusion, si nous notons $dW(x,\,y)$ la différence infinitésimale (3.28) ci-dessus, grâce aux équations (3.29) et (3.30) ci-dessus, nous obtenons une équation fondamentale qui est l'analogue à deux variables de l'équation encadrée (3.18) pour les fonctions d'une variable :

$$\boxed{dW(x,\,y)=\frac{\partial W}{\partial x}(x,\,y)\cdot dx+\frac{\partial W}{\partial y}(x,\,y)\cdot dy}.$$

Telle est l'équation fondamentale qui fournit toutes les différences infinitésimales d'une fonction $W(x,\,y)$ de deux variables. Elle sera particulièrement utile pour élaborer les premières étapes de la théorie des surfaces.

3. Histoire des formes différentielles

[7] Comme dans la Section 2, nous sous-entendons que les hypothèses de différentiabilité appropriées sont satisfaites : nous supposons implicitement que $W(x,\,y)$ est de classe $\mathscr{C}^1$.

[8] Au lecteur attentif : nous passons sous silence la possibilité d'identifier rigoureusement $\frac{\partial W}{\partial y}(x,\,y)$ avec $\frac{\partial W}{\partial y}(x+dx,\,y)$.

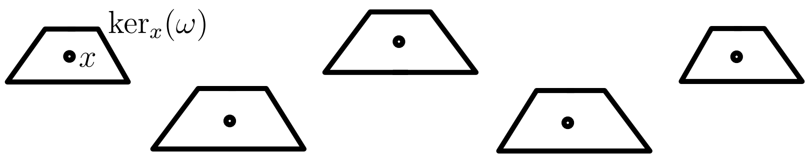
4. Distribution d'hyperplans noyaux d'une forme différentielle Afin d'en exposer la signification géométrique, considérons une forme différentielle arbitraire :

$$\omega = \omega(x, dx) := \omega_1(x)\, dx^1 + \omega_2(x)\, dx^2 + \cdots + \omega_n(x)\, dx^n$$

à coefficients ω_i qui dépendent de x. Ici, la forme ω doit être interprétée comme agissant sur tous les déplacements infinitésimaux dx issus de x dans toutes les directions possibles, le résultat de cette action fournissant simplement un nombre : $\omega_i(x)\, dx^i$. Géométriquement, ω définit un hyperplan

$$\ker_x(\omega) := \big\{(dx^1, \dots, dx^n) :\ \omega_i(x)\, dx^i = 0\big\}$$

en tout point x, et alors $\omega(x, dx)$ constitue une mesure de la « projection » du vecteur dx sur une « direction transverse » à cet hyperplan[9]. Clairement, le résultat obtenu $\omega(x, dx)$ est nul si et seulement si dx appartient à cet hyperplan. Notons de plus qu'à tout point x est attaché l'hyperplan $\ker_x(\omega)$: on dit alors qu'on a un *champ* ou une *distribution* d'hyperplans (infinitésimaux).



À CHAQUE POINT EST ATTACHÉ UN HYPERPLAN INFINITÉSIMAL

4. Différentier des formes différentielles Le principe général de la philosophie infinitésimale que nous avons invoqué pour introduire $\delta_{dx}\mathbf{m}$ et les $\delta_{dx}\mathbf{e}_i$ exige à nouveau que soit réalisée la différenciation par rapport à soi de la forme ω, et ici va intervenir une nécessaire *antisymétrisation grassmannienne* dont les causes géométriques et conceptuelles ne doivent pas rester mystérieuses. La question est donc : que peut et que doit être la différenciation d'une forme différentielle ω par rapport à elle-même ? Et encore : quelle est la causalité mathématique profonde de l'antisymétrisation ?

§5. Géométrie du covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius

5. Intégration des équations différentielles Avant de poursuivre, il nous paraît essentiel de discuter brièvement l'historique du concept de forme différentielle, c'est-à-dire des expressions du type $\omega = \omega_1(x)\, dx^1 + \omega_2(x)\, dx^2 + \cdots + \omega_n(x)\, dx^n$ qui s'introduisent dans les formules du transport parallèle (en négligeant les éventuels paramètres supplémentaires). Leur origine, qui

[9] Toutefois, cette manière de s'exprimer reste intuitive, car en x, aucune direction privilégiée n'est définie par ω.

remonte au moins à Newton et à Leibniz, est profondément liée au problème de l'intégration des équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes[10].

Par exemple, l'équation $z_y = f(x, y, z, z_x)$ étudiée par Lagrange[11] ([**257**]), où l'on note pour abréger $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$ et $z_y = \frac{\partial z}{\partial y}$, se ramène d'abord, si l'on introduit la nouvelle variable $p := z_x$, à un système de deux équations différentielles d'ordre un :

$$z_x = p, \qquad\qquad z_y = f(x, y, z, p),$$

et ensuite, si l'on élimine les quotients différentiels, au système suivant constitué de deux formes de Pfaff égalées à zéro :

$$0 = dz - p\,dx, \qquad\qquad 0 = dz - f(x, y, z, p)\,dy.$$

Réciproquement, ce système est équivalent à l'équation d'origine. En mathématicien éclairé qui s'improvise humble pédagogue, Cartan décrira spécialement pour Einstein dans [**124, 81**] comment sa théorie générale des systèmes en involution s'applique à ce système classique — nous y reviendrons.

5. La méthode de Lagrange En 1772, mais seulement dans le cas de deux variables indépendantes (x, y) et en supposant l'existence d'un « facteur intégrant » (une hypothèse spéciale), Lagrange parvint à intégrer $z_y = f(x, y, z, z_x)$ de façon que la solution générale $z = z(x, y, c)$ dépende d'une constante arbitraire c, comme cela se produit pour une équation différentielle ordinaire $y_x = f(x, y)$ d'ordre un à une variable indépendante y, ce qui pouvait sembler constituer la bonne approche unifiante. Il introduisit l'unique forme différentielle :

$$\begin{aligned}\Omega := dz - p\,dx - q\,dy &= dz - p\,dx - f(x, y, z, p)\,dy, \\ &= dz - g(x, y, z)\,dx - f\big(x, y, z, g(x, y, z)\big)\,dy,\end{aligned}$$

où $g = g(x, y, z)$ désigne une fonction encore non spécifiée qui jouera le rôle attendu de z_x lorsque le problème sera résolu.

Supposons, dit Lagrange, que pour un certain choix de g, il existe une fonction $\lambda = \lambda(x, y, z)$, dite *facteur intégrant*, telle que Ω multipliée par λ soit égale à une forme *exacte*, *i.e.* égale à la différentielle d'une fonction :

$$\lambda\,\Omega \equiv d\varphi.$$

---

[10] Une proposition générale relativement élémentaire énonce que tout système d'équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables indépendantes et à un nombre quelconque d'inconnue peut être transformé, au moins localement au voisinage d'un point générique, en un système de formes de Pfaff égalées à zéro ([**423**]).

[11] Le lecteur trouvera des éléments historiques complets dans [**161, 202, 205**].

Géométriquement, les deux familles d'hyperplans noyaux $\mathrm{Ker}_{(x,y,z)}(\Omega) = \mathrm{Ker}_{(x,y,z)}(d\varphi)$ de Ω et de $d\varphi$ coïncident en tous les points (x, y, z) de l'espace, puisque chaque homothétie de rapport $\lambda(x, y, z)$ stabilise toutes les droites et tous les plans passant par le point (x, y, z). Alors cette fonction φ permet de découper l'espace en une famille infinie de surfaces

$$\Sigma_c := \big\{\varphi(x, y, z) = \text{const.} = c\big\}$$

paramétrées par une constante c et qui constituent comme un recollement cohérent de ces hyperplans infinitésimaux. En supposant donc l'existence d'un facteur intégrant, Lagrange affirme alors que la solution générale de l'équation originale $z_y = f(x, y, z, z_x)$ s'obtient simplement en résolvant[12] l'équation $\varphi(x, y, z) = c$ par rapport à z, ce qui donne : $z = \psi(x, y, c)$ pour une certaine fonction ψ.

En effet, si l'on remplace φ par c (donc aussi z par $\psi(x, y, c)$) dans l'égalité $d\varphi = \lambda\,\Omega$, ce qui donne $0 = dc = d\varphi = \lambda\,\Omega$, ou plus précisément :

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\,dz \\ &= \varphi_x\,dx + \varphi_y\,dy + \varphi_z\big(\psi_x\,dx + \psi_y\,dy\big) \\ &= -\lambda\,g\,dx - \lambda\,f\,dy + \lambda\,dz, \end{aligned}$$

on peut en déduire tout d'abord $\psi_x = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z}$ et $\psi_y = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$ en égalant à zéro les coefficients de dx et de dy sur la deuxième ligne, puis en comparant les lignes 1 et 3 :

$$g = -\frac{\varphi_x}{\varphi_z} = \psi_x \qquad \text{et} \qquad f = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z} = \psi_y,$$

ce qui donne en écrivant tous les arguments :

$$\begin{aligned} &\psi_x(x, y, c) = g\big(x, y, \psi(x, y, c)\big) \\ &\qquad\qquad \text{et} \qquad \psi_y(x, y, c) = f\big(x, y, \psi(x, y, c), g\big(x, y, \psi(x, y, c)\big)\big). \end{aligned}$$

La dernière équation signifie exactement que $z = \psi(x, y, c)$ est une solution de $z_y = f(x, y, z, z_x)$.

5. Qu'est-ce qu'une forme différentielles intégrable ? Ainsi Lagrange semblait-il donner raison à Euler, qui avait exprimé l'opinion qu'une forme différentielle à trois variables $\omega = \omega_1(x)\,dx^1 + \omega_2(x)\,dx^2 + \omega_3(x)\,dx^3$ n'est intégrable que si $\lambda\,\omega = d\varphi$ est exacte, à un facteur λ près. Toutefois, ni Lagrange ni ses successeurs ne parvinrent à exploiter cette idée pour étudier l'équation générale du premier ordre à un nombre $n > 2$ de variables indépendantes, de façon à réduire son intégration à la considération d'un nombre fini de systèmes d'équations différentielles ordinaires. Par ailleurs, Lagrange

[12] Les raisonnements sont locaux et on suppose implicitement que l'équation $\varphi_z(x, y, z)$ ne s'annule pas, ce qui est génériquement vrai.

et ses contemporains connaissaient de nombreux exemples d'équations à deux variables que l'on savait intégrer par des méthodes particulières et dont la solution générale ne dépendait pas d'une constante arbitraire, mais d'une fonction arbitraire.

En 1815, Pfaff devait rendre raison à Monge qui, en désaccord avec Euler, avait déjà notifié que deux équations simultanées indépendantes $\varphi_1(x, y, z) = c_1$ et $\varphi_2(x, y, z) = c_2$ représentant une famille de courbes dans l'espace pouvaient très bien être considérées comme une intégrale de ω, lorsque les vecteurs tangents aux courbes appartiennent en tout point aux hyperplans $\mathrm{Ker}_x(\omega)$. Plus généralement, si une distribution donnée d'hyperplans dans un espace à n dimensions manifeste trop de rigidité pour être intégrable au sens géométrique[13], il se peut fort bien qu'une *sous-distribution* appropriée de k-plans ($k < n - 1$) soit intégrable ; là est toute l'idée du théorème général anticipé par Pfaff que Clebsch, Natani, Frobenius, Cartan, Vessiot et Kähler allaient finaliser ultérieurement, théorème algébrique d'une portée universelle puisqu'il s'applique aux équations aux dérivées partielles à un nombre quelconque de variables dépendantes ou indépendantes, donc en particulier aux équations de champ que Einstein cherchait à faire dériver d'une structure à parallélisme absolu.

5. Universalité et fécondité du partiel Ainsi faut-il comme le pensaient Pfaff et Monge étudier l'intégrabilité *partielle* d'une distribution pour y déceler les lignes géométriques charpentées qui sont invisibles à grande échelle parce qu'elles sont de dimension inférieure. En mathématiques, les universaux de la généralisation spécifique sont fréquemment « cachés » dans l'entrebaillement du partiel, ou dans des conditions extensionnelles simples qui semblent élargir gratuitement la portée d'un énoncé connu. Et c'est à la raison déterminante d'activer son organe spéculatif pour tester les possibles. Dans l'abstraction mathématique pure, il existe en effet une exigence structurale des parties vis-à-vis de leur tout, à savoir, l'obligation de saisir les sous-objets d'un objet mathématique donné, y compris lorsque l'objet n'explicite pas ses sous-structures, de la même manière que l'on se trouve contraint, dans une démonstration par induction, de mettre en forme une hypothèse de récurrence intermédiaire qui a plus de portée que le théorème en vue.

5. Théorème de Pfaff Si $\omega = \omega_1(x)\, dx^1 + \cdots + \omega_n(x)\, dx^n$ est une forme différentielle quelconque, le théorème original (et incomplet, *cf.* [**161, 205**]) de Pfaff en 1815 énonce qu'*il existe un changement de variables $x^j = x^j(y) =$*

[13] — c'est-à-dire que les hyperplans infinitésimaux puissent se souder comme les écailles lisses et aplanies de la peau d'un poisson pour former une collection d'hypersurfaces empilées les unes sur les autres dans l'espace —

$x^j(y^1, \dots, y^n)$ *qui transforme* ω *en une forme* ϖ *qui ne comporte que les* $m < n$ *premières différentielles* $dy^1, \dots, dy^m$:

$$\varpi = \varpi_1(y)\, dy^1 + \cdots + \varpi_m(y)\, dy^m,$$

où $m = n/2$ *si* m *est pair et* $m = (n+1)/2$ *si* m *est impair.*

Sans aucune hypothèse spéciale, Pfaff divise ainsi par deux le nombre de différentielles : l'énoncé est vrai pour les formes « les plus générales », *i.e.* celles dont les coefficients $\omega_i(x)$ sont des fonctions mutuellement générales les unes vis-à-vis des autres[14].

Dans le système de coordonnées « simplifié » $(y^1, \dots, y^n)$, on voit immédiatement que les tranches définies par $\{y^1 = c_1, \dots, y^m = c_m\}$, qui ne sont autre que les $(n-m)$-plans définis par

$$\big\{(c_1, \dots, c_m, y^{m+1}, \dots, y^m) : \; y^{m+1}, \dots, y^n \in \mathbb{R}\big\},$$

peuvent être interprétées comme des solutions de l'équation pfaffienne $\varpi = 0$, puisque les équations $dy^1 = dc_1 = 0, \dots, dy^m = dc_m = 0$ impliquent immédiatement que $\varpi = 0$ s'annule sur ces tranches. Par conséquent, dans le système original de coordonnées $(x^1, \dots, x^n)$, la famille de sous-variétés retransformées en arrière :

$$\big\{\big(x^1(c, y''), \dots, x^n(c, y'')\big) : \; y'' = (y^1, \dots, y^m) \in \mathbb{R}^m\big\}$$

de dimension $(n-m)$ paramétrées par les constantes $c_1, \dots, c_m$, constitue une famille de solution de l'équation $\omega = 0$.

5. Brève métaphysique de l'invariance Troublant, ce théorème de Pfaff : il affirme que toute forme différentielle quelconque $\omega = \omega_1(x)\, dx^1 + \cdots + \omega_n(x)\, dx^n$ qui comporte *a priori* n infinitésimaux n'en comporte en fait pas plus de $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$. D'où vient qu'on ne le voit pas d'emblée ?

D'un point de vue abstrait et général, tout objet géométrico-différentiel que l'on sait définir soit d'une manière intrinsèque et indépendante des coordonnées, soit en signalant les lois « covariantes » de transformation auxquelles il est soumis quand on change de coordonnées, souffre d'une certaine imperfection ontologique initiale : son être propre, sa nature même et ses caractères d'individualité demeurent en effet malheureusement invisibles lorsqu'on analyse seulement son invariance morphologique dans le jeu libre du changement de perspective. Les métamorphoses générales on beau se succéder, aucune synthèse véritable ne vient produire au jour l'être de la chose.

Par exemple, la loi qui exprime comment une forme différentielle $\omega_x = \omega_1\, dx^1 + \cdots + \omega_n\, dx^n$ se transforme à travers un difféomorphisme $x^j =$

[14] On pourrait conférer un sens précis à cet énoncé grâce aux théorèmes de transversalité en topologie différentielle.

$x^j(y) = x^j(y^1, \dots, y^n)$ — d'où par différentiation $dx^j = \frac{\partial x^j}{\partial y^1}\, dy^1 + \cdots + \frac{\partial x^j}{\partial y^n}\, dy^n$ — dit simplement que ω est remplacée par :

$$\omega_y = \Big(\sum_j \omega_j \tfrac{\partial x^j}{\partial y^1}\Big)\, dy^1 + \cdots + \Big(\sum_i \omega_j \tfrac{\partial x^j}{\partial y^n}\Big)\, dy^n\,.$$

Certainement, la morphologie générale est préservée, car si l'on pose $\omega_i(y) := \sum_j \omega_j \frac{\partial x^j}{\partial y^i}$, on obtient à nouveau $\omega_y = \omega_1(y)\, dy^1 + \cdots + \omega_n(y)\, dy^n$, et c'est en cela que réside l'invariance formelle du concept. Cependant, l'information que l'on peut tirer de ces formules générales est déjà épuisée à ce premier stade, car, lorsqu'on soumet la forme ω_y à un nouveau changement de coordonnées $y^j = y^j(z) = y^j(z^1, \dots, z^n)$, les formules donnant ω_z sont exactement similaires, aussi bien d'ailleurs que les formules qui donnent ω_z en partant de ω_x, et aussi bien même que les formules que l'on obtiendrait en considérant les difféomorphismes inverses. Le caractère général-abstrait de l'invariance manifeste une certaine circularité. Ce n'est pas elle qui fournit le bon tamis à l'orpailleur différentiel.

En vérité, le fait que l'on envisage l'invariance d'un objet géométrico-différentiel *quelconque* expose nécessairement à une insuffisance de pensée, parce qu'il se peut très bien que les objets se divisent en plusieurs classes qui ne sont pas équivalentes entre elles. Il se peut au contraire que les objets soient tous équivalents entre eux, auquel cas il semble *a priori* inutile de parler de changement de saisie, de perspective, ou de coordonnées, car lorsque l'un sous-tend le multiple, c'est à la compréhension de l'un en lui-même et à sa désignation que doit tendre la recherche. Par exemple, on vérifie[15] que toute forme différentielle $\omega_1(x^1)\, dx^1$ en dimension $n = 1$ se réduit à dy^1, localement au voisinage d'un point générique. On est alors en droit de se demander si toutes les formes différentielles ne se réduisent pas à une seule expression-type.

5. Les problèmes de classification Bien que les problématiques de classification en mathématiques fondamentales soient suffisamment ubiquitaires pour devoir faire l'objet d'une étude métaphysique autonome, nous abrègerons ces considérations. Contentons-nous de noter que dès que les conditions de donation d'un objet sont ambiguës, vagues, imprécises, trop générales, ou extrêmement variables (comme l'est par exemple la donnée d'un polynôme brut), on doit, pour se libérer d'un état de non-connaissance, chercher à éliminer le redondant, disposer les objets équivalents dans une même classe,

[15] En effet, la fonction inconnue $y^1 = y^1(x^1)$ doit satisfaire

$$\omega_1(x^1)\, dx^1 = dy^1 = \frac{dy^1}{dx^1}\, dx^1,$$

d'où $y^1 = \int \omega_1(x^1)\, dx^1$ et pour que $x^1 \mapsto y^1(x^1)$ soit un difféomorphisme local, il faut et il suffit que $\frac{dy^1}{dx^1} = \omega^1(x^1)$ ne s'annule pas.

et sélectionner un représentant pour chaque classe dont l'expression soit à la fois simple, reconnaissable, symétrique et réutilisable. Il faut éliminer la roche pour en extraire le minerai et les pépites.

5. Théorème de Darboux-Frobenius Terminons maintenant cette brève excursion historique en restituant le théorème définif, dû à Frobenius ([**169**]), et indépendamment aussi, à Darboux ([**120**]), qui fournit une liste de toutes les formes normales possibles pour une forme différentielle, valables localement autour d'un point générique $x \in \mathbb{R}^n$. Ce théorème précise considérablement l'énoncé original de Pfaff, car il donne le nombre exact de différentielles apparaissantes et il normalise leurs coefficients.

Théorème. *Si p désigne la* classe[16] *d'une forme différentielle donnée quelconque $\omega = \omega_1(x)\,dx^1 + \cdots + \omega_n(x)\,dx^n$ à coefficients analytiques, alors localement au voisinage d'un point générique, il existe un changement de coordonnées $x^i = x^i(y^1, \dots, y^n)$, $i = 1, \dots, n$, qui transforme ω en une forme modèle ϖ s'exprimant simplement comme suit, suivant la parité de sa classe :*

$$\underline{p = 2m:} \qquad \varpi = y^{2m}\, dy_{2m-1} + \cdots + y^2\, dy^1\,;$$
$$\underline{p = 2m+1:} \qquad \varpi = y^{2m}\, dy_{2m-1} + \cdots + y^2\, dy^1.$$

Par conséquent, deux formes ω et ω' sont équivalentes, localement autour d'un point générique, si et seulement si elles ont la même classe.

En particulier, dans le cas de cinq variables $(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5)$, la classe peut être égale 1, 2, 3, 4 ou 5 et les formes normales possibles sont au nombre de cinq :

$$\begin{aligned} p = 1 \quad &\Longrightarrow \quad \varpi = dy^1, \\ p = 2 \quad &\Longrightarrow \quad \varpi = y^2\, dy^1, \\ p = 3 \quad &\Longrightarrow \quad \varpi = dy^3 + y^2\, dy^1, \\ p = 4 \quad &\Longrightarrow \quad \varpi = y^4\, dy^3 + y^2\, dy^1, \\ p = 5 \quad &\Longrightarrow \quad \varpi = dy^5 + y^4\, dy^3 + y^2\, dy^1. \end{aligned}$$

Dès 1899, à la suite d'un mémoire de Poincaré 1897 consacré à la définition et à l'intégration des éléments de volume en dimension arbitraire,

[16] D'après la définition simplifiée due à Cartan dans son mémoire de synthèse [**70**], si on introduit la suite définie par $\omega_1 := \omega$, $\omega_2 := d\omega$ (où l'opérateur de différentiation extérieure « d » sera défini et analysé dans un instant), $\omega_3 := \omega \wedge \omega$, $\omega_4 := d\omega_3 = d\omega \wedge d\omega$, $\omega_5 := \omega \wedge d\omega \wedge d\omega$, *etc.*, alors la *classe* de ω est le plus petit entier p (*a priori* $\leqslant n$) tel que $\omega_{p+1} \equiv 0$, tandis que $\omega_p \not\equiv 0$; les coefficients $\omega_i(x)$ étant en général supposés analytiques, ω_p ne s'annule alors pas en tout point d'un sous-ensemble dense du domaine de définition de ω. Grâce à la propriété fondamentale d'invariance de l'opérateur « d » que Darboux avait mise en exergue (*cf. infra*), on vérifie que la classe ne dépend pas du système de coordonnées dans lequel est écrite ω.

Cartan rédige un mémoire de synthèse [**70**] dans lequel il repense les travaux consacrés au *problème de Pfaff*, suite à une tradition qui commence par Pfaff ([**356**]) lui-même, et qui comprend Grassmann, Natani, Clebsch, Lie, Frobenius et Darboux. C'est dans ce mémoire que Cartan traduit dans son langage naissant le concept de *covariant bilinéaire* qu'avaient introduit Frobenius et Darboux.

5. Le covariant bilinéaire de Frobenius, d'après Darboux Voici donc comment Gaston Darboux présente dans [**120**] le concept de *covariant bilinéaire* d'une forme différentielle, qui correspond à ce qu'on appelle aujourd'hui la *différentiation extérieure*, concept qui allait être appelé à un destin remarquable, à cause de ses vertus invariantes et de son caractère intrinsèque, et qui allait constituer un « levier systématique de calcul » dans les mémoires ultérieurs développés par l'élève prodige de Lie et de Darboux, Élie Cartan.

Dans l'espace des $(x^1, \dots, x^n)$, considérons une expression différentielle quelconque :

$$\Theta_d := X_1\, dx^1 + \cdots + X_n\, dx^n,$$

où $X_1, \dots, X_n$ sont des fonctions données de x. La différenciation infinitésimale par rapport à soi doit s'effectuer en toute généralité, dans une direction qui n'a *a priori* rien à voir avec le vecteur infinitésimal $dx = \big(dx^1, \dots, dx^n\big)$ sur lequel Θ_d agit. Ainsi, en introduisant un autre symbole différentiel $\delta x = \big(\delta x^1, \dots, \delta x^n\big)$, il s'agit de faire subir à Θ_d la différentiation voulue dans la direction δx, ce qui donne par définition et par application de la règle de Leibniz :

$$\begin{aligned}\Theta_d\big|_{x+\delta x} - \Theta_d\big|_x = \delta\,\Theta_d &= \sum_{i=1}^n \delta\big(X_i\, dx^i\big) = \sum_{i=1}^n \delta X_i\; dx^i + \sum_{i=1}^n X_i\; \delta dx^i \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial X_i}{\partial x^k}\, \delta x^k\, dx^i + \sum_{i=1}^n X_i\; \delta dx^i.\end{aligned}$$

Le premier terme constitue une forme bilinéaire en δx et dx, tandis que le second exige que soit connue la différentiation de dx^i par rapport à δ, ce qui n'est pas sans poser de problèmes d'interprétation, puisque le premier jeu de différentielles dx^i n'est pas supposé[17] dépendre de x, et alors on ne sait pas

[17] Dans le langage moderne de géométrie différentielle, cela revient à dire qu'il n'y a pas de raison de considérer une section du fibré cotangent.

vraiment quel sens[18] donner à $dx^i\big|_{x+\delta x} - dx^i\big|_x$. On est conduit à éliminer[19] ce reste ambigu en observant simplement que si on inverse les rôles de d et de δ, le nouveau reste gênant qui apparaît :

$$d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial X_i}{\partial x^k}\, dx^k\, \delta x^i + \sum_{i=1}^{n} X_i\, d\delta x^i$$

reproduit les δdx^i en permutant δ et d, et par conséquent, si on postule que les deux symboles d'opérateurs d et δ commutent sur les x^i, à savoir, si l'on requiert les relations de commutation :

$$\delta dx^i = d\delta x^i,$$

qui sont clairement invariantes[20], alors ces termes disparaissent comme souhaité lorsqu'on soustrait les deux précédentes équations, ce qui donne :

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial X_i}{\partial x^k}\, \delta x^k\, dx^i - \frac{\partial X_i}{\partial x^k}\, dx^k\, \delta x^i \right).$$

Mais la morphogénèse de ce calcul ne s'arrête pas ici, elle doit nécessairement se poursuivre[21] : en intervertissant les indices sommatoires i et k dans les termes qui sont situés après le signe négatif, il est possible de *découvrir*

---

[18] On pourrait stipuler que $\delta dx^i = 0$ pour toute différentiation δ, ce qui reviendrait à dire que tous les vecteurs infinitésimaux dx sont parallèles, au sens euclidien, en tous les points x, mais cette condition n'est pas préservée par un changement quelconque de coordonnées.

[19] Calcul et concept se rejoignent ici dans la recherche d'actes visant à supprimer l'extrinsèque et l'on « voit », dans de nombreuses situations mathématiques, que « soustraire en permutant » constitue la solution la plus simple et la plus naturelle. L'opérateur général d'antisymétrisation potentielle :

« un ordre donné peut être soustrait à l'ordre inverse »

agit dans des domaines mathématiques très variés : théorie des invariants, géométrie non commutative, théorie des opérateurs, mécanique quantique, groupes de Lie, calcul tensoriel, théorie des représentations.

[20] En effet, dans des coordonnées $y^i = y^i(x)$ déduites de x par difféomorphisme, ces relations s'exprimeront pareillement sous la forme $\delta dy^i = d\delta y^i$.

[21] Dans les « forêts d'arbres symboliques » dont l'existence actuelle–potentielle nous est constamment révélée par la pratique du calcul formel, on sait par expérience qu'afin de parvenir aux expressions achevées qui constituent les noyaux durs d'une toile complexe de relations algébriques, il faut repérer, mémoriser et interroger tout ce par quoi l'inachèvement d'un résultat peut se manifester, et ce, jusqu'aux imperfections les plus infimes. Ici, pour l'expression obtenue de $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$, des gestes de calculs sont encore possibles, et c'est pourquoi il faut les tester, puis les accomplir pleinement s'ils sont signifiants.

un facteur commun devant le terme bi-différentiel $dx^i\,\delta x^k$:

$$\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}\right) dx^i\,\delta x^k.$$

Et comme ce facteur commun :

$$a_{ik} := \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}$$

est clairement antisymétrique par rapport aux indices i et k, à savoir : $a_{ik} = -a_{ki}$ (d'où il découle en particulier que $a_{ii} = 0$), on peut *encore simplifier* le résultat en décomposant la somme :

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{k=1}^{n} = \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n} + \sum_{i=k} + \sum_{n\geqslant i>k\geqslant 1},$$

ce qui permet d'obtenir enfin l'expression finale et significative du covariant bilinéaire :

$$\boxed{\delta\Theta_d - d\Theta_\delta = \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}\right)\left[dx^i\,\delta x^k - dx^k\,\delta x^i\right]}\,.$$

C'est cette présentation basée sur la supposition de commutation $\delta dx_i = d\delta x_i$ que Cartan retiendra de son maître Darboux et qu'il restituera toujours dans les expositions ultérieures [**72, 73, 75, 76, 77, 78, 79**]. Avant de discuter la géométrie de cette expression qui manifeste un caractère doublement antisymétrique, à la fois dans le coefficient $a_{ik} = \frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}$ et dans l'expression bilinéaire $dx^i\,\delta x^k - dx^k\,\delta x^i$, il est impératif d'énoncer la propriété fondamentale d'invariance que Darboux place au tout début de son mémoire.

Proposition. *Le covariant bilinéaire est invariant par changement de coordonnées, à savoir si* $x^i = \psi^i(y^1,\dots,y^n)$ *est un changement de coordonnées dont découlent les relations* $dx^i = \sum_{1\leqslant k\leqslant n}\frac{\partial\psi^i}{\partial y^k}\,dy^k$ *entre différentielles, lesquelles permettent de transformer la forme* $\Theta_d = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} X_i\,dx^i$ *en une forme dans l'espace des* y *:*

$$\Pi_d := \sum_{k=1}^{n} Y_k\,dy^k$$

dont les coefficients Y_k *sont naturellement donnés par :*

$$Y_k := \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\partial\psi^i}{\partial y^k}\,X_i,$$

alors le covariant bilinéaire de Π_d *défini dans les coordonnées* y^k *coïncide avec le covariant bilinéaire calculé dans les coordonnées* x^i*, lorsqu'elles* *sont liées par* $x^i = \psi^i(y^k)$, *c'est-à-dire :*

$$\begin{aligned}\delta\Theta_d - d\Theta_\delta &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\left(\frac{\partial X_i}{\partial x^k} - \frac{\partial X_k}{\partial x^i}\right)\left[dx^i\,\delta x^k - dx^k\,\delta x^i\right]\\ &= \sum_{1\leqslant i<k\leqslant n}\left(\frac{\partial Y_i}{\partial y^k} - \frac{\partial Y_k}{\partial y^i}\right)\left[dy^i\,\delta y^k - dy^k\,\delta y^i\right]\\ &= \delta\Pi_d - d\Pi_\delta.\end{aligned}$$

Cette identité se vérifie par un calcul direct dans lequel, lorsqu'on calcule les dérivées premières $\frac{\partial Y_i}{\partial y^k}$ et $\frac{\partial Y_k}{\partial y^i}$ en différentiant les expressions qui définissent Y_i et Y_k, il apparaît les deux sommes de dérivées secondes $\sum_{1\leqslant k,i\leqslant n}\frac{\partial^2\psi^k}{\partial y^k\partial y^i}X_k$ et $\sum_{1\leqslant k,i\leqslant n}\frac{\partial^2\psi^i}{\partial y^i\partial y^k}X_i$ qui disparaissent « miraculeusement » dans la soustraction $\frac{\partial Y_i}{\partial x^k} - \frac{\partial Y_k}{\partial x^i}$. Les autres expressions se correspondent alors par un calcul algébrique direct et sans surprise.

En résumé, sur un plan purement formel, un phénomène symbolique d'élimination de l'extrinsèque est garanti par l'antisymétrisation, d'abord comme opérateur de soustraction conceptuelle au moment de la définition du covariant bilinéaire $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$ lorsqu'est décidé un acte de retranchement permuté, et ensuite comme signe permanent d'annihilation de tout terme parasite introduit par un changement quelconque de coordonnées.

L'invariance par changement de coordonnées offre des clés innombrables permettant de pénétrer par réseau de gestes intrinsèques dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

5. Opérateur de différentielle extérieure Nous pouvons dorénavant nous en remettre au formalisme contemporain[22], en explicitant les métamorphoses conceptuelles que masque parfois la contraction des notations.

Le symbole unique « d », adopté universellement depuis son introduction par le géomètre Kähler[23], est aujourd'hui utilisé pour définir le covariant bilinéaire antisymétrique, bien que, comme nous l'avons vu, deux directions infinitésimales soient impliquées, et même trois ou plus lorsqu'on passe aux covariants trilinéaires, quadrilinéaires, *etc.*, objets d'ordre supérieur qui ont été introduits par Henri Poincaré et par Élie Cartan lui-même. Par définition, « d » agit tout d'abord en tant que symbole de différentiation unilatérale

[22] C'est Henri, le fils d'Élie Cartan, dans ses leçons à l'École Normale Supérieure ([**88**]) qui a traduit les concepts fondamentaux dans le langage hypothético-déductif actuel.

[23] « J'adopte dans cet ouvrage [*i.e.* [**84**]] la notation préconisée par M. E. KAEHLER, qui consiste à désigner par $d\omega$, et à appeler *différentielle extérieure* d'une forme différentielle extérieure ω de degré quelconque, ce que je désignais auparavant par ω' et ce que j'appelais la *dérivée extérieure* de la forme ω. »

comme suit sur les fonctions $f = f(x)$:

$$df := \tfrac{\partial f}{\partial x^1}\, dx^1 + \tfrac{\partial f}{\partial x^2}\, dx^2 + \cdots + \tfrac{\partial f}{\partial x^n}\, dx^n \,.$$

Dans la pensée du différentiable, cette formule classique du calcul leibnizien développe simplement la différence $f(x + dx) - f(x)$ en admettant que les dérivées partielles de f existent[24], autrement dit, que le graphe $\{y = f(x)\}$ de f est localement approximable par son plan tangent $\big\{Y - y = \frac{\partial f}{\partial x^1}(X^1 - x^1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x^n}(X^n - x^n)\big\}$.

Mais ce même symbole « d » de type apparemment unidimensionnel est aussi utilisé, dans le formalisme actuel, pour désigner la « *différentielle extérieure* » d'une forme différentielle $\omega = \omega_1(x)\, dx^1 + \cdots + \omega_n(x)\, dx^n$, qui est définie abstraitement comme suit (nous expliquerons dans un instant le nouveau signe « $\wedge$ ») :

$$d\omega := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \Big(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} \Big)\, dx^i \wedge dx^j \,.$$

Ici, bien que nous reconnaissions le même type de coefficients antisymétriques $\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}$ que dans l'expression du covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius (à un changement de notations près), nous sommes en droit de demander où est passée l'idée, conceptuellement fondatrice, de différence antisymétrisée de $\omega(dx)$ dans une autre direction infinitésimale δx que celle de dx. En fait, dans la formule définissant $d\omega$ ci-dessus, c'est dans le symbole bien connu « $\wedge$ » qu'est inscrit le bidimensionnel, ou plus exactement, qu'est lové l'acte de grassmannisation du différentiel. Expliquons cela.

Formellement parlant, ce symbole « $\wedge$ » désigne le *produit extérieur* entre formes différentielles de degré 1 (voire de degré 2, 3, ou plus), qui est par définition antisymétrique quand on change l'ordre des facteurs :

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i \,.$$

En général, dans la quasi-totalité des théories mathématiques ou physiques qui recourent aux formes différentielles, cette simple propriété algébrique suffit à l'usage, aux démonstrations, et aux intuitions techniques : puissance du levier symbolique ! Toutefois, puisqu'il est de notre devoir de satisfaire l'exigence de comprendre, nous allons en expliciter brièvement la géométrie afin de montrer comment elle s'enracine dans le langage de Darboux.

D'après la théorie contemporaine, les expressions du type :

$$\Omega := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}(x)\, dx^i \wedge dx^j$$

[24] Il n'est pas de notre propos de discuter ici de l'histoire et de la philosophie des hypothèses de régularité auxquelles on peut soumettre les êtres qu'on appelle fonctions.

avec des coefficients $a_{ij}(x)$ fonctions de x, sont appelées *2-formes différentielles* ; elles doivent être considérées comme des *formes bilinéaires antisymétriques* dépendant de x, au sens suivant. Tandis que les 1-formes différentielles $\omega = \omega_1(x)dx^1 + \cdots + \omega_n(x)dx^n$ sont, comme nous l'avons vu, des formes linéaires dépendant de x agissant sur des champs de vecteurs quelconques dépendant de x écrits sous la forme :

$$X(x) = X^1(x)\,\frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x)\,\frac{\partial}{\partial x^2} + \cdots + X^n(x)\,\frac{\partial}{\partial x^n}$$

en produisant tout simplement le nombre scalaire :

$$\langle \omega,\, X\rangle_x := \omega_1(x)\,X^1(x) + \omega_2(x)\,X^2(x) + \cdots + \omega_n(x)\,X^n(x),$$

qui est obtenu par « projection » de $X(x)$ parallèle à l'hyperplan $\{\omega = 0\}$ passant par x, les 2-formes différentielles Ω agiront quant à elles sur des *bivecteurs*. Ces derniers répondent à l'idée, mise au point par Grassmann, qu'il devrait exister des « vecteurs bidimensionnels orientés » généralisant l'idée newtonienne de vecteur (unidimensionnel) orienté. Par définition, les bivecteurs sont constitués d'un couple ordonné de *deux vecteurs* tracés dans l'espace tangent en un point x et que l'on doit doit envisager, sur le plan géométrique, comme représentant l'élément de surface *orienté* qu'est le parallélogramme tracé sur ces deux vecteurs. Lorsque les deux vecteurs basés en x varient dans l'espace, la variation associée du bivecteur doit témoigner fidèlement des pivotements et des dilatations du parallélogramme enveloppé.

Sur un plan purement algébrique, on se donne une loi de multiplication entre vecteurs — qui est *externe* en ce sens que le résultat vit dans un autre espace supplémentaire — que l'on notera $X \wedge Y$, avec le même symbole « $\wedge$ », et qui est naturellement antisymétrique :

$$X \wedge Y = -Y \wedge X,$$

parce que le parallélogramme doit changer d'orientation lorsqu'on le regarde en-dessous, de telle sorte que le côté Y soit placé avant le côté X.

Ainsi, les 2-formes Ω agissent par définition sur les bivecteurs en calculant une sorte de projection de la mesure du parallélogramme dans la direction définie par Ω comme suit, où il faut regarder ce qu'il advient de $\big[dx^i \wedge dx^j\big]\big(X \wedge Y\big)$:

$$\begin{aligned}
\Omega\big(X \wedge Y\big) &:= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(x)\,\big[dx^i \wedge dx^j\big]\big(X \wedge Y\big) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(x)\,\Big(dx^i(X)\cdot dx^j(Y) - dx^i(Y)\cdot dx^j(X)\Big) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}(x)\,\Big(X^i(x)\cdot Y^j(x) - Y^i(x)\cdot X^j(x)\Big).
\end{aligned}$$

Par linéarité, il suffit de retenir la formule générale :

$$\big[\omega \wedge \varphi\big]\big(X \wedge Y\big) := \omega(X)\cdot\varphi(Y) - \omega(Y)\cdot\varphi(X),$$

où ω et φ sont des 1-formes, X et Y sont des champs de vecteurs. En vérité, le membre de droite jouit d'une double antisymétrie : par rapport au couple (ω, φ) aussi bien que par rapport au couple (X, Y), et c'est entre autres pour cette raison que le symbole « $\wedge$ » est utilisé deux fois, aussi bien pour les 2-formes que pour les bivecteurs.

En conclusion, en géométrie différentielle contemporaine, l'expression de la différentielle extérieure

$$d\omega = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \Big(\frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} - \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j}\Big) dx^i \wedge dx^j$$

d'une 1-forme ω laisse libre la place de l'argument sur lequel agissent les 2-formes élémentaires $dx^i \wedge dx^j$, à savoir les bivecteurs, de la même manière que les symboles modernes de fonction ou d'opérateur laissent ouverte la place des êtres sur lesquelles ils agissent. C'est à capturer des parallélogrammes géométriques qu'est destinée $d\omega$.

5. Lien avec le covariant bilinéaire de Darboux-Frobenius Notons que l'expression générale du covariant bilinéaire encadrée plus haut ne désigne pas un opérateur, puisqu'elle produit un nombre dès que sont spécifiés dx et δx. Toutefois, on constate sans difficulté que :

$$\boxed{\textit{le covariant bilinéaire } \delta\Theta_d - d\Theta_\delta \textit{ coïncide avec } d\Theta\big(\delta x \wedge dx\big)},$$

c'est-à-dire avec l'application de $d\Theta$ au bivecteur infinitésimal[25] $\delta x \wedge dx$.

Autrement dit, nous avons là un seul et même concept dont la définition génétique change de statut d'une théorie à l'autre. Tandis que Darboux différentie le différentiel en l'antisymétrisant pour en extraire la formule intrinsèque $\delta\Theta_d - d\Theta_\delta$, la présentation moderne postule algébriquement une double antisymétrie à travers la formule $\big[\omega \wedge \varphi\big]\big(X \wedge Y\big) := \omega(X)\cdot\varphi(Y) - \omega(Y)\cdot\varphi(X)$. D'un point de vue philosophique, il est frappant de voir ressurgir, au cœur même de la théorie des équations différentielles, le concept d'élément bidimensionnel qu'avait conceptualisé Grassmann par des voies abstraites autonomes. Il y a ici, dans la différenciation conceptuelle d'une forme différentielle par rapport à elle-même, comme *un déchirement*

[25] Ce n'est pas la première fois que l'on constate, en comparant la théorie classique avec le langage moderne, une interversion des rôles entre le vectoriel et le différentiel, à cause du symbole newtonien plurivoque « dx », puisque déjà dans la définition classique d'un $ds^2 = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$ riemannien, les différentielles dx^i devraient être considérées comme des vecteurs tangents infinitésimaux.

nécessaire du spatial unidimensionnel qui le bidimensionnalise et l'antisymétrise du même coup. Le différentiel spatial du différentiel engendre sa propre géométrie, et c'est nécessairement celle de Grassmann.

5. Torsion d'une connexion affine Grâce à ces préliminaires, nous pouvons maintenant présenter les tenseurs invariants qu'on associe (d'après Élie Cartan) aux connexions en calculant mécaniquement des covariants bilinéaires. Formellement[26], la *torsion* d'une connexion définie par un repère mobile $\big(\mathbf{m}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\big)$ satisfaisant $\delta_{dx}\mathbf{m} = \omega^i\,\mathbf{e}_i$ et $\delta_{dx}\mathbf{e}_i = \omega_i^j\,\mathbf{e}_j$, est la collection des n formes différentielles de degré deux $\Omega^1, \dots, \Omega^n$ définies par :

$$\boxed{\Omega^i := d\omega^i - \omega^k \wedge \omega_k^i},$$

où le symbole d désigne la différentiation extérieure. Pour éclairer cette définition, signalons que *ces* 2*-formes* Ω^i *mesurent la non-commutation des déplacements infinitésimaux de l'origine* $\mathbf{m}$ *du repère mobile le long d'un parallélogramme-test* : si en effet on considère deux déplacements différentiels distincts dx' et dx'', on peut calculer[27] soigneusement :

$$\begin{aligned}
\delta_{dx'}\delta_{dx''}\mathbf{m} - \delta_{dx''}\delta_{dx'}\mathbf{m} &= \delta_{dx'}\big[\omega^i(dx'')\cdot\mathbf{e}_i\big] - \delta_{dx''}\big[\omega^i(dx')\cdot\mathbf{e}_i\big] \\
&= \delta_{dx'}\big[\omega^i(dx'')\big]\cdot\mathbf{e}_i + \omega^i(dx'')\cdot\delta_{dx'}[\mathbf{e}_i] - \\
&\qquad - \delta_{dx''}\big[\omega^i(dx')\big]\cdot\mathbf{e}_i - \omega^i(dx')\cdot\delta_{dx''}[\mathbf{e}_i] \\
&= d\omega^i\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i + \omega^i(dx'')\,\omega_i^j(dx')\cdot\mathbf{e}_j - \\
&\qquad - \omega^i(dx')\,\omega_i^j(dx'')\cdot\mathbf{e}_j \\
&= d\omega^i\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i - \big[\omega^k(dx')\,\omega_k^i(dx'') - \omega^k(dx'')\,\omega_k^i(dx')\big]\,\mathbf{e}_i \\
&= d\omega^i\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i - \big[\omega^k\wedge\omega_k^i\big]\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i \\
&= \Omega^i\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i.
\end{aligned}$$

Cette non-commutation s'exprime donc par l'action de la 2-forme vectorielle de torsion $\Omega^i\cdot\mathbf{e}_i$ sur le 2-plan infinitésimal $dx'\wedge dx''$ du parallélogramme-test. Nous exposerons dans un instant (Section 5) une interprétation géométrique macroscopique de la torsion plus immédiatement riche en substance pour la pensée intuitive et qui éclairera cette dénomination.

[26] À moins qu'il ne ressente le devoir impératif de reconstruire par lui-même les éléments fondamentaux d'une théorie qui lui est inconnue, le lecteur se référera au paragraphe suivant pour un exposé géométrique du concept de torsion.

[27] Lors du passage à la quatrième ligne, on a regroupé le premier et le troisième terme de l'égalité précédente pour faire apparaître le covariant bilinéaire que l'on a écrit avec l'opérateur d, et on a appliqué les formules donnant $\delta_{dx'}[\mathbf{e}_i]$ et $\delta_{dx''}[\mathbf{e}_i]$; lors du passage à la sixième ligne, on a renommé i et k les deux indices j et i et observé qu'apparaissait naturellement les 2-formes $\omega^k\wedge\omega_k^i$.

5. Réexpression dans la base définie par le repère mobile Nous possédons deux bases de 2-formes, à savoir les $dx^i \wedge dx^j$ pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et les $\omega^k \wedge \omega^l$, avec $1 \leqslant k < l \leqslant n$, qui sont l'une et l'autre au nombre de $\frac{n(n-1)}{2}$. D'après le « principe d'expression » qui pilote automatiquement certains actes de calculs en mathématiques, chaque Ω^i doit donc pouvoir s'exprimer comme combinaison linéaire des 2-formes élémentaires $\omega^k \wedge \omega^l$:

$$\Omega^i = \Lambda^i_{kl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

ce qui fait apparaître certaines fonctions $\Lambda^i_{kl} = \Lambda^i_{kl}(x, \lambda)$. Puisque la somme porte sur tous les indices k et l de 1 à n et puisque $\omega^k \wedge \omega^l = -\omega^l \wedge \omega^k$, on peut supposer sans perte de généralité que ces coefficients sont antisymétriques par rapport à leurs indices inférieurs :

$$\Lambda^i_{kl} = -\Lambda^i_{lk},$$

de telle sorte que l'on peut aussi écrire :

$$\Omega^i = 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} \Lambda^i_{kl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l \,.$$

L'interprétation géométrique du tenseur de torsion Λ^i_{kl} sera fournie dans un instant.

5. Courbure d'une connexion affine Mentionnons brièvement que la *courbure* de la connexion définie par le repère mobile $\big(\mathbf{m}; \mathrm{e}_1, \dots, \mathrm{e}_n\big)$ est, d'un point de vue formel, la collection des 2-formes :

$$\boxed{\Omega^j_i := d\omega^j_i - \omega^k_i \wedge \omega^j_k},$$

que l'on peut aussi décomposer dans la base des 2-formes $\big(\omega^k \wedge \omega^l\big)_{1 \leqslant k < l \leqslant n}$

$$\Omega^j_i = A^i_{jkl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l = 2 \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} A^i_{jkl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l,$$

ce qui fait apparaître un *tenseur de torsion* A^i_{jkl} à quatre indices. Puisque cet article est intégralement consacré aux structures de courbure identiquement nulle, *i.e.* satisfaisant $A^i_{jkl} = 0$, nous nous contenterons de signaler, en complète analogie avec la torsion, que que *ces 2-formes Ω^j_i mesurent la non-commutation des déplacements infinitésimaux des vecteurs e_i du repère* *mobile le long d'un parallélogramme-test* :

$$\begin{aligned}
\delta_{dx'}\delta_{dx''}\mathbf{e}_i - \delta_{dx''}\delta_{dx'}\mathbf{e}_i &= \delta_{dx'}\big[\omega_i^j(dx'')\cdot\mathbf{e}_j\big] - \delta_{dx''}\big[\omega_i^j(dx')\cdot\mathbf{e}_j\big] \\
&= \delta_{dx'}\big[\omega_i^j(dx'')\big]\cdot\mathbf{e}_j + \omega_i^j(dx'')\cdot\delta_{dx'}\big[\mathbf{e}_j\big] - \\
&\qquad - \delta_{dx''}\big[\omega_i^j(dx')\big]\cdot\mathbf{e}_j - \omega_i^j(dx')\cdot\delta_{dx''}\big[\mathbf{e}_j\big] \\
&= d\omega_i^j\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_j + \omega_i^j(dx'')\,\omega_j^k(dx')\cdot\mathbf{e}_k - \omega_i^j(dx')\,\omega_j^k(dx'')\cdot\mathbf{e}_k \\
&= d\omega_i^j\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_j - \big[\omega_i^k(dx')\,\omega_k^j(dx'') - \omega_i^k(dx'')\,\omega_k^j(dx')\big]\cdot\mathbf{e}_j \\
&= d\omega_i^j\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_j - \big[\omega_i^k\wedge\omega_k^j\big]\big(dx'\wedge dx''\big) \\
&= \Omega_i^j\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_j.
\end{aligned}$$

Résumé. Étant donné un repère mobile $\big(\mathbf{m}, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\big)$ dépendant de x et éventuellement d'autres paramètres λ, le défaut de commutativité entre deux différentiations $\delta_{dx'}(\cdot)$ et $\delta_{dx''}(\cdot)$ effectuées, sur l'origine $\mathbf{m}$ du repère et sur ses vecteurs $\mathbf{e}_i$, dans deux directions infinitésimales distinctes dx' et dx'' :

$$\boxed{\begin{aligned}\big(\delta_{dx'}\delta_{dx''} - \delta_{dx''}\delta_{dx'}\big)\,\mathbf{m} &= \Omega^i\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_i \\ \big(\delta_{dx'}\delta_{dx''} - \delta_{dx''}\delta_{dx'}\big)\,\mathbf{e}_i &= \Omega_i^j\big(dx'\wedge dx''\big)\cdot\mathbf{e}_j\end{aligned}},$$

est quantifié par l'action, sur le bivecteur $dx'\wedge dx''$, de deux collections de 2-formes différentielles :

$$\boxed{\begin{aligned}\Omega^i &:= d\omega^i - \textstyle\sum_k \omega^k\wedge\omega_k^i \\ \Omega_i^j &:= d\omega_i^j - \textstyle\sum_k \omega_i^k\wedge\omega_k^j\end{aligned}},$$

que l'on calcule directement à partir des 1-formes fondamentales ω^i et ω_i^j qui expriment les variations infinitésimales du repère :

$$\boxed{\begin{aligned}\delta_{dx}\mathbf{m} &= \omega^i\,\mathbf{e}_i \\ \delta_{dx}\,\mathbf{e}_i &= \omega_i^j\,\mathbf{e}_j\end{aligned}}.$$

3. Connections

Transport par parallélisme et coefficients de Christoffel. Insistons sur l'interprétation géométrique à mémoriser de ces identités, qu'on doit lire comme donnant la loi explicite du parallélisme : le vecteur

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{e}_i\big)_{x+dx} &= \big(\mathbf{e}_i\big)_x + \delta_{dx}\mathbf{e}_i \\
&= \big(\mathbf{e}_i\big)_x + \omega_i^1\,\mathbf{e}_1 + \cdots + \omega_i^n\,\mathbf{e}_n
\end{aligned}$$

constitue le résultat du *transport parallèle* du vecteur $\big(\mathbf{e}_i\big)_x$ du point x vers le point $x + dx$, *en suivant la direction infinitésimale* dx *issue du point* x ; il en va de même pour l'équation :

$$\big(\mathbf{m}\big)_{x+dx} = \big(\mathbf{m}\big)_x + \delta_{dx}\mathbf{m} = \big(\mathbf{m}\big)_x + \omega^i\,\mathbf{e}_i,$$

qui donne la loi de transport pour l'origine du repère.

Nous pouvons maintenant revenir aux coefficients dits de Christoffel qui donnent l'information quantitative au sujet du déplacement parallèle.

Sur les équations de la gravitation d'Einstein (d'aprés Élie Cartan)

Sur un espace-temps local à quatre dimensions, équipé de coordonnées x^i, $i = 1, 2, 3, 4$, et muni d'une métrique pseudo-riemannienne $\sum_{i,\,j=1}^4 g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$ de signature $(3, 1)$, un tenseur à deux indices C_{ij}^0 est dit covariant s'il se transforme comme le tenseur métrique g_{ij} à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En 1922, Élie Cartan démontrait que tout tenseur covariant

$$C_{ij}^0 = \mathscr{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x),\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x),\ \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right)$$

qui dépend du jet d'ordre 2 des coefficients métriques via une fonction $\mathscr{C}_{ij}^0$ indépendante du système de coordonnées et linéaire par rapport aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}$, est nécessairement de la forme :

$$C_{ij}^0 = \nu\, A_{ij} + \mu\, A\, g_{ij} + \lambda\, \delta_i^j;$$

ici, λ, μ et ν sont des constantes, A_{ij} désigne le tenseur de Ricci deux fois covariant associé à la connexion de Levi-Civita et A désigne la courbure scalaire de la métrique pseudo-riemannienne. Il en découlait aisément que le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par :

$$E_i{}^j := \mu \left(A_i{}^j - \frac{1}{2}\, \delta_i^j\, A \right) + \lambda\, \delta_i^j$$

est le plus général qui satisfait la loi de conservation $\sum_{j=1}^n \nabla_j\, E_i{}^j = 0$, exprimant l'annulation de sa divergence absolue. Ici, le quotient $\Lambda := \frac{\lambda}{\mu}$ coïncide avec la constante cosmologique. Ainsi, le tenseur deux fois covariant qu'Einstein avait introduit en 1916 pour écrire les équations de la gravitation $E_{ij} = -T_{ij}$ en relativité générale était-il essentiellement unique.
À partir d'une lecture directe du mémoire de 1922, nous reconstituons les raisonnements originaux d'Élie Cartan sous une forme complète et accessible.

1. Résumé de géométrie riemannienne et équations de la gravitation

En 1922, dans un mémoire souvent cité mais resté difficile d'accès[1], Élie Cartan démontrait que le tenseur E_{ij}, construit par Einstein en 1916 et apparaissant dans le membre *géométrique* des équations $E_{ij} = -T_{ij}$ de la gravitation[2], était essentiellement *unique* (*voir* le Théorème 1.85 ci-dessous ou le RÉSUMÉ ci-dessus). Ce résultat fondamental d'Élie Cartan s'effectuait par la synthèse entre trois théories :

(1) sa propre «méthode d'équivalence», qu'il appliquait aux variétés pseudo-riemanniennes ;
(2) le calcul tensoriel, développé par Gregorio Ricci, Tullio Levi-Civita, Enrico Bompani et autres représentants de l'école italienne ;
(3) la géométrie projective complexe, considérablement approfondie à la fin du dix-neuvième siècle par l'école allemande.

La première, la «méthode d'équivalence», fut inventée et appliquée par Élie Cartan dans les années 1902–1910, peu après qu'il eut édifié la théorie des formes différentielles, au cours de ses recherches sur les groupes de Lie de dimension infinie. Grâce au langage des formes différentielles, Élie Cartan fut à même de résoudre un problème de classification laissé en chantier par son maître Sophus Lie, à savoir la classification de tous les groupes de Lie de dimension infinie qui agissent localement sur un espace complexe de dimension deux[3]. C'était là la première application imposante d'une méthode que le jeune Élie Cartan, alors Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Lyon, ébauchait dès 1902 dans une Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ([**71**]).

Malheureusement, à cause de leur ampleur et de leur réelle complexité, les détails exacts de ces résultats de classification complète sont restés méconnus. Dans de nombreux autres mémoires, Élie Cartan applique la méthode d'équivalence à des problèmes géométriques variés : groupes infinis simples, déformation projective des surfaces, systèmes de Pfaff à cinq variables, transformations de contact, transformations de Bäcklund, *etc.* Malgré cette richesse, à l'époque moderne, seule une partie de ces travaux a été lue, comprise et assimilée en profondeur. À partir de la seconde moitié du vingtième siècle, le mouvement (post)bourbachique ayant orienté l'intérêt des jeunes générations de mathématiciens vers des thématiques émergentes, telles que la géométrie algébrique, l'étude globale des variétés, les systèmes dynamiques, *etc.*, la connaissance de l'héritage mathématique d'Élie Cartan – et notamment de la méthode d'équivalence – souffre de certaines lacunes en France.

[1]*Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203.

[2]*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822.

[3]Avec cette méthode, il retrouvait aussi les résultats de classification pour les groupes continus de dimension finie, publiés par Lie dans un mémoire de synthèse unanimement considéré comme fondateur historique de la théorie des «groupes de Lie» : S. LIE, *Theorie der transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528.

Cette situation est regrettable, car l'approche d'Élie Cartan achève et parfait une profonde synthèse, illustration de l'unité indissoluble des mathématiques, entre deux points de vue : la théorie des objets géométrico-différentiels et la théorie des *groupes continus de tranformation*, appelés aujourd'hui *groupes de Lie*. Toute l'œuvre d'Élie Cartan s'enracine dans la théorie des groupes continus de transformation[4], qui fut fondée par Sophus Lie dans les années 1873–1880.

Au début des années 1920, Élie Cartan transférait la méthode d'équivalence à la théorie des espaces de Riemann, et ce faisant, il en tirait une application spectaculaire à la relativité générale : l'unicité du tenseur d'Einstein, ainsi que la décomposition du tenseur de courbure de Riemann-Christoffel en trois composantes irréductibles. À nouveau, dans le mémoire [**72**] ainsi que dans d'autres mémoires rédigés à la même période, les détails techniques étaient complexes et difficiles d'accès. Hermann Weyl lui-même reconnaissait n'avoir pas saisi la totalité des raisonnements qui conduisaient Élie Cartan à établir l'unicité du tenseur d'Einstein.

En nous aidant de présentations modernisées de la méthode d'équivalence ([**248**], [**419**], [**174**], [**347**]), nous nous proposons de reprendre et de développer les raisonnements elliptiques d'Élie Cartan, à partir d'une lecture directe du mémoire de 1922. Pour ce faire, nous devrons faire preuve d'un effort de formulation conceptuelle et d'un effort de présentation pour rendre accessibles les démonstrations techniques. Ce faisant, nous serons conduits à réexprimer des résultats connus.

Avant de formuler précisément le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein, présentons un bref aperçu historique du concept de courbure en géométrie riemannienne.

1.1. Courbure de Gauss et variétés riemanniennes. Dans une variété riemannienne locale de dimension n, identifiée à $\mathbb{R}^n$ grâce à un système de coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, les rapports de distances infinitésimales sont fournis par un produit scalaire euclidien dont les coefficients dépendent du point où l'on se place. Plus précisément, soit $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ la base de champs de vecteurs naturellement associée à ce système de coordonnées et soit

$$dx := dx^1 \cdot \frac{\partial}{\partial x^1} + \cdots + dx^n \cdot \frac{\partial}{\partial x^n}, \tag{1.2}$$

un vecteur infinitésimal placé au point x de composantes $(dx^1, dx^2, \ldots, dx^n)$ relativement à la base $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$. Le carré

[4]«La plupart de mes travaux mathématiques gravitent autour de la théorie des groupes», [**81**], p. 1, première phrase du texte de synthèse écrit par Élie Cartan à l'occasion de sa réception à l'Académie des Sciences.

ds^2 de la norme de ce vecteur infinitésimal dx placé au point x est représenté par une forme quadratique définie positive en ses composantes infinitésimales :

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i dx^j, \tag{1.3}$$

dont les coefficients variables $g_{ij}(x)$ satisfont la symétrie $g_{ij}(x) = g_{ji}(x)$. Ces coefficients fondamentaux seront toujours supposés *analytiques réels* dans ce mémoire, c'est-à-dire localement développables en série entière. Cette hypothèse de régularité n'est ni optimale ni nécessaire pour la plupart de nos considérations, mais nous l'adopterons par souci de simplicité et parce qu'elle était implicitement admise dans les travaux d'Élie Cartan.

Comme le lecteur l'aura remarqué, nous n'avons pas adopté la convention d'Einstein dans l'écriture de (1.3) (lire aussi le §3.1 ci-dessous). Dans la suite, nous maintiendrons toujours les signes de sommation dans l'écriture de nos formules. La raison principale est la suivante : à partir de la Section 2, un paramètre $\varepsilon_i = \pm 1$, indexé par $i = 1, \ldots, n$, entrera dans l'écriture de nos formes différentielles, lesquelles incorporeront aussi l'indice i, ainsi que d'autres indices j, k, $\ldots$ répétés, mais il n'y aura pas (la plupart du temps) de sommation sur cet indice i. Il deviendrait inélégant et pesant d'avoir à préciser au cas par cas si l'on doit sommer sur l'indice i répété. Par exemple, dans la formule (2.5) ci-dessous, où l'indice i de ε_i est répété, on doit sommer sur i, tandis que dans la formule (3.15) ci-dessous, où l'indice i de ε_i est aussi répété, on ne doit *pas* sommer sur i.

Ce n'est que dans cette Section 1 que nous pourrions adopter la convention d'Einstein. En effet, nous présentons des concepts classiques de calcul tensoriel pour lesquels cette convention a amplement fait ses preuves. Cependant, pour des raisons de cohérence globale, nous maintiendrons partout les signes de sommation. Ainsi, le lecteur qui a adopté ladite convention reconnaîtra simplement les formules habituelles de géométrie riemannienne, s'il fait l'élision des signes Σ. Du reste, ces signes ne tiennent pas une place considérable dans l'écriture des formules et ils ont la vertu de signaler directement à la lecture quels sont les indices sur lesquels on doit sommer, sans avoir à repérer préalablement la répétition de ces indices. Il est vrai que sur des formules relativement simples comme (1.3) ci-dessus ou encore (1.25) ci-dessous, le repérage des indices répétés se fait rapidement. Par contre, dans des formules comme (7.) incorporant huit répétitions d'indices qui n'ont pas de dénomination homogène simple (par exemple j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6, j_7, j_8), le repérage des indices répétés demande un long travail de lecture. Dans un tel cas de figure, sur le plan pratique, le maintien des signes de sommation présente des avantages indéniables.

La *méthode du repère mobile*, introduite par Ribaucour, Frenet, Serret puis systématisée par Darboux à la fin du dix-neuvième siècle, consiste à attacher un système d'axes variables ou de vecteurs «mobiles» à tout objet géométrico-différentiel, afin d'en étudier les propriétés qui sont *invariantes* *par rapport à un* groupe *de transformations*, par exemple le groupe des déplacements euclidiens. Dans son œuvre, Élie Cartan l'a poussée si loin qu'aujourd'hui encore, seule une partie de ses travaux a été relue, comprise et assimilée. Cette «méthode» en quelque sorte implicite dans les calculs de Gauss, permet d'étudier très progressivement (et sans éprouver l'impression de s'égarer dans des calculs interminables) la géométrie intrinsèque d'une surface «gaussienne», équipée d'une métrique de la forme :

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2, \tag{1.4}$$

[en coordonnées $(u,\,v)$ au lieu de $(x^1,\,x^2)$], et notamment, de retrouver la célèbre expression de la courbure $\kappa = \kappa(u,\,v)$ en un point de coordonnées $(u,\,v)$, en fonction des dérivées partielles des coefficients E, F et G, *i.e.* :

$$\tag{1.5}\left\{\begin{aligned}&\kappa = \frac{1}{4\,(EG-F^2)^2}\Bigg\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} + \left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right] + \\ &\quad + F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v} - \frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + 4\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} - 2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right] \\ &\quad + G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u} - 2\,\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v} + \left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right] - \\ &\quad - 2\,\big(EG-F^2\big)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2} - 2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v} + \frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]\Bigg\}.\end{aligned}\right.$$

Cette expression relativement complexe aura coûté tant d'années de recherches à Carl Friedrich Gauss qu'il baptisera[5] «*Theorema Egregium*» (théorème «remarquable», «extraordinaire») la conséquence qui en découle directement et qu'il avait en vue, à savoir que la courbure est préservée par toute application isométrique d'une surface sur une autre, et ce, grâce à un argument purement intrinsèque, qui se dispense de tout plongement de la surface dans l'espace[6]. En effet, grâce à cette formule qui affirme que la courbure est une expression algébrique explicite universelle en fonction des dérivées partielles (d'ordre au plus égal à deux) des coefficients de la métrique infinitésimale (1.4) dans les coordonnées internes $(u,\,v)$, il devient évident que si l'on a une transformation $(u,\,v) \mapsto (\bar u,\,\bar v)$ isométrique qui transforme le ds^2 (1.4) en un $d\bar s^2 = \overline{E}\,d\bar u^2 + 2\overline{F}\,d\bar u d\bar v + \overline{G}\,d\bar v^2$ similaire, autrement dit, si l'on a $\overline{E} = E$, $\overline{F} = F$ et $\overline{G} = G$ [après remplacement de l'expression de $(\bar u,\,\bar v)$ en fonction de $(u,\,v)$], alors on a aussi pour les dérivées partielles $\frac{\partial \overline{E}}{\partial \bar u} = \frac{\partial E}{\partial u}$, $\frac{\partial \overline{F}}{\partial \bar u} = \frac{\partial F}{\partial u}$, $\frac{\partial \overline{G}}{\partial \bar u} = \frac{\partial G}{\partial u}$, $\frac{\partial \overline{E}}{\partial \bar v} = \frac{\partial E}{\partial v}$, *etc.*, d'où il découle immédiatement que $\bar{\kappa} = \kappa$: *la courbure* $\bar{\kappa}$ *au point de coordonnées* $(\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ *coïncide avec la courbure au point repéré par les coordonnées* (u, v).

1.6. Coefficients de courbure riemannienne. En 1854, Bernhard Riemann propose trois sujets possibles à l'université de Göttingen pour passer sa thèse d'habilitation. C.F. Gauss, président du jury, âgé de 77 ans et riche de plusieurs décennies de méditations solitaires sur les géométries non-euclidiennes, choisit de mettre Riemann à l'épreuve sur l'une des trois propositions, intitulée *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la géométrie* [*Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*]. Or, c'était le moins mûr et le moins préparé des trois sujets que Riemann avait proposés. Après six semaines de réflexion et de rédaction, Riemann présente oralement son *habilitationsvortrag* devant un public d'universitaires non mathématiciens, en évitant soigneusement de présenter des calculs et de rentrer dans des considérations techniques.

Dans ce texte court publié à titre posthume en 1868 et qui révolutionna la géométrie, Riemann pose *ab initio* le problème de la nature des notions topologiques, des notions géométriques et des notions métriques de base grâce auxquelles on peut concevoir mathématiquement l'*espace*, sans entacher cette «Idée problématique» d'hypothèses implicites. En particulier, il propose de généraliser aux espaces à n dimension la notion de produit scalaire infinitésimal via la définition (1.3), qui généralise la définition (1.4) que Gauss avait prise pour fondement de l'étude intrinsèque des surfaces plongées dans l'espace tridimensionnel. Se posait alors la question de généraliser la notion de courbure en dimension $n \geqslant 3$ et d'obtenir un analogue de la *formula egregia* (1.5). Pour cela, une stratégie d'économie aurait alors été la bienvenue, puisque les calculs de Gauss étaient déjà considérables en dimension $n = 2$.

Or Riemann savait que la courbure de Gauss s'exprime de manière particulièrement simple dans un système de coordonnées dites «géodésiques». Dans un tel système, le ds^2 se réduit à la forme normalisée $ds^2 = du^2 + G(u, v)\, dv^2$. Ici, u représente le rayon géodésique issu de l'origine et v représente l'angle que fait ce rayon à l'origine avec une géodésique fixe. Ainsi, on a $G(u, 0) = G(u, 2\pi)$, et il faut considérer qu'une telle métrique est une déformation de la métrique euclidienne $dr^2 + r^2\, d\theta^2$, écrite en coordonnées polaires. Avant d'obtenir la *formula egregia* (1.5), Gauss avait démontré en 1822 l'existence de systèmes de coordonnées géodésiques pour toute surface plongée dans l'espace et il en déduisit la même année une expression

[5]Nous proposons d'appeler «*formula egregia*» la formule (1.5).

[6]C.F. Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146.

intrinsèque pour la courbure. Évidemment, nous pouvons retrouver cette expression en appliquant la formule (1.5), que Gauss n'obtint que cinq années plus tard, en 1827, ce qui donne :

$$\kappa = \frac{1}{4\,G^2}\left\{\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 - 2G\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right\} = -\frac{1}{\sqrt{G}}\,\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}. \tag{1.7}$$

De plus, Riemann savait que dans un système de coordonnées géodésiques, la courbure des surfaces apparaît dans le développement limité du coefficient $G(u,\,v)$ du ds^2 au voisinage de l'origine. En effet, après une normalisation élémentaire de la métrique à l'origine qui assure que $\sqrt{G(0,v)} = 0$ et que $\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(0,\,v) = \lim_{u\to 0}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}(u,\,v) = 1$, on démontre ([**414**], Chapter 3B, Addendum) que

$$\sqrt{G}(u,\,v) = u - \frac{1}{6}\,\kappa(0)u^3 + \mathrm{o}(u^3), \tag{1.8}$$

où $\kappa(0)$ est la courbure de la surface à l'origine.

Dans des travaux manuscrits non publiés – difficiles à dater –, en partant de (1.7), Riemann généralise donc la notion de courbure aux variétés de dimension $n \geqslant 2$ munies d'un ds^2 général de la forme (1.3). Il se place dans un système de coordonnées appelé depuis «*coordonnées normales de Riemann*», qui généralise le système de coordonnées géodésiques à la dimension quelconque $n \geq 2$. Dans un tel système de coordonnées, on a $g_{ij}(0) = \delta^i_j$ et $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}(0) = 0$, pour tous $i,\,j,\,k = 1,\,\ldots,\,n$ (*voir* [**414**], Chapter 4B). En effectuant un développement limité des coefficients $g_{ij}(x)$ à l'origine, on peut écrire :

(1.9)

$$\begin{cases} ds^2(x) &= \displaystyle\sum_{i,\,j=1}^n g_{ij}(x)\,dx^i dx^j \\ &= \displaystyle\sum_{i=1}^n (dx^i)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,\,j,\,k,\,l=1}^n \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l}(0)\,x^k x^l\,dx^i dx^j + \mathrm{o}(|x|^2). \end{cases}$$

Ensuite, grâce à un calcul algébrique – passé sous silence –, Riemann affirme qu'il existe des nombres A_{ijkl} tels que l'on peut réécrire le précédent développement limité sous la forme :

(1.10)

$$ds^2(x) = \sum_{i=1}^n (dx^i)^2 - \frac{1}{6}\sum_{i,\,j,\,k,\,l=1}^n A_{ijkl}\,\left(x^k\,dx^i - x^i\,dx^k\right)\left(x^l\,dx^j - x^j\,dx^l\right) + \mathrm{o}(|x|^2).$$

Dans ce mémoire de 1854, on ne trouve pas de formule mathématique explicite, mais on remarque une phrase qui décrit «en langue naturelle» le contenu de la formule (1.10), et ce de manière très précise.

Sept années plus tard, en 1861, Riemann soumet à l'Académie des Sciences de Paris un mémoire intitulé *Commentatio mathematica qua respondere tentatur quæstioni ab illustrissima Academia Parisiensi propositæ*[7]. Dans ce mémoire qui traite de l'équation de la chaleur, Riemann démontre rigoureusement que l'annulation des coefficients A_{ijkl} est la condition nécessaire et suffisante pour que la variété riemannienne $(M,\, ds^2)$ soit localement isométrique à l'espace $\mathbb{R}^n$, muni de la métrique euclidienne standard. Ce résultat généralisait le théorème de Gauss sur les surfaces de courbures nulles. Cet extrait du mémoire de 1861 est traduit en anglais et commenté par M. Spivak dans le Chapitre 4B de [**414**].

En 1869, peu de temps après la publication posthume de l'*habilitationsvortrag* de 1854, le disciple de Riemann Erwin Bruno Christoffel entreprend le premier travail de classification des variétés riemanniennes à isométrie près (*cf.* [**56**]). Supposons donnée une isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre deux variétés riemanniennes $(M,\, ds^2)$ et $(\overline{M}, d\bar{s}^2)$, c'est-à-dire une application qui transforme une métrique $ds^2 = \sum_{i,\,j=1}^n g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$ en une autre métrique $d\bar{s}^2 = \sum_{i,\,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j$. Pour isoler les dérivées secondes des composantes d'une telle isométrie, pour exprimer les composantes de courbure riemannienne et pour calculer ce qu'on appelle (depuis l'article [**277**] de Ricci et Levi-Civita) les *dérivées covariantes* du tenseur de Riemann, Christoffel choisit d'introduire la notation :

$$\left\{ \begin{matrix} k \\ i\, j \end{matrix} \right\} := \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{n} g^{pk} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij} \right), \tag{1.11}$$

où (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}). On appelle maintenant ces expressions *coefficients de Christoffel* de la *connexion de Levi-Civita* de la variété riemannienne $(M,\, ds^2)$. Cette notation permit à Christoffel de contracter substantiellement l'expression du tenseur de courbure de Riemann. En effet, il obtint l'expression compacte suivante pour les A_{ijkl} que Riemann avait introduits dans (1.10) :

$$A_{ijkl} = \sum_{p=1}^{n} g_{pl}\, A_{ijk}{}^{p}, \tag{1.12}$$

[7]Ce travail, publié à titre posthume, fait partie de la liste des mémoires qui n'ont pas été traduits en français dans [**371**].

où
(1.13)
$$A_{ijk}{}^l := \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} l \\ i\,k \end{array} \right\}}{\partial x^j} - \frac{\partial \left\{ \begin{array}{c} l \\ j\,k \end{array} \right\}}{\partial x^i} + \sum_{p=1}^{n} \left(\left\{ \begin{array}{c} p \\ i\,k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} l \\ j\,p \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} p \\ j\,k \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} l \\ i\,p \end{array} \right\} \right).$$

En vérité, si l'on insérait les coefficients de Christoffel (1.11) dans ces formules (1.13), on obtiendrait une expression nettement plus complexe qui généraliserait pleinement la *formula egregia* (1.5) au cas de $n \geqslant 2$ variables (*voir* (1.28) ci-dessous).

Grâce à une telle expression des composantes de la courbure, Christoffel établit alors qu'une isométrie $x \mapsto \bar{x}(x)$ induit la loi de transformation

$$\sum_{l=1}^{n} A_{ijk}^{l} \frac{\partial \bar{x}^\delta}{\partial x^l} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial \bar{x}^\gamma}{\partial x^k} \overline{A}_{\alpha,\beta,\gamma}^{\delta} \tag{1.14}$$

entre les composantes de la courbure. Plus encore, en introduisant certaines *dérivées modifiées* des composantes de la courbure, Christoffel exprima une famille infinie de conditions nécessaires pour l'existence d'une isométrie entre deux variétés riemanniennes locales. Il démontra aussi que ces conditions sont suffisantes, avec des raisonnements incomplets qui ne s'appliquent en vérité que lorsque le groupe de Lie local des isométries de $(M,\, ds^2)$ est de dimension zéro. Pour des groupes de dimension qelconque, ce problème fut définitivement résolu par Élie Cartan dans les années 1920, grâce à une stratégie qui fait la synthèse entre deux notions : formes différentielles, et groupes de Lie.

Ce rappel historique achevé, afin d'être en mesure d'exprimer rigoureusement le théorème d'unicité du tenseur d'Einstein dû à Élie Cartan, effectuons maintenant une brève présentation des concepts de géométrie différentielle riemannienne qui sont à la base des équations de la gravitation d'Einstein, tels qu'ils sont exposés dans la plupart des manuels contemporains.

1.15. Connexion de Levi-Civita. Nous renvoyons le lecteur à [**69**], [**455**] ainsi qu'à d'autres références pour une présentation plus complète du formalisme.

Classiquement, une variété riemannienne M est canoniquement équipée d'une connexion ∇, dite *de Levi-Civita*. C'est l'unique connexion de torsion nulle sur M qui soit compatible avec la métrique. Rappelons pour commencer les définitions de ces termes.

Tout d'abord, une *connexion affine* (au sens de Koszul) est un opérateur intrinsèque de dérivation d'un champ de vecteur le long d'un autre champ de vecteur. Pour être plus précis, désignons par $\mathscr{X}(M)$ l'ensemble des champs de vecteurs sur M : c'est un module sur l'algèbre $\mathscr{C}^\omega(M)$ des fonctions analytiques réelles sur M, *i.e.* on peut additionner les champs de vecteurs et les multiplier par des fonctions $f \in \mathscr{C}^\omega(M)$, avec des règles d'associativité et de distributivité évidentes. Une *connexion affine* ∇ est une application qui à un couple de champs de vecteurs $(X, Y) \in \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M)$ associe un champ de vecteurs $\nabla_X(Y) \in \mathscr{X}(M)$, le «dérivé de Y le long de X». Cette opération satisfait les propriétés suivantes :

(c1) linéarité par rapport à chacun des deux champs : $\nabla_{X_1+X_2}(Y) = \nabla_{X_1}(Y) + \nabla_{X_2}(Y)$ et $\nabla_X(Y_1 + Y_2) = \nabla_X(Y_1) + \nabla_X(Y_2)$;

(c2) linéarité pour la multiplication (par une fonction $f \in \mathscr{C}^\omega(M)$) du champ *le long duquel* on dérive : $\nabla_{fX}(Y) = f\nabla_X(Y)$;

(c3) *règle de Leibniz* pour la multiplication (par une fonction $f \in \mathscr{C}^\omega(M)$) du champ *que* l'on dérive : $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + X(f)\cdot Y$; ici, $X(f)$ est la fonction obtenue en appliquant le champ X – vu comme dérivation – à f.

La connexion est dite *de torsion nulle* si pour tout couple de champs de vecteurs $(X, Y) \in \mathscr{X}(M) \times \mathscr{X}(M)$, on a

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) = [X, Y], \tag{1.16}$$

où $[X, Y]$ désigne le *crochet de Lie* de X avec Y. Cette terminologie «torsion» s'explique dans la théorie des connexions affines développées par Élie Cartan à partir du concept de repère mobile, mais nous n'entrerons pas dans les détails.

Appliquons maintenant le principe d'après lequel tous les objets de la géométrie différentielle qui possèdent une définition indépendante du choix de coordonnées locales doivent aussi être saisis en coordonnées locales, sous une forme explicite et concrète. Soient donc $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ des coordonnées locales, soient $X_1 := \frac{\partial}{\partial x^1}$, $X_2 := \frac{\partial}{\partial x^2}$, $\ldots X_n := \frac{\partial}{\partial x^n}$ les n champs de vecteurs «naturels» associés, qui forment un repère mobile. Grâce aux règles **(c1)**, **(c2)** et **(c3)** ci-dessus, en décomposant les champs X et Y sous la forme $X = \sum_{i=1}^n a^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$ et $Y = \sum_{i=1}^n b^i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^i}$, on vérifie aisément que la connaissance de l'expression $\nabla_X(Y)$ se ramène à la connaissance des n^2 champs de vecteurs $\nabla_{X_i}(X_j)$, que l'on peut décomposer le long de la base des X_k sous la forme

$$\nabla_{X_i}(X_j) =: \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{1.17}$$

en introduisant des fonctions $\Gamma_{ij}^k(x)$ qui sont appelées *coefficients de Christoffel* de la connexion. Jusqu'au milieu du vingtième siècle, une connexion était habituellement définie dans les ouvrages classiques par la donnée d'une collection de n^3 fonctions $\Gamma_{ij}^k(x)$ qui se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$\overline{\Gamma}_{ij}^{k} = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{k_1=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^{k_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \Gamma_{i_1 j_1}^{k_1} + \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^j}. \tag{1.18}$$

C'est encore cette «ancienne» définition qui est choisie dans certains ouvrages de physique mathématique, comme par exemple dans [**231**], p. 53. Bien entendu, on peut déduire cette formule de transformation de la définition «abstraite» (*i.e.* présentée *sans* en référer à un système de coordonnées locales) de connexion donnée ci-dessus, en utilisant le fait que les champs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ se transforment en $\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^j}$, et en utilisant la règle de Leibniz **(c3)**.

La règle de transformation (1.18) n'est pas de caractère tensoriel, puisque les dérivées secondes du changement de coordonnées interviennent dans le deuxième terme du membre de droite. Néanmoins, cette règle possède un caractère précis et une structure bien définie qui leur confèrent un statut indépendant du système de coordonnées.

Toute connexion affine définit de manière unique un *transport parallèle* le long des courbes tracées dans M, et ce transport parallèle permet de «*connecter*» les espaces tangents entre eux d'une manière intrinsèque, indépendante du choix de coordonnées locales. Mais il faut insister sur le fait que ce lien entre les espaces tangents dépend non seulement de la connexion choisie mais aussi de la courbe le long de laquelle on déplace parallèlement un vecteur tangent. Plus précisément, pour toute courbe analytique réelle $\gamma : [0, 1] \to M$ et tout vecteur Y_0 tangent à M au point $\gamma(0)$, il existe une unique famille à un paramètre $t \in [0, 1]$ de vecteurs $Y(t)$ tangents à M au point $\gamma(t)$ tels que $Y(0) = Y_0$ et tels que la dérivée de $Y(t)$ le long du vecteur tangent $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ s'annule identiquement, *i.e.*

$$\nabla_{\frac{d\gamma(t)}{dt}} (Y(t)) \equiv 0. \tag{1.19}$$

En explicitant ces équations différentielles dans des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$ avec le repère mobile $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n})$, on obtient un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre :

$$0 = \frac{\partial b^k}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \, b^j \, \frac{\partial b^i}{\partial t}, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Ce système porte sur les coefficients $b^i(t)$ des vecteurs $Y(t) = \sum_{i=1}^{n} b^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour $t \in [0, 1]$, avec la condition initiale $b^i(0) = b_0^i$, si l'on a écrit le champ $Y_0 = \sum_{i=1}^{n} b_0^i \, \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\gamma(0)}$ au point $\gamma(0)$. Grâce aux propriétés connues des solutions de tels systèmes d'équations différentielles, on déduit que l'application qui à $Y_0 = Y(0)$ associe le vecteur tangent final $Y(1)$ est un *isomorphisme linéaire* entre $T_{\gamma(0)}M$ et $T_{\gamma(1)}M$: c'est l'application que l'on appelle *transport parallèle* associé à la connexion le long de la γ.

Soit maintenant $(M,\, ds^2)$ une variété riemannienne qui est aussi équipée d'une connexion ∇. Plus généralement, si le produit scalaire $\langle Y_1,\, Y_2\rangle = \sum_{i,\,j=1}^n g_{ij}(p)\, a_1^i\, a_2^j$ entre vecteurs tangents $Y_1 = \sum_{i=1}^n a_1^i\, X_i$ et $Y = \sum_{i=1}^n a_2^i\, X_i$ en un point $p \in M$ est seulement non-dégénéré, mais pas forcément défini positif, on dira que $(M,\, ds^2)$ est une variété *pseudo-riemannienne*. Tel est le cas, par exemple, dans l'espace de Minkowski équipé de la métrique $-(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2$.

La connexion ∇ est dite *compatible avec la métrique* si, pour tout point $p \in M$, pour toute courbe analytique réelle $\gamma := [0,\, 1] \to M$ telle que $\gamma(0) = p$ et pour tout couple de vecteurs Y_0^1 et Y_0^2 tangents à M en p, le produit scalaire entre Y_0^1 et Y_0^2 au point $\gamma(0)$ possède la même valeur numérique que le produit scalaire entre les deux vecteurs Y_1^1 et Y_1^2 transportés parallèlement le long de γ jusqu'au point $\gamma(1)$. Autrement dit, le produit scalaire est invariant par transport parallèle.

En 1917, Levi-Civita a démontré qu'étant donné une variété riemannienne, il existe une unique connexion de torsion nulle qui est compatible avec la métrique. L'énoncé s'étend sans modification aux variétés pseudo-riemanniennes. En analysant ces deux conditions, on vérifie que les coefficients fondamentaux de cette unique connexion possèdent une expression explicite en fonction des dérivées partielles d'ordre 1 de la métrique :

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^n g^{pk}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} g_{pj} + \frac{\partial}{\partial x^j} g_{pi} - \frac{\partial}{\partial x^p} g_{ij}\right). \tag{1.21}$$

Ici, (g^{ij}) désigne la matrice inverse de la matrice (g_{ij}). La nullité de la torsion équivaut alors à la propriété de symétrie indicielle $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$. Ces coefficients Γ_{ij}^k coïncident avec les coefficients que Christoffel notait $\left\{ \begin{matrix} k \\ i\,j \end{matrix} \right\}$. Historiquement, le point de vue de Levi-Civita eut une importance cruciale, puisqu'il apportait (enfin) une mise en forme géométrique des calculs de courbure dus à Riemann et à Christoffel.

Montrons maintenant comment les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire peuvent servir à différentier des objets géométriques plus généraux que les champs de vecteurs : les tenseurs.

1.22. Tenseurs, calcul tensoriel, dérivées covariantes des tenseurs. Résumons d'abord quelques éléments de calcul tensoriel classique. Un tenseur p *fois contravariant et* q *fois contravariant* consiste en la donnée de $n^p\, n^q$ fonctions $\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$ qui dépendent analytiquement de x, dans le système initial de coordonnées $(x^1,\, \ldots,\, x^n)$, et qui se transforment comme suit. Pour tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$, ces quantités se transforment en des quantités $\overline{\Lambda}_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ qui sont reliées aux $\Lambda_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ d'une manière linéaire, avec des coefficients qui ne dépendent que de la matrice jacobienne $\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\right)$:

$$\overline{\Lambda}_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p} = \sum_{i_1', \dots, i_p' = 1}^{n} \; \sum_{j_1', \dots, j_q' = 1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{i_1'}} \cdots \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{i_p'}} \cdot \frac{\partial x^{j_1'}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \cdots \frac{\partial x^{j_q'}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \, \Lambda_{j_1' \cdots j_q'}^{i_1' \cdots i_p'}. \tag{1.23}$$

Dans cette transformation jacobienne généralisée, notons que les indices supérieurs se comportent comme dans la formule $d\bar{x}^i = \sum_{i'=1}^{n} \frac{\bar{\partial} x^i}{\partial x^{i'}} \cdot dx^{i'}$ pour les différentielles, et que les indices inférieurs se comportent comme dans la formule $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_{i'=1}^{n} \frac{\partial x^{i'}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$ pour les champs de vecteurs.

La première opération, appelée *contraction des indices*, consiste à sommer sur des indices sélectionnés à l'avance. Par exemple, voici deux contractions possibles d'un tenseur $\Lambda_{j_1 j_2}^{i_1 i_2 i_3}$: on sélectionne i_1 en haut et j_2 en bas et on définit $\Psi_{j_1}^{i_2 i_3} := \sum_{p=1}^{n} \Lambda_{j_1 p}^{p i_2 i_3}$; autre possibilité, on sélectionne $(i_1, \, i_3)$ en haut et $(j_1, \, j_2)$ en bas et on définit $\Phi^{i_2} := \sum_{p,\, q=1}^{n} \Lambda_{pq}^{p i_2 q}$. En général, soit $\Lambda_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$ un tenseur quelconque et soit r un entier positif tel que $r \leqslant$ et $r \leqslant q$. Dans les indices inférieurs et dans les indices supérieurs du tenseur $\Lambda_{j_1 \cdots j_q}^{i_1 \cdots i_p}$, choisissons r indices et sommons sur ces indices. Le résultat fournit une quantité à $(p - r)$ indices supérieurs et à $(q - r)$ indices inférieurs. En effectuant les mêmes choix d'indices dans (1.23) et en observant que $\sum_{p=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^p} \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^j} = \delta_j^i$, on vérifie que le résultat obtenu est effectivement un tenseur.

La seconde opération est une différentiation «absolue», *i.e.* indépendante du système de coordonnée. En utilisant les coefficients de Christoffel d'une connexion linéaire quelconque ∇, il est possible de définir des dérivées directionnelles d'un tenseur, qu'on appellera *dérivées covariantes*. Ces dérivées doivent fournir un résultat indépendant du système de coordonnées pour qu'il puisse être question d'un «calcul différentiel absolu», au sens de Ricci et de Levi-Civita. Par exemple, si Λ^i est un tenseur une fois contravariant, sa k-ième dérivée covariante sera définie par :

$$\nabla_k \left(\Lambda^i \right) := \frac{\partial}{\partial x^k} \Lambda^i + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{kl}^{i} \, \Lambda^l. \tag{1.24}$$

Par un calcul qui utilise la loi de transformation (1.18) des coefficients de Christoffel de la connexion ∇, on peut vérifier que $\nabla_k \left(\Lambda^i \right)$ est effectivement un tenseur qui comporte un indice inférieur supplémentaire et qui jouit de la loi de tansformation (1.23), avec $p = q = 1$. Second exemple : la k-ième dérivé covariante d'un tenseur Λ_j^i une fois contravariant et une fois covariant sera définie par

$$\nabla_k\left(\Lambda_j^i\right) := \frac{\partial}{\partial x^k}\,\Lambda_j^i - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l\,\Lambda_l^i + \sum_{l=1}^n \Gamma_{kl}^i\,\Lambda_j^l. \tag{1.25}$$

Notons l'apparence du signe «$-$». À nouveau, on peut vérifier en utilisant la loi de transformation (1.18) que la dérivée covariante $\nabla_k\left(\Lambda_j^i\right)$ ainsi définie constitue un tenseur à trois indices, une fois contravariant et deux fois covariant. D'une manière générale, définissons enfin la k-ième dérivée covariante d'un tenseur p fois contravariant et q fois covariant de la manière suivante :

(1.26)

$$\begin{cases} \nabla_k\left(\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right) := \dfrac{\partial}{\partial x^k}\,\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} - \displaystyle\sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{kj_1}^l\,\Lambda_{l\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p} - \cdots - \Gamma_{kj_q}^l\,\Lambda_{j_1\cdots l}^{i_1\cdots i_p}\right) + \\ \qquad\qquad + \displaystyle\sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{kl}^{i_1}\,\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{l\cdots i_p} + \cdots + \Gamma_{kl}^{i_p}\,\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots l}\right). \end{cases}$$

Par un calcul qui utilise la loi de transformation (1.18) des coefficients de Christoffel de la connexion ∇, on peut vérifier que $\nabla_k\left(\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}\right)$ est effectivement un tenseur qui comporte un indice inférieur supplémentaire.

1.27. Théorème de Ricci. En particulier, sur une variété pseudo-riemannienne, nous affirmons que les coefficients g_{ij} de la métrique infinitésimale constituent un tenseur (symétrique) deux fois contravariant. En effet, par un calcul élémentaire (dont nous donnons les détails au début de la Section 5), on vérifie qu'à travers toute changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$, le $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\,dx^i dx^j$ initial se transforme en un $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x})\,d\bar{x}^i d\bar{x}^j$ dont les coefficients $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$ sont donnés par :

$$\bar{g}_{ij} := \sum_{i_1,j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j}\,g_{i_1 j_1}. \tag{1.28}$$

Cette loi correspond bien à la loi de transformation (1.23) pour les composantes d'un tenseur deux fois covariant (avec $p = 0$ et $q = 2$).

Appliquons la formule (1.26) pour la k-ième dérivée covariante de g_{ij}, ce qui donne :

$$\nabla_k\left(g_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x^k}\,g_{ij} - \sum_{l=1}^n \left(\Gamma_{ki}^l\,g_{lj} + \Gamma_{kj}^l\,g_{li}\right). \tag{1.29}$$

En remplaçant les expressions (1.21) des Γ_{ij}^k, on vérifie que $\nabla_k\left(g_{ij}\right) = 0$. En vérité, cette propriété est équivalente à l'hypothèse de compatibilité de la connexion avec la métrique : le tenseur métrique g_{ij} est «constant» sur la variété riemannienne, par rapport aux dérivées covariantes, ce qui revient intuitivement à dire que le produit scalaire est infinitésimalement conservé par transport parallèle. En résumé, nous avons établi le lemme suivant, appelé *théorème de Ricci*.

LEMME 1.30. *Les dérivées covariantes du tenseur métrique et de son inverse s'annulent* :

$$\nabla_k\,(g_{ij}) = \nabla_k\,(g^{ij}) = 0. \tag{1.31}$$

DÉMONSTRATION. Admettons $\nabla_k\,(g_{ij}) = 0$ et appliquons ∇_k à la relation fondamentale $\delta_j^i = \sum_{p=1}^n g^{ip}\,g_{pj}$ entre les deux matrices inverses (g_{ij}) et (g^{ij}), que l'on peut réécrire matriciellement nous obtenons $\nabla_k\,(g^{ij}) = -\sum_{p,\,q=1}^n g^{qi}\,\nabla_k\,(g_{qp})\,g^{pj}$. □

Le tenseur métrique deux fois covariant g_{ij} et son inverse g^{ij} qui est deux fois contravariant peuvent servir à élever et à baisser les indices d'un tenseur donné $\Lambda_{j_1\cdots j_q}^{i_1\cdots i_p}$. Prenons par exemple un tenseur Λ_j une fois covariant. On vérifie aisément que le tenseur $\Lambda^i := \sum_p g^{pi}\,\Lambda_p$ est une fois contravariant, et l'on a les formules inverses $\Lambda_j = \sum_p g_{pj}\,\Lambda^p$. Prenons maintenant un tenseur une fois covariant et une fois contravariant Λ_j^i. On vérifie que $\sum_p g_{pi}\,\Lambda_j^p$ définit un tenseur deux fois covariants en termes des indices i et j. Mais comment écrire ce tenseur : Λ_{ij} ou Λ_{ji} ? Faut-il mettre i ou j à la première place ? Par construction, c'est l'indice supérieur i que nous avons abaissé dans Λ_j^i. Convenons provisoirement d'écrire Λ_{ij}. Pour retrouver le tenseur initial Λ_j^i par une formule inverse, il faut écrire $\sum_p g^{pi}\,\Lambda_{pj}$ et non pas $\sum_p g^{pj}\,\Lambda_{pi}$, parce que c'était le premier indice de Λ_{ij} qui avait été abaissé et non pas le second. En définitive, puisque la notation Λ_j^i devient ambiguë lorsque l'on élève et abaisse les indices, *il est nécessaire de préciser l'ordre d'apparition des indices colonne par colonne*. Ainsi, nous écrirons ${\Lambda^i}_j$ (ou bien ${\Lambda_j}^i$: il faut faire un choix définitif au départ, mais tous les choix sont équivalents) en affectant chaque indice à une colonne, afin de conserver le numéro de colonne des indices que l'on élève ou que l'on abaisse. Dans la notation Λ_{ij}, deux colonnes étant déjà clairement délimitées, on pourra déduire que $\Lambda_{ij} = \sum_p g_{pi}\,{\Lambda^p}_j$ s'obtient à partir de ${\Lambda^i}_j$ par abaissement du premier indice i. Par la même occasion, le tenseur ${\Lambda_j}^i := \sum_p g^{pi}\,\Lambda_{jp}$, obtenu par élévation du second indice de Λ_{ji} sera clairement distingué de ${\Lambda^i}_j = \sum_p g^{pi}\,\Lambda_{pj}$. Cette distinction, invisible dans la notation Λ_i^j, est absolument nécessaire, puisque les deux tenseurs ${\Lambda_j}^i$ et ${\Lambda^i}_j$ (évidemement égaux dans le cas spécial où le tenseur $\Lambda_{jp} = \Lambda_{pj}$ est symétrique) peuvent être réellement différents, comme on s'en convaincrait sur un exemple.

Pour terminer, mentionnons que la version mixte du tenseur de courbure $g_j^i := \sum_p g_{pj}\, g^{pi} = \delta_j^i$ coïncide avec le symbole de Kronecker et que dans ce cas, il est inutile de préciser les colonnes dans la notation des indices.

1.32. Composantes du tenseur de courbure et ses symétries. Grâce à la notion de connexion présentée ci-dessus, on peut introduire maintenant le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel. La *courbure* d'une variété riemannienne M est une correspondance qui associe à toute paire de champs de vecteurs $(X,\, Y)$ sur M une application $A(X,\, Y)$ définie sur l'ensemble des champs de vecteurs et à valeurs dans l'ensemble des champs de vecteurs. Elle est définie par

$$A(X,\, Y)Z := \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,\, Y]} Z, \tag{1.33}$$

où Z est un champ de vecteurs sur M et où ∇ est la connexion de Levi-Civita sur M. Grâce aux propriétés **(c1)**, **(c2)** et **(c3)** caractéristiques d'une connexion et grâce à la nullité de la torsion (1.16), on vérifie que l'application $(X,\, Y,\, Z) \mapsto A(X,\, Y)Z$ est trilinéaire. De plus, la trilinéarité est aussi satisfaite en multipliant les champs de vecteurs par des fonctions analytiques arbitraires $f_1,\, f_2 \in \mathscr{C}^\omega(M)$:

$$\left\{\begin{aligned} A\left(f_1 X_1 + f_2 X_2,\, Y\right) Z &= f_1 A\left(X_1,\, Y\right) Z + f_2 A\left(X_2,\, Y\right) Z, \\ A\left(X,\, f_1 Y_1 + f_2 Y_2\right) Z &= f_1 A\left(X,\, Y_1\right) Z + f_2 A\left(X,\, Y_2\right) Z, \\ A(X,\, Y)\left[f_1 Z_1 + f_2 Z_2\right] &= f_1 A(X,\, Y) Z_1 + f_2 A(X,\, Y_2) Z_2. \end{aligned}\right. \tag{1.34}$$

Grâce à ces propriétés de linéarité, la courbure est uniquement déterminée par la collection de champs de vecteurs $A(X_i,\, X_j)X_k$, où $X_i := \frac{\partial}{\partial x^i}$. En décomposant $A(X_i,\, X_j)X_k$ selon la base des X_i, on introduit des coefficients ${A_{ijk}}^l$ tels que

$$A(X_i,\, X_j)X_k =: \sum_{l=1}^{n} {A_{ijk}}^l\, X_l. \tag{1.35}$$

Comme nous l'avons argumenté après le Lemme 1.30, il est nécessair d'affecter une fois pour toutes une colonne à chacun des quatre indices $(i,\, j,\, k,\, l)$. Tous les choix sont équivalents, pourvu que l'on respecte rigoureusement le choix effectué au départ. Ici, nous choisissons d'écrire ${A_{ijk}}^l$, car les trois champs de vecteurs X_i, X_j et X_k apparaissent à la suite dans la définition (1.35). Dans [**102**], l'auteur utilise la notation ${{A_k}^l}_{ij}$.

En utilisant l'expression (1.17) de la dérivée covariante en l'insérant dans la définition (1.33) (bien entendu, le terme $\nabla_{[X_i,\, X_j]} X_k$ s'annule, puisque l'on a trivialement : $[\frac{\partial}{\partial x^i},\, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$), on obtient :

$$ {A_{ijk}}^l = \frac{\partial}{\partial x^j} \Gamma_{ik}^l - \frac{\partial}{\partial x^i} \Gamma_{jk}^l + \sum_{p=1}^{n} \left(\Gamma_{ik}^p\, \Gamma_{jp}^l - \Gamma_{jk}^p\, \Gamma_{ip}^l\right). \tag{1.36}$$

C'est l'expression des n^4 composantes du tenseur de courbure. On dit en effet que la collection de ces composantes $A_{ijk}{}^l$ est un *tenseur* parce qu'elle se transforme de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$\overline{A}_{ijk}{}^l = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \sum_{k_1=1}^n \sum_{l_1=1}^n \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial \bar{x}^k} A_{i_1 j_1 k_1}{}^{l_1}. \tag{1.37}$$

Seul le comportement infinitésimal tangentiel d'ordre 1 *d'un changement de coordonnées influe sur les composantes d'un tenseur.*

Après un calcul dont nous ne reproduisons pas les étapes intermédiaires ici, nous obtenons une expression massive qu'il faut prendre comme telle, puisque nous analysons ses caractères immédiatement après :

$$\left\{\begin{aligned} A_{ijk}{}^l = \frac{1}{2} \sum_{m,\,p,\,q=1}^n & g^{qm}\, g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^j} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^m} \right] \right) - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{m,\,p,\,q=1}^n g^{qm}\, g^{pl} \left(\frac{\partial g_{qp}}{\partial x^i} \left[\frac{\partial g_{km}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right] \right) + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^n g^{ml} \left(\frac{\partial^2 g_{im}}{\partial x^j \partial x^k} - \frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j \partial x^m} - \frac{\partial^2 g_{jm}}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i \partial x^m} \right) + \\ & + \frac{1}{4} \sum_{m,\,p,\,q=1}^n g^{pm}\, g^{ql} \left(\left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{pi}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{qj}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] - \right. \\ & \left. - \left[\frac{\partial g_{pk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{pj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^p} \right] \left[\frac{\partial g_{qm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{qi}}{\partial x^m} - \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^q} \right] \right). \end{aligned}\right. \tag{1.38}$$

Voici l'analyse de cette formule.

(1) Dans le cas $n = 2$, il n'y a essentiellement qu'une seule composante de courbure $A_{121}{}^2$, car les $A_{ijk}{}^l$ possèdent de fortes propriétés de symétrie, et alors la formule (1.38) pour $A_{121}{}^1$ coïncide avec la *formula egregia* (1.5) de Gauss.

(2) Les $A_{ijk}{}^l$ sont donnés par une *expression explicite universelle, fonction algébrique des dérivées partielles d'ordre* 2, 1 *et* 0 *des coefficients métriques* $g_{ij}(x)$ *par rapport aux variables* x^k. En effet, grâce aux formules de Cramer, les éléments de la matrice inverse (g^{ij}) s'expriment en fonction des g_{kl}. Cette expression est universelle en ce sens qu'elle ne dépend ni de la métrique, ni du système de coordonnées : pour une autre métrique riemannienne quelconque $d\bar{s}^2 = \sum_{i,\,j=1}^n \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j$, les coefficients de courbure $\overline{A}_{ijk}{}^l$ s'expriment par la même formule rationnelle, en fonction des dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0 des $\bar{g}_{ij}(\bar{x})$

par rapport aux $\bar{x}^k$. Nous pouvons donc abréger l'écriture de cette formule sous la forme :

$$\begin{cases} A_{ijk}{}^l(x) & = \mathscr{A}_{ijk}{}^l \left(g_{\alpha\beta}(x),\ \dfrac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x),\ \dfrac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) \\ & = \mathscr{A}_{ijk}{}^l \left(J_x^2\, g_{\alpha\beta}(x) \right), \end{cases} \tag{1.39}$$

en désignant par $J_x^2\, g_{\alpha\beta}$ le *jet d'ordre* 2 *de* $g_{\alpha\beta}$, c'est-à-dire la collection de ses dérivées partielles d'ordre 2, 1 et 0. Dans cette écriture, nous sous-entendons que les indices α, β, γ et δ varient entre 1 et n. La fonction en question sera notée $\mathscr{A}_{ijk}^l$. Ainsi, $\overline{A}_{ijk}{}^l(\bar{x}) = \mathscr{A}_{ijk}{}^l\left(J_{\bar{x}}^2\, \bar{g}_{\alpha\beta}(\bar{x})\right)$.

(3) Les coefficients de courbure $A_{ijk}{}^l$ s'expriment linéairement en fonction des dérivées partielles d'ordre deux des $g_{\alpha\beta}$. Autrement dit, la fonction $\mathscr{A}_{ijk}{}^l$ de (1.39) est linéaire par rapport à ses derniers arguments. Cette propriété est évidente dans (1.38).

Les composantes $A_{ijk}{}^l$ satisfont les relations de symétrie suivantes :

$$\begin{cases} 0 & = A_{ijk}{}^l + A_{kij}{}^l + A_{jki}{}^l, \\ 0 & = A_{ijk}{}^l + A_{jik}{}^l. \end{cases} \tag{1.40}$$

Introduisons maintenant les composantes «totalement covariantes» du tenseur de courbure, qui sont définies par :

$$A_{ijkl} := \sum_p g_{pl}\, A_{ijk}{}^p. \tag{1.41}$$

On dit que ces composantes sont *totalement covariantes* parce qu'elles se transforment de la manière suivante à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$:

$$\overline{A}_{ijkl} = \sum_{i_1=1} \sum_{j_1=1} \sum_{k_1=1} \sum_{l_1=1} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial x^j} \frac{\partial x^{k_1}}{\partial x^k} \frac{\partial x^{l_1}}{\partial x^l} A_{i_1 j_1 k_1 l_1}. \tag{1.42}$$

On démontre ([**69**], Chapter 4) que ces nouveaux coefficients A_{ijkl} satisfont les quatre relations de symétrie indicielle suivantes :

$$\begin{cases} 0 & = A_{ijkl} + A_{jkil} + A_{kijl}, \\ 0 & = A_{ijkl} + A_{jikl}, \\ 0 & = A_{ijkl} + A_{ijlk}, \\ 0 & = A_{ijkl} - A_{klij}, \end{cases} \tag{1.43}$$

la quatrième étant conséquence subtile des trois premières. À cause de ces relations de symétries, il n'existe en réalité que $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ composantes A_{ijkl}

linéairement indépendantes (*voir* ci-dessous pour une démonstration complète). Enfin, les $A_{ijk}{}^{l}$ initiaux qui satisfont les deux relations de symétrie (1.40) *ne satisfont pas de relations de symétrie qui seraient analogues aux deux dernières de la liste* (1.43).

1.44. Identités de Bianchi. Rappelons que $X_m = \frac{\partial}{\partial x^m}$ et notons $\nabla_m := \nabla_{X_m}$ l'opérateur de dérivée covariante le long du champ de vecteurs X_m. D'après le calcul différentiel absolu de Ricci et Levi-Civita (§1.22 ci-dessus), cet opérateur se prolonge comme un *opérateur de différentation covariante* agissant sur le tenseur de courbure $A_{ijk}{}^{l}$ de la manière suivante :
(1.45)

$$\nabla_m A_{ijk}{}^{l} := \frac{\partial A_{ijk}{}^{l}}{\partial x^m} + \sum_{p=1}^{n} \left(\Gamma_{pm}^{l} A_{ijk}{}^{p} - \Gamma_{im}^{p} A_{pjk}{}^{l} - \Gamma_{jm}^{p} A_{ipk}{}^{l} - \Gamma_{km}^{p} A_{ijp}{}^{l} \right)$$

Classiquement, au moyen d'un calcul algébrique qui est parfois présenté de manière «aveugle», on démontre que ce tenseur satisfait les identités suivantes, dites «*de Bianchi*» :

$$0 = \nabla_m A_{ijk}{}^{l} + \nabla_j A_{mik}{}^{l} + \nabla_i A_{jmk}{}^{l}. \tag{1.46}$$

Observons la permutation circulaire sur les trois indices (m, i, j).

Grâce à la méthode du repère mobile d'Élie Cartan, il est possible de comprendre pourquoi une telle permutation circulaire apparaît et d'interpréter cette identité de manière géométrique (*voir* [**85**]). Afin d'offrir au passage une idée intuitive de cette raison, mentionnons que l'identité de Bianchi provient d'une application particulière du Lemme de Poincaré d'après lequel $dd\omega = 0$ pour toute forme différentielle. En effet, considérons une 2-forme différentielle exacte $d\omega := \sum_{i<j} \Lambda_{ij} \cdot dx^i \wedge dx^j$, différentielle d'une 1-forme ω, et prolongeons la définition de ses coefficients en posant $\Lambda_{ij} = -\Lambda_{ji}$ pour $i \geqslant j$. Après une réorganisation qui fait apparaître la base de 3-formes $(dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k)_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n}$, la différentielle extérieure de cette 2-forme $d\omega$ s'écrit sous la forme suivante :

$$0 = dd\omega = \sum_{i<j<k} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \cdot \left(\frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i} \right). \tag{1.47}$$

Ainsi, l'annulation de cette 3-forme conduit aux identités

$$0 = \frac{\partial \Lambda_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial \Lambda_{ki}}{\partial x^j} + \frac{\partial \Lambda_{jk}}{\partial x^i}, \tag{1.48}$$

pour $1 \leqslant i < j < k \leqslant n$. On vérifie alors qu'elles sont satisfaites pour tous $i, j, k = 1, \ldots, n$. Formellement, elles sont très similaires aux identités de Bianchi (1.46).

1.49. Tenseur de Ricci et sa divergence covariante. Les relations de symétrie (1.) impliquent que toutes les contractions que l'on peut effectuer sur les indices de ${A_{ijk}}^l$ se ramènent ou bien au tenseur nul (inintéressant) ou bien au *tenseur de Ricci*, ou à son opposé. Ce tenseur à deux indices est défini par :

$$A_{ij} := \sum_{k=1}^{n} {A_{ikj}}^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} g^{kl}\, A_{ikjl}. \tag{1.50}$$

En partant de la deuxième représentation de A_{ij}, issue de (1.41) et en appliquant la quatrième relation de symétrie (1.43), on vérifie que ce tenseur contracté est symétrique : $A_{ij} = A_{ji}$. De plus, en contractant la transformation (1.42), on vérifie que l'on a :

$$\overline{A}_{ij} = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j}\, A_{i_1 j_1}. \tag{1.51}$$

Autrement dit, le tenseur de Ricci est complètement covariant.

En appliquant le principe d'élévation des indices que nous avons déjà utilisé en (1.41), définissons maintenant le *tenseur de Ricci mixte*, qui est une fois covariant et une fois contravariant :

$$A_i^j := \sum_{p=1}^{n} g^{pj}\, A_{ip}. \tag{1.52}$$

Définissons aussi la *courbure scalaire* par :

$$A := \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, A_{ij}. \tag{1.53}$$

Observons que la courbure scalaire possède une expression équivalente, utile dans la suite :

$$\left\{ \begin{aligned} A &= \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}\, A_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n}\sum_{p=1}^{n} g^{ij}\, {A_{ipj}}^p = \sum_{i,p=1}^{n} {A_{ip}}^{ip} \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} {A_{ij}}^{ij}. \end{aligned} \right. \tag{1.54}$$

Le lemme suivant constituera le point de départ fondamental pour l'écriture des équations de la gravitation d'Einstein.

LEMME 1.55. *La divergence covariante du tenseur de Ricci s'exprime en fonction de la dérivée covariante de la courbure scalaire de la manière suivante* :

$$\sum_{j=1}^{n} \nabla_j (A_i^j) = \frac{1}{2}\, \nabla_i (A). \tag{1.56}$$

Autrement dit, le *tenseur mixte d'Einstein* défini par

$$E_i^{\,j} := A_i^{\,j} - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\,A \tag{1.57}$$

a une «divergence absolue» nulle.

DÉMONSTRATION. Définissons les composantes deux fois covariantes et deux fois contravariantes du tenseur de courbure :

$$\left\{\begin{aligned} A_{ij}^{\ \ kl} &:= \sum_{p=1}^{n} g^{pk}\,A_{ijp}^{\ \ \ \ l} \\ &= \sum_{p,\,q=1}^{n} g^{pk}\,g^{ql}\,A_{ijpq} \end{aligned}\right. \tag{1.58}$$

En insérant les deux relations d'antisymétrie $A_{ijkl} = -A_{jikl} = -A_{ijlk}$ dans cette définition, on vérifie immédiatement que l'on a aussi les deux relations d'antisymétrie suivantes :

$$A_{ij}^{\ \ kl} = -A_{ji}^{\ \ kl} = -A_{ij}^{\ \ lk}. \tag{1.59}$$

Pour établir (1.), partons de l'identité de Bianchi (1.) dans laquelle on remplace k par p, multiplions par g^{pk} et sommons sur l'indice p, ce qui donne :

(1.60)
$$0 = \sum_{p=1}^{n} \left(g^{pk}\cdot\nabla_m\left(A_{ijp}^{\ \ \ \ l}\right) + g^{pk}\cdot\nabla_j\left(A_{mip}^{\ \ \ \ \ l}\right) + g^{pk}\cdot\nabla_i\left(A_{jmp}^{\ \ \ \ \ l}\right)\right).$$

Grâce au théorème de Ricci d'après lequel $\nabla_k(g_{ij}) = \nabla_k(g^{ij}) = 0$, nous pouvons insérer les g^{pk} à l'intérieur des dérivées covariantes, ce qui donne, en tenant compte de la définition des $A_{ij}^{\ \ kl}$:

$$0 = \nabla_m\left(A_{ij}^{\ \ kl}\right) + \nabla_j\left(A_{mi}^{\ \ \ kl}\right) + \nabla_i\left(A_{jm}^{\ \ \ kl}\right). \tag{1.61}$$

Maintenant, contractons cette identité : posons $k := i$, $l := j$ et sommons sur i et sur j :

(1.62)
$$0 = \nabla_m\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} A_{ij}^{\ \ ij}\right) + \sum_{j=1}^{n}\nabla_j\left(\sum_{i=1}^{n} A_{mi}^{\ \ \ ij}\right) + \sum_{i=1}^{n}\nabla_i\left(\sum_{j=1}^{n} A_{jm}^{\ \ \ ij}\right).$$

D'après (1.), dans la première parenthèse, nous reconnaissons la courbure scalaire. En permutant les indices i et j dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons le tenseur de Ricci mixte $-A_m^{\ \ j}$ défini en (1.). Enfin, en permutant les indices j et m dans la seconde parenthèse, nous reconnaissons

$-{A_m}^i$. Au total, nous pouvons réécrire cette identité sous la forme :

$$0 = \nabla_m(A) - \sum_j \nabla_j \left({A_m}^j\right) - \sum_i \nabla_i \left({A_m}^i\right). \tag{1.63}$$

Cette identité est clairement eéquivalente à (1.56), ce qui complète la démonstration. □

1.64. Covariance de la forme quadratique de Ricci. Nous affirmons que la forme différentielle quadratique

$$\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\, dx^i dx^j = \sum_{i,j=1}^n \overline{A}_{ij}\, d\bar{x}^i d\bar{x}^j \tag{1.65}$$

est conservée par tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En effet, grâce à la tensorialité de A_{ij} exprimée par la loi de transformation (1.52), nous pouvons calculer :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k,l=1}^n \overline{A}_{kl}\, d\bar{x}^k d\bar{x}^l &= \sum_{k,l,p,q,i,j=1}^n \frac{\partial x^p}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^q}{\partial \bar{x}^l} A_{pq} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}\, dx^i\, dx^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij}\, dx^i dx^j. \end{aligned} \right. \tag{1.66}$$

1.67. Analyse fine de la covariance du tenseur de Ricci. Par ailleurs, en contractant l'expression (1.39), nous observons que les composantes A_{ij} du tenseur de Ricci s'expriment comme des fonctions $\mathscr{A}_{ij}$ du jet d'ordre 2 des coefficients métriques $g_{\alpha\beta}$ et que ces fonctions $\mathscr{A}_{ij}$ dépendent linéairement des dérivées partielles d'ordre 2 des $g_{\alpha\beta}$. D'après les remarques qui suivent l'expression (1.38), il se trouve que les $\overline{A}_{ij}$ s'expriment par *les mêmes fonctions* $\mathscr{A}_{ij}$ du jet d'ordre deux $J^2_{\bar{x}}\bar{g}_{\alpha\beta}$ des coefficients métriques transformés. Ainsi, la loi de transformation tensorielle (1. 51) doit-elle précisément s'écrire :

$$\mathscr{A}_{ij}\left(J^2_{\bar{x}}\bar{g}_{\alpha\beta}\right) = \sum_{i_1=1}^n \sum_{j_1=1}^n \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j} \mathscr{A}_{i_1 j_1}\left(J^2_x g_{\alpha_1\beta_1}\right), \tag{1.68}$$

avec les mêmes fonctions $\mathscr{A}_{ij}$ *de part et d'autre de l'égalité*. Dans cette relation, nous sous-entendons que le jet $J^2_{\bar{x}}\bar{g}_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction du jet $J^2_x g_{\alpha_1\beta_1}$. En effet, grâce à (1.28), nous savons déjà comment $\bar{g}_{\alpha\beta}$ s'exprime en fonction de $g_{\alpha_1\beta_1}$ à travers le changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. En appliquant la dérivation $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\gamma} = \sum_{\gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial}{\partial x^{\gamma_1}}$ à ces relations $\bar{g}_{\alpha\beta} =$

$\sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1\beta_1}$, nous obtenons la loi de transformation pour les dérivées premières :

(1.69)
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma} &= \sum_{\alpha_1, \beta_1=1}^n \left(\frac{\partial^2 x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha \partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} g_{\alpha_1\beta_1} + \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial^2 x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta \partial \bar{x}^\gamma} g_{\alpha_1\beta_1} \right) + \\ &\quad + \sum_{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1=1}^n \frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^\beta} \frac{\partial x^{\gamma_1}}{\partial \bar{x}^\gamma} \frac{\partial g_{\alpha_1\beta_1}}{\partial x^{\gamma_1}}. \end{aligned} \right.$$

En appliquant à nouveau la dérivation $\frac{\partial}{\partial \bar{x}^\delta}$, on obtiendrait une formule de transformation pour les dérivées secondes $\frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}$. Soit $G = (g_{ij})$ la matrice (symétrique) des coefficients métriques, où i désigne l'indice des lignes et j celui des colonnes. De même, soit $\overline{G}$ la matrice des $\bar{g}_{ij}$. Nous résumons les relations obtenues entre le jet d'ordre 2 de $\overline{G}$ et le jet d'ordre 2 de G sous la forme suivante :

$$J_{\bar{x}}^2 \overline{G} = \Pi \left(J_{\bar{x}}^3 x, J_x^2 G \right). \tag{1.70}$$

Par construction, Π est un polynôme universel (dont on pourrait aisément écrire l'expression explicite) à valeurs vectorielles qui dépend du jet d'ordre trois du changement de coordonnées (noter l'apparition des dérivées d'ordre 2 de x par rapport à $\bar{x}$ dans (1.69)). C'est avec ces formules que l'on doit remplacer $J_{\bar{x}}^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$ en fonction de $J_x^2 g_{\alpha_1\beta_1}$ dans les relations (1.68) pour leur donner sens.

1.71. Formes différentielles quadratiques covariantes. En suivant Élie Cartan, nous dirons qu'une forme quadratique différentielle

(1.72)
$$\sum_{i, j=1}^n C_{ij}^0 \, dx^i dx^j = \sum_{i, j=1}^n \mathscr{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j$$

dont les coefficients sont des fonctions $\mathscr{C}_{ij}^0$ du jet d'ordre 2 des coefficients métriques est *covariante de la forme quadratique fondamentale* $\sum_{i, j=1}^n g_{ij} \, dx^i dx^j$ si l'on a :

$$\left\{ \begin{aligned} &\sum_{i, j=1}^n \mathscr{C}_{ij}^0 \left(\bar{g}_{\alpha\beta}(x), \, \frac{\partial \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma}(\bar{x}), \, \frac{\partial^2 \bar{g}_{\alpha\beta}}{\partial \bar{x}^\gamma \partial \bar{x}^\delta}(\bar{x}) \right) d\bar{x}^i d\bar{x}^j = \\ &\qquad = \sum_{i, j=1}^n \mathscr{C}_{ij}^0 \left(g_{\alpha\beta}(x), \, \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x), \, \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x) \right) dx^i dx^j, \end{aligned} \right. \tag{1.73}$$

avec les mêmes fonctions $\mathscr{C}_{ij}^0$ de part et d'autre de l'égalité, pour tout changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. De manière équivalente, les C_{ij}^0 se comportent comme le tenseur de Ricci A_{ij} et jouissent d'une loi de transformation précise, exactement analogue à (1.68) :

$$\mathscr{C}^0_{ij}\left(J^2_{\bar{x}}\bar{g}_{\alpha\beta}\right)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j}\mathscr{C}^0_{i_1j_1}\left(J^2_x g_{\alpha_1\beta_1}\right). \tag{1.74}$$

Pour être encore plus précis, en tenant compte de (1.70), les fonctions universelles $\mathscr{C}^0_{ij}$ satisfont :

$$\mathscr{C}^0_{ij}\left(\Pi\left(J^3_{\bar{x}}x,\ J^2_x G\right)\right)=\sum_{i_1=1}^{n}\sum_{j_1=1}^{n}\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^j}\mathscr{C}^0_{i_1j_1}\left(J^2_x G\right), \tag{1.75}$$

après remplacement de $\bar{x}$ en fonction de x pour donner sens à cette égalité.

Avant de formuler le théorème d'unicité d'Élie Cartan, évoquons rapidement les origines physiques des équations d'Einstein.

1.76. Géométrie et physique. En opposition à une physique des phénomènes discrets, la relativité générale se fonde sur un certain nombre de postulats qui sont caractéristiques d'une «physique du continu» : les objets célestes et terrestres peuvent être décrits au moyen de concepts géométriques ; continuité et différentiablité sont acceptées comme hypothèses fondamentales ; mesure de l'espace et mesure du temps peuvent s'effectuer avec des moyens expérimentaux ; enfin, les appareils de mesure confèrent un sens tangible à l'idée de *système de coordonnées mathématiques sur l'espace-temps*. Se pose alors une question cruciale :

Quels objets géométriques doit-on placer au fondement d'une physique du continu ? Existe-t-il des objets géométriques qui s'imposent a priori *pour penser l'univers physique continu ?*

Sans approfondir le problème métaphysique des rapports entre la pensée mathématique pure et la pensée physique, contentons-nous d'évoquer la contribution de Riemann à cette question qui agite encore la science contemporaine.

Dans son *habilitationsvortrag*, Riemann s'interrogeait *a priori* sur la notion d'espace. Il s'agissait là d'un bouleversement philosophique majeur dans l'histoire des mathématiques. L'espace cessait d'être une notion transmise par l'expérience, intuitive et caractérisée de manière unique. En effet, l'espace changeait radicalement de statut pour devenir question *a priori* sur l'espace : en tant que donnée intuitive, l'espace disparaissait ; il réapparaissait en tant que question pour la science. Et les conceptions qui pouvaient naître de cette question *a priori* se démultipliaient *a priori*. En effet, le destin négatif de l'axiome des parallèles d'Euclide, l'émergence des géométries non-euclidiennes, à travers les travaux de Bolyai et de Lobatchevsky (anticipés par Gauss), la constitution de la géométrie projective dans l'école française et l'émergence des travaux de Gauss sur les transformations conformes appliquées à la cartographie, toutes ces innovations géométriques poussèrent Riemann à s'interroger totalement *a priori* sur les hypothèses qui peuvent servir de fondement à la conceptualisation de la notion d'espace, dans les mathématiques et dans la physique. Il s'agissait en particulier de s'interroger sur les données primitives de la géométrie, sur leur degré de généralité, sur leur progressivité, sur leur dépendance relative, sur leur nécessité relative[8], *etc.*

> Les rapports mutuels des données primitives [de la Géométrie] restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être ([**367**], p. 280).

Ainsi Riemann anticipait-il l'*explosion et la ramification nécessaires des hypothèses géométriques possibles*. Effectivement, la seconde moitié du dix-neuvième siècle et le début du vingtième devaient voir naître la géométrie projective, la géométrie conforme, la géométrie lorentzienne, les espaces non holonomes, les espaces généralisés au sens d'Élie Cartan, *etc.*

Conséquence inévitable de cette diversité : la théorie physique se voyait obligée *a priori* d'effectuer un choix *a posteriori* parmi toutes les géométries possibles. Les mathématiques, avec leur *hubris* hypothético-déductive, et leur profusion incontrôlée de résultats abstraits, encombraient, embarrassaient, déconcertaient déjà la physique, qui se voyait contrainte de reconnaître sous cet afflux quelle géométrie correspondait à la réalité, dans un faisceau de théories géométriques architecturées.

---

[8]Nous pourrions soutenir la thèse suivante : la méthode axiomatique et hypothético-déductive, en mathématiques s'enracine profondément dans la pensée riemannienne. En effet, Riemann est l'un des rares mathématiciens de l'histoire qui ait accepté les interrogations mathématiques dans leur pureté intrinsèque, quelle que soit leur difficulté invisible, et plus encore, qui les ait *formulées explicitement dans ses travaux*, quelle que soit leur ouverture. La méthode axiomatique construit un cadre arborescent pour insérer ces interrogations mathématiques absolues dans une architecture qui les prolonge, qui les réalise et qui les démultiplie. Sur la question de l'espace, Riemann aura anticipé les architectures modernes et stratifiées de la topologie et de la géométrie différentielle, et c'est pourquoi nous disons qu'il y a quelque chose de la pensée riemannienne qui se réalise dans la méthode axiomatique. Il est vrai que cette méthode, qui fut largement promue par Hilbert, aime à cacher son questionnement intrinsèque. Mais elle n'est qu'un cadre d'expression rigoureusement élaboré pour faire face à la complexité du réel spéculatif : elle ne contrôle que partiellement les tensions «riemanniennes» qui la déploient.

> [...] les propriétés, par lesquelles l'espace [physique] se distingue de toute autre grandeur imaginable de trois dimensions, ne peuvent être empruntés qu'à l'expérience. De là surgit le problème de rechercher les faits les plus simples au moyen desquels puissent s'établir les rapports métriques de l'espace, problème qui, par la nature même de l'objet n'est pas complètement déterminé ; car on peut indiquer plusieurs systèmes de faits simples, suffisants pour la détermination des rapports métriques de l'espace. [...] Ces faits, comme tous les faits possibles, ne sont pas nécessaires ; ils n'ont qu'une certitude empirique, ce sont des hypothèses ([**367**], p. 281). [...] Il faut donc, ou que la réalité sur laquelle est fondé l'espace forme une variété discrète, ou que le fondement des rapports métriques soit cherché en dehors de lui, dans les forces de liaison qui agissent en lui ([**367**]).

Ces prédictions allaient être confirmées par Einstein.

1.77. Équations de la gravitation d'Einstein. La relativité restreinte est fondée sur une classe restreinte de transformations de coordonnées, celles qui stabilisent la forme de Minkowski $-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^4$ sur l'espace-temps (après normalisation à 1 de la vitesse c de la lumière). Précisément, ce sont les transformations linéaires $\bar{x}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i \, x^j$ dites «*de Lorentz*» qui satisfont :

(1.78)
$$-(d\bar{x}^1)^2-(d\bar{x}^2)^2-(d\bar{x}^3)^2+(d\bar{x}^4)^4 = -(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2+(dx^4)^4.$$

Il n'y a aucune raison de se restreindre à une telle classe de transformations. Mais à travers un changement de coordonnées $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ quelconque, cette géométrie lorentzienne ne subit qu'une déformation apparente : les trajectoires des particules ne sont certes plus rectilignes, mais elles sont curvilignes, et pour être plus exact, ce ne sont que des «images» curvilignes de droite, vues à travers le prisme déformant de la transformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$. Notamment, la courbure de l'espace-temps reste constante, puisque celle de l'espace-temps de Minkowski l'était. Au total, la déformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ fournit une image différente du même objet.

En relativité restreinte, Einstein postulait que les lois physiques sont *invariantes* par rapport à toute transformation de Lorentz : leur forme est exactement la même dans tout référentiel lorentzien. Motivé par les expériences négatives de Michelson et Morley sur la détection du vent d'éther, Einstein postulait aussi la constance de la vitesse de la lumière dans tout référentiel. Pour insister sur le caractère *a priori* et «métaphysique» des raisonnements d'Einstein, on pourrait aussi considérer que la vitesse de la lumière est une loi physique, dont la forme est indépendante du référentiel lorentzien, et par conséquent, la vitesse de la lumière est constante : le second postulat serait une conséquence du premier.

En recherchant une généralisation de la relativité restreinte aux systèmes de coordonnées non lorentziens, Einstein fut conduit à *abandonner le principe d'invariance*, trop restrictif, et à le remplacer par un *principe de covariance*. Ce principe, qu'Einstein emprunta aux travaux mathématiques de Ricci et de Levi-Civita, exprime toujours une exigence purement *a priori*, sans origine physique :

PRINCIPE DE COVARIANCE 1.79. *Les lois d'une physique géométrisée doivent pouvoir se transformer selon des règles précises lorsque l'on passe d'un système de coordonnées sur l'espace-temps à un autre.*

Seconde exigence *a priori*, qui doit évidemment être satisfaite :

PRINCIPE D'ÉQUIVALENCE 1.80. *Deux systèmes physiques qui se déduisent l'un de l'autre par un changement de coordonnées sur l'espace-temps doivent être considérés comme rigoureusement équivalents.*

Comme son contemporain Nordström, Einstein recherchait une expression relativiste des lois de la gravitation newtonienne, gouvernée par l'équation de Poisson :

$$\Delta\Phi = 4\pi\, G\, \rho, \tag{1.81}$$

où Φ est le potentiel scalaire du champ de gravité, $G = 6,67\ S.I.$ est la constante de gravitation universelle et ρ es la densité de matière. Après plusieurs tentatives infructueuses, on a suggéré de remplacer le scalaire densité de matière ρ par un tenseur énergie-impulsion T_{ij}. Cependant, cette voie a été abandonnée car il semblait impossible de satisfaire la loi de conservation. Einstein montra que cela est possible, à condition de travailler dans des coordonnées curvilignes quelconques, en présence de courbure.

1.82. Conditions auxquelles doit satisfaire le tenseur d'Einstein. Dans le mémoire où il expose sa synthèse finale ([**138**]), Einstein postule que toutes les caractéristiques géométriques de l'espace-temps peuvent être décrites au moyen d'un tenseur différentiel E_{ij} deux fois covariant qui satisfait quatre conditions.

1. *Ce tenseur est exprimé dans un espace pseudo-riemannien quadridimensionnel.*
2. *Il doit dépendre des dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre au plus égal à* 2.
3. *Il doit être linéaire par rapport aux dérivées partielles des coefficients métriques d'ordre exactement égal à* 2.

4. *Sa version mixte* $E_i{}^j := \sum_{p=1}^n g^{pj}\, E_i p$ *doit être de divergence absolue nulle :*

$$0 = \sum_{j=1}^n \nabla_j\, E_i{}^j. \tag{1.83}$$

Voici comment Einstein présentait le choix de ce tenseur :

> [...] pour le champ de gravitation en l'absence de matière, il est naturel de chercher à annuler le tenseur symétrique $B_{\mu\nu}$, déduit du tenseur $B^\rho_{\mu\sigma\tau}$. [...] avec le choix du système de coordonnées que nous avons fait, ces équations s'écrivent dans le cas du champ libre de matière :
>
> $$\begin{cases} \dfrac{\partial \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\,\Gamma^\beta_{\nu\alpha} = 0 \\ \sqrt{-g} = 1. \end{cases} \tag{47}$$
>
> Il faut remarquer que le choix de ces équations comporte un minimum d'arbitraire. Car, en dehors de $B_{\mu\nu}$, il n'existe pas de tenseur de rang 2 formé des $g_{\mu\nu}$ et de leurs dérivées qui ne comporte aucune dérivée d'ordre supérieur à deux et qui soit linéaire en fonction de ces dernières ([**138**], p. 209 de la traduction française).

Notons que les considérations sont légèrement différentes : la normalisation $\sqrt{-g} = 1$ du déterminant de la métrique introduit une simplification des équations de la gravitation dans le vide qui élimine la moitié des termes du tenseur de Ricci A_{ij} classique. En vérité, Einstein n'introduira le tenseur $A_j{}^i - \frac{1}{2}\,\delta^i_j\, A$ que dans un mémoire ultérieur. En tout état de cause, sa dernière affirmation revient à dire que le tenseur de Ricci A_{ij} est essentiellement le seul tenseur deux fois covariant qui dépend linéairement des dérivées partielles d'ordre deux des coefficients métriques. Cette affirmation signifie sans doute que le seul tenseur que l'on peut obtenir par contraction des indices à partir du tenseur de courbure $A_{ijk}{}^l$ est le tenseur de Ricci, ce qui était bien connu.

Élie Cartan poussa plus loin la question d'unicité et démontra un théorème beaucoup plus fort que cette observation élémentaire.

1.84. Théorème d'unicité d'Élie Cartan. Supposons donc $n = 4$ et soit $\sum_{i,\,j=1}^4 g_{ij}\, dx^i dx^j$ une pseudo-métrique non-dégénérée, possédant trois valeurs propres négatives et une valeur propre positive en tout point. Soit A_{ij} le tenseur de Ricci. Nous avons déjà observé que la forme quadratique différentielle $\sum_{i,\,j=1}^4 A_{ij}\, dx^i dx^j$ est covariante de la forme quadratique fondamentale $\sum_{i,\,j=1}^4 g_{ij}\, dx^i dx^j$ (*cf.* (1.65)). On vérifierait qu'il en est de même pour la forme $\sum_{i,\,j=1}^{4} A\, g_{ij}\, dx^i dx^j$, obtenue en multipliant la forme fondamentale par la courbure scalaire A. Enfin, la forme quadratique fondamentale est évidemment covariante d'elle-même.

THÉORÈME 1.85. (Élie CARTAN 1922) *Toute forme quadratique différentielle*

(1.86)
$$\sum_{i,\,j=1}^{4} C_{ij}^{0}\, dx^i dx^j = \sum_{i,\,j=1}^{4} \mathscr{C}_{ij}^{0}\left(g_{\alpha\beta}(x),\ \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma}(x),\ \frac{\partial^2 g_{\alpha\beta}}{\partial x^\gamma \partial x^\delta}(x)\right) dx^i dx^j,$$

linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 *des coefficients* $g_{\alpha\beta}$ *et* covariante de la forme quadratique fondamentale *est nécessairement une combinaison linéaire des trois formes précédentes* :

$$\sum_{i,\,j=1}^{4} C_{ij}^{0}\, dx^i dx^j = \sum_{i,\,j=1}^{4} \left[\nu\, A_{ij} + \mu\, A\, g_{ij} + \lambda\, g_{ij}\right] dx^i dx^j, \tag{1.87}$$

avec des constantes λ, μ *et* ν *arbitraires.*

Grâce au calcul effectué dans le Lemme 1.55, il en découle la conséquence suivante.

COROLLAIRE 1.88. *Le tenseur une fois covariant et une fois contravariant défini par* :

$$E_i^{\ j} := \mu\left(A_i^{\ j} - \frac{1}{2}\,\delta_i^j\, A\right) + \lambda\, \delta_i^j, \tag{1.89}$$

où λ *et* μ *sont des constantes, est le plus général qui satisfait la loi de conservation* $\sum_{j=1}^{4} \nabla_j\, E_i^{\ j} = 0$.

Quatre préoccupations sous-tendent la rédaction :

(i) un souci de mentionner régulièrement des pensées intuitives, conceptuelles, dialectiques, heuristiques et spéculatives propres à la géométrie, de les développer et de leur conférer le statut qu'elles méritent ; en effet, telles les âmes d'une Atlantide disparue, ces pensées virtuelles sont trop souvent englouties dans le langage formel ; elles sont quasi fossilisées dans les strates innombrables de la tour de Babel des langages mathématico-physiques formalisés ;

(ii) un souci de concrétude absolue dans la présentation des concepts géométriques, cachés derrière les définitions «formalistes» ;

(iii) un *respect absolu des calculs intermédiaires*, jamais envisagés comme des étapes obscures indignes d'apparaître dans le texte écrit, mais toujours considérés comme des briques essentielles pour ériger les raisonnements géométriques ;

(iv) une volonté d'*approfondir et de méditer le contenu spéculatif immanent aux mémoires originaux* de Gauss, de Riemann, de Christoffel, de Lie, d'Einstein et d'Élie Cartan.

De ces quatre préoccupations découlent trois principes majeurs qui imposeront un style particulier à la rédaction de ce mémoire :

(a) accepter la longueur du texte : il est paradoxalement beaucoup plus facile de lire un texte long et complet qui s'interdit les ellipses qu'un texte court qui fait l'impasse sur le suivi dialectique et rhétorique des raisonnements ;

(b) renforcer la présence d'une langue «littéraire» ou tout du moins «littérale» : les explications reformulées en langue naturelle offrent toujours des éclaircissements qui sont indispensables à la compréhension adéquate d'un sujet ;

(c) préciser chaque geste de calcul qui entre dans la dérivation d'une identité formelle et privilégier systématiquement la concrétude des calculs : ce n'est qu'à cette condition que le lecteur pourra pénéter dans les royaumes oubliés de la géométrie classique, ceux que la vague de formalisation au milieu du vingtième siècle n'a pas eu l'énergie d'absorber et de réécrire en totalité.

Ces orientations s'expliquent par notre projet initial : rendre accessibles les idées d'Élie Cartan, les retraduire, les reconstruire, en s'aidant de sources modernes (par exemple [**174**], [**347**]), mais en dépassant le niveau de la théorie générale. Quatre mois nous auront été nécessaires pour déchiffrer les soixante-trois pages du mémoire original [**72**] d'Élie Cartan. Parfois sans indiquer ses sources, Élie Cartan applique des théorèmes profonds qui requièrent une culture préalable. Certains passages laissent réellement perplexe quant aux arguments qu'il utilise. Le lecteur opiniâtre et curieux finit par admettre que la seule stratégie qui se présente à lui est de reconstituer *ab initio* tous les raisonnements suggérés de manière elliptique, et de compléter tous les calculs passés sous silence par Élie Cartan.

Nous remercions Françoise Panigeon pour des relectures minutieuses sur écran.

2. Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne

Tous nos raisonnements seront locaux et effectués dans des systèmes de coordonnées précis $x = (x^1, \ldots, x^n)$, ou $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$, $\ldots$, sur $\mathbb{R}^n$, au voisinage d'un point que nous supposerons être l'origine, sans perte de généralité.

2.1. Diagonalisation de la pseudo-métrique. Pour les applications à la relativité générale, nous supposerons que la «métrique» riemannienne locale est non-dégénérée, *i.e.* que la matrice symétrique $(g_{ij}(x))_{1\leqslant j\leqslant n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ est inversible en tout point x, sans être forcément définie positive. Puisque le ds^2 peut alors s'annuler dans certaines directions dites «isotropes» et posséder des valeurs alternativement positives et négatives, et puisque le terme «métrique» doit être réservé aux distances toujours positives, nous parlerons dans ce cas de «pseudo-métrique» riemannienne.

Il est bien connu qu'après un changement de base orthogonal, toute matrice symétrique non-dégénérée peut être réduite à une matrice diagonale. De plus, après une dilatation appropriée le long des axes de coordonnées et après une permutation des coordonnées, on peut supposer que les p premiers éléments de la diagonale sont des -1 et que les $(n-\mathsf{p})$ derniers éléments des 1. On appellera «*cas riemannien*», le cas $\mathsf{p}=0$ et «*cas pseudo-riemanniens*» les autres cas $0<\mathsf{p}\leqslant n$. En relativité restreinte (et générale), on a bien évidemment $n=4$, $\mathsf{p}=3$ et le ds^2 est minkowskien :

$$ds^2 = -(dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + (dx^4)^2. \tag{2.2}$$

Afin de préparer à l'avance les harmonies formelles, définissons des constantes qui s'introduiront dans toutes nos équations :

(2.3)

$$\varepsilon_i := -1, \quad \text{pour } i = 1, \ldots, \mathsf{p} \text{ et } \varepsilon_i := 1, \quad \text{pour } i = \mathsf{p}+1, \ldots, n.$$

D'après la loi d'inertie de Sylvester, toute forme quadratique non-dégénérée en les variables $(x^1, \ldots, x^n)$ est de la forme $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\,[\lambda_i(x)]^2$, où les $\lambda_i(x) = \sum_{j=1}^n \lambda_j\, x^j$ sont des formes linéaires linéairement indépendantes. Autrement dit, une telle forme quadratique se «redresse» en $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i\,(\bar{x}^i)^2$, grâce au changement de coordonnées linéaires sur $\mathbb{R}^n$ défini par $\bar{x}^i := \sum_{j=1}^n \lambda_j\, x^j$. Ce résultat reste vrai, plus généralement, pour un ds^2 pseudo-riemannien quelconque, à condition de remplacer les $\lambda_i(x)$ par des formes différentielles, *i.e.* des formes linéaires à coefficients variables.

LEMME 2.4. *Il existe n formes différentielles $\theta^i = \theta^i(x, dx) = \sum_{j=1}^n h_j^i(x)\, dx^j$ de degré 1 à coefficients analytiques réels $h_j^i(x)$ qui diagonalisent le ds^2 en tout point, c'est-à-dire telles que l'on a*

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i\,(\theta^i)^2. \tag{2.5}$$

Avant de rédiger la démonstration de ce lemme, formulons un certain nombre d'observations préliminaires. Tout d'abord, il importe de faire remarquer qu'en général, de telles formes différentielles non seulement ne sont pas uniques mais surtout ne sont pas exactes. En vérité, ce n'est que dans le cas exceptionnel où le tenseur de courbure est constant qu'il existe des fonctions $y^i(x)$ telles que l'on puisse prendre $\theta^i = dy^i$ pour $i = 1, \ldots, n$ (*voir* Théorème 2.).

La non-unicité du système de formes $\theta^1, \ldots, \theta^n$ est causée par une ambiguïté essentielle qui sera exploitée à fond par la «méthode d'équivalence» d'Élie Cartan. Par exemple, dans le cas riemannien, pour toute matrice $U(x) = (u_j^i(x))$ qui dépend analytiquement du point x et qui est orthogonale, c'est-à-dire qui vérifie $\delta_j^i = \sum_{k=1}^n u_i^k(x)\, u_j^k(x)$, nous affirmons que le ds^2 sera tout aussi bien représenté comme

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (\omega^i)^2, \tag{2.6}$$

où $\omega^i := \sum_{j=1}^n u_j^i\, \theta^j$: autrement dit, les ω^i proviennent d'une rotation des θ^i. En effet, nous vérifions immédiatement par le calcul que :

$$\tag{2.7} \left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\omega^i)^2 &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j_1=1}^n u_{j_1}^i\, \theta^{j_1} \right) \left(\sum_{j_2=1}^n u_{j_2}^i\, \theta^{j_2} \right) \\ &= \sum_{i,\, j_1,\, j_2=1}^n u_{j_1}^i\, u_{j_2}^i\, \theta^{j_1}\, \theta^{j_2} \\ &= \sum_{j_1,\, j_2=1}^n \delta_{j_1}^{j_2}\, \theta^{j_1}\, \theta^{j_2} \\ &= \sum_{i=1}^n (\theta^i)^2. \end{aligned} \right.$$

Pour le passage de la troisième à la quatrième ligne, on utilise la relation précitée $\delta_{j_1}^{j_2} = \sum_{k=1}^n u_{j_1}^i\, u_{j_2}^i$. Ici, nous explicitons à dessein chaque ligne de calcul, fût-elle élémentaire, afin d'assurer la lisibilité et la reproductibilité des calculs explicites que nous effectuerons par la suite. Ces calculs qui préciseront ceux d'Élie Cartan sont nettement plus délicats, et c'est pourquoi nous devons faire preuve de clarté et de discipline formelle dès maintenant. Ainsi, tout système de formes différentielles ω^i qui se déduit d'un système de formes différentielles θ^i diagonalisant le ds^2 (2.5) par une rotation vectorielle $\omega^i = \sum_{j=1}^n u_j^i\, \theta^j$ constitue encore un système de formes différentielles qui diagonalise le ds^2. Poursuivons les commentaires avant d'entamer la démonstration du Lemme 2.4.

2.8. Équations matricielles fondamentales. Admettons ce lemme et fixons une fois pour toutes le système de formes différentielles θ^i. Soit $G = G(x)$ la matrice $(g_{ij}(x))$, où i représente l'indice des lignes et j celui des colonnes. Soit $H = H(x)$ la matrice $(h_j^i(x))$, où, de même, i représente l'indice des lignes et j celui des colonnes. Soit E la matrice diagonale avec ε_i sur le

i-ième élément de la diagonale, *i.e.* en notation tabulaire :

$$E := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

En développant la représentation (2.5) et en réordonnant, nous obtenons :

$$\begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(x)\, dx^i dx^j & = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k \left(\sum_{i=1}^{n} h_i^k(x)\, dx^i \right) \left(\sum_{j=1}^{n} h_j^k(x)\, dx^j \right) \\ & = \sum_{i,j=1}^{n} dx^i dx^j \left(\sum_{k=1}^{n} h_i^k(x) \cdot \varepsilon_k \cdot h_j^k(x) \right), \end{cases} \tag{2.10}$$

d'où

$$g_{ij}(x) = \sum_{k=1}^{n} h_i^k(x) \cdot \varepsilon_k \cdot h_j^k(x). \tag{2.11}$$

De manière équivalente, la matrice H vérifie l'équation matricielle

$$G = {}^T H \cdot E \cdot H, \tag{2.12}$$

qui se réduit à $G = {}^T H \cdot H$ dans le cas riemannien.

Soit $\widetilde{H}$ la matrice inverse[8] de H. Par définition, on a les deux identités matricielles $I_{n\times n} = H \cdot \widetilde{H} = \widetilde{H} \cdot H$, où $I_{n\times n}$ désigne la matrice identité de taille $n \times n$. Écrivons ces identités qui seront fort utiles par la suite, avec des indices :

$$\delta_j^i = \sum_{k=1}^{n} h_k^i \cdot \widetilde{h}_j^k = \sum_{k=1}^{n} \widetilde{h}_k^i \cdot h_j^k. \tag{2.13}$$

Bien qu'il existe des formules rationnelles explicites, dites «de Cramer», pour les éléments de la matrice inverse de H en fonction des éléments de H, nous adopterons la notation $\widetilde{H} = (\widetilde{h}_i^j)$ pour désigner la matrice inverse de H. Dans ce qui va suivre, souvenons-nous que cette notation n'introduit pas les éléments d'une nouvelle matrice. Souvenons-nous aussi que la dépendance entre les éléments de $\widetilde{H}$ et les éléments de H est entièrement exprimée par les relations algébriques (2.13). Ainsi, lorsque nous aurons besoin de simplifier certaines expressions algébrico-différentielles complexes où apparaissent les éléments de H et de $\widetilde{H}$, il nous suffira de tenir compte de ces relations.

2.14. Base orthonormale mobile. Toujours en admettant le Lemme 2.4, introduisons le système de champs de vecteurs définis par

$$e_i = e_i(x) := \sum_{j=1}^{n} \widetilde{h}_i^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j}. \tag{2.15}$$

Ces champs de vecteurs sont *duaux* du système de formes différentielles θ^j, au sens de la dualité canonique entre champs de vecteurs et formes différentielles définie par $dx^i \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_j^i$. En effet, on vérifie par le calcul que :

$$\begin{cases} \theta^i(e_j(x)) & = \sum_{k=1}^{n} h_k^i(x) \cdot \widetilde{h}_j^k(x) \\ & = \delta_j^i. \end{cases} \tag{2.16}$$

De plus, nous affirmons que le produit scalaire entre les deux vecteurs $e_i(x)$ et $e_j(x)$ défini au moyen du ds^2 pseudo-riemannien satisfait la relation de pseudo-orthogonalité :

$$\langle e_i(x),\, e_j(x)\rangle_{ds^2} = \varepsilon_i\, \delta_i^j. \tag{2.17}$$

En effet, on vérifie par le calcul que

$$\begin{cases} \langle e_i,\, e_j\rangle_{ds^2} & = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\, dx^k(e_i)\, dx^l(e_j) \\ & = \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl}\, \widetilde{h}_i^k\, \widetilde{h}_j^k \\ & = \varepsilon_i\, \delta_i^j, \end{cases} \tag{2.18}$$

grâce à la relation matricielle (2.12), écrite sous la forme équivalente $E = {}^T\widetilde{H} \cdot G \cdot \widetilde{H}$. Dans le cas riemannien, on a $\varepsilon_i = 1$ pour tout $i = 1, \ldots, n$ et les relations précédentes expriment qu'en tout point x, les n vecteurs $e_1(x), \ldots, e_n(x)$ forment un n-èdre orthonormé, *i.e.* un repère orthogonal dont tous les vecteurs sont de norme 1. Puisque ces vecteurs varient analytiquement en fonction du point x, nous avons effectivement construit une base orthonormée «mobile» qui provient des relations pseudo-métriques infinitésimales fournies par le ds^2. Réciproquement, les formes θ^i duales de ce repère orthonormé mobile représentent le ds^2 via la formule (2.5).

[8] D'une manière générale, nous noterons avec un signe «tilde» l'inverse de toute matrice inversible, sauf dans le cas évident $\widetilde{E} = E$.

Voici une représentation mentale illustrative. Dans l'espace euclidien tridimensionnel physique standard, tout corps solide rigide se déplaçant tel un ballon de rugby emporte avec lui un système d'axes fixes déterminés à l'avance que l'on peut s'imaginer «imprimés» en tout point de l'espace que ce corps visite dans son mouvement continu : c'est la notion de repère mobile le long d'une courbe de l'espace.

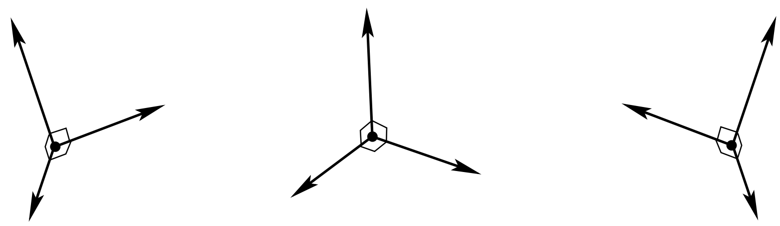


FIGURE 1 : REPÈRE ORTHONORMÉ MOBILE

Démonstration du Lemme 2.4. Établissons enfin ce lemme. Pour cela, nous allons appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, bien connu dans le cas des espaces vectoriels équipés d'un produit scalaire euclidien et vérifions qu'il se généralise au cas des formes différentielles, pour un ds^2 pseudo-riemannien.

Cherchons tout d'abord une transformation linéaire à l'origine de la forme $x \mapsto K \cdot x =: \bar{x}$, où K est une matrice, qui redresse le ds^2 à l'origine, c'est-à-dire qui transforme la forme quadratique (non différentielle) $\sum_{i,\,j=1}^n g_{ij}(0)\, x^i x^j$ en la forme quadratique $\sum_{k=1}^n \varepsilon_k\, (\bar{x}^k)^2$. En remplaçant $\bar{x}^k$ par $\sum_{i=1}^n K_i^k\, x^i$ on obtient l'équation :

$$
(2.19) \qquad \left\{ \begin{aligned} \sum_{i,\,j=1}^n g_{ij}(0)\, x^i x^j &= \sum_k \varepsilon_k\, (\bar{x}^k)^2 \\ &= \sum_{k=1}^n \varepsilon_k \left(\sum_{i=1}^n K_i^k\, x^i \right) \left(\sum_{j=1}^n K_j^k\, x^j \right) \\ &= \sum_{i,\,j=1}^n x^i x^j \left(\sum_{k=1}^n K_i^k \cdot \varepsilon_k \cdot K_j^k \right), \end{aligned} \right.
$$

d'où

$$
(2.20) \qquad g_{ij}(0) = \sum_{k=1}^n K_i^k \cdot \varepsilon_k \cdot K_j^k.
$$

De manière équivalente, la matrice K vérifie l'équation matricielle :

$$G(0) = {}^T K \cdot E \cdot K, \tag{2.21}$$

où E est la matrice diagonale (2.9). Rappelons que toute matrice symétrique non-dégénérée telle que $G(0)$ est diagonalisable dans une base qui est orthonormale pour le produit scalaire euclidien (*voir* [**173**]). Autrement dit, il existe une matrice orthogonale O, *i.e.* satisfaisant $O \cdot {}^T O = I_{n\times n}$, telle que $G(0) = {}^T O \cdot D \cdot O$, où D est une matrice diagonale qui possède des valeurs propres strictement positives sur les p premiers éléments de sa diagonale et $n - p$ valeurs propres strictement négatives sur les derniers éléments. Il en découle que la matrice diagonale $E \cdot D$ a tous ses éléments diagonaux strictement positifs. Il existe donc une matrice diagonale F ayant tous ses éléments diagonaux strictement positifs qui est racine carrée de $E \cdot D$, *i.e.* telle que $F^2 = E \cdot D$. Puisque les matrices diagonales commutent et puisque $E^2 = I_{n\times n}$, on a, de manière équivalente :

$$D = {}^T F \cdot E \cdot F. \tag{2.22}$$

En remplaçant cette expression de D dans $G(0) = {}^T O \cdot D \cdot O$, nous avons immédiatement :

$$G(0) = {}^T O \cdot {}^T F \cdot E \cdot F \cdot O, \tag{2.23}$$

et il est maintenant évident qu'il suffit de prendre $K := F \cdot O$ pour satisfaire l'équation (2.21).

Notons dorénavant x (au lieu de $\bar{x}$) un tel système de coordonnées qui redresse le $ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x)\, dx^i dx^j$ à l'origine, *i.e.* dans lesquelles on a $g_{ij}(0) = \varepsilon_i\, \delta_i^j$. Pour démontrer l'existence des formes différentielles θ^i, raisonnons de manière duale. Il suffit en effet d'établir qu'il existe des champs de vecteurs e_i, duaux des formes différentielles θ^i, de la forme $e_i(x) := \sum_{j=1}^n \widetilde{h}_i^j(x)\, \frac{\partial}{\partial x^j}$ tels que :

$$\langle e_i(x),\, e_j(x)\rangle_{ds^2} = \varepsilon_i\, \delta_i^j. \tag{2.24}$$

L'inconnue est la matrice $\widetilde{H}(x) = (\widetilde{h}_j^i(x))$, et l'on doit vérifier qu'il existe une telle matrice qui est solution de (2.24) et qui est analytique par rapport à la variable x.

Puisque $g_{11}(0) = \varepsilon_1$, la racine carrée $\sqrt{\varepsilon_1\, g_{11}(x)}$ est analytique dans un voisinage de l'origine et si l'on pose

$$e_1 := \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1\, g_{11}}}\, \frac{\partial}{\partial x^1}, \tag{2.25}$$

il est évident que $\langle e_1,\, e_1\rangle_{ds^2} = \varepsilon_1$. Observons que $e_1(0)$ est un multiple positif de $\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_0$.

Supposons par récurrence que nous ayons déjà construit k champs de vecteurs à coefficients analytiques $e_1(x), \ldots, e_k(x)$ définis dans un voisinage de l'origine, tels que $e_i(0)$ est un multiple positif de $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_0$ pour $i = 1, \ldots, k$ et tels que

$$\langle e_i(x),\, e_j(x)\rangle_{ds^2} = \varepsilon_i\, \delta_i^j, \tag{2.26}$$

pour tous $i, j = 1, \ldots, k$, avec un certain entier k satisfaisant $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Cherchons un $k+1$-ième champ de vecteurs de la forme

$$e'_{k+1}(x) := \frac{\partial}{\partial x^{k+1}} + \sum_{j=1}^{k} a_j(x)\, \frac{\partial}{\partial x^j}, \tag{2.27}$$

qui est orthogonal à $e_1, \ldots, e_k$, c'est-à-dire satisfaisant :

$$0 = \left\langle e'_{k+1},\, e_i\right\rangle_{ds^2} = \langle \partial_{x^{k+1}},\, e_i\rangle_{ds^2} + \sum_{j=1}^{k} a_j\ \langle \partial_{x^j},\, e_i\rangle_{ds^2}\,, \tag{2.28}$$

pour $i = 1, \ldots, k$. Grâce à l'hypothèse que $e_i(0)$ est un multiple positif de $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_0$, grâce à l'hypothèse de récurrence (2.26) et grâce au fait que les formules de résolution dites «de Cramer» sont algébriques, nous déduisons que ce système linéaire de k équations linéaires à k inconnues admet une unique solution $a_1(x), \ldots, a_k(x)$, qui est analytique dans un voisinage (peut-être restreint) de l'origine. Il ne reste plus qu'à dilater e'_{k+1} de manière à normaliser sa norme au carré : pour assurer que $\langle e_{k+1},\, e_{k+1}\rangle_{ds^2} = \varepsilon_{k+1}$, il suffit évidemment de prendre

$$e_{k+1} := \sqrt{\frac{\varepsilon_{k+1}}{\left\langle e'_{k+1},\, e'_{k+1}\right\rangle_{ds^2}}} \cdot e'_{k+1}, \tag{2.29}$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2.4. □

3. Équations de structure et courbure pseudo-riemannienne

3.1. Convention sur la notation des sommes. Nous n'adopterons *pas* la convention dite «d'Einstein»[9], qui consiste à sous-entendre tout signe «somme» dès que deux indices sont répétés : une somme est une somme et mérite de figurer pleinement aussi bien dans l'écriture des formules intermédiaire que dans les expressions finales. De plus, à cause de la présence du facteur non sommant ε_i, si nous adoptions cette convention, nous devrions fréquemment notifier qu'elle ne s'applique pas, ce qui reviendrait à lui ôter tout intérêt simplificatoire. En revanche, nous admettrons l'allègement notationnel qui consiste à sous-entendre le domaine de variation des indices de sommation. Puisque toutes les sommes qui apparaîtront dans ce mémoire portent sur des indices compris entre 1 et n, nous écrirons $\sum_i$,

$\sum_{i,j}$, $\sum_{i_1,i_2,i_3}$ et $\sum_{i<j}$ à la place de $\sum_{i=1}^n$, $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n$, $\sum_{i_1=1}^n$, $\sum_{i_2=1}^n$, $\sum_{i_3=1}^n$ et $\sum_{1\leqslant i<j\leq n}$, respectivement.

3.2. Différentiation extérieure des formes θ^i Rappelons l'expression des formes θ^i en fonction des formes dx^i ainsi que les expressions inverses :

$$\theta^i = \sum_j h_j^i \cdot dx^j \qquad \text{et} \qquad dx^i = \sum_j \widetilde{h}_j^i \cdot \theta^j. \tag{3.3}$$

Autrement dit, aussi bien la collection $(dx^1, \ldots, dx^n)$ que la collection $(\theta^1, \ldots, \theta^n)$ constituent une base de formes différentielles de degré 1 sur $\mathbb{R}^n$. Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux formes θ^i, utilisons les expressions inverses (3.3), réorganisons le résultat et utilisons la relation élémentaire $\sum_j \sum_k A_{jk} \cdot \theta^j \wedge \theta^k \equiv \sum_{j<k} (A_{jk} - A_{kj}) \cdot \theta^j \wedge \theta^k$, ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned} d\theta^i &= \sum_{l_2} dh_{l_2}^i \wedge dx^{l_2} \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \cdot dx^{l_1} \wedge dx^{l_2} \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} \sum_j \sum_k \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_j^{l_1} \widetilde{h}_k^{l_2} \cdot \theta^j \wedge \theta^k \\ &= \sum_j \sum_k \theta^j \wedge \theta^k \cdot \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_j^{l_1} \widetilde{h}_k^{l_2} \right) \\ &= \sum_{j<k} \theta^j \wedge \theta^k \cdot \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} \widetilde{h}_j^{l_1} \widetilde{h}_k^{l_2} \left[\frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \right). \end{aligned}\right. \tag{3.4}$$

En posant pour tout $j < k$

$$K_{jk}^i := \sum_{l_1} \sum_{l_2} \widetilde{h}_j^{l_1} \widetilde{h}_k^{l_2} \left[\frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \tag{3.5}$$

et en prolongeant cette définition pour $j \geqslant k$ de telle sorte que $K_{jk}^i := -K_{kj}^i$, nous obtenons le lemme suivant.

[9]Einstein est censé avoir dit à l'un de ses amis : «J'ai fait une grande découverte en mathématiques ; j'ai supprimé le signe de sommation chaque fois que la somme porte sur un indice qui figure deux fois» (cité page 189 de la traduction française [**138**]).

LEMME 3.6. *Il existe des fonctions $K_{jk}^i = K_{jk}^i(x)$ satisfaisant les relations d'antisymétrie indicielle $K_{jk}^i = -K_{kj}^i$ telles que* :

$$d\theta^i = \sum_{j<k} K_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k. \tag{3.7}$$

Observons au passage que les mêmes fonctions K_{jk}^i apparaissent dans les crochets de Lie des champs de vecteurs duaux e_i des formes θ^i, à un signe «$-$» global près (une telle observation ne sera pas utilisée par la suite).

LEMME 3.8. *Avec ces mêmes fonctions $K_{jk}^i(x)$, on a* :

$$[e_j,\, e_k] = -\sum_i K_{jk}^i \cdot e_i. \tag{3.9}$$

DÉMONSTRATION. Bien qu'il existe une démonstration directe à partir des relations de dualité $\theta^i(e_j) = \delta_j^i$, nous préférons développer la démonstration qui passe par les calculs explicites, afin de «muscler» progressivement notre capacité au calcul formel. Rappelons que $e_i = \sum_j \widetilde{h}_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Pour développer $[e_j,\, e_k] = \Big[\sum_{l_1} \widetilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\, \sum_{l_2} \widetilde{h}_k^{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}}\Big]$, effectuons alors le calcul suivant : pour passer à la troisième ligne, intervertissons l_1 et l_2 dans la seconde double somme ; pour passer à la quatrième ligne, réexprimons les champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^{l_2}}$ au moyen des e_i via les formules $\frac{\partial}{\partial x^{l_2}} = \sum_i h_{l_2}^i\, e_i$; pour passer à la cinquième ligne, réorganisons les signes de sommation, ce qui donne :

(3.10)

$$\left\{\begin{aligned}
[e_j,\, e_k] &= \Bigg[\sum_{l_1} \widetilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}},\, \sum_{l_2} \widetilde{h}_k^{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}}\Bigg] \\
&= \sum_{l_1} \widetilde{h}_j^{l_1} \sum_{l_2} \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} - \sum_{l_2} \widetilde{h}_k^{l_2} \sum_{l_1} \frac{\partial \widetilde{h}_j^{l_1}}{\partial x^{l_2}} \frac{\partial}{\partial x^{l_1}} \\
&= \sum_{l_2} \frac{\partial}{\partial x^{l_2}} \cdot \Bigg[\sum_{l_1} \bigg(\widetilde{h}_j^{l_1} \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \widetilde{h}_k^{l_1} \frac{\partial \widetilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}}\bigg)\Bigg] \\
&= \sum_i \sum_{l_1} \sum_{l_2} e_i \cdot \Bigg[\widetilde{h}_j^{l_1}\, h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \widetilde{h}_k^{l_1}\, h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}}\Bigg] \\
&= \sum_i e_i \cdot \Bigg[\sum_{l_1} \widetilde{h}_j^{l_1} \bigg(\sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}\bigg) - \sum_{l_1} \widetilde{h}_k^{l_1} \bigg(\sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}}\bigg)\Bigg].
\end{aligned}\right.$$

Maintenant, nous devons éliminer des dérivées partielles (intempestives) $\frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$ et $\frac{\partial \widetilde{h}_j^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$ des composantes de la matrice inverse $\widetilde{H}$, *puisqu'elles n'apparaissent pas dans l'expression* (3.5) *de* K_{jk}^i. Pour cela, différentions par rapport à x^{l_1} la première famille d'identités (2.13), écrites avec les indices i, k et l_2 à la place des indices i, j et k, ce qui donne :

$$0 = \sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_k^{l_2} + \sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}. \tag{3.11}$$

Grâce à cette relation, nous pouvons remplacer directement le terme $\sum_{l_2} h_{l_2}^i \frac{\partial \widetilde{h}_k^{l_2}}{\partial x^{l_1}}$ qui apparaît avant le signe «$-$» dans les premières parenthèses de la dernière ligne de (3.10) par $-\sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_k^{l_2}$; procédons de même pour la seconde parenthèse de la dernière ligne de (3.10) ; après réorganisation des sommes et reconnaissance des fonctions K_{jk}^i, nous obtenons :

(3.12)

$$\left\{ \begin{aligned} [e_j, e_k] &= \sum_i e_i \cdot \left[\sum_{l_1} \widetilde{h}_j^{l_1} \left(-\sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_k^{l_2} \right) + \sum_{l_1} \widetilde{h}_k^{l_1} \left(\sum_{l_2} \frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} \widetilde{h}_j^{l_2} \right) \right] \\ &= \sum_i e_i \cdot \left(\sum_{l_1} \sum_{l_2} \widetilde{h}_j^{l_1} \widetilde{h}_k^{l_2} \left[-\frac{\partial h_{l_2}^i}{\partial x^{l_1}} + \frac{\partial h_{l_1}^i}{\partial x^{l_2}} \right] \right) \\ &= -\sum_i e_i \cdot K_{jk}^i, \end{aligned} \right.$$

ce qui complète la démonstration. □

3.13. Introduction des composantes de rotation (connexion associée). Maintenant, nous allons transformer les équations de structure (3.7) de manière à faire apparaître les composantes de la connexion de Levi-Civita canoniquement associée à la métrique riemannienne originale, et ce relativement au co-repère mobile des θ^i qui diagonalise la métrique.

LEMME 3.14. *Il existe une unique famille de formes différentielles* θ_j^i *de degré* 1 *satisfaisant les relations d'antisymétrie indicielle* $\theta_j^i = -\theta_i^j$, *telles que les équations de structure* (3.7) *peuvent se réécrire sous la forme* :

$$d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i. \tag{3.15}$$

DÉMONSTRATION. Décomposons les formes θ_j^i recherchées selon la base des θ^k de la manière suivante :

$$\theta_j^i = \sum_k \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^k, \tag{3.16}$$

avec des fonctions inconnues $\Gamma_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i(x)$ qui satisfont les relations d'antisymétrie $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{ik}^j$, pour s'assurer que $\theta_j^i = -\theta_i^j$. En remplaçant cette expression dans (3.15) en prenant (3.7) pour point de départ, nous pouvons identifier le système d'équations linéaires que doivent satisfaire les inconnues Γ_{jk}^i :

$$\text{(3.17)} \qquad \begin{cases} \sum_{j<k} K_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k & = d\theta^i \\ & = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta_j^i \\ & = \sum_{j,\,k} \varepsilon_i \, \Gamma_{jk}^i \cdot \theta^j \wedge \theta^k \\ & = \sum_{j<k} \left(\varepsilon_i \, \Gamma_{jk}^i - \varepsilon_i \, \Gamma_{kj}^i\right) \cdot \theta^j \wedge \theta^k, \end{cases}$$

ce qui nous donne, après identification des coefficients de la base de 2-formes $(\theta^j \wedge \theta^k)_{1 \leqslant j<k \leqslant n}$ et après multiplication par la constante ε_i (qui satisfait bien sûr $\varepsilon_i^2 = 1$) :

$$\text{(3.18)} \qquad \varepsilon_i \, K_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i.$$

Écrivons cette égalité trois fois : la première fois, telle quelle ; la seconde fois en remplaçant le triplet $(i,\, j,\, k)$ par $(k,\, j,\, i)$ dans (3.18) ; et la troisième fois en remplaçant le triplet $(i,\, j,\, k)$ par $(j,\, k,\, i)$ dans (3.18), ce qui donne :

$$\text{(3.19)} \qquad \begin{cases} \varepsilon_i \, K_{jk}^i & = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i, \\ \varepsilon_k \, K_{ji}^k & = \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k, \\ \varepsilon_j \, K_{ki}^j & = \Gamma_{ki}^j - \Gamma_{ik}^j. \end{cases}$$

Additionnons ces trois identités terme à terme en tenant compte des relations d'antisymétrie satisfaites par les coefficients Γ_{jk}^i, qui entraînent notamment que les quatre termes $-\Gamma_{kj}^i + \Gamma_{ji}^k - \Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ki}^j$ s'annulent par paire, ce qui donne la solution :

$$\text{(3.20)} \qquad \Gamma_{jk}^i := \frac{1}{2}\left(\varepsilon_i \, K_{jk}^i + \varepsilon_k \, K_{ji}^k + \varepsilon_j \, K_{ki}^j\right).$$

On vérifie que cette solution, unique par construction, satisfait effectivement $\Gamma_{jk}^i = -\Gamma_{ik}^j$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Les coefficients Γ_{jk}^i sont les coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita dans le co-repère diagonalisant.

3.21. Calcul des coefficients de courbure. Ce calcul sera d'abord effectué de manière non explicite, grâce à un raisonnement d'algèbre linéaire utilisé fréquemment par Élie Cartan dans ses travaux. Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'équation $d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta^i_j$, remplaçons l'expression de $d\theta^j$ qui apparaît dans le membre de droite de la première ligne et factorisons le résultat :

$$\left\{\begin{aligned} 0 = dd\theta^j & = \varepsilon_i \sum_j \left(d\theta^j \wedge \theta^i_j - \theta^j \wedge d\theta^i_j\right) \\ & = \varepsilon_i \sum_j \sum_k \varepsilon_j \cdot \theta^k \wedge \theta^j_k \wedge \theta^i_j - \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge d\theta^i_j \\ & = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \left(\sum_k \varepsilon_k \cdot \theta^k_j \wedge \theta^i_k - d\theta^i_j\right). \end{aligned}\right. \tag{3.22}$$

Afin d'introduire les coefficients de courbure R^i_{jkl} (sans obtenir encore leur expression explicite), nous pouvons maintenant appliquer à ces équations un argument indirect, appelé traditionnellement *Lemme de Cartan*, qui s'énonce pour les 2-formes comme suit.

LEMME 3.23. *Une collection de* 2*-formes* $\Theta^1, \ldots, \Theta^n$*, que l'on peut toujours décomposer selon la base des* 2*-formes* $(\theta^k \wedge \theta^l)_{1 \leqslant k < l \leqslant n}$*, de la manière suivante* :

$$\Theta^j = \sum_{k<l} A^j_{kl} \cdot \theta^k \wedge \theta^l, \tag{3.24}$$

pour $j = 1 \ldots, n$*, avec certains coefficients* A^j_{kl}*, satisfait l'identité*

$$0 = \sum_j \theta^j \wedge \Theta^j \tag{3.25}$$

si et seulement si *les coefficients* A^j_{kl}*, dont on prolonge la définition par* $A^j_{kl} := -A^j_{lk}$ *pour* $k \geqslant l$*, satisfont la relation de symétrie indicielle* :

$$0 = A^j_{kl} + A^l_{jk} + A^k_{lj} \tag{3.26}$$

(*permutation circulaire dans le sens trigonométrique*)*, pour tous indices* $i, j, k = 1, \ldots, n$*.*

Avant de démontrer ce lemme, appliquons-le, pour tout indice i fixé, aux 2-formes différentielles définies par $\Theta^i_j := d\theta^i_j - \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta^k_j \wedge \theta^i_k$. Elles satisfont effectivement l'identité : $0 = \sum_j \theta^j \wedge \Theta^i_j$, d'après (3.22) et elles satisfont $\Theta^i_j = -\Theta^j_i$. Décomposons donc les Θ^i_j selon la base des 2-formes $(\theta^k \wedge \theta^l)_{1 \leq k < l \leqslant n}$, en introduisant des coefficients R^i_{jkl} :

$$\Theta^i_j =: \sum_{k<l} R^i_{jkl} \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \tag{3.27}$$

Nous avons les relations d'antisymétrie $R^i_{jkl} = -R^j_{ikl}$, provenant de $\Theta^i_j = -\Theta^j_i$. Bien entendu, nous prolongeons la définition des R^i_{jkl} en posant $R^i_{jkl} := -R^i_{jlk}$ pour $k \geqslant l$. Le Lemme 3.23 affirme alors que les coefficients R^i_{jkl} satisfont les relations de symétrie indicielle suivantes :

$$\begin{cases} 0 &= R^i_{jkl} + R^i_{ljk} + R^i_{klj}, \\ 0 &= R^i_{jkl} + R^i_{jlk}, \\ 0 &= R^i_{jkl} + R^j_{ilk} \end{cases} \tag{3.28}$$

(permutation circulaire de la gauche vers la droite sur la ligne des indices inférieurs), les deux dernières étant réécrites pour mémoire. *Ce sont les seules relations de symétrie indicielle que satisfont les coefficients* R^i_{jkl}. De plus, par construction, *ces coefficients* R^i_{jkl} *sont déterminés de manière unique*. On les appelle *coefficients de courbure* et ils sont d'une importance fondamentale. En résumé, nous avons établi l'identité suivante :

$$d\theta^i_j = \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta^k_j \wedge \theta^i_k + \sum_{k<l} R^i_{jkl} \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \tag{3.29}$$

Pour l'instant, leur expression explicite ne nous est pas encore connue. Appliquer le Lemme (3.23) de Cartan présente donc l'inconvénient de ne pas donner accès directement à l'expression des coefficients de courbure. Néanmoins, appliquer ce lemme d'emblée présente trois avantages majeurs : premièrement, cela nous permet d'obtenir facilement toutes les relations de symétrie indicielles sur les coefficients de courbure[10] ; deuxièmement, cela nous permet de *préparer le terrain pour les calculs explicites* ; troisièmement, sans connaître explicitement les coefficients R^i_{jkl}, il est possible de voir par un raisonnement élémentaire (*voir* ci-dessous) qu'ils sont invariants par changement de coordonnées, tandis que la vérification de cette propriété d'invariance en travaillant directement à partir des expressions complètes serait une tâche de calcul formel substantielle[11].

---

[10] Au contraire, nous pourrions éprouver certaines difficultés à deviner ces relations en examinant l'expression explicite des R^i_{jkl} donnée ci-dessous.

[11] C'est peut-être pour ces raisons qu'Élie Cartan, au fur et à mesure que sa théorie des systèmes différentiels extérieurs mûrissait, et parce qu'il avait une fréquentation journalière de la complexité des calculs explicites, en est venu à mettre au point une manière de les «court-circuiter», de les «éviter», tout en élaborant des raisonnements indirects astucieux qui permettent quand même de conserver toutes les informations importantes.

Preuve du Lemme 3.23. Remplaçons les expressions (3.24) de Θ^j dans l'équation (3.25), et réorganisons la somme, ce qui donne :

$$
\left\{
\begin{aligned}
0 &= \sum_j \sum_{k<l} A^j_{kl} \cdot \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l \\
&= \sum_{j<k<l} \left[A^j_{kl} + A^l_{jk} + A^k_{lj}\right] \cdot \theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l,
\end{aligned}
\right.
\tag{3.30}
$$

d'où les relations désirées (2.), puisque la famille $(\theta^j \wedge \theta^k \wedge \theta^l)_{1\leqslant j<k<l\leqslant n}$, constitue une base de 3-formes. □

3.31. Invariance des composantes de courbure par application isométrique. Une telle invariance, qui généralise le *Theorema Egregium* de Gauss, est particulièrement significative et mérite d'être citée à cet endroit.

Supposons donnée une application $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre deux variétés pseudo-riemanniennes locales M et $\overline{M}$ équipées chacune d'une pseudo-métrique diagonalisée $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$ et $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (\bar{\theta}^i)^2$, qui transforme la collection des formes $(\bar{\theta}^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ en la collection des formes $(\theta^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, c'est-à-dire telle que l'on a $\bar{\theta}^i = \theta^i$, $i = 1, \ldots, n$, lorsque l'on remplace $\bar{x}$ en fonction de x dans l'expression de $\bar{\theta}^i$. Dans la Section 5 ci-dessous, nous démontrerons que toute isométrie entre variétés riemanniennes se ramène, après un changement éventuel du co-repère des formes θ^i qui diagonalisent le ds^2, à une telle transformation satisfaisant $\bar{\theta}^i = \theta^i$. De manière équivalente, une telle isométrie envoie exactement le repère orthonormé des e_i sur le repère orthonormé des $\bar{e}_i$.

ASSERTION 3.32. *Sous ces hypothèses, les composantes de la courbure se correspondent terme à terme, i.e. on a* :

$$
\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl},
\tag{3.33}
$$

pour tous $i, j, k, l = 1, \ldots, n$*, après remplacement de* $\bar{x}$ *en fonction de* x *dans l'expression de* $\overline{R}^i_{jkl}$.

DÉMONSTRATION. En effet, différentions extérieurement les identités $\bar{\theta}^i = \theta^i$ et appliquons deux fois le Lemme 3.14, ce qui donne les identités :

$$
d\bar{\theta}^i = \varepsilon_i \sum_j \bar{\theta}^j \wedge \bar{\theta}^i_j = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta^i_j = d\theta^i,
\tag{3.34}
$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Grâce aux relations $\bar{\theta}^j = \theta^j$ et grâce à l'unicité des formes $\bar{\theta}^i_j$, nous en déduisons que $\bar{\theta}^i_j = \theta^i_j$, toujours après remplacement de

$\bar{x}$ en fonction de x. À nouveau, grâce aux identités suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} \sum_{k<l} R^i_{jkl}\cdot\theta^k\wedge\theta^l &= d\theta^i_j - \sum_k \varepsilon_k\cdot\theta^k_j\wedge\theta^i_k \\ &= d\bar{\theta}^i_j - \sum_k \varepsilon_k\cdot\bar{\theta}^k_j\wedge\bar{\theta}^i_k \\ &= \sum_{k<l} \overline{R}^i_{jkl}\cdot\bar{\theta}^k\wedge\bar{\theta}^l, \end{aligned}\right. \tag{3.35}$$

et grâce à l'unicité des coefficients de courbure, nous déduisons les identités (3.33), comme annoncé. □

En particulier, dans le cas des surfaces 2-dimensionnelles, en tenant compte des relations de symétrie indicielle (3.28), on vérifie[12] qu'il n'existe qu'une seule composante de courbure, laquelle s'identifie à la courbure de Gauss de la surface. L'Assertion 3.32 établit alors que la courbure de Gauss d'une surface est invariante par toute application isométrique : c'est le fameux *Theorema egregium* de Gauss ([**181**], §12).

3.36. Dérivées covariantes. Pour préparer le calcul explicite des coefficients de courbure, réexprimons d'abord la différentielle

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}\cdot dx^i \tag{3.37}$$

d'une fonction $F = F(x)$ quelconque dans le système de bases duales (θ^i) et (e_i), grâce aux formules de changement de base inverses de (3.3), ce qui donne :

$$\left\{\begin{aligned} dF &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial x_i}\cdot dx^i \\ &= \sum_i\sum_j \frac{\partial F}{\partial x_i}\,\widetilde{h}^i_j\cdot\theta^j \\ &= \sum_i\left(\sum_j \widetilde{h}^j_i\,\frac{\partial F}{\partial x_j}\right)\cdot\theta^i. \end{aligned}\right. \tag{3.38}$$

Nous reconnaissons la dérivation $e_i(F)$ dans les parentèses, ce qui montre que la différentielle dF s'exprime par une formule aussi simple que la formule originale (3.37) dans le système de bases duales (θ^i) et (e_i) :

$$dF = \sum_i e_i(F)\cdot\theta^i. \tag{3.39}$$

[12] *Voir* le Lemme 3. ci-dessous qui compte le nombre de composantes de courbure linéairement indépendantes dans le cas $n \geqslant 2$ général.

Cette formule est à retenir pour la suite. Afin d'insister encore plus sur l'analogie avec la formule (3.37), nous noterons plutôt $\frac{\partial F}{\partial \theta^i}$ les dérivées $e_i(F)$ et nous les appellerons *dérivées covariantes de* F. En définitive, la différentielle de F s'écrit :

$$dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \theta^i} \cdot \theta^i. \tag{3.40}$$

3.41. Calcul explicite des composantes de courbure. Venons-en enfin à ce calcul. L'application précédente du Lemme de Cartan tient lieu de guide pour la conduite du calcul complet. Ainsi, d'après (3.28), nous savons que les coefficients R^i_{jkl} doivent apparaître dans le membre de droite de l'expression $d\theta^i_j - \sum_k \varepsilon_k\, \theta^k_j \wedge \theta^i_k$, lorsqu'on remplace ces formes θ^i_j, θ^k_j et θ^i_k, par leurs expressions explicites (3.16). Tout d'abord, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à cette représentation (3.16), ce qui donne, grâce à la sous-section précédente et en remplaçant $d\theta^k$, puis en remplaçant θ^k_l et en réorganisant les sommes :

$$(3.42) \qquad \left\{ \begin{aligned} d\theta^i_j &= \sum_k d\Gamma^i_{jk} \cdot \theta^k + \sum_k \Gamma^i_{jk} \cdot d\theta^k \\ &= \sum_{k,\,l} \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \theta^l} \cdot \theta^l \wedge \theta^k + \sum_{k,\,l} \varepsilon_k\, \Gamma^i_{jk} \cdot \theta^l \wedge \theta^k_l \\ &= \sum_{k<l} \left(\frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial \theta^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \theta^l} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l + \\ &\quad + \sum_{k<l} \left(\sum_m \varepsilon_m \left[\Gamma^i_{jm}\, \Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\, \Gamma^m_{lk} \right] \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons par ailleurs les expressions de $\theta^k_j \wedge \theta^i_k$ dans la somme :
(3.43)

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta^k_j \wedge \theta^i_k &= \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k\, \Gamma^k_{jl}\, \Gamma^i_{km} \cdot \theta^l \wedge \theta^m \\ &= \sum_{k<l} \left(\sum_m \varepsilon_m \left[\Gamma^m_{jk}\, \Gamma^i_{ml} - \Gamma^m_{jl}\, \Gamma^i_{mk} \right] \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{aligned} \right.$$

En soustrayant (3.43) de (3.42), nous obtenons l'expression explicite, en fonction des coefficients de Christoffel Γ^i_{jk}, des composantes de la courbure :
(3.44)

$$R^i_{jkl} = \frac{\partial \Gamma^i_{jl}}{\partial \theta^k} - \frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \theta^l} + \sum_m \varepsilon_m \left[\Gamma^i_{jm}\, \Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\, \Gamma^m_{lk} - \Gamma^m_{jk}\, \Gamma^i_{ml} + \Gamma^m_{jl}\, \Gamma^i_{mk} \right].$$

3.45. Commentaires et spéculations sur l'expression explicite du tenseur de courbure. Il est important de faire remarquer que cette expression des composantes de la courbure n'est pas encore l'analogue (à $n \geqslant 2$ dimension) de la *formula egregia* (1.) découverte par Gauss. Pour obtenir l'analogue complet, il faudrait remplacer dans (3.44) l'expression complète des coefficients Γ^i_{jk} donnée par (3.20), sans oublier l'expression complète des K^i_{jk} donnée par (3.5). Après un calcul dont nous ne reproduisons pas les étapes intermédiaires ici, nous obtenons l'expression complète suivante des R^i_{jkl} en fonction des éléments de H et de $\widetilde{H}$: d'après (3.44), il faut additionner deux et quatre expressions de la forme suivante, à permutation d'indices près :

(3.46)

$$\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\partial \Gamma^i_{jk}}{\partial \theta^l} = -\frac{1}{2}\sum_{l_1,\,l_2,\,p} \widetilde{h}^p_l \left(\varepsilon_i\, \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_k \left[\frac{\partial^2 h^i_{l_2}}{\partial x^{l_1}\partial x^p} - \frac{\partial^2 h^i_{l_1}}{\partial x^{l_2}\partial x^p}\right] + \right.\\
&\qquad \left. +\varepsilon_k\, \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_i \left[\frac{\partial^2 h^k_{l_2}}{\partial x^{l_1}\partial x^p} - \frac{\partial^2 h^k_{l_1}}{\partial x^{l_2}\partial x^p}\right] + \varepsilon_j\, \widetilde{h}^{l_1}_k\, \widetilde{h}^{l_2}_i \left[\frac{\partial^2 h^j_{l_2}}{\partial x^{l_1}\partial x^p} - \frac{\partial^2 h^j_{l_1}}{\partial x^{l_2}\partial x^p}\right]\right) +\\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{l_1,\,l_2,\,p,\,q_1,\,q_2} \widetilde{h}^p_l\, \frac{\partial h^{q_2}_{q_1}}{\partial x^p} \left(\varepsilon_i \left(\widetilde{h}^{l_1}_{q_2}\, \widetilde{h}^{q_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_k + \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{q_1}_k\, \widetilde{h}^{l_2}_{q_2}\right) \left[\frac{\partial h^i_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^i_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right]\right.\\
&\qquad\qquad +\varepsilon_k \left(\widetilde{h}^{l_1}_{q_2}\, \widetilde{h}^{q_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_i + \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{q_1}_i\, \widetilde{h}^{l_2}_{q_2}\right) \left[\frac{\partial h^k_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^k_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right]\\
&\qquad\qquad \left. +\varepsilon_j \left(\widetilde{h}^{l_1}_{q_2}\, \widetilde{h}^{q_1}_k\, \widetilde{h}^{l_2}_i + \widetilde{h}^{l_1}_k\, \widetilde{h}^{q_1}_i\, \widetilde{h}^{l_2}_{q_2}\right) \left[\frac{\partial h^j_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^j_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right]\right),\\
&\sum_m \varepsilon_m\, \Gamma^i_{jm}\, \Gamma^m_{kl} = \frac{1}{4}\sum_{m,\,l_1,\,l_2,\,q_1,\,q_2} \left(\varepsilon_i\, \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_m \left[\frac{\partial h^i_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^i_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right] + \right.\\
&\qquad \left. +\varepsilon_m\, \widetilde{h}^{l_1}_j\, \widetilde{h}^{l_2}_i \left[\frac{\partial h^m_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^m_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right] + \varepsilon_j\, \widetilde{h}^{l_1}_m\, \widetilde{h}^{l_2}_i \left[\frac{\partial h^j_{l_2}}{\partial x^{l_1}} - \frac{\partial h^j_{l_1}}{\partial x^{l_2}}\right]\right) \times\\
&\qquad \times \left(\varepsilon_m\, \widetilde{h}^{q_1}_k\, \widetilde{h}^{q_2}_l \left[\frac{\partial h^m_{q_2}}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h^m_{q_1}}{\partial x^{q_2}}\right] + \varepsilon_l\, \widetilde{h}^{q_1}_k\, \widetilde{h}^{q_2}_m \left[\frac{\partial h^l_{q_2}}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h^l_{q_1}}{\partial x^{q_2}}\right] + \right.\\
&\qquad \left. +\varepsilon_k\, \widetilde{h}^{q_1}_l\, \widetilde{h}^{q_2}_m \left[\frac{\partial h^k_{q_2}}{\partial x^{q_1}} - \frac{\partial h^k_{q_1}}{\partial x^{q_2}}\right]\right).
\end{aligned}\right.$$

Aucune simplification notoire n'apparaît lorsque l'on additionne ces six termes. Notons la présence des dérivées partielles des coefficients $h^i_j(x)$ du ds^2 diagonalisé sous la forme $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i \left(\sum_j h^i_j(x)\, dx^j\right)^2$, et non pas des coefficients $g_{ij}(x)$ du ds^2 original, comme c'était le cas dans la *formula egregia* (1.). En toute rigueur, on devrait transformer encore l'expression (3.46) pour revenir aux coefficients $g_{ij}(x)$, grâce à la relation (2.12) qui relie la matrice G à la matrice H. Néanmoins, deux difficultés se présentent. Premièrement, cette relation ne définit pas H de manière unique, à cause de l'observation effectuée après l'énoncé du Lemme 2.4. Ainsi, pour assurer que H s'exprime explicitement en fonction de G, il est nécessaire d'opérer une normalisation préalable. Par exemple, si l'on choisit H symétrique ou triangulaire (supérieure ou inférieure), il existera une seule matrice H solution de (2.12). Deuxièmement, la résolution explicite de cette équation (2.12) d'inconnue H n'est pas aisée, et nous ignorons l'existence de formules explicites valable pour $n \geq 3$. Dans le cas $n = 2$, de telles formules existent et nous résumerons le calcul de ${R_{121}}^2$ en fonction de g_{11}, de g_{12} et de g_{22} ci-dessous.

En définitive, nous pensons qu'il est préférable de considérer que dans l'application de la méthode de Cartan, la donnée fondamentale de base n'est pas la matrice G des coefficients g_{ij}, mais la matrice H des coefficients h_j^i du repère diagonalisant.

De toute façon, l'analogue exact de la *formula egregia* (1.) démontrée par Gauss s'obtient plus aisément à partir du calcul classique des coefficients de courbure R^i_{jkl} dans le repère – en général non diagonalisant – constitué des vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ naturellement associés au système de coordonnées (x^i), calcul que nous avons résumé dans la Section 1. En effet, en remplaçant les expressions des coefficients de Christoffel Γ^i_{jk} dans (1.), nous avons obtenu l'expression (1.28). Dans le cas $n = 2$ et à un changement de notation près, c'est effectivement la *formula egregia* (1.) que l'on retrouve pour le seul coefficient de courbure R^1_{212} existant. Dans la quasi-totalité des manuels de géométrie différentielle, on s'en tient à l'expression (1.) du tenseur de courbure en fonction des coefficients de Christoffel de la connexion de Levi-Civita.

Pour terminer ce commentaire, étudions les différences entre (1.26) et (3.44). Les dérivées parallèles aux lignes de coordonnées qui apparaissent dans les deux premiers termes de (1.26) sont remplacées dans les deux premiers termes de (3.44) par des dérivées covariantes. En général, ces dérivées covariantes ne commutent pas entre elles, à cause de la relation (3.9). C'est aussi parce que les dérivées covariantes ne commutent pas entre elles qu'il y a quatre sommes de termes quadratiques en les Γ^i_{jk} dans (3.44), au lieu de deux seulement dans (1.26). En effet, la propriété d'être de torsion nulle que possède la connexion de Levi-Civita s'exprime par la relation de symétrie indicielle $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$ dans le repère des champs de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x^i}$ parallèles aux axes de coordonnées. Il en découle clairement que les deux premières sommes quadratiques $\sum_m \varepsilon_m \left[\Gamma^i_{jm}\,\Gamma^m_{kl} - \Gamma^i_{jm}\,\Gamma^m_{lk}\right]$ s'annihilent.

3.47. Dénombrement des composantes de courbure indépendants. En suivant É. Cartan, nous appellerons *quantités normales* les composantes du tenseur de courbure R^i_{jkl} pour lesquelles on a

$$\left\{ \begin{array}{ll} j > i, & k > l, \\ j \geqslant k, & i \geqslant l. \end{array} \right. \tag{3.48}$$

LEMME 3.49. *Les coefficients de courbure R^i_{jkl} satisfont la relation de symétrie suivante, conséquence de* (3.28) :

$$R^i_{jkl} = R^k_{lij}. \tag{3.50}$$

De plus, toute composante du tenseur de courbure s'exprime comme combinaison linéaire des composantes normales, qui sont linéairement indépendantes. Enfin, il y a exactement

$$\frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{3.51}$$

quantités normales.

DÉMONSTRATION. Adoptons la notation

$$(i|jkl) := R^j_{ikl} + R^l_{ijk} + R^k_{ilj}. \tag{3.52}$$

On a $(i|jkl) = 0$, grâce aux relations (3.28). En développant la relation

$$0 = (i|jkl) - (j|ikl) - (k|ijl) + (l|ijk), \tag{3.53}$$

en tenant compte des relations d'antisymétrie pour simplifier, on obtient :

$$R^j_{ikl} = R^l_{kij}. \tag{3.54}$$

Cette relation, ajoutée à l'antisymétrie par rapport aux indices i et j d'une part, et k et l d'autre part, permet d'exprimer toute quantité R^j_{ikl} comme égale ou opposée d'une quantité R^j_{ikl} vérifiant

$$i > j, \quad k > l, \quad i \geqslant k. \tag{3.55}$$

Mais pour exprimer tous les coefficients de courbure, en fonction de certains d'entre eux seulement, on peut encore restreindre le nombre de ces derniers, en imposant que $j \geqslant l$. En effet, supposons que $i > j$, $k > l$, $i \geqslant k$ et $j < l$, c'est-à-dire $i \geqslant k > l > j$. Alors la relation $(i|jkl) = 0$ permet d'exprimer R^j_{ikl} en fonction de quantités normales :

$$R^j_{ikl} = R^l_{ikj} - R^k_{ilj}. \tag{3.56}$$

Pour terminer la démonstration, il suffit d'effectuer un dénombrement élémentaire. Premièrment, les quantités normales à deux indices distincts ne peuvent être que de la forme A^i_{jij} avec $i > j$: elles sont au nombre de C^2_n ; deuxièmement, les quantités normales à trois indices distincts sont des trois formes suivantes : A_{jik}, A^i_{jjk} et A^i_{kjk} avec $i > j > k$; troisièmement, les quantités normales à quatre indices distincts sont des deux formes suivantes : A^i_{jkl} et A^i_{kjl}. Au total, il y a :

$$C^2_n + 3\,C^3_n + 2\,C^4_n = \frac{n^2(n^2-1)}{12} \tag{3.57}$$

quantités normales. La démonstration est achevée. □

3.58. Caractérisation de la courbure nulle. Pour terminer cette section, citons sans démonstration le résultat suivant. Une dizaine de démonstrations distinctes sont rédigées dans [**414**].

THÉORÈME 3.59. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes* :

(1) *il existe un changement de coordonnées analytiques locales* $x \mapsto \bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ *dans lesquelles* $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i\,(d\bar{x}^i)^2$ *;*

(2) *il existe un changement de coordonnées analytiques locales* $x \mapsto \bar{x} = (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$ *telles que les* 1*-formes* $\theta^i = d\bar{x}^i$*,* $i = 1, \ldots, n$*, sont exactes ;*

(3) *les coefficients de courbure* R^i_{jkl} *sont nuls.*

Il existe une dizaine de démonstrations essentiellement équivalentes de ce théorème. La démonstration est

4. Méthode d'équivalence pour les surfaces gaussiennes

Dans cette section, nous étudions le problème d'équivalence pour les variétés riemanniennes 2-dimensionnelles, intrinsèques, non plongées dans $\mathbb{R}^3$, que nous appelerons *surfaces gaussiennes.*

PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE 4.1. *Étant donné deux surfaces gaussiennes* S *et* $\overline{S}$ *munies de métriques prédéfinies* :

(4.2)

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2 \qquad et \qquad d\bar{s}^2 = \overline{E}\,du^2 + 2\overline{F}\,d\bar{u}d\bar{v} + \overline{G}\,d\bar{v}^2,$$

trouver un algorithme universel pour déterminer si elles sont localement isométriques.

L'exposition de ce cas spécial du problème d'équivalence servira de préliminaire à la Section 5 ci-dessous, consacrée aux variétés pseudo-riemanniennes de dimension quelconque.

4.3. Étude du plan euclidien. Soit $(\bar{u}, \bar{v}) = (\bar{u}(u, v), \bar{v}(u, v))$ une application analytique réelle qui conserve la métrique pythagoricienne :

$$(d\bar{u})^2 + (d\bar{v})^2 = du^2 + dv^2. \tag{4.4}$$

Nous pouvons supposer que cette application conserve aussi l'orientation, quitte à la composer avec l'application $(u,\, v) \mapsto (v,\, u)$. Introduisons le co-repère ayant pour base : $\theta^1 := du$ et $\theta^2 := dv$. La condition (4.4) est équivalente à : en tout point $(u,\, v)$, il existe t tel que

$$\begin{pmatrix} \bar{\theta}^1 \\ \bar{\theta}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta^1 \\ \theta^2 \end{pmatrix}. \tag{4.5}$$

La structure de groupe des matrices 2×2 ci-dessus est le groupe des rotations $\mathrm{SO}(2,\, \mathbb{R})$. Ici, la variable t dépend en principe des variables $(u,\, v)$, mais il est intéressant de l'envisager comme une nouvelle variable indépendante. Introduisons alors le *co-repère relevé*, constitué des deux 1-formes suivantes :

$$\begin{cases} \omega^1 := (\cos t) \cdot \theta^1 - (\sin t) \cdot \theta^2, \\ \omega^2 := (\sin t) \cdot \theta^1 + (\cos t) \cdot \theta^2, \end{cases} \tag{4.6}$$

qui sont définies sur l'espace à trois dimension équipée des coordonnées $(u,\, v,\, t)$. Les équations de structure associées sont :

$$d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1, \tag{4.7}$$

où $\alpha := dt$ est la forme de Maurer-Cartan sur le groupe $\mathrm{SO}(2,\, \mathbb{R})$. D'après le Théorème 5.24 ci-dessous, l'application $(u,\, v) \mapsto (\bar{u},\, \bar{v})$ induit une unique application $\bar{t} = \bar{t}(u,\, v,\, t)$ qui laisse *invariant* le co-repère relevé, au sens où l'on a : $\bar{\omega}^i = \omega^i$, pour $i = 1,\, 2$.

Formellement, les équations de structure écrites avec les nouvelles variables $(\bar{u},\, \bar{v},\, \bar{t})$ dans le nouveau système de coordonnées sont exactement les mêmes que (4.7), à un changement de notation près. En comparant ces équations à (4.7) et en tenant compte des deux équations $\bar{\omega}^1 = \omega^1$, $\bar{\omega}^2 = \omega^2$, nous déduisons que $\bar{\alpha} = \alpha$.

Aussi, nous pouvons prolonger le problème en adjoignant une 1-forme additionnelle α au co-repère relevé. Les équations de structure prolongées sont de la forme :

$$d\omega^1 = -\alpha \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \alpha \wedge \omega^1, \qquad d\alpha = 0, \tag{4.8}$$

puisque $\alpha = dt$ est exacte. On reconnaît alors les équations de structure pour les trois formes de Maurer-Cartan $d\theta^1$, $d\theta^2$, $d\alpha$ du groupe des déplacements euclidiens $\mathrm{SE}(2,\, \mathbb{R})$, constitué du produit semi-direct du groupe des rotations avec le groupe des translations du plan pythagoricien.

4.9. Équations de structure dans le cas général. Soit S une surface, c'est-à-dire une variété 2-dimensionnelle, que nous supposerons équipée d'une métrique gaussienne

$$ds^2 = E(u,\, v)\, du^2 + 2F(u,\, v)\, dudv + G(u,\, v)\, dv^2, \tag{4.10}$$

à coefficients analytiques réels dans un système de coordonnées locales $(u,\, v)$. Recherchons deux combinaisons linéaires des 1-formes du et dv :

$$\begin{cases} \theta^1 &= A(u,\, v)\, du + B(u,\, v)\, dv, \\ \theta^2 &= C(u,\, v)\, du + D(u,\, v)\, dv, \end{cases} \tag{4.11}$$

où A, B, C et D sont des inconnues, qui diagonalise le ds^2 sous la forme canonique :

$$ds^2 = (\theta^1)^2 + (\theta^2)^2. \tag{4.12}$$

La solution n'est pas unique, puisque toute rotation d'angle arbitraitre d'une matrice 2×2 solution de (4.12) est encore une solution de cette équation. Pour garantir l'unicité, choisissons la matrice inconnue triangulaire supérieure, c'est-à-dire supposons $C = 0$ (nous pourrions aussi choisir la matrice symétrique). Alors il existe une unique solution telle que A est positif :

$$A = \sqrt{E}, \qquad B = \frac{F}{\sqrt{E}}, \qquad D = \sqrt{\frac{EG - F^2}{E}} = \sqrt{\frac{\Delta}{E}}, \tag{4.13}$$

où $\Delta := EG - F^2 = (AD - BC)^2 > 0$ est le discriminant (positif) du ds^2. Avec ce choix de co-repère, le problème d'équivalence se formule de la même manière que dans le cas pythagoricien. Calculons les équations de structure en appliquant l'opérateur de différentiation extérieure d à (4.11) et en réexprimant le résultat obtenu dans la base de 1-formes $(\theta^i)_{1 \leqslant i \leqslant 2}$. Nous obtenons :

$$\begin{cases} d\omega^1 &= -\alpha \wedge \omega^2 + P \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \\ d\omega^2 &= \alpha \wedge \omega^1 + Q \cdot \omega^1 \wedge \omega^2, \end{cases} \tag{4.14}$$

où à nouveau $\alpha := dt$. Ici, les coefficients P et Q s'expriment en fonction des coefficients A, B, C et D sous la forme suivante :

$$P = J \cos t - K \sin t, \qquad Q = J \sin t + K \cos t, \tag{4.15}$$

où P et Q sont des «coefficients de torsion» donnés par :

$$J = \frac{\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}}{\sqrt{\Delta}}, \qquad K = \frac{\frac{\partial D}{\partial u}}{\sqrt{\Delta}}. \tag{4.16}$$

Nous pouvons contracter les équations de structure (4.14) en introduisant la forme π définie par :

$$\pi := \alpha - P \cdot \omega^1 - Q \cdot \omega^2 = \alpha - J \cdot \omega^1 - K \cdot \omega^2, \tag{4.17}$$

ce qui donne :

$$d\omega^1 = -\pi \wedge \omega^2, \qquad d\omega^2 = \pi \wedge \omega^1. \tag{4.18}$$

Dans la théorie d'Élie Cartan, on appelle ce procédé «*absorption de la torsion*». Comme dans le cas euclidien, nous pouvons prolonger le problème en introduisant la variable supplémentaire t. Néanmoins, il y aura une différence importante : l'apparition d'un invariant bien connu, la *courbure de Gauss*.

En effet, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux équations (4.18) :

$$\begin{cases} 0 = dd\omega^1 = -d\pi \wedge \omega^1 + \pi \wedge d\omega^2 = -d\pi \wedge \omega^1, \\ 0 = dd\omega^2 = d\pi \wedge \omega^2. \end{cases} \tag{4.19}$$

Toute 2-forme telle que $d\pi$ se décompose sur la base des trois 2-formes $\omega^1 \wedge \omega^2$, $\omega^1 \wedge \alpha$, $\omega^2 \wedge \alpha$. Les deux équations précédentes impliquent que dans une telle décomposition pour $d\pi$, les deux coefficients devant $\omega^1 \wedge \alpha$ et devant $\omega^2 \wedge \alpha$ doivent s'annuler. Il existe donc une fonction κ des trois variables (t, u, v) telle que

$$d\pi = \kappa \cdot \omega^1 \wedge \omega^2 = \kappa \cdot \theta^1 \wedge \theta^2. \tag{4.20}$$

Évidemment, ce raisonnement est un cas particulier du Lemme dit «*de Cartan*» (Lemme 3.23 ci-dessus et Lemme 6.34 ci-dessous). En apppliquant l'opérateur de différentiation extérieure à cette équation, nous obtenons la relation suivante :

$$0 = dd\pi = \frac{\partial \kappa}{\partial t} \cdot dt \wedge \omega^1 \wedge \omega^2, \tag{4.21}$$

qui montre que le coefficient $\kappa = \kappa(u, v)$ est *indépendant de* t.

Par le même raisonnement qui nous a permis de démontrer l'Assertion 3.32, on vérifie que $\bar{\kappa} = \kappa$ à travers toute isométrie $(u, v) \mapsto (\bar{u}, \bar{v})$ telle que $\bar{\theta}^1 = \theta^1$ et $\bar{\theta}^2 = \theta^2$. Après (5.17) ci-dessous, nous justifierons le fait que pour toute isométrie, on peut supposer satisfaites les correspondances $\bar{\theta}^1 = \theta^1$ et $\bar{\theta}^2 = \theta^2$, par un choix approprié de co-repères.

4.22. Calcul de la courbure de Gauss κ. Calculons maintenant l'expression explicite de κ et vérifions qu'elle coïncide avec la *formula egregia* (1.5). En utilisant (4.17) et le fait que $\omega^1 \wedge \omega^2 = \theta^1 \wedge \theta^2$, nous trouvons :

$$\begin{cases} d\pi = -dJ \wedge \omega^1 - dK \wedge \omega^2 - J \cdot d\omega^1 \\ \quad = \left\{ \dfrac{\partial J}{\partial \omega^2} - \dfrac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \right\} \cdot \omega^1 \wedge \omega^2. \end{cases} \tag{4.23}$$

Nous en déduisons la formule suivante :

$$\begin{cases} \kappa = \dfrac{\partial J}{\partial \omega^2} - \dfrac{\partial K}{\partial \omega^1} - J^2 - K^2 \\ \quad = \dfrac{A \, \frac{\partial J}{\partial v} - B \, \frac{\partial J}{\partial u} - D \, \frac{\partial K}{\partial u}}{AD - BC} - J^2 - K^2. \end{cases} \tag{4.24}$$

En insérant les valeurs (4.13) de A, de B et de D, nous obtenons :
(4.25)

$$\left\{\begin{aligned}\Delta\,\kappa\ =\ & \frac{1}{4E}\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{4E}\,\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-\frac{1}{2E^3}\,\frac{F^4\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\\ & -\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{2E^3}+\frac{1}{2E^2}\,\frac{F^2\left(\frac{\partial E}{\partial u}\right)^2}{EG-F^2}-\frac{1}{2}\,\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}-\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{2E}-\\ & -\frac{F^2}{2E}\,\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{E^2}+\frac{F^3\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial u}}{E^2(EG-F^2)}-\frac{FG\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial u}}{E(EG-F^2)}+\\ & +\frac{F\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial F}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{1}{4}\,\frac{\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{EG-F^2}+\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{4(EG-F^2)}-\\ & -\frac{E\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial v}}{2(EG-F^2)}-\frac{F\,\frac{\partial E}{\partial v}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4(EG-F^2)}-\frac{\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4E}-\frac{F^2\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{4E(EG-F^2)}+\\ & +\frac{G\,\frac{\partial E}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}-\frac{F\,\frac{\partial F}{\partial u}\,\frac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}+\frac{E\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2}{4(EG-F^2)}+\frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.\end{aligned}\right.$$

Après simplification, nous obtenons :
(4.26)

$$\left\{\begin{aligned}\kappa = & \frac{1}{4\,(EG-F^2)^2}\left\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+\right.\\ & +F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+4\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right]\\ & +G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]-\\ & \left.-2\,\left(EG-F^2\right)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]\right\}.\end{aligned}\right.$$

et nous reconnaissons la *formula egregia* (1.5), due à Gauss, qui exprime la courbure d'une surface de manière purement intrinsèque.

THÉORÈME 4.27. *Soit S une surface gaussienne munie d'une métrique ds^2 et soit κ sa courbure de Gauss. Alors le groupe des isométries de S est un groupe de Lie local de dimension au plus 3. La dimension maximale 3 est atteinte si et seulement si la surface possède une courbure de Gauss constante. Dans ce cas, la composante connexe du groupe des isométries a la structure de* $\mathrm{SL}(2,\,\mathbb{R})$ *si* $\kappa<0$ (*géométrie hyperbolique*)*, de* $\mathrm{SE}(2,\,\mathbb{R})$ *si* $\kappa=0$ (*géométrie euclidienne*) *ou de* $\mathrm{SO}(3,\,\mathbb{R})$ *si* $\kappa>0$ (*géométrie sphérique*).

5. Méthode d'équivalence pour les variétés pseudo-riemanniennes

5.1. Problèmes d'équivalence. Rappelons qu'une *isométrie* d'une variété (pseudo)riemannienne M dans une autre variété (pseudo)riemannienne $\overline{M}$ est un difféomorphisme qui conserve les (pseudo)distances infinitésimales ; c'est une notion locale. Autrement dit, si M, localement identifiée à $\mathbb{R}^n$ avec des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, est munie d'un $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j$ et si de même, $\overline{M}$, localement identifiée à $\mathbb{R}^n$ avec des coordonnées $(\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)$, est munie d'un autre $d\bar{s}^2 = \sum_{i,j} \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j$, on demande que la transformation qui à un point x associe un point $\bar{x}$ satisfasse $d\bar{s}^2 = ds^2$ dans l'infiniment petit, condition qu'il nous faut encore analyser. Pour cela, rappelons que nous notons un tel difféomorphisme, $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ *sans introduire de symbole de fonction pour marquer la dépendance entre x et $\bar{x}$*, et que nous utilisons la notation réciproque aussi simple $\bar{x} \mapsto x = x(\bar{x})$, pour désigner la transformation inverse. Une telle transformation inverse induit la transformation

$$dx^i = \sum_j \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\, d\bar{x}^j \tag{5.2}$$

entre les différentielles («dans l'infiniment petit»). Remplaçons ces formules linéaires dans ds^2, réorganisons et égalons à $d\bar{s}^2$:

$$\begin{cases} ds^2 &= \displaystyle\sum_{k,l} g_{kl}(x)\, dx^k\, dx^l \\ &= \displaystyle\sum_{i,j} \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\, g_{kl}(x(\bar{x}))\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j \\ &= d\bar{s}^2 \\ &= \displaystyle\sum_{i,j} \bar{g}_{ij}(\bar{x})\, d\bar{x}^i\, d\bar{x}^j. \end{cases} \tag{5.3}$$

En identifiant les coefficients des deux formes différentielles quadratiques qui apparaissent à la deuxième et à la quatrième ligne, nous déduisons que *la transformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ est une isométrie si et seulement si on a* :

$$\bar{g}_{ij}(\bar{x}) \equiv \sum_{k,l} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}(x(\bar{x}))\, \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}(x(\bar{x}))\, g_{kl}(x(\bar{x})), \tag{5.4}$$

ou, de manière équivalente, en inversant les rôles de x et de $\bar{x}$:

$$g_{ij}(x) \equiv \sum_{k,l} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^i}(\bar{x}(x))\, \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^j}(\bar{x}(x))\, \bar{g}_{kl}(\bar{x}(x)). \tag{5.5}$$

On peut aussi établir l'équivalence entre ces deux systèmes de relations grâce aux identités

$$\delta^i_j = \sum_k \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^j} = \sum_k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}, \tag{5.6}$$

obtenues en dérivant les relations $x^i \equiv x^i(\bar{x}(x))$ par rapport à x^j et $\bar{x}^i \equiv \bar{x}^i(x(\bar{x}))$ par rapport à $\bar{x}^j$.

Ces relations entre les coefficients g_{ij} et $\bar{g}_{ij}$ possèdent une autre signification géométrique. Supposons la variété M, localement identifiée à $\mathbb{R}^n$ avec des coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$, munie d'un $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)\, dx^i\, dx^j$ prédéfini et considérons un changement de coordonnées arbitraire $\bar{x} = \bar{x}(x)$, sans suppposer que l'espace des $\bar{x}$ est muni d'un $d\bar{s}^2$ prédéfini. Les formules (5.4) permettent alors de définir un $d\bar{s}^2$ sur l'espace des $\bar{x}$ par ses coefficients $\bar{g}_{ij}$, et alors, avec ce nouveau $d\bar{s}^2$, la transformation $\bar{x} = \bar{x}(x)$ est une isométrie.

Sur le plan du pur calcul formel (c'est-à-dire eu égard aux transformations induites (5.4) et (5.5)), on a identité entre les deux points de vue suivants :

(i) isométrie $\bar{x} = \bar{x}(x)$ entre deux variétés riemanniennes prédéfinies ;
(ii) second $d\bar{s}^2$ induit par un premier ds^2 prédéfini, via une transformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$.

Néanmoins, ces deux points de vue s'affirment dans une différence majeure quant aux questions soulevées naturellement par l'étude locale des variétés riemanniennes. D'après le *Theorema Egregium* de Gauss, la courbure d'une surface est conservée par toute application isométrique : c'est bien à cause de cet invariant que toutes les surfaces ne sont pas représentables «sans déchirure ni duplicature» les unes sur les autres. C'est pourquoi la question «doit se poser» de déterminer quand deux surfaces (ou plus généralement, deux variétés riemanniennes) sont localement isométriques.

PROBLÈME D'ÉQUIVALENCE 5.7. *Trouver un algorithme universel pour déterminer si deux variétés riemanniennes* (M, ds^2) *et* $(\overline{M}, d\bar{s}^2)$ *sont localement isométriques.*

C'est l'une des premières questions que l'on est en devoir de résoudre. Mais en général, deux variétés riemanniennes prises au hasard ne sont jamais localement isométriques, si bien que le problème précédent a quelque chose d'artificiel. Le problème de classification des variétés riemanniennes est plus profond et plus important.

PROBLÈME DE CLASSIFICATION 5.8. *Classifier les variétés riemanniennes à isométrie locale près. Trouver un algorithme universel qui produit* *une forme normale pour le ds^2 d'un représentant distingué de chaque classe d'équivalence.*

Ces deux problèmes, qui ne se limitent pas aux variétés riemanniennes, sont en vérité intimement liés. En théorie, on peut déduire de la réponse complète au second problème la réponse au premier : étant donné deux variétés riemanniennes $(M, \, ds^2)$ et $(\overline{M}, \, d\bar{s}^2)$, il suffit de déterminer leurs classes d'équivalences respectives, et de vérifier si elles coïncident ou si elle diffèrent. En pratique, une telle stratégie nécessite de possèder un algorithme pour trouver la classe d'équivalence d'une sous-variété quelconque.

Les travaux de Sophus Lie ont mis en lumière l'existence du *groupe continu de transformations* de tout objet géométrico-différentiel, et en particulier du groupe des isométries locales d'une variété riemannienne. Nous allons voir que les deux problèmes : équivalence et classification, recèlent l'objet «groupe des isométries locales de $(M, \, ds^2)$» et qu'il est impossible de les résoudre sans «voir» cet objet.

5.9. Diagonalisation de la métrique pseudo-riemannienne et variables de rotation. Ainsi, c'est le problème de classification des variétés pseudo-riemanniennes que nous allons étudier. Comme dans la Section 2, diagonalisons le ds^2 de M sous la forme :

$$ds^2 = \sum_i \varepsilon_i \, (\theta^i)^2. \tag{5.10}$$

Ici, les formes différentielles θ^i ne sont pas exactes en général, à moins que la courbure ne soit nulle (*cf.* le Théorème 3.59 ci-dessus). De même, diagonalisons le $d\bar{s}^2$ de $\overline{M}$ sous une forme analogue :

$$d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i \, (\bar{\theta}^i)^2. \tag{5.11}$$

Supposons que M et $\overline{M}$ sont dans une même classe d'équivalence, c'est-à-dire qu'il existe une isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre $(M, \, ds^2)$ et $(\overline{M}, \, d\bar{s}^2)$. Soient e_i les champs de vecteurs duaux des formes θ^i et de même, soient $\bar{e}_i$ les champs duaux des formes $\bar{\theta}^i$. Sur la figure suivante, nous représentons le repère orthonormé des (e_i) en x et le repère orthonormé des $(\bar{e}_i)$ en l'image $\bar{x}$ du point x par la transformation isométrique.

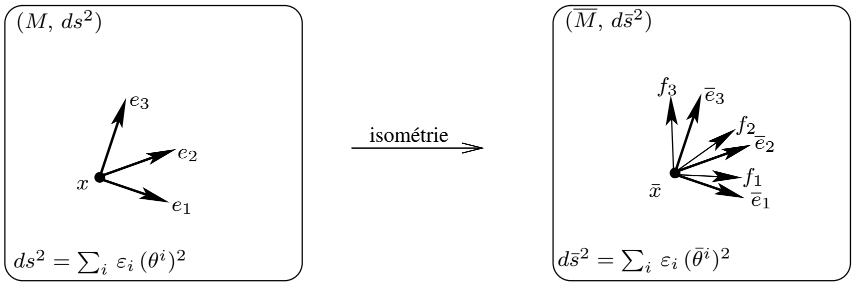


FIGURE 2 : ÉQUIVALENCE DE DEUX SYSTÈMES DE REPÈRES

Il n'y a aucune raison que les images $\bar{f}_i$ des vecteurs e_i par l'isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ coïncident avec les vecteurs $\bar{e}_i$. Nous pouvons cependant décomposer les vecteurs $\bar{f}_i$ selon la base des $\bar{e}_j$: il existe une matrice $\overline{U} = \overline{U}(\bar{x}) = (\bar{u}^i_j(\bar{x}))$ de fonctions de $\bar{x}$, telle que $\bar{f}_i(\bar{x}) = \sum_j \bar{u}^j_i(\bar{x})\, \bar{e}_j(\bar{x})$ pour tout $\bar{x}$ dans $\overline{M}$, ou, en abrégé :

$$\bar{f}_i = \sum_j \bar{u}^j_i \cdot \bar{e}_j. \tag{5.12}$$

Mais cette matrice n'est pas quelconque. En effet, puisque la transformation $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ est isométrique, l'image $(\bar{f}_1,\, \dots,\, \bar{f}_n)$ du repère $(e_1,\, \dots,\, e_n)$ est encore orthonormée, c'est-à-dire que l'on a :

$$\left\langle \bar{f}_i,\, \bar{f}_j \right\rangle_{d\bar{s}^2} = \langle e_i,\, e_j \rangle_{ds^2} = \delta^j_i\, \varepsilon_i. \tag{5.13}$$

Rappelons que par construction les vecteurs $\bar{e}_i$ satisfont les mêmes relations d'orthonormalité :

$$\langle \bar{e}_i,\, \bar{e}_j \rangle_{d\bar{s}^2} = \delta^j_i\, \varepsilon_i. \tag{5.14}$$

En remplaçant $\bar{f}_i$ et $\bar{f}_j$ dans (5.13) et en tenant compte de leurs expressions données par (5.12), nous obtenons des identités indicielles sur les coefficients $\bar{u}^i_j(\bar{x})$, dont l'interprétation matricielle est l'identité :

$$E = {}^T\overline{U} \cdot E \cdot \overline{U}. \tag{5.15}$$

Rappelons la définition $E := (\delta^i_j\, \varepsilon_i)$. Dans le cas riemannien, tous les ε_i sont égaux à 1 et la relation (5.15) se réduit à $I_{n\times n} = {}^T\overline{U} \cdot \overline{U}$, *i.e.* $\overline{U}$ est une matrice orthogonale.

Ainsi, le repère $(\bar{f}_1,\, \dots,\, \bar{f}_n)$, transformé du repère $(e_1,\, \dots,\, e_n)$ par l'isométrie, se déduit du repère prédéfini $(\bar{e}_1,\, \dots,\, \bar{e}_n)$ par une transformation pseudo-orthogonale qui dépend du point $\bar{x}$.

De manière duale (ou par un raisonnement analogue), on vérifie qu'il existe une matrice $U = U(x) = (u^i_j(x))$ dépendant analytiquement du point

x et satisfaisant l'identité

$$E = {}^T U \cdot E \cdot U, \tag{5.16}$$

telle que

$$\bar{\theta}^i = \sum_j u^i_j \cdot \theta^j. \tag{5.17}$$

Pour que cette égalité ait un sens, on doit remplacer $\bar{x}$ par son expression en fonction de x dans le membre de gauche $\bar{\theta}^i = \bar{\theta}^i(\bar{x},\, d\bar{x})$.

Supposons connue une isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre variétés pseudo-riemanniennes M et $\overline{M}$. Si l'on change le corepère orthonormé sur M en prenant les formes $\theta'^i := \sum_j u^i_j \cdot \theta^j$ au lieu des formes θ^i, la dernière relation s'écrit $\bar{\theta}^i = \theta'^i$. *Étant donné une isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ entre variétés pseudo-riemanniennes M et $\overline{M}$ chacune équipées d'une pseudo-métrique diagonalisé $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i (\theta^i)^2$ et $d\bar{s}^2 = \sum_i \varepsilon_i (\bar{\theta}^i)^2$, on peut supposer, après un changement éventuel de co-repère sur M, que l'on a $\bar{\theta}^i = \theta^i$.* Dans ces conditions, l'hypothèse de l'Assertion (3.32) est justifiée, d'où l'énoncé suivant : *les composantes de courbure se correspondent à travers toute isométrie qui préserve les co-repères : $\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$.*

Reprenons maintenant l'analyse à partir de zéro. Supposons données deux variétés pseudo-riemanniennes $(M,\, ds^2)$ et $(\overline{M},\, d\bar{s}^2)$, dont on ignore si elles sont isométriques ou non. Supposons leurs deux pseudo-métriques diagonalisées comme en (5.10) et (5.11). Cette diagonalisation apporte une simplification formelle, mais lorsque l'on s'interroge sur l'existence d'une isométrie pour résoudre le problème d'équivalence, la diagonalisation simultanée introduit de nouvelles inconnues : les fonctions $u^i_j(x)$, qui forment une matrice pseudo-orthogonale. Néanmoins, l'apparition de ces inconnues est nécessaire, parce qu'*il n'existe pas de choix canonique pour les deux co-repères orthonormés mobiles (θ^i) et $(\bar{\theta}^i)$*. En effet, pour toute matrice $U(x)$ satisfaisant (5.16) et pour toute matrice $\overline{U}(\bar{x})$ satisfaisant (5.15), il est facile de voir que les repères $\theta^{i'} := \sum_j u^i_j \cdot \theta^j$ et $\bar{\theta}^{i'} := \sum_j \bar{u}^i_j \cdot \bar{\theta}^j$ sont encore orthonormés.

Par conséquent `[explication heuristique à améliorer]`, il est suggéré d'introduire les composantes de la matrice $u^i_j(x)$ comme de nouvelles variables *totalement indépendantes des variables x*; on réserve ainsi la détermination exacte des fonctions $u^i_j(x)$ à une analyse ultérieure. C'est la première étape décisive de l'algorithme d'équivalence.

Introduisons alors le groupe $\mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ des matrices $U = (u^i_j)$ qui satisfont la relation de pseudorthogonalité

$$E = {}^T U \cdot E \cdot U. \tag{5.18}$$

C'est le groupe qui témoigne, en tout point x, de l'ambiguïté, de l'indétermination et de la non-unicité du repère orthonormé. On démontre que ce groupe est de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$, qu'il possède quatre composantes connexes si $\mathsf{p} \neq 0$, n et sinon deux. En admettant une légère inexactitude, qui n'aura aucune incidence sur la rigueur de nos raisonnements, nous considèrerons qu'un système coordonnées sur $\mathscr{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$ est constitué de toutes les variables u_j^i, bien qu'il y ait $n^2 - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$ relations indépendantes entre elles, extraites de (5.18). Écrivons les relations que doivent satisfaire ces variables. Elle seront fréquemment utilisées dans la suite pour simplifier certaines expressions algébriques. En développant l'identité $E = {}^TU \cdot E \cdot U$ avec des indices, on obtient :

$$\delta_j^i\,\varepsilon_i = \sum_k u_k^i\,\varepsilon_k\,u_j^k. \tag{5.19}$$

Si on écrit cette identité sous la forme équivalente $E \cdot U = {}^T\widetilde{U} \cdot E$, et si on la développe aussi avec des indices, on obtient les relations :

$$\varepsilon_i\,u_j^i = \widetilde{u}_i^j\,\varepsilon_j. \tag{5.20}$$

5.21. Relèvement des isométries. La deuxième étape décisive de l'algorithme d'équivalence consiste à introduire l'espace fibré $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$, ainsi que les nouvelles formes différentielles

$$\omega^i := \sum_j u_j^i \cdot \theta^j, \tag{5.22}$$

obtenues par «rotation» des formes θ^i. De même, on introduit les formes différentielles

$$\overline{\omega}^i := \sum_j \bar{u}_j^i \cdot \bar{\theta}^j, \tag{5.23}$$

sur $\overline{M} \times \overline{\mathscr{O}}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$. On notera π la projection canonique $(x^i,\,u_j^i) \mapsto (x^i)$ sur M et de même pour $\overline{\pi} : \overline{M} \times \overline{\mathscr{O}}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}} \to \overline{M}$.

THÉORÈME 5.24. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes* :

(i) *il existe une isométrie $\bar{x} = \bar{x}(x)$ de M sur $\overline{M}$;*

(ii) *il existe une application de $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$ dans $\overline{M} \times \overline{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$ de la forme spécifique* :

$$\begin{cases} \bar{x}^i = \bar{x}^i\,(x^m) \\ \bar{u}_l^k = \bar{u}_l^k\left(x^m,\,u_q^p\right), \end{cases} \tag{5.25}$$

où les $\bar{x}^i$ ne dépendent pas des u_q^p, telle que l'on a :

$$\overline{\omega}^i = \omega^i, \tag{5.26}$$

pour $i = 1\ \ldots, n$*, après remplacement de* $\bar{x}$ *et de* $\bar{u}$ *dans les membres de gauche* $\overline{\omega}^i = \overline{\omega}^i\big(\bar{x}^j,\, \bar{u}^l_k,\, d\bar{x}^m\big)$.

Dans ce cas, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}} \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & \overline{M} \times \overline{\mathscr{O}}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}} \arrow[d, "\bar{\pi}"] \\ M \arrow[r] & \overline{M} \end{tikzcd} ,$$

Autrement dit, grâce à l'introduction de variables auxiliaires, on a réussi à corriger l'imperfection d'après laquelle les formes $\overline{\theta}^i$ n'étaient pas égales aux formes θ^i, mais se déduisaient des θ^i par une rotation telle que (5.17) ; on a maintenant $\bar{\omega}^i = \omega^i$, sans rotation, mais avec des variables supplémentaires u^i_j.

DÉMONSTRATION. La démonstration consiste à analyser la relation désirée $\overline{\omega}^i = \omega^i$ et à observer que les $\bar{u}^i_j$ sont déterminés de manière unique en fonction de $(x^m,\, u^p_q)$. Pour cela, développons cette relation :

$$\bar{\omega}^i = \sum_j \bar{u}^i_j \cdot \bar{\theta}^j = \sum_j u^i_j \cdot \theta^j = \omega^i. \tag{5.27}$$

Remplaçons les formes $\bar{\theta}^j$ et θ^j par leurs expressions en fonction des formes $d\bar{x}^k$ et dx^k :

$$\sum_{j,\,k} \bar{u}^i_j\, \bar{h}^j_k \cdot d\bar{x}^k = \sum_{j,\,k} u^i_j\, h^j_k \cdot dx^k. \tag{5.28}$$

Remplaçons $d\bar{x}^k$ par son expression $d\bar{x}^k = \sum_l \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l}\, dx^l$ inverse de (5.2), permutons certains indices et réorganisons les sommes :

$$\sum_{j,\,k,\,l} \bar{u}^i_j\, \bar{h}^j_k\, \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} \cdot dx^l = \sum_{j,\,l} u^i_j\, h^j_l \cdot dx^l. \tag{5.29}$$

Identifions les coefficients de dx^l, ce qui nous donne les identités :

$$\sum_{j,\,k} \bar{u}^i_j\, \bar{h}^j_k\, \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^l} = \sum_j u^i_j\, h^j_l, \tag{5.30}$$

pour tout $l = 1,\, \ldots,\, n$. Notons $\mathrm{Jac}\,\big(\frac{\bar{x}}{x}\big) := \big(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\big)$ la matrice jacobienne du changement de coordonnées et interprétons matriciellement l'identité précédente :

$$\overline{U} \cdot \overline{H} \cdot \mathrm{Jac}\left(\frac{\bar{x}}{x}\right) = U \cdot H. \tag{5.31}$$

Rappelons que d'après (5.6), la matrice inverse de $\mathrm{Jac}\,\big(\frac{\bar{x}}{x}\big)$ est tout simplement la matrice jacobienne de la transformation inverse, *i.e.* $\mathrm{Jac}\,\big(\frac{x}{\bar{x}}\big) :=$

$\left(\frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j}\right)$. Grâce à cette observation, nous pouvons réécrire l'identité matricielle précédente sous la forme :

$$\overline{U} = U \cdot H \cdot \mathrm{Jac}\left(\frac{x}{\bar{x}}\right) \cdot \widetilde{\overline{H}}, \tag{5.32}$$

où l'on rappelle que la notation $\widetilde{(\cdot)}$ est utilisée pour désigner une matrice inverse. En développant cette relation, nous voyons que les $\bar{u}^i_j$ sont effectivement déterminés de manière unique en fonction de $(x^m,\, u^p_q)$ par les formules :

$$\bar{u}^i_j := \bar{u}^i_j(x,\, u) := \sum_{l_1,\, l_2,\, l_3,\, l_4} u^i_{l_1}(x)\, h^{l_1}_{l_2}(x)\, \frac{\partial x^{l_2}}{\partial \bar{x}^{l_3}}(\bar{x}(x))\, \widetilde{\bar{h}}^{l_3}_j(\bar{x}(x)). \tag{5.33}$$

Grâce à ces relations, la vérification de l'équivalence entre **(i)** et **(ii)** n'est plus qu'une affaire de logique élémentaire, laissée au lecteur.

Observons enfin que l'hypothèse d'après laquelle $\bar{x}$ ne dépend pas de u dans (5.25) est en fait une conséquence des identités $\overline{\omega}^i = \omega^i$: en effet, puisque dans les ω^i, n'apparaissent que des différentielles dx^k (et aucune différentielle du^m_l), et puisqu'il en est de même pour les $\overline{\omega}^i$, lorsque l'on remplace les différentielles $d\bar{x}^k$ présentes dans $\overline{\omega}^i$ par leur expression en fonction des dx^k et des du^m_l, il ne doit apparaître aucune différentielle du^m_l : ceci démontre que $\bar{x}$ ne dépend pas de u^m_l. □

Ainsi, le problème d'équivalence d'origine $M \to \overline{M}$ se relève-t-il en un problème d'équivalence $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}} \longrightarrow \overline{M} \times \overline{\mathscr{O}}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ entre variétés de dimension supérieure.

Dans la suite immédiate de ce mémoire, nous travaillerons avec une seule variété produit $M \times \mathscr{O}_{p,\, n-p}$, en réservant à des analyses ultérieures les conséquences qui découlent de l'existence d'une équivalence relevée. Nous allons calculer explicitement les équations de structure pour les formes ω^i en tenant compte des variables de rotation. Dans son mémoire original de 1922, Élie Cartan n'accomplit pas ces calculs explicites.

6. Équations de structure avec variables de rotation

On appelera *co-repère relevé* la famille des n formes différentielles ω^i sur $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$. Puisque la dimension de $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, les formes ω^i ne forment *pas* un co-repère ; il manque $\frac{n(n-1)}{2}$ indépendantes ω^i_j que nous introduirons ultérieurement.

6.1. Différentiation extérieure des formes ω^i. Rappelons que $\widetilde{U} = (\widetilde{u}_j^i)$ désigne la matrice inverse de U. Ses éléments satisfont les relations

$$\delta_j^i = \sum_k u_k^i \cdot \widetilde{u}_j^k = \sum_k \widetilde{u}_k^i \cdot u_j^k. \tag{6.2}$$

Les formes différentielles θ^i se déduisent des formes ω^i par les formules inverses de (5.22) :

$$\theta^i = \sum_j \widetilde{u}_j^i \cdot \omega^j. \tag{6.3}$$

Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à $\omega^i = \sum_j u_j^i \cdot \theta^j$, réexprimons les formes θ^j en fonction des formes ω^k grâce aux formules inverses (6.3) ci-dessus, utilisons les formules (3.7) pour $d\theta^j$, réécrivons à la troisième ligne le premier membre de la deuxième ligne sous une forme équivalente, utilisons l'antisymétrie $K_{kl}^j = -K_{lk}^j$ et réexprimons enfin θ^k et θ^l en fonction des ω^m, ce qui donne :

(6.4)
$$\left\{\begin{aligned} d\omega^i &= \sum_j du_j^i \wedge \theta^j + \sum_j u_j^i \cdot d\theta^j \\ &= \sum_j \sum_k du_j^i \, \widetilde{u}_k^j \wedge \omega^k + \sum_j \sum_{k<l} u_j^i \, K_{kl}^j \cdot \theta^k \wedge \theta^l \\ &= \varepsilon_i \sum_j \left(\omega^j \wedge \left(- \sum_k \varepsilon_i \, du_k^i \, \widetilde{u}_j^k \right) \right) + \sum_{j,\,k,\,l,\,k_1,\,l_1} u_j^i \, \widetilde{u}_{k_1}^k \, \widetilde{u}_{l_1}^l \, \frac{K_{kl}^j}{2} \cdot \omega^{k_1} \wedge \omega^{l_1}. \end{aligned}\right.$$

Donnons un nom au membre contenu dans la double parenthèse, *i.e.* posons :

$$\rho_j^i := \sum_k \varepsilon_i \, du_k^i \, \widetilde{u}_j^k. \tag{6.5}$$

Réécrivons le deuxième terme de la troisième ligne en effectuant le changement d'indices

$$(j,\, k,\, l,\, k_1,\, l_1) \longmapsto (i_1,\, j_1,\, k_1,\, j,\, k), \tag{6.6}$$

après y avoir remplacé la variable u_j^i par $\varepsilon_i \, \varepsilon_j \, \widetilde{u}_i^j$, grâce à (5.20), et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs, ce qui donne, en poursuivant (6.4) :

(6.7)
$$\left\{\begin{aligned} d\omega^i &= \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (-\rho_j^i) + \sum_{j<k} \omega^j \wedge \omega^k \cdot \left(\varepsilon_i \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1} \widetilde{u}_i^{i_1} \, \widetilde{u}_j^{j_1} \, \widetilde{u}_k^{k_1} \left[\varepsilon_{i_1} \, K_{j_1 k_1}^{i_1} \right] \right) \\ &=: \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge (-\rho_j^i) + \sum_{j<k} T_{jk}^i \cdot \omega^j \wedge \omega^k, \end{aligned}\right.$$

où nous avons posé :

$$T^i_{jk} := \varepsilon_i \sum_{i_1,\, j_1,\, k_1} \widetilde{u}^{i_1}_i\, \widetilde{u}^{j_1}_j\, \widetilde{u}^{k_1}_k\, \left[\varepsilon_{i_1}\, K^{i_1}_{j_1k_1}\right]. \tag{6.8}$$

Grâce à la relation $\varepsilon_i\, \varepsilon_{i_1}\, \widetilde{u}^{i_1}_i = u^i_{i_1}$, on peut même réexprimer T^i_{jk} sous la forme plus homogène

$$T^i_{jk} := \sum_{i_1,\, j_1,\, k_1} u^i_{i_1}\, \widetilde{u}^{j_1}_j\, \widetilde{u}^{k_1}_k\, \left[K^{j_1}_{k_1l_1}\right], \tag{6.9}$$

qui met en évidence le fait que *ces coefficients* T^i_{jk} *se déduisent des coefficients* K^i_{jk} *par des formules de triple rotation tensorielle.*

6.10. Introduction des composantes de rotation ω^i_j (connexion associée). Vérifions maintenant que les ρ^i_j satisfont la relation d'antisymétrie :

$$\rho^i_j = -\rho^j_i. \tag{6.11}$$

En effet, notons R la matrice des (ρ^i_j). D'après sa définition (6.5), elle s'identifie à un produit de matrices introduites auparavant :

$$R := E \cdot dU \cdot \widetilde{U}. \tag{6.12}$$

En différentiant l'identité $E = {}^T U \cdot E \cdot U$, nous obtenons l'identité $0 = d({}^T U) \cdot E \cdot U + {}^T U \cdot E \cdot dU$, identité que nous réécrivons sous la forme équivalente :

$$\begin{cases} 0 & = {}^T\widetilde{U} \cdot d({}^T U) \cdot E + E \cdot dU \cdot \widetilde{U} \\ & = {}^T R + R, \end{cases} \tag{6.13}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Voici l'analogue de la relation $d\theta^i = \varepsilon_i \sum_j \theta^j \wedge \theta^i_j$ établie au Lemme 2.32.

LEMME 6.14. *Il existe une unique famille de formes différentielles* ω^i_j*,* $i,\, j, = 1,\, \dots,\, n$*, de degré* 1 *et satisfaisant les relations d'antisymétrie* $\omega^i_j = -\omega^j_i$ *telles que les équations de structure* (6.7) *peuvent se réécrire sous la forme :*

$$d\omega^i = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega^i_j. \tag{6.15}$$

DÉMONSTRATION. Décomposons les formes ω^i_j recherchées selon la base des ω^k

$$\omega^i_j = -\rho^i_j + \sum_k \Lambda^i_{jk} \cdot \omega^k, \tag{6.16}$$

avec des fonctions inconnues $\Lambda^i_{jk} = \Lambda^i_{jk}(x^l,\, u^p_m)$ qui satisfont les relations d'antisymétrie $\Lambda^i_{jk} = -\Lambda^j_{ik}$, pour s'assurer que $\omega^i_j = -\omega^j_i$. Prenons (6.7) pour point de départ, remplaçons $d\omega^i$ par la valeur désirée $\varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega^i_j$ et remplaçons $(\omega^i_j + \rho^i_j)$ grâce à (6.16) :

$$(6.17)\qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{j<k} T^i_{jk}\cdot\omega^j\wedge\omega^k & = d\omega^i - \varepsilon_i \displaystyle\sum_j \omega^j \wedge (-\rho^i_j) \\ & = \varepsilon_i \displaystyle\sum_j \omega^j \wedge \left(\omega^i_j + \rho^i_j\right) \\ & = \displaystyle\sum_{j,\,k} \varepsilon_i\,\Lambda^i_{jk}\cdot\omega^j\wedge\omega^k \\ & = \displaystyle\sum_{j<k} \left(\varepsilon_i\,\Lambda^i_{jk} - \varepsilon_i\,\Lambda^i_{kj}\right)\cdot\omega^j\wedge\omega^k, \end{cases}$$

Par identification des coefficients de la famille de 2-formes indépendantes $(\theta^j\wedge\theta^k)_{1\leqslant j<k\leqslant n}$, nous extrayons le système linéaire que doivent satisfaire les inconnues Λ^i_{jk} (après multiplication par la constante ε_i qui satisfait $\varepsilon_i^2 = 1$) :

$$(6.18)\qquad \varepsilon_i\,T^i_{jk} = \Lambda^i_{jk} - \Lambda^i_{kj}.$$

Nous obtenons exactement les mêmes équations que (3.18)*, à un changement de notations près*. Par conséquent, il est inutile de répéter le raisonnement qui nous a conduit à la solution (3.20), et il nous suffit de la transposer ici :

$$(6.19)\qquad \Lambda^i_{jk} := \frac{1}{2}\left(\varepsilon_i\,T^i_{jk} + \varepsilon_k\,T^k_{ji} + \varepsilon_j\,T^j_{ki}\right).$$

On vérifie que cette solution, unique par construction, satisfait la relation d'antisymétrie indicielle $\Lambda^i_{jk} = -\Lambda^j_{ik}$, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Plus encore, développons chacune des trois expressions $\varepsilon_i\,T^i_{jk}$, $\varepsilon_k\,T^k_{ji}$ et $\varepsilon_j\,T^j_{ki}$ qui apparaissent ci-dessus en utilisant les formules (6.9), effectuons des permutations sur les indices de sommation et reconnaissons le coefficient de Christoffel (3.20) :

$$(6.20)\qquad \begin{cases} \Lambda^i_{jk} & = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i_1,\,j_1,\,k_1} \Big(\widetilde{u}^{i_1}_i\,\widetilde{u}^{j_1}_j\,\widetilde{u}^{k_1}_k\left[\varepsilon_{i_1}\,K^{i_1}_{j_1k_1}\right] + \widetilde{u}^{i_1}_k\,\widetilde{u}^{j_1}_j\,\widetilde{u}^{k_1}_i\left[\varepsilon_{i_1}\,K^{i_1}_{j_1k_1}\right] + \\ & \qquad\qquad + \widetilde{u}^{i_1}_j\,\widetilde{u}^{j_1}_k\,\widetilde{u}^{k_1}_i\left[\varepsilon_{i_1}\,K^{i_1}_{j_1k_1}\right]\Big) \\ & = \displaystyle\sum_{i_1,\,j_1,\,k_1} \widetilde{u}^{i_1}_i\,\widetilde{u}^{j_1}_j\,\widetilde{u}^{k_1}_k \left(\frac{\varepsilon_{i_1}\,K^{i_1}_{j_1k_1} + \varepsilon_{k_1}\,K^{k_1}_{j_1i_1} + \varepsilon_{j_1}\,K^{j_1}_{k_1i_1}}{2}\right) \end{cases}$$

ce qui nous donne une formule très importante pour la suite, que nous écrivons sous deux formes équivalentes, en appliquant la relation (5.20) :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\Lambda_{jk}^{i} &= \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1} \widetilde{u}_i^{i_1}\,\widetilde{u}_j^{j_1}\,\widetilde{u}_k^{k_1}\,\Gamma_{j_1k_1}^{i_1} \\
&= \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1} \varepsilon_i\,\varepsilon_{i_1}\,u_{i_1}^{i}\,\widetilde{u}_j^{j_1}\,\widetilde{u}_k^{k_1}\,\Gamma_{j_1k_1}^{i_1}
\end{aligned}
\right.
\tag{6.21}
$$

Ces deux formules équivalentes mettent en évidence le fait que *les coefficients* Λ_{jk}^i *se déduisent des coefficients* Γ_{jk}^i *par des formules de rotation tensorielle*.

Pour terminer ce paragraphe, mentionnons une observation évidente qui sera utile par la suite.

LEMME 6.22. *Les quatre collections suivantes de* 1*-formes différentielles, toutes de cardinal* $\frac{n(n+1)}{2}$*, forment une base sur* $M \times \mathscr{O}_{p,\,n-p}$ *dans un voisinage de* $(0,\, I_{n\times n})$:

(a) $(dx^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(du_j^i)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$;
(b) $(\omega^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(du_j^i)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$;
(c) $(\omega^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(\rho_j^i)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$;
(d) $(\omega^i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ *et* $(\omega_j^i)_{1\leqslant i<j\leqslant n}$.

6.23 Formule explicite pour les dérivées covariantes. Pour préparer le calcul explicite des coefficients de courbure dans le corepère relevé, réexprimons la différentielle

$$
dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial x^i}\cdot dx^i + \sum_{i,\,j} \frac{\partial F}{\partial u_j^i}\cdot du_j^i
\tag{6.24}
$$

d'une fonction $F = F(x,U) = F(x^i,\, u_j^i)$ quelconque sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ dans la base de 1-formes différentielles constitué des θ^i et des θ_j^i, en appliquant directement la formule (3.40), et la formule $du_j^i = \varepsilon_i\, \sum_k\, u_j^k \cdot \rho_k^i$ tirée de (6.5), ce qui donne :

$$
dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \theta^i}\cdot \theta^i + \sum_{i,\,j,\,k} \varepsilon_i\,\frac{\partial F}{\partial u_j^i}\,u_j^k\cdot\rho_k^i.
\tag{6.25}
$$

Dans cette formule, réexprimons $\theta^i = \sum_j \widetilde{u}_j^i \cdot \omega^j$, remplaçons $\rho_k^i = -\omega_k^i + \sum_l \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^l$ grâce à (6.16) et réorganisons l'expression obtenue, ce qui donne :

$$
(6.26)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
dF &= \sum_{i,\,j} \widetilde{u}_j^i \, \frac{\partial F}{\partial \theta^i} \cdot \omega^j - \sum_{i,\,j,\,k} \varepsilon_i \, \frac{\partial F}{\partial u_j^i} \, u_j^k \cdot \omega_k^i + \\
&\quad + \sum_{i,\,j,\,k,\,l} \varepsilon_i \, \frac{\partial F}{\partial u_j^i} \, u_j^k \, \Lambda_{kl}^i \cdot \omega^l \\
&= \sum_i \omega^i \cdot \left(\sum_j \widetilde{u}_i^j \, \frac{\partial F}{\partial \theta^j} + \sum_{j,\,k,\,l} \varepsilon_l \, \frac{\partial F}{\partial u_j^l} \, u_j^k \, \Lambda_{ki}^l \right) + \\
&\quad + \sum_{i<j} \omega_j^i \cdot \left(-\varepsilon_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^i} \, u_k^j + \varepsilon_j \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^j} \, u_k^i \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Grâce à ce dernier calcul, nous déduisons l'énoncé suivant.

LEMME 6.27. *La différentielle d'une fonction $F = F(x^i,\, u_j^i)$ s'exprime sous la forme*

$$
(6.28)\qquad dF = \sum_i \frac{\partial F}{\partial \omega^i} \cdot \omega^i + \sum_{i<j} \frac{\partial F}{\partial \omega_j^i} \cdot \omega_j^i,
$$

avec l'expression explicite suivante pour les dérivées covariantes :

$$
(6.29)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \omega^i} &= \sum_j \widetilde{u}_i^j \, \frac{\partial F}{\partial \theta^j} + \sum_{j,\,k,\,l} \varepsilon_l \, \frac{\partial F}{\partial u_j^l} \, u_j^k \, \Lambda_{ki}^l, \\
\frac{\partial F}{\partial \omega_j^i} &= -\varepsilon_i \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^i} \, u_k^j + \varepsilon_j \sum_k \frac{\partial F}{\partial u_k^j} \, u_k^i.
\end{aligned}
\right.
$$

6.30. Introduction des coefficients de courbure S_{jkl}^i. Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'équation $d\omega^i = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega_j^i$, remplaçons $d\omega^j = \varepsilon_j \sum_k \omega^k \wedge \omega_j^k$, changeons les indices et factorisons :

$$
(6.31)\qquad
\left\{
\begin{aligned}
0 = dd\omega^j &= \varepsilon_j \sum_j \big(d\omega^j \wedge \omega_j^i - \omega^j \wedge d\omega_j^i \big) \\
&= \varepsilon_i \sum_j \sum_k \varepsilon_i \cdot \omega^k \wedge \omega_k^j \wedge \omega_j^i - \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge d\omega_j^i \\
&= \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \left(\sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i - d\omega_j^i \right).
\end{aligned}
\right.
$$

Après division par ε_i, nous obtenons une équation sur des formes différentielles qui est analogue à (3.22), à un changement de notations près.

LEMME 6.32. *Il existe des coefficients* S^i_{jkl} (*dont l'expression explicite est encore inconnue*), *tels que*

$$d\omega^i_j - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega^k_j \wedge \omega^i_k = \sum_{k<l} S^i_{jkl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l. \tag{6.33}$$

DÉMONSTRATION. Pour établir ce lemme à partir de l'identité (6.31), il faut généraliser le Lemme 3.23 à une collection de 2-formes dont le nombre est moindre que la dimension de l'espace ambient, qui est ici égale à $\frac{n(n+1)}{2}$. Formulons donc l'énoncé suivant.

LEMME 6.34. *Soit* $n \in \mathbb{N}$ *avec* $n \geqslant 1$, *soit* $\nu \in \mathbb{N}$, *soient* $\xi^1, \ldots, \xi^n$ *des* 1*-formes différentielles à coefficients analytiques localement définies au voisinage de l'origine sur* $\mathbb{R}^{n+\nu}$ *qui sont linéairement indépendantes à l'origine et soient* $\Xi^1, \ldots, \Xi^n$ *des* 2*-formes différentielles à coefficients analytiques localement définies au voisinage de l'origine. Soient* $\zeta^1, \ldots, \zeta^\nu$ *des* 1*-formes différentielles qui complètent la collection* $\xi^1, \ldots, \xi^n$ *en une base sur* $\mathbb{R}^{n+\nu}$ *au voisinage de l'origine, de telle sorte que l'on peut toujours décomposer chacune des* 2*-formes* Ξ^j *de la manière suivante* :

(6.35)

$$\Xi^j = \sum_{1\leqslant k_1<k_2\leqslant n} A^j_{k_1k_2} \cdot \xi^{k_1} \wedge \xi^{k_2} + \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{\nu} B^j_{kl} \cdot \xi^k \wedge \zeta^l + \sum_{1\leqslant l_1<l_2\leqslant \nu} C^j_{l_1l_2} \cdot \zeta^{l_1} \wedge \zeta^{l_2},$$

où l'on prolonge bien sûr la définition des $A^j_{k_1k_2}$ *pour* $k_1 \geqslant k_2$ *en posant* $A^j_{k_1k_2} := -A^j_{k_2k_1}$ *et de même pour* $C^j_{l_1l_2}$ *lorsque* $l_1 \geqslant l_2$. *Alors les* 2*-formes* $\Xi^1, \ldots, \Xi^n$ *satisfont l'équation*

$$0 = \sum_j \xi^j \wedge \Xi^j, \tag{6.36}$$

si et seulement si *tous les coefficients* B^j_{kl} *et* $C^j_{l_1l_2}$ *s'annulent et si les coefficients* $A^j_{k_1,k_2}$ *satisfont la relation de symétrie indicielle* :

$$0 = A^j_{kl} + A^l_{jk} + A^k_{lj}. \tag{6.37}$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de remplacer l'expression (6.) dans l'équation (6.), de réorganiser le tout en faisant apparaître une base de 3-formes sur $\mathbb{R}^{n+\nu}$. □

Pour tout $i = 1, \ldots, n$, si nous appliquons ce lemme à l'équation (6.31), *i.e.*

$$0 = \sum_j \omega^j \wedge \left(\sum_k \varepsilon_k \cdot \omega^k_j \wedge \omega^i_k - d\omega^i_j \right), \tag{6.38}$$

nous déduisons directement l'existence des coefficients S^i_{jkl}. □

Résumons les relations de symétrie indicielle que satisfont les S^i_{jkl} : par construction $\omega^i_j + \omega^j_i = 0$, d'où $S^i_{jkl} + S^j_{ikl} = 0$. De plus, l'application du Lemme 6.34 nous donne deux nouvelles relations. En appliquant le Lemme 3.49 (à un changement de notation près), nous déduisons la quatrième relation $S^i_{jkl} = S^k_{lij}$. En conclusion, les S^i_{jkl} satisfont les quatre relations de symétrie indicielle suivantes :

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= S^i_{jkl} + S^j_{ikl}, \\ 0 &= S^i_{jkl} + S^i_{jlk}, \\ 0 &= S^i_{jkl} - S^k_{lij}, \\ 0 &= S^i_{jkl} + S^i_{ljk} + S^i_{klj}. \end{aligned}\right. \tag{6.39}$$

Comme pour les coefficients R^i_{jkl}, nous appellerons *quantités normales* les composantes du tenseur de courbure S^i_{jkl} sur $M \times \mathscr{O}_{p,n-p}$ dont les indices satisfont les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{ll} j > i, & k > l, \\ j \geqslant k, & i \geqslant l. \end{array}\right. \tag{6.40}$$

D'après le Lemme 3.49 (à un changement de notation près), toute composante du tenseur de courbure s'exprime comme combinaison linéaire des composantes normales. De plus, les composantes normales sont linéairement indépendantes. Enfin, il y a exactement $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$ quantités normales.

6.41. Première expression explicite (insuffisante) des coefficients de courbure S^i_{jkl}. L'existence des coefficients de courbure S^i_{jkl} dans la formule (6.33) tiendra lieu de guide pour calculer leur expression complète, en fonction des Λ^q_{mp}, par une formule qui sera analogue à l'expression (3.44) des R^i_{jkl} en fonction des Γ^q_{mp} (*voir* ci-dessous).

Les coefficients S^i_{jkl} doivent apparaître dans le membre de droite de l'expression $d\omega^i_j - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega^k_j \wedge \omega^i_k$, lorsque l'on remplace les formes ω^i_j, *etc.*, par leurs expressions explicites. Développons ce calcul. Tout d'abord, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'identité $\omega^i_j = -\rho^i_j + \sum_k \Lambda^i_{jk} \cdot \omega^k$ en utilisant la formule de différentiation covariante (6.28), remplaçons $d\omega^k$, puis remplaçons $\omega^l_m = \sum_p \Lambda^l_{mp} \cdot \omega^p - \rho^l_m$ et $\omega^k_l = \sum_m \Lambda^k_{lm} \cdot \omega^m - \rho^k_l$, et réorganisons les sommes en reportant à la fin les termes de type $\rho^i_j \wedge \omega^k$ ainsi que le terme $-d\rho^i_j$, tous envisagés comme des restes «inintéressants», ce qui nous donne :

(6.42)

$$
\left\{
\begin{aligned}
d\omega_j^i & = -d\rho_j^i + \sum_k d\Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k + \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot d\omega^k \\
& = \sum_k \sum_l \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} \cdot \omega^l \wedge \omega^k + \sum_k \sum_{l<m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \omega_m^l \wedge \omega^k + \\
& \quad + \sum_{k,\,l} \varepsilon_k \, \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \omega_l^k - d\rho_j^i \\
& = \sum_{k<l} \left(\frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l + \sum_k \sum_{l<m} \sum_p \Lambda_{mp}^l \, \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \omega^p \wedge \omega^k - \\
& \quad - \sum_k \sum_{l<m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k + \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k \, \Lambda_{jk}^i \, \Lambda_{lm}^k \cdot \omega^l \wedge \omega^m - \\
& \quad - \sum_{k,\,l} \varepsilon_k \, \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - d\rho_j^i \\
& = \sum_{k<l} \omega^k \wedge \omega^l \cdot \left(\frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} + \sum_{m<p} \Lambda_{mk}^p \, \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega_m^p} - \sum_{m<p} \Lambda_{ml}^p \, \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^p} \right) + \\
& \quad + \sum_{k<l} \omega^k \wedge \omega^l \cdot \left(\sum_m \varepsilon_m \left[\Lambda_{jm}^i \, \Lambda_{kl}^m - \Lambda_{jm}^i \, \Lambda_{lk}^m \right] \right) - \\
& \quad - \sum_k \sum_{l<m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k - \sum_{k,\,l} \varepsilon_k \, \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - d\rho_j^i.
\end{aligned}
\right.
$$

Ainsi, dans ce premier résultat, nous considérons que la dernière ligne constituée de trois expressions est un «reste», ce que nous allons expliquer dans un instant.

Remplaçons par ailleurs $\omega_j^k := -\rho_j^k + \sum_l \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l$ et $\omega_k^i := -\rho_k^i + \sum_m \Lambda_{km}^i \cdot \omega^m$ dans la somme $\sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i$ et réorganisons seulement la première somme (triple) sans modifier les trois autres termes :

(6.43)
$$\begin{cases} \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i & = \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k \, \Lambda_{jl}^k \, \Lambda_{km}^i \cdot \omega^l \wedge \omega^m + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_j^k \wedge \rho_k^i - \\ & \quad - \sum_{k,\,l} \varepsilon_k \, \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_{k,\,m} \varepsilon_k \, \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m \\ & = \sum_{k<l} \left(\sum_m \varepsilon_m \left[\Lambda_{jk}^m \, \Lambda_{ml}^i - \Lambda_{jl}^m \, \Lambda_{mk}^i \right] \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l - \\ & \quad - \sum_{k,\,l} \varepsilon_k \, \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_{k,\,m} \varepsilon_k \, \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m + \\ & \quad + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_j^k \wedge \rho_k^i. \end{cases}$$

Pour trouver l'expression des S_{jkl}^i, il faut maintenant soustraire (6.43) de (6.42). Nous affirmons que la soustraction du tout dernier terme de (6.43) au tout dernier terme de (6.42) donne zéro comme résultat, *i.e.* nous avons le lemme suivant (noter l'interversion des facteurs $\rho_j^k \wedge \rho_k^i = -\rho_k^i \wedge \rho_j^k$).

LEMME 6.44. *La matrice $R = (\rho_j^i) = E \cdot dU \cdot \widetilde{U}$ satisfait l'équation*

$$0 = dR - R \wedge (E \cdot R), \tag{6.45}$$

dans laquelle l'opérateur de multiplication extérieure agit en même temps que la multiplication matricielle. Cettte équation s'écrit explicitement avec les indices :

$$0 = d\rho_j^i - \sum_k \rho_k^i \wedge (\varepsilon_k \cdot \rho_j^k). \tag{6.46}$$

DÉMONSTRATION. En appliquant l'opérateur de différentiation extérieure à la définition $R = E \cdot dU \cdot \widetilde{U}$, nous obtenons

$$dR = -E \cdot dU \wedge d\widetilde{U}. \tag{6.47}$$

Par ailleurs, en différentiant l'identité $I_{n \times n} = U \cdot \widetilde{U}$, nous obtenons $0 = dU \cdot \widetilde{U} + U \cdot d\widetilde{U}$, ce qui nous permet de remplacer $dU \cdot \widetilde{U}$ par $-U \cdot d\widetilde{U}$ dans le calcul suivant :

$$\begin{cases} R \wedge (E \cdot R) & = E \cdot dU \cdot \widetilde{U} \wedge E \cdot E \cdot dU \cdot \widetilde{U} \\ & = E \cdot dU \cdot \widetilde{U} \wedge dU \cdot \widetilde{U} \\ & = -E \cdot dU \cdot \widetilde{U} \wedge U \cdot d\widetilde{U} \\ & = -E \cdot dU \wedge d\widetilde{U} \\ & = dR, \end{cases} \tag{6.48}$$

en tenant compte de (6.47) pour la dernière égalité, ce qui achève la vérification de (6.45). □

Ainsi, dans la soustraction de (6.43) à (6.42), le terme $-d\rho_j^i + \sum_k \varepsilon_k \cdot \rho_k^i \wedge \rho_j^k$ disparaît. Il ne reste donc plus que des combinaisons linéaires des 2-formes $\omega^k \wedge \omega^l$, avec $k < l$, et $\omega^k \wedge \rho_j^i$, avec la condition supplémentaire $i < j$ [après une légère réorganisation qui utiliserait l'antisymétrie $\rho_j^i = -\rho_i^j$, mais que nous n'avons pas effectuée]. Or ces 2-formes différentielles $(\omega^k \wedge \omega^l)_{k<l}$ et $(\omega^k \wedge \rho_j^i)_{i<j}$ sont indépendantes, grâce au Lemme 6.22 **(c)**. Nous en déduisons que dans la soustraction de (6.43) à (6.42), les termes que nous avons appelés «restes» et qui sont les coefficients de $(\omega^k \wedge \rho_j^i)_{i<j}$, doivent s'annihiler. Très précisément, la soustraction de l'avant-dernière ligne de (6.) à la dernière ligne de (6.) (excepté le terme $-d\rho_j^i$) donne zéro :

$$
(6.49)\qquad \begin{cases} 0 = -\displaystyle\sum_k \sum_{l<m} \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^l} \cdot \rho_m^l \wedge \omega^k - \sum_k \sum_l \varepsilon_k \, \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^l \wedge \rho_l^k - \\ \qquad + \displaystyle\sum_k \sum_l \varepsilon_k \, \Lambda_{jl}^k \cdot \omega^l \wedge \rho_k^i - \sum_k \sum_m \varepsilon_k \, \Lambda_{km}^i \cdot \rho_j^k \wedge \omega^m. \end{cases}
$$

Ici, il est remarquable que nous ayons pu déduire cette propriété d'annulation *sans avoir à pousser plus loin le calcul explicite de ces restes qui voudrait qu'on y insère les expressions* (6.) *des termes* Λ_{jk}^i.

Ensuite – et c'est ce qui nous intéresse – nous pouvons déduire que dans la soustraction de (6.43) à (6.42), les coefficients des 2-formes $\omega^k \wedge \omega^l$ s'identifie aux composantes S_{jkl}^i. Ainsi, en limitant le développement des calculs à l'essentiel, nous avons obtenu l'énoncé suivant.

LEMME 6.50. *L'expression explicite des coefficients de courbure* S_{jkl}^i *dans le co-repère relevé* (*avec les variables de rotation*) *en fonction des coefficients* Λ_{ij}^k *est la suivante* :

$$
(6.51)\qquad \begin{cases} S_{jkl}^i = \dfrac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega^k} - \dfrac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega^l} + \displaystyle\sum_{m<p} \left(\Lambda_{mk}^p \frac{\partial \Lambda_{jl}^i}{\partial \omega_m^p} - \Lambda_{ml}^p \frac{\partial \Lambda_{jk}^i}{\partial \omega_m^p} \right) + \\ \qquad + \displaystyle\sum_m \varepsilon_m \left(\Lambda_{jm}^i \, \Lambda_{kl}^m - \Lambda_{jm}^i \, \Lambda_{lk}^m - \Lambda_{jk}^m \, \Lambda_{ml}^i + \Lambda_{jl}^m \, \Lambda_{mk}^i \right). \end{cases}
$$

Cette formule est analogue à la formule (3. 44) pour les composantes de courbure R_{jkl}^i. On notera la présence des dérivées covariantes $\frac{\partial}{\partial \omega_m^p} \Lambda_{jl}^i$ dans la formule (6.) ci-dessus, absentes dans (3.44). Rappelons que les coefficients Λ_{jl}^i se déduisent des coefficients $\Gamma_{j_1 l_1}^{i_1}$ par les formules de rotation tensorielle (6.21). Aussi la formule (6.) est-elle insuffisante. Pour la conduire à son aboutissement, il faudrait remplacer dans (6.) tous les coefficients Λ_{jl}^i

par leur expression, tenir compte des expressions explicites (6.29) des dérivées covariantes, réorganiser le tout et le simplifier afin de faire apparaître une formule finale synthétique et harmonieuse. Cette voie est viable, mais elle exigerait un calcul considérable et elle requèrerait une certaine expertise dans l'art de reconnaître les harmonies formelles invisibles. Nous allons procéder différemment, en court-circuitant ce long calcul.

6.52. Expression des S^i_{jkl} en fonction des R^i_{jkl}. Ainsi, l'expression précédente (6.51) n'est-elle pas encore satisfaisante. L'expression désirée (6.54) ci-dessous montre que les S^i_{jkl} s'obtiennent par des formules de rotation tensorielles à partir des R^i_{jkl}. Sans produire les détails de la démonstration, Olver ([**347**]) cite ces formules dans le cas riemannien.

LEMME 6.53. *Les S^i_{jkl} se déduisent des R^i_{jkl} par des formules de degré quatre par rapport aux éléments de la matrice de rotation $U = (u^i_j)$ et de son inverse $\widetilde{U} = (\widetilde{u}^i_j)$:*

$$\left\{\begin{aligned} S^i_{jkl} &= \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \varepsilon_i \, \varepsilon_{i_1} \, u^i_{i_1} \, \widetilde{u}^{j_1}_j \, \widetilde{u}^{k_1}_k \, \widetilde{u}^{l_1}_l \, R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} \\ &= \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \widetilde{u}^{i_1}_i \, \widetilde{u}^{j_1}_j \, \widetilde{u}^{k_1}_k \, \widetilde{u}^{l_1}_l \, R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1}. \end{aligned}\right. \tag{6.54}$$

Évidemment, ces deux formules sont équivalentes, en vertu des relations $\varepsilon_i \, u^i_{i_1} = \varepsilon_{i_1} \widetilde{u}^{i_1}_i$, établies en (5.20). La première présente l'avantage de respecter les étages indiciels : i reste en haut, j, k et l restent en bas. La seconde présente l'avantage d'être homogène : elle n'incorpore que les éléments de la matrice inverse $\widetilde{U}$ et les quatre indices i, j, k et l sont placés en bas.

DÉMONSTRATION. La stratégie la plus économique pour établir ce lemme consiste à comparer le calcul des S^i_{jkl} à celui des R^i_{jkl}, en négligeant toutes les formes différentielles du^p_q, afin de ne pas avoir à développer certains termes trop complexes qui disparaissent de toute façon à la fin du calcul.

Pour expliquer cette stratégie, considérons la base de formes différentielles sur $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ constituée des 1-formes différentielles $(\omega^i)_{1 \leqslant i \leq n}$ et $(du^i_j)_{1 \leqslant i,\, j \leqslant n}$ (*cf.* Lemme 6.22 **(b)**). Introduisons le signe de congruence «$\equiv$» pour signifier «modulo les 1-formes du^p_q». Supposons qu'après un calcul intermédiaire (relativement économique) *effectué modulo les* 1*-formes* du^p_q, nous obtenions la relation de congruence :

$$d\omega^i_j \equiv \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega^k_j \wedge \omega^i_k + \sum_{k<l} S^i_{jkl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l, \tag{6.55}$$

avec des S^i_{jkl} connus explicitement en fonction des R^i_{jkl}. Alors, grâce au Lemme 6.32, nous savons que le signe de congruence «$\equiv$» est en vérité un signe d'égalité «=». Ainsi est-il justifié (et avantageux) de conduire les calculs modulo les du_q^p.

Pour commencer, obervons que $\rho_j^i \equiv 0$, d'après la définition (6.5), d'où la réécriture suivante de la relation (6.16) :

$$\omega_j^i \equiv \sum_k \Lambda_{jk}^i \cdot \omega^k. \tag{6.56}$$

Dans cette congruence, remplaçons la valeur de Λ_{jk}^i en fonction des $\Gamma_{l_2 l_3}^{l_1}$ trouvée en (6.21), remplaçons $\omega^k = \sum_{l_4} u_{l_4}^k \cdot \theta^{l_4}$, simplifions le tout grâce à la relation $\sum_k \widetilde{u}_k^{l_3}\, u_{l_4}^k = \delta_{l_4}^{l_3}$ et reconnaissons l'apparition de $\theta_{l_2}^{l_1}$:

$$\begin{cases} \omega_j^i & \equiv \sum\limits_k \sum\limits_{l_1, l_2, l_3} \sum\limits_{l_4} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2}\, \widetilde{u}_k^{l_3}\, u_{l_4}^k\, \Gamma_{l_2 l_3}^{l_1} \cdot \theta^{l_4} \\ & \equiv \sum\limits_{l_1, l_2} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2} \left(\sum\limits_{l_3} \Gamma_{l_2 l_3}^{l_1} \cdot \theta^{l_3} \right) \\ & \equiv \sum\limits_{l_1, l_2} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2} \cdot \theta_{l_2}^{l_1}. \end{cases} \tag{6.57}$$

Inversons aussi ces formules :

$$\theta_j^i \equiv \sum_{l_1, l_2} u_i^{l_1}\, u_j^{l_2} \cdot \omega_{l_2}^{l_1}. \tag{6.58}$$

Écrivons maintenant la différentielle extérieure $d\omega_j^i$ *modulo* les formes différentielles du_j^i. Pour cela, observons qu'en vertu de la relation $d\widetilde{U} = -\widetilde{U} \cdot dU \cdot \widetilde{U}$, les différentielles $d\widetilde{u}_i^{l_1}$ et $d\widetilde{u}_j^{l_2}$ sont congrues à zéro. Par conséquent, nous pouvons écrire, en utilisant les équations de structure (3.29) pour $d\theta_{l_2}^{l_1}$ qui définissent les $R_{l_2 kl}^{l_1}$ et en remplaçant $\sum_{k<l} R_{l_2 kl}^{l_1} \cdot \theta^k \wedge \theta^l$ par $\sum_{k,\, l} \frac{R_{l_2 kl}^{l_1}}{2} \cdot \theta^k \wedge \theta^l$:

$$\begin{cases} d\omega_j^i & \equiv \sum\limits_{l_1, l_2} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2} \cdot d\theta_{l_2}^{l_1} \\ & \equiv \sum\limits_{l_1, l_2} \sum\limits_k \varepsilon_k\, \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2} \cdot \theta_{l_2}^k \wedge \theta_k^{l_1} + \sum\limits_{l_1, l_2} \sum\limits_{k,\, l} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2}\, \dfrac{R_{l_2 kl}^{l_1}}{2} \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \end{cases} \tag{6.59}$$

Remplaçons $\theta_{l_2}^k = \sum_{l_3,\, l_4} u_k^{l_3}\, u_{l_2}^{l_4} \cdot \omega_{l_4}^{l_3}$, remplaçons $\theta_k^{l_1} = \sum_{l_5,\, l_6} u_{l_1}^{l_5}\, u_k^{l_6} \cdot \omega_{l_6}^{l_5}$, puis remplaçons $\theta^k = \sum_{l_3} \widetilde{u}_{l_3}^k \cdot \omega^{l_3}$ et remplaçons $\theta^l = \sum_{l_4} \widetilde{u}_{l_4}^l \cdot \omega^{l_4}$, ce qui donne :

$$
(6.60)\qquad \begin{cases} d\omega_j^i \equiv \sum\limits_{l_1,\,l_2}\sum\limits_{k}\sum\limits_{l_3,\,l_4}\sum\limits_{l_5,\,l_6} \varepsilon_k\, \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2} u_k^{l_3}\, u_{l_2}^{l_4}\, u_{l_1}^{l_5}\, u_k^{l_6}\cdot \omega_{l_4}^{l_3}\wedge \omega_{l_6}^{l_5} + \\ \qquad + \sum\limits_{l_1,\,l_2}\sum\limits_{k,\,l}\sum\limits_{l_3,\,l_4} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2}\, \widetilde{u}_{l_3}^{k}\, \widetilde{u}_{l_4}^{l}\, \frac{R_{l_2kl}^{l_1}}{2}\cdot \omega^{l_3}\wedge\omega^{l_4}. \end{cases}
$$

Simplifions la première ligne en trois temps : premièrement, $\sum_{l_1} \widetilde{u}_i^{l_1}\, u_{l_1}^{l_5} = \delta_i^{l_5}$, donc les deux sommes $\sum_{l_1}$, $\sum_{l_5}$ disparaissent et l_5 est remplacé par i ; deuxièmement, $\sum_{l_2} \widetilde{u}_j^{l_2}\, u_{l_2}^{l_4} = \delta_j^{l_4}$, donc les deux sommes $\sum_{l_2}$, $\sum_{l_4}$ disparaissent et l_4 est remplacé par j ; troisièmement, pour simplifier $\sum_k \varepsilon_k\, u_k^{l_3}\, u_k^{l_6}$, utilisons la relation (5.20) pour y remplacer $\varepsilon_k\, u_k^{l_6} = \varepsilon_{l_6}\, \widetilde{u}_{l_6}^{k}$, ce qui transforme cette somme en $\sum_k \varepsilon_{l_6}\, u_k^{l_3}\, \widetilde{u}_{l_6}^{k} = \varepsilon_{l_6}\, \delta_{l_6}^{l_3}$, donc les deux sommes $\sum_k$, $\sum_{l_6}$ disparaissent et l_6 est remplacé par l_3. Enfin, réorganisons la deuxième ligne en permutant la dénomination des indices : $(l_1,\, l_2,\, k,\, l,\, l_3,\, l_4) \longmapsto (l_1,\, l_2,\, l_3,\, l_4,\, k,\, l)$ et en faisant réapparaître $\sum_{k<l}$ au lieu de $\sum_{k,\,l}$. Au total, nous obtenons :

(6.61)

$$
d\omega_j^i \equiv \sum_{l_3} \varepsilon_{l_3}\cdot \omega_j^{l_3}\wedge\omega_{l_3}^i + \sum_{k<l} \omega^k\wedge\omega^l\cdot \left(\sum_{l_1,\,l_2,\,l_3,\,l_4} \widetilde{u}_i^{l_1}\, \widetilde{u}_j^{l_2}\, \widetilde{u}_k^{l_3}\, \widetilde{u}_l^{l_4}\, R_{l_2l_3l_4}^{l_1}\right),
$$

ce qui donne l'expression désirée (6.54) des S_{jkl}^i. □

7. Identités de Bianchi et dérivées covariantes d'ordre quelconque

7.1. Différentiation des équations de structure sans les variables de rotation. Calculons explicitement les dérivées covariantes du tenseur de courbure R_{jkl}^i. Tout d'abord, réécrivons (3.29) en remplaçant $\sum_{k<l}$ par $\frac{1}{2}\sum_{k,\,l}$, grâce à l'antisymétrie $R_{jkl}^i = -R_{jlk}^i$:

$$
(7.2)\qquad d\theta_j^i = \sum_k \varepsilon_k\cdot \theta_j^k\wedge\theta_k^i + \sum_{k,\,l} \frac{R_{jkl}^i}{2}\cdot \theta^k\wedge\theta^l.
$$

Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à ces identités, en tenant compte de la relation de Poincaré $dd\alpha = 0$ et en tenant compte du changement de signe pour la différentiation du produit extérieur de deux 1-formes

$d\,(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta - \alpha \wedge d\beta$, ce qui donne :
(7.3)

$$\left\{ \begin{aligned} 0 = dd\theta_j^i \; &= \sum_k \varepsilon_k \cdot d\theta_j^k \wedge \theta_k^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \theta_j^k \wedge d\theta_k^i + \sum_{k,\,l,\,m} \frac{1}{2}\, \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial \theta^m} \cdot \theta^m \wedge \theta^k \wedge \theta^l + \\ & \quad + \sum_{k,\,l} \frac{1}{2}\, R^i_{jkl} \cdot d\theta^k \wedge \theta^l - \sum_{k,\,l} \frac{1}{2}\, R^i_{jkl} \cdot \theta^k \wedge d\theta^l. \end{aligned} \right.$$

Grâce aux relations (3.) et (3.), nous pouvons remplacer les valeurs de $d\theta_j^k$, de $d\theta_k^i$, de $d\theta^k$ et de $d\theta^l$, ce qui donne :
(7.4)

$$\left\{ \begin{aligned} 0 \; = & \underbrace{\sum_{k,\,l} \varepsilon_k\, \varepsilon_l \cdot \theta_j^l \wedge \theta_l^k \wedge \theta_k^i}_{\boxed{1}} + \sum_k \sum_{l,\,m} \varepsilon_k\, \frac{1}{2}\, R^k_{jlm} \cdot \theta^l \wedge \theta^m \wedge \theta_k^i - \\ & \underbrace{- \sum_{k,\,l} \varepsilon_k\, \varepsilon_l \cdot \theta_j^k \wedge \theta_k^l \wedge \theta_l^i}_{\boxed{1}} - \sum_k \sum_{l,\,m} \varepsilon_k\, \frac{1}{2}\, R^i_{klm} \cdot \theta_j^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ & + \sum_{k,\,l,\,m} \frac{1}{2}\, \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial \theta^m} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k\, \frac{1}{2}\, R^i_{jkl} \cdot \theta^m \wedge \theta_m^k \wedge \theta^l - \\ & - \sum_{k,\,l,\,m} \frac{1}{2}\, R^i_{jkl}\, \varepsilon_l \cdot \theta^k \wedge \theta^m \wedge \theta_m^l. \end{aligned} \right.$$

Dans cette identité, nous avons souligné et numéroté deux termes qui s'annihilent. Avant de poursuivre, énonçons sans le vérifier un lemme élémentaire.

LEMME 7.5. *Si des quantités indiciées A_{klm} satisfont la relation d'antisymétrie $A_{klm} = -A_{lkm}$, on a l'identité suivante* :
(7.6)

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k,\,l} \sum_m \frac{1}{2}\, A_{klm} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m \; &= \sum_{k<l} \sum_m A_{klm} \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m \\ &= \sum_{k<l<m} \left(A_{klm} + A_{mkl} + A_{lmk} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m. \end{aligned} \right.$$

Maintenant, plaçons à la première place le troisième des cinq termes qui restent dans (7.4) et appliquons le Lemme 7.5 ci-dessus ; dans les quatre termes restants, remplaçons θ_k^i, θ_j^k, θ_m^k et θ_m^l par leurs valeurs et réorganisons

les indices sans reproduire les calculs intermédiaires ; nous obtenons :
(7.7)

$$\begin{cases} 0 = \sum_{k<l<m} \left(\frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial \theta^m} + \frac{\partial R^i_{jmk}}{\partial \theta^l} + \frac{\partial R^i_{jlm}}{\partial \theta^k} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ \quad + \sum_p \varepsilon_p \left(\Gamma^i_{pm} R^p_{jkl} - \Gamma^p_{jm} R^i_{pkl} - \Gamma^p_{km} R^i_{jpl} - \Gamma^p_{lm} R^i_{jkp} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ \quad + \sum_p \varepsilon_p \left(\Gamma^i_{pl} R^p_{jmk} - \Gamma^p_{jl} R^i_{pmk} - \Gamma^p_{ml} R^i_{jpk} - \Gamma^p_{kl} R^i_{jmp} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m + \\ \quad + \sum_p \varepsilon_p \left(\Gamma^i_{pk} R^p_{jlm} - \Gamma^p_{jk} R^i_{plm} - \Gamma^p_{lk} R^i_{jpm} - \Gamma^p_{mk} R^i_{jlp} \right) \cdot \theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m. \end{cases}$$

Définissons alors la *m-ième dérivée covariante* $(R^i_{jkl})_m$ *de la composante de courbure* R^i_{jkl} comme suit :
(7.8)

$$(R^i_{jkl})_m := \frac{\partial R^i_{jkl}}{\partial \theta^m} + \sum_p \varepsilon_p \left(\Gamma^i_{pm} R^p_{jkl} - \Gamma^p_{jm} R^i_{pkl} - \Gamma^p_{km} R^i_{jpl} - \Gamma^p_{lm} R^i_{jkp} \right).$$

Égalons à zéro les coefficients de la base de 3-formes $(\theta^k \wedge \theta^l \wedge \theta^m)_{1 \leqslant k \leq l \leqslant m \leqslant n}$ qui apparaissent dans la dernière relation (7.7) : nous obtenons les *identités de Bianchi* :

$$0 = (R^i_{jkl})_m + (R^i_{jlm})_k + (R^i_{jmk})_l. \tag{7.9}$$

De plus, en appliquant l'opérateur de différentiation covariante $(\cdot)_m$ aux relations de symétrie indicielle (3.28) et (3.), nous obtenons aussi d'autres relations de symétrie qui sont satisfaites par ce tenseur à cinq indices :

$$\begin{cases} 0 = (R^i_{jkl})_m + (R^i_{ljk})_m + (R^i_{klj})_m, \\ 0 = (R^i_{jkl})_m + (R^i_{jlk})_m, \\ 0 = (R^i_{jkl})_m + (R^j_{ikl})_m, \\ 0 = (R^i_{jkl})_m - (R^k_{lij})_m. \end{cases} \tag{7.10}$$

LEMME 7.11. *Les dérivés covariantes $(R^i_{jkl})_m$ ont un comportement tensoriel, i.e. pour tout changement de coordonnée $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ tel que $\bar{\theta}^i = \theta^i$, on a :*

$$(\overline{R}^i_{jkl})_m = (R^i_{jkl})_m. \tag{7.12}$$

DÉMONSTRATION. Premièrement, d'après l'Assertion (3.32), nous avons une correspondance exacte entre les composantes de la courbure : $\overline{R}^i_{jkl} = R^i_{jkl}$. Deuxièmement, la relation $\bar{\theta}^i = \theta^i$ donne $\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^i} = \frac{\partial}{\partial \theta^i}$ par dualité.

Troisièmement, la relation

$$\sum_k \overline{\Gamma}^i_{jk} \cdot \bar{\theta}^k = \bar{\theta}^i_j = \theta^i_j = \sum_k \Gamma^i_{jk} \cdot \theta^k \tag{7.13}$$

donne $\overline{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk}$. En insérant ces trois égalités dans la définition (7.8) de la dérivée covariante, nous obtenons immédiatement $(\overline{R}^i_{jkl})_m = (R^i_{jkl})_m$. □

7.14. Dérivées covariantes d'ordre supérieur. Définissons maintenant les dérivées covariantes d'ordre deux des composantes de la courbure comme suit :

(7.15)

$$\begin{cases} \left(\left(R^i_{jkl}\right)_{m_1}\right)_{m_2} := \dfrac{\partial}{\partial \omega^{m_2}} \left(R^i_{jkl}\right)_{m_1} + \sum_p \varepsilon_p \Big(\Gamma^i_{pm_2} \left(R^p_{jkl}\right)_{m_1} - \Gamma^p_{jm_2} \left(R^i_{pkl}\right)_{m_1} - \\ \qquad -\Gamma^p_{km_2} \left(R^i_{jpl}\right)_{m_1} - \Gamma^p_{lm_2} \left(R^i_{jkp}\right)_{m_1} - \Gamma^p_{m_1 m_2} \left(R^i_{jkl}\right)_p\Big). \end{cases}$$

Cette définition purement formelle est exactement analogue à la définition (1.26) de la dérivée covariante d'un tenseur une fois contravariant et deux fois covariant, due à Ricci et à Levi-Civita. Les dérivées covariantes d'ordre supérieur $\left(\left(\left(R^i_{jkl}\right)_{m_1}\right)_{m_2}\right)_{m_3}$, *etc.*, sont définies en imitant (1.26), comme si tous les indices m_1, m_2, m_3, ... étaient des indices covariants du calcul tensoriel classique.

LEMME 7.16. *Les dérivées covariantes des composantes de courbure* R^i_{jkl} *commutent :*

$$\left(\left(R^i_{jkl}\right)_{m_1}\right)_{m_2} = \left(\left(R^i_{jkl}\right)_{m_2}\right)_{m_1}, \tag{7.17}$$

pour tous entiers m_1, $m_2 = 1, \ldots, n$.

Il existe une preuve directe de cette relation à partir des définitions formelles de la dérivée covariante, mais cette preuve est d'une complexité importante, car il est nécessaire de développer toutes les expressions en fonction des coefficients de Christoffel Γ^i_{jk}. De plus, cette relation de commutation pour deux dérivées covariantes ne peut pas être utilisée pour raisonner par récurrence afin d'établir que les dérivées covariantes d'un ordre $\kappa \geqslant 2$ quelconque commutent : il faudrait développer tous les termes de la définition formelle de la κ-ième dérivée covariante, ce qui représenterait une tâche calculatoire considérable. Ultérieurement, nous fournirons une preuve indirecte et économique de ce lemme, à partir d'une relation de commutation analogue qui sera satisfaite par les dérivées covariantes des coefficients de courbure S^i_{jkl}, qui incorporent les variables de rotation.

7.18. Différentiation des équations de structure avec les variables de rotation. Pour obtenir des identités de Bianchi satisfaites par les S_{jkl}^i, analogues à celles qui sont satisfaites par les R_{jkl}^i, appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux identités (6.). Cependant, le calcul va présenter des différences importantes, à cause de la présence des formes ω_j^i, $i < j$, qui sont indépendantes des formes ω^i, alors que les formes θ_j^i étaient linéairement dépendantes des formes θ^i, dans le calcul précédent. Par conséquent, nous allons indiquer soigneusement toutes les étapes intermédiaires de ce nouveau calcul.

Tout d'abord, réécrivons (6.33) en remplaçant $\sum_{k<l}$ par $\frac{1}{2}\sum_{k,\,l}$, grâce à l'antisymétrie $S_{jkl}^i = -S_{jlk}^i$:

$$\omega_j^i = \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \sum_{k,\,l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge \omega^l. \tag{7.19}$$

Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure, en tenant compte de l'identité de Poincaré :

(7.20)

$$\left\{ \begin{aligned} 0 = dd\omega_j^i &= \sum_k \varepsilon_k \cdot d\omega_j^k \wedge \omega_k^i - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega_j^k \wedge d\omega_k^i + \sum_{k,\,l,\,m} \frac{1}{2}\, dS_{jkl}^i \cdot \omega^k \wedge \omega^l + \\ &+ \sum_{k,\,l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot d\omega^k \wedge \omega^l - \sum_{k,\,l} \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge d\omega^l. \end{aligned} \right.$$

Remplaçons les valeurs de $d\omega_j^k$, de $d\omega_k^i$, appliquons la formule (7.) pour développer la différentielle de S_{jkl}^i, remplaçons les valeurs de $d\omega^k$ et de $d\omega^l$ et réorganisons les indices, ce qui donne :

(7.21)

$$\left\{ \begin{aligned} 0 &= \underbrace{\sum_{k,\,l} \varepsilon_k\varepsilon_l \cdot \omega_j^l \wedge \omega_l^k \wedge \omega_k^i}_{\boxed{1}} + \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k \frac{S_{jlm}^k}{2} \cdot \omega^l \wedge \omega^m \wedge \omega_k^i - \\ & \underbrace{- \sum_{k,\,l} \varepsilon_k\varepsilon_l \cdot \omega_j^k \wedge \omega_k^l \wedge \omega_l^i}_{\boxed{1}} - \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k \frac{S_{klm}^i}{2} \cdot \omega_j^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{k,\,l,\,m} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \frac{1}{2} \sum_{k,\,l} \sum_{p<q} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega_q^p} \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p + \\ & + \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_k \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^m \wedge \omega_m^k \wedge \omega^l - \sum_{k,\,l,\,m} \varepsilon_l \frac{S_{jkl}^i}{2} \cdot \omega^k \wedge \omega^m \wedge \omega_m^l. \end{aligned} \right.$$

Dans cette identité, nous avons souligné et numéroté deux termes qui s'annihilent, comme dans (7.4). Ramenons en première posisition les dérivées covariantes par rapport à ω^m qui apparaissent à la troisième ligne et réorganisons-les en appliquant le Lemme 7.5 ; dans la somme qui incorpore les dérivées covariantes par rapport à ω_q^p, utilisons l'antisymétrie de $S^{\cdot}_{\cdot kl}$ par rapport aux indices k et l pour remplacer la somme $\sum_{k,\,l}$ par $\sum_{k<l}$ et utilisons de même l'antisymétrie par rapport aux indices p et q pour remplacer $\sum_{p<q}$ par $\sum_{p,\,q}$, ce qui laisse le facteur $\frac{1}{2}$ inchangé ; réorganisons les deux premiers termes restants, situés respectivement à la première et à la deuxième ligne, en substituant les indices de manière à faire apparaître $\sum_{k<l}\sum_{p,\,q}(\cdots)\cdot\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p$ et en utilisant le symbole de Kronecker ; enfin, pour réorganiser les deux tous derniers termes situés à la quatrième ligne, substituons les indices de manière à faire apparaître (attention à la différence) $\sum_{k,\,l}\sum_{p,\,q}(\cdots)\cdot\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p$; au total, nous obtenons :

(7.22)
$$\left\{\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k<l<m}\left(\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial\omega^m}+\frac{\partial S^i_{jmk}}{\partial\omega^l}+\frac{\partial S^i_{jlm}}{\partial\omega^k}\right)\cdot\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega^m+ \\ & +\sum_{k<l}\sum_{p,\,q}\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p\cdot\left(\frac{1}{2}\,\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial\omega_q^p}+\varepsilon_q\,\delta_p^i\,S^q_{jkl}-\varepsilon_p\,\delta_j^q\,S^i_{pkl}\right)+ \\ & +\sum_{k,\,l}\sum_{p,\,q}\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p\cdot\left(-\varepsilon_p\,\delta_k^q\,\frac{S^i_{jpl}}{2}-\varepsilon_p\,\delta_l^q\,\frac{S^i_{jkp}}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Afin de transformer encore la deuxième ligne, utilisons l'antisymétrie $\omega_q^p = -\omega_p^q$, ce qui permet de remplacer $\sum_{p,\,q}A_p^q\cdot\omega_q^p$ par $\sum_{p<q}\left(A_p^q-A_q^p\right)\cdot\omega_q^p$; afin de transformer la troisième ligne, utilisons les antisymétries de la 3-forme différentielle $\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p$ pour remplacer $\sum_{k,\,l}\sum_{p,\,q}A^q_{klp}\cdot\omega^k\wedge\omega^l\wedge\omega_q^p$ par

$\sum_{k<l} \sum_{p<q} \left(A^q_{klp} - A^q_{lkp} - A^p_{klq} + A^p_{lkq}\right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p_q$; nous obtenons :
(7.23)

$$\left\{\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k<l<m} \left(\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S^i_{jmk}}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S^i_{jlm}}{\partial \omega^k} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ & + \sum_{k<l} \sum_{p<q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p_q \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^p_q} + \varepsilon_q\, \delta^i_p\, S^q_{jkl} - \varepsilon_p\, \delta^i_q\, S^p_{jkl} - \varepsilon_p\, \delta^q_j\, S^i_{pkl} + \varepsilon_q\, \delta^p_j\, S^i_{qkl} \right) + \\ & + \sum_{k<l} \sum_{p<q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p_q \cdot \\ & \cdot \Bigg(\underline{-\varepsilon_p\, \delta^q_k\, \frac{S^i_{jpl}}{2}}\,\boxed{1} - \underline{\varepsilon_p\, \delta^q_l\, \frac{S^i_{jkp}}{2}}\,\boxed{3} + \underline{\varepsilon_p\, \delta^q_l\, \frac{S^i_{jpk}}{2}}\,\boxed{3} + \underline{\varepsilon_p\, \delta^q_k\, \frac{S^i_{jlp}}{2}}\,\boxed{1} + \\ & \quad \underline{+\varepsilon_q\, \delta^p_k\, \frac{S^i_{jql}}{2}}\,\boxed{2} + \underline{\varepsilon_q\, \delta^p_l\, \frac{S^i_{jkq}}{2}}\,\boxed{4} - \underline{\varepsilon_q\, \delta^p_l\, \frac{S^i_{jqk}}{2}}\,\boxed{4} - \underline{\varepsilon_q\, \delta^p_k\, \frac{S^i_{jlq}}{2}}\,\boxed{2} \Bigg). \end{aligned}\right.$$

Enfin, pour terminer, utilisons les propriétés d'antisymétrie des S^i_{jkl} pour collecter par paires les huit termes qui apparaissent dans la dernière somme et rassemblons le tout avec la deuxième somme, qui porte sur les mêmes 3-formes différentielles $\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p_q$. Nous obtenons l'expression finale suivante, que nous interprétons ci-après :
(7.24)

$$\left\{\begin{aligned} 0 \;=\; & \sum_{k<l<m} \left(\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S^i_{jmk}}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S^i_{jlm}}{\partial \omega^k} \right) \cdot \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^m + \\ & + \sum_{k<l} \sum_{p<q} \omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega^p_q \cdot \\ & \cdot \Bigg(\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^p_q} + \varepsilon_q\, \delta^i_p\, S^q_{jkl} - \varepsilon_p\, \delta^i_q\, S^p_{jkl} - \varepsilon_p\, \delta^q_j\, S^i_{pkl} + \varepsilon_q\, \delta^p_j\, S^i_{qkl} - \\ & \qquad - \varepsilon_p\, \delta^q_k\, S^i_{jpl} + \varepsilon_q\, \delta^p_k\, S^i_{jql} - \varepsilon_p\, \delta^q_l\, S^i_{jkp} + \varepsilon_q\, \delta^p_l\, S^i_{jkq} \Bigg). \end{aligned}\right.$$

Puisque toutes les 3-formes différentielles qui apparaissent dans ces dernières expressions sont linéairement indépendantes, leurs coefficients doivent tous s'annuler. En particulier, nous obtenons les *identités de Bianchi*, satisfaites par les coefficients de courbure S^i_{jkl} :

$$0 = \frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m} + \frac{\partial S^i_{jmk}}{\partial \omega^l} + \frac{\partial S^i_{jlm}}{\partial \omega^k}. \tag{7.25}$$

De plus, nous de l'annulation des coefficients des 3-formes $\omega^k \wedge \omega^l \wedge \omega_q^p$, $k < l$, $p < q$, dans (7.) que les dérivées covariantes des S^i_{jkl} par rapport aux ω_q^p s'expriment en fonction des $S^{i_1}_{j_1 k_1 l_1}$:

$$
(7.26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega_q^p} &= -\varepsilon_q\, \delta_p^i\, S^q_{jkl} + \varepsilon_p\, \delta_q^i\, S^p_{jkl} + \varepsilon_p\, \delta_j^q\, S^i_{pkl} - \varepsilon_q\, \delta_j^p\, S^i_{qkl} + \\ &\quad + \varepsilon_p\, \delta_k^q\, S^i_{jpl} - \varepsilon_q\, \delta_k^p\, S^i_{jql} + \varepsilon_p\, \delta_l^q\, S^i_{jkp} - \varepsilon_q\, \delta_l^p\, S^i_{jkq}. \end{aligned} \right.
$$

Nous allons déduire de ces identités une infinté de nouvelles identités qui sont satisfaites par les dérivées covariantes d'ordre supérieur des S^i_{jkl}.

LEMME 7.27. *Pour tous $i_1,\, i_2,\, p_1,\, q_1,\, p_2,\, q_2 = 1,\, \ldots,\, n$ et pour toute fonction $F = F(x^i\, u^i_j)$ sur $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$, on a les trois relations de commutation suivantes :*

$$
(7.28) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_2}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega^{i_2}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} F, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{p_1}_{q_1}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega^{p_1}_{q_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{i_1}} F, \\ \frac{\partial}{\partial \omega^{p_1}_{q_1}} \frac{\partial}{\partial \omega^{p_2}_{q_2}} F &= \frac{\partial}{\partial \omega^{p_2}_{q_2}} \frac{\partial}{\partial \omega^{p_1}_{q_1}} F. \end{aligned} \right.
$$

DÉMONSTRATION. Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure à l'identité du Lemme 6., écrite sous la forme :

$$
(7.29) \qquad dF = \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial \omega^{i_1}} \cdot \omega^{i_1} + \sum_{p_1 < q_1} \frac{\partial F}{\partial \omega^{p_1}_{q_1}} \cdot \omega^{p_1}_{q_1},
$$

ce qui donne, après une réorganisation élémentaire :
(7.30)

$$
\left\{ \begin{aligned} 0 &= \sum_{i_1 < i_2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_1} \partial \omega^{i_2}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_2} \partial \omega^{i_1}} \right) \cdot \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} + \\ &\quad + \sum_{i_1} \sum_{p_1 < q_1} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{i_1} \partial \omega^{p_1}_{q_1}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{p_1}_{q_1} \partial \omega^{i_1}} \right) \cdot \omega^{i_1} \wedge \omega^{p_1}_{q_1} + \\ &\quad + \sum_{p_1 < q_1,\ p_2 < q_2,\ (p_1,\, q_1) < (p_2,\, q_2)} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{p_1}_{q_1} \partial \omega^{p_2}_{q_2}} - \frac{\partial^2 F}{\partial \omega^{p_2}_{q_2} \partial \omega^{p_1}_{q_1}} \right) \cdot \omega^{p_1}_{q_1} \wedge \omega^{p_2}_{q_2}. \end{aligned} \right.
$$

Ici, la notation d'ordre $(p_1,\, q_1) < (p_2,\, q_2)$ s'interprète par : $p_1 < p_2$ ou bien $p_1 = p_2$ et $q_1 < q_2$. Le lemme est démontré.

□

LEMME 7.31. *La dérivées covariantes des S^i_{jkl} par rapport aux formes différentielles ω^m s'expriment en fonction des dérivées covariantes des composantes de courbure $\big(R^{i'}_{j'k'l'}\big)_{m'}$ par des formules de quintuple rotation indicielle :*

$$\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m} = \sum_{i',\,j',\,k',\,l',\,m'} \varepsilon_i\,\varepsilon_{i'}\,u^i_{i'}\,\widetilde{u}^{j'}_j\,\widetilde{u}^{k'}_k\,\widetilde{u}^{l'}_l\,\widetilde{u}^{m'}_m\,\Big(R^{i'}_{j'k'l'}\Big)_{m'}. \tag{7.32}$$

Plus généralement, pour tout entier $\kappa \geqslant 1$ et pour tous $m_1,\, m_2,\, \dots,\, m_\kappa = 1,\, \dots,\, n$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\kappa S^i_{jkl}}{\partial\omega^{m_1}\partial\omega^{m_2}\cdots\partial\omega^{m_\kappa}} = \displaystyle\sum_{i',\,j',\,k',\,l',\,m_1',\,m_2',\,\cdots,\,m_\kappa'} \\ \varepsilon_i\,\varepsilon_{i'}\,u^i_{i'}\,\widetilde{u}^{j'}_j\,\widetilde{u}^{k'}_k\,\widetilde{u}^{l'}_l\,\widetilde{u}^{m_1'}_{m_1}\,\widetilde{u}^{m_2'}_{m_2}\cdots\widetilde{u}^{m_\kappa'}_{m_\kappa}\left(\cdots\left(\Big(R^{i'}_{j'k'l'}\Big)_{m_1'}\right)_{m_2'}\cdots\right)_{m_\kappa'}. \end{cases} \tag{7.33}$$

Grâce à ce lemme, nous pouvons fournir une preuve indirecte et économique de la relation de commutation (7.) pour les dérivées covariantes de R^i_{jkl}. En effet, supposons $\kappa = 2$ dans les relations (7.) et restreignons-les en l'identité du groupe $U := I_{n\times n}$, *i.e.* posons $u^i_j := \delta^i_j = \widetilde{u}^i_j$, tout en appliquant la première relation de commutation (7.) avec $F := S^i_{jkl}$, $i_1 := m_1$ et $i_2 := m_2$. Nous obtenons immédiatement la relation de commutation désirée :

$$\left\{ \Big(\big(R^i_{jkl}\big)_{m_1}\Big)_{m_2} = \frac{\partial^2 S^i_{jkl}}{\partial\omega^{m_1}\partial\omega^{m_2}}\bigg|_{U=I_{n\times n}} = \frac{\partial^2 S^i_{jkl}}{\partial\omega^{m_2}\partial\omega^{m_1}}\bigg|_{U=I_{n\times n}} = \Big(\big(R^i_{jkl}\big)_{m_2}\Big)_{m_1} \right. \tag{7.34}$$

Plus généralement, soit $\kappa \geqslant 2$. Pour toute permutation

$$\sigma : (1,\, 2,\, \dots,\, \kappa) \longmapsto (\sigma(1),\, \sigma(2),\, \dots,\, \sigma(\kappa)), \tag{7.35}$$

la restriction en l'identité de la relation de commutation

$$\frac{\partial^\kappa S^i_{jkl}}{\partial\omega^{m_1}\partial\omega^{m_2}\cdots\partial\omega^{m_\kappa}}\bigg|_{U=I_{n\times n}} = \frac{\partial^\kappa S^i_{jkl}}{\partial\omega^{m_{\sigma(1)}}\partial\omega^{m_{\sigma(2)}}\cdots\partial\omega^{m_{\sigma(\kappa)}}}\bigg|_{U=I_{n\times n}} \tag{7.36}$$

donne imédiatement en passant par (7.) la relation de commutation désirée :

$$\left(\cdots\Big(\big(R^i_{jkl}\big)_{m_1}\Big)_{m_2}\cdots\right)_{m_\kappa} = \left(\cdots\Big(\big(R^i_{jkl}\big)_{m_{\sigma(1)}}\Big)_{m_{\sigma(2)}}\cdots\right)_{m_{\sigma(\kappa)}} \tag{7.37}$$

Nous pouvons donc noter ces dérivées covariantes simplement par :

$$\big(R^i_{jkl}\big)_{m_1 m_2\cdots m_\kappa}. \tag{7.38}$$

Démonstration du Lemme 7. Commençons par développer la dérivée covariante de $R^{i'}_{j'k'l'}$ qui apparaît dans le second membre :

(7.39)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m} &= \sum_{i',j',k',l'\,m'} \varepsilon_i\,\varepsilon_{i'}\,u^i_{i'}\,\widetilde{u}^{j'}_j\,\widetilde{u}^{k'}_k\,\widetilde{u}^{l'}_l\,\widetilde{u}^{m'}_m\,\left(\frac{\partial R^{i'}_{j'k'l'}}{\partial \omega^{m'}}+\right.\\ &\left.+\sum_p \varepsilon_p\left(\Gamma^{i'}_{pm'}\,R^p_{j'k'l'} - \Gamma^p_{j'm'}\,R^{i'}_{pk'l'} - \Gamma^p_{k'm'}\,R^{i'}_{j'pl'} - \Gamma^p_{l'm'}\,R^{i'}_{j'k'p}\right)\right). \end{aligned}\right.$$

Pour atteindre cet objectif, partons de l'expression de Λ^r_{qm}, tirée de (6.) en tenant compte de la relation $\varepsilon_i\,u^i_j = \varepsilon_j\,\widetilde{u}^j_i$:

$$\Lambda^r_{qm} = \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_r\,\varepsilon_{r_1}\,u^r_{r_1}\,\widetilde{u}^{q_1}_q\,\widetilde{u}^{m_1}_m\,\Gamma^{r_1}_{q_1m_1}, \tag{7.40}$$

remplaçons-là dans l'expression de la dérivée covariante $\frac{\partial}{\partial\omega^m}$ et simplifions l'expression obtenue en remarquant que $\sum_q u^q_p\,\widetilde{u}^{q_1}_q = \delta^{q_1}_p$, ce qui fait disparaître $\sum_q$, $\sum_p$ et permet de remplacer p par q_1 :

(7.41)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\omega^m} &= \sum_{m'} \widetilde{u}^{m'}_m\,\frac{\partial}{\partial\theta^{m'}} + \sum_{p,\,q,\,r} \varepsilon_r\,u^q_p\,\Lambda^r_{qm}\,\frac{\partial}{\partial u^r_p}\\ &= \sum_{m'} \widetilde{u}^{m'}_m\,\frac{\partial}{\partial\theta^{m'}} + \sum_{p,\,q,\,r}\ \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1}\,u^q_p\,u^r_{r_1}\,\widetilde{u}^{q_1}_q\,\widetilde{u}^{m_1}_m\,\Gamma^{r_1}_{q_1m_1}\,\frac{\partial}{\partial u^r_p}\\ &= \sum_{m'} \widetilde{u}^{m'}_m\,\frac{\partial}{\partial\theta^{m'}} + \sum_{r}\ \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1}\,u^r_{r_1}\,\widetilde{u}^{m_1}_m\,\Gamma^{r_1}_{q_1m_1}\,\frac{\partial}{\partial u^r_{q_1}}. \end{aligned}\right.$$

Développons l'expression de S^i_{jkl} sous la forme :

$$S^i_{jkl} = \sum_{i',\,j',\,k',\,l'} \varepsilon_i\,\varepsilon_{i'}\,u^i_{i'}\,\widetilde{u}^{j'}_j\,\widetilde{u}^{k'}_k\,\widetilde{u}^{l'}_l\,R^{i'}_{j',\,k',\,l'}. \tag{7.42}$$

En appliquant à cette expression l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial u^r_{q_1}}$ situé à la fin du développement de $\frac{\partial}{\partial\omega^m}$, il est nécessaire de savoir calculer $\frac{\partial}{\partial u^r_{q_1}}\widetilde{u}^{j'}_j$. Établissons donc les relations générales :

$$\frac{\partial \widetilde{u}^i_j}{\partial u^k_l} = -\widetilde{u}^i_k\,\widetilde{u}^l_j, \tag{7.43}$$

pour tous $i,\ j,\ k,\ l = 1,\ \ldots,\ n$. En effet, la différentiation par rapport à u^l_k de l'identité matricielle $I_{n\times n} = U\cdot\widetilde{U}$ donne

$$\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial u^k_l} = -\widetilde{U}\cdot\frac{\partial U}{\partial u^k_l}\cdot\widetilde{U}. \tag{7.44}$$

Avec des indices, ces identités se développent et fournissent les relations désirées :

(7.45) $$\frac{\partial \widetilde{u}_j^i}{\partial u_l^k} = -\sum_{p,\,q} \widetilde{u}_q^i \, \frac{\partial u_p^q}{\partial u_l^k} \, \widetilde{u}_j^p = -\sum_{p,\,q} \widetilde{u}_q^i \, \delta_k^q \, \delta_p^l \, \widetilde{u}_j^p = -\widetilde{u}_k^i \, \widetilde{u}_j^l.$$

Ainsi, appliquons la dérivation $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$ à S_{jkl}^i. L'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial \theta^{m'}}$, qui ne dépend que des variables x^i, n'agit que sur $R_{i'j'k'l'}^{i'}$. De même, l'opérateur de dérivation $\frac{\partial}{\partial u_{q_1}^r}$ n'agit que sur les variables u_j^i et sur les variables $\widetilde{u}_j^i$. Au total, nous obtenons :

(7.46)
$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m} &= \sum_{i',\,j',\,k',\,l',\,m'} \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, u_{i'}^i \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, \widetilde{u}_m^{m'} \, \frac{\partial R_{j'k'l'}^{i'}}{\partial \theta^{m'}} + \\ &+ \sum_{i',\,j',\,k',\,l'} \sum_r \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1} \, u_{r_1}^r \, \widetilde{u}_m^{m_1} \, \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \, \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, \delta_r^i \, \delta_{i'}^{q_1} \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, R_{j'k'l'}^{i'} - \\ &- \sum_{i',\,j',\,k',\,l'} \sum_r \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1} \, u_{r_1}^r \, \widetilde{u}_m^{m_1} \, \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \, \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, u_{i'}^i \, \widetilde{u}_r^{j'} \, \widetilde{u}_j^{q_1} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, R_{j'k'l'}^{i'} - \\ &- \sum_{i',\,j',\,k',\,l'} \sum_r \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1} \, u_{r_1}^r \, \widetilde{u}_m^{m_1} \, \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \, \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, u_{i'}^i \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_r^{k'} \, \widetilde{u}_k^{q_1} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, R_{j'k'l'}^{i'} - \\ &- \sum_{i',\,j',\,k',\,l'} \sum_r \sum_{r_1,\,q_1,\,m_1} \varepsilon_{r_1} \, u_{r_1}^r \, \widetilde{u}_m^{m_1} \, \Gamma_{q_1 m_1}^{r_1} \, \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, u_{i'}^i \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_r^{l'} \, \widetilde{u}_l^{q_1} \, R_{j'k'l'}^{i'}. \end{aligned} \right.$$

Observons que le terme de la première ligne correspond exactement au premier terme de l'identité désirée (7.). Commençons par simplifier la seconde ligne, que nous désignerons par $\mathscr{L}_2$. Grâce aux symboles de Kronecker, les sommes par rapport à r et par rapport à q_1 disparaissent et l'on doit remplacer $r := i$ ainsi que $q_1 := i'$. Ensuite, plaçons la somme $\sum_{i'}$ à la fin et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs :

(7.47)
$$\mathscr{L}_2 = -\sum_{j',\,k',\,l',\,r_1,\,m_1} \varepsilon_i \, \varepsilon_{r_1} \, u_{r_1}^i \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, \widetilde{u}_m^{m_1} \left(\sum_{i'} \varepsilon_{i'} \, \Gamma_{i'm_1}^{r_1} \, R_{j'k'l'}^{i'} \right).$$

En renommant les indices de la manière suivante :

(7.48) $$(i',\, j',\, k',\, l',\, r_1,\, m_1) \longmapsto (p,\, j',\, k',\, l',\, i',\, m'),$$

nous obtenons :

(7.49) $$\mathscr{L}_2 = -\sum_{i',\,j',\,k',\,l',\,m'} \varepsilon_i \, \varepsilon_{i'} \, u_{i'}^i \, \widetilde{u}_j^{j'} \, \widetilde{u}_k^{k'} \, \widetilde{u}_l^{l'} \, \widetilde{u}_m^{m'} \left(\sum_p \varepsilon_p \, \Gamma_{pm'}^{i'} \, R_{j'k'l'}^p \right).$$

C'est exactement le deuxième terme du membre de droite de l'identité désirée (7.).

Simplifions maintenant la troisième ligne, que nous désignerons par $\mathscr{L}_3$. Observons l'apparition de $\sum_r u_{r_1}^r \widetilde{u}_r^{j'} = \delta_{r_1}^{j'}$. Ainsi, $\sum_r$ et $\sum_{r_1}$ disparaissent et l'on doit remplacer r_1 par j'. Plaçons la somme $\sum_{j'}$ à la fin et réorganisons l'ordre d'apparition des facteurs :

(7.50)

$$\mathscr{L}_3 = - \sum_{i',\,k',\,l',\,q_1,\,m_1} \varepsilon_i\, \varepsilon_{i'}\, u_{i'}^i\, \widetilde{u}_j^{q_1}\, \widetilde{u}_k^{k'}\, \widetilde{u}_l^{l'}\, \widetilde{u}_m^{m_1} \left(\sum_{j'} \varepsilon_{j'}\, \Gamma_{q_1 m_1}^{j'}\, R_{j'k'l'}^{i'} \right).$$

En renommant les indices de la manière suivante :

$$(i',\, j',\, k',\, l',\, q_1,\, m_1) \longmapsto (i',\, p,\, k',\, l',\, j',\, m'), \tag{7.51}$$

nous obtenons :

$$\mathscr{L}_3 = \sum_{i',\,j',\,k',\,l',\,m'} \varepsilon_i\, \varepsilon_{i'}\, u_{i'}^i\, \widetilde{u}_j^{j'}\, \widetilde{u}_k^{k'}\, \widetilde{u}_l^{l'}\, \widetilde{u}_m^{m'} \left(\sum_p \varepsilon_p\, \Gamma_{j'm'}^p\, R_{pk'l'}^{i'} \right). \tag{7.52}$$

C'est exactement le troisième terme du membre de droite de l'identité désirée (7.). On procède de même pour les quatrième et cinquième lignes. Au total, nous avons établi par le calcul la véracité des formules de rotation tensorielles (7.), qui expriment les dérivées covariantes $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m}$ en fonction des dérivées covariantes $\big(R_{j'k'l'}^{i'}\big)_{m'}$. Le principe de la vérification des formules générales (7.) étant maintenant évident, il est inutile d'en écrire la démonstration complète. □

Pour la dérivée covariante $\frac{\partial S_{jkl}^i}{\partial \omega^m}$, nous utiliserons dorénavant la notation contractée $\big(S_{jkl}^i\big)_m$, analogue à celle que nous avons introduite pour les dérivées covariantes des composantes R_{jkl}^i. Appliquons l'opérateur de différentation covariante $\frac{\partial}{\partial \omega^m}$ aux quatre lignes de (6.), et recopions l'identité de Bianchi (7.) :

$$\begin{cases} 0 = \big(S_{jkl}^i\big)_m + \big(S_{ikl}^j\big)_m, \\ 0 = \big(S_{jkl}^i\big)_m + \big(S_{jlk}^i\big)_m, \\ 0 = \big(S_{jkl}^i\big)_m - \big(S_{lij}^k\big)_m, \\ 0 = \big(S_{jkl}^i\big)_m + \big(S_{ljk}^i\big)_m + \big(S_{klj}^i\big)_m, \\ 0 = \big(S_{jkl}^i\big)_m + \big(S_{jmk}^i\big)_l + \big(S_{jlm}^i\big)_k. \end{cases} \tag{7.53}$$

7.54. Dénombrement des coefficients de courbure indépendants. Appelons *composantes de courbure dérivée à l'ordre* 1 les dérivées covariantes

$(R^i_{jkl})_m$. Appelons *normales* celles dont les indices satisfont les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{lll} j > i, & k > l, & \\ j \geqslant k, & i \geqslant l, & k \geqslant m. \end{array}\right. \tag{7.55}$$

LEMME 7.56. *Toute composante de courbure dérivée à l'ordre* 1 *s'exprime comme combinaison linéaire de composantes normales. Les composantes normales sont linéairement indépendantes et leur nombre est égal à* :

$$2\,C_n^2 + 9\,C_n^3 + 12\,C_n^4 + 5\,C_n^5 = \frac{n^2(n^2-1)(n+2)}{24} \tag{7.57}$$

DÉMONSTRATION. Voir [**72**]. □

8. Invariants relatifs et invariants absolus

8.1. Composantes de Ricci et courbure scalaire. Relativement au co-repère relevé, définissons les *composantes de Ricci de la courbure* S_{ij} et vérifions, en appliquant la formule fondamentale (6.54), et en simplifiant $\sum_k u^k_{i_1}\,\widetilde{u}^{k_1}_k = \delta^{k_1}_{i_1}$, qu'elles se déduise des composantes de Ricci R_{ij} par des formules de rotation tensorielle :

$$\left\{\begin{aligned} S_{ij} &:= \sum_k \varepsilon_k\, S^k_{ikj} \\ &= \sum_k \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1,\,l_1} \varepsilon_{i_1}\, u^k_{i_1}\, \widetilde{u}^{j_1}_i\, \widetilde{u}^{k_1}_k\, \widetilde{u}^{l_1}_j\, R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} \\ &= \sum_{j_1,\,k_1,\,l_1} \varepsilon_{k_1}\, \widetilde{u}^{j_1}_i\, \widetilde{u}^{l_1}_j\, R^{k_1}_{j_1 k_1 l_1} \\ &= \sum_{i_1,\,j_1} \widetilde{u}^{i_1}_i\, \widetilde{u}^{j_1}_j \left(\sum_k \varepsilon_k\, R^k_{i_1 k j_1}\right) \\ &= \sum_{i_1,\,j_1} \widetilde{u}^{i_1}_i\, \widetilde{u}^{j_1}_j\, R_{i_1 j_1}, \end{aligned}\right. \tag{8.2}$$

avec

$$R_{ij} := \sum_k \varepsilon_k\, R^k_{ikj}. \tag{8.3}$$

De même, définissons la *courbure scalaire* S du co-repère relevé et vérifions qu'elle est indépendante des variables de rotation, grâce aux relations (5.20) et grâce aux simplifications $\sum_i u_{i_1}^i \, \widetilde{u}_i^{k_1} = \delta_{i_1}^{k_1}$ et $\sum_j u_{j_1}^j \, \widetilde{u}_j^{l_1} = \delta_{j_1}^{l_1}$ à la troisième ligne :

(8.4)
$$\begin{cases} S := \sum_{i<j} \varepsilon_i \, \varepsilon_j \, S_{jij}^i = \sum_{i,j} \varepsilon_i \, \varepsilon_j \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \widetilde{u}_i^{i_1} \, \widetilde{u}_j^{j_1} \, \widetilde{u}_i^{k_1} \, \widetilde{u}_j^{l_1} \, \frac{R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}}{2} \\ \quad = \sum_{i,j} \sum_{i_1, j_1, k_1, l_1} \varepsilon_{i_1} \, \varepsilon_{j_1} \, u_{i_1}^i \, u_{j_1}^j \, \widetilde{u}_i^{k_1} \, \widetilde{u}_j^{l_1} \, \frac{R_{j_1 k_1 l_1}^{i_1}}{2} = \sum_{i_1, j_1} \varepsilon_{i_1} \, \varepsilon_{j_1} \, \frac{R_{j_1 i_1 j_1}^{i_1}}{2} \\ \quad = \sum_{i_1 < j_1} \varepsilon_{i_1} \, \varepsilon_{j_1} \, R_{j_1 i_1 j_1}^{i_1} = R, \end{cases}$$

avec

(8.5)
$$R := \sum_{i<j} \varepsilon_i \, \varepsilon_j \, R_{jij}^i.$$

Enfin, rappelons que la forme quadratique différentielle qui définit les rapports métriques infinitésimaux

(8.6)
$$\sum_i \varepsilon_i \, (\omega^i)^2 = \sum_i \varepsilon_i \, (\theta^i)^2$$

ne dépend pas des variables de rotation u_q^p, puisque par définition la matrice U stabilise la forme quadratique $\sum_i \varepsilon_i \, (X^i)^2$. Ces observations préliminaires motivent les définitions qui suivent.

8.7. Invariants différentiels. Considérons d'abord le cas des surfaces. La *formula egregia* (1.5) montre que la courbure $\kappa = \kappa(u, v)$ d'une surface :

(8.8)
$$\kappa = \mathscr{K} \left(J_{u,v}^2 E, \, J_{u,v}^2 F, \, J_{u,v}^2 G \right),$$

s'exprime par une fonction rationnelle universelle $\mathscr{K}$, qui dépend des dérivées partielles d'ordre deux des coefficients métriques E, F et G. Nous dirons que cette fonction est un *invariant différentiel d'ordre* 2. La notion d'invariant différentiel recouvre deux propriétés bien distinctes :

1. **l'universalité :** un invariant différentiel I est une expression qui dépend fonctionnellement des données initiales (pour le problème d'équivalence considéré), ainsi que des dérivées partielles jusqu'à un certain ordre α de ces données initiales ; on appelle *ordre* de l'invariant différentiel cet entier α ; *la fonction $\mathscr{I}$ de ces dérivées partielles doit être universelle, indépendante du système de coordonnées* ; ainsi, si on note $\mathsf{H} = (\mathsf{h}_1, \ldots, \mathsf{h}_\lambda)$ ces données initiales, où les h_i sont des fonctions de variables $\mathsf{x} = (\mathsf{x}^1, \ldots, \mathsf{x}^\nu)$, un invariant différentiel est une fonction du jet d'ordre α de H :

(8.9)
$$I = \mathscr{I} \left(J_{\mathsf{x}}^\alpha \, \mathsf{H} \right),$$

de telle sorte que dans tout autre système de coordonnées $\bar{\mathsf{x}}$, cet invariant différentiel est donné par la *même fonction* $\mathscr{I}$, ce que nous écrirons :

$$\overline{I} = \mathscr{I}\left(J^{\alpha}_{\bar{\mathsf{x}}}\overline{\mathsf{H}}\right), \tag{8.10}$$

où $\overline{\mathsf{H}}$ se déduit de H par la relation $\overline{\mathsf{H}}(\bar{\mathsf{x}}) = \mathsf{H}(\mathsf{x})$.

2. l'invariance : pour toute équivalence $\mathsf{x} \mapsto \bar{\mathsf{x}} = \bar{\mathsf{x}}(\mathsf{x})$ entre deux structures géométriques (par exemple, une isométrie entre variétés pseudo-riemanniennes), les valeurs des deux invariants différentiels doivent coïncider :

$$\overline{I}(\bar{\mathsf{x}}(\mathsf{x})) = I(\mathsf{x}), \tag{8.11}$$

pour tout x. De manière équivalente, on doit avoir :

$$\mathscr{I}\left(J^{\alpha}_{\bar{\mathsf{x}}}\overline{\mathsf{H}}(\bar{\mathsf{x}}(\mathsf{x}))\right) = \mathscr{I}\left(J^{\alpha}_{\mathsf{x}}\mathsf{H}(\mathsf{x})\right), \tag{8.12}$$

pour tout x. Ces équations n'ont de sens que lorsque la même variable x (ou $\bar{\mathsf{x}}$) apparaît dans le membre de droite et dans le membre de gauche.

Dans la plupart des applications, les invariants différentiels sont des fonctions rationnelles d'une taille assez massive. La *formula egregia* (1.5), déjà relativement complexe, est l'un des invariants différentiels dont l'expression est la plus concise.

Évidemment, la courbure de Gauss (1.5) d'une surface satisfait les deux propriétés ci-dessus. Plus généralement, la courbure scalaire de la variété pseudo-riemannienne M définie par (8.5) est un invariant différentiel d'ordre 2. Dans ce cas, les données initiales sont les composantes de la matrice $H = (h^i_j(x))$ des coefficients des formes $\theta^i = \sum_j h^i_j(x) \cdot dx^j$ par lesquelles on diagonalise le $ds^2 = \sum_i \varepsilon_i\,(\theta^i)^2$. Nous noterons donc la courbure scalaire sous la forme :

$$R = \mathscr{R}\left(J^2_x H\right), \tag{8.13}$$

où la fonction $\mathscr{R}$ est indépendante du système de coordonnées. Ici, les transformations sont des isométries $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ et les coordonnées $(\mathsf{x}^1, \ldots, \mathsf{x}^\nu)$ ne sont autres que les coordonnées $(x^1, \ldots, x^n)$.

8.14. Invariants différentiels absolus et relatifs D'après le Théorème 5.24, le problème d'équivalence isométrique entre variétés pseudo-riemanniennes se ramène à l'étude des transformations de la forme :

$$\begin{cases} \bar{x}^m &= \bar{x}^m\left(x^{m_1}\right) \\ \bar{u}^p_q &= \bar{u}^p_q\left(x^{m_1},\, u^{p_1}_{q_1}\right), \end{cases} \tag{8.15}$$

qui satisfont $\overline{\omega}^i = \omega^i$. Ici, les coordonnées $(\mathsf{x}^1, \ldots, \mathsf{x}^\nu)$ ne sont autres que les coordonnées (x^m, u^p_q), et la dimension $\nu = \frac{n(n+1)}{2}$ de la variété de base a augmenté. Nous appellerons *invariant différentiel relatif* toute fonction invariante des variables x^m et u_q^p qui est conservée par tout changement de coordonnées (8.15) satisfaisant $\overline{\omega}^i = \omega^i$.

LEMME 8.16. *Les composantes de courbure S^i_{jkl} sont des invariants différentiels relatifs.*

DÉMONSTRATION. Premièrement, observons que les expressions (6.54) de S^i_{jkl}, en tenant compte des expression (3.44) des $R^{i_1}_{j_1k_1l_1}$, sont universelles, indépendantes du système de coordonnées. Deuxièmement, établissons que ces coefficients sont invariants. Pour cela, raisonnons comme dans la preuve de l'Assertion (3.32). Appliquons l'opérateur de différentiation extérieure aux identités $\overline{\omega}^i = \omega^i$, valables après remplacement des variables $\bar{x}^m$ en fonction des x^{m_1} et des variables $\bar{u}_q^p$ en fonction des variables $\bar{u}_q^p(x^{m_1}, u_{q_1}^{p_1})$, ce qui donne :

$$d\overline{\omega}^i = \varepsilon_i \sum_j \overline{\omega}^j \wedge \overline{\omega}^i_j = \varepsilon_i \sum_j \omega^j \wedge \omega^i_j = d\omega^i, \tag{8.17}$$

pour $i = 1, \ldots, n$. Grâce aux relations $\overline{\omega}^j = \omega^j$ et grâce à l'unicité des formes $\overline{\omega}^i_j$, nous en déduisons que $\overline{\omega}^i_j = \omega^i_j$, toujours après remplacement des variables $\bar{x}^m$ en fonction des x^{m_1} et des variables $\bar{u}_q^p$ en fonction des variables $\bar{u}_q^p(x^{m_1}, u_{q_1}^{p_1})$. À nouveau, grâce aux identités suivantes :

$$\begin{cases} \sum_{k<l} S^i_{jkl} \cdot \omega^k \wedge \omega^l & = d\omega^i_j - \sum_k \varepsilon_k \cdot \omega^k_j \wedge \omega^i_k \\ & = d\bar{\omega}^i_j - \sum_k \varepsilon_k \cdot \overline{\omega}^k_j \wedge \overline{\omega}^i_k \\ & = \sum_{k<l} \overline{S}^i_{jkl} \cdot \overline{\omega}^k \wedge \overline{\omega}^l, \end{cases} \tag{8.18}$$

et grâce à l'unicité des coefficients de courbure, nous déduisons les relations :

$$\overline{S}^i_{jkl} = S^i_{jkl}, \tag{8.19}$$

comme annoncé. □

Nous appellerons *invariant différentiel absolu* tout invariant différentiel relatif qui est indépendant des variables de rotation u_q^p. Par exemple, le calcul effectué en (8.) ci-dessus montre que la courbure scalaire $S := \sum_{i<j} \varepsilon_i \, \varepsilon_j \, S^i_{jij}$ est un invariant différentiel absolu.

8.20. Différentiation covariante des invariants différentiels relatifs. Soit $I = \mathscr{I}\,(J^\alpha_x H,\, U)$ un invariant différentiel relatif. En appliquant l'opérateur de différentiation extérieure, on obtient :

$$dI = \sum_i \frac{\partial I}{\partial \omega^i} \cdot \omega^i + \sum_{i<j} \frac{\partial I}{\partial \omega^i_j} \cdot \omega^i_j. \tag{8.21}$$

Rappelons que les changement de coordonnées (8.15) satisfont non seulement $\overline{\omega}^i = \omega^i$ mais encore $\overline{\omega}^i_j = \omega^i_j$. Par conséquent, la relation $dI = d\overline{I}$ fournit une collection de $\frac{n(n+1)}{2}$ invariants différentiels relatifs supplémentaires :

$$\frac{\partial I}{\partial \omega^i} = \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{\omega}^i}, \qquad \frac{\partial I}{\partial \omega^i_j} = \frac{\partial \overline{I}}{\partial \overline{\omega}^i_j}. \tag{8.22}$$

Par différentiation covariante (jusqu'à un ordre arbitraire) des invariants différentiels relatifs S^i_{jkl}, nous obtenons alors *une infinité d'invariants différentiels relatifs* :

$$\frac{\partial^{\kappa+\tau} S^i_{jkl}}{\partial \omega^{m_1} \cdots \partial \omega^{m_\kappa} \partial \omega^{p_1}_{q_1} \cdots \partial \omega^{p_\tau}_{q_\tau}}. \tag{8.23}$$

En particulier, on retrouve les dérivées covariantes du premier ordre $\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^m}$ et $\frac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^p_q}$, que nous avons déjà étudiées dans la Section 7. Rappelons les relations (7.26), d'après lesquelles les dérivées covariantes des S^i_{jkl} par rapport aux 1-formes ω^p_q s'expriment en fonction des $S^{i_1}_{j_1 k_1 l_1}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S^i_{jkl}}{\partial \omega^p_q} & = -\varepsilon_q\, \delta^i_p\, S^q_{jkl} + \varepsilon_p\, \delta^i_q\, S^p_{jkl} + \varepsilon_p\, \delta^q_j\, S^i_{pkl} - \varepsilon_q\, \delta^p_j\, S^i_{qkl} + \\ & \quad + \varepsilon_p\, \delta^q_k\, S^i_{jpl} - \varepsilon_q\, \delta^p_k\, S^i_{jql} + \varepsilon_p\, \delta^q_l\, S^i_{jkp} - \varepsilon_q\, \delta^p_l\, S^i_{jkq} \\ & = \Lambda^{i\,q}_{jkl\,p}\left(S^{i'}_{j'k'l'}\right), \end{cases} \tag{8.24}$$

avec une fonction $\Lambda^{i\,q}_{jkl\,p}\left(S^{i'}_{j'k'l'}\right)$ qui est linéaire par rapport aux $S^{i'}_{j'k'l'}$. Autrement dit, les différentiations covariantes par rapport aux 1-formes ω^p_q n'apportent aucun invariant différentiel relatif qui soit nouveau par rapport aux $S^{i_1}_{j_1 k_1 l_1}$. Ces relations (8.) peuvent être différentiées un nombre arbitraire de fois afin d'établir un énoncé important, d'après lequel les différentiations covariantes par rapport aux variables ω^p_q n'apportent essentiellement aucun invariant différentiel relatif qui ne soit déjà connu en différentiant seulement par rapport aux variables ω^m. Rappelons la notation contractée :

$$\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa} := \frac{\partial^\kappa S^i_{jkl}}{\partial \omega^{m_1} \partial \omega^{m_2} \cdots \partial \omega^{m_\kappa}}. \tag{8.25}$$

LEMME 8.26. *Pour tout $\kappa \in \mathbb{N}$, pour tous entiers $m_1, \ldots, m_\kappa$ compris entre 1 et n, pour tout $\tau \in \mathbb{N}$, pour tous entiers $p_1, \ldots, p_\tau$, $q_1, \ldots, q_\tau$ compris entre 1 et n, il existe une fonction linéaire universelle $\Lambda_{jkl\,m_1\cdots m_\kappa p_1\cdots p_\tau}^{i\,q_1\cdots q_\tau}$ telle que* :

(8.27)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\kappa+\tau} S_{jkl}^i}{\partial\omega^{m_1}\cdots\partial\omega^{m_\kappa}\partial\omega_{q_1}^{p_1}\cdots\partial\omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \\ \quad = \Lambda_{jkl\,m_1\cdots m_\kappa p_1\cdots p_\tau}^{i\,q_1\cdots q_\tau}\left(S_{j'k'l'}^{i'}, \left(S_{j'k'l'}^{i'}\right)_{m_1'}, \ldots, \left(S_{j'k'l'}^{i'}\right)_{m_1'\cdots m_\kappa'}\right). \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous affirmons qu'il suffit de démontrer cette propriété pour $\kappa = 0$ et τ quelconque. En effet, si nous appliquons les dérivations $\frac{\partial}{\partial\omega^{m_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial\omega^{m_\kappa}}$ aux relations

$$\frac{\partial^\tau S_{jkl}^i}{\partial\omega_{q_1}^{p_1}\cdots\partial\omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \Lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau}^{i\,q_1\cdots q_\tau}\left(S_{j'k'l'}^{i'}\right), \tag{8.28}$$

nous obtenons les relations désirées (8.27) ; notons que le membre de droite dépend de toutes les dérivées covariantes $\left(S_{j'k'l'}^{i'}\right)_{m_1'\cdots m_\rho'}$, $\rho \leq \kappa$, jusqu'à l'ordre κ exactement.

Démontrons donc ces relations (8.28) par récurrence sur l'entier τ, en les développant – pour plus de clarté – sous la forme de combinaisons linéaires :

$$\frac{\partial^\tau S_{jkl}^i}{\partial\omega_{q_1}^{p_1}\cdots\partial\omega_{q_\tau}^{p_\tau}} = \sum_{i',j',k',l'} \lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau\,j'k'l'} \cdot S_{j'k'l'}^{i'}, \tag{8.29}$$

avec des constantes $\lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau\,j'k'l'}$. Pour $\tau = 1$, cette relation s'identifie à la relation (8.24), déjà démontrée. Soient $p_{\tau+1}$ et $q_{\tau+1}$ deux nouveaux entiers, compris entre 1 et n. Appliquons l'opérateur $\frac{\partial}{\partial\omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}}$ et utilisons la relation (8.24) :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^{\tau+1} S_{jkl}^i}{\partial\omega_{q_1}^{p_1}\cdots\partial\omega_{q_\tau}^{p_\tau}\partial\omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}} = \displaystyle\sum_{i',j',k',l'} \lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau\,j'k'l'} \cdot \frac{\partial S_{j'k'l'}^{i'}}{\partial\omega_{q_{\tau+1}}^{p_{\tau+1}}} \\ \quad = \displaystyle\sum_{i',j',k',l'} \sum_{i'',j'',k'',l''} \lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau\,j'k'l'} \lambda_{j'k'l'\,p_{\tau+1}\,i''}^{i'\,q_{\tau+1}\,j''k''l''} \cdot S_{j''k''l''}^{i''} \\ \quad = \displaystyle\sum_{i',j',k',l'} \lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau p_{\tau+1}\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau q_{\tau+1}\,j'k'l'} \cdot S_{j'k'l'}^{i'}, \end{cases} \tag{8.30}$$

ce qui donne une relation du type désiré, si l'on pose :

$$\lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau p_{\tau+1}\,i'}^{i\,q_1\cdots q_\tau q_{\tau+1}\,j'k'l'} := \sum_{i'',j'',k'',l''} \lambda_{jkl\,p_1\cdots p_\tau\,i''}^{i\,q_1\cdots q_\tau\,j''k''l''} \lambda_{j''k''l''\,p_{\tau+1}\,i'}^{i''\,q_{\tau+1}\,j'k'l'}. \tag{8.31}$$

La linéarité est préservée. Ceci complète la démonstration. □

8.32. Isométries de variétés pseudo-riemanniennes. Nous pouvons maintenant énoncer le théorème capital de la théorie d'Élie Cartan, qui donne une solution au problème d'équivalence.

D'après le Théorème 5., toute isométrie $x \mapsto \bar{x} = \bar{x}(x)$ d'une variété pseudo-riemannienne $(M,\, ds^2)$ sur une autre variété pseudo-riemannienne $(\overline{M},\, d\bar{s}^2)$ se relève en une application $(x^m,\, u_q^p) \mapsto (\bar{x}^m,\, \bar{u}_q^p)$ satisfaisant $\overline{\omega}^i = \omega^i$. Grâce au Lemme 8., les invariants fondamentaux S^i_{jkl}, qui dépendent des variables x^m et u_q^p, coïncident avec les invariants fondamentaux $\overline{S}^i_{jkl}$. En calculant les différentielles dS^i_{jkl} et $d\overline{S}^i_{jkl}$ par la formule (6.28), on déduit que $\left(S^i_{jkl}\right)_m = \left(\overline{S}^i_{jkl}\right)_m$ et plus généralement

$$\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa} = \left(\overline{S}^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}, \tag{8.33}$$

pour tous entiers $i,\, j,\, k,\, l$ et $m_1,\, m_2,\, \dots,\, m_\kappa$ compris entre 1 et n. En résumé, si $(M,\, ds^2)$ et $(\overline{M},\, d\bar{s}^2)$ sont isométriques, toutes les dérivées covariantes de leurs coefficients de courbure doivent coïncider. De manière équivalente, si on définit le graphe de toutes les dérivées covariantes des S^i_{jkl} par rapport aux formes ω^m jusqu'à l'ordre κ par

(8.34)

$$\mathscr{V}(M) := \left\{ \left(S^i_{jkl}\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right)\right)_{m_1 \cdots m_\kappa} : i,\, j,\, k,\, l,\, m_1,\, \dots,\, m_\kappa = 1,\, \dots,\, n \right\},$$

l'équivalence de $(M,\, ds^2)$ et de $(\overline{M},\, d\bar{s}^2)$ entraîne que

$$\mathscr{V}_\kappa(M) = \mathscr{V}_\kappa\left(\overline{M}\right). \tag{8.35}$$

Le théorème d'Élie Cartan établit la réciproque de cette observation, modulo des hypothèses de rang constant qui sont nécessaire pour des raisons techniques. Soit $(M,\, ds^2)$ une variété pseudoriemannienne quelconque. Notons r_0 le maximum du rang l'application analytique

$$\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right) \longmapsto \left(S^i_{jkl}\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right)\right)_{1 \leqslant i,\, j,\, k,\, l \leqslant n}, \tag{8.36}$$

à valeurs dans $\mathbb{C}^{n^4}$. Si l'on ne retenait que les composantes de courbure qui sont normales, cette application serait à valeurs dans $\mathbb{C}^{\frac{n^2(n^2-1)}{2}}$. Déplaçons le point central $(0,\, I) \in M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ en un point $(x_0,\, U_0)$ où le rang de cette application est égal à r_0 et localisons $M \times \mathscr{O}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ dans un petit voisinage de ce point. Puisque le rang ne peut qu'augmenter localement, le rang de l'application (8.36) est constant au voisinage de $(x_0,\, U_0)$.

Définissons ensuite r_1 le maximum du rang de l'application analytique

$$\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right) \longmapsto \left(S^i_{jkl}\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right),\, \left(S^i_{jkl}\left(x^\alpha,\, u_\gamma^\beta\right)_m\right)_{1 \leqslant i,\, j,\, k,\, l,\, m \leqslant n}\right), \tag{8.37}$$

à valeurs dans $\mathbb{C}^{n^4+n^5}$ et déplaçons encore le point central $(x_0,\, U_0)$ en un point $(x_1,\, U_1)$ où le rang de cette application est égal à r_1. Définissons de même $r_2,\, r_3,\, r_\kappa$ et des nouveaux points centraux $(x_2,\, U_2),\, (x_3,\, U_3),\, \dots,\, (x_\kappa,\, u_\kappa)$. On a évidemment

$$r_0 \leqslant r_1 \leqslant r_2 \leqslant r_3 \leqslant \cdots \leqslant r_\kappa \leq \frac{n(n+1)}{2}. \tag{8.38}$$

Si κ est le premier entier tel que $r_{\kappa+1} = r_\kappa$, on démontre que $r_\kappa = r_{\kappa+1} = r_{\kappa+2} = r_{\kappa+3} = \cdots$.

THÉORÈME 8.39. *Soit $(M,\, ds^2)$ une variété pseudo-riemannienne localisée en un point $(x_\kappa,\, U_\kappa)$ où les rangs $r_0,\, r_1,\, \dots,\, r_\kappa, r_{\kappa+1} = r_\kappa$ sont maximaux et localement constant. Alors une autre variété pseudo-riemannienne $(\overline{M},\, d\bar{s}^2)$ est isométrique à $(M,\, ds^2)$* si et seulement si *$\bar{\kappa} = \kappa$, $\bar{r}_0 = r_0$, $\bar{r}_1 = r_1$, $\dots \bar{r}_\kappa = r_\kappa$ et les rangs des dérivées covariantes des composantes de courbure $\left(\overline{S}^i_{jkl}\right)_{m_1\cdots m_\lambda}$ sont localement constants égaux à r_λ pour $\lambda = 1,\, \dots,\, \kappa$.*

8.40. Relativisation d'une forme différentielle covariante absolue. Comme dans l'hypothèse du Théorème (1.85), partons d'une forme différentielle quadratique telle que (1.86) qui est covariante de la métrique infinitésimale et rééxprimons-la d'abord en fonction des 1-formes θ^{i_1} :

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i,\,j} C^0_{ij} \cdot dx^i dx^j &= \sum_{i,\,j} \mathscr{C}^0_{ij} \left(J^2_x G\right) \cdot dx^i dx^j \\ &= \sum_{i,\,j} \sum_{i_1,\,j_1} \mathscr{C}^0_{ij} \left(J^2_x G\right) \widetilde{h}^i_{i_1} \widetilde{h}^j_{j_1} \cdot \theta^{i_1} \theta^{j_1} \\ &=: \sum_{i,\,j} \mathscr{C}_{ij} \left(J^2_x H\right) \cdot \theta^i \theta^j, \end{aligned} \right. \tag{8.41}$$

où nous avons introduit

$$\left\{ \begin{aligned} C_{ij} &:= \sum_{i_1,\,j_1} \mathscr{C}^0_{i_1 j_1} \left(J^2_x G\right) \widetilde{h}^{i_1}_i \widetilde{h}^{j_1}_j \\ &= \mathscr{C}_{ij} \left(J^2_x H\right) \end{aligned} \right. \tag{8.42}$$

pour désigner les nouveaux coefficients de cette forme quadratique différentielle covariante. Puisque la matrice $G = {}^T H \cdot E \cdot H$ s'exprime en fonction de H (d'après (2.12)) et puisque $\widetilde{H}$ s'exprime aussi en fonction de H (via les formules de Cramer que nous n'avons pas explicitées), il est légitime de considérer que $\mathscr{C}_{ij}$ est une fonction universelle du jet d'odre 2 de H. Grâce à deux différentiations de la relation $G = {}^T H \cdot E \cdot H$, on vérifie alors que cette fonction $\mathscr{C}_{ij}$ est linéaire par rapport aux dérivées partielles d'ordre 2 des éléments de la matrice H.

Réexprimons maintenant cette forme quadratique différentielle covariante en fonction des 1-formes ω^i :

$$(8.43)\qquad \begin{cases} \sum_{i,j} C_{ij}\cdot\theta^i\theta^j &= \sum_{i,j} \mathscr{C}_{ij}\left(J_x^2 H\right)\cdot\theta^i\theta^j \\ &= \sum_{i,j}\sum_{i_1,j_1} \mathscr{C}_{ij}\left(J_x^2H\right)\,\widetilde{u}_{i_1}^i\,\widetilde{u}_{j_1}^j\cdot\omega^{i_1}\omega^{j_1} \\ &= \sum_{i,j}\mathscr{D}_{ij}\left(J_x^2H,\,U\right)\cdot\omega^i\omega^j \\ &= \sum_{i,j} D_{ij}\cdot\omega^i\omega^j, \end{cases}$$

où nous avons introduit les coefficients :

(8.44)

$$D_{ij}=\mathscr{D}_{ij}\left(J_x^2H,\,U\right):=\sum_{i_1,j_1}\widetilde{u}_i^{i_1}\,\widetilde{u}_j^{j_1}\,\mathscr{C}_{i_1j_1}\left(J_x^2H\right)=\sum_{i_1,j_1}\widetilde{u}_i^{i_1}\,\widetilde{u}_j^{j_1}\,C_{i_1j_1},$$

qui se déduisent des $\mathscr{C}_{ij}$ par les mêmes formules de rotation tensorielle que celles qui relient les S_{ij} aux R_{ij}, *i.e.* $S_{ij}=\sum_{i_1,j_1}\widetilde{u}_i^{i_1}\,\widetilde{u}_j^{j_1}\,R_{i_1j_1}$. Par construction, les fonctions $\mathscr{D}_{ij}$ sont indépendantes du système de coordonnées.

Rappelons que les composantes de courbure S_{jkl}^i sont des invariants différentiels relatifs. Il en découle que les composantes «de Ricci» $S_{ij}:=\sum_k S_{ikj}^k$ sont des invariants différentiels relatifs. Au même titre :

LEMME 8.45. *Les $D_{ij}=\mathscr{D}_{ij}\left(J_x^2H,\,U\right)$ sont des invariants différentiels relatifs.*

DÉMONSTRATION. En effet, s'il existe une transformation isométrique relevée (8.) telle que $\overline{\omega}^i=\omega^i$, on a par hypothèse $\sum_{i,j}\overline{C}_{ij}^0\,d\bar{x}^id\bar{x}^j=\sum_{i,j}C_{ij}^0\,dx^idx^j$ puis $\sum_{i,j}\overline{C}_{ij}\,\bar{\theta}^i\bar{\theta}^j=\sum_{i,j}C_{ij}\,\theta^i\theta^j$ et enfin :

$$(8.46)\qquad \sum_{i,j}\overline{D}_{ij}\cdot\overline{\omega}^i\overline{\omega}^j=\sum_{i,j}D_{ij}\cdot\omega^i\omega^j,$$

ce qui donne $\overline{D}_{ij}=D_{ij}$. □

8.47. Théorème d'unicité. Entamons maintenant la démonstration du Théorème 1.85. Posons $n=4$ et $\mathsf{p}=3$. Nous venons d'établir que la forme quadratique covariante $\sum_{i,j=1}^4 C_{ij}^0\cdot dx^idx^j$ donnait naissance à une forme quadratique $\sum_{i,j=1}^4 D_{ij}\cdot\omega^i\omega^j$ dont les coefficients D_{ij} sont des invariants relatifs. D'après le Théorème 8.39, les composantes de courbure S_{jkl}^i et leurs dérivées covariantes forment un système complet d'invariants différentiels relatifs, qui permet de résoudre le problème d'équivalence. Il en découle que les D_{ij} sont nécessairement des fonctions de ces dérivées covariantes

$\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}$. On peut démontrer que toute combinaisons linéaire non triviale des dérivées covariantes $\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}$ fait intervenir des dérivées de la matrice fondamentale H d'ordre strictement supérieur à 2. Pour cela, il faut considérer les dérivées covariantes *normales* $\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}$, c'est-à-dire dont les indices satisfont les inégalités :

$$\left\{\begin{array}{lll} j > i, & k > l, & \\ j \geqslant k, & i \geqslant l, & k \geqslant m_1 \geqslant m_2 \geqslant \cdots \geqslant m_\kappa. \end{array}\right. \tag{7.55}$$

En généralisant le Lemme 7.56, on établirait que toute dérivée covariante s'exprime en fonction des dérivées covariante normale et que les dérivées covariantes normales sont linéairement indépendantes. Il suffit alors d'observer que les dérivées covariantes normales incorporent des dérivées de la matrice H jusqu'à l'ordre $\kappa + 2$.

Par un raisonnement que nous ne sommes pas encore parvenus à déchiffrer et qui fait appel à sa théorie des systèmes de Pfaff en involution, Élie Cartan semble établir un énoncé plus général : *toute fonction* (linéaire ou non-linéaire) *des dérivées covariantes* $\left(S^i_{jkl}\right)_{m_1 m_2 \cdots m_\kappa}$ *qui ne fait intervenir que des dérivées de la matrice H est nécessairement une fonction des seuls invariants relatifs fondamentaux* S^i_{jkl}. Puisque les D_{ij} doivent être linéaires par rapport aux dérivées partielles d'ordre exactement égal à 2 des coefficients métriques g_{ij}, il en découle alors immédiatement que les D_{ij} sont des combinaisons linéaires à coefficients constants des S^i_{jkl}.

Nous admettrons cet énoncé sans démonstration. De manière équivalente, nous ajouterons au Théorème 1.85 l'hypothèse «simplificatrice» d'après laquelle les C^0_{ij} sont des fonctions des seuls composantes de courbure $A_{ijk}{}^l$.

En résumé, supposons dorénavant que chaque invariant relatif D_{ij} est une combinaisons linéaire à coefficients constants des composantes de courbure S^m_{pqr}. La suite de la démonstration nécessite d'analyser plus finement la géométrie des transformations qui stabilisent le ds^2 diagonalisé.

9. Forme quadratique de Riemann-Christoffel

Considérons maintenant la forme quadratique

$$\Phi := \sum_{i<j} \sum_{k<l} S^i_{jkl} \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l, \tag{9.1}$$

définie sur l'espace des $\frac{n(n-1)}{2}$ deux formes $(\omega^i \wedge \omega^j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$.

LEMME 9.2. *La forme quadratique de Riemann-Christoffel est un invariant absolu* : *elle s'exprime en fonction des* 2*-formes* $(\theta^i \wedge \theta^j)_{1 \leqslant i < j \leqslant n}$ *et des* *composantes de courbure R^i_{jkl} comme suit* :

$$\Phi = \sum_{i<j} \sum_{k<l} R^i_{jkl} \cdot \theta^i \wedge \theta^j \cdot \theta^k \wedge \theta^l. \tag{9.3}$$

DÉMONSTRATION. Utilisons tout d'abord l'antisymétrie de S^i_{jkl} par rapport aux deux couples $(i,\, j)$ et $(k,\, l)$ pour écrire $\Phi = \frac{1}{4} \sum_{i,\,j,\,k,\,l} S^i_{jkl} \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l$. Insérons les cinq formules de rotation $S^i_{jkl} = \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1,\,l_1} \widetilde{u}^{i_1}_i \, \widetilde{u}^{j_1}_j \, \widetilde{u}^{k_1}_k \, \widetilde{u}^{l_1}_l \cdot R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1}$, $\omega^i = \sum_{i_2} u^i_{i_2} \cdot \theta^{i_2}$, $\omega^j = \sum_{i_2} u^j_{j_2} \cdot \theta^{j_2}$, $\omega^k = \sum_{i_2} u^k_{k_2} \cdot \theta^{k_2}$ et $\omega^l = \sum_{i_2} u^l_{l_2} \cdot \theta^{l_2}$ et simplifions, ce qui donne :

(9.4)

$$\begin{cases} \Phi & = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{i,\,j,\,k,\,l} S^i_{jkl} \cdot \omega^i \wedge \omega^j \cdot \omega^k \wedge \omega^l \\ & = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{i,\,j,\,k,\,l} \sum_{i_1,\,j_1,\,k_1,\,l_1} \sum_{i_2,\,j_2,\,k_2,\,l_2} \widetilde{u}^{i_1}_i \, \widetilde{u}^{j_1}_j \, \widetilde{u}^{k_1}_k \, \widetilde{u}^{k_1}_l \, u^i_{i_2} \, u^j_{j_2} \, u^k_{k_2} \, u^l_{l_2} \, R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} \cdot \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \, \theta^{i_2} \wedge \theta^{j_2} \cdot \theta^{k_2} \wedge \theta^{l_2} \\ & = \dfrac{1}{4} \displaystyle\sum_{i_1,\,j_1,\,k_1,\,l_1} R^{i_1}_{j_1 k_1 l_1} \cdot \theta^{i_1} \wedge \theta^{j_1} \cdot \theta^{k_1} \wedge \theta^{l_1}. \end{cases}$$

□

Cette forme quadratique possède une signification géométrique importante. Soit P un 2-plan contenu dans l'espace tangent T_pM à un point p de la variété pseudo-riemannienne M. Supposons ce plan P engendré par deux vecteurs $v,\, w \in T_pM$ linéairement indépendants. Alors la *courbure sectionnelle* de M dans la direction de P est définie par

$$\mathrm{Courbure}(P) := \frac{\Phi(v \wedge w)}{(\mathrm{aire}\, v \wedge w)^2}. \tag{9.5}$$

On vérifie que cette quantité est indépendante de la base $(v,\, w)$ choisie pour engendrer le 2-plan P.

9.6. Représentations du groupe pseudo-orthogonal. En suivant Élie Cartan, nous allons étudier les invariants de la forme quadratique de Riemann-Christoffel lorsque l'on effectue des transformations qui conservent la forme quadratique de Minkowski sur l'espace tangent. Cette étude est naturelle, puisqu'on démontre sans difficulté que la donnée des composantes de courbure S^i_{jkl} est équivalente à la donnée des courbures sectionnelles dans toutes les directions, c'est-à-dire à la donnée de la forme quadratique de Riemann-Christoffel.

10. Paramétrisation des 2-plans dans $\mathbb{C}^4$

Afin d'analyser plus profondément la signification géométrique de la forme quadratique de Riemann-Christoffel et de la courbure sectionnelle, il est nécessaire d'étudier la structure géométrique de l'ensemble des 2-plans contenus dans l'espace tangent à une variété pseudo-riemannienne de dimension quatre. En travaillant dans $\mathbb{C}^4$ (et dans l'espace projectif $P_3(\mathbb{C})$) au lieu de $\mathbb{R}^4$, la complexification fait apparaître deux familles de droites complexes à un paramètre qui remplissent la quadrique de Minkowski.

10.1. Vecteurs et bivecteurs dans $\mathbb{C}^4$. Tout point de $\mathbb{C}^4$ sera représenté par un quadruplet (z^1, z^2, z^3, z^4) de nombres complexes. Dans $\mathbb{C}^4$ vu comme espace vectoriel, introduisons la base canonique constituée des quatre vecteurs $e_1 := (1, 0, 0, 0)$, $e_2 := (0, 1, 0, 0)$, $e_3 := (0, 0, 1, 0)$ et $e_4 := (0, 0, 0, 1)$. Tout vecteur $v \in \mathbb{C}^4$ s'écrit alors de manière unique sous la forme d'une combinaison linéaire :

$$v = v^1 \cdot e_1 + v^2 \cdot e_2 + v^3 \cdot e_3 + v^4 \cdot e_4, \tag{10.2}$$

où les nombres complexes v^1, v^2, v^3 et v^4 sont appelés *coordonnées* de v. Nous pouvons identifier abstraitement les quantités z^i, $i = 1, 2, 3, 4$, avec des *formes linéaires* sur $\mathbb{C}^4$ en définissant :

$$z^1(v) := v^1, \qquad z^2(v) := v^2, \qquad z^3(v) := v^3, \qquad z^4(v) := v^4. \tag{10.3}$$

Géométriquement, un vecteur $\overrightarrow{0P}$ dans $\mathbb{C}^4$ est un *segment orienté*, ayant l'origine 0 à sa base et un point $P \in \mathbb{C}^4$ quelconque à son extrémité. C'est une quantité unidimensionnelle. Les *bivecteurs* fournissent l'analogue bidimensionnel des vecteurs ; ils sont définis comme suit. Soient v et w deux vecteurs de $\mathbb{C}^4$. Considérons que le parallélogramme délimité par les deux vecteurs v et w dans le 2-plan $P(v, w)$ qu'ils engendrent est une quantité nouvelle, appelée *bivecteur* et noté $v \wedge w$, étant entendu que le vecteur w glisse dans le sens de v pour déployer l'aire du parallélogramme contenu dans le 2-plan $P(v, w)$. Il est nécessaire d'envisager le bivecteur $v \wedge v$ engendré par un même vecteur comme dégénéré (le parallélogramme se réduit à un segment) et d'orienter tout bivecteur en tenant compte de l'ordre d'apparition des termes dans $v \wedge w$. Autrement dit, on demande que $v \wedge v = 0$ et que $v \wedge w = -w \wedge v$ (ces deux conditions sont équivalentes entre elles). On appelle l'opération $\wedge$ *produit extérieur*. Pour respecter les règles d'addition des aires orientées, il est nécessaire de demander que le produit extérieur soit linéaire par rapport à ses deux facteurs. Ainsi, en développant le produit extérieur de deux vecteurs quelconques :

(10.4)

$$\begin{cases} v \wedge w &= \big(v^1 \cdot e_1 + v^2 \cdot e_2 + v^3 \cdot e_3 + v^4 \cdot e_4\big) \wedge \big(w^1 \cdot e_1 + w^2 \cdot e_2 + w^3 \cdot e_3 + w^4 \cdot e_4\big) \\ &= \big[v^2 w^3 - w^2 v^3\big] \cdot e_2 \wedge e_3 + \big[v^3 w^1 - w^3 v^1\big] \cdot e_3 \wedge e_1 + \big[v^1 w^2 - w^1 v^2\big] \cdot e_1 \wedge e_2 + \\ &+ \big[v^1 w^4 - w^1 v^4\big] \cdot e_1 \wedge e_4 + \big[v^2 w^4 - w^2 v^4\big] \cdot e_2 \wedge e_4 + \big[v^3 w^4 - w^3 v^4\big] \cdot e_3 \wedge e_4, \end{cases}$$

on observe que tout bivecteur est combinaison linéaire des six bivecteurs de base

$$(10.5) \qquad e_2 \wedge e_3, \qquad e_3 \wedge e_1, \qquad e_1 \wedge e_2, \qquad e_1 \wedge e_4, \qquad e_2 \wedge e_4, \qquad e_3 \wedge e_4.$$

Mémorisons l'ordre exact dans lequel nous avons fait apparaître les indices de ces bivecteurs :

$$(10.6) \qquad 23 \qquad 31 \qquad 12 \qquad 14 \qquad 24 \qquad 34.$$

Observons aussi que les six déterminants 2×2

(10.7)

$$\begin{vmatrix} v^2 & v^3 \\ w^2 & w^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v^3 & v^1 \\ w^3 & w^1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v^1 & v^2 \\ w^1 & w^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v^1 & v^4 \\ w^1 & w^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v^2 & v^4 \\ w^2 & w^4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} v^3 & v^4 \\ w^3 & w^4 \end{vmatrix},$$

qui apparaissent dans la formule (10.4) se calculent grâce au produit extérieur des formes linéaires z^i. En effet, par définition du produit extérieur de formes linéaires agissant sur un bivecteur, nous avons :

$$(10.8) \qquad z^i \wedge z^j(v \wedge w) := z^i(v)\, z^j(w) - z^i(w)\, z^j(v) = v^i w^j - w^i v^j,$$

pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Notons enfin que grâce à l'antisymétrie du produit extérieur, nous avons $[v^3 w^1 - w^3 v^1] \cdot e_3 \wedge e_1 = [v^1 w^3 - w^1 v^3] \cdot e_1 \wedge e_3$, et par conséquent nous pouvons réécrire (10.4) sous la forme compacte :

$$(10.9) \qquad v \wedge w = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} \big[v^i w^j - w^i v^j\big] \cdot e_i \wedge e_j.$$

Mais nous utiliserons le plus souvent l'écriture complète du type (10.4), en respectant soigneusement la numérologie (10.6).

Formellement, nous venons de redéfinir l'algèbre extérieure $\Lambda^2(\mathbb{C}^4)$, sans employer le langage de l'algèbre abstraite.

10.10. Bivecteurs généraux versus bivecteurs décomposables. Notons

$$(10.11) \qquad e_{23}, \qquad e_{31}, \qquad e_{12}, \qquad e_{14}, \qquad e_{24}, \qquad e_{34},$$

les six bivecteurs canoniques (10.5). Un *bivecteur général* sera défini comme une combinaison linéaire arbitraire de ces bivecteurs de base :

$$(10.12) \qquad z^{23} \cdot e_{23} + z^{31} \cdot e_{31} + z^{12} \cdot e_{12} + z^{14} \cdot e_{14} + z^{24} \cdot e_{24} + z^{34} \cdot e_{34}.$$

Ici, les six quantités $z^{ij} \in \mathbb{C}$ sont appelées *coordonnées* du bivecteur. On peut supposer qu'elles sont définies pour tous indices i et j, à condition qu'elles satisfassent la relation d'antisymétrie $z^{ij} = -z^{ji}$.

Les bivecteurs généraux ainsi définis ne proviennent pas forcément d'un produit extérieur $v \wedge w$ de deux vecteurs v et w. Pour bien les différencier, on appelle *décomposables* les bivecteurs de la forme $v \wedge w$, tels que nous les avons introduits initialement. Par exemple, on peut vérifier ([**225**]) que le bivecteur $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas décomposable. Afin de paramétriser l'espace des 2-plans complexes dans $\mathbb{C}^4$, il est nécessaire de caractériser d'abord les bivecteurs qui sont décomposables. C'est Julius Plücker qui formula la réponse suivante.

THÉORÈME 10.13. *Un bivecteur général est décomposable* si et seulement si *ses six coordonnées satisfont l'équation dite* de Plücker :

$$0 = z^{23}z^{14} + z^{31}z^{24} + z^{12}z^{34}. \tag{10.14}$$

Pour la démonstration (élémentaire), nous renvoyons à [**225**].

10.15. Espace des 2-plans dans $\mathbb{C}^4$ et quadrique de Plücker. Un 2-plan P dans $\mathbb{C}^4$ qui passe par l'origine peut être engendré par une infinité de couples de vecteurs linéairement indépendants. Pour paramétriser l'ensemble des 2-plans, il est nécessaire d'éliminer une telle surdétermination. Procédons comme suit.

Soient v, w deux vecteurs de $\mathbb{C}^4$ qui engendrent un 2-plan P fixé et soient $(v',\, w')$ deux autres générateurs. Il existe donc une matrice 2×2 inversible de déterminant $ad - bc$ non nul telle que $v' = av + bw$ et $w' = cv + dw$. Grâce à la linéarité et à l'antisymétrie du produit extérieur, on calcule :

$$v' \wedge w' = (av + bw) \wedge (cv + dw) = [ad - bc] \cdot v \wedge w. \tag{10.16}$$

Autrement dit, tous les bivecteurs décomposables qui engendrent le 2-plan P sont multiples (dilatés non nuls) l'un de l'autre. De manière équivalente :

LEMME 10.17. *L'ensemble des bivecteurs décomposables de $\mathbb{C}^4$ modulo dilatation est en correspondance biunivoque avec l'ensemble des 2-plans complexes de $\mathbb{C}^4$ passant par l'origine.*

Soit $\nu \in \mathbb{N}$, $\nu \geqslant 2$ et considérons l'espace $\mathbb{C}^\nu$, équipé des coordonnées $(z^1,\, z^2,\, \dots,\, z^\nu)$. On appelle *espace projectif de dimension* $(\nu - 1)$ et on note $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$ l'espace vectoriel épointé $\mathbb{C}^\nu \backslash \{0\}$ modulo la relation d'équivalence

$$(z^1,\, z^2,\, \dots,\, z^\nu) \sim (\lambda z^1,\, \lambda z^2,\, \dots,\, \lambda z^\nu), \tag{10.18}$$

pour $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Géométriquement, $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$ s'identifie à l'ensemble des droites passant par l'origine dans $\mathbb{C}^\nu$. Analytiquement, cet espace est équipé de *coordonnées homogènes* $[z^1 : z^2 : \cdots : z^\nu]$: dans cette écriture, on suppose que l'une (au moins) des variables z^i est non nulle et on a les identités $[\lambda z^1 : \lambda z^2 : \cdots : \lambda z^\nu] = [z^1 : z^2 : \cdots : z^\nu]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. On vérifie que $P_{\nu-1}(\mathbb{C})$ est une variété complexe connexe de dimension $\nu - 1$.

Dans notre cas, $\nu = 6$ et l'espace vectoriel $\mathbb{C}^6$ est muni des six coordonnées complexes

$$(z^{23},\, z^{31},\, z^{12},\, z^{14},\, z^{24},\, z^{34}). \tag{10.19}$$

L'ensemble des bivecteurs généraux modulo dilatation s'identifie donc à l'espace projectif $P_5(\mathbb{C})$ équipé des coordonnées homogènes $[z^{23} : z^{31} : z^{12} : z^{14} : z^{24} : z^{34}]$. De plus, les bivecteurs décomposables modulo dilatations s'identifient aux points de la *quadrique de Plücker* $Q_{\mathscr{P}}$, d'équation (10.14). La différentielle

$$z^{14}\cdot dz^{23}+z^{23}\cdot dz^{14}+z^{24}\cdot dz^{31}+z^{31}\cdot dz^{24}+z^{34}\cdot dz^{12}+z^{12}\cdot dz^{34}+ \tag{10.20}$$

de cette équation est non nulle en tout point de $P_5(\mathbb{C})$, puisque l'une au moins des quantités z^{23}, z^{31}, z^{12}, z^{14}, z^{24}, z^{34} est non nulle. Il en découle que la quadrique $Q_{\mathscr{P}}$ est une hypersurface complexe sans singularité (lisse) de $P_5(\mathbb{C})$, dont la dimension complexe est égale à 4. En résumé :

THÉORÈME 10.21. *Les 2-plans complexes dans $\mathbb{C}^4$ sont en correspondance biunivoque avec les points de l'espace projectif $P_5(\mathbb{C})$ appartenant à la quadrique lisse de Plücker $Q_{\mathscr{P}}$.*

10.22. Quadrique de Minkowski complexifiée et transformations de Lorentz complexes. Dans l'espace projectif $P_3(\mathbb{C})$ muni des quatre coordonnées homogènes $[z^1 : z^2 : z^3 : z^4]$, considérons la *quadrique de Minkowski* $Q_{\mathscr{M}}$ d'équation

$$0 = -(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 + (z^4)^2. \tag{10.23}$$

Puisque la différentielle

$$-2z^1 \cdot dz^1 - 2z^2 \cdot dz^2 - 2z^3 \cdot dz^3 + 2z^4 \cdot dz^4 \tag{10.24}$$

de cette équation est non nulle en tout point de $P_3(\mathbb{C})$, la quadrique $Q_{\mathscr{M}}$ est une hypersurface complexe de $P_3(\mathbb{C})$ qui est lisse en tout point.

Les *transformations de Lorentz* (complexes) sont les transformations linéaires à coefficients complexes de la forme

$$\bar{z}^i = \sum_{j=1}^{4} u^i_j\, z^j, \tag{10.25}$$

$i = 1, 2, 3, 4$, qui stabilisent la forme quadratique de Minkowski, c'est-à-dire qui satisfont :

$$\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i\, (\bar{z}^i)^2 = \sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i\, (z^i)^2. \tag{10.26}$$

Notons E la matrice 4×4

$$E := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10.27}$$

réécrivons l'équation précédente sous la forme d'une équation matricielle valable pour tout $z \in \mathbb{C}^4$:

$${}^T\bar{z} \cdot E \cdot \bar{z} = {}^Tz \cdot {}^TU \cdot E \cdot U \cdot z = {}^Tz \cdot U \cdot z. \tag{10.28}$$

Nous en déduisons que la transformation linéaire $\bar{z} = U \cdot z$ est de Lorentz si et seulement si la matrice U satisfait l'équation

$$E = {}^TU \cdot E \cdot U. \tag{10.29}$$

10.30. Géométrie de la quadrique de Minkowski complexe. Soit $\lambda = [\lambda_1 : \lambda_2]$ un point de l'espace projectif $P_1(\mathbb{C})$ (sphère de Riemann) et considérons les deux familles de 2-plans complexes D^1_λ et D^2_λ définis par les équations cartésiennes :

$$\begin{cases} D^1_\lambda : & 0 = \lambda_1 \left[z^1 + iz^2\right] + \lambda_2 \left[z^3 + z^4\right], \\ & 0 = \lambda_2 \left[z^1 - iz^2\right] + \lambda_1 \left[-z^3 + z^4\right], \\ D^2_\lambda : & 0 = \lambda_1 \left[z^1 + iz^2\right] + \lambda_2 \left[-z^3 + z^4\right], \\ & 0 = \lambda_2 \left[z^1 - iz^2\right] + \lambda_1 \left[z^3 + z^4\right]. \end{cases} \tag{10.31}$$

En déplaçant les premiers termes dans le membre de gauche et en multipliant membre à membre les couple d'équations obtenues, on vérifie immédiatement que ces 2-plans sont contenus dans la quadrique (singulière) de $\mathbb{C}^4$ d'équation $0 = -(z^1)^2 - (z^2)^2 - (z^3)^2 + (z^4)^2$. Notons encore D^i_λ les ensembles de $P_3(\mathbb{C})$ définis par les équations homogènes (10.31). Ce sont deux familles à un paramètre $\lambda \in P_1(\mathbb{C})$ de *droites* de $P_3(\mathbb{C})$.

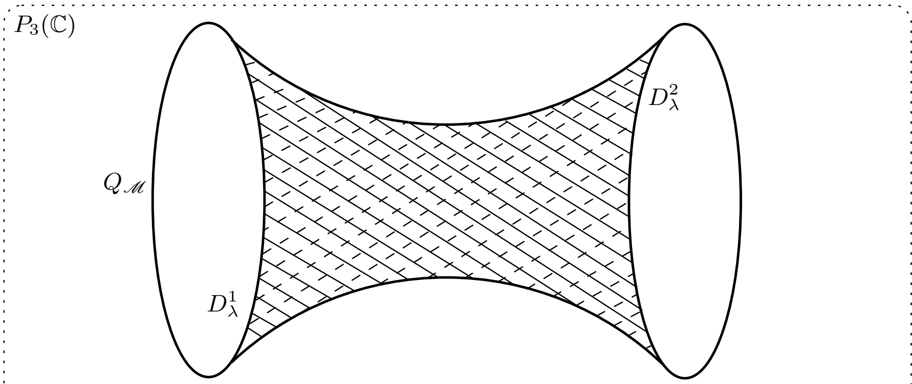


FIGURE 3 : LA QUADRIQUE DE MINKOSKI COMPLEXE ET SES DEUX FAMILLES DE GÉNÉRATRICES

On vérifie aisément que chacune de ces deux familles de droites remplit la quadrique de Minkowski complexe $Q_{\mathscr{M}}$ et qu'un point de coordonnées homogènes $[z^1 : z^2 : z^3 : z^4]$ appartient à D_λ^1 si et seulement si le point conjugué $[{}^c z^1 : {}^c z^2 : {}^c z^3 : {}^c z^4]$ appartient à D_λ^2. Ici, nous sommes contraints d'employer la notation ${}^c z = x - iy$ pour désigner le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + iy$, parce que les notations $\bar{x}$, $\bar{z}$, $\bar{u}_j^i$, *etc.* ont déjà été employées pour désigner un changement de coordonnées.

10.32. Coordonnées de Plücker des deux familles de génératrices. Ainsi, la quadrique de Minkowski est-elle réunion de deux familles de droites projectives complexes conjuguées l'une de l'autre. D'après le théorème de Plücker, à chaque droite complexe D_λ^i, $i = 1,\ 2$, correspond un point de l'espace projectif $P_5(\mathbb{C})$. Lorsque λ varie, on obtient deux courbes complexes (variétés de dimension un) dans $P_5(\mathbb{C})$ qui sont conjuguées l'une de l'autre. Substituer l'équation de ces courbes à l'équation initiale (10.23) de la quadrique de Minkowski va nous permettre de normaliser l'action d'une transformation de Lorentz (10.25) sur le tenseur de Riemann-Christoffel.

Pour calculer les équations de ces deux courbes dans $P_5(\mathbb{C})$, appliquons le lemme suivant.

LEMME 10.33. *Les coordonnées de Plücker d'un* 2*-plan complexe représenté par deux équations cartésiennes indépendantes*

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= a_1\, z^1 + a_2\, z^2 + a_3\, z^3 + a_4\, z^4 \\ 0 &= b_1\, z^1 + b_2\, z^2 + b_3\, z^3 + b_4\, z^4 \end{aligned}\right. \tag{10.34}$$

dans $P_5(\mathbb{C})$ *équipé des coordonnées homogènes* $[z^{23} : z^{31} : z^{12} : z^{14} : z^{24} : z^{34}]$ *sont les six déterminants* 2×2 *suivants* :

$$\left[\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_4 \\ b_2 & b_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right]. \tag{10.35}$$

Notons ici que la coordonnée de Plücker z^{23} du 2-plan (10.34) est le déterminant $a_1 b_4 - b_1 a_4$, avec les indices 14. Ainsi, il faut considérer que les six indices doubles (10.6) se regroupent par *paires complémentaires* :

$$\left\{\begin{array}{lll} 23 & 31 & 12 \\ 14 & 24 & 34. \end{array}\right. \tag{10.36}$$

DÉMONSTRATION. Quitte à effectuer une permutation sur les coordonnées, on peut supposer que le déterminant $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$ ne s'annule pas. Alors le système linéaire

$$(10.37) \qquad \begin{cases} 0 & = a_1 z^1 + a_2 z^2 + a \\ 0 & = b_1 z^1 + b_2 z^2 + b \end{cases}$$

d'inconnues z^1 et z^2 se résout simplement grâce aux formules

$$(10.38) \qquad z^1 = -\frac{\begin{vmatrix} a & a_2 \\ b & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad z^2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a \\ b_1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Appliquons ces formules aux deux systèmes particuliers extraits de (10.34) dans lesquels on pose premièrement $(z^3, z^4) := (1, 0)$, d'où $(a, b) = (a_3, b_3)$ et deuxièmenent $(z^3, z^4) := (0, 1)$, d'où $(a, b) = (a_4, b_4)$. Nous en déduisons que le 2-plan d'équations cartésiennes (10.34) est engendré par deux vecteurs linéairement indépendants $\widetilde{v}_1 \in \mathbb{C}^4$ et $\widetilde{v}_2 \in \mathbb{C}^4$ de coordonnées :

$$(10.39) \qquad \begin{cases} \widetilde{v}_1 := \left(-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad 1, \quad 0 \right) \\ \widetilde{v}_2, := \left(-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, -\frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad 0, \quad 1 \right). \end{cases}$$

Rappelons que les quatre vecteurs e_1, e_2, e_3 et e_4 forment la base canonique de $\mathbb{C}^4$. En multipliant $\widetilde{v}^1$ et $\widetilde{v}^2$ par le déterminant non nul $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$, on trouve que le 2-plan d'équations cartésiennes (10.34) est engendré par les deux vecteurs

$$(10.40) \qquad \begin{cases} v_1 := -\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_3, \\ v_2 := -\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_1 - \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot e_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot e_4. \end{cases}$$

Ainsi, à une dilatation près, le 2-plan (10.34) est défini par le bivecteur :
(10.41)

$$\begin{cases} v_1 \wedge v_2 = e_2 \wedge e_3 \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ \qquad + e_3 \wedge e_1 \left(- \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ \qquad + e_1 \wedge e_2 \left(\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \right) + \\ \qquad + e_1 \wedge e_4 \left(- \begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \\ \qquad + e_2 \wedge e_4 \left(- \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) + \\ \qquad + e_3 \wedge e_4 \left(\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right). \end{cases}$$

Pour simplifier la soustraction entre deux produits de déterminants qui apparaît à la troisième ligne, appliquons l'identité suivante, dite *de Plücker*, que l'on peut vérifier directement en développant les déterminants :
(10.42)

$$\begin{vmatrix} a_3 & a_2 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ b_4 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Grâce à cette identité, l'expression du bivecteur $v_1 \wedge v_2$
(10.43)

$$\begin{cases} v_1 \wedge v_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \left(e_2 \wedge e_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + e_2 \wedge e_3 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_4 \\ b_1 & b_4 \end{vmatrix} + \right. \\ \qquad + e_1 \wedge e_2 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_4 \\ b_3 & b_4 \end{vmatrix} + e_1 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \\ \qquad \left. + e_2 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + e_3 \wedge e_4 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right) \end{cases}$$

se factorise par le déterminant non nul $a_1 b_2 - b_1 a_2$, d'où le résultat. □

Appliquons ce lemme aux équations cartésiennes de la première famille D_λ^1 : ses coordonnées de Plücker sont données par les six déterminants 2×2 :
(10.44)

$$\begin{cases} z^{23} := \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad z^{31} := \begin{vmatrix} i\lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_2 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \quad z^{12} := \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_2 \\ -\lambda_1 & \lambda_1 \end{vmatrix}, \\ z^{14} := \begin{vmatrix} i\lambda_1 & \lambda_2 \\ -i\lambda_2 & -\lambda_1 \end{vmatrix}, \quad z^{24} := \begin{vmatrix} \lambda_2 & \lambda_1 \\ -\lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix}, \quad z^{34} := \begin{vmatrix} \lambda_1 & i\lambda_1 \\ \lambda_2 & -i\lambda_2 \end{vmatrix}. \end{cases}$$

On vérifie immédiatement qu'elles satisfont les trois équations $0 = z^{23} - iz^{14}$, $0 = z^{31} - iz^{24}$ et $0 = z^{12} - iz^{34}$. Cependant, puisque la famille D_λ^1 ne dépend que d'un paramère complexe $\lambda \in P_1(\mathbb{C})$, elle définit une courbe (ensemble codimension 4) dans l'espace de dimension cinq $P_5(\mathbb{C})$ et par conséquent, il existe au moins une équation supplémentaire qui est satisfaite par les six déterminants (10.44) ci-dessus. Cette équation n'étant pas immédiatement visible, nous l'introduirons ci-dessous.

De même, en calculant les coordonnées de Plücker de la deuxième famille D_λ^2, on vérifie que ses six coordonnées satisfont les trois équations (conjuguées) $0 = z^{23} + iz^{14}$, $0 = z^{31} + iz^{24}$ et $0 = z^{12} + iz^{34}$. Pour ces raisons, si nous introduisons le changement linéaire de coordonnées sur $P_5(\mathbb{C})$ défini par

$$\tag{10.45} \begin{cases} \xi^1 := z^{23} - iz^{14}, & \eta^1 := z^{23} + iz^{14}, \\ \xi^2 := z^{31} - iz^{24}, & \eta^2 := z^{31} + iz^{24}, \\ \xi^3 := z^{12} - iz^{34}, & \eta^3 := z^{12} + iz^{34}, \end{cases}$$

les deux couples de trois équations précédentes se simplifient et prennent la forme $0 = \xi^1 = \xi^2 = \xi^3$ (pour D_λ^1) et $0 = \eta^1 = \eta^2 = \eta^3$ (pour D_λ^2). Utilisons alors les formules de transformation inverse

$$\tag{10.46} \begin{cases} z^{23} := \dfrac{\eta^1 + \xi^1}{2} & z^{14} := \dfrac{\eta^1 - \xi^1}{2i}, \\ z^{31} := \dfrac{\eta^2 + \xi^2}{2} & z^{24} := \dfrac{\eta^2 - \xi^2}{2i}, \\ z^{12} := \dfrac{\eta^3 + \xi^3}{2} & z^{34} := \dfrac{\eta^3 - \xi^3}{2i}, \end{cases}$$

pour remplacer l'équation de Plücker (10.14) par l'équation

$$\tag{10.47} 0 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 - (\eta^1)^2 - (\eta^2)^2 - (\eta^3)^2.$$

L'équation de Plücker originale (10.14) étant évidemment satisfaite par les six coordonnées (10.44) (et de même pour celles associées à D_λ^2 que nous n'avons pas écrites), nous déduisons, en posant $\xi^i = 0$ ou $\eta^i = 0$ dans (10.47) que les deux familles D_λ^1 et D_λ^2 sont représentées par les deux couples de quatre équations :

(10.48)

$$\begin{cases} D_\lambda^1 : \quad 0 = \xi^1 & D_\lambda^2 : \quad 0 = \eta^1 \\ \qquad\quad 0 = \xi^2 & \qquad\quad 0 = \eta^2 \\ \qquad\quad 0 = \xi^3 & \qquad\quad 0 = \eta^3 \\ \qquad\quad 0 = (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2 & \qquad\quad 0 = (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2. \end{cases}$$

Par un raisonnement élémentaire, on vérifie que toute toute solution de ces deux familles d'équation fournit une droite du type D_λ^1 ou D_λ^2.

10.49. Transformation lorentzienne induite sur l'espace des 2-plans. Analysons maintenant l'action d'une transformation de Lorentz (10.) sur l'espace des 2-plans de $\mathbb{C}^4$. Pour $i = 1, 2, 3, 4$, le vecteur e_i se transforme en le vecteur

$$\bar{e}_i = \sum_{j=1}^{4} u_i^j \cdot e_j. \tag{10.50}$$

Ainsi, les six bivecteurs décomposables $e_i \wedge e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, se transforment en les bivecteurs décomposables

$$\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j := \left(\sum_{k=1}^{4} u_i^k \cdot e_k\right) \wedge \left(\sum_{l=1}^{4} u_j^l \cdot e_l\right) = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} \Delta_{ij}^{kl} \cdot e_k \wedge e_l, \tag{10.51}$$

où la notation Δ_{kl}^{ij} désigne le déterminant 2×2 extrait de la matrice

$$U = \begin{pmatrix} u_1^1 & u_2^1 & u_3^1 & u_4^1 \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & u_4^2 \\ u_1^3 & u_2^3 & u_3^3 & u_4^3 \\ u_1^4 & u_2^4 & u_3^4 & u_4^4 \end{pmatrix} \tag{10.52}$$

que l'on obtient en sélectionnant les deux lignes i et j ainsi que les deux colonnes k et l :

$$\Delta_{kl}^{ij} := \begin{vmatrix} u_k^i & u_l^i \\ u_k^j & u_l^j \end{vmatrix}. \tag{10.53}$$

Observons les relations d'antisymétrie

$$\Delta_{kl}^{ij} = -\Delta_{kl}^{ji} = -\Delta_{lk}^{ij} = \Delta_{lk}^{ji}. \tag{10.54}$$

Ainsi, la transformation lorentzienne $\bar{z}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i \cdot z^j$ induit la transformation linéaire suivante sur l'espace $P_5(\mathbb{C})$ des 2-plans :

$$\begin{pmatrix} \bar{z}^{23} \\ \bar{z}^{31} \\ \bar{z}^{12} \\ \bar{z}^{14} \\ \bar{z}^{24} \\ \bar{z}^{34} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_{23}^{23} & \Delta_{31}^{23} & \Delta_{12}^{23} & \Delta_{14}^{23} & \Delta_{24}^{23} & \Delta_{34}^{23} \\ \Delta_{23}^{31} & \Delta_{31}^{31} & \Delta_{12}^{31} & \Delta_{14}^{31} & \Delta_{24}^{31} & \Delta_{34}^{31} \\ \Delta_{23}^{12} & \Delta_{31}^{12} & \Delta_{12}^{12} & \Delta_{14}^{12} & \Delta_{24}^{12} & \Delta_{34}^{12} \\ \Delta_{23}^{14} & \Delta_{31}^{14} & \Delta_{12}^{14} & \Delta_{14}^{14} & \Delta_{24}^{14} & \Delta_{34}^{14} \\ \Delta_{23}^{24} & \Delta_{31}^{24} & \Delta_{12}^{24} & \Delta_{14}^{24} & \Delta_{24}^{24} & \Delta_{34}^{24} \\ \Delta_{23}^{34} & \Delta_{31}^{34} & \Delta_{12}^{34} & \Delta_{14}^{34} & \Delta_{24}^{34} & \Delta_{34}^{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z^{23} \\ z^{31} \\ z^{12} \\ z^{14} \\ z^{24} \\ z^{34} \end{pmatrix} \tag{10.55}$$

Puisque les six bivecteurs décomposables $e_i \wedge e_j$, $1 \leqslant i < j \leqslant 4$, sont transformés en des bivecteurs décomposables $\bar{e}_i \wedge \bar{e}_j$, l'équation de Plücker $0 = \bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14} + \bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24} + \bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34}$ est nécessairement satisfaite par les six coordonnées images $\bar{z}^{ij}$. Le lemme suivant précise cette relation.

LEMME 10.56. *Si les coordonnées* $\bar{z}^{ij}$ *sont les transformées des coordonnées* z^{ij} *par la transformation de Lorentz induite* (10.25)*, on a* :

$$\bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14}+\bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24}+\bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34}=\det U\left(z^{23}\,z^{14}+z^{31}\,z^{24}+z^{12}\,z^{34}\right). \tag{10.57}$$

En appliquant la fonction déterminant à la relation $E = {}^{T}U \cdot E \cdot U$, on obtient $(\det U)^2 = 1$. En se restreignant la variation des matrices U dans la composante connexe de l'identité du groupe $\mathscr{O}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}$, on peut supposer que $\det U = 1$. Dans ces conditions :

$$\bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14}+\bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24}+\bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34}=z^{23}\,z^{14}+z^{31}\,z^{24}+z^{12}\,z^{34}. \tag{10.58}$$

DÉMONSTRATION. Pour i, j, k et l compris entre 1 et 4, introduisons la notation suivante :

$$\square_{ij,\,kl}:=\frac{1}{2}\det\begin{pmatrix} u_i^1 & u_j^1 & u_k^1 & u_l^1\\ u_i^2 & u_j^2 & u_k^2 & u_l^2\\ u_i^3 & u_j^3 & u_k^3 & u_l^3\\ u_i^4 & u_j^4 & u_k^4 & u_l^4 \end{pmatrix}. \tag{10.59}$$

Lorsque les quatre indices i, j, k et l ne sont pas tous distincts deux à deux, le déterminant $\square_{ij,\,kl}$ s'annule évidemment, puisqu'il possède deux colonnes identiques.

LEMME 10.60. *Le déterminant d'une matrice* 4×4 *arbitraire*

$$A:=\begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & a_4^1\\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & a_4^2\\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & a_4^3\\ a_1^4 & a_2^4 & a_3^4 & a_4^4 \end{pmatrix} \tag{10.61}$$

se développe comme une somme de six produits de déterminants 2×2 :

$$\left\{\begin{aligned} \det A \;=&\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^3 & a_4^3\\ a_3^4 & a_4^4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1\\ a_1^3 & a_2^3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^2 & a_4^2\\ a_3^4 & a_4^4\end{vmatrix}+\\ &+\begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1\\ a_1^4 & a_2^4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^2 & a_4^2\\ a_3^3 & a_4^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2\\ a_1^3 & a_2^3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1\\ a_3^4 & a_4^4\end{vmatrix}-\\ &-\begin{vmatrix} a_1^2 & a_2^2\\ a_1^4 & a_2^4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1\\ a_3^3 & a_4^3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1^3 & a_2^3\\ a_1^4 & a_2^4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} a_3^1 & a_4^1\\ a_3^2 & a_4^2\end{vmatrix}. \end{aligned}\right. \tag{10.62}$$

Pour établir ce lemme, il suffit de développer le déterminant de A le long de la première colonne, ce qui donne une combinaison linéaire de quatre déterminants 3×3, de redévelopper chacun de ces déterminants le long de leur première colonne, ce qui fait apparaître une combinaison linéaire de douze déterminants 2×2, et enfin de réorganiser cette combinaison linéaire en reconstituant six déterminants 2×2 «cachés» dans les douze coefficients de cette combinaison linéaire.

Grâce à ce lemme, en tenant compte de la définition des déterminants Δ_{kl}^{ij} et de leurs (anti)symétries, nous pouvons développer l'expression de $2\square_{ij,\,kl}$ sous la forme
(10.63)

$$\begin{cases} 2\,\square_{ij,\,kl} & = \Delta_{ij}^{12}\,\Delta_{kl}^{34} - \Delta_{ij}^{13}\,\Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{14}\,\Delta_{kl}^{23} + \Delta_{ij}^{23}\,\Delta_{kl}^{14} - \Delta_{ij}^{24}\,\Delta_{kl}^{13} + \Delta_{ij}^{34}\,\Delta_{kl}^{12} \\ & = \Delta_{ij}^{23}\,\Delta_{kl}^{14} + \Delta_{ij}^{14}\,\Delta_{kl}^{23} + \Delta_{ij}^{31}\,\Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{24}\,\Delta_{kl}^{31} + \Delta_{ij}^{12}\,\Delta_{kl}^{34} + \Delta_{ij}^{34}\,\Delta_{kl}^{12}. \end{cases}$$

Par ailleurs, grâce à la relation d'antisymétrie $z^{ij} = -z^{ji}$ qui nous permet de remplacer z^{31} par $-z^{13}$, nous pouvons réécrire avec des indices les lois de transformation (10.55) sous la forme :

$$\bar{z}^{ij} = \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} \Delta_{kl}^{ij}\cdot z^{kl}, \tag{10.64}$$

pour $1 \leqslant i < j \leqslant 4$. Remplaçons ces valeurs dans le membre de gauche de (10.57), ce qui donne :
(10.65)

$$\begin{cases} \bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14} + \bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24} + \bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34} = \left(\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \Delta_{ij}^{23}\cdot z^{ij}\right)\left(\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} \Delta_{kl}^{14}\cdot z^{kl}\right) + \\ \qquad\qquad + \left(\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \Delta_{ij}^{31}\cdot z^{ij}\right)\left(\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} \Delta_{kl}^{24}\cdot z^{kl}\right) + \\ \qquad\qquad + \left(\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \Delta_{ij}^{12}\cdot z^{ij}\right)\left(\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} \Delta_{kl}^{34}\cdot z^{kl}\right) \\ \qquad = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\ \sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} z^{ij}\,z^{kl}\left[\Delta_{ij}^{23}\,\Delta_{kl}^{14} + \Delta_{ij}^{31}\,\Delta_{kl}^{24} + \Delta_{ij}^{12}\,\Delta_{kl}^{34}\right] \\ \qquad = \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} \square_{ij,\,ij}\cdot (z^{ij})^2 + \sum\limits_{i<j,\;k<l,\,(i,j)<(k,l)} (2\square_{ij,\,kl})\cdot z^{ij}\,z^{kl}. \end{cases}$$

À la dernière ligne, nous avons introduit la relation d'ordre $(i,\,j) < (k,\,l)$ entre couples d'indices compris entre 1 et 4 qui est définie par

$$i<j \quad \text{ou} \quad i=k \;\text{ et }\; j<l. \tag{10.66}$$

Remarquons que les déterminants $\square_{ij,\,ij}$ s'annulent, puisqu'ils possèdent deux colonnes identiques. Dans la somme $\sum_{i<j,\;k<l,\,(i,j)<(k,l)}$, seuls trois termes comprennent des indices i, j, k et l qui sont deux à deux distincts : il s'agit de $(1,\,4) < (2,\,3)$, de $(2,\,4) < (3,\,1)$ et de $(1,\,2) < (3,\,4)$. Puisque les déterminants $2\square_{ij,\,kl}$ pour lesquels les quatre indices i, j, k et l ne sont pas deux à deux distincts s'annulent, il ne reste que trois termes dans la

deuxième somme de la dernière ligne de (10.65) :
(10.67)

$$\bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14}+\bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24}+\bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34} = (2\square_{23,\,14})\cdot z^{23}\,z^{14}+(2\square_{31,\,24})\cdot z^{31}\,z^{24}+(2\square_{12,\,34})\cdot z^{12}\,z^{34}$$

Pour conclure, il suffit d'observer que

(10.68)
$$\det U = 2\square_{23,\,14} = 2\square_{31,\,24} = 2\square_{31,\,24},$$

ce qui achève la démonstration. □

10.69. Homomorphisme de groupe. Complexifions les transformations de Lorentz $\overline{\omega}^i = \sum_{j=1}^4 u_j^i\,z^j$ en supposant que la matrice U satisfaisant $E = {}^T U\cdot E\cdot U$ a des coefficients complexes. Notons $\mathrm{SO}_{3,\,1}(\mathbb{C})$ le groupe de telles matrices satisfaisant la condition supplémentaire $\det\, U = 1$. Ce groupe est connexe. La relation (10.57) se spécialise :

(10.70)
$$\bar{z}^{23}\,\bar{z}^{14} + \bar{z}^{31}\,\bar{z}^{24} + \bar{z}^{12}\,\bar{z}^{34} = z^{23}\,z^{14} + z^{31}\,z^{24} + z^{12}\,z^{34}.$$

La matrice $\Delta = \Delta(U)$ de taille 6×6 apparaissant dans (10.55) dépend de U et satisfait la relation de groupe $\Delta(U^1\cdot U^2) = \Delta(U^1)\cdot\Delta(U^2)$.

Notons $(\xi,\,\eta) = L(z^{ij})$ le changement de coordonnées linéaire qui apparaît dans le membre de droite de (10.45), où L est une matrice 6×6 à coefficients complexes. Notons $\widetilde{L}$ son inverse. La transformation linéaire $\bar{z}^{ij} = \Delta(U)\cdot z^{i_1 j_1}$ est conjuguée à la transformation linéaire $(\bar{\xi},\,\bar{\eta}) = L\cdot\Delta(U)\cdot\widetilde{L}\,(\xi,\,\eta)$. Notons $W = W(U)$ la matrice $L\cdot\Delta(U)\cdot\widetilde{L}$, qui dépend de U. Voici son expression en fonction des éléments Δ_{kl}^{ij} :
(10.71)

$$\begin{pmatrix} \Delta_{23}^{23} - i\Delta_{23}^{14} + i\Delta_{14}^{23} + \Delta_{14}^{14} & \Delta_{31}^{23} - i\Delta_{31}^{14} + i\Delta_{24}^{23} + \Delta_{24}^{14} & \Delta_{12}^{23} - i\Delta_{12}^{14} + i\Delta_{34}^{23} + \Delta_{34}^{14} \\ \Delta_{23}^{31} - i\Delta_{23}^{24} + i\Delta_{14}^{31} + \Delta_{14}^{24} & \Delta_{31}^{31} - i\Delta_{31}^{24} + i\Delta_{24}^{31} + \Delta_{24}^{24} & \Delta_{12}^{31} - i\Delta_{12}^{24} + i\Delta_{34}^{31} + \Delta_{34}^{24} \\ \Delta_{23}^{12} - i\Delta_{23}^{34} + i\Delta_{14}^{12} + \Delta_{14}^{34} & \Delta_{31}^{12} - i\Delta_{31}^{34} + i\Delta_{24}^{12} + \Delta_{24}^{34} & \Delta_{12}^{12} - i\Delta_{12}^{34} + i\Delta_{34}^{12} + \Delta_{34}^{34} \end{pmatrix}.$$

La matrice $W = W(U)$ de taille 6×6 associée à U satisfait aussi la loi de groupe $W(U^1\cdot U^2) = W(U^1)\cdot W(U^2)$. En remplaçant $\bar{z}^{ij}$ et $z^{i_1 j_1}$ par leurs valeurs en fonction de $(\bar{\xi},\,\bar{\eta})$ et de $(\xi,\,\eta)$ dans la relation (10.), nous obtenons :
(10.72)

$$(\bar{\xi}^1)^2+(\bar{\xi}^2)^2+(\bar{\xi}^3)^2-(\bar{\eta}^1)^2-(\bar{\eta}^2)^2-(\bar{\eta}^3)^2 = (\xi^1)^2+(\xi^2)^2+(\xi^3)^2-(\eta^1)^2-(\eta^2)^2-(\eta^3)^2.$$

Soit $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ le groupe des matrices de tailles 3×3 satisfaisant ${}^T V\cdot V = I_{3\times 3}$ et $\det\, V = 1$. Ce groupe est aussi connexe.

LEMME 10.73. *Pour tout* $U \in \mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$*, la transformation associée* $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W(U)(\xi, \eta)$ *est de la forme*

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}^1 \\ \bar{\xi}^2 \\ \bar{\xi}^3 \\ \bar{\eta}^1 \\ \bar{\eta}^2 \\ \bar{\eta}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & 0 & 0 & 0 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & {}^c v_1^1 & {}^c v_2^1 & {}^c v_3^1 \\ 0 & 0 & 0 & {}^c v_1^2 & {}^c v_2^2 & {}^c v_3^2 \\ 0 & 0 & 0 & {}^c v_1^3 & {}^c v_2^3 & {}^c v_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \xi^3 \\ \eta^1 \\ \eta^2 \\ \eta^3 \end{pmatrix}, \tag{10.74}$$

où la matrice 3×3

$$V := \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 & v_3^1 \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 \\ v_1^3 & v_2^3 & v_3^3 \end{pmatrix} \tag{10.75}$$

appartient à $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. Une transformation lorentzienne U arbitraire stabilise la quadrique de Minkowski $Q_{\mathscr{M}} = \bigcup_\lambda D_\lambda^1 = \bigcup_\lambda D_\lambda^2$ et transforme toute droite projective une droite projective. Observons que les droites projectives D_λ^1 et D_λ^2 ne sont pas tangentes entre elles. Nous en déduisons que si U est proche de l'identité dans $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$, les D_λ^1 sont transformées en elles-mêmes et les D_λ^2 sont transformées en elles-mêmes. Grâce au principe du prolongement analytique, cette propriété est satisfaite pour toute transformation U, puisque $\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{C})$ est connexe. De manière équivalente, $\bar{\xi} = 0$ si $\xi = 0$ et $\bar{\eta} = 0$ si $\eta = 0$. Nous en déduisons que la transformation $(\bar{\xi}, \bar{\eta}) = W(U)(\xi, \eta)$ est effectivement diagonale par blocs (10.74). Enfin, l'identité de Plücker modifiée (10.72) donne

$$\left\{ \begin{aligned} (\bar{\xi}^1)^2 + (\bar{\xi}^2)^2 + (\bar{\xi}^3)^2 &= (\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2, \\ (\bar{\eta}^1)^2 + (\bar{\eta}^2)^2 + (\bar{\eta}^3)^2 &= (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2, \end{aligned} \right. \tag{10.76}$$

ce qui montre que la matrice V est une matrice orthogonale complexe de taille 3×3. □

LEMME 10.77. *L'application*

$$\mathrm{SO}_{3,1}(\mathbb{C}) \ni U \longmapsto V(U) \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C}) \tag{10.78}$$

est un homomorphisme surjectif de groupe.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la différentielle de cette application est surjective au point $U = I_{4\times 4}$. En effet, il en découlera que l'image de cette application contient un voisinage de l'identité dans le groupe connexe $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$, et tout voisinage de l'identité engendre alors ce groupe par multiplication.

Pour calculer la différentielle en l'identité, commençons par différentier l'identité $E = {}^TU \cdot E \cdot U$ en $U = I_{4\times 4}$, ce qui donne $0 = d^TU \cdot E + E \cdot dU$, c'est-à-dire en notation développée :

(10.79)

$$0 = \begin{pmatrix} -2du_1^1 & -du_1^2 - du_2^1 & -du_1^3 - du_3^1 & du_1^4 - du_4^1 \\ -du_2^1 - du_1^2 & -2du_2^2 - du_2^1 & -du_2^3 - du_3^2 & du_2^4 - du_4^2 \\ -du_3^1 - du_1^3 & -du_3^2 - du_2^3 & -2du_3^3 & du_3^4 - du_4^3 \\ -du_4^1 + du_1^4 & -du_4^2 + du_2^4 & -du_4^3 + du_3^4 & 2du_4^4 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi 10 relations linéaires indépendantes sur les 16 différentielles du_j^i en l'identité : le groupe $SO_{3,1}(\mathbb{C})$ est effectivement de dimension $16 - 10 = 6$. Prenons alors pour base sur l'espace cotangenent à l'identité les six formes différentielles du_2^3, du_3^1, du_1^2, du_1^4, du_2^4 et du_3^4. Calculons maintenant la différentielle en l'identité de $\Delta_{kl}^{ij} = u_k^i\, u_l^j - u_l^i\, u_k^j$:

$$\text{(10.80)} \qquad \begin{cases} d\Delta_{kl}^{ij}\big|_{I_{4\times 4}} & = \big(u_l^j\, du_k^i + u_k^i\, du_l^j - u_k^j\, du_l^i - u_l^i\, du_k^l\big)\big|_{I_{4\times 4}} \\ & = \delta_l^j\, du_k^i + \delta_k^i\, du_l^j - \delta_k^j\, du_l^i - \delta_l^i\, du_k^j. \end{cases}$$

Grâce à cette formule générale, nous pouvons calculer la différentielle en l'identité de la matrice $V(U)$ écrite en (10.71), ce qui donne :

(10.81)

$$\begin{pmatrix} 0 & -du_1^2 + idu_3^4 + idu_4^3 + du_2^1 & -du_1^3 - idu_2^4 - idu_4^2 + du_3^1 \\ -du_2^1 - idu_3^4 - idu_4^3 + du_1^2 & 0 & -du_2^3 + idu_1^4 + idu_4^1 + du_3^2 \\ -du_3^1 + idu_2^4 + idu_4^2 + du_1^3 & -du_3^2 - idu_1^4 - idu_4^1 + du_2^3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Simplifions en utilisant la base constituée des six formes différentielles du_2^3, du_3^1, du_1^2, du_1^4, du_2^4 et du_3^4 :

$$\text{(10.82)} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 2du_2^1 + 2idu_4^3 & -2du_1^3 - 2idu_4^2 \\ -2du_2^1 - 2idu_4^3 & 0 & 2du_3^2 + 2idu_4^1 \\ 2du_1^3 + 2idu_4^2 & -2du_3^2 - 2idu_4^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par ailleurs, la différentiation en l'identité de la relation ${}^TV \cdot V = I_{3\times 3}$ qui définit une matrice 3×3 orthogonale montre que l'espace cotangent en l'identité de $\mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ est engendrée par les matrices de la forme

$$\text{(10.83)} \qquad \begin{pmatrix} 0 & dv_2^1 & -dv_1^3 \\ -dv_1^2 & 0 & dv_2^3 \\ dv_1^3 & -dv_2^3 & 0 \end{pmatrix},$$

où les trois formes dv_2^3, dv_3^1 et dv_2^1 sont indépendantes. Il est clair que toute matrice 3×3 telle que (10.83) peut s'écrire sous la forme d'une matrice (10.82), ce qui achève la preuve. $\square$

11. Décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductible

Réécrivons la forme quadratique de Riemann-Christoffel en identifiant les 2-formes $\omega^i \wedge \omega^j$ à des coordonnées plückeriennes ω^{ij} indépendantes, ce qui donne :

$$
(11.1)\qquad \begin{cases}
\Phi \;=\; \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\;\sum\limits_{1\leqslant k<l\leqslant 4} S^i_{jkl}\cdot\omega^{ij}\,\omega^{kl} \\
\quad = S^2_{323}\cdot(\omega^{23})^2 + S^3_{131}\cdot(\omega^{31})^2 + S^1_{212}\cdot(\omega^{12})^2 + \\
\quad + S^1_{414}\cdot(\omega^{14})^2 + S^1_{424}\cdot(\omega^{24})^2 + S^1_{434}\cdot(\omega^{34})^2 + \\
\quad + 2S^2_{331}\cdot\omega^{23}\,\omega^{31} + 2S^2_{312}\cdot\omega^{23}\,\omega^{12} + 2S^2_{314}\cdot\omega^{23}\,\omega^{14} + \\
\quad + 2S^2_{324}\cdot\omega^{23}\,\omega^{24} + 2S^2_{334}\cdot\omega^{23}\,\omega^{34} + 2S^3_{112}\cdot\omega^{31}\,\omega^{12} + \\
\quad + 2S^3_{114}\cdot\omega^{31}\,\omega^{14} + 2S^3_{124}\cdot\omega^{31}\,\omega^{24} + 2S^3_{134}\cdot\omega^{31}\,\omega^{34} + \\
\quad + 2S^1_{214}\cdot\omega^{12}\,\omega^{14} + 2S^1_{224}\cdot\omega^{12}\,\omega^{24} + 2S^1_{234}\cdot\omega^{12}\,\omega^{34} + \\
\quad + 2S^1_{424}\cdot\omega^{14}\,\omega^{24} + 2S^1_{434}\cdot\omega^{14}\,\omega^{34} + 2S^2_{434}\cdot\omega^{24}\,\omega^{34}.
\end{cases}
$$

Remplaçons les variables ω^{ij} en fonction des variables ξ^i et η^j via les formules (10.46). Après un calcul direct, nous obtenons une représentation de Φ comme somme de trois termes : une forme quadratique $\varphi(\xi)$, une forme bilinéaire $\psi(\xi;\,\eta)$ et la forme quadratique ${}^c\varphi(\eta)$ dont les coefficients sont conjugués de ceux de $\varphi(\xi)$:

$$
(11.2)\qquad \Phi = \varphi(\xi) + \psi(\xi;\,\eta) + {}^c\varphi(\eta),
$$

où
(11.3)

$$
\begin{cases}
4\varphi(\xi) := (\xi^1)^2\left[S^2_{323} - S^1_{414} + 2iS^2_{314}\right] + (\xi^2)^2\left[S^3_{131} - S^2_{424} + 2iS^3_{124}\right] + \\
+ (\xi^3)^2\left[S^1_{212} - S^3_{434} + 2iS^1_{234}\right] + 2\xi^2\xi^3\left[S^3_{112} + iS^3_{134} + iS^1_{224} - S^2_{434}\right] + \\
+ 2\xi^3\xi^1\left[S^2_{312} + iS^1_{214} + iS^2_{334} - S^1_{434}\right] + 2\xi^1\xi^2\left[S^2_{331} + iS^2_{324} + iS^3_{114} - S^1_{424}\right],
\end{cases}
$$

où
(11.4)

$$
\begin{cases}
2\psi(\xi;\,\eta) \;:= \xi^1\eta^1\left[S^2_{323} + S^1_{414}\right] + \xi^1\eta^2\left[S^2_{331} - iS^2_{324} + iS^3_{114} + S^1_{424}\right] + \\
\qquad + \xi^1\eta^3\left[S^2_{312} - iS^2_{334} + iS^1_{214} + S^1_{434}\right] + \\
\qquad + \xi^2\eta^1\left[S^2_{331} + iS^2_{324} - iS^3_{114} + S^1_{424}\right] + \xi^2\eta^2\left[S^3_{131} + S^2_{424}\right] + \\
\qquad + \xi^2\eta^3\left[S^3_{112} - iS^3_{134} + iS^1_{224} + S^2_{434}\right] + \\
\qquad + \xi^3\eta^1\left[S^2_{312} + iS^2_{334} - iS^1_{214} + S^1_{434}\right] + \\
\qquad + \xi^3\eta^2\left[S^3_{112} + iS^3_{134} - iS^1_{224} + S^2_{434}\right] + \xi^3\eta^3\left[S^1_{212} + S^3_{434}\right],
\end{cases}
$$

et où la forme ${}^c\varphi(\eta)$ est conjuguée de $\varphi(\xi)$

(11.5)
$$\left\{\begin{aligned} &4^c\varphi(\eta) := (\eta^1)^2 \left[S^2_{323} - S^1_{414} - 2iS^2_{314}\right] + (\eta^2)^2 \left[S^3_{131} - S^2_{424} - 2iS^3_{124}\right] + \\ &+ (\eta^3)^2 \left[S^1_{212} - S^3_{434} - 2iS^1_{234}\right] + 2\eta^2\eta^3 \left[S^3_{112} - iS^3_{134} - iS^1_{224} - S^2_{434}\right] + \\ &+ 2\eta^3\eta^1 \left[S^2_{312} - iS^1_{214} - iS^2_{334} - S^1_{434}\right] + 2\eta^1\eta^2 \left[S^2_{331} - iS^2_{324} - iS^3_{114} - S^1_{424}\right]. \end{aligned}\right.$$

11.6. Action d'une transformation de Lorentz sur la forme de Riemann-Christoffel. Rappelons que la matrice de rotation $U = (u^i_j)$ intervient dans la définition des 1-formes ω^i. Introduisons une autre matrice de rotation $U' = (u'^i_j)$ satisfaisant $E = {}^TU' \cdot E \cdot U'$ et définissons la transformation

$$\omega'^i := \sum_{j=1}^{4} u'^i_j \, \omega^i. \tag{11.7}$$

Elle induit la transformation suivante sur les 2-formes :

$$\omega'^i \wedge \omega'^j =: \omega'^{ij} = \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} \Delta^{ij}_{kl}(U')\, \omega'^{kl} =: \sum_{1\leqslant k<l\leqslant 4} u'^{ij}_{kl}\, \omega'^{kl}, \tag{11.8}$$

où $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ et u'^{ij}_{kl} est une abréviation de $\Delta^{ij}_{kl}(U')$. D'après le Lemme 10.73, une telle transformation lorentzienne complexe induit une transformation orthogonale complexe par blocs

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V & 0 \\ 0 & {}^cV \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \tag{11.9}$$

où $V \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ dépend de U'. D'après le Lemme 10.77, toutes les matrices $V \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ sont obtenues par ce procédé. La forme quadratique $\Phi = \varphi(\xi) + \psi(\xi;\eta) + {}^c\varphi(\eta)$ va se transformer en une forme $\Phi' = \varphi'(\xi') + \psi'(\xi';\eta') + {}^c\varphi'(\eta')$. Avant d'expliciter cette transformation, quelques préliminaires algébriques sont nécessaires.

11.10. Action d'un changement de base sur une forme quadratique. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, soit $z = (z^1, \ldots, z^n) \in \mathbb{C}^n$ et soit $g(z) := \sum_{i,j=1}^n g_{ij}\, z^i z^j$ une forme quadratique à coefficients complexes satisfaisant $g_{ij} = g_{ji}$. En introduisant la matrice $G = (g_{ij})$ et en considérant que z est un vecteur colonne, nous pouvons utiliser l'écriture matricielle $g(z) = {}^Tz \cdot G \cdot z$. Notons G_n l'espace vectoriel de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ constitué de ces formes quadratiques.

Soit $\mathsf{p} \in \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant \mathsf{p} \leqslant n$ et soit E la matrice diagonale (2.9). Notons $\mathrm{SO}_{\mathsf{p},\, n-\mathsf{p}}$ le groupe des matrices U de taille $n \times n$ à coefficients complexes satisfaisant $E = {}^TU \cdot E \cdot U$ et $\det U = 1$. Ce groupe agit sur les formes quadratiques par changement de base : si $\bar{z} = U \cdot z$, d'où ${}^T\bar{z} = {}^Tz \cdot {}^TU$, l'identification des coefficients de $z^i z^j$ dans

$$
{}^T z^T \cdot U \cdot \overline{G} \cdot U \cdot z = {}^T \bar{z} \cdot \overline{G} \cdot \bar{z} = \bar{g}(\bar{z}) = g(z) = {}^T z \cdot G \cdot z \tag{11.11}
$$

fournit l'identité matricielle

$$
{}^T U \cdot \overline{G} \cdot U = G \tag{11.12}
$$

qui exprime l'action du changement de base $\bar{z} = U \cdot z$ sur la forme quadratique $g(z)$. Définissons la *trace modifiée de* G par

$$
-g_{11} - \cdots - g_{\mathsf{pp}} + g_{\mathsf{p+1\,p+1}} + \cdots + g_{nn} = \mathrm{Tr}(E \cdot G). \tag{11.13}
$$

Nous affirmons que la trace modifiée est un invariant de l'action par changement de base, c'est-à-dire que nous avons $\mathrm{Tr}\,(E \cdot G) = \mathrm{Tr}\,\big(E \cdot \overline{G}\big)$. En effet, dans le calcul suivant, insérons ${}^T U = E \cdot \widetilde{U} \cdot E$ dans le membre de droite de la première ligne et utilisons la relation $\mathrm{Tr}(ABCD) = \mathrm{Tr}(DABC)$ pour le passage de la troisième ligne à la quatrième :

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\,(E \cdot G) &= \mathrm{Tr}\,\big(E \cdot {}^T U \cdot \overline{G} \cdot U\big) \\
&= \mathrm{Tr}\,\Big(E \cdot E \cdot \widetilde{U} \cdot E \cdot \overline{G} \cdot U\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\,\Big(\widetilde{U} \cdot E \cdot \overline{G} \cdot U\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\,\Big(E \cdot \overline{G} \cdot U \cdot \widetilde{U}\Big) \\
&= \mathrm{Tr}\,\big(E \cdot \overline{G}\big)\,.
\end{aligned}
\right. \tag{11.14}
$$

Pour cette raison, introduisons l'hyperplan de l'espace des formes quadratiques G_n défini par

$$
\mathsf{G}'_n := \{G = (g_{ij}) \in \mathsf{G}_n :\ \mathrm{Tr}\,(E \cdot G) = 0\}\,. \tag{11.15}
$$

Cet hyperplan est stable par le changement de base (11.12). Notons $\rho(U)$ l'endomorphisme linéaire $G \mapsto \overline{G} = {}^T \widetilde{U} \cdot G \cdot \widetilde{U}$ de l'espace vectoriel G'_n. On vérifie que $\rho(U^1 \cdot U^2) = \rho(U^1) \cdot \rho(U^2)$. L'application ρ constitue donc un homomorphisme du groupe $\mathrm{SO}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}(\mathbb{C})$ dans le groupe des automorphismes linéaires de G'_n. On dit que ρ est une *représentation* du groupe $\mathrm{SO}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}(\mathbb{C})$ sur l'espace vectoriel G'_n. Cette représentation est *irréductible* au sens suivant.

LEMME 11.16. *Il n'existe pas de sous-espace linéaire* G'' *contenu strictement dans* G'_n *et non réduit à* 0 *tel que* $\rho(U)\mathsf{G}'' \subset \mathsf{G}''$ *pour tout* $U \in \mathrm{SO}_{\mathsf{p},\,n-\mathsf{p}}(\mathbb{C})$.

DÉMONSTRATION. Dans le cas défini positif, on utilise le théorème de diagonalisation simultanée de formes quadratiques. La démonstration dans le cas général est laissée en exercice. □

11.17. Soustraction de la trace modifiée. Le Lemme précédent suggère de réécrire la forme de Riemann-Christoffel Φ en soustrayant la trace de $\varphi(\xi)$ et la trace de ${}^c\varphi(\eta)$. D'après (11.3), d'après les relations de symétrie de la dernière ligne de (6.39) et d'après la définition (8.4) de la courbure totale, la somme des coefficients diagonaux de $\varphi(\xi)$ est égale à $\frac{1}{4}\,S$, où l'expression développée de S est donnée par :

$$S = S^2_{323} + S^3_{131} + S^1_{212} - S^1_{414} - S^2_{424} - S^3_{434}. \tag{11.18}$$

Ainsi, nous pouvons réécrire :

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \overline{\varphi}(\xi) + \psi(\xi;\,\eta) + {}^c\overline{\varphi}(\eta) + \\ &\quad + \frac{1}{12}\,S\left[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2 + (\eta^1)^2 + (\eta^2)^2 + (\eta^3)^2\right], \end{aligned}\right. \tag{11.19}$$

avec

$$\overline{\varphi}(\xi) := \varphi(\xi) - \frac{1}{12}\,S\left[(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2 + (\xi^3)^2\right]. \tag{11.20}$$

Maintenant, la trace de la forme quadratique $\overline{\varphi}(\xi)$ est nulle. Les six coefficients indépendants de $\varphi(\xi)$ se réduisent à cinq coefficients pour $\overline{\varphi}(\xi)$.

L'action de la rotation lorentzienne (11.7) transforme $(\xi,\,\eta)$ en $(V\cdot\xi,\,{}^cV\cdot{}^c\eta)$, où la matrice $V \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{C})$ peut être supposée arbitraire, grâce au Lemme 10.77. Par une telle rotation complexe, la forme quadratique de Riemann-Christoffel se transforme en la forme

$$\left\{\begin{aligned} \Phi' &= \overline{\varphi}'(\xi') + \psi'(\xi';\,\eta') + {}^c\overline{\varphi}'(\eta') + \\ &\quad + \frac{1}{12}\,S\left[(\xi'^1)^2 + (\xi'^2)^2 + (\xi'^3)^2 + (\eta'^1)^2 + (\eta'^2)^2 + (\eta'^3)^2\right], \end{aligned}\right. \tag{11.21}$$

où les deux formes quadratiques $\overline{\varphi}'$ et conjuguée ${}^c\overline{\varphi}'$ ainsi que la forme bilinéaire ψ' se transforment comme suit :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{\varphi}' &= {}^T\widetilde{V}\cdot\overline{\varphi}\cdot\widetilde{V}, \\ \psi' &= {}^{Tc}\widetilde{V}\cdot\overline{\varphi}\cdot\widetilde{V}, \\ {}^c\overline{\varphi}' &= {}^{Tc}\widetilde{V}\cdot{}^c\overline{\varphi}\cdot{}^c\widetilde{V}. \end{aligned}\right. \tag{11.22}$$

Grâce au Lemme 11.16 ci-dessus, l'action de V sur ces trois formes est irréductible. Nous en déduisons le théorème fondamental de décomposition du tenseur de courbure en composantes irréductibles.

THÉORÈME 11.23. *Les* 20 *invariants relatifs* S^i_{jkl} *normaux se distribuent en quatre groupes* :

1° *l'invariant absolu* S ;

2° *les cinq coefficients complexes de la forme* $\overline{\varphi}(\xi)$;

3° *les neuf coefficients* (*réels ou deux à deux imaginaires conjugués*) *de la forme* $\psi(\xi;\,\eta)$;

4° *les cinq coefficients complexes conjugués de* ${}^c\overline{\varphi}(\eta)$.
Toute transformation lorentzienne (11.7) *sur les formes différentielles* ω^i *échange entre eux les invariants relatifs de chaque groupe et ces quatre groupes sont indécomposables en d'autres groupes dont les éléments soient séparément échangés entre eux.*

12. Théorème d'unicité

12.1. Forme quadratique de Ricci. Définissons la *forme quadratique de Ricci*

$$\Theta := \sum_{1 \leqslant i,\, j \leqslant 4} S_{ij} \cdot \omega^i \omega^j, \tag{12.2}$$

dont les coefficients $S_{ij} = \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k \, S_{ikj}^k$ sont les composantes de la courbure de Ricci. La trace modifiée de cette forme satisfait $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i \, S_{ii} = \sum_{i,\,k=1}^4 \varepsilon_i \varepsilon_k S_{iki}^i = 2S$. Par conséquent, si nous définissons

$$\overline{\Theta} := \Theta - \frac{1}{2} \, S \sum_{1 \leqslant i \leqslant 4} \varepsilon_i \, (\omega^i)^2, \tag{12.3}$$

la trace modifiée de $\overline{\Theta} =: \sum_{i,\,j=1}^4 \overline{S}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j$ s'annule :

$$0 = -\overline{S}_{11} - \overline{S}_{22} - \overline{S}_{33} + \overline{S}_{44}. \tag{12.4}$$

Il reste 9 coefficients linéairement indépendants $\overline{\Theta}_{ij}$. On appellera *forme quadratique de Ricci sans trace* la forme $\overline{\Theta}$. Par un calcul direct, nous obtenons l'expression développée de la forme $\overline{\Theta}$:
(12.5)

$$\left\{ \begin{aligned} \overline{\Theta} \ &= (\omega^1)^2 \left[\frac{1}{2} \left(S_{323}^2 - S_{131}^3 - S_{212}^1 + S_{414}^1 - S_{424}^2 - S_{434}^3 \right) \right] + \\ &\quad + (\omega^2)^2 \left[\frac{1}{2} \left(-S_{323}^2 + S_{131}^3 - S_{212}^1 - S_{414}^1 + S_{424}^2 - S_{434}^3 \right) \right] + \\ &\quad + (\omega^3)^2 \left[\frac{1}{2} \left(-S_{323}^2 - S_{131}^3 + S_{212}^1 - S_{414}^1 - S_{424}^2 + S_{434}^3 \right) \right] + \\ &\quad + 2\omega^2\omega^3 \left[-S_{213}^1 + S_{243}^4 \right] + 2\omega^3\omega^1 \left[-S_{321}^2 + S_{341}^4 \right] + \\ &\quad + 2\omega^1\omega^2 \left[-S_{132}^3 + S_{142}^4 \right] + 2\omega^1\omega^4 \left[-S_{124}^2 - S_{134}^3 \right] + \\ &\quad + 2\omega^2\omega^4 \left[-S_{214}^1 - S_{234}^3 \right] + 2\omega^3\omega^4 \left[-S_{314}^1 + S_{324}^2 \right]. \end{aligned} \right.$$

On peut observer que ces 9 coefficients sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire $\psi(\xi;\, \eta)$. Citons sans démonstration un énoncé qui explique la relation géométrique entre la forme quadratique de Ricci sans trace $\overline{\Theta}$ et la forme bilinéaire ψ (*cf.* [**72**], pp. 51–52).

THÉORÈME 12.6. *Le complexe quadratique de droites obtenu en annulant la forme ψ est celui des droites qui découpent sur la quadrique de Minkowski complexe $Q_{\mathscr{M}}$ et sur la quadrique $\Theta = 0$ deux segments formant une division harmonique.*

12.7. Démonstration du théorème d'unicité. Grâce aux considérations de la fin du §8.47, le Théorème d'unicité 1.85 se ramène à l'énoncé suivant.

THÉORÈME 12.8. *Toute forme quadratique covariante*

$$\Psi := \sum_{i,j=1}^{4} D_{ij} \cdot \omega^i \omega^j \tag{12.9}$$

dont les coefficients sont des combinaisons linéaires à coefficients constants *des composantes de courbure S^i_{jkl} est nécessairement de la forme* :

$$D_{ij} = \lambda \overline{S}_{ij} + (\alpha\, S + \beta) \left[-(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 \right]. \tag{12.10}$$

DÉMONSTRATION. Pour soustraire à Ψ sa trace modifiée, posons

$$\begin{cases} D \; := -D_{11} - D_{22} - D_{33} + D_{44} \\ \overline{D}_{ij} \; := D_{ij} - \dfrac{1}{4}\, \varepsilon_i \, \delta_i^j, \end{cases} \tag{12.11}$$

de telle sorte que

$$\Psi = \sum_{i,j=1}^{4} \overline{D}_{ij} \cdot \omega^i \omega^j + \frac{1}{4} D \left[-(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^2 + (\omega^4)^2 \right], \tag{12.12}$$

avec

$$0 = -\overline{D}_{11} - \overline{D}_{22} - \overline{D}_{33} + \overline{D}_{44}. \tag{12.13}$$

La quantité D est un invariant absolu, comme on le vérifie par un calcul analogue à (8.4) :

(12.14)

$$\begin{cases} D = \displaystyle\sum_{i=1}^{4} \varepsilon_i \, D_{ii} = \sum_{i,\, i_1,\, j_1 = 1}^{4} \varepsilon_i \, \widetilde{u}_i^{i_1} \, \widetilde{u}_j^{j_1} \, C_{i_1 j_1} = \sum_{i,\, i_1,\, j_1} \varepsilon_{i_1} \, u_{i_1}^i \, \widetilde{u}_i^{j_1} \, C_{i_1 j_1} \\ \quad = \displaystyle\sum_{i_1} \varepsilon_{i_1} C_{i_1 i_1} = C, \end{cases}$$

indépendant des variables de rotation u^i_j. D'après le Théorème 11.23, seule la quantité $S = R$ est un invariant absolu. Par conséquent, puisque D est une combinaison linéaire des S^i_{jkl}, il existe des constantes α et β telles que :

$$D = \alpha\, S + \beta. \tag{12.15}$$

Quant aux quantités $\overline{D}_{ij}$, elles dépendent linéairement de 9 d'entre elles que nous pourrons, sans préciser davantage, désigner par

$$\overline{D}_1,\ \overline{D}_2, \ldots\ldots \overline{D}_9. \tag{12.16}$$

Lorsqu'on effectue une transformation lorentzienne $\omega'^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant 4} u'^i_j\, \omega^j$ quelconque, les quantités $\overline{D}_k$ subissent une substitution linéaire $\overline{D}'_k = \sum_{1\leqslant m\leqslant 9} \lambda_k^m\, \overline{D}_m$. Plus précisément, si nous revenons aux notations $\overline{D}_{ij}$, et si nous remplaçons $\omega^i = \sum_{1\leqslant j\leqslant 4} \widetilde{u}'^{\,i}_j\, \omega'^j$, nous obtenons $\overline{D}'_{ij} = \sum_{1\leqslant i_1,\, j_1\leqslant 4} \widetilde{u}'^{\,i_1}_i\, \widetilde{u}'^{\,j_1}_j\, \overline{D}_{i_1 j_1}$. D'après le Lemme 11.16, il est impossible de trouver $h < 9$ combinaisons linéaires indépendantes des $\overline{D}_k$ qui sont transformées entre elles.

Introduisons les cinq coefficients indépendants $\overline{\Phi}_l$, $l = 1, \ldots, 5$, de la forme quadratique $\overline{\varphi}(\xi)$, les neuf coefficients indépendants $\overline{\Psi}_m$, $m = 1, \ldots, 9$, de la forme bilinéaire $\psi(\xi;\, \eta)$ et les cinq coefficients indépendants conjugués ${}^c\overline{\Phi}_l$, $l = 1, \ldots, 5$, de la forme quadratique ${}^c\overline{\varphi}(\xi)$. Pour $k = 1, \ldots, 9$, chaque quantité $\overline{D}_k$ étant combinaison linéaire des coefficients de courbure S^i_{jkl}, elle se décompose sous la forme

$$\overline{D}_k = H_k + K_k + L_k + \alpha_k\, S + \beta_k, \tag{12.17}$$

où H_k est une combinaison linéaire des 5 coefficients de $\overline{\varphi}(\xi)$, où K_k est une combinaison linéaire des 9 coefficients de $\psi(\xi;\, \eta)$ et où L_k est une combinaison linéaire des 5 coefficients complexes conjugués de ${}^c\overline{\varphi}(\eta)$, *i.e.*

$$\begin{cases} H_k = \sum\limits_{1\leqslant l\leqslant 5} H_k^l \cdot \overline{\Phi}_l, \\ K_k = \sum\limits_{1\leqslant m\leqslant 9} K_k^m \cdot \Psi_m, \\ L_k = \sum\limits_{1\leqslant l\leqslant 5} L_k^l \cdot {}^c\overline{\Phi}_l. \end{cases} \tag{12.18}$$

Quand on effectue sur les ω^i une transformation linéaire $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j\, \omega^j$ conservant la forme $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\, (\omega^i)^2$ (la matrice U' appartient à $\mathrm{SO}_{3,\,1}(\mathbb{C})$), les quantités $\overline{D}_k$ subissent entre elles une substitution linéaire. D'après le Théorème 11.23, à travers une telle transformation linéaire, les 5 coefficients H_k^l, les 9 coefficients K_k^m et les 5 coefficients L_k^l subissent aussi entre eux une substitution linéaire.

LEMME 12.19. *Pour* $k = 1, \ldots, 9$, *les quantités* H_k *sont nulles.*

DÉMONSTRATION. Supposons par l'absurde que les H_k ne sont pas tous nuls. Soit r le rang de la matrice $(H_k^l)_{1\leqslant k\leqslant 9}^{1\leqslant l\leqslant 5}$ de taille 9×5. On a

$1 \leqslant r \leqslant 5$. En renumérotant les $\overline{D}_k$ si nécessaire, nous pouvons supposer que la sous-matrice $(H_k^l)_{9-r+1 \leqslant k \leqslant 9}^{1 \leqslant l \leqslant 5}$ constituée des r dernières lignes est de rang r.

L'entier $h := 9 - r$ satisfait $4 \leqslant h \leqslant 8$. En effectuant des combinaisons linéaires (pivot de Gauss) sur les 9 équations (12.17), et en notant à nouveau $\overline{D}_k$, $k = 1, \ldots, 9$, les membres de gauche obtenus, on peut supposer que $H_1 = \cdots = H_h = 0$ et que les quantités $\overline{D}_{h+1}, \ldots, \overline{D}_9$ font intervenir les $r = 9 - h$ quantités H_k indépendantes. Quand on effectue sur les ω^i une transformation linéaire $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j\, \omega^j$ conservant la forme fondamentale $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\, (\omega^i)^2$, on a

(12.20)
$$\begin{cases} S' &= S \\ K'_k &= \sum\limits_{1 \leqslant m \leqslant 9} \mu_k^m\, K_m \\ L'_k &= \sum\limits_{1 \leqslant l \leqslant 5} \nu_k^l\, L_l \\ \overline{D}'_k &= K'_k + L'_k + \alpha_k S' + \beta_k, \qquad \text{pour } k = 1, \ldots, h, \\ \overline{D}'_k &= \lambda_k^1\, \overline{D}_1 + \cdots + \lambda_k^h\, \overline{D}_h + \lambda_k^{h+1}\, \overline{D}_{h+1} + \cdots + \lambda_k^9\, \overline{D}_9, \quad 1 \leqslant k \leqslant 9. \end{cases}$$

Puisque les quantités $\overline{D}_{h+1}, \ldots, \overline{D}_9$ font intervenir les r quantités H_k indépendantes, en comparant la dernière ligne à l'avant-dernière ligne, nous déduisons que $0 = \lambda_k^{h+1} = \cdots = \lambda_k^9$ pour $k = 1, \ldots, 9$, ce qui complète la preuve. □

Le raisonnement précédent permet de montrer que toutes les quantités L_k, et toutes les constantes α_k, β_k sont aussi nulles. Ainsi :

LEMME 12.21. *Les quantités $\overline{D}_k$ sont des combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire $\psi(\xi;\, \eta)$.*

Rappelons que ces derniers coefficients sont combinaisons linéaires des coefficients $\overline{S}_{ij}$ de la forme quadratique de Ricci sans trace, qui sont au nombre de 9. Notons, sans préciser davantage,

(12.22) $$\overline{S}_1,\ \overline{S}_2, \ldots\ldots \overline{S}_9$$

ces 9 composantes. Ainsi, il existe des constantes $\nu_{ij}^m \in \mathbb{C}$ telles que

(12.23) $$\overline{D}_{ij} = \sum_{1 \leqslant m \leqslant 9} \nu_{ij}^m\, \overline{S}_m.$$

Considérons alors la forme quadratique

$$\sum_{i,\,j=1}^{4} \left(\overline{D}_{ij} - \lambda\,\overline{S}_{ij}\right)\cdot\omega^i\omega^j = \sum_{i,\,j=1}^{4} \left(\sum_{1\leqslant m\leqslant 9} \nu_{ij}^m\,\overline{S}_m - \lambda\,\overline{S}_{ij}\right)\cdot\omega^i\omega^j. \tag{12.24}$$

En formant le déterminant 9×9 de la matrice qui apparaît entre parenthèses et en choisissant pour λ une racine du polynôme caractéristique obtenu, nous pouvons supposer que les 9 coefficients

$$\overline{E}_k := \overline{D}_k - \lambda\,\overline{S}_k \tag{12.25}$$

sont linéairement dépendants.

LEMME 12.. *Avec une telle racine λ, on a $\overline{D}_{ij} = \lambda\,\overline{S}_{ij}$ pour tous $i,\ j = 1,\,\dots,\,4$.*

DÉMONSTRATION. Raisonnons comme dans la preuve du Lemme 12.19. Par hypothèse, les quantités $\overline{E}_k$ sont combinaisons linéaires des coefficients de la forme bilinéaire $\psi(\xi;\eta)$, *i.e.*

$$\overline{E}_k = \sum_{1\leqslant m\leqslant 9} K_k^m\cdot\Psi_m. \tag{12.26}$$

Notons r le rang de la matrice $(K_k^m)_{1\leqslant k\leqslant 9}^{1\leqslant m\leqslant 9}$ et supposons par l'absurde que $1\leqslant r\leqslant 8$. L'entier $h := 9-r$ satisfait alors $1\leqslant h\leqslant 8$. En effectuant des combinaisons linéaires, nous pouvons supposer que

$$0 = \overline{E}_1 = \cdots = \overline{E}_h, \tag{12.27}$$

et que les quantités $\overline{E}_{h+1},\,\dots,\overline{E}_9$ sont linéairement indépendantes.

Quand on effectue sur les ω^i une transformation linéaire $\omega'^i = \sum_{j=1}^4 u'^i_j\,\omega^j$ conservant la forme $\sum_{i=1}^4 \varepsilon_i\,(\omega^i)^2$, les quantités $\overline{E}'_k$ subissent une substitution linéaire :

$$\left\{\begin{aligned} \overline{E}'_k &= \lambda_k^1\,\overline{E}_1 + \cdots + \lambda_k^h\,\overline{E}_h + \lambda_k^{h+1}\,\overline{E}_{h+1} + \cdots + \lambda_k^9\,\overline{E}_9 \\ &= \lambda_k^{h+1}\,\overline{E}_{h+1} + \cdots + \lambda_k^9\,\overline{E}_9. \end{aligned}\right. \tag{12.28}$$

Ces transformations montrent que l'espace engendré par les quantités $\overline{E}_1$, $\dots,\overline{E}_h$ est invariant par toutes les transformations lorentziennes induites, en contradiction avec le Lemme 11.16. □

Nous pouvons enfin achever la preuve du Théorème 12.8. En effet, nous avons

$$\sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant 4} \overline{D}_{ij}\cdot\omega^i\omega^j = \lambda \sum_{1\leqslant i,\,j\leqslant 4} \overline{S}_{ij}\cdot\omega^i\omega^j \tag{12.29}$$

ce qui démontre (12.10) en tenant compte de (12.12) et de (12.15). □

En conclusion, sous l'hypothèse provisoire du §8.47, la démonstration du Théorème 1.85 est terminée. $\square$

Substitutions, permutations, invariances

1. Polynomialité

Mélanger algébriquement de manière arbitraire. Soit un polynôme quelconque :

$$P(\mathsf{x}) := a_0\mathsf{x}^n + a_1\mathsf{x}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathsf{x} + a_n = \sum_{i=0}^n a_i\,\mathsf{x}^i, \tag{12.29}$$

de degré arbitraire $n \geqslant 1$ à coefficients rationnels $a_i \in \mathbb{Q}$, où $\mathbb{Q}$ désigne le corps des fractions de l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers naturels de signe positif ou négatif. Ici, x est l'inconnue et pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on note $\mathsf{x}^i := \mathsf{x}\times\cdots\times\mathsf{x}$ le produit de x avec lui-même i fois d'affilée.

Exponentier x jusqu'à un ordre quelconque x^i, multiplier le résultat par un rationnel quelconque a_i, sommer jusqu'à un exposant n maximal, en un mot *mélanger algébriquement de la manière la plus générale possible* l'inconnue x à des quantités rationnelles a_i fixes : tel est le procédé. Aussi l'écriture standard d'un polynôme arbitraire $P(\mathsf{x}) = \sum_{i=0}^n a_i\,\mathsf{x}^i$, qui nous paraît intuitivement si évidente, satisfait-elle déjà intégralement l'exigence de *généralité symbolique* ; elle fournit d'emblée la « *clôture algébrique* » de tous les procédés de calculs potentiels qui sont disponibles dans le champ de l'algèbre élémentaire.

C'est dans un ouvrage d'Ibn al-Banna (1321) que les polynômes de degré n sont représentés simplement par la suite de leurs coefficients, sans référence à aucune contrainte de dimensionnalité géométrique. En Europe, Michael Stifel spécifie l'inconnue privilégiée, Chuquet invente l'exposant, Viète développe le calcul littéral, Descartes formalise l'algébricité en toute généralité.

À travers un parcours historique complexe, le concept de polynôme achève donc un cycle d'autonomisation, d'élimination de l'incomplétude, et aussi, de fermeture des récurrences.

Scholie. Qu'appelle-t-on ici *fermer une récurrence* ? Sans élaborer d'analyse générale, voici seulement un exemple très simple. Il est bien connu que les formules inductives *ouvertes* :

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}, \qquad \binom{1}{1} = 1,$$

qui permettent de calculer pas à pas les nombres de Pascal (lesquels s'organisent en un triangle harmonieux) peuvent être remplacées par la formule *close* :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

qui donne directement la valeur de ces nombres *sans avoir à reparcourir tous les calculs intermédiaires*. Ces derniers calculs, étaient en effet seulement *indiqués* par certaines formules de récurrence incomplètes, ils n'étaient pas *accomplis*.

La dialectique entre *formules ouvertes* et *formules closes* est ubiquitaire en mathématiques : elle manifeste la protension permanente qu'a l'irréversible-synthétique à se réaliser. □

Ainsi en particulier, additionner ou multiplier entre eux deux polynômes quelconques donne toujours une expression du même type général : juste un polynôme. Plus encore : toute expression polynomiale en un polynôme donné redonne à nouveau un polynôme du même type général. En définitive, le concept général de polynôme incorpore déjà en lui-même la fermeture de toutes ces récurrences constitutives. Perfection de l'immanence qui se réalise dans la stabilité de la forme à travers ses avatars algébriques.

Museler la protension à l'effectivité. Incidemment, Galois prend appui sur un tel levier métaphysique : en postulant l'automaticité et l'internalité du calculatoire, il élimine résolument tous les aspects effectifs qui alourdiraient considérablement le déploiement de la pensée.

> Sauter à pieds joints sur les calculs, grouper les opérations, les classer suivant leurs difficultés et non suivant leur forme, telle est suivant moi, la mission des géomètres futurs. Discussion sur les progrès de l'Analyse pure

Galois travaille directement au niveau immanent de la stabilité formelle des expressions algébriques. Il met *volontairement* entre parenthèses l'effectivité actuelle qui s'exprimait dans les mémoires de Lagrange et de Gauss. Galois cherche à taire l'explosion symbolique, il refoule l'exigence d'effectivité, il force l'Actuel à se repotentialiser.

On assiste ainsi, à la charnière des $18^{\text{ème}}$ et $19^{\text{ème}}$ siècles, à une métamorphose fascinante du destin de l'Algèbre : comme si la pensée mathématique, oppressée par les contraintes grandissantes de la complexité des problèmes rencontrés, se résolvait de manière presque inconsciente à éviter l'impraticable et à contourner les missions impossibles en inventant un discours qui produit les informations désirées dans un langage conceptuel neuf et économique.

Résoudre impose des synthèses irréversibles. En conclusion, la compréhension adéquate de l'« être d'un polynôme quelconque » $P(\mathsf{x}) = a_0\mathsf{x}^n + a_1\mathsf{x}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathsf{x} + a_n$ incorpore la perception *en pensée* d'une parfaite stabilité à travers toutes les transformations algébriques possibles. Dans certaines circonstances, les quantités rationnelles a_i non spécifiées pourront elles aussi jouer le rôle de variables, et non simplement de constantes. Tel est la force du symbolisme : héberger simultanément l'embrassement et la spécification, préparer les pivotements et anticiper les dualités.

L'histoire des polynômes se concentre — on le sait — autour d'une question principale : résoudre des équations algébriques. Arpentage, économie domestique, optimisation de volumes, de nombreux problèmes concrets qui dépendent d'un seul paramètre inconnu se ramènent à la résolution d'une équation spécifique $P(\mathsf{x}) = 0$, depuis Babylone jusqu'à la Renaissance en passant par les mathématiques arabes, avec Al-Khawarizmi, Abu Kamil, Omar Khayyam, Sharaf al-Din al-Tusi. En géométrie pure, il s'agit de construire des lieux géométriques, d'intersecter des courbes, de discuter des multiplicités.

Unification remarquable : de nombreux problèmes se ramènent à trouver les solutions d'une ou plusieurs équations polynomiales $P(\mathsf{x}) = 0$. L'exigence abstraite de formuler par induction complète l'*être-général* du concept de polynôme s'enracine dans l'universel hétéronome du champ physico-mathématique.

Mais tout polynôme issu d'un problème concret ne fait qu'exprimer la synthèse élémentaire des différents facteurs qui concourent à l'énoncé d'un problème. L'inconnue, le x, celui qu'on veut connaître, qu'il soit coût, aire ou volume, s'entrelace d'une manière déterminée à des quantités déterminées sans offrir directement une lisibilité de sa détermination spécifique. Le synthétique se métamorphose en analytique relatif et l'induction naïve qui proclamait l'acquisition d'une généralité formelle définitive est rétrogradée à n'être qu'un premier moment préliminaire à un vaste champ d'exploration. À l'opposé des synthèses élémentaires qui constituent l'être par agrégation d'entités algébriques, *résoudre* confronte à des synthèses problématiques qui exigent toujours de sortir du champ initial. Comment penser ce *gradient* d'irréversible-synthétique ? Comment définir ses conditions de possibilité ?

Privilégier l'Algèbre, sans le secours de l'Analyse. Soit l'ensemble des racines, vues dans le corps algébriquement clos $\mathbb{C}$ des nombres complexes, d'une équation algébrique donnée $F(\mathsf{x}) = 0$. Sans le secours, ou de l'Analyse, ou de la méthode de Newton, ou des approximations décimales, l'ambiguïté est *a priori* totale quant à ces racines dans la simple donation algébrique d'un polynôme $F(\mathsf{x})$. L'individuation réciproque entre les racines qui serait aisément discernable pour des polynômes explicites simplistes, disparaît définitivement lorsqu'on envisage d'étudier tous les polynômes quelconques. Aussi la non-canonicité de la donation par numérotation ou par labellisation exige-t-elle de *penser a priori* l'interchangeabilité entre m quantités invisibles algébriquement : analogie thématiquement lointaine mais métaphysiquement appropriée avec les systèmes de repères lorentziens en relativité restreinte.

2. Permutations et substitutions

Donation subreptice. Soit donc E un ensemble fini de racines, d'objets, ou, dans un mouvement d'abstraction qui vise à vider toute dénotation de sa substance, de simples *lettres mathématiques*. Après numérotation[1] de ses éléments, E s'identifie, pour un certain entier n, à l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de tous les entiers positifs allant de 1 jusqu'à $n = \mathrm{Card}(E)$. Le *groupe symétrique* $\mathfrak{S}_n$ est constitué de toutes les bijections de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sur lui-même, la loi de groupe étant définie exactement comme pour la composition des fonctions : on multiplie les permutations de droite à gauche, de telle sorte que l'écriture $\tau\sigma$ dénote la bijection de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ sur lui-même obtenue en appliquant d'abord σ et ensuite τ.

Obligation platonicienne de spéculer maximalement sur tout point de départ. Telle est la présentation brève, directe, et qui livre immédiatement l'intuition du concept de *permutation*[2] que l'on trouverait en guise de rappel dans tout traité contemporain de mathématiques. Mais subrepticement, des actes aux apparence d'évidence ont *occulté par pétition de principe* de vraies questions fondamentales.

> Obligation, donc, en toute matière et pour tout homme, de faire porter sur le point de départ le plus gros effort d'examen, en vue de savoir si c'est à bon droit, ou non, qu'on se l'est donné pour principe. PLATON, Cratyle 436c, [**324**], p. 95.

Avant d'en venir à la métaphysique de l'apparition automatique des groupes au contact des équations algébriques, une méditation préliminaire et fondamentale s'impose donc. Au seuil de son étude, Galois insiste en effet sur l'indépendance de ce concept de *substitution* vis-à-vis de *tout* caractère de désignation préalable.

---

[1] Spontanéité de cet acte : individuer est un acte psycho-biologiquement immédiat pour toute conscience perceptive,

[2] Les mathématiciens du 19[ème] siècle emploient le terme de *substitution* ([**380**]), époque à laquelle le mot *permutation* était réservé à tout ordonnancement fixé.

> Les substitutions sont le passage d'une permutation à une autre. [**172**], p. 35.

> La permutation d'où l'on part pour indiquer les substitutions est toute arbitraire, quand il s'agit de fonctions ; car il n'y a aucune raison pour que, dans une fonction de plusieurs lettres, une lettre occupe un rang plutôt qu'un autre. [**172**], p. 35.

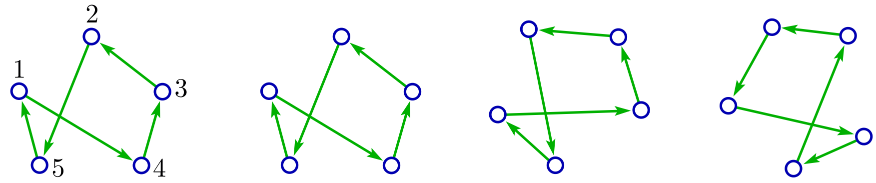
Libérer l'objet mathématique de toute dénomination. L'acte de déplacer, dans leur ensemble, tous les éléments, ne dépend en effet d'aucune dénomination, d'aucune numérotation. C'est le point d'ancrage de l'analyse galoisienne : indépendance de la fonction vis-à-vis de ses arguments, primauté de la flèche par rapport à l'objet, préfiguration, en somme, du catégorique. L'indiscernabilité de principe entre les éléments s'explique ici par une application négative du principe de raison suffisante. Si tous les êtres dans leur ensemble, écrit en effet Galois, peuvent être soumis à une substitution globale, c'est qu'ils sont *de facto* interchangeables et ainsi, l'égalité de fait à laquelle ils participent par le mouvement se transmue en une égalité de principe, abstraite et *a priori*.

Un exemple concret illustrera mieux ces réflexions générales. Soit π la permutation de l'ensemble à cinq éléments $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ qui est définie par $\pi(1) = 4$, $\pi(2) = 5$, $\pi(3) = 2$, $\pi(4) = 3$ et $\pi(5) = 1$. D'emblée, les cinq éléments permutés se sont vu attribuer un nom, puisqu'ils ont été spécifiquement désignés au moyen des cinq premiers entiers naturels. Mais comment voir l'indépendance de la permutation π par rapport à toute dénomination préalable ? Suggestion : changer les noms, diagrammatiser, déplacer les éléments. L'invariance ne peut se comprendre qu'en conceptualisant la totalité des transformations qui ne l'affectent pas.

Un diagramme à deux lignes représente fidèlement l'action de π : l'image par π d'un élément est tout simplement située à sa verticale :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} K & T & A & U & S \\ U & S & T & A & K \end{matrix} \qquad \begin{matrix} A & U & S & K & T \\ T & A & K & U & S \end{matrix}$$

On se convainc aisément que ces trois petits tableaux à deux lignes représentent exactement la même permutation $\pi \in \mathfrak{S}_5$. Un point de vue plus géométral permet alors de se libérer de l'emprise du littéral.



Ici, chaque petit cercle reçoit et envoie une et une seule flèche. Dans un premier temps, pour fixer les idées, des chiffres sont assignés. Dans un deuxième temps, ces chiffres sont effacés. L'être de la permutation s'exprime maintenant sans aucune dénomination. Aucune information n'est perdue quant aux changements de place lorsque les noms disparaissent. Mais l'individualité des êtres doit être préservée, sans quoi le concept de permutation s'évanouirait.

Ensuite, grâce au caractère intrinsèquement mobile de l'appréhension intuitive des concepts géométriques, la figure se meut par la pensée, elle roule, se distend, se tridimensionnalise, plus encore, elle se déploie dans un espace de déformations que l'intuition dirigée, dans un moment d'extrapolation, va s'imaginer bien au-delà de ce que toute la figure était capable de représenter. À tout moment, l'intuition mathématique doit se projeter au-delà du donné actuel ; toujours à la recherche d'idées créatrices, elle doit repotentialiser le virtuel par des questions latérales et par des actes imprévus.

À travers toutes ces métamorphoses géométriques du lien permutationnel, l'individuation de chaque petit cercle est conservée ; ce sont les lignes de liaison orientées devenues élastiques qui expriment maintenant l'essence de la permutation π. Appréhender pleinement l'acte global et simultané de changement de place demanderait encore un effort supplémentaire de méditation qu'aucune illustration ne pourrait seconder.

Aussi longtemps que noms et positions changent, l'essence d'une permutation doit être ressaisie dans son invariance par rapport aux métamorphoses de dénomination et de position. *Éliminer dès le début toutes les orientations inadéquates de la pensée, voilà ce qui constitue le plus puissant levier métaphysique pour progresser dans l'inconnu mathématique.*

Dénommer est toutefois nécessaire. Paradoxe philosophique qui remonte au dialogue entre Parménide et Héraclite : la mobilité ne se comprend qu'à l'aide de la fixité ; inversement, appréhender la mobilité n'est possible qu'à l'aide de certains référentiels considérés comme fixés.

> Cependant, comme on ne peut guère se former l'idée d'une substitution sans se former celle d'une permutation, nous ferons, dans le langage, un emploi fréquent des permutations, et nous ne considérerons les substitutions que comme le passage d'une permutation à une autre. [**172**], p. 35.

La cinématique, qu'elle soit galiléenne ou relativiste, pense aussi le mouvemement en le référentialisant. Ici, les référentiels sont noms ou symboles, simplement.

Cette annonce que Galois fait à son lecteur dès l'énoncé des premiers principes possède aussi valeur de convention qu'il faudra mémoriser. En effet, la suite de son texte fera usage en plusieurs endroits de la disposition en lignes des permutations, la première ligne correspondant à la permutation identique et les lignes suivantes du tableau décrivant l'image des éléments de la première ligne qui se trouvent précisément à leur verticale.

$$
\begin{matrix}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\
\sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & \cdots & \sigma(n) \\
\tau(1) & \tau(2) & \tau(3) & \tau(4) & \tau(5) & \cdots & \tau(n)
\end{matrix}
$$

À présent, il reste encore à penser mathématiquement l'indépendance absolue du concept de substitution par rapport à une permutation de référence. Comment théoriser l'image des cercles mobiles et individualisés qui étaient liés par des flèches élastiques ?

Caractère réflexif de la libération de toute dénomination. D'une manière singulièrement *réflexive*, c'est la notion générale de substitution qui va elle-même produire son propre concept libérateur. En effet, changer de repère initial, pour une liste finie de n termes nommés initialement d'une manière arbitraire ne consiste en rien d'autre qu'effectuer une transformation de dénomination, et si l'on rapporte toutes les dénominations à la liste-modèle $1,\, 2,\, \dots, n$ des n premiers entiers, alors chaque changement de dénomination référentielle s'identifie à une certaine *permutation* α de cette liste $1,\, 2,\, \dots, n$, et de surcroît, tous les changements de dénomination possibles sont en correspondance biunivoque avec toutes les permutations possibles α de $\{1, 2, \dots, n\}$. *Renommer, c'est permuter.*

L'idée de transformation se réfléchit donc en elle-même et par elle-même pour exprimer l'essence de son indépendance. La flèche s'autonomise en se cyclisant grâce à des boucles, ou *diagrammes commutatifs* auxiliaires.

$$
\begin{tikzcd}
1 \quad 2 \quad \cdots \quad n \arrow[r, mapsto, "\sigma"] \arrow[d, mapsto, "\alpha"'] & \sigma(1)\ \sigma(2)\ \cdots\ \sigma(n) \arrow[d, mapsto, "\alpha"] \\
\alpha(1)\ \alpha(2)\ \cdots\ \alpha(n) \arrow[r, mapsto, "\tau"] & \begin{matrix} \alpha\sigma(1) & \alpha\sigma(2) & \cdots & \alpha\sigma(n) \\ \shortparallel & \shortparallel & & \shortparallel \\ \tau\alpha(1) & \tau\alpha(2) & \cdots & \tau\alpha(n) \end{matrix}
\end{tikzcd}
$$

Ainsi, toute permutation particulière σ de $\{1, 2, \dots, n\}$ se transfère en la collection de toutes les permutations $\tau := \alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha$ associées à tous les changements de référentiels discrets qui sont produits par une permutation quelconque $\alpha \in \mathfrak{S}_n$. La double composition avec α et son inverse α^{-1} est nécessaire, puisque l'on doit non seulement voir les termes initiaux dans le nouveau système de dénominations, mais encore voir leurs images elles-mêmes par la substitution dans le nouveau système de dénominations considéré.

Voici enfin surgir la question mathématique principale, passée sous silence jusqu'à présent :

Qu'est-ce qu'une permutation?

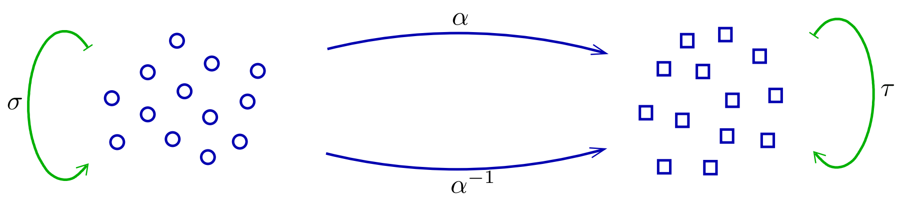
Comment, en effet, penser ce qu'est une permutation ? Comment *voir* chaque permutation donnée dans une spécificité propre parmi les spécificités universelles ?

Classifier les permutations à automorphisme intérieur près. Comment classifier les permutations ? La clarté intuitive de la correspondance $i \mapsto \sigma(i)$ est un leurre, car les permutations sont extrêmement diverses et complexes, et il est difficile d'en extraire des caractères de reconnaissance. Tout une constructivité conceptuelle doit être mise en œuvre afin de discerner sûrement ces êtres et de les classifier complètement.

En tout cas, les considérations précédentes ont montré que l'être-même d'une permutation spécifique doit absolument être libéré de toute dénomination initiale, puisque l'assignation préalable de noms est toute arbitraire. Par conséquent, classifier les permutations σ de $\mathfrak{S}_n$ doit donc et ne peut donc se faire qu'à *automorphisme intérieur près*, c'est-à-dire : deux permutations spécifiques σ et τ appartenant au groupe 'opaque' $\mathfrak{S}_n$ qui sont reliées par une relation du type $\tau = \alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha$ doivent être considérées commes « ayant les mêmes droits », comme constituant essentiellement « la même » permutation, comme étant « équivalentes ». Ici, les automorphismes intérieurs, ce sont les bijections $\sigma \mapsto \alpha^{-1}\sigma\alpha$ de $\mathfrak{S}_n$ (*voir* aussi ci-dessous).

Scholie. Dans sa théorie des groupes continus de transformations, Lie qualifiera de *gleichberechtigt* [*gleich* : même, égal ; *berechtigt* : légitime, justifié ; *gleichberechtigt* : ayant les mêmes droits] deux systèmes de transformations infinitésimales qui se correspondent dans leur ensemble à travers tout changement de coordonnées qui est produit par le groupe lui-même. Cette terminologie témoigne bien du fait que toute question qui débouche sur un travail de classification doit d'emblée thématiser l'invariance de l'être lors de ses mouvements propres. □

Dans les mathématiques actuelles, on exprime généralement ce concept en disant que les deux permutations σ et $\tau = \alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha$ sont *conjuguées* l'une à l'autre par la permutation α.



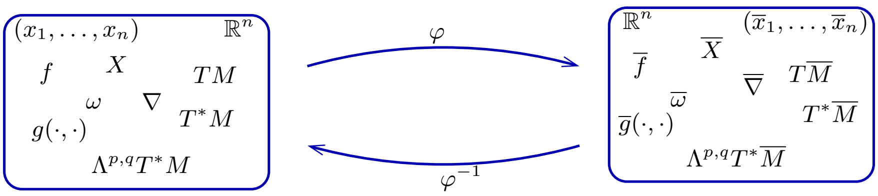
Paradoxe : on pourrait croire que la collection $\alpha^{-1} \circ \sigma \circ \alpha$ des permutations conjuguées à σ couvre toutes les permutations $\tau \in \mathfrak{S}_n$, puisque ces conjuguées sont paramétrées par le groupe complet des $\alpha \in \mathfrak{S}_n$. Or il n'en est rien, car deux permutations sont conjuguées si et seulement si, pour tout

$k \geqslant 2$, elles ont exactement le même nombre de cycles de longueur k (*voir* ci-dessous).

> Quand nous voudrons grouper des substitutions, nous les ferons toutes provenir d'une même permutation. **[172]**, p. 35.

Nonobstant l'arbitraire des désignations, nommer les éléments est nécessaire, d'abord par souci de concrétude, et surtout lorsque plusieurs permutations doivent être envisagées ensemble, puisque la dénomination de référence doit nécessairement être la même par exigence de cohérence.

Scholie. En géométrie différentielle aussi, c'est en changeant de système de coordonnées locales que l'on peut appréhender le caractère intrinsèque des concepts fondamentaux : fonction f, champ de vecteur X, forme différentielle ω, métrique riemannienne $g(\cdot,\cdot)$, connexion ∇, fibré tangent TM ou cotangent T^*M à une sous-variété M, faisceau des formes différentielles $\Lambda^{p,q}T^*M$ de type (p,q), forme symplectique, forme de Kähler, fibré canonique, fibré des jets invariants, *etc.*



D'abord saisis dans un système initial de coordonnées $(x_1,\dots,x_n)$, ces objets doivent alors immédiatement, simultanément et virtuellement être aussi saisis, par l'effet-miroir infini d'une multiplication représentationnelle, dans *tout autre* système de coordonnées locales $(\overline{x}_1,\dots,\overline{x}_n)$ qui est déduit de $(x_1,\dots,x_n)$ par une transformation différentiable et inversible. □

Métaphysique générale de la référentialité. Théorie des groupes de substitutions et calcul tensoriel se rattachent donc à une même métaphysique référentielle : *le souci de concrétude demande des repérages dont il faut en même temps se libérer pour respecter l'exigence de discourir sur l'intrinsèque*. Cela même qui détermine l'angle de vue nécessaire à l'expression symbolique ne peut se libérer de son caractère extrinsèque qu'en multipliant maximalement tous les points de vue possibles, tous égaux en droits et interchangeables.

> Comme il s'agit toujours de questions où la disposition primitive des lettres n'influe en rien dans les groupes que nous considérerons, on devra avoir les mêmes substitutions, quelle que soit la permutation d'où l'on sera parti. Donc, si dans un pareil groupe on a les substitutions S et T, on est sûr d'avoir la substitution ST. **[172]**, pp. 35–36.

Au tout début de son mémoire sur la résolubilité par radicaux des équations algébriques, Galois manifeste donc une lucidité philosophique imparable sur les objets qu'il étudie.

3. Résultats élémentaires et fondamentaux sur le groupe $\mathfrak{S}_n$

Permutations circulaires. Le cardinal de $\mathfrak{S}_n$, à savoir le nombre de permutations σ distinctes de $\{1, 2, \dots, n\}$, est égal au nombre, appelé *factorielle de* n :

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,$$

qui est le produit de tous les entiers de 1 allant jusqu'à n. En effet, par une permutation σ quelconque, l'élément 1 peut prendre n valeurs distinctes dans $\{1, 2, \dots, n\}$, et ensuite l'élément 2 peut prendre les $(n-1)$ valeurs restantes, puis il reste $(n-2)$ valeurs pour l'élément 3, *etc.*

Une *transposition* est une permutation qui échange deux éléments distincts $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, tous les autres entiers $j \in \{1, \dots, n\}$ restant fixes. On note (i_1, i_2) une telle transposition qui envoie $i_1 \mapsto i_2$ et $i_2 \mapsto i_1$.

Plus généralement, une *permutation circulaire*, notée :

$$\big(i_1,\, i_2,\, i_3,\, \dots,\, i_{k-1},\, i_k\big),$$

où $i_1, i_2, \dots, i_k$ sont des entiers distincts deux à deux pris dans $\{1, \dots, n\}$, agit en envoyant $i_1 \mapsto i_2$, $i_2 \mapsto i_3$, ..., $i_{k-1} \mapsto i_k$ et à la fin pour fermer le cycle : $i_k \mapsto i_1$, tous les autres entiers étant intouchés. Un cycle à un seul élément noté (i_1) s'identifie donc à la permutation identique.

Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ et soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Les itérés de i par l'action de cette permutation i, $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$, $\sigma^3(i)$, $\dots$ sont *a priori* en nombre infini, alors qu'ils prennent tous leurs valeurs dans l'ensemble fini $\{1, \dots, n\}$. Par conséquent, il existe nécessairement deux entiers $k \geqslant 1$ et $l \geqslant 1$ tels que $\sigma^{l+k}(i) = \sigma^l(i)$, d'où $\sigma^k(i) = i$ en faisant agir $\big(\sigma^l\big)^{-1} = \big(\sigma^{-1}\big)^l = \sigma^{-l}$ des deux côtés. Si on note encore k le plus petit entier $\geqslant 1$ tel que $\sigma^k(i) = i$, alors les k éléments :

$$i_1 := i, \quad i_2 := \sigma(i), \quad i_3 := \sigma^2(i), \quad \dots, \quad i_{k-1} := \sigma^{k-2}(i), \quad i_k := \sigma^{k-1}(i)$$

sont tous deux à deux distincts et de plus, σ agit sur la collection $\{i_1, i_2, i_3, \dots, i_{k-1}, i_k\}$ exactement comme une permutation circulaire telle que définie à l'instant.

Décomposition en cycles. Tout élément $i \in \{1, \dots, n\}$ determine donc une σ-*orbite* i, $\sigma(i)$, $\dots$ qui est nécessairement finie et sur laquelle σ agit circulairement. Ces orbites décomposent en briques indépendantes l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ dans son intégralité.

Théorème. ([**400, 237, 133, 380**]) *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation arbitraire de $\{1, \ldots, n\}$. Les σ-orbites i, $\sigma(i)$, $\sigma^2(i)$, $\ldots$ d'éléments $i \in \{1, \ldots, n\}$ sont deux à deux disjointes dans $\{1, \ldots, n\}$, et sur chacune de ses orbites, σ agit comme une permutation circulaire, de telle sorte qu'elle se représente de manière unique comme une composition de permutations ciculaires :*

$$\sigma = (i_1, i_2, \ldots, i_l) \cdots (i_m, i_{m+1}, \ldots, i_n),$$

où par convention, tous les entiers j laissés fixes par σ sont censés être représentés ici par le cycle à un seul élément (j). Toutes ces permutations circulaires commutent deux à deux dans $\mathfrak{S}_n$, si bien que l'ordre dans lequel elles sont écrites peut être interverti.

L'ordre o de la permutation σ, c'est-à-dire le plus petit entier tel que :

$$\sigma^o = \mathrm{Id},$$

est égal au plus petit commun multiple des longueurs des cycles qui la composent. □

Ainsi, la décomposition en cycle d'une permutation particulière s'obtient très aisément en examinant le devenir de chaque élément, par exemple :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{matrix} = (1, 2, 3)\,(4)\,(5).$$

Si $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation arbitraire, la conjuguée $\alpha\,\sigma\,\alpha^{-1}$ de σ par α n'est autre que la composition des mêmes cycles transformés par α :

$$\alpha\sigma\alpha^{-1} = \big(\alpha(i_1),\, \alpha(i_2),\, \ldots,\, \alpha(i_l)\big) \,\cdots\, \big(\alpha(i_m),\, \alpha(i_{m+1}),\, \ldots,\, \alpha(i_n)\big).$$

En particulier, la conjugaison d'une permutation circulaire est à nouveau une permutation circulaire.

Théorème. ([**400, 237, 133, 380**]) *Deux cycles de même longueur sont conjugués dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si ils ont précisément la même longueur.*

Plus généralement, deux permutations quelconques sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_n$ si et seulement si, pour tout entier $k = 2, 3, \ldots$, chacune de leurs deux décompositions en cycles comporte exactement le même nombre de cycles de longueur k. □

4. Le problème fondamental de classification

Antériorité logique. Si la structure de toute permutation individuelle est donc intégralement décrite et comprise par sa décomposition canonique en cycles, il en va tout autrement lorsqu'on considère des collections de permutations qui forment un *groupe* pour la composition. Plus loin, il sera question d'une ou plusieurs causes métaphysiques profondes qui *expliquent* l'émergence, non pas de collections quelconques de permutations, mais de collections qui forment un tout autonome et fermé par composition, à savoir, justement, un *groupe*. Pour l'instant, il importe de dire que Lagrange et Cauchy ainsi que les continuateurs immédiats de Galois ont tout de suite compris que les problèmes issus de la théorie des équations algébriques débouchaient sur un problème qui leur est *logiquement antérieur*, à savoir le problème de comprendre *a priori* la nature et la structure des groupes de substitutions, aspect incontournable de la problématologie co-présente qui est néanmoins fréquemment écarté de tout manuel consacré à la théorie des équations algébriques (Atlantide contemporaine des problématiques systématiques).

Du problème général qui fait l'objet
de la théorie des substitutions

> **428.** Le problème général que l'on a en vue dans la théorie des substitutions peut être énoncé dans les termes suivants :
>
> *Quels sont les systèmes de substitutions conjuguées* [= sous-groupes] *que l'on peut former avec n lettres données ?*
>
> La solution de ce problème serait, pour l'Algèbre, de la plus haute importance ; aussi Lagrange et, après lui, plusieurs géomètres éminents se sont-ils occupés de cette question difficile. Mais, malgré leurs efforts, ils n'ont pu atteindre le but proposé, et la Science ne possède aujourd'hui sur ce sujet qu'un petit nombre de propositions générales que nous allons établir ici. [**400**], p. 283.

Focalisation galoisienne et contextualité du réel problématique. Deux raisons peuvent être avancées pour expliquer le fait que la stipulation d'un tel problème ne se trouve pas explicitement soulevé dans les réflexions écrites visionnaires de Galois :

1) c'est la structure même du problème ancien et brûlant de la résolubilité par radicaux des équations algébriques qui a magnétisé et polarisé les investigations de Galois, en lui enjoignant d'écarter toute autre question qui aurait pu lui faire perdre du temps sur des chemins de traverse[3], phénomène omniprésent auquel toute recherche mathématique est confrontée ; *lemmes,*

[3] Il est clair toutefois que Galois a été conscient d'ouvertures innombrables :

> Le Mémoire ci-joint est extrait d'un ouvrage que j'ai eu l'honneur de présenter à l'Académie il y a un an. Cet ouvrage n'ayant pas été compris, les propositions qu'il renferme ayant été révoquées en doute, j'ai dû me contenter de donner, sous forme synthétique, les principes généraux, et une *seule* application de ma théorie. [**171**], 417

propositions, théorèmes, et à un niveau supérieur, théories elles-mêmes, dépendent fortement de la contextualité[4] *propre au faisceau de problèmes et de questions dont ils sont issus, et par conséquent au niveau plus élevé de la philosophie* générale *des mathématiques, toute réalisation trace une voie individuée qui reste essentiellement polarisée et limitée dans un réel mathématique unitaire qui la dépasse* ;

2) l'exploration de tout problème de classification infini exige d'accepter l'entrée nécessaire dans un labyrinthe indéfini de calculs ramifiés, explorés avec la sueur de l'irréversible-synthétique, option de recherche que Galois cherche délibérément à éviter ; c'est aussi pour cette raison que Galois fut constamment considéré au vingtième siècle comme un héros des mathématiques structuralistes, parce que son option de pensée consistait à sauter au-dessus de toute la 'zoologie' potentiellement indéfinie d'individuations imprévisibles pour les groupes, en ne considérant que certaines structures globales épurées dans lesquelles la finitude elle-même est idéalisée hors de toute effectivité ; *dans le domaine de la connaissance, toute mythologie se construit et se renforce grâce, entre autres facteurs, à la* circulabilité *de ce qu'elle propose*.

Lie, Klein, la géométrie et les substitutions. Au contraire, la théorie de Lie entreprend de formuler et de travailler les problèmes *parallèlement sur tous les fronts de la généralité et de l'individuation irréversible des êtres mathématiques*. En tant qu'il accepte et qu'il approfondit le *déchirement mathématique perpétuel entre le général et le particulier*, Lie est véritablement un mathématicien *universel*. Non seulement en effet Lie transfère la métaphysique galoisienne aux groupes *continus* de transformations, mais encore

[4] Que la contextualité — abstraite ou concrète — soit *déterminante* pour la production de connaissance scientifique est une thèse épistémologique séduisante à cause de son caractère d'immanence totale.

> La Mécanique Quantique n'est ni une explication, ni une description fidèle [de la 'réalité physique'] — mais il n'est pas nécessaire pour autant de démissionner. Une troisième option est d'affirmer que ses traits sont *rendus nécessaires* par le mode même de nos gestes opératoires et par notre mode de communication. Puisqu'on ne peut pas escamoter le contexte, il est indispensable de le mentionner, ce qui implique un retour en force de l'épistémologie. La *contextualité* est ainsi l'origine, en Mécanique Quantique, de ses principaux aspects mathématiques : espaces de Hilbert ; décompositions spectrales ; mécanique ondulatoire ; règles de quantification de Bohr-Sommerfeld ; ainsi que de ses principaux paradoxes : non-localité ; non-compatibilité des observables. **[40]**

Toutefois, l'archaïsme primitif de la thèse du 'tout-contextuel' n'élimine en rien les mystères de la métaphysique *spécialisée* des contenus de la connaissance scientifique.

il aborde seul le vrai problème de classification des groupes, à la suite du fameux *Traité des substitutions* de Jordan.

En 1865[5], lorsque Sophus Lie (1842–1899) achève ses études à l'Université de Christiania (Oslo), il ne se doutait pas qu'il allait devenir mathématicien, et il s'imaginait commencer une carrière d'astronome en se spécialisant dans l'observation. Or pour des raisons financières, il dût délivrer des cours privés en mathématiques, et à cette occasion, il commença à lire les travaux géométriques de Poncelet[6], de Chasles, et surtout de Plücker[7]. Inspiré malgré lui par ses lectures, il produisit quelque recherche originale sur la représentation des quantités imaginaires en géométrie projective, dont une portion fut acceptée et publiée par le *Journal für die reine und Angewandte Mathematik* (Crelle). C'est alors à l'âge de 26 ans qu'il décida de se consacrer à aux recherches en géométrie, et de devenir un mathématicien.

Dans le *Programme d'Erlangen* (1972, [**245**]), Klein et Lie en appelèrent alors au développement d'une théorie autonome des groupes continus de transformations. Ils avaient à l'esprit une analogie génétique potentielle avec la théorie des groupes de substitutions et avec la théorie de Galois des équations algébriques. Klein faisait observer que dans le traité de Jordan (1870), *la théorie des groupes finis de substitutions était développée de manière indépendante*, avant toute application algébrique ou géométrique. Ainsi Klein et Lie pensèrent-ils qu'il devrait exister une certaine théorie nouvelle pour les groupes *continus* de transformations de l'espace, en dimension quelconque, dont les applications intéressantes suivraient ultérieurement, comme dans le *Cours d'algèbre supérieure* de Serret [**400**] à l'École polytechnique. Klein pensait principalement à des applications géométriques, mais Lie envisageait déjà aussi des applications aux équations

[5] *Cf.* [**203, 213**].

[6] Poncelet, J. : *Traité des propriétés projectives des figures* (1822) ; *Théorie des polaires réciproques*, Journal de Crelle, 1829. L'une des innovations les plus connues de Poncelet fut l'introduction des nombres complexes en géométrie projective, grâce à laquelle toute conique projective non dégénérée du plan :

$$A\,x^2 + B\,xy + C\,y^2 + D\,xz + E\,yz + F\,z^2 = 0$$

en coordonnées homogènes $[x\colon y\colon z]$ intersecte toute droite $a\,x + b\,y + c\,z = 0$ en exactement deux points (comptés avec multiplicité).

[7] Plücker, J. : *System der Geometrie des Raumes in neuer analytischer Behandlungsweise*, Journal de Crelle, 1846. Dans les travaux de Plücker, la géométrie n'étudie plus seulement des collections de points, mais des familles de droites, de plans, de sphères, de coniques, *etc.*, paramétrées par certains espaces de modules, souvent projectifs. Les courbes, les surfaces et les corps tridimensionnels de la géométrie ponctuelle sont remplacés par leurs analogues respectifs dans la géométrie nouvelle, appelés *surfaces de lignes*, *congruences de lignes*, et *complexes de lignes*. Klein était l'élève de Plücker, et avec Lie à Berlin, ils se considéraient comme des géomètres synthétiques ('synthétistes') au milieu d'analystes et d'arithméticiens.

aux dérivées partielles. En effet, le développement de sa théorie des transformations de contact s'amorçait à la lecture des travaux de Jacobi, en relation avec un objectif naissant :

Idée fixe de Lie : *Le fait qu'une équation différentielle, ou un système de telles équations, admette des symétries connues (peut-être au plan infinitésimal), qui commutent ou, plus généralement, qui forment un groupe pour la composition, devrait pouvoir apporter de l'information au sujet de son intégration.*

Durant la période de 'balbutiements' qui s'étend de 1869 à 1873, Lie a en effet cultivé l'idée qu'il devrait être possible de développer une théorie *systématique* des équations différentielles qui ressemblât à la théorie de Galois des équations algébriques. Et en fait, en 1871, à la suite de ses travaux communs avec Klein sur les complexes tétrahédraux de lignes, Lie était déjà en possession d'un tout premier résultat dans cette direction :

Proposition. *Si une équation aux dérivées partielles du premier ordre à deux variables dépendantes (x, y) et une variable dépendante z :*

$$f(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

admet $k \leqslant 3$ symétries infinitésimales indépendantes qui commutent*, alors, localement au voisinage d'un point générique, il existe de nouvelles variables (X, Y, Z) dans lesquelles cette équation se simplifie pour devenir de l'une des trois formes suivantes :*

(i) $F(Z_X, Z_Y) = 0$, si $k = 3$;

(ii) $F(Z, Z_X, Z_Y) = 0$, si $k = 2$;

(iii) $F(X, Y, Z_X, Z_Y) = 0$, si $k = 1$. □

Classification des groupes continus de transformations. Mais qui développerait cette théorie générale des groupes continus ?

Il semble que ni Klein, ni Lie n'envisageaient en 1872 d'entreprendre l'édification d'un traité du niveau de celui que Jordan avait achevé récemment pour les groupes de substitutions discrètes et finies. En fait, Klein arrêta de penser à de tels projets éventuels peu de temps après avoir rédigé son *Programme d'Erlangen*. Lie non plus ne s'était pas encore déterminé à s'engager vers les groupes continus *généraux* de transformations. Toutefois, il réalisat à cette époque que le *programme d'Erlangen* débouchait implicitement sur un problème de *classification* des groupes continus. En effet, si toute géométrie au sens de Plücker-Klein — tout espace homogène — est déterminée par un groupe, quelles peuvent alors être toutes les géométries possibles ? c'est-à-dire : quels peuvent être tous les groupes continus et leurs sous-groupes ?

Ainsi, aurait-il fallu commencer logiquement par classifier les groupes, comme le firent Cauchy, puis Serret, Jordan et leurs contemporains. Une partie importante de la théorie prospective des goupes continus de transformations devrait donc se consacrer à la résolution de ce problème, qui allait devenir l'*objectif principal* de la *Theorie der Transformationsgruppen*, édifiée en collaboration avec Friedrich Engel de 1884 à 1893. Mais en 1872, il est probable que Lie jugeait qu'un tel problème était 'infaisable', *i.e.* bien au-delà de ce qu'il était en mesure d'entreprendre à l'époque. Néanmoins, pendant l'hiver 1873–74, Lie observa qu'il est relativement aisé de résoudre le problème de classification en dimension 1 et il découvrit qu'une structure de groupe se 'cachait' derrière le crochet de Jacobi, ce qui le décida fermement à se consacrer entièrement à la tâche immense de créer et de développer une théorie nouvelle des groupes continus de transformations.

Mais avant d'en dire plus, il faut revenir aux permutations.

5. Transformations par permutation de polynômes multivariés

Action sur les racines. Soit maintenant un polynôme multivarié arbitraire en les racines $x_1, \dots, x_n$ du polynôme quelconque $P(\mathsf{x})$ de degré n défini par (12.29) :

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{\text{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \dots, \mathsf{a}_n} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} (x_2)^{\mathsf{a}_2} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n}$$

à coefficients rationnels $\Phi_{\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \dots, \mathsf{a}_n} \in \mathbb{Q}$ dépendant du multi-exposant $(\mathsf{a}_1, \mathsf{a}_2, \dots, \mathsf{a}_n) \in \mathbb{N}^n$ et *a priori* quelconques, un nombre *fini* d'entre eux seulement étant non nuls.

Une substitution quelconque $\sigma \in \mathfrak{S}_{n-1}$ agit sur les n variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ listées dans un certain ordre en permutant leurs indices inférieurs :

$$x^\sigma := \sigma(x_1, \dots, x_n) := \big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big).$$

On prolonge cette action à l'espace des polynômes $\Phi \in \mathbb{Q}[x]$ en requérant que σ agisse simultanément de la sorte sur tous les monômes qui le composent (des explications suivent) :

$$\begin{aligned}
\Phi^\sigma(x) &:= \Phi(x^\sigma) \\
&= \sum_{\text{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n} \cdot \big(x_{\sigma(1)}\big)^{\mathsf{a}_1} \cdots \big(x_{\sigma(n)}\big)^{\mathsf{a}_n} \\
&= \sum_{\text{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_{\sigma^{-1}(n)}} \qquad [\text{poser } \sigma(k) = k'] \\
&= \sum_{\text{finie}} \Phi_{\mathsf{b}_{\sigma(1)}, \dots, \mathsf{b}_{\sigma(n)}} \cdot (x_1)^{\mathsf{b}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{b}_n} \qquad [\text{poser } \mathsf{a}_{\sigma^{-1}(k')} := \mathsf{b}_{k'}].
\end{aligned}$$

Commentaire explicatif : à l'instant même (deuxième ligne) où l'on exprime sous forme développée l'action de σ ainsi définie, il se manifeste une *exigence abstraite de réorganisation*. L'acteur, penseur mathématicien et *praticien de la formule*, doit en effet éprouver la nécessité de retraduire correctement le monôme $(x_{\sigma(1)})^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_{\sigma(n)})^{\mathsf{a}_n}$ qui a été modifié par la permutation σ, puisque par convention initiale, tout polynôme doit se représenter comme somme de monômes-types $(x_1)^{\mathsf{b}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{b}_n}$: la forme générale doit être respectée. Or les indices inférieurs $\sigma(1), \dots, \sigma(n)$ qui apparaissent à la deuxième ligne dans le monôme $(x_{\sigma(1)})^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_{\sigma(n)})^{\mathsf{a}_n}$ de $\Phi(x^\sigma)$ ont été désordonnés par l'action de σ. Afin de transférer le résultat vers la forme normalisée qui incorpore le type adéquat de monômes, on effectue alors deux *transformations indicielles* :

• la première consiste à dénommer $\sigma(k) =: k' \in \{1, 2, \dots, n\}$ pour tout $k = 1, 2, \dots, n$, d'où $k = \sigma^{-1}(k')$, puis à traduire en conséquence (troisième ligne) le monôme $(x_{\sigma(k)})^{\mathsf{a}_k} = (x_{k'})^{\mathsf{a}_{\sigma^{-1}(k')}}$;

• la seconde transformation indicielle consiste à retranscrire tous les exposants obtenus $\mathsf{a}_{\sigma^{-1}(k')}$ (troisième ligne) sous une forme atomique qui les libère de la présence de σ^{-1} ; on y parvient en déclarant simplement que $\mathsf{a}_{\sigma^{-1}(k')} =: \mathsf{b}_{k'}$ constitue un nouvel indice indépendant sur lequel portera la sommation, d'où $\mathsf{a}_k = \mathsf{b}_{\sigma(k)}$.

Cette dernière normalisation *se répercute alors immédiatement sur les coefficients* $\Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}}$ (quatrième et dernière ligne) :

$$\Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_k,\dots,\mathsf{a}_n} = \Phi_{\mathsf{b}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{b}_{\sigma(k)},\dots,\mathsf{b}_{\sigma(n)}},$$

ce qui achève l'explication des métamorphoses symboliques.

Microlectures formelles. Seule une *microlecture du calcul mathématique*[8] est à même de dévoiler les lignes de nécessité interne du *champ mobilisateur* qui oriente, *à chaque acte élémentaire*, le mouvement de la pensée. La *pensée du détail*, en mathématiques, est profondément *disparaissante*. Par l'effet d'une habitude intersubjective d'automatiser partiellement l'action, ou par l'effet d'une hypothétique nécessité supérieure, on met entre parenthèses, on élague, on court-circuite, on résume, et plus encore, le discours

[8] *Microlectures :* petites lectures ? lectures du petit ? Les deux choses à la fois, sans doute. [$\cdots$] La lecture n'y est plus de l'ordre d'un parcours, ni d'un survol : elle relève plutôt d'une insistance, d'une lenteur, d'un vœu de myopie. Elle fait confiance au détail, ce grain du texte. [$\cdots$] Déceler, en somme, dans la successivité la plus exacte du texte, les forces génératrices d'une forme, et de sa rupture, c'est-à-dire de son passage continuel en d'autres formes [$\cdots$], tel était le projet de ces lectures. Il me vouait, on le voit bien, aux scrupules d'une minutie, à l'attrait soutenu d'une petitesse, fût-elle labile, fuyante, et comme toujours déportée hors d'elle-même. **[366]**

écrit enfouit partiellement ses actes dans un formalisme épuré qui fait disparaître certaines facettes de la pensée accompagnatrice. Sous-entendre les explicitations du spéculatif entretient l'opacité du mathématique au philosophique. À chaque instant, l'intuition mathématique lutte pour les reconstitutions.

Scholie. Le « *ressenti intuitif-interrogatif* » qui pousse aux bonnes mobilisations infinitésimales de la pensée mathématique est un universel fondamental tenu hors analyse. La métaphore cavaillèsienne du « geste qui appelle toujours un autre geste », dans la continuité des métamorphoses conceptuelles, désigne l'inexprimable intime de la conscience discrétisée du scientifique. S'il est acquis que la réalité idéale des mathématiques pose problème, il y a néanmoins, d'un point de vue purement local dans la pratique, un gradient de l'irréversible-synthétique, un champ magnétisant de l'adéquation conceptuelle. Chez Sophus Lie et Friedrich Engel, dans cette *Theorie der Transformationsgruppen* qu'ils ont rédigé de concert, on éprouve comme nulle part ailleurs le rayonnement d'un tel champ continu de forces spéculatives dirigées vers des réalisations mathématiques. □

Maintenant, il faut examiner la transformation qu'a subie notre polynôme Φ par l'action de la substitution σ. Deuxième moment nécessaire : retour sur soi de la pensée technique, et focalisation *a posteriori* des analyses ; l'Ouvert coprésent dans l'Actuel maintient toujours des interrogations dirigées quant à l'achèvement des procédés. Les interrogations sont une force perpétuelle de pivotement, de remise en cause, de doute méthodique — elles sont prêtes à jaillir à tout moment. En bref :

La pensée interrogatrice exerce ses réflexes à tous les instants.

Ici, aucun doute : la formule obtenue :

$$\Phi^\sigma(x) = \sum_{\mathsf{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n}$$

— noter le changement de lettre $\mathsf{b} \mapsto \mathsf{a}$ qui parfait les métamorphoses — exprime son propre aboutissement. En effet, le symbole supérieur $(\cdot)^\sigma$ qui notifie l'action de σ sur le polynôme initial :

$$\Phi(x) = \sum_{\mathsf{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n}$$

s'exerce seulement sur les exposants a_k qui indicient ses coefficients $\Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n}$, pour les transformer en $\mathsf{a}_{\sigma(k)}$: la substitution permute purement et simplement les coefficients du polynôme. Comparer le développement de $\Phi^\sigma(x)$ à celui de $\Phi(x)$ signale donc cette seule différence au centre des similitudes.

Scholie. Aux actes de transformation calculatoire doit toujours s'ajouter un *acte décidé d'embrassement intuitif du résultat* qui non seulement doit chercher à l'interpréter, mais encore chercher à interroger ses imperfections éventuelles. Aussi l'écriture symbolique brève $\Phi^\sigma(x)$ s'accompagne-t-elle naturellement de l'écriture symbolique déployée $\sum_{\mathsf{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n}$ qui la complète et qui la réalise pleinement. □

Scholie. Toutefois, la *nécessité réelle* de soumettre le *développement complet* de Φ à la transformation σ, et donc d'effectuer un travail fin de réorganisation symbolique, reste en suspens. Des retours *a posteriori* pourront en effet montrer qu'on peut s'en dispenser, dans certaines circonstances, en fonction d'objectifs déterminés. C'est là que se révèle toute la difficulté qu'il peut y avoir à organiser la réalité explorée des mathématique : labyrinthe de combinaisons potentiellement inutiles qui sont pourtant sollicitées par le *champ mobilisateur*. □

Scholie. Conscient de ces bifurcations virtuelles de la pensée, le *formalisme mathématique contemporain joue très fréquemment avec l'ambiguïté entre dilatation et contraction du notationnel*. Et en général, les contractions symboliques s'accompagnent d'un langage conceptuel architectural qui sait déjà, dans l'*a posteriori* des synthèses théoriques (et grâce à des explorations antérieures qui peuvent fort bien s'étaler sur des siècles), *contourner un très grand nombre d'actes d'explicitation*. □

6. Métaphysique génétique de la structure de groupe

Invariance de polynômes. On dit que deux polynômes :

$$\Phi(x) = \sum_{\mathsf{finie}} \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n} \quad \text{et} \quad \Psi(x) = \sum_{\mathsf{finie}} \Psi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot (x_1)^{\mathsf{a}_1} \cdots (x_n)^{\mathsf{a}_n}$$

sont *identiquement égaux*, ce que l'on écrit :

$$\Phi(x) \equiv \Psi(x),$$

si leurs coefficients sont égaux pour tout multi-indice, à savoir :

$$\Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} = \Psi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n},$$

pour tout $(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n) \in \mathbb{N}^n$.

Définition. *Soit* $\Phi = \Phi(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$ *un polynôme à coefficients rationnels. On dit que* Φ admet *une substitution* $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ *si l'identité :*

$$\Phi\big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big) \equiv \Phi(x_1, \dots, x_n)$$

est satisfaite dans $\mathbb{Q}[x_1, \dots, x_n]$.

Autrement dit, en identifiant les coefficients rationnels du développement de Φ à ceux du développement de Φ^σ qui viennent tout juste d'être rapportés à une forme appropriée, on voit immédiatement que Φ admet la substitution σ *si et seulement si* ses coefficients satisfont la condition d'invariance suivante :

$$\Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} = \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n},$$

pour tout multi-indice $(\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n) \in \mathbb{N}^n$. Par conséquent, pour le regard totalisant qui est à même d'envisager le Tout en tant qu'ensemble de ses parties, la condition $\Phi^\sigma(x) \equiv \Phi(x)$ doit être lue comme la collection d'égalités $\Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} = \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n}$ entre les coefficients, qui sont les constituants de base d'un polynôme.

Scholie. Tel était donc l'avantage de répondre d'emblée à la sollicitation abstraite du champ mobilisateur : respect de la continuité et de la progressivité de l'irréversible-synthétique dans son déploiement. Pensée exploratrice et pensée lectrice se rejoignent en recréant l'ordre naturel des choses. Ici, grâce à la transformation préliminaire du développement de $\Phi^\sigma(x)$, on est à même de concrétiser immédiatement la condition d'invariance $\Phi^\sigma(x) \equiv \Phi(x)$ par une collection d'égalités entre coefficients. $\square$

Assertion fondamentale : les groupes naissent de l'Invariance. *Le sous-ensemble* :

$$\mathsf{Fix}_\Phi := \big\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \colon \Phi \text{ admet } \sigma, \text{ i.e. } \Phi^\sigma(x) \equiv \Phi(x)\big\}$$

de la collection $\mathfrak{S}_n$ *des permutations de l'ensemble* $\{1, 2, \dots, n\}$ *est un* sous-groupe *de* $\mathfrak{S}_n$ *(un groupe aussi !), à savoir* :

- *l'identité appartient à* Fix_Φ ;
- *la composition* $\tau \circ \sigma$ *appartient à* Fix_Φ *pour tous éléments* σ, $\tau \in \mathsf{Fix}_\Phi$;
- *l'inverse* σ^{-1} *de tout élément* $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$ *appartient encore à* Fix_Φ.

Scholie. Cette assertion exprime qu'une structure de groupe est *automatiquement attachée* à la collection des permutations qui laissent invariant un polynôme donné. Paradoxalement, l'invariance fait naître la théorie des groupes, la stabilité confère des structures à la mobilité. C'est là un des grands mystères de la notion de groupe : son apparition automatique dans des contextes mathématiques disparates. On en vient à s'interroger sur des nécessités métaphysiques cachées qui s'exerceraient *a priori*. Les démonstrations diverses mais équivalentes que l'on peut donner de cette assertion élémentaire invitent à analyser leur transparence et éventuellement à l'interpréter comme la manifestation d'une réalité métaphysique supérieure, toujours problématique d'un point de vue philosophique. $\square$

DÉMONSTRATION. La première propriété va de soi : si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est la permutation identique, alors par définition, elle ne *change en rien* le polynôme, *i.e.* $\Phi^\sigma = \Phi$ puisque σ est l'identité, d'où $\Phi^\sigma(x) \equiv \Phi(x)$, c'est-à-dire $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$.

Scholie. « Évident », « immédiat », « trivial » : ce sont les adjectifs qu'a consacrés le vocabulaire mathématique pour caractériser les propriétés qui ne demandent aucun effort de démonstration ou de vérification. Parfois, les abus de langage autorisés font que ce qui est déclaré « évident » ne l'est pas vraiment tout à fait, mais l'évidence, l'immédiateté, la trivialité n'en sont pas moins réellement coprésentes de l'acte désigné comme tel. Pourquoi, alors, en est-il ainsi ?

Parce que le principe d'identité $A = A$ constitue non seulement un axiome du raisonnement logique indispensables au fonctionnement sain des mathématiques, mais aussi un *vecteur orienté d'acte de transition rationnelle minimale*. Le mathématicien doit pouvoir vouloir déclarer *minimal* tout acte de compréhension qu'il a intégré. Plus encore, le mathématicien doit pouvoir accepter comme minimaux des actes qui ne le sont pas pour lui alors qu'ils le sont pour d'autres que lui. L'existence de multiples répétitions, de retours en arrière et de reprises dans la vie discursive de la pensée incite l'esprit à construire régulièrement ses propres actes de minimalisation argumentative, et à les entretenir. Subjectivité, raccourcis personnels, visualisation infralinguistique, transmission intersubjective, des éléments disparates concourent à de tels *actes de compression mentale*, une des pièces les plus complexes qui composent l'*intuition mathématique*. □

Progrès infinitésimaux de l'irréversible-synthétique symbolique. Toujours est-il que la démonstration détaillée de la première propriété (triviale) de l'assertion repose sur des identités qui doivent se dérouler, en toute rigueur, en trois moments :

$$\Phi^{\mathrm{Id}}(x) = \Phi(x) \equiv \Phi(x).$$

Le premier moment, à savoir l'égalité pure :

$$\Phi^{\mathrm{Id}} = \Phi$$

entre deux êtres, exprime la complète inaction sur Φ de la substitution-identité « Id ». On en déduit donc que les polynômes eux-mêmes, vus comme dépendant de leur variable x, sont égaux, à savoir : $\Phi^{\mathrm{Id}}(x) = \Phi(x)$.

Ensuite, dans le second moment, on reprend le terme $\Phi(x)$ obtenu à l'instant pour observer qu'il s'identifie, coefficient à coefficient, avec le polynôme initial $\Phi(x)$, ce que l'on écrit $\Phi(x) \equiv \Phi(x)$, en utilisant bien sûr le symbole « $\equiv$ » consacré par l'usage. Ici, et ici seulement, il s'agit tout simplement, sur le plan de la logique formelle, de l'axiome d'identité $A = A$.

Mais à cet instant là aussi, c'est un *acte* de reconnaissance et d'identification de formes qui s'est exercé, et pour ce faire, un appel de la mémoire a dû avoir lieu, ainsi qu'une mobilisation de la pensée par embrassement. Ce second moment ne peut donc pas être seulement interne au symbolisme pur, car le symbolisme pur n'a pas le pouvoir autonome de décider de ses propres actes.

Enfin, le troisième moment, qui n'apparaît qu'implicitement dans les deux équations écrites, consiste à contracter les deux signes d'identification et à effacer les traces intermédiaires. De la sorte, le terme central disparaît et l'on obtient l'identité $\Phi^{\mathrm{Id}}(x) \equiv \Phi(x)$ qui exprime précisément que $\mathrm{Id} \in \mathsf{Fix}_\Phi$.

Scholie. Plus généralement, toute chaîne d'identités ou d'égalités peut être contractée en chacun de ses nœuds et être réduite de la sorte à une seule identité ou égalité, les autres s'effondrant sur celle qui a été choisie. La propriété qu'ont l'égalité et l'identité d'être *transitives* s'enrichit donc d'une *dynamique de l'effacement*. En effet, dans la plupart des démonstrations mathématiques locales, les chaînes d'égalité ou d'identité sont linéaires et l'acte conclusif peut être représenté comme la fermeture d'un cycle par identification de l'expression finale à l'expression initiale :

$$\mathsf{Initial} = \mathsf{A}_1 = \mathsf{A}_2 = \cdots = \mathsf{A}_{k-1} = \mathsf{A}_k = \mathsf{Final}$$

$$=$$

□

Pour établir la seconde propriété de l'assertion, il est nécessaire d'analyser au préalable comment deux permutations agissent l'une après l'autre sur un monôme quelconque. Soient donc $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Pour tout indice k fixé entre 1 et n, on a par définition :

$$\big((x_k)^\sigma\big)^\tau = \big(x_{\sigma(k)}\big)^\tau = x_{\tau(\sigma(k))} = x_{\tau\sigma(k)} = \big(x_k\big)^{\tau\sigma},$$

d'où l'on extrait, d'après le principe de *fermeture des cycles d'égalisation* énoncé à l'instant, l'expression de l'action, sur une coordonnée x_k arbitraire, de deux permutations quelconques effectuées l'une à la suite de l'autre :

$$\big((x_k)^\sigma\big)^\tau = x_k^{\tau\sigma}.$$

On note l'inversion symbolique de l'ordre d'apparition de σ et de τ. Ici, la composition $\tau \circ \sigma$ de deux permutations est écrite brièvement $\tau\sigma$, sans symbole spécifique pour désigner la composition. Par conséquent, l'action successive de ces deux permutations sur un monôme arbitraire s'énonce exactement de la même manière :

$$\begin{aligned}
\big(\big[x_1^{\mathsf{a}_1} \cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\big]^\sigma\big)^\tau &= \big(x_{\sigma(1)}^{\mathsf{a}_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\mathsf{a}_n}\big)^\tau \\
&= x_{\tau\sigma(1)}^{\mathsf{a}_1} \cdots x_{\tau\sigma(n)}^{\mathsf{a}_n} \\
&= \big[x_1^{\mathsf{a}_1} \cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\big]^{\tau\sigma}.
\end{aligned}$$

En toute rigueur, fermer le cycle d'égalisation exige d'écrire le résultat obtenu sous la forme d'une identité générale :

$$\left(\left[x_1^{\mathsf{a}_1} \cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\right]^\sigma\right)^\tau = \left[x_1^{\mathsf{a}_1} \cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\right]^{\tau\sigma},$$

où les exposants $\mathsf{a}_1, \dots, \mathsf{a}_n$ sont bien sûr quelconques.

Puisque tout polynôme $\Phi(x) \in \mathbb{C}[x]$ est combinaison linéaire de monômes, on en déduit « immédiatement » la formule utile pour la suite :

$$\boxed{\left(\Phi^\sigma(x)\right)^\tau = \Phi^{\tau\sigma}(x)}.$$

Mais avant de poursuivre les raisonnements, une question surgit : en quoi cette conséquence est-elle immédiate ? L'immédiateté, en mathématiques, est un concept relatif qui repose en général sur l'acquisition, au fur et à mesure, d'une mémoire architecturée des définitions et des arguments de preuve. Si l'on voulait, en toute rigueur, expliciter la démonstration que l'identité $\left(\Phi^\sigma(x)\right)^\tau \equiv \Phi^{\tau\sigma}(x)$ se déduit bien des identités monomiales obtenues à l'instant, il faudrait écrire en détail :

$$\begin{aligned}
\left(\Phi^\sigma(x)\right)^\tau &= \left(\sum \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot \left(x_1^{\mathsf{a}_1} \cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\right)^\sigma\right)^\tau \\
&= \sum \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot \left(x_{\sigma(1)}^{\mathsf{a}_1} \cdots x_{\sigma(n)}^{\mathsf{a}_n}\right)^\tau \\
&= \sum \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot x_{\tau\sigma(1)}^{\mathsf{a}_1} \cdots x_{\tau\sigma(n)}^{\mathsf{a}_n} \\
&= \Phi^{\tau\sigma}(x),
\end{aligned}$$

ce qui démontrerait effectivement le résultat qui avait été annoncé comme pouvant être considéré comme évident. Pourquoi s'autorise-t-on alors à affirmer l'immédiateté de cette preuve qui nécessite pourtant des médiations symboliques ?

Sans que le formalisme mathématique ne les ait expressément notifiées, deux idées fondamentales doivent avoir été intégrées au cours de la progression, à savoir : 1) tout polynôme est agrégat-somme de monômes, à la manière dont un tout quelconque se compose de ses parties ; 2) sommation et multiplication par des coefficients restent *intouchées* par l'action de toute permutation. L'intuition adéquate peut alors se représenter que la sommation *passe à travers chacune des deux parenthèses* $(\cdot)^\sigma$ *et* $(\cdot)^\tau$ *de permutation*. L'acte d'« immédiatisation intuitive » s'identifie donc en contenu à une démonstration rigoureuse sans être contraint à quelque travail d'explicitation symbolique que ce soit. En définitive, la composition $\left((\cdot)^\sigma\right)^\tau$ de deux permutations l'une à la suite de l'autre agit sur tout polynôme en se distribuant simultanément sur tous les monômes, quelle que soit leur forme, quels que soient les coefficients du polynôme.

À vrai dire, on pourrait même se représenter à l'avance, à l'instant même où venait d'être démontrée l'identité générale $\big(\big[x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\big]^\sigma\big)^\tau = \big[x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\big]^{\tau\sigma}$, que la composition en question $\big((\cdot)^\sigma\big)^\tau$ s'exerçât sur la collection infinie de tous les monômes possibles : actualisation instantanée de la transformation de tous les éléments dans leur ensemble. Première ligne infinie : tous les monômes possibles ; deuxième ligne infinie : toutes leurs transformées par l'action de $\big((\cdot)^\sigma\big)^\tau$. Acte d'immédiatisation intuitive : l'opérateur fonctionnel $\sum \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n}(\cdot)$ attaché à tout polynôme spécifique agit exactement de la même manière sur chacune de ces deux lignes infinies.

Scholie. Bien qu'essentiellement passé sous silence par l'adverbe subreptice « immédiatement », un acte intuitif crucial a donc été mobilisé. Intentionnellement, une certaine médiation qui ne pose pas problème est laissée de côté. *Aucune époque n'est jamais parvenue à conventionner les règles du jeu ambigu qui organise la contraction de la pensée mathématique.* □

On pourrait aussi aborder l'action sur un polynôme Φ de cette composition $\big((\cdot)^\sigma\big)^\tau$ sous un angle différent, en appliquant par exemple la formule travaillée :

$$\Phi^\sigma(x) = \sum \Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} \cdot x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}$$

qui a été établie plus haut au lieu de la formule brute :

$$\Phi^\sigma(x) = \sum \Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n} \cdot \big(x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\big)^\sigma.$$

Comparer ces deux formule montre d'ailleurs que le symbole d'action σ peut se distribuer ou bien sur les coefficients, ou bien sur les monômes. Cette fois-ci, l'évidence et l'immédiateté de la propriété de composition d'action fonctionne d'après le même principe symbolique. Voici, en passant et par souci de complétude, les étapes de la vérification rigoureuse :

$$\begin{aligned}
\big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau &= \bigg(\sum \Phi_{\mathsf{a}_{\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\sigma(n)}} \cdot x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}\bigg)^\tau \\
&= \sum \Phi_{\mathsf{a}_{\tau\sigma(1)},\dots,\mathsf{a}_{\tau\sigma(n)}} \cdot x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n} \\
&= \Phi^{\tau\sigma}(x).
\end{aligned}$$

Clairement, le mécanisme est similaire. En fait, on peut argumenter ici d'une certaine *propagation de l'évidence et l'immédiateté* : puisque la propriété $\big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau = \Phi^{\tau\sigma}(x)$ était satisfaite automatiquement lorsque l'action des symboles $(\cdot)^\sigma$ et $(\cdot)^\tau$ descendait sur les monômes, elle sera aussi satisfaite automatiquement lorsqu'on fait plutôt descendre ces deux symboles sur les coefficients.

Plus encore, une explication intuitive supérieure doit pouvoir unifier tous ces phénomènes qui viennent d'être observés au niveau symbolique. Inventer le raccourci spéculatif, exprimer l'essence abstraite : devoirs permanents de la pensée. En effet, avec l'une ou l'autre approche symbolique, il faut s'imaginer que tous les symboles Σ, $\Phi_{\mathsf{a}_1,\dots,\mathsf{a}_n}$ et $x_1^{\mathsf{a}_1}\cdots x_n^{\mathsf{a}_n}$ s'effacent, et alors, la seule chose qui compte dans l'affaire est l'*identité archétypale* :

$$\big((\cdot)^\sigma\big)^\tau = (\cdot)^{\tau\sigma}.$$

On reconnaît bien sûr là l'expression abstraite et générale d'un des trois axiomes fondamentaux des actions de groupes, et les analyses méditatives lentes qui ont permis de l'extraire s'achèvent donc sur cette forme symbolique épurée :

$$\boxed{\big((\cdot)^\sigma\big)^\tau = (\cdot)^{\tau\sigma}}$$

qui exprime que la composition des deux transformations associées à deux permutations données peut être retrouvée directement, *sans composition*, comme la transformation unique associée à la multiplication, pour la loi de groupe dans $\mathfrak{S}_n$ de ces deux permutations.

Scholie. Voici donc localisé l'*élément infinitésimal d'irréversible-synthétique* qui joue à la fois le rôle de propriété et d'axiome pour les actions de groupes. □

En conclusion, la formule fondamentale $\big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau = \Phi^{\tau\sigma}(x)$ exprime une propriété synthétique infime, un atome d'irréversible-synthétique dans l'univers macroscopique des métamorphoses dirigées d'actes mathématiques. Et cet atome va, comme une lettre d'alphabet dans un roman, irriguer la théorie des groupes d'équations algébriques de sa fluidité synthétique infinitésimale, presque à l'insu des actes-réflexes du mathématicien.

Il n'est pas difficile maintenant de vérifier que la composition $\tau\circ\sigma$ de deux éléments de Fix_Φ appartient encore à Fix_Φ. En effet, sous la double hypothèse que $\Phi^\sigma(x)\equiv\Phi(x)$ et que $\Phi^\tau(x)\equiv\Phi(x)$, c'est-à-dire sous l'hypothèse que $\sigma,\tau\in\mathsf{Fix}_\Phi$, on déduit en un instant que :

$$\Phi^{\tau\sigma}(x) = \big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau \equiv \big(\Phi(x)\big)^\tau \equiv \Phi(x),$$

c'est-à-dire que $\tau\circ\sigma\in\mathsf{Fix}_\Phi$. Ces identités démontrent donc la seconde propriété de l'assertion.

Scholie. Encore une fois, un commentaire analytique s'impose. Le gradient synthétique dirige le symbolisme par des nécessités locales qui sont ici organisées linéairement. Dans un premier temps on recrée la dyade $\big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau$ à partir de la monade $\Phi^{\tau\sigma}(x)$, dans un second temps, on simplifie l'élément interne de la dyade, dans un troisième temps, on simplifie de manière complètement analogue la monade obtenue, et enfin dans un dernier temps, comme à l'accoutumée, on ferme le cycle des identités.

Linéarité et temporalité handicapent la pensée algébrique.

En effet, tout calcul est parcours linéaire, englué au temps intuitif, entaché du caractère temporalisé des actes, alors que *les essences algébriques sont interrelationnelles, totalisantes et transdimensionnelles*. Ainsi se révèle une limitation incontournable de l'entendement mathématique : la géométrisation littéralisée qu'il impose à l'algèbre le prive de visions englobantes adéquates. □

Il reste seulement à établir la troisième propriété de l'assertion. Soit $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$, c'est-à-dire, en revenant à la définition de $\Phi^\sigma(x)$, une permutation laissant Φ invariante :

$$\Phi\big(x^\sigma\big) \equiv \Phi(x).$$

En posant maintenant $y := x^\sigma$, d'où $x = y^{\sigma^{-1}}$, on en déduit l'identité :

$$\Phi(y) \equiv \Phi\big(y^{\sigma^{-1}}\big) = \Phi^{\sigma^{-1}}(y),$$

valable dans $\mathbb{C}[y]$, ce qui achève la démonstration de l'assertion. □

Métaphysique des nécessités mathématiques. Les trois propriétés de type *théorie des groupes* que satisfont toutes les permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ qui laissent invariant un polynôme $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ sont ainsi satisfaites *automatiquement* et donc d'une certaine manière aussi, *gratuitement*. Le fait qu'elles découlent d'arguments qui ne nécessitent quasiment aucun effort de démonstration[9] est certainement le « signe » que le concept de groupe constitue un noyau dur incontournable de la pensée mathématique.

La métaphysique des nécessités mathématiques *a priori* devrait vraisemblablement être transhistorique, voire même non restreinte au monde des hommes sur la Terre. Toutefois, une telle métaphysique n'est peut-être pas accessible à l'entendement, et elle ne saurait en tout cas pas se réduire à des recherches sur la catégoricité des notions, recherches qui appliqueraient par exemple les techniques actuelles de la théorie logique dite *de la démonstration*. Ici comme ailleurs, la seule chose que l'esprit doit être à même de ressentir comme problématique pour la pensée, c'est le « quelque chose plutôt que rien » des concepts qui doit toujours faire mystère pour les philosophes, et qui nourrit, en tant que fondement qui n'est plus interrogé par les mathématiciens, des arbres indéfinis de connaissance mathématique. Le noyau dur qu'est le concept de groupe se ramifie en effet dans les mathématiques contemporaintes : groupes finis, problème de Galois inverse, groupes de Lie,

[9] En éliminant toutes les analyses spéculatives, la démonstration formelle de l'assertion fondamental se résume en effet à quelques raisonnements très brefs. D'abord $\Phi^{\mathrm{Id}}(x) \equiv \Phi(x)$, ensuite :

$$\Phi^{\tau\sigma}(x) = \big(\Phi^\sigma(x)\big)^\tau \equiv \big(\Phi(x)\big)^\tau \equiv \Phi(x),$$

et enfin : de $\Phi\big(x^\sigma\big) \equiv \Phi(x)$ découle $\Phi(y) \equiv \Phi^{\sigma^{-1}}(y)$ en posant simplement $y := x^\sigma$. □

théorème de Feit-Thompson, classification des groupes de Lie complexes (Killing) et réels (É. Cartan) qui sont simples, *etc.*

La philosophie des mathématiques cherche ainsi à réveiller des questions directrices non résolues qui sont enfouies dans leur propre histoire. La question métaphysique principale de cette recherche :

« *Pourquoi les groupes* ? »

n'est donc pas réellement résolue. Depuis les travaux de Jordan et de Lie, le *destin de réalisation* de cette question se manifeste dans la spécialisation et dans la multiplication des résultats. Un tel destin s'identifie-t-il à un « oubli de la question », au sens de heideggerien ?

En mathématiques, il est difficile de se conformer au devoir de ne pas oublier les questions initiales, ontologiques et causales, d'autant plus que les penseurs qui ont médité ces questions productrices de concepts appartiennent à une autre époque, ont consumé leur temps de vie biologique à d'autres explorations. Inévitable division des tâches liée à la finitude des extensions temporelles. Irréversibilité, à l'échelle de l'histoire, du synthétique pur et *a priori* des mathématique. Étrangeté des époques les unes aux autres. Imparfaite absorption de l'âge métaphysique dans le formalisme contemporain.

Maintenir ouverte la question philosophique sur l'être et le pourquoi des groupes n'exige pas de se détourner des résultats élaborés et des publications spécialisées. Penser l'ouverture d'ensemble exige de maintenir un lien constant aux interrogations initiales. Les questions métaphysiques s'approfondissent et se complexifient dans et par les théories effectives, *mais elles ne s'y résolvent jamais complètement*[10]. Cette affirmation d'irrésolubilité, chère à la philosophie de Socrate, concerne aussi les mathématiques, car malgré l'apparence de rigueur et de précision que leurs langages ont construite, les mathématiques ne cartographient qu'une toute petite partie de la '*réalité-en-devenir-d'indéfinitude*' qu'elles explorent.

À tout le moins, les analyses précédentes ont montré que *la structure de groupe est canoniquement associée à la notion archétypale d'Invariance*. La préhistoire de la notion de groupe, à travers les travaux de Lagrange [**256**], de Gauss [**176**], de Cauchy [**92**], de Galois [**172**], puis ses premières réalisations systématiques dans les travaux de Jordan [**236, 237**] et de Lie [**283, 146, 147, 148**], montrent combien suprenante et imprévisible a été la prise de conscience de l'importance de ce concept.

Pourtant, l'assertion fondamentale montrait si simplement et de manière si élémentaire qu'à tout polynôme $\Phi(x)$ est attaché un certain sous-groupe Fix_Φ de $\mathfrak{S}_n$.

[10] Point de divergence significatif avec la philosophie mathématique d'Albert Lautman.

Paradoxes crucifiants du spéculatif ! *Invisibilité de l'évidence* !

La notion anodine et toute philosophique d'invariance ou de stabilité force donc *a priori* l'émergence du concept de groupe, bien que cette *a prioricité* n'ait pu se révèler que dans l'*a posterioricité* imprévisible d'un parcours historique chaotique.

Ontologie 'groupique'. Être un groupe, c'est constituer une clôture internalisée de transformations : clôture par composition, clôture par inversion, et aussi existence de l'identité, cet élément central de référence autour duquel pivotent tous les arguments de la théorie des groupes finis. Être groupe, c'est organiser en soi et pour soi la clôturation de ses propres métamorphoses opérantes. Être un groupe, c'est mobiliser en soi sa mobilité pure. Par action en soi et dans soi, le groupe compactifie l'essence propre de son auto-mouvement. Il porte en lui son premier moteur immobile.

Tout d'abord, observation tautologique : $\mathfrak{S}_n$ est un groupe en lui-même pour la composition des permutations. D'emblée, $\mathfrak{S}_n$ est équipé d'une structure de groupe. Et puisque l'univers total $\mathfrak{S}_n$ est maximal en lui-même, cette structure de groupe ne déborde pas l'ontologie première qui délimitait l'extension de sa structuration.

Mais ensuite, lorsque $\mathfrak{S}_n$ agit par permutation sur une collection d'objets algébriques tels que par exemple les polynômes à n variables, la structure de groupe se révèle d'un seul coup impensable dans l'éclosion potentielle du divers, *parce que* l'ontologie polynomiale offre immédiatement l'intuition de la multiplicité. Autrement dit, l'ontologie invisible de tous les sous-groupes possibles de $\mathfrak{S}_n$ se déclare soudainement par l'observation que Fix_Φ est *un* certain *sous-groupe* de $\mathfrak{S}_n$, pour tout polynôme arbitraire $\Phi(x) \in \mathbb{C}[x]$, le « pour tout » quantificationnel pilotant, à partir du multiple intuitionnable de tous les polynômes possibles, un multiple encore inconnu, et *a priori* extrêmement riche. L'algèbre ramifie, amplifie, multiplie.

Paradoxe ordinaire de l'ontologie imprécise : rien ne permet pour l'instant à l'intuition naïve de pré-visionner les treillis complexes formés par tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$, mais à travers le foncteur $\mathsf{Fix}(\cdot)$, la variabilité gratuite de l'ensemble des polynômes façonne et sculpte le divers virtuel des sous-groupes de $\mathfrak{S}_n$, au moins de manière potentielle.

> Quels peuvent être les nombres de valeurs des fonctions bien définies qui contiennent un nombre donné de lettres, et comment peut-on former les fonctions pour lesquelles il existe un nombre donné de valeurs ? **[1]**.

Les théorèmes de Lagrange établissaient les fondements de ce *Grand prix de l'Académie des Sciences* (1857), qui débouche, quasi-inconsciemment, sur le problème de la classification *complète* des sous-groupes de groupes de substitutions.

7. Résolvantes de Lagrange

Racines d'un polynôme à une variable. Soit un polynôme quelconque de degré $n \geqslant 1$ fixé :

$$P(\mathsf{x}) = \mathsf{x}^n + a_1\mathsf{x}^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\mathsf{x} + a_n$$

à coefficients rationnels $a_i \in \mathbb{Q}$ dont le coefficient a_0 du terme dominant x^n est ramené à 1 pour simplifier, après une division préalable éventuelle.

Le théorème fondamental de l'algèbre[11], admis sans rappel dans cette analyse réflexive, énonce que tout tel polynôme admet exactement n *racines* $x_1, \dots, x_n$ dans le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, pourvu qu'elles soient comptées avec multiplicité. On admettra que l'existence de ces racines dans $\mathbb{C}$ — établie grâce à l'Analyse — ne pose pas question. Sous cette hypothèse, il est possible et légitime d'écrire aussi ce polynôme comme produit de facteurs de degré 1 incorporant toutes ses racines :

$$P(\mathsf{x}) = (\mathsf{x} - x_1)(\mathsf{x} - x_2)\cdots(\mathsf{x} - x_n).$$

En effet, l'admission d'une racine y_0 quelconque d'un polynôme arbitraire $Q(\mathsf{y}) = \sum_{j=0}^m b_j \mathsf{y}^j$, à savoir un nombre complexe $y_0 \in \mathbb{C}$ tel que $Q(y_0) = 0$, permet d'extraire un facteur linéaire $(\mathsf{y} - y_0)$ *via* des manipulations algébriques élémentaires qui cherchent à faire apparaître un tel facteur linéaire :

$$\begin{aligned} Q(\mathsf{y}) = Q(\mathsf{y}) - 0 &= Q(\mathsf{y}) - Q(y_0) \\ &= \textstyle\sum_{j=0}^m b_j \mathsf{y}^j - \sum_{j=0}^m b_j y_0^j \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^m b_j \big(\mathsf{y}^j - y_0^j\big) \\ &= (\mathsf{y} - y_0) \sum_{j=1}^m \big(\mathsf{y}^{j-1} + \mathsf{y}^{j-2}\, y_0 + \cdots + \mathsf{y}\, y_0^{j-2} + y_0^{j-1}\big). \end{aligned}$$

Soustraire 0 n'équivaut pas à additionner 0. Ici, on aura noté en passant l'acte synthétique paradoxal qui a consisté à soustraire intentionnellement à $Q(\mathsf{y})$ le *zéro signifiant* qu'est la valeur nulle $Q(y_0)$. Le balayage de cette brève démonstration au microscope spéculatif enseigne incidemment que l'ontologie algébrique du zéro s'avère être en désaccord avec la position prétendûment centrale qu'il occupe comme articulation entre nombres négatifs et nombres positifs. Autrement dit, le « -0 » ne s'identifie absolument pas

[11] Le lecteur est renvoyé [**182, 156**] pour une approche historique documentée qui met en lumière les aspects ontologiques délicats d'un problème qui déclencha des controverses philosophiques passionnantes.

au « $+0$ », parce que si l'on s'était décidé à écrire plutôt :

$$\begin{aligned} Q(\mathsf{y}) = Q(\mathsf{y}) + 0 = Q(\mathsf{y}) + Q(y_0) & \\ = \textstyle\sum_{j=1}^m b_j\big(\mathsf{y}^j + y_0^j\big) & \\ = \text{ comment continuer maintenant ?}, & \end{aligned}$$

aucune identité algébrique ne serait venue secourir la poursuite des calculs, sachant que l'algèbre commutative universelle dispose des deux familles d'identités archétypales :

$$\begin{aligned} \mathsf{y}^j - y_0^j &= (\mathsf{y} - y_0)\big(\mathsf{y}^{j-1} + \mathsf{y}^{j-2}\, y_0 + \cdots + \mathsf{y}\, y_0^{j-2} + y_0^{j-1}\big) \\ \mathsf{y}^{2j-1} + y_0^{2j-1} &= (\mathsf{y} + y_0)\big(\mathsf{y}^{2j-2} - \mathsf{y}^{2j-3}\, y_0 + \cdots - \mathsf{y}\, y_0^{2j-3} + y_0^{2j-2}\big), \end{aligned}$$

valables pour tout entier $j \in \mathbb{N}$, la seconde n'étant d'ailleurs d'aucune intérêt pour faire apparaître $(\mathsf{y} - y_0)$, puisque c'est le facteur $(\mathsf{y} + y_0)$ qu'elle extrait, *tandis qu'aucune identité similaire à coefficients rationnels n'existe pour factoriser* $\mathsf{y}^{2j} - y_0^{2j}$.

C'est donc que l'acte de soustraire $Q(y_0)$ à $Q(\mathsf{y})$, loin de se réduire à un artifice astucieux pour la preuve, possède une signification algébrique et philosophique fondamentale : le général $Q(\mathsf{y})$ se pose dans sa relation vectorielle soustractive au particulier $Q(y_0)$, tandis que le caractère composé de tout être-polynôme distribue cette relation soustractive sur tous les monômes y^j séparément. L'identité générale signifiante :

$$Q(\mathsf{y}) - Q(y_0) = (\mathsf{y} - y_0) \sum_{j=1}^m b_j\big(\mathsf{y}^{j-1} + \mathsf{y}^{j-2}\, y_0 + \cdots + \mathsf{y}\, y_0^{j-2} + y_0^{j-1}\big)$$

est d'ailleurs valable sans restriction, y compris quand y_0 n'est pas racine de $Q(\mathsf{y})$. Ensuite, grâce à une application répétée d'une telle identité archétypale, l'exhaustion pas à pas des racines $x_1, x_2, \dots, x_n$ de P reconstitue P comme produit de facteurs linéaires.

Fonctions symétriques élémentaires des racines. Maintenant, le développement du produit $\prod_{j=1}^n (\mathsf{x} - x_i)$ de facteurs linéaires peut s'effectuer ou bien en raisonnant par récurrence, ou bien en dénombrant la contribution de chacun des facteurs linéaires à une puissance donnée de x, et le résultat est :

$$\mathsf{x}^n - \mathbf{s}_1\, x^{n-1} + \mathbf{s}_2\, x^{n-2} - \mathbf{s}_3\, x^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathbf{s}_{n-1}\, x + (-1)^n \mathbf{s}_n,$$

où les $\mathrm{s}_k = \mathrm{s}_k(x)$ sont les *fonctions symétriques élémentaires* en les racines définies par :

$$\mathrm{s}_1(x) = \sum_{1 \leqslant i_i \leqslant n} x_{i_1},$$

$$\mathrm{s}_2(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2},$$

$$\mathrm{s}_3(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < i_3 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3},$$

etc., c'est-à-dire généralement pour tout entier k compris entre 1 et n :

$$\mathrm{s}_k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

et donc en particulier à la fin $\mathrm{s}_n(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$ sans aucune somme, puisque lorsque $k = n$, les inégalités $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant n$ ne sont satisfaites que pour le seul choix $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$. Ces fonctions sont *complètement symétriques*, c'est-à-dire qu'elles satisfont :

$$\big(\mathrm{s}_k(x)\big)^\sigma \equiv \mathrm{s}_k(x),$$

pour *toute* permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$.

Ce résultat étant admis, par identification des coefficients des puissances x^k de x dans les deux expressions du polynôme $P(\mathsf{x})$, on doit nécessairement avoir :

$$\mathrm{s}_k(\mathsf{x}) = (-1)^k a_k \qquad (k = 1 \cdots n).$$

Premier Théorème de Lagrange. *Soit $\Phi = \Phi(x_1, \ldots, x_n)$ un polynôme à coefficients rationnels en n variables formelles $x_1, \ldots, x_n$ qui est invariable par toute substitution $\sigma \in \mathfrak{S}_n$,* i.e. *qui satisfait :*

$$\Phi\big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big) \equiv \Phi(x_1, \ldots, x_n)$$

identiquement dans $\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$, quelle que soit la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors il existe un unique polynôme $\mathsf{P} = \mathsf{P}_\Phi$ (dépendant de Φ) en n variables $(s_1, \ldots, s_n)$ tel que Φ se représente, via *la composition par P_Φ, comme fonction polynomiale des fonctions symétriques élémentaires,* i.e. *tel que l'égalité :*

$$\Phi\big(x_1, \ldots, x_n\big) \equiv \mathsf{P}_\Phi\big(\mathrm{s}_1(x), \ldots, \mathrm{s}_n(x)\big)$$

soit identiquement satisfaite dans $\mathbb{C}\big[x_1, \ldots, x_n\big]$.

Le même énoncé vaut pour toute fonction rationnelle $\Phi = \Phi_1/\Phi_2$ quotient de deux polynômes premiers entre eux avec P_Φ rationnelle, l'unicité de P_Φ étant conservée pourvu que son numérateur et son dénominateur n'aient pas de facteurs irréductibles en commun.

Toute fonction rationnelle complètement symétrique s'écrit donc comme une certaine expression rationnelle en les fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_k(x)$. Cet énoncé transfère ainsi la $\mathfrak{S}_n$-invariance de Φ qui recouvrait de manière opaque un grand nombre de relations d'égalité entre les coefficients de ses monômes, vers une représentation qui met parfaitement cette invariance en lumière, puisque l'on vérifie immédiatement, après admission du théorème, que l'action sur Φ d'une permutation :

$$\begin{aligned}\big(\Phi(x_1,\dots,x_n)\big)^\sigma &= \big[\mathsf{P}_\Phi(\mathbf{s}_1(x),\dots,\mathbf{s}_n(x))\big]^\sigma\\ &= \mathsf{P}_\Phi\big(\mathbf{s}_1^\sigma(x),\dots,\mathbf{s}_n^\sigma(x)\big)\\ &\equiv \mathsf{P}_\Phi\big(\mathbf{s}_1(x),\dots,\mathbf{s}_n(x)\big)\\ &= \Phi(x_1,\dots,x_n).\end{aligned}$$

laisse visiblement Φ invariante pour la seule et simple raison que les fonctions symétriques élémentaires sont elles-mêmes invariantes : $\big(\mathbf{s}_k(x)\big)^\sigma \equiv \mathbf{s}_k(x)$.

Scholie. La compréhension adéquate de tout énoncé mathématique requiert une « perception métaphysique » du *gain synthétique* qu'il produit. En fait, la conclusion d'un théorème fournit à la pensée comme une *augmentation d'énergie potentielle*, en ce sens qu'*une information éclairante se substitue à l'ouverture des définitions initiales*. Dans une théorie, hésitations de l'intuition, imprécision des perceptions, opacité des champs s'estompent peu à peu grâce aux lemmes, grâce aux propositions, grâce aux théorèmes. *Tout théorème implique un acte de reconnaissance* a posteriori *de l'évidence qu'il propose*.

Ce n'est que dans l'*a posteriori* des conclusions véridiques que l'on est autorisé à lire la confirmation indubitable d'une simplicité attendue *a priori*. Dans ces moments-là, la perplexité dialectique, si essentielle à la progression dans l'inconnu, n'a plus à être mobilisée.

L'harmonie formelle et la complétude symbolique dont font preuve les fonctions symétriques élémentaires $\mathbf{s}_k(x)$ pouvait en effet laisser présager qu'elles seules sont invariables par rapport à l'action complète du groupe $\mathfrak{S}_n$ de permutations, et qu'il n'y a « pas d'autres » fonctions complètement symétriques. Le théorème rend raison d'une telle anticipation, même lorsqu'elle est recreéée *posteriori* pour les besoins de l'analyse. Souvent, l'esprit du conjectural détermine sa position par rapport à l'inconnu en invoquant l'action de certains principes opaques de raison suffisante. Les métaphysiques leibniziennes pulsent toujours au cœur des mathématiques contemporaines. □

De nombreux traités d'algèbre ([**400, 237, 10, 425, 380, 260**]), auxquels le lecteur est renvoyé, fournissent une démonstration moderne du premier théorème de Lagrange. Deux autres résultats fondamentaux apparaissent dans le mémoire de Lagrange [**256**].

Second Théorème de Lagrange. *Si une fonction rationnelle* $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ *admet toutes les substitutions qui sont admises par une fonction rationnelle auxiliaire, à savoir si l'on a :*

$$\Phi^\sigma = \Phi \quad \text{pour toute} \quad \sigma \in \mathfrak{S}_n \quad \text{telle que} \quad \Psi^\sigma = \Psi,$$

alors il existe une fonction rationnelle R_Φ *de* $(n+1)$ *variables telle que :*

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathsf{R}_\Phi\big(\mathbf{s}_1(x), \dots, \mathbf{s}_n(x), \Psi(x)\big).$$

Pour appréhender ce second théorème, une interprétation *a posteriori* de la conclusion fait à nouveau voir que les propriétés d'invariance qui sont automatiquement satisfaites par le membre de droite rejaillissent sur celui de gauche en confortant rétrospectivement l'hypothèse qui avait été faite sur Φ. En effet, si $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ appartient à Fix_Ψ, il est alors absolument clair que l'on a :

$$\begin{aligned}
\big(\Phi(x_1, \dots, x_n)\big)^\sigma &= \big[\mathsf{R}_\Phi\big(\mathbf{s}_1(x), \dots, \mathbf{s}_n(x),\ \Psi(x)\big]^\sigma \\
&= \mathsf{R}_\Phi\big(\mathbf{s}_1^\sigma(x), \dots, \mathbf{s}_n^\sigma(x), \Psi^\sigma(x)\big) \\
&\equiv \mathsf{R}_\Phi\big(\mathbf{s}_1(x), \dots, \Psi(x)\big) \\
&= \Phi(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

de manière analogue à ce qui valait pour le premier théorème.

Mais par ailleurs, ce deuxième théorème de Lagrange est aussi manifestement contre-intuitif en un certain sens. En effet, il peut d'ailleurs exister *plusieurs* polynômes Ψ tels que $\mathsf{Fix}_\Psi \subset \mathsf{Fix}_\Phi$, et le théorème énonce alors que pour chaque tel polynôme Ψ, il existera une fonction rationnelle R_Φ dont Ψ est le dernier argument. En fait, c'est l'hypothèse d'existence de telles fonctions auxiliaires qui reste mystérieuse dans le théorème tel qu'il est énoncé. Bien qu'hypothèses et conclusion soient correctes, causalité et pourquoi ne sont pas explicités.

Troisième Théorème de Lagrange. *Si une fonction rationnelle* $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ *n'admet pas toutes les substitutions* σ *qui sont admises par une fonction rationnelle auxiliaire* Ψ*, mais prend* $r \geqslant 2$ *valeurs distinctes deux à deux à travers ces susbtitutions, alors* Φ *est solution d'une équation algébrique de degré* r *dont tous les coefficients sont des fonctions rationnelles des* $(n+1)$ *variables* $\big(\mathbf{s}_1(x), \dots, \mathbf{s}_n(x),\ \Psi(x)\big)$.

8. Démonstrations des théorèmes de Lagrange

Dans les paragraphes suivants, qui peuvent être laissés de côté en première lecture, des preuves de ces trois théorèmes accompagnés de brefs commentaires analytiques sont proposées.

Fonctions symétriques et partitions. La série génératrice des fonctions symétriques élémentaires s'obtient en développant le produit fini :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant n} \big(1 + x_i\, T\big) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \mathrm{s}_k(x)\, T^k,$$

avec la convention que $\mathrm{s}_0(x) := 1$. Ici, dans le membre de droite, la variable auxiliaire T et ses puissances T^k s'introduisent comme éléments d'indexation ordonnancée de *toutes* les fonctions symétriques élémentaires $1, \mathrm{s}_1(x), \dots, \mathrm{s}_n(x)$.

Lemme. *Un polynôme $g(y_1, \dots, y_n)$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$ satisfait identiquement :*

$$0 \equiv g\big(\mathrm{s}_1(x), \dots, \mathrm{s}_n(x)\big)$$

si et seulement si il s'annule identiquement, à savoir $g(y_1, \dots, y_n) \equiv 0$.

DÉMONSTRATION. Un sens de l'équivalence est trivial. Réciproquement, supposons que $g\big(\mathrm{s}_1(x), \dots, \mathrm{s}_n(x)\big) \equiv 0$. L'application :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto \big(\mathrm{s}_1(x), \dots, \mathrm{s}_n(x)\big)$$

est *dominante*, c'est-à-dire

□

Invariance et sous-groupes normaux. Non seulement Fix_Φ est un sous-groupe de $\mathfrak{S}_n$, mais il hérite d'une propriété supplémentaire : la normalité. Deux lemmes vont l'établir.

Lemme. *Soit $\Phi(x) \in \mathbb{Q}[x]$ un polynôme quelconque et soit $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$ une permutation qui le laisse invariant. Alors pour toute permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_n$, on a :*

$$\big(\Phi^\alpha(x)\big)^\sigma \equiv \Phi^\alpha(x) \qquad \text{dans } \mathbb{Q}[x],$$

c'est-à-dire que $\sigma \in \mathsf{Fix}_{\Phi^\alpha}$ laisse $\Phi^\alpha(x)$ invariant.

DÉMONSTRATION. Il suffit d'effectuer le changement de variables défini par $y = x^\alpha$ à l'intérieur de l'identité $\Phi(y) \equiv \Phi^\sigma(y)$ valable dans $\mathbb{Q}[y]$, ce qui donne :

$$\Phi\big(x^\alpha\big) \equiv \Phi^\sigma\big(x^\alpha\big) \equiv \Phi\big(x^{\sigma\alpha}\big) \equiv \Phi\big((x^\alpha)\big)^\sigma \equiv \big(\Phi(x^\alpha)\big)^\sigma.$$

Après fermeture du cycle d'identités, c'est la propriété annoncée, □

Lemme. *Pour tout polynôme* $\Phi(x) \in \mathbb{Q}[x]$*, le stabilisateur* Fix_Φ *est un sous-groupe* normal *de* $\mathfrak{S}_n$*,* i.e. *pour toute permutation* $\alpha \in \mathfrak{S}_n$*, on a l'identité :*

$$\alpha^{-1} \cdot \mathsf{Fix}_\Phi \cdot \alpha = \mathsf{Fix}_\Phi,$$

qui exprime que Fix_Φ *ne dépend pas des dénominations.*

Chaque application $\mathsf{aut}_\alpha \colon \sigma \mapsto \alpha^{-1}\sigma\alpha$ est une bijection de $\mathfrak{S}_n$ dans lui-même, d'inverse $\mathsf{aut}_{\alpha^{-1}}$ puisque pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ quelconque, on vérifie :

$$\mathsf{aut}_\alpha \circ \mathsf{aut}_{\alpha^{-1}}(\sigma) = \alpha^{-1}\alpha\,\sigma\,\alpha^{-1}\alpha = \sigma.$$

De plus, la composition $\mathsf{aut}_\alpha \circ \mathsf{aut}_\beta = \mathsf{aut}_{\beta\alpha}$ satisfait clairement l'axiome d'action de groupe. Par conséquent, on a un homomorphisme de groupes de $\mathfrak{S}_n$ dans le groupe $\mathsf{Aut}\big(\mathfrak{S}_n\big)$ des ses *propres* automorphismes, lequel est constituté de toutes les bijections $\mathsf{A} : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ qui respectent la structure de groupe (*homomorphismes*).

Classiquement, ces transformations aut_α sont appelés *automorphismes intérieurs* de $\mathfrak{S}_n$; ici, l'« interiorité » signifie qu'à la différence des automorphismes abstraits et généraux $\mathsf{A} \in \mathsf{Aut}\big(\mathfrak{S}_n\big)$ qui peuvent être quelconques et d'une certaine manière inconnus, ces automorphismes-là sont produits grâce à aux étants déjà disponibles que le groupe possède en lui-même. Présents dans l'intériorité même et susceptibles de provoquer une auto-motion, de tels automorphismes existent pour n'importe quel groupe, fini, de Lie, abstrait.

D'après les analyses qui précèdent, les automorphismes intérieurs correspondent en fait précisément à tous les changements de dénomination possible. Par conséquent, chaque bijection aut_α reproduit fidèlement, dans l'autre perspective d'ordonnancement que fournit α, toutes les propriétés structurelles de $\mathfrak{S}_n$ et tous ses sous-groupes.

Démonstration du second lemme. Soient donc $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$ et $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ arbitraire. D'après le lemme précédent, $\Phi^\alpha(x) \equiv \Phi^{\sigma\alpha}(x)$ et donc en appliquant $\big(\,\cdot\,\big)^{\alpha^{-1}}$ aux deux membres d'une telle identité, on obtient :

$$\Phi(x) \equiv \big(\Phi^\alpha(x)\big)^{\alpha^{-1}} \equiv \big(\Phi^{\sigma\alpha}(x)\big)^{\alpha^{-1}} \equiv \Phi^{\alpha^{-1}\sigma\alpha}(x),$$

ce qui montre que $\alpha^{-1}\sigma\alpha$ appartient aussi à Fix_Φ. Autrement dit, $\alpha^{-1}\cdot\mathsf{Fix}_\Phi\cdot\alpha$ est *contenu* dans Fix_Φ. Mais puisque $\mathsf{aut}_\alpha \colon \sigma \mapsto \alpha^{-1}\sigma\alpha$ est une bijection, on a en fait l'égalité $\alpha^{-1} \cdot \mathsf{Fix}_\Phi \cdot \alpha = \mathsf{Fix}_\Phi$. □

La présence, dans un groupe abstrait G, d'un certain sous-groupe normal H est usuellement noté $H \triangleleft G$. Ainsi pour *tout* polynôme $\Phi(x) \in \mathbb{Q}[x]$, on a :

$$\mathsf{Fix}_\Phi \triangleleft \mathfrak{S}_n.$$

Puisque Fix_Φ est donc normal dans $\mathfrak{S}_n$, l'ensemble des classes à gauche de $\mathfrak{S}_n$ modulo Fix_Φ s'identifie à ses classes à droite :

$$\big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big)_{\text{gauche}} = \big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big)_{\text{droite}} =: \mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi.$$

Grâce à la normalité, cet ensemble de classes communes possède alors lui-même une vraie structure de groupe ([**10**]).

Concrètement, soient $\mathsf{Id}, \tau_1, \dots, \tau_{e-1}$ des représentants, dans $\mathfrak{S}_n$ du groupe quotient $\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi$. Avec un tel choix, chacune des deux applications :

$$\begin{aligned} \text{gauche :} \qquad & \mathsf{Fix}_\Phi \times \big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big) \ni (\sigma, \tau) \longmapsto \sigma \cdot \tau \in \mathfrak{S}_n \\ \text{droite :} \qquad & \big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big) \times \mathsf{Fix}_\Phi \ni (\tau, \sigma) \longmapsto \tau \cdot \sigma \in \mathfrak{S}_n, \end{aligned}$$

est bijective[12] et pour cette raison, on peut écrire $\mathfrak{S}_n$ comme l'une ou l'autre des deux réunions disjointes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_n &= \mathsf{Fix}_\Phi \bigcup \tau_1 \cdot \mathsf{Fix}_\Phi \bigcup \cdots \bigcup \tau^{e-1} \cdot \mathsf{Fix}_\Phi, \\ \text{ou :} \quad \mathfrak{S}_n &= \mathsf{Fix}_\Phi \bigcup \mathsf{Fix}_\Phi \cdot \tau_1 \bigcup \cdots \bigcup \mathsf{Fix}_\Phi \cdot \tau^{e-1}. \end{aligned}$$

Par conséquent, si $d := \mathrm{Card}\big(\mathsf{Fix}_\Phi\big)$ désigne alors l'ordre du sous-groupe Fix_Φ et si $e := \mathrm{Card}\big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big)$ celui du groupe quotient, on a en particulier la formule du produit pour ces cardinaux :

$$\mathrm{Card}\big(\mathsf{Fix}_\Phi\big) \cdot \mathrm{Card}\big(\mathfrak{S}_n\big/\mathsf{Fix}_\Phi\big) = d \cdot e = n! = \mathrm{Card}\big(\mathfrak{S}_n\big).$$

Dans son *Traité d'algèbre supérieure*, J.-A. Serret

> **424.** Étant données plusieurs substitutions formées avec n lettres, si, en les multipliant une ou plusieurs fois les unes par les autres ou par elles-mêmes, dans un ordre quelconque, on n'obtient jamais que des substitutions comprises dans la suite des substitutions données, celles-ci constituent ce que Cauchy a nommé un *système de substitutions conjuguées*, ou simplement un *système conjugué*. Il est évident que tout système conjugué comprend la substitution égale à l'unité. [$\cdots$]
>
> **425.** THÉORÈME. — *Si toutes les substitutions d'un système conjugué Γ d'ordre μ sont comprises parmi les substitutions d'un autre système conjugué G d'ordre m, le nombre μ sera un diviseur de m.* [**400**], p. 278.

En fait, on peut expliciter encore plus à fond chacune des deux formules de réunion précédentes. En effet, si le sous-groupe fini Fix_Φ est représenté comme constitué de d permutations notées $\mathrm{Id}, \sigma_1, \dots, \sigma_{d-1}$, on peut alors

[12] Ce sont même des isomorphismes de groupes, lorsque les ensembles-sources sont équipées de la structure de groupe produit.

ordonner comme suit *tous* les éléments de $\mathfrak{S}_n$ sous la forme de deux tableaux équivalents :

$$\mathfrak{S}_n = \begin{array}{ccccc} \mathrm{Id} & \sigma_1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{d-1} \\ \tau_1 & \tau_1\sigma_1 & \tau_1\sigma_2 & \cdots & \tau_1\sigma_{d-1} \\ \tau_2 & \tau_2\sigma_1 & \tau_2\sigma_2 & \cdots & \tau_2\sigma_{d-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_{e-1} & \tau_{e-1}\sigma_1 & \tau_{e-1}\sigma_2 & \cdots & \tau_{e-1}\sigma_{d-1}, \end{array}$$

$$\text{ou bien : } \quad \mathfrak{S}_n = \begin{array}{ccccc} \mathrm{Id} & \sigma_1 & \sigma_1 & \cdots & \sigma_{d-1} \\ \tau_1 & \sigma_1\tau_1 & \sigma_2\tau_1 & \cdots & \sigma_{d-1}\tau_1 \\ \tau_2 & \sigma_1\tau_2 & \sigma_2\tau_2 & \cdots & \sigma_{d-1}\tau_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \tau_{e-1} & \sigma_1\tau_{e-1} & \sigma_2\tau_{e-1} & \cdots & \sigma_{d-1}\tau_{e-1}. \end{array}$$

qui ne sont en général pas égaux, car $\mathfrak{S}_n$ n'étant pas commutatif, on a en général $\tau_i\sigma_j \neq \sigma_j\tau_i$.

Une telle organisation symbolique qui dénomme expressément tous les éléments d'un groupe et cherche à se les rendre visibles dans leur totalité par une tabulation décidée est absolument typique des mathématiques du dix-neuvième siècle. Mais cette exigence de l'explicitation indiciée se situe aussi au cœur même de la mathématique universelle.

REMARQUE. — Le système conjugué G a été ainsi partagé en q suites de[**400**], p. 280. substitutions,

$$\begin{array}{ccccc} 1, & S_1, & S_2, & \cdots & S_{\mu-1}, \\ T_1, & S_1T_1, & S_2T_1, & \cdots & S_{\mu-1}T_1, \\ T_2, & S_1T_2, & S_2T_2, & \cdots & S_{\mu-1}T_2, \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ T_{q-1}, & S_1T_{q-1} & S_2T_{q-1} & \cdots & S_{\mu-1}T_{q-1}, \end{array}$$

dont la première seule constitue un système conjugué.

L'avant-dernier lemme ci-dessus montre que toute permutation $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Phi$ laisse invariant non seulement Φ, mais encore chacun des polynômes transformés $\Phi^{\tau_1}, \dots, \Phi^{\tau_{e-1}}$. En fait, aucun de ces e polynômes $\Phi, \Phi^{\tau_1}, \dots, \Phi^{\tau_{e-1}}$ n'est identiquement égal à aucun autre.

Lemme. *Pour tous* $i_1, i_2 = 0, 1, \dots, e-1$ *distincts, on a* $\Phi^{\tau_{i_1}}(x) \not\equiv \Phi^{\tau_{i_2}}(x)$.

DÉMONSTRATION. Sinon, si $\Phi^{\tau_{i_1}}(x) \equiv \Phi^{\tau_{i_2}}(x)$, en appliquant $(\cdot)^{\tau_{i_2}^{-1}}$ aux deux membres, on déduit $\Phi^{\tau_{i_2}^{-1}\tau_{i_1}}(x) \equiv \Phi(x)$, c'est-à-dire $\tau_{i_2}^{-1}\tau_{i_1} \in \mathsf{Fix}_\Phi$ d'après la définition même de Fix_Φ. Ceci équivaut à dire que $\tau_{i_2} \equiv \tau_{i_1}$ dans le groupe quotient $\mathfrak{S}_n / \mathsf{Fix}_\Phi$, ce qui contredit l'hypothèse que τ_{i_1} et τ_{i_2} pour

$i_1 \neq i_2$ sont deux éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui sont distincts lorsqu'ils sont vus dans ce quotient. $\square$

Dans le second théorème de Lagrange, Φ est invariant par toute permutation $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Psi$ qui est admise par un polynôme auxiliaire Ψ. Par conséquent, $\mathsf{Fix}_\Psi \lhd \mathsf{Fix}_\Phi$.

Lemme. *Soit G un groupe abstrait, soit H un sous-groupe normal de G, et soit K un sous-groupe quelconque de H. Si K est normal dans G,* i.e. *si $G \rhd K$, alors K est normal aussi dans H de telle sorte que l'on a :*

$$\big(G \rhd H \supset K \quad \text{et} \quad G \rhd K\big) \implies G \rhd H \rhd K.$$

DÉMONSTRATION. C'est une tautologie par restriction. Puisque par hypothèse $\alpha^{-1} K \alpha = K$ pour tout $\alpha \in G$, la même propriété d'invariance $\alpha^{-1} K \alpha = K$ reste évidemment vraie lorsque α parcout seulement le sous-groupe H. $\square$

Ainsi la collection de tous les sous-groupes Fix_Φ de $\mathfrak{S}_n$ s'organise-t-elle comme une collection de sous-groupes *normaux* de $\mathfrak{S}_n$. Il faut donc s'imaginer

Démonstration du second théorème de Lagrange. Pour tout entier $m = 0, 1, \dots, e$, le polynôme $\Phi^m \Psi$ est invariant par toute permutation $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Psi$, puisque $\mathsf{Fix}_\Psi \lhd \mathsf{Fix}_\Phi$ par hypothèse, Fix_Φ pouvant *a priori* être strictement plus grand que Fix_Ψ. L'astuce de Lagrange consiste à considèrer la somme des valeurs de ce polynôme $\Phi^m \Psi$ par l'action des éléments distincts $\mathrm{Id}, \tau_1, \dots, \tau_{e-1}$ du groupe quotient $\mathfrak{S}_n \big/ \mathsf{Fix}_\Psi$, à savoir :

$$\Phi^m \Psi + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_1} + \cdots + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_{e-1}}$$

Lemme. *Cette somme est invariante par* toute *permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_n$.*

DÉMONSTRATION. En effet, grâce aux préparatifs qui précèdent, toute permutation $\alpha \in \mathfrak{S}_n$ s'écrit de manière unique $\tau_i \sigma$ pour un certain $i \in \{0, 1, \dots, e-1\}$ et avec $\sigma \in \mathsf{Fix}_\Psi$. On vérife alors aisément que :

$$\begin{aligned} &\big[\Phi^m \Psi + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_1} + \cdots + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_{e-1}}\big]^{\tau_i \sigma} = \\ &= \big(\big(\Phi^m \Psi\big)^{\sigma}\big)^{\tau_i} + \big(\big(\Phi^m \Psi\big)^{\sigma}\big)^{\tau_i} \end{aligned}$$

$\square$

Le premier théorème de Lagrange assure alors que pour tout m, ce polynôme complètement symétrique peut être représenté de manière unique comme un certain polynôme T_m :

$$\Phi^m \Psi + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_1} + \cdots + \big(\Phi^m \Psi\big)^{\tau_{e-1}} \equiv \mathsf{T}_m\big(\mathrm{s}_1(x), \dots, \mathrm{s}_n(x)\big)$$

en les fonctions symétriques élémentaires de $(x_1, \dots, x_n)$.

Meditationes Algebraicæ

En 1782, le mathématicien anglais Edward Waring publie la troisième édition de ses *Meditationes Algebricæ* ([**453**]). Waring était l'un des mathématiciens les plus profonds du 18ème siècle, et ses travaux précurseurs en combinatoire anticipent largement la théorie moderne des partitions et des fonctions symétriques (Young, Serret, Ferrers, Schur, Mac Mahon, Kostka, Littlewood). Il a surtout travaillé sur la résolution des équations algébriques, la théorie des nombres, l'approximation des racines, les dénombrements, l'interpolation, les sections coniques et la cinématique.

On peut éprouver une certaine « attirance d'algébriste amateur » pour les travaux de Waring, car il s'y déploie des calculs libres, systématiques et foisonnants. En aventurier des arborescences algébriques et des arabesques combinatoires, Waring poursuit en effet toutes ses inspirations inductives ; il s'arme pour cela d'un flair tout particulier qui lui permet de soulever certains problèmes « gratuits » et originaux, et de les résoudre pour le seul plaisir de laisser libre cours à sa virtuosité de calculateur.

Trois objectifs. L'objectif tripolaire, ici, sera de susciter des « méditations » de nature algébrique, en dégageant trois axes d'exposition :

(1) motiver, exposer et expliquer dans un langage moderne la formule combinatoire *close* dite *de Waring* qui exprime explicitement les sommes dites *de Newton* (*voir* ci-dessous) au moyen des fonctions symétriques dites *élémentaires* ;

(2) formuler des commentaires philosophiques généraux sur la nature du calcul formel en mathématiques et sur le rapport complexe que nous entretenons avec celui-ci (paragraphes intercalaires) ;

(3) retranscrire, analyser, et commenter la démarche même de Waring et la manière dont il *pense* le théorème combinatoire qu'il a découvert (il n'y aura pas d'histoire des mathématiques au sens propre du terme).

On renvoie aux premières pages de la la traduction anglaise [**453**] par Dennis WEEKS de la troisième édition latine des *Meditationes Algebricæ*.

Polynômes invariants par permutation des variables. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif de caractéristique nulle, que l'on peut supposer être le corps des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ pour fixer (concrètement) les idées. Soient

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ des variables formelles commutatives, que l'on peut supposer appartenir à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$ pour fixer les idées.

On considère l'algèbre, notée $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$, de tous les polynômes :

$$P(x) = \sum_{\text{finie}} P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \cdot (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n},$$

à coefficients $P_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} \in \mathbb{K}$, qui sont sommes finies arbitraires de monômes $(x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$ dont tous les exposants $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont bien sûr supposés positifs.

Une *permutation* de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ des n premiers entiers naturels est une bijection quelconque :

$$\sigma : \{1, 2, \dots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \dots, n\},$$

de cet ensemble ; ainsi l'ensemble $\{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)\}$ est le même que $\{1, 2, \dots, n\}$, à ceci près que ses termes, intervertis par σ, sont écrits dans un ordre différent. C'est le changement d'ordre qui constitue l'essence de la permutation.

Une double liste à deux lignes représente fidèlement l'action d'une permutation : l'image d'un élément est tout simplement située à sa verticale :

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1. \end{matrix}$$

La collection, notée $\mathfrak{S}_n$, de toutes ces permutations σ, forme un *groupe* pour la composition entre applications de $\{1, \dots, n\}$:

$$\tau \circ \sigma \in \mathfrak{S}_n \qquad \text{pour tous } \ \sigma, \ \tau \in \mathfrak{S}_n;$$

la permutation identité appartient évidemment à $\mathfrak{S}_n$ et l'inverse (en tant qu'application) σ^{-1} d'une permutation σ est aussi clairement une permutation.

Le cardinal de $\mathfrak{S}_n$, à savoir le nombre de permutations σ distinctes de $\{1, 2, \dots, n\}$, est égal au nombre, appelé *factorielle de* n :

$$n! := n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1,$$

qui est le produit de tous les entiers de 1 allant jusqu'à n. En effet, par une permutation σ quelconque, l'élément 1 peut prendre n valeurs distinctes dans $\{1, 2, \dots, n\}$, et ensuite l'élément 2 peut prendre les $(n-1)$ valeurs restantes, puis il reste $(n-2)$ valeurs pour l'élément 3, *etc.*

Le groupe $\mathfrak{S}_n$ *agit* alors sur les variables $x = (x_1, \dots, x_n)$ en permutant leurs indices inférieurs :

$$x^\sigma = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\sigma := \big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big)$$

et par extension, cette action transforme chaque polynôme $P(x)$ en le polynôme :

$$P^\sigma(x) := \sum_{\mathsf{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \big(x_{\sigma(1)}\big)^{\alpha_1} \cdots \big(x_{\sigma(n)}\big)^{\alpha_n}.$$

Ainsi les permutations de $\mathfrak{S}_n$ agissent-elles *aussi* sur $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$.

Tout polynôme $P^\sigma(x)$ sur lequel a agi une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut se réécrire sous la forme :

$$\boxed{P^\sigma(x) = \sum_{\mathsf{finie}} P_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)}}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}},$$

où σ agit maintenant sur les indices inférieurs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des coefficients $P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$ de P. En effet :

$$\begin{aligned}
P^\sigma(x) &= \sum_{\mathsf{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \cdot (x_{\sigma(1)})^{\alpha_1} \cdots (x_{\sigma(n)})^{\alpha_n} \\
&= \sum_{\mathsf{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \cdot (x_1)^{\alpha_{\sigma^{-1}(1)}} \cdots (x_n)^{\alpha_{\sigma^{-1}(n)}} \qquad [\text{poser } \sigma(k) = k'] \\
&= \sum_{\mathsf{finie}} P_{\beta_{\sigma(1)},\ldots,\beta_{\sigma(n)}} \cdot (x_1)^{\beta_1} \cdots (x_n)^{\beta_n} \qquad [\text{poser } \alpha_{\sigma^{-1}(k')} := \beta_{k'}].
\end{aligned}$$

Maintenant, lorsque deux polynômes :

$$P(x) = \sum_{\mathsf{finie}} P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \qquad \text{et} \qquad R(x) = \sum_{\mathsf{finie}} R_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

ont tous leurs coefficients égaux, c'est-à-dire $P_\alpha = R_\alpha$ quel que soit $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on dit qu'ils sont *identiquement égaux*, ce que l'on écrit :

$$P(x) \equiv R(x).$$

Définition. Un polynôme $P(x)$ est dit *complètement symétrique*, ou (terminologie équivalente) $\mathfrak{S}_n$*-invariant* si l'on a

$$P^\sigma(x) \equiv P(x)$$

pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. De manière équivalente :

$$P_{\alpha_{\sigma(1)},\ldots,\alpha_{\sigma(n)}} = P_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} \qquad \text{pour tous } \ \alpha_1, \ldots, \alpha_n.$$

Historiquement, les premiers exemples de polynômes complètement symétriques proviennent du très célèbre problème de la résolution des équations algébriques. Évoquons-le en quelques mots.

Fonctions symétriques élémentaires. Lorsqu'un polynôme à une variable de degré n et à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_{n-1} t + a_n$$

dont le coefficient directeur est égal à 1, admet n racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dans $\mathbb{K}$, on démontre aisément qu'il s'identifie au produit de tous les facteurs $(t - x_i)$ possibles de degré 1 :

$$p(t) \equiv (t - x_1)(t - x_2) \cdots (t - x_n),$$

et un tel produit scindé montre alors visiblement que ces x_i sont les racines de p.

Maintenant, lorsqu'on développe ce produit, certaines fonctions universelles des x_i, connues depuis le quinzième siècle apparaissent naturellement. Par exemple, le coefficient de t^{n-1} est égal à :

$$-x_1 - x_2 - \cdots - x_n,$$

et c'est clairement un polynôme complètement symétrique en les x_i ; ensuite, le coefficient de t^{n-2} est égal à :

$$\begin{aligned} x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots &+ x_1x_n \\ + x_2x_3 + \cdots &+ x_2x_n \\ \cdots\cdots\cdots &\cdot \\ &+ x_{n-1}x_n, \end{aligned}$$

et il est lui aussi complètement symétrique. En toute généralité, le coefficient de t^{n-k} est égal à $(-1)^k \mathsf{s}_k$ où la *k-ième fonction symétrique élémentaire* :

$$\mathsf{s}_k = \mathsf{s}_k(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k},$$

est définie en prenant la somme de tous les produits possibles de k termes x_i distincts, écrits par ordre croissant d'indices (grâce à la commutativité de la multiplication entre variables). En particulier à la fin pour $k = n$, on a $\mathsf{s}_n(x) = x_1 x_2 \cdots x_n$ sans aucune somme, puisque les inégalités $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_n \leqslant n$ ne sont satisfaites que pour le seul choix $i_1 = 1, \ldots, i_n = n$. Tous ces polynômes $\mathsf{s}_k(x)$ sont complètement symétriques.

En développant donc le produit en question, on obtient ainsi :

$$p(t) = t^n - \mathsf{s}_1\, t^{n-1} + \mathsf{s}_2\, t^{n-2} - \mathsf{s}_3\, t^{n-3} + \cdots + (-1)^n\, \mathsf{s}_n\, t^0.$$

Par exemple, pour $k = 3$:

$$\mathsf{s}_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n.$$

Paradoxe : étudier les polynômes à une variable nécessite d'élaborer une théorie des polynômes à plusieurs variables, mais là n'est pas notre propos — puisque nous allons seulement nous concentrer sur un chapitre spécial de la combinatoire des fonctions symétriques.

Fonctions des racines d'un polynôme. Dans son célèbre mémoire [**256**] intitulé *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Lagrange a exposé, repensé et unifié toutes les méthodes de résolution des équations algébriques dues à ses prédécesseurs : Scipione del Ferreo, Tartaglia, Cardan, Tschirnaus, Wallis, Cramer, Ferrari, Descartes, Bézout, Euler. Par la recherche d'une systématicité harmonieuse, le secret espoir de Lagrange était de pouvoir deviner la forme d'une certaine fonction algébrique inconnue $\mathrm{Inc}_L(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ des cinq racines complexes d'un polynôme général $t^5 + a_1 t^4 + a_2 t^3 + a_3 t^2 + a_4 t + a_5$ de degré cinq, afin de pouvoir trouver les formules de résolution que bien des géomètres quêtaient ardemment à cette époque[1].

Pour l'exercice de pensée, tentons ici de faire abstraction des travaux de Ruffini, d'Abel et de Galois qui devaient démontrer ultérieurement l'inanité d'une telle entreprise. Tentons donc de nous glisser dans l'esprit d'un mathématicien de la fin du 18ème siècle comme Lagrange ou Euler, pour qui le calcul libre et ambitieux, envisagé comme *exploration pure*, est la « bonne » manière de faire de la recherche en mathématiques.

D'un point de vue philosophique, c'est toujours de cette manière-là que nous dirigeons notre pensée face à toute question mathématique ouverte.

- Élaguer, unifier, simplifier.
- Progresser du connu vers l'inconnu.
- Réorganiser inlassablement les calculs.
- Chercher à dévoiler les harmonies sous-jacentes.
- Rendre visible l'invisible.
- Et surtout : attendre l'instant crucial où l'*œil de la pensée* devine en un instant les structures générales.

Toujours est-il que Lagrange est parvenu, pour les équations de degré 2, 3 et 4, à rendre limpides les raisons pour lesquelles elles sont résolubles par radicaux, en toute généralité.

Par exemple, les formules, dites *de Cardan*, qui produisent les trois racines complexes x_1, x_2, x_3 d'un polynôme $t^3 + a_1 t^2 + a_2 t + a_3$ dont les coefficients rationnels a_1, a_2, a_3 sont généraux, reposent sur la fameuse *résolvante de Lagrange* :

$$\big(x_1 + j\, x_2 + j^2\, x_3\big)^3,$$

[1] À notre connaissance, c'est Charles Hermite qui le premier aurait fait voir en 1840, en faisant abstraction des travaux de Ruffini, d'Abel et de Galois, dans le tout premier article de mathématiques qu'il a publié alors qu'il était encore élève au Lycée Louis-le-Grand, que les recherches de Lagrange ne pouvaient fournir des résolvantes de degré inférieur à cinq, comme Lagrange lui-même l'avait pressenti.

où $j := e^{2\pi i/3}$ (qui satisfait $j^3 = 1$) est racine troisième *primitive* de l'unité. Lorsqu'on permute de toutes les manières possibles les trois variables x_1, x_2, x_3 que cette résolvante incorpore, elle ne prend que *deux* valeurs différentes[2]. Lagrange démontre alors qu'elle est nécessairement solution d'une équation du *deuxième* degré, équation que l'on sait déjà (depuis longtemps) être résoluble par radicaux en toute généralité.

Pour l'équation générale de degré 4, Lagrange considère deux types de résolvantes :

$$x_1x_2 + x_3x_4 \qquad \text{ou} \qquad (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$$

qui ne prennent que *trois* (< 4) valeurs lorsqu'on permute de manière arbitraire x_1, x_2, x_3, x_4. Comme Lagrange l'a mis en lumière, c'est pour cette raison que Ferrari a pu ramener la résolution des équations de degré 4 à celles de degré 3, elles-mêmes résolubles par radicaux d'après ce qui vient d'être rappelé.

Existe-t-il alors des fonctions algébriques naturelles des cinq racines x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 de l'équation générale $t^5 + a_1t^4 + a_2t^3 + a_3t^2 + a_4t + a_5 = 0$ qui ne prennent que quatre valeurs distinctes ? « Stratégie de la mer qui monte », disait Grothendieck : repenser, englober, unifier, deviner, et enfin : *trouver* — telle est la méthode universelle. Néanmoins, après des tentatives qui sont restées lettre morte dans ses manuscrits, Lagrange soupçonnait déjà l'impossibilité d'une telle fonction hypothétique — mais nous n'en dirons pas plus.

Sur ce chapitre passionnant de l'histoire et de la philosophie des mathématiques dont nous allons maintenant nous écarter, nous recommandons les références [**11, 16, 135, 150, 256, 400, 448**].

Théorème de Lagrange. Avant d'élaborer sa théorie des résolvantes arbitraires, Lagrange énonçait déjà, au début du Chapitre 4 de son mémoire prolifique, un théorème fondamental concernant les fonctions qui ne prennent qu'*une seule* valeur différente lorsqu'on permute toutes ses variables $x_1, x_2, \dots, x_n$. C'est cet énoncé basique que nous prendrons comme point de départ.

Théorème. *Soit $P = P(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ un polynôme complètement symétrique par permutation de ses variables, à savoir qui satisfait :*

$$P\big(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big) \equiv P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

pour toute permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors il existe un unique polynôme $Q = Q(s_1, \dots, s_n)$ (dépendant de P) en n variables

[2] Ici dans ce résumé seulement, nous court-circuitons les détails et nous sous-entendons quelques arguments. Le lecteur intéressé pourra se reporter aux références choisies qui sont mentionnées en bibliographie.

$(s_1, \ldots, s_n)$ *tel que* P *se représente,* via *la composition à gauche par* Q*, comme fonction polynomiale des fonctions symétriques élémentaires,* i.e. *tel que l'égalité :*

$$P(x_1, \ldots, x_n) \equiv Q\big(\mathsf{s}_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \mathsf{s}_n(x_1, \ldots, x_n)\big)$$

soit identiquement satisfaite dans $\mathbb{K}\big[x_1, \ldots, x_n\big]$.

De nombreuses références offrent des démonstrations concises de cet énoncé. Ici, nous l'admettrons sans le redémontrer, car les démonstrations en question, imparfaites en un certain sens, passent sous silence bien des questions qui ne peuvent être résolues qu'avec la théorie des partitions, des tableaux de Young et des nombres de Kostka.

Analyse a posteriori du théorème de Lagrange. Tout polynôme complètement symétrique s'écrit donc comme une certaine expression rationnelle en les fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_k(x)$. Cet énoncé transfère ainsi la $\mathfrak{S}_n$-invariance du polynôme $P = \sum P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n}\, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, laquelle recouvrait de manière opaque un (très) grand nombre de relations d'égalité entre les coefficients de ses monômes :

$$P_{\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}} = P_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n},$$

vers *une représentation qui met parfaitement en lumière cette invariance* : on vérifie en effet immédiatement — après admission du théorème — que l'action sur P d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ quelconque :

$$\begin{aligned}
\big(P(x_1, \ldots, x_n)\big)^\sigma &= \big[Q\big(\mathsf{s}_1(x), \ldots, \mathsf{s}_n(x)\big)\big]^\sigma \\
&= Q\big(\mathsf{s}_1^\sigma(x), \ldots, \mathsf{s}_n^\sigma(x)\big) \\
&\equiv Q\big(\mathsf{s}_1(x), \ldots, \mathsf{s}_n(x)\big) \\
&= P(x_1, \ldots, x_n)
\end{aligned}$$

laisse visiblement P invariant pour la seule et simple raison que les fonctions symétriques élémentaires elles-mêmes sont évidemment invariantes :

$$\big(\mathsf{s}_k(x)\big)^\sigma \equiv \mathsf{s}_k(x).$$

Commentaire philosophique. La compréhension adéquate de tout énoncé mathématique requiert toujours une «*perception métaphysique*» du gain synthétique qu'il produit. En fait, la conclusion d'un théorème fournit à la pensée comme une augmentation de sa propre énergie potentielle, parce qu'une information éclairante se substitue à l'ouverture des définitions initiales. Dans toute théorie, les hésitations de l'intuition, les imprécisions de la perception, et l'opacité des champs d'investigation s'estompent peu à peu grâce aux lemmes, grâce aux propositions et grâce aux théorèmes.

Tout théorème implique un acte de reconnaissance a posteriori *de l'évidence qu'il propose.*

Ce n'est en effet que dans l'*a posteriori* des conclusions véridiques que l'on est autorisé à lire la confirmation indubitable d'une simplicité attendue *a priori*. Dans ces moments-là, il n'est plus nécessaire de mobiliser la perplexité dialectique, pourtant essentielle à d'autres moments, lorsqu'il s'agit de progresser dans l'Obscur qui résiste.

L'harmonie formelle et la complétude symbolique dont font preuve les fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_k(x)$ pouvaient en effet laisser présager qu'elles seules sont invariables par rapport à l'action complète du groupe $\mathfrak{S}_n$ de permutations, et qu'il n'y a « pas d'autres » fonctions complètement symétriques. Le théorème rend raison d'une telle anticipation, même lorsqu'elle est recréée *a posteriori* pour les besoins de l'analyse. Souvent, l'esprit du conjectural détermine sa position par rapport à l'inconnu en invoquant l'action de certains principes de raison suffisante. Les métaphysiques leibniziennes vivent toujours au cœur de la recherche mathématique contemporaine, telle était l'une des thèses de Heidegger dans son ouvrage *Le principe de raison*.

Formules de Newton. Considérons maintenant un exemple très classique de fonction complètement symétrique, la somme des puissances k-ièmes de toutes les variables x_i :

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{N}_k(x) := x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

appelées *sommes de Newton*, où $k \geqslant 1$ est un entier quelconque. Par convention, il est naturel de définir aussi $\mathsf{N}_0 := n$, puisque $x_1^0 + \cdots + x_n^0 = 1 + \cdots + 1 = n$. Ainsi pour $k = 1, 2, 3$, ces sommes s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n \\ \mathsf{N}_2 &= x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \\ \mathsf{N}_3 &= x_1^3 + x_2^3 + \cdots + x_n^3. \end{aligned}$$

Visiblement, ces $\mathsf{N}_k(x)$ sont complètement symétriques :

$$x_{\sigma(1)}^k + x_{\sigma(2)}^k + \cdots + x_{\sigma(n)}^k \equiv x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k,$$

parce qu'une permutation quelconque σ des indices inférieurs change seulement l'ordre d'apparition des x_i^k, et parce que l'addition de plusieurs termes peut s'effectuer dans n'importe quel ordre.

Question d'application. *Que donne le théorème de Lagrange pour les sommes de Newton* ? Autrement dit : *Comment exprimer explicitement les sommes de Newton au moyen des fonctions symétriques élémentaires* ?

Commentaire spéculatif. À cette question, on serait tenté de répondre : inspectons tout simplement la démonstration du théorème de Lagrange, telle qu'on la trouve dans les références citées, regardons comment elle fonctionne, analysons ce qu'elle donne, et avec un peu de chance, nous constaterons qu'elle répond complètement à la question posée.

Malheureusement, les démonstrations citées ne descendent pas assez profondément dans la réalité mathématique pour être en mesure d'expliciter la dépendance précise des N_k en fonction des s_l. Pour répondre à la question, une recherche spécifique est en fait nécessaire. En mathématiques, nombreux sont les « théorèmes » séduisants qui semblent répondre de manière satisfaisante à tout un ordre de questions, et qui néanmoins travaillent furtivement à des niveaux partiels et incomplets. La première aptitude que doivent posséder aussi bien l'amateur que le professionnel, c'est ce *flair de l'ouverture*.

Deux exemples très élémentaires. Tout d'abord, il est évident que :

$$\mathsf{N}_1 = \mathsf{s}_1 = x_1 + \cdots + x_n.$$

Ensuite, pour réduire N_2 en fonction de s_1 et s_2, il suffit de remobiliser l'astuce connue qui consiste à faire apparaître un carré :

$$\begin{aligned} x_1^2 + \cdots + x_n^2 &= \big(x_1 + \cdots + x_n\big)^2 - 2\big(x_1x_2 + \cdots + x_{n-1}x_n\big) \\ &= (\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2, \end{aligned}$$

et le tour est joué. Pour N_3, une telle approche fonctionne aussi (exercice). Mais nous allons envisager le problème d'une manière beaucoup plus systématique.

Récurrences ouvertes. Newton lui-même a écrit des formules de récurrence qui permettent de calculer *pas à pas* les N_k en fonction des s_l. On doit distinguer les cas, suivant que l'ordre k de l'exponentiation dans N_k est plus petit, ou plus grand que le nombre n des variables.

Proposition. *Lorsque $k \leqslant n$, la k-ième somme de Newton N_k s'exprime comme suit en fonction des $\mathsf{N}_{k'}$ d'ordre $k' \leqslant k-1$ et des fonctions symétriques élémentaires :*

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_{k-1} - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2}\,\mathsf{s}_{k-1}\,\mathsf{N}_1 + (-1)^{k-1}\,\mathsf{s}_k \cdot k$$

(noter que le dernier terme est k, et non pas $\mathsf{N}_0 = n$ comme on pourrait le supputer).

Lorsque $k \geqslant n$, la k-ième somme de Newton N_k s'exprime différemment, par une formule tronquée au n-ième terme :

$$\mathsf{N}_k = \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_{k-1} - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-2}\,\mathsf{s}_{n-1}\,\mathsf{N}_{k-n+1} + (-1)^{n-1}\,\mathsf{s}_n\,\mathsf{N}_{k-n}.$$

On notera aussi que pour $k = n$, les deux formules s'identifient, puisque leurs deux termes ultimes coïncident alors. Tout comme le théorème, cette proposition sera admise (*voir* [**11**], p. 166). Dans un instant, nous démontrerons complètement un énoncé beaucoup plus significatif.

Ainsi par exemple, lorsque le nombre n de variables est supposé être $\geqslant 4$, on a :

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_1 &= \mathsf{s}_1 \\
\mathsf{N}_2 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_1 - \mathsf{s}_2 \cdot 2 \\
\mathsf{N}_3 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_2 - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_1 + \mathsf{s}_3 \cdot 3 \\
\mathsf{N}_4 &= \mathsf{s}_1\,\mathsf{N}_3 - \mathsf{s}_2\,\mathsf{N}_2 + \mathsf{s}_3\,\mathsf{N}_1 - \mathsf{s}_4 \cdot 4,
\end{aligned}$$

et puisque le but est de représenter les sommes de Newton en fonction des s_l, on est immédiatement incité à insérer pas à pas ces formules les unes dans les autres, ce qui donne, en détaillant toutes les étapes de calcul :

$$\begin{aligned}
\mathsf{N}_2 &= \mathsf{s}_1 \cdot \mathsf{s}_1 - \mathsf{s}_2 \cdot 2 = \big(\mathsf{s}_1\big)^2 - 2\,\mathsf{s}_2 \\
\mathsf{N}_3 &= \mathsf{s}_1\big[(\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2\big] - \mathsf{s}_2 \cdot \mathsf{s}_1 + \mathsf{s}_3 \cdot 3 \\
&= (\mathsf{s}_1)^3 - 3\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_2 + 3\mathsf{s}_3 \\
\mathsf{N}_4 &= \mathsf{s}_1\big[(\mathsf{s}_1)^3 - 3\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_2 + 3\,\mathsf{s}_3\big] - \mathsf{s}_2\big[(\mathsf{s}_1)^2 - 2\,\mathsf{s}_2\big] + \mathsf{s}_3 \cdot \mathsf{s}_1 - \mathsf{s}_4 \cdot 4 \\
&= (\mathsf{s}_1)^4 - 4\,(\mathsf{s}_1)^2\mathsf{s}_2 + 4\,\mathsf{s}_3\,\mathsf{s}_1 + 2(\mathsf{s}_2)^2 - 4\,\mathsf{s}_4.
\end{aligned}$$

Formules dites de Waring. Il est maintenant possible d'énoncer le fameux :

Théorème. (WARING) *Pour tout entier $k \geqslant 1$, la k-ième somme de Newton s'exprime comme suit au moyen des fonctions symétriques élémentaires :*

$$\mathsf{N}_k = k \cdot \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=k} \frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\,\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\,(\mathsf{s}_1)^{i_1}(\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots(\mathsf{s}_n)^{i_n}.$$

Commentaire mathématico-philosophique. Voilà donc la réponse attendue. Par rapport aux formules de Newton, les formules de Waring présentent en effet un avantage considérable : pour connaître une somme N_k, il n'est plus nécessaire d'effectuer de très nombreuses substitutions et de lourds calculs à partir des longues formules inductives fournies par la Proposition ci-dessus. Newton obtenait ses formules avec des arguments relativement aisés, et ce faisant, laissait en fait ouvert un problème qui aurait éventuellement pu cacher des difficultés calculatoires insurmontables. La formule de Waring *ferme* les récurrences ouvertes que Newton avait déc-ouvertes.

Scholie. Une expression mathématique est dite *fermée*, ou *close*, si elle implique un nombre fini de fonctions ou d'expressions bien connues dont l'agencement répond à une question en fonction des données initiales, ou synthétise complètement des procédés ouverts de récurrence.

Par exemple, del Ferro, Tartaglia, Cardano ont obtenu des formules *closes* pour les trois racines x_1, x_2, x_3 d'une équation algébrique générale de degré trois : $x^3 + ax + b = 0$:

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}},$$

$$x_2 = j\,\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + j^2\,\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}},$$

$$x_2 = \overline{j}\,\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} + \overline{j}^2\,\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}},$$

où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$, le choix des racines cubiques et carrées étant normalisé par la condition :

$$\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{a}{3}\right) + \left(\frac{b}{2}\right)^2}} = -\frac{a}{3}.$$

D'autres formules explicites, plus complexes, pourraient aussi être écrites sous une forme complètement développée pour toute équation algébrique de degré 4 (Ferrari). Toutefois, pour la plupart des équations algébriques sur $\mathbb{Q}$ de degré $\geqslant 5$, de telles formules n'existent pas, mais si l'on s'accorde pour *élargir* l'univers des expressions bien connues ou adjoindre d'autres des procédés admissibles, la fermeture change de nature et couvre des cas plus étendus.

Par exemple, les spécialistes de l'équation du cinquième degré au XIX[ème] siècle — notamment Hermite — ont cherché à étudier les racines comme fonctions des coefficients, et ont ainsi lié l'équation du cinquième degré à la théorie des fonction elliptiques ([**9**]). Il est ainsi possible de résoudre l'équation quintique au moyen de fonctions hypergéométriques générales, et les formules closes sont assez étendues.

Soit k un sous-corps commutatif de $\mathbb{C}$. On peut aussi demander, quand une équation algébrique $F(\mathsf{x}) = 0$, où $F \in k[\mathsf{x}]$ est un polynôme de degré 5 à coefficients dans k est résoluble par radicaux, et dans ce cas, trouver des formules closes explicites à partir des coefficients de F qui n'implique qu'un nombre fini d' opérations algébriques élémentaires et d'extractions de racines carrées, cubiques, quartiques, quintiques. Un théorème de Bring-Jerrard montre qu'il suffit d'étudier des polynômes (irréductibles dans $k[\mathsf{x}]$) de la forme :

$$F_{\mathsf{red}}(\mathsf{x}) := \mathsf{x}^5 + p\,\mathsf{x} + \mathsf{q}.$$

On démontre ([**9**]) qu'une telle équation est résoluble par radicaux (groupe de Galois résoluble) si et seulement si le polynôme :

$$\big(\mathsf{y}^3 - 5\,p\,\mathsf{y}^2 + 15\,p^2\,\mathsf{y} + 5\,p^3\big)^2 - (2^8\,p^5 + 5^5\,q^4)\,\mathsf{y}$$

admet une (unique) racine ρ dans k, et on trouve alors des formules explicites pour les en fonction de p, q, $\sqrt{\rho}$, $\sqrt{\Delta}$, où $\Delta := 2^8\,p^5 + 5^5\,q^4$, sous l'hypothèse (génériquement satisfaite) que le déterminant 6×6 suivant ne s'annule pas :

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 10p & 0 & -10p^2 & 5\delta \\ 0 & 10p & 0 & -10p^2 & 5\delta & -230p^2 \\ 10p & 0 & -10p^2 & 5\delta & -230p^2 & 35p\delta \\ 0 & -10p^2 & 5\delta & -230p^2 & 35p\delta & -1050p^4 \\ -10p^2 & 5\delta & -230p^2 & 35p\delta & -1050p^4 & 90p^2\delta \\ 5\delta & -230p^2 & 35p\delta & -1050p^4 & 90p^2\delta & 5\Delta - 1750p^5 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

C'est donc Waring qui accomplira *réellement* le travail qui était laissé en suspens par Newton. Sans utiliser la Proposition ci-dessus et avant de voir comment Waring lui-même l'a utilisée, démontrons le théorème en utilisant un argument élégant qui repose sur la série formelle de la fonction logarithme. Mais juste auparavant, donnons une application.

Exemple. En particulier, pour $k = 5$ et un nombre $n \geqslant 1$ quelconque de variables, il y a exactement 7 solutions entières à l'équation $i_1 + 2i_2 + 3i_3 + 4i_4 + 5i_5 = 5$, à savoir :

$$(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5) = (5,0,0,0,0), \quad \text{ou } (3,1,0,0,0), \quad \text{ou } (2,0,1,0,0),$$
$$\text{ou } (1,2,0,0,0), \quad \text{ou } (1,0,0,1,0), \quad \text{ou } (0,1,1,0,0), \quad \text{ou } (0,0,0,0,1),$$

et par conséquent, une application directe de la formule de Waring donne N_5 *sans avoir à passer par le calcul de* N_4, N_3, N_2, N_1 :

$$\begin{aligned} \mathsf{N}_5 = 5\Big[&\tfrac{1}{5}\,\tfrac{5!}{5}\,(\mathsf{s}_1)^5 - \tfrac{1}{4}\,\tfrac{4!}{3!\,1!}\,(\mathsf{s}_1)^3\,\mathsf{s}_2 + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{3!}{2!\,1!}\,(\mathsf{s}_1)^2\,\mathsf{s}_3 + \tfrac{1}{3}\,\tfrac{3!}{1!\,2!}\,\mathsf{s}_1(\mathsf{s}_2)^2 - \\ &- \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2!}{1!\,1!}\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_4 - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{2!}{1!\,1!}\,\mathsf{s}_2\,\mathsf{s}_3 + \tfrac{1}{1}\,\tfrac{1!}{1!}\,\mathsf{s}_5\Big] \\ = (\mathsf{s}_1)^5 &- 5\,(\mathsf{s}_1)^3\,\mathsf{s}_2 + 5\,(\mathsf{s}_1)^2\,\mathsf{s}_3 + 5\,\mathsf{s}_1(\mathsf{s}_2)^2 - 5\,\mathsf{s}_1\,\mathsf{s}_4 + 5\,\mathsf{s}_5. \end{aligned}$$

Démonstration moderne des formules de Waring. Pour la démonstration, partons maintenant du développement formel (standard) d'un polynôme qui est le produit de facteurs du premier degré :

$$(X - x_1)(X - x_2)\cdots(X - x_n) = X^n - \mathsf{s}_1\,X^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}X + (-1)^n\mathsf{s}_n.$$

Rappelons à nouveau que le membre de droite fait naturellement apparaître les fonctions symétriques élémentaires, puisque par exemple, lorsque l'on développe ce produit, le coefficient de X^{n-1} s'obtient en prenant de toutes les manières possibles le terme constant $-x_k$ dans un seul facteur, ce qui donne $-x_1 - \cdots - x_n = \mathsf{s}_1$; le coefficient de X^{n-2} s'obtient en prenant de toutes les manières possible le terme constant dans *deux* facteurs distincts, *etc.* ; à la fin, le coefficient de X^0 est égal à $(-x_1)(-x_2)\cdots(-x_n) = (-1)^n \mathsf{s}_n$.

Dans cette identité basique, posons maintenant $X := \frac{1}{Y}$, multiplions-la par Y^n :

$$
\begin{aligned}
Y^n\Big(\frac{1}{Y} - x_1\Big)\Big(\frac{1}{Y} - x_2\Big)\cdots\Big(\frac{1}{Y} - x_n\Big) &= \\
&= Y^n\bigg[\Big(\frac{1}{Y}\Big)^n - \mathsf{s}_1\Big(\frac{1}{Y}\Big)^{n-1} + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}\frac{1}{Y} + (-1)^n\mathsf{s}_n\bigg],
\end{aligned}
$$

et distribuons équitablement une simple puissance Y^1 sur chacun des facteurs à gauche pour obtenir une sympathique identité :

$$
\boxed{(1 - x_1Y)(1 - x_2Y)\cdots(1 - x_nY) = 1 - \mathsf{s}_1Y + \cdots + (-1)^{n-1}\mathsf{s}_{n-1}Y^{n-1} + (-1)^n\mathsf{s}_nY^n},
$$

qui sera notre point de départ fondamental.

Appliquons pour commencer le logarithme, vu comme série formelle :

$$
\begin{aligned}
\log(1 - T) &= -T - \frac{T^2}{2} - \cdots - -\frac{T^k}{k} - \cdots \\
&= -\sum_{k \geqslant 1} \frac{T^k}{k}
\end{aligned}
$$

à chacun des deux membres de cette identité encadrée, en utilisant bien sûr la propriété magique $\log\big(a_1a_2\cdots a_n\big) = \log a_1 + \log a_2 + \cdots + \log a_n$ qu'a le logarithme de « transsubstantialiser » la multiplication en addition, ce qui nous donne :

$$
\begin{aligned}
\log(1 - x_1Y) + \log(1 - x_2Y) + \cdots + \log(1 - x_nY) &= \\
&= -\sum_{k\geqslant 1} \frac{x_1^k\,Y^k}{k} - \sum_{k\geqslant 1} \frac{x_2^k\,Y^k}{k} - \cdots - \sum_{k\geqslant 1} \frac{x_n^k\,Y^k}{k} \\
&= -\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\Big(x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k\Big)\,Y^k \\
&= -\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}\,\mathsf{N}_k\,Y^k.
\end{aligned}
$$

Ainsi obtenons-nous presque gratuitement une série formelle indexée par les puissances Y^k de la variable Y dont les coefficients sont exactement (au facteur $-\frac{1}{k}$ près) les sommes de Newton $\mathsf{N}_k(x)$ que nous cherchons à représenter au moyen des fonctions symétriques élémentaires $\mathsf{s}_l(x)$.

Or par ailleurs, le membre de droite de l'identité de départ que nous avons encadrée ne comprend que ces $\mathsf{s}_l(x)$. Appliquons donc maintenant le logarithme formel aussi à ce membre de droite en utilisant une deuxième fois la formule générale $\log\big[1-U\big] = -\sum_{i\geqslant 1}\frac{U^i}{i}$ pour obtenir :

$$\begin{aligned}\log\Big[1-\mathsf{s}_1Y+\cdots+(-1)^n\mathsf{s}_nY^n\Big] &= \log\Big[1-\big(\mathsf{s}_1Y+\cdots+(-1)^n\mathsf{s}_nY^n\big)\Big]\\ &= -\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{i}\big(\mathsf{s}_1Y-\mathsf{s}_2Y+\cdots+(-1)^{n-1}\mathsf{s}_nY^n\big)^i.\end{aligned}$$

Il est clair maintenant qu'afin d'atteindre la formule de de Waring annoncée dans le théorème, il va nous suffire de développer toutes ces puissances $\big(\mathsf{s}_1Y-\mathsf{s}_2Y^2+\cdots\big)^i$ d'ordre i et de réorganiser tous les termes obtenus en une série $\sum_{k\geqslant 1}\mathsf{coeff}\cdot Y^k$ dont les termes « coeff » seront justement ceux que nous recherchons.

À cette fin, dans la formule classique du multinôme (elle aussi due à Newton) :

$$\big(Z_1+Z_2+\cdots+Z_n\big)^i = \sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\ldots\,i_n!}\big(Z_1\big)^{i_1}\big(Z_2\big)^{i_2}\cdots\big(Z_n\big)^{i_n}$$

remplaçons tout simplement $Z_1 := \mathsf{s}_1Y$, $Z_2 := -\mathsf{s}_2Y^2$, ..., $Z_n := (-1)^{n-1}\mathsf{s}_nY^n$, ce qui nous permet de poursuivre comme suit le calcul que nous avons laissé en suspens il y a un instant :

$$\begin{aligned}&= -\sum_{i\geqslant 1}\frac{1}{i}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\,\cdot\\ &\qquad\qquad\cdot\big(\mathsf{s}_1\big)^{i_1}\big(-\mathsf{s}_2\big)^{i_2}\cdots\big((-1)^{n-1}\mathsf{s}_n\big)^{i_n}\cdot Y^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}\\ &= -\sum_{i\geqslant 1}\sum_{i_1+i_2+\cdots+i_n=i}Y^{i_1+2i_2+\cdots+ni_n}\cdot\frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\,\cdot\\ &\qquad\qquad\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\cdot\big(\mathsf{s}_1\big)^{i_1}\big(\mathsf{s}_2\big)^{i_2}\cdots\big(\mathsf{s}_n\big)^{i_n};\end{aligned}$$

à la deuxième ligne, nous réorganisons les termes en déplaçant la puissance de Y au début et en rassemblant toutes les puissances de -1.

Pour terminer, il nous faut encore transformer cette double somme en collectant, pour tout Y^k qui peut apparaître ici, le coefficient qui lui correspond. Ainsi un tel entier k doit être égal à :

$$k = i_1+2i_2+\cdots+ni_n;$$

il est $\geqslant 1$, puisque l'un des i_j au moins est $\geqslant 1$, et l'on doit considérer tous les n-uplets $(i_1,i_2,\ldots,i_n)$ tels que $i_1+2i_2+\cdots+ni_n = k$. Par conséquent, notre double somme précédente se transforme tout simplement en :

$$= -\sum_{k\geqslant 1} Y^k \sum_{i_1+2i_2+\cdots+ni_n=k} \frac{(-1)^{i_2+2i_3+\cdots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\cdots+i_n}\cdot\frac{(i_1+i_2+\cdots+i_n)!}{i_1!\,i_2!\,\cdots\,i_n!}\cdot(\mathsf{s}_1)^{i_1}(\mathsf{s}_2)^{i_2}\cdots(\mathsf{s}_n)^{i_n},$$

et pour conclure la démonstration du théorème, il nous suffit juste d'identifier le coefficient de Y^k dans cette formule au coefficient $-\frac{1}{k}\,\mathsf{N}_k$ de Y^k dans la première formule que nous avons obtenue plus haut (noter la neutralisation des signes « $-$ »). Voilà démonstration « moderne et directe » du théorème de Waring achevée ! □

L'énoncé du théorème par Waring lui-même : perplexité ? Le Chapitre 1 des *Meditationes Algebricæ* de Waring qui s'intitule : « *Une méthode pour trouver une équation dont les racines sont une fonction algébrique quelconque des racines d'une équation donnée* » commence par un premier problème qu'accompagne sa solution.

Problème 1. *Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \ldots$ les racines d'une équation donnée :*

$$x^n - p\,x^{n-1} + q\,x^{n-2} - r\,x^{n-3} + s\,x^{n-4} - t\,x^{n-5} + v\,x^{n-6} - w\,x^{n-7} + z\,x^{n-8} - \cdots = 0.$$

Trouver la somme $\alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \delta^m + \varepsilon^m + \cdots$.

La somme demandée, écrit Waring, sera égale à :

$$p^m - mq\,p^{m-2} + mr\,p^{m-3} + \left\{\begin{array}{l} +\,ms \\ +\,\frac{m(m-3)}{2}\,q^2 \end{array}\right\} p^{m-4} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} +\,mt \\ -\,m(m-4)\,qr \end{array}\right\} p^{m-5} + \left\{\begin{array}{l} -\,mv \\ +\,m(m-5)\,qs \\ +\,\frac{m(m-5)}{2}\,r^2 \\ -\,\frac{m(m-5)(m-4)}{2\cdot 3}\,q^3 \end{array}\right\} p^{m-6} +$$

$$+ \left\{\begin{array}{l} +\,mw \\ -\,m(m-6)\,qt \\ -\,m(m-6)\,rs \\ +\,\frac{m(m-6)(m-5)}{2}\,q^2r \end{array}\right\} p^{m-7} + \left\{\begin{array}{l} -\,mz \\ +\,m(m-7)\,qv \\ +\,m(m-7)\,rt \\ -\,\frac{m(m-7)(m-6)}{2}\,q^2s \\ -\,\frac{m(m-7)(m-6)}{2\cdot 3}\,qr^2 \\ +\,\frac{m(m-7)(m-6)(m-5)}{2\cdot 3\cdot 4}\,q^4 \end{array}\right\} p^{m-8} + \cdots.$$

S'agit-il vraiment du même théorème ? Pourquoi tant de lettres ? Waring n'utilise-t-il pas des indices ? Et ces grandes accolades ? Comment expliquer l'apparition chaotique des signes $-$ et $+$?

Lecture multiversale et appropriation intuitive. Cette série obéit à une double règle, écrit Waring, l'une concernant les produits littéraux, et l'autre concernant les *unciae*, ou coefficients numériques. Le lecteur est alors invité à *regarder la formule* pour y deviner toutes les structures combinatoires. Plutôt que de démontrer directement la formule, et plutôt que de la comprimer symboliquement, comme on aurait choisi de le faire pour n'importe quelle présentation moderne, Waring va au contraire *déployer et amplifier sa formule*, il va l'expliquer en la *décrivant sous plusieurs angles* afin que ses lecteurs puissent l'*embrasser mentalement* comme par l'effet d'une *géométrie descriptive* des structures algébriques.

Pour la partie littérale, dit Waring, la règle est la suivante : les termes entre accolades qui sont associés à une puissance donnée :

$$p^{m-u}$$

du premier coefficient p, où l'entier u est successivement égal à $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, \dots,$ comprennent *tous* les produits littéraux possibles des autres coefficients (lettres) $q, r, q, t, v, w, \dots$ du polynôme en question, les produits qui apparaissent devant notamment respecter une certaine règle d'homogénéité qui est spécifiquement définie comme suit.

By the exponents of the coefficients of the given equation, I mean the numbers designating their distance from the first term of the equation, namely, the exponent of the coefficient q is 2 ; of r, 3 ; of s, 4 ; of t, 5 ; and so on — and in consequence, that the exponent of any power of the coefficient q, such as q^μ, shall be 2μ ; the exponent of any power of r, say r^ν, shall be 3ν ; the exponent of s^π shall be 4π ; the exponent of t^ρ shall be 5ρ ; and likewise for all the rest of them.

Every literal product which can be so composed from the sum u must be adjoined to the power p^{m-u}. [**453**], p. 2.

Autrement dit, dans les accolades, on doit inscrire *tous* les produits possibles :

$$q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho v^\sigma w^\tau \cdots$$

dont l'homogénéité $2\mu + 3\nu + 4\pi + 5\rho + 6\sigma + 7\tau + \cdots$ soit égale au défaut u par rapport à m de l'exposant $m - u$ de p dans le facteur de laison p^{m-u}.

Par exemple, pour l'accolade attachée à p^{m-6}, puisqu'on a les quatre seules décompositions :

$$6 = 6 = 2 + 4 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2,$$

quatre monômes exactement doivent apparaître : v, qs, r^2, q^3. Les décompositions possibles de u en somme de nombres entiers $\geqslant 2$ affirment ainsi un *principe métaphysique de genèse littérale*. En résumé :

For the literal parts the rule is this : to form the product of the exponents of each individual coefficient of the given equation, with their respective powers, joining them symbolically to the quantity p, such that they sum up *to u, where p^{m-u} is the power of p to which the products of these letters will be adjoined.*

Remarques intercalaires. Dans ses manuscrits de recherche, pour une raison qui tient peut-être aux hasards de son parcours dans les principes organisateurs idéaux des mathématiques, Waring a collecté les résultats en fonction des puissances de p. Un premier moment d'exploration a consisté à appliquer sans réfléchir les formules de Newton jusqu'à un niveau élevé de complexité. Tous ces engagements : la foi décidée en l'induction ; la confiance métaphysique à l'égard des principes rationnel ; les postulats implicites quant à la préexistence d'harmonies littérales ; tous exigent un tel travail de déploiement symbolique.

Fait symptomatique qui a tout pour nous séduire, Waring tient, dans la publication de ses travaux, à *conserver rigoureusement* toute la substance symbolique qu'il a créée et explicitée patiemment à la main. Même si cela peut sembler superflu pour les stricts besoins de l'exposition et de la transmission du savoir, Waring tient en effet à faire embrasser aussi à son lecteur les totalités presque incompressibles de l'induction mathématique.

Pas de sécateur pour la sève algébrique.

Détail encore plus symptomatique, même lorsqu'il s'agit de de lister des séquences évidentes telles que $k = 1, 2, \dots$ ou encore $2i_2 + 3i_3 + \cdots$, écritures que l'usage contemporain tronque habituellement dès le deuxième ou le troisième terme, Waring dévidera longuement tous ces minces fils d'Ariane qui sont autant d'incitations à entrer dans les labyrinthes indéfinis du calcul. Preuves que les intentions d'écriture sont bien présentes :

- le polynôme étudié est écrit dans l'énoncé du Problème 1 jusqu'à la profondeur -8 des exposants de x ;

- les monômes qui apparaissent entre accolades sont désignés par $q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho v^\sigma w^\tau \cdots$ jusqu'à une longueur six ; à comparer à l'écriture moderne $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, qui n'est que de longueur deux.

C'est ainsi qu'on mobilise le mieux l'intuition (si imparfaite) de l'infini, en se conformant, par allusions suivies et images amplifiées, à sa générativité propre.

À l'opposé, le logiciel de calcul formel à qui l'on commande en quelques lignes d'effectuer les opérations de substitution, même s'il séduit par la production instantanée du résultat, est totalement incapable (du moins à notre époque) de cette réflexivité mémorielle de la pensée qui nous permet d'embrasser descriptivement toutes les règles de formation combinatoire.

Unciae. Deux mystères restent à éclaircir : quels sont les coefficients des monômes $\big\{\mathsf{coeff}\, q^\mu r^\nu s^\pi t^\rho v^\sigma w^\tau \cdots\big\}\, p^{m-u}$? Et quels sont leurs signes ?

Of the numerical coefficients, or unciae, the rule is this : for each literal product $p^{m-u}\, q^{\mu} r^{\nu} s^{\pi} t^{\rho} v^{\sigma} w^{\tau} \cdots$ the coefficient will be a fraction, whose numerator is

$$m(m-u+1)(m-u+2)(m-u+3)(m-u+4)(m-u+5)(m-u+6)\cdots$$

(in which the number of factors is equal to the sum of the indices, i.e. $\mu + \nu + \rho + \sigma + \tau + \cdots$), and whose denominator is a product of factorials of the indices μ, ν, π, ρ etc. *respectively. More explicitly, in our working example the coefficient of the litteral product $p^{m-u}\, q^{\mu} r^{\nu} s^{\pi} t^{\rho} \cdots$ will be*

$$\frac{m(m-u+1)(m-u+2)(m-u+3)(m-u+4)\cdots(m-u+\mu+\nu+\pi+\rho+\sigma+\cdots-1)}{\mu!\ \nu!\ \pi!\ \rho!\ \cdots}.$$

To the coefficient of the literal product is affixed a sign which will be positive or negative, when u is an even number, according as the sum $\mu + \nu + \pi + \rho + \sigma + \cdots$ is even or odd, and the opposite sign will be affixed when u is an odd number ; more generally, the sign will be positive or negative according as the sum $u + \mu + \nu + \pi + \rho + \cdots$ is even or odd.

Circulation, généralisation, compréhension. Cette fois-ci, toutes les règles sont dévoilées. On comprend instantanément que la *descriptive algébrique* offerte par Waring à son lecteur lui permet maintenant de calculer chacune des accolades adjointes à une puissance de p, par exemple (exercice d'application triviale) la prochaine puissance p^{m-9} — juste pour le plaisir de faire naître sous sa plume tous les monômes avec leurs coefficients entiers qui ne présentent maintenant plus aucun mystère.

Joie de savoir la réponse, bonheur de connaître les règles, sentiment d'être dans le secret des calculs.

La démonstration qu'en donne Waring, si elle n'était pas agrémentée de son souci de disposer les termes sur de longues lignes tabulaires qui remplissent tout une page, ne serait qu'une triste récurrence sur l'exposant m, en partant des formules (imparfaites) de Newton. Si nous ne nous engageons pas ici plus avant dans l'analyse d'une telle démonstration, mentionnons toutefois que Waring a réellement accompli le travail de fermeture des récurrences newtoniennes et que l'on peut s'imaginer que les trois règles qu'il décrit, ils les a d'abord *devinées* en creusant ses calculs jusqu'à une certaine profondeur.

Comprendre la formule ici, ce n'est certainement pas (seulement) la démontrer. En mathématique, il existe un niveau multi-transversal de compréhension, comme une espèce de « vision gestaltiste » des équations qui ne se soucierait pas des fondements, des rigorisations arides, et des démonstrations minutieuses. Encadrés dans la dialectique du vrai et du faux par une rigueur spéculative qui est leur secret, Waring, Gauss, Hermite, puis

Ramanujan et d'autres ont su se constituer un *maillage de visions* qui leur permettait de percevoir les nœuds de la réalité mathématique.

Question terminale laissée en suspens : *Comment l'Algèbre pourrait-elle briser les barreaux de la successivité temporelle ?*

Commentaire du « *Premier mémoire* » de Galois

1. Rappels préliminaires

Un peu d'histoire. 4.2. Galois La personnalité du célèbre jeune mathématicien républicain Évariste Galois (1811-1832) offre un autre exemple qui témoigne à la fois de l'importance de l'*autonomie absolue* du génie mathématique et d'une exigence d'*implication totale* dans l'activité mathématique[1]. En dépassant largement les travaux de ses aînés et quasi-contemporains Lagrange (1736-1813) et Legendre (1752-1833), Galois a résolu complètement le problème qui était central à l'aube du dix-neuvième siècle, à savoir la résolution des équations algébriques de degré supérieur à quatre, par une méthode originale et entièrement nouvelle, et a dégagé le concept mathématique très important de *groupe mathématique* qu'il trouva alors sur son chemin et qu'il inventa – le terme "groupe d'une équation algébrique" est en effet dû à Galois[2]. La vie de Galois ressemble véritablement au passage d'une comète. Et cette vie exemplaire a contribué à ancrer dans les consciences *le mythe du mathématicien génial*, très précoce, très fort de caractère, complètement autonome dans ses lectures et dans ses recherches, disparu – hélas ! – prématurément, ayant surtout découvert un théorème très important, ou résolu une question très difficile ; ce jeune savant a été ignoré de ses contemporains, ses travaux ayant été exhumés de nombreuses années après sa mort. Mais sincèrement, la fulgurante épopée galoisienne est véritablement fascinante, et la réalité dépasse en la matière largement la fiction.

En février 1830, Galois remet à l'Académie des Sciences un mémoire sur les conditions pour qu'une équation soit soluble par radicaux, en vue de concourir pour le Grand Prix de Mathématiques. Au mois de de Juin 1830, il apprend la perte de son mémoire présenté à l'Académie : *il était chez M. Fourier qui devait le lire, et, à la mort de ce savant, le mémoire a été*

[20] *cf.* J.-P. Colette, *ib.*

[21] On pourra consulter l'excellent texte de G. Verriest, *Œuvres mathématiques d'Évariste Galois*, publiées en 1897, suivies d'une notice sur Évariste Galois et la théorie des équations algébriques, Gauthiers-Villars, Paris, 1961. Cette notice fournit des éléments biographiques complets et propose une introduction historique et heuristique sans égal à la théorie de Galois, interprétée comme *processus de discernement progressif de l'indiscernabilité des racines*.

perdu. Qu'à cela ne tienne ! Chassé de l'École Normale Supérieure durant la révolution de 1830, après avoir critiqué publiquement le directeur M. Guignaut dans la *Gazette des Écoles*, Galois se verra conseiller par Poisson de présenter à nouveau un mémoire à l'Institut en Janvier 1831. Entre-temps, il fut arrêté le 7 Mai 1831 à la suite d'un toast régicide qu'il avait porté, poignard à la main, lors du banquet républicain aux Vendanges de Bourgogne, puis il fut défendu dans le journal *Globe* et finalement acquitté le 15 Juin. Mais le 4 Juillet, Poisson présenta son rapport, négatif, dans lequel il mettait en doute son théorème central et déclarait ses raisonnements incompréhensibles. La rancœur de Galois fut immense, et il se jeta à corps perdu dans la lutte politique, oubliant presque entièrement ses recherches mathématiques. Emprisonné par deux fois à partir du 14 Juillet 1831, il décèda le 30 Mai 1832 des suites des blessures causées par un absurde duel dû à une obscure querelle amoureuse entre hommes pour une « midinette ». Galois s'était rendu au duel avec l'idée qu'il allait mourir et avait rédigé dans la nuit précédant le drame un testament mathématique fourmillant d'idées nouvelles que la postérité allait confirmer. On a beaucoup commenté l'importance des conceptions de Galois et rêvé sur ce qu'il aurait pu continuer à inventer s'il n'était pas mort si prématurément.

Dans le seul texte à caractère épistémologique que Sophus Lie ait écrit ([**289**]) à l'occasion du centenaire de l'École Normale Supérieure, il s'exprime comme suit.

> La grande portée de l'œuvre de Galois tient en somme à ce fait que *sa théorie si originale des équations algébriques est une application systématique des deux notions fondamentales de groupe et d'invariant*. [**289**]

Comme Galois, on donnera le nom de *substitution*[3] à l'opération par laquelle on intervertit un certain nombre d'objets, que l'on peut supposer représentés au moyen de caractères ou de lettres quelconques.

Le nombre des substitutions distinctes entre m lettres est égal à $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m = m!$, en y comprenant bien entendu la substitution dite *unité*, notée 1, qui laisse par définition chaque lettre à sa place. Les lettres romanes a, b, $c, \dots$ seront utilisées pour dénoter des substitutions.

[3] L'objectif ici est de commenter *métaphysiquement* le mémoire séminal mais elliptique de Galois, avec l'aide précieuse de Jordan ([**236**]). Des points d'*ouverture incidente* dans les choix galoisiens seront alors régulièrement pointés, eu égard à l'intention omniprésente de mettre entre parenthèse tout calcul effectif qui serait nécessité par une exploration plus poussée des questions. On montrera aussi en quoi une telle mise entre parenthèse constitue une *stratégie de continuation* face à des *déchirements multiples entre des exemples manipulables et des généralisations inaccessibles au calcul.*

Le *produit* ab de deux substitutions a et b est la substitution résultante qu'on obtient en effectuant d'abord[4] la substitution a, puis la substitution b. La substitution a^{-1} est celle qui, suivie ou multipliée par a, reproduit l'unité : elle existe toujours.

Un système de substitutions forme un *groupe de substitutions* si le produit de deux quelconques de ses substitutions appartient toujours encore audit système. On nommera en abrégé *groupe* un groupe de substitutions sur une collection finie de lettres, puisque seuls des groupes de ce type seront considérés.

Le *cardinal* d'un groupe (de substitutions) est le nombre de ses substitutions distinctes deux à deux. Le *degré* d'un groupe est le nombre de lettres sur lequel il opère.

Un groupe de substitutions sur des lettres est dit *transitif* si ses substitutions permettent d'amener l'une quelconque des lettres sur lesquelles il opère à la place primitivement occupée par une autre lettre quelconque.

Les puissances successives 1, a, a^2, $\dots$ d'une substitution quelconque a sont toutes distinctes entre elles jusqu'à ce que l'une d'entre elles $a^{\lambda(a)} = 1$ se réduise à l'unité, pour un entier $\lambda(a) \geqslant 1$. Tout groupe de substitutions contient l'inverse $a^{\lambda(a)-1} = a^{-1}$ de toute substitution a qui lui appartient.

Un groupe G *contient* un autre groupe H s'il contient toutes les substitutions de H.

Théorème. ([**236**]) *Si un groupe H est contenu dans un autre groupe G, son cardinal* $\mathrm{Card}(H)$ *divise celui* $\mathrm{Card}(G)$ *de G.*

Scholie. La rédaction par Jordan de ce premier énoncé élémentaire classiquement attribué à Lagrange va mettre en place un acte fondamental de représentation mentale qui consistera à s'imaginer que les substitutions de tout groupe s'organisent en une totalité, et à raisonner non pas élément par élément, c'est-à-dire implicitement avec une ontologie ensembliste uniforme comme le ferait la théorie moderne des groupes, mais globalement avec des substitutions prises dans leur ensemble, *sans introduire la notion classes à gauche ou à droite*. □

DÉMONSTRATION. Soient en effet a_0, a_1, a_2, $\dots$ les substitutions de H. Si $G \neq H$, il contient quelque autre substitution $b \in G \backslash H$, donc il contient aussi les substitutions $a_0 b$, $a_1 b$, $a_2 b$, $\dots$ qui sont évidemment distinctes deux à deux[5]. De plus, ces nouvelles substitutions sont toutes distinctes des précédentes, car (par contradiction) si l'on avait une égalité telle que $a_1 b = a_2$, la substitution $b = a_1^{-1} a_2$ ferait partie de H, contrairement à

[4] Noter la convention sur le rapport homologique entre l'ordre d'apparition des lettres et l'ordre d'exécution.

[5] En effet, si $a_i b = a_j b$, en multipliant à droite par b^{-1}, on obtient $a_i = a_j$.

ce qui a été supposé. Donc G contient au moins ces $2 \cdot \mathrm{Card}(H)$ substitutions. S'il en contient d'autres, soit c l'une d'entre elles. Alors G contiendra les substitutions a_0c, a_1c, a_2c, $\dots$ qui sont à nouveau — pour la même raison — distinctes deux à deux entre elles. De plus, elles sont aussi distinctes de toutes les précédentes, car si l'on avait par exemple, $a_1c = a_2b$ la substitution $c = a_1^{-1}a_2b$ appartiendrait alors visiblement à la seconde suite a_0b, a_1b, a_2b, $\dots$, contrairement à l'hypothèse faite. Donc le cardinal de G est au moins égal à $3 \cdot \mathrm{Card}\, H$. On voit de même que s'il est supérieur à $3 \cdot \mathrm{Card}\, H$, il sera égal au moins à $4 \cdot \mathrm{Card}\, H$, *etc.* □

Scholie. C'est tout un type de pensée mathématique et un style spécifique de démonstration qui s'expriment et qui transparaissent à travers ces raisonnements élémentaire de théorie des groupes[6], et que l'on retrouve aussi, quant à d'autres thématiques, dans les traités de Sophus Lie : le *style de l'explicitation potentielle*, en tant que les objets sont envisagés comme présentables dans leur individualité propre, et donc aussi, pouvant être *explicités complètement* grâce à de suggestifs points de suspension qui visent à *manifester en résumé* l'acte d'embrassement intuitif.

À l'inverse, la pensée structuraliste tend à gommer l'exigence, propre aux mathématiques du dix-neuvième siècle, que les objets même abstraits et généraux, doivent pouvoir porter en eux-mêmes les marques de leur protension permanente à l'explicitation. L'abstraction d'un être mathématique vise alors au contraire à chercher à le libérer, dans les moments renouvelés de sa donation, de toute protension à l'explicitation, puisque l'abstraction dans la donation décide que l'objet mathématique existe en acte et sans germes d'explicitation potentielle. □

2. Théorie des irrationnelles algébriques

[6] Aucune différence, en effet, avec le cas de (sous)-groupes finis *abstraits* qui ne seraient pas nécessairement des groupes de substitutions : *les cardinaux de sous-groupes sont diviseurs les uns des autres*. Mais alors, si de très nombreux énoncés de théorie des groupes de substitutions se transfèrent immédiatement et sans modification notoire à l'univers des groupes abstraits, la montée en abstraction et en généralité comporte fréquemment un pourcentage non négligeable de travaux qui sont seulement routiniers. Il y a là un aspect de la production mathématique qui ne doit pas masquer le fait que la dialectique entre l'abstrait et le concret, ou entre le général et le particulier, doit être omniprésente dans la méditation mathématique, et qu'elle doit être vécue comme *relation réflexive* entre l'abstraction et la concrétification, ou entre la généralisation et la particularisation, en tant que *dynamique circulatoire*.

L'objectif, ainsi, est d'entrer avec Jordan dans la pensée originale du mémoire de Galois, et de montrer en quoi l'une de ses forces principales s'enracine dans la décision audacieuse de *supprimer définitivement l'exigence d'effectivité*.

Comme on le sait, le problème fondamental de la théorie des équations algébriques $F(\mathsf{x}) = 0$ de degré $m \geqslant 1$ à une variable x — disons à coefficients dans $\mathbb{Q}$ — est de déterminer sous quelles conditions elles peuvent être résolues au moyen de formules algébriques, sans utiliser les transcendantes de l'Analyse.

> Non seulement nous avons rapproché ces méthodes les unes des autres et montré leur liaison et leur dépendance mutuelle, [mais] nous avons encore, ce qui était le point principal, donné la raison *a priori* pourquoi elles conduisent les unes à des réduites du troisième degré, les autres à des réduites du sixième, mais qui peuvent s'abaisser au troisième. [**256**]

Comme Lagrange l'avait démontré, toutes les méthodes connues de résolution des équations du second, du troisième ou du quatrième degré peuvent être ramenées à un seul principe unificateur, à savoir la 'découverte imprévisible' de certaines fonctions rationnelles $\Phi(x_1, \ldots, x_m)$ bien choisies des racines $x_1, \ldots, x_m$ — envisagées numériquement dans $\mathbb{C}$ — qui prendraient *moins* de valeurs distinctes, après permutations quelconques de leurs arguments, que le degré m de l'équation algébrique.

> Le problème fondamental de la théorie de Galois est le suivant :
>
> *Étant donné une équation quelconque $F(x) = 0$, trouver les fonctions de ses racines qui sont exprimables rationnellement en fonction de ses coefficients et de certaines irrationnelles données, que l'on dira* adjointes à l'équation.
> [**236**], 142

Scholie.

Faire voir les raisons *a priori*, donner les vrais principes, et pour ainsi dire, « la *vraie métaphysique* de la résolution des équations du troisième et du quatrième degré », tel était le message que Lagrange adressait abstraitement au problème de la résolubilité par radicaux des équations algébriques. Très inspiré de la pensée d'Euler dont il était grand lecteur, Lagrange espérait secrètement qu'il atteindrait de cette manière-là les équations de degré cinq et au-delà avec un regard neuf et frais grâce à une saine méthode d'exploration. N'est-ce pas toujours ainsi que nous dirigeons notre pensée, nous, mathématiciens du vingt-et-unième siècle, face à toute question ouverte ?

1) Progresser du connu vers l'inconnu.

2) Chercher à dévoiler les harmonies sous-jacentes.

3) Réorganiser inlassablement les calculs.

4) Élaguer, unifier et simplifier.

5) Rendre visible l'invisible ;

6) Et surtout : attendre le moment magique où l'*œil de la pensée* devine en un instant les belles structures générales.

Métaphore grothendickienne de la mer qui monte afin de submerger les montagnes : c'est ainsi que les mathématiques sont □

Mais plus d'un demi-siècle arpès le mémoire de Lagrange, le problème était toujours ouvert. Voici comment Auguste Comte décrit le bilan des travaux qui concernent ce difficile problème, dans son fameux *Cours de philosophie positive*, en 1828, peut-être d'ailleurs au moment même où Galois entrait secrètement en possession d'une solution générale :

> La complication toujours croissante que doivent nécessairement présenter les formules pour résoudre les équations à mesure que le degré augmente, l'extrême embarras qu'occasionne déjà l'usage de la formule du quatrième degré, et qui la rend presque inapplicable, ont déterminé les analystes à renoncer, par un accord tacite, à poursuivre de semblables recherches, quoiqu'ils soient loin de regarder comme impossible d'obtenir jamais la résolution des équations du cinquième degré, et de plusieurs autres degrés supérieurs. La seule question de ce genre, qui offrirait vraiment une grande importance, du moins sous le rapport logique, ce serait la résolution générale des équations algébriques d'un degré quelconque. Or, plus on médite sur ce sujet, plus on est conduit à penser, avec Lagrange, qu'il surpasse réellement la portée effective de notre intelligence.

À la question d'existence de telles fonctions spécifiques — *fort problématique* pour les équations de degré $\geqslant 5$ — correspond alors, d'après Galois, la question plus générale de comprendre le comportement de *toutes* les fonctions des racines à travers les permutations de leurs arguments. De plus, telle que formulée par Galois, la question nouvelle porte d'emblée une charge inductive qui ne serait visible que dans un *a posteriori exploratoire*, à savoir la question est *relativisée* en rapport à l'adjonction d'irrationnelles auxiliaires quelconques, hypothèse nécessaire si l'on veut embrasser à la fois les travaux de Gauss sur la cyclotomie et les travaux de Lagrange sur les résolvantes.

> Il y a plus : on pourra convenir de regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle d'un certain nombre de quantités déterminées, supposées connues a priori. Par exemple, on pourra choisir une certaine racine d'un nombre entier, et regarder comme rationnelle toute fonction rationnelle de ce radical.
>
> Lorsque nous conviendrons de regarder ainsi comme connues certaines quantités, nous dirons que nous les *adjoignons* à l'équation qu'il s'agit de résoudre. Nous dirons que ces quantités sont *adjointes* à l'équation. [**171**], 418

Il y a donc chez Galois *déclaration* d'un questionnement supérieur, seule chance que l'entendement puisse posséder de *passer l'obstacle* après tant d'échecs prédécesseurs. Certes, la perspective n'est pas renversée comme elle le fut dans les travaux d'Abel sur les fonctions elliptiques, mais le questionnement saura libère d'autres forces en s'élargissant. En se résolvant à *contourner* le déchirement auquel exposerait l'exigence de réaliser des calculs qui seraient plus faramineusement explicites que ceux de Lagrange puisqu'ils concerneraient les équations de degré quelconque, Galois pose la relativisation en assomption

> Cela posé, nous appellerons *rationnelle* toute quantité qui s'exprimera en fonction rationnelle des coefficients de l'équation et d'un certain nombre de quantités *adjointes* à l'équation et convenues arbitrairement. [**171**], 418

Ici, seront donc considérées commes *rationnelles* toutes les quantités qui s'expriment comme quotients de deux polynômes en les coefficients de la proposée et en les irrationnelles adjointes.

3. Brisure maximale des symétries

En incohérence avec une première annonce qui brouillera les pistes de ses premiers lecteurs[7], le premier acte de Galois prend le contrepied *radical* des résolvantes de Lagrange.

> Le premier pas de la démarche de Galois consiste à briser de manière maximale la symétrie entre les racines d'une équations en choisissant une fonction auxiliaire largement arbitraire de n variables. [**116**], 3

Au lieu en effet de rechercher une fonction $\Phi(x_1, \dots, x_m)$ des racines qui prenne le nombre minimal possible de valeurs $\Phi\big(x_{a(1)}, \dots, x_{a(m)}\big)$ lorsque $a \in \mathrm{Perm}\{1, \dots, m\}$ décrit toutes les permutations de l'ensemble indexant les m racines, ce qui requérait inventions, astuces et méthodes *ad hoc* que Lagrange cherchait à unifier pour en découvrir les principes causaux fondamentaux, Galois commence par vérifier qu'il existe *toujours* de nombreuses fonctions des racines dont les valeurs permutées sont toutes distinctes deux à deux, pourvu qu'aucune racine ne soit multiple.

Tout de suite, ce premier lemme est une véritable 'déclaration d'hostilité' vis-à-vis de l'*effecti-viabilité* des calculs, puisqu'il s'avère être non seulement trop aisément satisfiable, mais encore, à cause du fait qu'aucun choix ne saurait y être canonique, Galois *accepte intentionnellement* l'introduction d'un arbitraire relatif qui n'a *a priori* rien à voir aux données initiales du problème.

[7] Je commencerai par établir quelques définitions et une suite de lemmes qui sont tous connus. [**171**], 418

Lemme. ([**172, 236**]) *Soit* $F(\mathsf{x}) = 0$ *une équation dont les racines* $x_1, \ldots, x_m$ *soient toutes inégales. On peut déterminer une fonction rationnelle* V *de ces racines, telle que les* $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots m$ *expressions obtenues en y permutant les racines soient distinctes en valeur numérique.*

Scholie. Avant toute preuve, le fond de l'argument donné par Galois tient seulement au fait trivial que le complémentaire de toute collection finie d'hyperplans ou de sous-ensembles algébriques dans $\mathbb{Q}^N$ ou dans $\mathbb{C}^N$ n'est jamais réduit à l'ensemble vide. Chaque point quelconque du complémentaire peut être choisi sans que la suite des considérations de Galois en soit affectée. Mais l'acceptation de cette liberté initiale aura un coût : la très grande difficulté que l'on aurait à *rendre effectifs* les raisonnements originaux de Galois. □

DÉMONSTRATION. La 'preuve' trop elliptique de Galois masquant les ouvertures interrogatives co-présentes, cherchons avec Jordan une telle fonction V simplement sous la forme d'une combinaison linéaire entre les racines :

$$V = M_1\, x_1 + \cdots + M_m\, x_m,$$

où les quantités M_1, M_2, ... sont des coefficients indéterminés[8]. En égalant entre elles deux quelconques des fonctions qui dérivent de V par des substitutions entre les racines x_1, x_2, ..., on aurait une équation de condition entre M_1, M_2, ... Ces équations sont en nombre limité, et d'ailleurs, aucune d'elles n'est identique[9] : car les coefficients de M_1, M_2, ... dans chacune d'elles sont les différences des racines x_1, x_2, ... qui, par hypothèse, ne sont pas nulles[10]. On pourra donc choisir M_1, M_2, ... de manière à ne satisfaire à aucune d'elles. □

---

[8] Jordan ne précise pas dans quel corps de base ces coefficients seront choisis, car il va sans dire que $\mathbb{Q}$, corps commutatif infini de caractéristique nulle universellement concret conviendrait. Galois que Jordan suit et éclaire écrit sans justification détaillée qu'il suffit de prendre pour quantités M_i certains nombres entiers ($\in \mathbb{Z}$) bien choisis.

> Par exemple, on peut prendre :
>
> $$V = A\,a + B\,b + C\,c + \cdots,$$
>
> A, B, C étant des nombres entiers convenablement choisis. [**171**], 419

[9] Ni Galois ni Jordan n'éprouvent le besoin d'expliciter toutes les équations qu'on obtient en permutant les variables x_i dans V. Au contraire, ce besoin pourtant naturel de la pensée mathématique est ici expressément et intentionnellement contenu et jugulé, afin de ne conserver que des arguments réduits à la plus simple expression de ce que la conclusion (minimale) du lemme cherche à obtenir. Encore une fois, donc, la protension à l'explicitation est reléguée dans la pensée disparaissante.

[10] À vrai dire plus exactement et plus précisément :

$$V - V_a = M_1\,\big(x_1 - x_{a(1)}\big) + \cdots + M_m\,\big(x_m - x_{a(m)}\big),$$

Nous désignerons par V_1 l'une des valeurs de la fonction V, choisie arbitrairement ; par V_a, V_b, $\dots$ ce qu'elle devient lorsqu'on y effectue entre les racines x_1, x_2, $\dots$ les substitutions respectivement représentées par a, b.

Scholie. Une telle notation, à la fois fort économique quant au formalisme et salvatrice pour la compréhension du lecteur, est malheureusement absente du mémoire de Galois, vraisemblablement parce que son *travail de pensée* lui permettait d'atteindre le point où les concepts mathématiques savent vivre indépendamment de toute tendance à les fixer par des notations. $\square$

Corollaire ([**236**]) *Soit G un groupe quelconque de substitutions entre les racines x_1, x_2, $\dots$ de l'équation algébrique $F(\mathsf{x}) = 0$. On peut former une fonction W de ces racines, dont la valeur numérique, invariable par les substitutions de G, varie par toute autre substitution.*

DÉMONSTRATION. Soient en effet 1, a, b, $\dots$ les substitutions de G. Posons :

$$W_1 := (X - V_1)(X - V_a)(X - V_b) \cdots ,$$

où X est une constante indéterminée. Une substitution de G, telle que a, transforme W_1 en :

$$(X - V_a)(X - V_{a^2})(X - V_{ba}) \cdots =: W_a.$$

Mais puisque les substitutions 1, a, b, $\dots$ forment un groupe, elles se confondent à l'ordre près avec a, a^2, ba, $\dots$. Les facteurs binômes de W_a sont donc, à l'ordre près, les mêmes que ceux de W_1. Donc on a $W_a = W_1$.

Au contraire, soit α une substitution étrangère au groupe G : elle transforme W_1 en :

$$W_\alpha = (X - V_\alpha)(X - V_{a\alpha})(X - V_{b\alpha}) \cdots .$$

Comme les facteurs binômes de W_α diffèrent de ceux de W_1, ces deux expressions ne sont pas identiques ; elles ne serait numériquement égales que pour des valeurs particulières de X, qu'il serait aisé d'éviter. $\square$

Scholie. Non-répétition d'un argument similaire à celui déjà exposé pour la construction de la fonction V : à nouveau, tout revient à exploiter le fait que le complémentaire d'un ensemble algébrique est non vide. $\square$

---

l'expression « les différences des racines $x_1, x_2, \dots$ » faisant office de raccourci pour la pensée. L'un des problèmes récurrents que rencontre l'exposition en mathématiques, c'est que les raccourcis de pensée incorporent potentiellement de si nombreux aspects implicites, que les choix délibérés de « *non-explicitation-de-ce-qui-a-été-compris* » instituent, notamment chez Galois, une *déclaration ouverte de labyrinthe pour le lecteur*. Et cette observation itérée relance le problème de l'*écriture* des mathématiques, champ foisonnant d'implicitations métaphysiques. Aux antipodes de Galois, l'écriture de Engel et de Lie choisira l'*explicite-té continuée* du formalisme.

4. Élément primitif et singularisation d'une variable

Dans la théorie d'Artin ([**150**]), on considère un corps K contenu dans $\mathbb{C}$, par exemple le corps de base, dans lequel vivent les coefficients de F ainsi que les irrationnelles auxiliaires, et une extension finie L de K de degré n, par exemple le corps $K(x_1, \dots, x_m)$ engendré par les racines de l'équation algébrique $F(\mathsf{x}) = 0$. Le *Théorème de l'élément primitif* énonce alors qu'il existe un (et même plusieurs) élément(s) α de L tel(s) que :

$$L = K(\alpha) = K[\alpha].$$

Chez Galois, cet énoncé apparaît sous la forme suivante. Il va jouer un rôle absolument central.

Lemme fondamental. ([**172, 236**]) *La fonction V étant choisie comme au lemme précédent, on pourra exprimer chacune des racines x_1, x_2, … en fonction rationnelle de V et des coefficients de $F(\mathsf{x})$.*

DÉMONSTRATION. Pour commencer, sans commentaires autres qu'explicatifs, voici la preuve de Galois, revue et considérablement éclairicie par Jordan. De nombreux aspects concernant l'accessibilité des calculs vont être escamotés, et c'est toute la métaphysique d'innombrables problèmes coprésents qu'il faudra réveiller après ce premier contact avec la preuve volontairement elliptique de Galois, qui réfère à un mémoire d'Abel dans lequel l'énoncé aurait été donné *sans preuve*.

Scholie. On notera comme suit le polynôme étudié de degré m, qu'on peut bien évivemment supposer monique après une dilatation :

$$F(\mathsf{x}) = \mathsf{x}^m - f_1\,\mathsf{x}^{m-1} + \cdots + (-1)^m\, f_m.$$

Ici, les coefficients $f_1, \dots, f_m$ ne sont pas supposés être des nombres entiers et rationnels, puisque Galois et Jordan se placent d'emblée dans le contexte *relatif* où lesdits coefficients s'exprimeraient, à la suite d'un processus antérieur, en termes d'irrationnels introduites auparavant. C'est pourquoi Jordan répète régulièrement l'information : « en fonction des coefficients de $F(\mathsf{x})$ », sans toutefois introduire de notation spécifique qui signalerait cette dépendance. La *perte partielle* d'une telle information *décidée dans la notation*, et qui demeure toutefois active dans la mémoire de la pensée, montre bien que l'effectivité des calculs est délibérément écartée. $\square$

Soient en effet V_1, ..., V_μ les $\mu := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (m-1)$ valeurs que prend V lorsqu'on y permute les $m-1$ racines $x_2, \dots, x_m$ sans changer la place de x_1. On pourra former une équation en une indéterminée V de degré μ, à savoir :

$$(\mathsf{V} - V_1)(\mathsf{V} - V_2)\cdots(\mathsf{V} - V_\mu) = 0,$$

dont les racines V_1, V_2, ..., V_μ seront toutes différentes, et dont les coefficients, fonctions symétriques des racines de l'équation :

$$\frac{F(\mathsf{x})}{\mathsf{x} - x_1} = 0,$$

s'exprimeront rationnellement par les coefficients de cette équation, c'est-à-dire en fonction de x_1 et des coefficients de $F(\mathsf{x})$. **[236]**, 144

Scholie. Les $(m-1)!$ valeurs distinctes de la fonction V :

$$M_1\, x_1 + M_2\, x_{a(2)} + \cdots + M_m\, x_{a(m)},$$

où a parcourt toutes les permutations de $\{1, 2, \dots, m\}$ satisfaisant $a(1) = 1$, sont maintenant *indexées dans un ordre quelconque*, tandis que la notation précédente V_b, pour une permutation arbitraire b, est abandonnée. Inutile, au vu de l'élagage régulier des arguments, de notifier comment choisir un tel ordre.

Ensuite, rien n'est dit quant au développement de ce polynôme de (grand) degré égal à $(m-1)!$. Galois puis Jordan acceptent sans plus de rappel le théorème de Lagrange, d'après lequel toute fonction polynomiale ou rationnelle des racines qui est symétrique s'exprime comme une certaine fonction polynomiale ou rationnelle des coefficients $f_1, \dots, f_m$ de $F(\mathsf{x})$; en vérité ici, c'est une version *partiellement dissymétrisée* de cet énoncé — d'ailleurs explicitement observé auparavant dans le mémoire de Lagrange — qui est utilisée, à savoir toute expression polynomiale ou rationnelle en les m racines $x_1, x_2, \dots, x_m$ qui n'est symétrique par rapport aux $m-1$ dernières racines $x_2, \dots, x_m$ s'exprime comme une certaine fonction polynomiale ou rationnelle en x_1 et les coefficients $f_1, \dots, f_m$ de $F(\mathsf{x})$.

L'argument de Jordan, absent chez Galois[11] car trop 'évident', consiste à dire que lorsqu'on divise $F(\mathsf{x})$ par le polynôme du premier degré $\mathsf{x} - x_1$ en utilisant l'algorithme d'Euclide, on obtient naturellement un *polynôme* — puisque x_1 est racine de $F(\mathsf{x})$ par hypothèse — dont les coefficients s'expriment rationnellement en fonction de x_1 et des coefficients f_i de $F(\mathsf{x})$.

Une autre démonstration de cet énoncé pourrait consister à *singulariser la quantité* x_1 dans les formules qui lient les coefficients du polynôme $F(\mathsf{x})$

[11] il viendra une expression suivante :

$$\big[V - \varphi(a, b, c, d, \dots)\big]\,\big[V - \varphi(a, c, b, d, \dots)\big]\,\big[V - \varphi(a, b, d, c, \dots)\big]\ \cdots\cdots,$$

symétrique en $b, c, d, \dots$, laquelle pourra par conséquent s'écrire en fonction de a. **[171]**, 420 aux fonctions symétriques élémentaires de ses racines :

$$\begin{aligned}
&f_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_m,\\
&f_2 = x_1x_2 + \cdots + x_1x_m + x_2x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\\
&f_k = \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant m} x_{i_1}\cdots x_{i_k},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\\
&f_m = x_1x_2\cdots x_m,
\end{aligned}$$

puis à y faire appparaître au mieux les fonctions symétriques des $(m-1)$ dernières variables comme suit :

$$\begin{aligned}
&f_1 = x_1 + \underline{x_2 + \cdots + x_m},\\
&f_2 = x_1\big(\underline{x_2 + \cdots + x_m}\big) + \underline{x_2x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ,\\
&f_m = x_1\underline{x_2\cdots x_m},
\end{aligned}$$

pour enfin les exprimer, pas à pas au moyen d'une récurrence non fermée, en fonction des f_i et de la racine sélectionnée x_1 :

$$\begin{aligned}
x_2 + \cdots + x_m &= f_1 - x_1,\\
x_2x_3 + \cdots + x_{m-1}x_m &= f_2 - x_1(f_1 - x_1),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ;
\end{aligned}$$

bien entendu, il faudrait ensuite insérer ces formules dans les $(m-1)!$ fonctions symétriques élémentaires des V_j, à savoir dans :

$$\begin{aligned}
&V_1 + V_2 + \cdots + V_\mu,\\
&V_1V_2 + \cdots + V_{\mu-1}V_\mu,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&V_1V_2\cdots V_\mu,
\end{aligned}$$

expressions qui s'avèrent par construction être toutes symétriques en $x_2, \ldots, x_m$. Toutefois, l'exécution ici d'un travail qui serait réellement effectif exigerait d'abord d'avoir des formules closes pour les fonctions symétriques de $x_2, \ldots, x_m$, puis des formules closes pour les *développements* des fonctions symétriques de $V_1, \ldots, V_\mu$ — lesquelles incorporeraient les quantités artificielles $M_1, \ldots, M_m$ qui n'étaient pas canoniques et qui dépendaient quand même du polynôme initial $F(\mathsf{x})$ —, pour terminer par une réorganisation close et harmonieuse du tout : tous ces germes d'ouverture, toutes ces tâches de calcul, tous ces développements qui seraient nécessaires pour être en mesure de calculer réellement des groupes de Galois, sont délibérément passés sous silence, et considérés comme possibles, voire même idéalement effectués par actualisation du potentiel, afin que des raisonnements ultérieurs rebondissent et se poursuivent.

Autrement dit et en plaçant aussi l'analyse au niveau plus élevé de la philosophie générale des mathématiques, un accord quasi-implicite admis au préalable sur la nature des questions envisagées par Galois — et par d'autres styles contemporains de pensée mathématique qui ont intégré certaines stratégies d'évitement et de contournement face à la complexité ubiquitaire des contenus mathématiques — octroie des droits nouveaux quant à ce qui peut être considéré comme réponse à toute question technique transitoire, les réponses produites permettant alors de ne pas s'attarder sur des béances coprésentes qui pourraient exiger des travaux supplémentaires considérables. De manière lointainement analogue, l'acceptation de l'infini propulse le calcul infinitésimal au-delà des barrières du fini et se formalise en oubliant les racines paradoxales de son être. L'« idéalisation de l'effectuabilité *» est un 'blanc-seing' accordé aux réponses imparfaites par lequel la question se retourne réflexivement en elle-même pour se reformuler en s'affaiblissant afin que les réponses imparfaites puissent être considérées* a posteriori *comme de vraies réponses à des questions qui mettent entre parenthèses une partie non négligeable de ce qu'elles soulèvent elles-mêmes.*

En tout cas, aucun des deux arguments techniques ci-dessus — qui ouvriraient chacun sur des calculs effectifs assez délicats en eux-mêmes si l'on devait les faire aboutir sous une forme achevée *pour un polynôme* $F(\mathsf{x})$ *de degré arbitrairement grand* — n'est réellement donné par Galois ou Jordan, puisque la «*pensée-anti-calculs*» de Galois cherche constamment à *basculer* au-dessus des innombrables obstacles qu'interpose sans cesse l'exigence d'effectivité. On retrouvera dans l'œuvre de Hilbert, notamment dans ses premiers travaux sur la théorie des polynômes qui sont invariants sous l'action de groupes classiques (réductifs) tels que $\mathsf{SL}_2(\mathbb{C})$ ou SL_n la même option de réponse abstraite en comparaison avec les travaux Cayley, Sylvester, Aronhold, Gordan et d'autres.

C'est donc une thèse principale de philosophie des mathématiques qui se dégage à nouveau ici : l'*option de pensée galoisienne-hilbertienne cherche à faire passer en force des réponses d'un type nouveau qui parviennent à survoler et à réduire un champ de questions trop vastes et trop ramifiées*. C'est bien en cela qu'il y a d'une certaine manière *régression* par rapport à la philosophie mathématique de Riemann, pour lequel, en cohérence avec la philosophie de Socrate, toute question non résolue doit être maintenue en tant que telle dans la mémoire mathématique, c'est-à-dire tout simplement, comme question qui n'a pas encore été résolue, fût-ce à l'échelle de plusieurs générations qui seraient tentées de les nier au sens de la phénoménologie hégélienne de l'esprit. Mais en mathématiques, l'esprit n'a pas le droit de nier ou de dépasser dialectiquement les questions mathématiques. □

Par suite, l'équation :

$$(\mathsf{V} - V_1)(\mathsf{V} - V_2)\cdots(\mathsf{V} - V_\mu) = 0$$

pourra être mise sous la forme :

$$G(\mathsf{V}, x_1) = 0,$$

pour une certaine fonction polynomiale[12] G de l'indéterminée V et de la quantité numérique x_1, qui dépend aussi des coefficients de $F(\mathsf{x})$.

> Or cette équation est satisfaite pour $\mathsf{V} = V_1$: on aura donc identiquement :
>
> $$G(V_1, x_1) = 0,$$
>
> d'où il suit que l'équation :
>
> $$G(V_1, \mathsf{x}) = 0$$
>
> sera satisfaite pour $\mathsf{x} = x_1$: donc les équations :
>
> $$F(\mathsf{x}) = 0, \qquad G(V_1, \mathsf{x}) = 0$$
>
> ont une racine commune, x_1. **[236]**, 144

Scholie. Ainsi, le second argument x_1 de la fonction rationnnelle G est *polarisé* pour devenir une indéterminée x. Puis en partant de $G(\mathsf{V}, x_1)$, on aboutit à $G(V_1, \mathsf{x})$ par interversion des variables et des constantes. En mathématiques, on a un un *principe oscillatoire de transmutabilité permantente* entre quantité numérique et variable indéterminée : *Janus bifrons* des êtres, enraciné dans la mobilité universelle. En un aphorisme attribué à Grothendieck : « toute constante est une variable qui se repose ». □

De plus, x_1 est la seule racine commune à ces deux équations $F(\mathsf{x}) = 0$ et $G(V_1, \mathsf{x}) = 0$ (assertion). En effet, s'il existait un autre zéro commun, ce serait nécessairement un des x_i, disons x_2 après renumérotation éventuelle, c'est-à-dire que l'on aurait :

$$G(V_1, x_2) = 0.$$

De manière équivalente et redondante, l'équation :

$$G(\mathsf{V}, x_2) = 0$$

---

[12] Jordan se contentera de notifier l'information qu'une telle fonction est rationnelle, puisque la fonction V, construite sous forme linéaire, était dite *rationnelle* dans l'énoncé du lemme précédent. Perdre partiellement la mémoire de l'être précis des choses : voici encore un exemple de l'aisance qu'offre l'acceptation d'ineffectivité, un phénomène ubiquitaire dans la production publiée de mathématiques spécialisées.

serait satisfaite pour $\mathsf{V} = V_1$. Mais ce nouveau polynôme $G(\mathsf{V}, x_2)$ en V de degré μ se construit exactement comme le polynôme initial $G(\mathsf{V}, x_1)$, après un échange préalable entre x_1 et x_2. Si donc $V_1', V_2', \dots, V_\mu'$ sont les μ valeurs que la fonction :

$$V' := M_1\,x_2 + M_2\,x_1 + M_3\,x_3 + \cdots + M_m\,x_m$$

reçoit lorsqu'on permute en elle, de toutes les $\mu = (m-1)!$ manières possibles, les $(m-1)$ dernières quantités $x_1, x_3, \dots, x_m$, alors on aura de manière analogue :

$$G(\mathsf{V}, x_2) = (\mathsf{V} - V_1')(\mathsf{V} - V_2') \cdots (\mathsf{V} - V_\mu').$$

Or puisque par construction toutes les valeurs permutées V_a de la fonction V sont distinctes deux à deux, il est clair que les V_j sont tous distincts des $V_{j'}'$, et donc par conséquent que la valeur :

$$G(V_1, x_2) = (V_1 - V_1')(V_2 - V_2') \cdots (V_m - V_\mu') \neq 0$$

est non nulle, contrairement à ce qui a été supposé par contradiction. Ainsi, x_1 est bien la seule racine commune aux deux équations $F(\mathsf{x}) = 0$ et $G(V_1, \mathsf{x}) = 0$.

L'algorithme d'Euclide appliqué à ces deux polynômes en x en fournit toujours le plus grand commun diviseur, ici nécessairement du premier degré, de la forme $\mathsf{x} - \psi_1(V_1)$ pour une certaine fonction rationnelle ψ_1 de V_1 qui dépend par construction des coefficients de $F(\mathsf{x})$. Puisque $\mathsf{x} - x_1$ est aussi nécessairement ce plus grand commun diviseur, on obtient finalement :

$$x_1 = \psi_1(V_1),$$

ce qui achève la preuve. □

Corollaire. *Il existe m expressions rationnelles $\psi_1(V_1)$, $\psi_2(V_1)$, …, $\psi_m(V_1)$ en la quantité maximalement non-symétrique :*

$$M_1\,x_1 + \cdots + M_m\,x_m = V_1$$

dépendant toutes des coefficients du polynôme $F(\mathsf{x})$, au moyen desquelles s'exprime chacune de ses m racines :

$$x_1 = \psi_1(V_1), \quad x_2 = \psi_2(V_1), \; \dots\dots, \; x_m = \psi_m(V_1).$$

DÉMONSTRATION. Comme pour x_1 ci-dessus, pour chaque autre racine x_i avec $i = 2, \dots, m$, on forme de manière analogue, grâce à toutes les permutations qui fixent x_i, un polynôme $G_i(\mathsf{V}, x_i)$ de degré $(m-1)!$ en une certaine indéterminée auxiliaire V qui s'annule lorsque $\mathsf{V} = V_1$. L'élimination de la racine commune simple x_i entre les deux équations polynomiales $F(\mathsf{x}) = 0$ et $G_i(V_1, \mathsf{x}) = 0$ représente $x_i = \psi_i(V_1)$ sous une forme rationnelle appropriée. □

Scholie. Il convient de rappeler que ce procédé dépend fortement d'un choix initial de constantes $M_1, \dots, M_m$, il n'a donc rien d'universel, car la *spécificité individuelle* du polynôme initial $F(\mathrm{x})$ interdit un choix commun à tous les polynômes de degré m (exercice). □

5. La transparence du déchirement

Par *déchirement*, on entendra le fossé contentuel qui sépare éternellement le général des étude particularisées.

> C'est très probablement en se familiarisant avec la théorie traditionnelle des équations, en apprenant à manipuler des substitutions et permutations à partir d'équations particulières, à la manière calculatoire traditionnelle de Lagrange ou d'Abel, que Galois a formulé ses premières idées sur le lien entre résolubilité et groupe de substitutions des racines. On trouve ainsi sur certains des brouillons conservés de nombreux calculs algébriques, parfois juxtaposés sur une même feuille avec des manipulations sur des permuations de nombres entiers : c'est par la pratique et l'entraînement, par l'immersion dans la théorie classique, en quelque sorte, que Galois est parvenu à ses premiers résultats. Cependant, aucun de ces calculs n'a été conservé lors de la rédaction définitive. [**136**], 13

> Ces quelques exemples montrent que Galois ne cherche pas d'emblée à éviter les calculs, ni à se placer au plus grand degré de généralité possible. Les manipulations algébriques concrètes sur des cas particuliers d'équations font partie intégrante de son travail de recherche. Ce n'est qu'une fois qu'il a compris, par induction, quels sont les principes qui régissent ces calculs qu'il les fait disparaître. Comme Galois l'explique dans la préface que Liouville n'a pas reproduite, ce ne sont que des 'détails' sur lesquels « l'esprit n'a pas le temps de s'arrêter », qui restent à l'état de brouillons et sont finalement absents de la rédaction du mémoire, très épurée. Une fois acquise l'aisance nécessaire, il s'agit donc pour Galois d'extraire l'essence des calculs, en essayant de comprendre ce qui rend une équation résoluble. La formulation de la théorie générale se fait ainsi par des allers-retours permanents entre cette théorie et les cas particuliers qui en deviennent les applications. [**136**], 14

> L'esprit n'a plus le temps de s'arrêter aux détails. Je crois que les simplifications produites par l'élégance des calculs ont leurs limites ; je crois que le moment arrivera où les transformations algébriques prévues par les spéculations des analyses ne trouveront ni le temps ni la place de se produire ; à tel point qu'il faudra se contenter de les avoir prévues. Il sera temps d'effectuer des calculs prévus par cette haute analyse et classés suivant leurs difficultés (mais non spécifiés dans leur forme), quand la spécialisation d'une question les réclamera. Évariste Galois, [**17**]

On trouvera ici une condition générale à laquelle satisfait toute équation soluble par radicaux, et qui, réciproquement, assure leur résolubilité. On en fait l'application seulement aux équations dont le degré est premier. Voici le théorème donné par notre analyse :

Pour qu'une équation de degré premier, qui n'a pas de diviseurs commensurables, soit soluble par radicaux, il faut *et il* suffit *que toutes les racines soient des fonctions de deux quelconques d'entre elles.* [**171**], 417

6. Apparition du groupe de Galois

Théorème. ([**172, 236**]) *Soit* $F(\mathsf{x}) = 0$ *une équation algébrique de degré* m *dont les racine* $x_1, \ldots, x_m$ *sont distinctes deux à deux, et à laquelle on peut supposer adjointes certaines quantités auxilaires* y, z, $\ldots$ *.*

Actuellement, le théorème fondamental de la théorie de Galois énonce alors qu'il existe une correspondance biunivoque entre les groupes d'ambiguïté qui représentent les relations rationnelles entre les racines d'une part, et les corps engendrés

Une extension de K est la donnée d'un couple (L, j), où L est un corps et où j est un homomorphisme de corps de K dans L, c'est-à-dire une application à travers laquelle l'addition et la multiplication de k se transfèrent avec intégrité dans L. Un tel homomorphisme est nécessairement injectif, de telle sorte que K peut alors toujours être considéré comme étant un sous-cors de L.

On dit que L est une extension de degré fini de K si L, en tant que K-espace vectoriel, et de dimension finie. On montre alors aisément que si L est une extension finie d'un corps K, alors il existe un nombre fini d'éléments $\big(\alpha_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de L tels que $L = K\big(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\big)$ s'identifie au corps engendré sur K par les α_i.

Tout corps peut être plongé dans un corps algébriquement clos.

Considérons maintenant un corps K envisagé *dans* un certain corps algébriquement clos Ω fixé une fois pour toutes.

Supposer ce corps de caractéristique zéro.

Premier théorème fondamental :

Théorème. *Soit* L *une extension finie de* K *de degré* n*. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *l'extension* L *est séparable sur* K ;

(ii) *l'extension* L *est engendrée sur* K *par des éléments séparables* ;

(iii) *il y a exactement* n *plongements distincts de* L *dans* Ω *égaux à l'identité sur* K ;

(iv) *on a* $L = K(\alpha)$*, où* α *est un élément séparable sur* K*.*

Conséquence : si K est de caractéristique zéro, et si L est une extension fine de K, il existe un élément $\alpha \in K$ tel que l'on ait $L = K(\alpha)$ et il y a exactement $\big[L \colon K\big]$ plongements de L dans Ω qui sont égaux à l'identité sur K.

Définition. Soit L une extension de K contenue dans Ω.

- On dit que L est une *extension normale* de K si, pour tout plongement σ de L dans Ω qui est égal à l'identité sur K, on a $\sigma(L) = L$.
- On dit que L est une *extension galoisienne* de K si L est une extension normale et séparable sur K.

Définition. Soit L une extension de K contenue dans Ω. On appelle *groupe de Galois* de L sur K, et on note $\mathrm{Gal}(L/K)$, le groupe des automorphismes du corps L qui laissent fixe K. C'est un sous-groupe du groupe des automorphismes de L.

Théorème (critère de normalité). *Soit L une extension finie de K contenue dans Ω. Pour que L soit normale sur K, il faut et il suffit que tout polynôme irréductible de $K[X]$ ayant une racine dans L possède toute ses racines dans L.*

Important : si f est un polynôme irréductible dans $K[X]$, le corps de décomposition de f dans Ω est une extension normale de K, puisque si $\big(\alpha_i\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ sont les racines de f dans Ω, on a $L = K(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et comme tout K-plongement de L dans Ω permute nécessairement les racines α_i entre elles, il envoie L dans L !

Soit K un corps, c'est-à-dire un domaine de 'nombres généralisés' muni d'une addition et d'une multiplication

Soit $L \longrightarrow K$ une extension de de degré fini de K. Soit $\mathrm{Gal}\big(L/K\big)$ le groupe de Galois de L sur K, c'est-à-dire la collection des automorphismes de corps :

$$\sigma \colon L \longrightarrow L$$

groupe des automorphismes de corps

Alors il y a une correspondance biunivoque entre la collection des sous-groupes H de G et et la collection des sous-corps M de

Cette correspondance entre

Le groupe de Galois d'une équation algébrique donnée à coefficients rationnels

Ce type de questions est en fait en relation avec la classification des groupes finis.

Problème de Galois inverse.

Conclusions : 1) l'ouverture dans l'immensité. 2) posture devant l'ouverture, refus de certains problèmes.

Généralités spéculatives

Destin comparé des œuvres scientifiques et littéraires. La mathématique est certes une science cumulative et hiérarchisée, mobile et en progrès perpétuel. Non seulement les mathématiciens absorbent et reformulent, mais aussi, ils effacent, et surtout, ils *réécrivent*. Le retour aux textes-sources semble donc être le fait d'une poignée d'historiens déconnectés de la mathématique vivante. À l'opposé, dans les études historiques et littéraires, la notion d'*œuvre* génère des pratiques universitaires diversifiées et instaure des paradigmes critiques multiples.

Un faisceau de raisons profondes doit pouvoir expliquer cette différence de destin dans l'histoire des idées. On mentionnera brièvement trois d'entre elles qui paraissent pertinentes.

□ Alors que la langue littéraire a relativement peu évolué d'un point de vue morphologique depuis le dix-huitième siècle, la langue mathématique a subi une « révolution axiomatique » majeure qui s'est imposée sur une période relativement récente et assez peu étendue dans la durée, période qui commence au moment des premières tentatives de formalisation de la géométrie et des nombres réels à la charnière du dix-neuvième et du vingtième siècle, et qui se termine au moment la production des traités de Nicolas Bourbaki s'interrompt.

□ Dans un domaine mathématique donné, *e.g.* la topologie générale, la théorie des groupes algébriques, la géométrie riemannienne, la théorie du corps de classes, la théorie des représentations, l'analyse harmonique, la dynamique réelle, *etc.*, certaines séries de manuels présentent un contenu essentiellement identique, ce qui serait impensable en littérature. Les traités sont construits pour se lire plus facilement que les œuvres originales, et partant, ils s'y substituent.

□ Les obstacles de compréhension imposent une *discipline de la lenteur* dans la lecture mathématique. Aborder l'œuvre d'un mathématicien prolifique tel que Lie ou Grothendieck exige l'apprentissage patient d'une langue nouvelle et comme étrangère. Au final, il en découle que les œuvres mathématiques, en première place sur les rayons des bibliothèques, sont rarement consultées comme source de pensée. Limitation de spectre, spécialisation et professionnalisation : l'équivalent, en mathématiques, de l'idée d'honnête homme à la culture littéraire potentiellement universelle, semble donc être, pour des raisons intrinsèques, impossible, et ce, depuis plusieurs décennies.

Le mirage de l'« absorption en totalisation ». À l'intérieur même d'un corpus d'œuvres mathématiques qui sont ainsi relativement peu lues et peu étudiées, les travaux de Lie sur les groupes continus de transformations occupent une place singulière : personne dans le monde, pour ainsi dire, ne les lit.

Par une espèce de *décision a priori*, il faudra donc légitimer une entreprise mathématique et philosophique singulière, à savoir la lecture des œuvres de Lie. Celle-ci s'incrit dans une période de l'histoire de la pensée qui se perçoit comme libérée des problèmes de fondements, et qui s'est également convaincue, par principe, de la supériorité contemporaine de la pensée structuraliste et du langage formaliste. En effet, nombreux sont ceux qui s'imaginent que par l'action automatique d'un progrès naturel, le passé mathématique doit nécessairement être « absorbé en totalisation » dans les traités modernes. Et l'on croit aisément que la problématicité ouverte des dialectiques conceptuelles est maintenant canalisée dans un réseau de définitions axiomatiques consacrées par l'usage.

Le drame de l'a posteriori du spéculatif. Mais à mesure que les définitions se stabilisent, le sens et l'acuité des discussions sur la nature des concepts mathématiques s'éloignent inexorablement. Bien que l'objectif de réflexion sur la découverte scientifique soit clairement visé par les théories épistémologiques les plus diverses, aucune d'entre elles ne parvient et ne parviendra véritablement à recréer les conditions réelles d'ouverture dans lesquelles ont été placés les savants qui sont à l'origine d'avancées scientifiques notables. Aussi est-ce en partie une illusion de croire participer encore pleinement aux discussions qui se sont concentrées, à une époque donnée sur *e.g.* les questions de fondements, la métaphysique des infiniment petits, l'élaboration des axiomes de la géométrie, l'hypothèse du continu, la place de l'axiome du choix dans la théorie des ensembles, la construction des nombres réels, *etc.* L'appréhension des concepts de base reçus en apprentissage laisse croire que l'on accède par là-même à une compréhension englobante des découvertes, alors que les tensions véritables ne peuvent être captées que *sans suspense* par les reconstructions pédagogiques ou érudites. En effet :

Le *drame du spéculatif* s'estompe dans tout *a posteriori historique.*

De plus, le temps de la méditation scientifique ne se redéploie presque jamais en tant que tel dans l'écrit commenté. En effet, la méditation scientifique possède une grande extension temporelle *récurrente* ; soumise à des obstacles innombrables, elle s'accompagne de *milliers de feuillets de notes manuscrites*. Ainsi, les participations épistémologiques, ces participations contemporaines, sont-elles toujours décalées, métamorphosantes, illusionnistes. C'est bien là tout le *drame méta-spéculatif* de la philosophie des sciences : elle ne navigue que dans l'*a posteriori* des *drames spéculatifs* des sciences.

Essences mathématiques spéculatives. Donc, dans l'obligation d'admettre que la philosophie des mathématiques est limitée *par nature* à l'étude *a posteriori* des grandes synthèses conceptuelles, il faudra néanmoins partir de l'hypothèse que les architectures mathématiques renferment des *essences spéculatives* intrinsèques, autonomes, ouvertes, accessibles et réutilisables, bien que ces essences, comme cela a été dit plus haut, semblent s'estomper inexorablement à cause du jeu de l'absorption, de la traduction, de la modernisation, de la réécriture et surtout, de la formalisation, voire de la mécanisation. Le philosophe des sciences contemporain serait un peu comme un sauveteur désespéré des idées spéculatives, impuissant face à l'« *Atlantide du conceptuel* », cet engloutissement regrettable auquel les œuvres du passé sont exposées, à cause d'une prolifération techniciste.

Qu'est-ce qu'une *essence mathématique spéculative* ?

Cette terminologie d'inspiration volontairement « *scolastique et métaphysique* » pourrait recouvrir tout d'abord, à un niveau riemannien, un des grands cadres ouverts de la mathématique générale, par exemple : la séparation antinomique ou dualistique entre la pensée du continu et la pensée du discret ; la disponibilité permanente à un indéfini encadré par une finitude ; l'attente devant l'inconnu ; la domination universelle du principe de raison suffisante ; *etc.* Ensuite, au niveau inférieur et spécialisé de la technique mathématique interne, ces essences deviennent innombrables et elles s'organisent localement en nœuds problématisants ou conceptualisants. L'hypothèse métaphysique principale de cet *essai* part donc d'une constatation factuelle qui a été rejetée à tort par les épistémologies analytiques de l'époque maintenant révolue de l'absolutisme logique : en tant que donnée observable et omniprésente, on *admettra l'existence donnée et pensable* de telles essences mathématiques spéculatives, et on postulera qu'elles transcendent la plupart du temps les représentations langagières. À la manière des *Idées dialectiques* d'Albert Lautman, ces essences sont *dominatrices* pour l'organisation intelligible *saine* de la pensée mathématique, en tant qu'elles doivent organiser et diriger la production d'irréversible-synthétique. En effet :

> Un *maintien constant et omniprésent de la métaphysique dans les mathématiques* est nécessaire.

On se proposera alors d'*interroger* ces essences mathématiques spéculatives, de leur accorder pleine et entière parole *in situ*, et de les redéployer comme sur les milliers de feuillets virtuels que la pensée dépense en méditations, en tentatives, en projets, ou en esquisses. Immédiatement, il faut ajouter aussi que les conceptualisations mathématiques ne sont jamais tout à fait clarifiées ou tout à fait dominées, ni par des systèmes formels, ni par des architectures théoriques qui délimitent un certain nombre de résultats achevés. Comme sous l'effet d'un postulat décidé dans un *a priori* relatif qui se nourrit *a posteriori* de ce qui est connu, il faut en outre reconnaître et admettre l'existence d'espaces de pensée mathématique qui restent ouverts en eux-mêmes. Il faut même que ces espaces de pensée offrent un réservoir inépuisable de virtualités, également en ce qui concerne des sujets scientifiques réputés épuisés, y compris là où rien de révolutionnaire n'est à attendre. Seront donc mises entre parenthèses toutes les réticences que la technicisation achevée de la pensée ne cesse d'opposer à la métaphysique, et on ne dilapidera ici aucune énergie stérile à polémiquer contre l'anti-réalisme sophistique ou contre toute autre forme de philosophie qui se complaît à miner les tendances incontournables à la *saine* systématicité.

Accepter l'ouverture conceptuelle de l'espace. Dans cette partie, c'est de l'espace, et des mouvements locaux dont il est susceptible, qu'il va être largement question, et c'est en accompagnant une partie de la pensée de Lie que nous allons exprimer *in situ* certaines essences mathématiques spéculatives universelles, en coprésence et en omniprésence. Brièvement, *l'ouverture décidée de la pensée riemannienne* a déjà été analysée dans une référence précédente ([**320**]). Loin d'avoir seulement proposé, en la notion de *variété* [*Mannigfaltigkeit*], une abstraction de la notion de surface gaussienne, et d'avoir suggéré, en dimension quelconque, la notion de forme quadratique différentielle[1], Riemann a surtout fait ressortir, et c'était son talent majeur, le *caractère problématique et inachevé des conceptualisations mathématiques possibles*. Il semble qu'aucun commentateur de Riemann n'insiste suffisamment sur ce point qui se dégage pourtant très visiblement à la lecture de ses œuvres.

Riemann décide les ouvertures, accepte l'ignorance, et maintient intentionnellement le rapport de la pensée à des Inconnus désignés et métamorphosables. Rassembler des éléments incompris, accepter les questions irrésolues, savoir que l'on ne sait pas : telle est, en mathématiques, la règle de direction de l'esprit et cette règle s'apparente beaucoup plus à la volonté d'ignorance socratique qu'au principe cartésien de doute systématique. Plus encore, il s'agit dans la pensée riemannienne de désigner et d'accepter les mystères, sans pour autant se rallier à une théorie philosophique prédéfinie.

[1] Auparavant, Gauss avait extrait l'invariant unique appelé *courbure* pour les surfaces.

> On sait que la Géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être. [**371**], p. 280.

Ce paragraphe introductif extrait de l'*Habilitationsrede* de Riemann désigne donc des mystères : qu'est-ce qu'un espace ? qu'est-ce qu'une droite ? qu'est-ce qu'un triangle ? À l'époque de Riemann, ces questions n'étaient pas réellement soulevées par la tradition classique. Définitions nominales, représentations physiques et pratiques intuitives masquent en effet de telles questions. En énonçant des postulats structurés, l'axiomatisation transmise par les géomètres grecs *conscientise* ce qui semble premier dans les constructions afin d'*organiser hiérarchiquement* le déductif, et ceci représente bien entendu une révolution du spéculatif en tant que tel, mais toutefois, postuler au sens des Grecs, c'est aussi *admettre*, pointe Riemann, les données préalables *sans* les *interroger* pour elles-mêmes. La philosophie implicite de Riemann se situe donc à un niveau métaphysique supérieur à celui qui fait remonter aux premiers principes d'une science dont les éléments effectifs sont déjà développés. Ce niveau, c'est le *questionnement conceptuel* en lui-même. Et dans l'histoire philosophique des mathématiques, Riemann est à l'origine d'une véritable révolution, puisqu'il instaure l'acceptation du questionnement mathématique intense susceptible d'être maintenu ouvert pendant des décennies, voire des siècles.

En géométrie, immédiatement après avoir ouvert les questions de nature conceptuelle, Riemann *ose* aussi ouvrir le champ *encore inexistant* des relations possibles entre ces concepts potentiels qui sont *encore à créer*. Et malgré ses allures allusives, la troisième phrase est significative : d'emblée les liens *encore inexistants* entre des notions primitives « enveloppées de mystère » sont interrogeables avant même de naître : nécessité des liaisons ? absoluité ? extension ? possibilité ? aprioricité ? Comme cela a déjà été noté dans [**320**], la pensée mathématique de Riemann anticipe très largement l'émergence de l'axiomatique en mathématiques, qui devait s'émanciper ultérieurement avec Hilbert et Bourbaki. Et c'est dans cette ouverture intemporelle de la mathématique que Lie allait édifier une théorie nouvelle des groupes continus de transformations en développant une méthode de pensée que l'on peut qualifier d'universelle.

Masses-pensées intuitives de la mathématique. Concevoir, c'est penser, et cela, la plupart du temps, sans bénéficier ni de réflexes mécaniques, ni d'automatismes. Penser en concevant implique donc une certaine tension cérébrale qui mobilise alors ce que l'on pourra appeller avec Riemann, mais sans vouloir fixer de terminologie contraignante, des *masses-pensées intuitives.* Toutefois, le caractère proprement « *intuitif* » de ces masses-pensées est et ne peut être que problématique, parce qu'elles s'entrelacent au divers et au sensible d'une manière qui n'est comris que très partiellement, fût-il possible un jour de les approcher par une connaissance réflexive. Pour la neurophysiologie contemporaine qui est parfois tentée d'universaliser certaines thèses immanentistes voire réductionnistes en se basant sur des analyses de quelques actes très élémentaires chez les êtres animés, les intuitions de la pensée spéculative sont encore fort mystérieuses, si ce n'est hors d'atteinte, tant elles sont complexes. Heureusement, la très grande diversité des intuitions qu'ont les mathématiciens de leurs objets abstraits garantit une *hétéronomie salvatrice* des masses-pensées qu'ils mobilisent. En effet, l'intuition mathématique agissante est si riche qu'il est difficile, pour la philosophie, de l'analyser sans céder à la tentation de systématiser dogmatiquement ses conditions de possibilité en regard du monde, voire de fonder le rapport au monde sur un antiréalisme parfois franchement douteux, bien qu'il soit distrayant sur le plan de la controverse philosophique. Dans ses fragments philosophiques[2], Riemann a tenté d'exprimer quelques aspects de ces masses-pensés qui seraient comme des mobilisations continues, étendues et dérivantes dans le tissu individuel de la pensée et de la perception.

> Par chaque acte simple de pensée, quelque chose de durable et de substantiel entre dans notre esprit. Cette substance nous apparaît en fait comme une unité mais il s'avère (dans la mesure où elle est l'expression de l'étendue spatiale et temporelle) qu'elle comprend une variété subsumée ; j'appellerai cela une « masse-pensée » [*Geistesmasse*]. De ce fait, toute pensée est le développement de nouvelles masses-pensées. [**372**], p. 15.

Sans théoriser, Riemann constate, analyse, et effectue vraisemblablement comme une sorte d'introspection de son propre pouvoir de conceptualisation. On trouve même dans ses fragments une quasi-tentative de concevoir l'ontogénèse d'une pensée de savant.

> L'esprit est une masse-pensée compacte, multiplement connectée par des connexions internes des plus intimes. Il croît de manière continue au fur et à mesure que de nouvelles masses-pensées y entrent, et c'est de cette manière qu'il continue à se développer. [**372**], p. 15.

Or les masses-pensées hétéronomes sont tout particulièrement à l'œuvre quant il s'agit de géométrie, puisque l'intuition est constamment mobilisée pour former des représentations mentales, visuelles ou imaginées des objets étudiés. La différence entre l'intuition du géomètre et l'intuition de l'algébriste tient alors surtout à ce que le géomètre assortit constamment la

---

[2] — traduits en français dans [**372**] —

pensée formulée en langage analytique d'une exigence de visualisation indépendante. Il est alors relativement difficile d'inventer un langage écrit qui puisse signaler à tout instant, avec ou sans figures, les actes potentiels de visualisation mentale qui doivent naître dans l'intuition du lecteur et aussi le cas échéant, la féconder. Or dans l'œuvre de Lie, ces actes intuitifs qui sont innombrables sont aussi contrôlés par des genèses spéculatives remarquables, et il faudra tenter d'en exposer quelques aspects en se concentrant au moins sur quelques éléments de base de la théorie.

Écarter les problèmes de fondement. On ne dira rien, ici, de la représentabilité, au moins locale, des espaces à plusieurs dimensions par des systèmes de valeurs numériques, autrement dit, du fait essentiellement admis depuis Gauss et Riemann que les concepts de la géométrie se « fondent » principalement sur les concepts de la théorie numérique du continu. En effet, cette question philosophique entraînerait les analyses vers des débats certes délicats, mais qui en resteraient volontiers à un niveau mathématique trop élémentaire par rapport aux objectifs visés, la mathématique n'étant absolument pas, par nature, destinée à demeurer élémentaire. On se contentera de dire à ce sujet-là que la question est clairement désignée chez Riemann, bien avant que naisse la théorie dite *des ensembles*, théorie dont on croit souvent à tort qu'elle inscrit tous les concepts mathématiques existants de manière rigoureuse et définitive dans une architecture logico-axiomatique adéquate. D'un point de vue philosophique général, il serait plus exact de constater que les recherches passées ou actuelles en vue d'une fondation des mathématiques se développent d'une manière relativement indépendante de leurs objectifs principaux, et que ces recherches vivent ou ont vécu leur propre destin d'investigation spécialisée, sans que leurs résultats — forcément partiels, comme dans tous les autres domaines des mathématiques — aient une portée véritable quant le destin des mathématiques vivantes : les travaux de Galois, Serret, Jordan et Lie n'ont été, dans leurs principes et dans leurs résultats, soumis à aucune révision fondamtentale qui aurait été causée *a posteriori* par la « révolution » axiomatique.

En définitive, on reprendra comme une évidence transmise par la tradition les conclusions cavaillésiennes négatives ([**93**]) : échec aussi bien de l'école formaliste, que de la réduction logiciste et que de la proposition intuitionniste pour fonder les mathématiques. En définitive, *la recherche de fondations n'est pas fondamentale pour la recherche elle-même*.

Objectifs métaphysiques. Dans les mathématiques, des concepts élémentaires jusqu'au cœur même de leurs parties les plus techniques, sera qualifié de métaphysique tout élément constitutif qui a un caractère *ouvert*, *mystérieux*, *problématique*, *philosophique*, *spéculatif*, ou *dialectique*. Riemann enseigne à accepter certains types d'ouverture mathématiques ou questions mathématiques précises qui n'atteignent que très rarement des réponses complète ou définitive. Les problèmes métaphysiques classiques ne peuvent être considérés comme résolus parce qu'ils auraient été déclaré non-résolubles par des systèmes postérieurs à leur apparition. En mathématiques, l'inexistence d'un algorithme universel qui déciderait si n'importe quel système d'équations algébriques à coefficients rationnels incorporant un nombre quelconque de variables possède, ou ne possède pas de solution rationnelle — non-résolubilité mécanique du dixième problème de Hilbert, c'est un théorème, non une thèse philosophique — ne dispense nullement les arithméticiens et les géomètres algébristes de travailler à explorer certains systèmes diophantiens en petits degrés et en petites dimensions, avec de nombreuses possibilités de généralisations attenantes.

Il y a un réel danger sophistique à vouloir se convaincre que certaines questions n'ont pas de sens parce qu'elles ne sont pas résolubles en totalité. Au contraire, les théorèmes de type Gödel ou Matyiassevitch-Robinson doivent convaincre que les questions Riemann affirme que les questions non résolues doivent être maintenues *tant que leur destin d'exploration n'est pas achevé*. C'est une constatation que très peu de questions mathématiques sont complètement résolues. Riemann transmet cet acte de lucidité qui restera incontournable dans le développement des mathématiques.

Hilbert faisait part en 1900 de sa conviction que tout problème mathématique devrait être résoluble, que ce qoit par une réponse positive, ou par une démonstration qu'il n'existe pas

En quoi les mathématiques sont-elles toujours profondément imprégnées des tensions métaphysiques classiques ? Tout d'abord, méditation et spéculation s'inscrivent à l'intérieur même de la pensée mathématique vivante. L'inconnu y est omniprésent. Au sein de la recherche, doute, hésitation, retours en arrière, réussites partielles, échec sont omniprésents. Ensuite, les questions d'existence d'objets mathématiques sont clairement enracinées dans les dialectiques philosophiques sur l'existence. L'existence, ce peut être l'un, mais aussi le multiple. Chaque fois qu'un théorème mathématique parvient à établir qu'un certain type d'objet non identiquement nul existe — un feuilletage sans singularités sur une variété complexe compacte — il ferme au moins partiellement une indécision initiale riche de tous les raisonnements abstraits de la philosophie sur l'être et le non-être. En définitive, la pensée que la philosophie a développée est essentiellement incorporée dans les mathématiques, elle en constitue une strate nécessaire et relativement liminaire dans ses développements techniques.

L'ouverture chez Lie. L'un des principaux objectifs est d'accéder à des régions de la pensée mathématiques où l'« *ouverture* » devient visible. Chez Lie, on trouve constamment une double circulation entre le particulier et le général. La dimension quelconque, les groupes continus à un nombre arbitraire de paramètres, les transformations infinitésimales quelconques sont en relation directe avec les calculs et classifications en petites dimensions 1, 2 et 3, et la théorie générale met en place le maximum de résultats généraux qui pourraient être aussi utilisés pour attaquer les dimensions supérieures 4, 5 et autres, comme le firent quelques élèves — Gerhard Kowalewsky, notamment — de Lie vers la fin de sa carrière à Leipzig.

It is unlikely that one becomes close to be in the position of determining all finite continuous transformation groups ; indeed, it is even uncertain whether this will ever succeed. Therefore, instead of the general problem to determine *all* finite continuous groups, one would do well to tackle at first more special problems which concern the determination of certain categories of finite continuous groups. Namely, more special problems of this kind are the following three :

> It is unlikely that one becomes close to be in the position of determining all finite continuous transformation groups ; indeed, it is even uncertain whether this will ever succeed. Therefore, instead of the general problem to determine *all* finite continuous groups, one would do well to tackle at first more special problems which concern the determination of certain categories of finite continuous groups. Namely, more special problems of this kind are the following three :
>
> Firstly : the determination of all r-term groups in n variables.
>
> Secondly : the determination of all r-term groups in general.
>
> Thirdly : the determination of all finite continuous groups in n variables.
>
> [**322**], Ch. 28.

Équations de transformations

Principe galoisien d'ambiguïté dans la donation. L'objet archétypal de la théorie de Lie est constitué de ce qu'on appelle des *équations de transformations*. En tout premier lieu, ces équations ne sont autres que des changements de coordonnées locales sur un espace à n dimensions. Autrement dit, à une collection de points dont chacun est repéré par n coordonnées réelles ou complexes[1] $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on fait correspondre de manière bijective une autre collection de points dont les coordonnées seront notées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

Cet objet transformationnel quelconque :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x'_1, \dots, x'_n)$$

n'est pas seulement considéré par Lie comme une *application* qui associe un et un seul élément à tout élément du domaine source, au sens, par exemple, où la théorie des ensembles (postérieure) thématise cette notion. Plus profondément, Lie érige une *théorie de la résolution des ambiguïtés*[2] *consubstantielles à toute donation initiale*, sans s'attarder à explorer pour elle-même la notion de correspondance dans les replis austères et ensemblistes de l'abstraction structuraliste. Aussi Lie procède-t-il fondamentalement comme Galois : aux permutations discrètes d'un nombre fini de racines, il substitue en effet les difféomorphismes continus locaux d'un nombre infini de points situés dans des espaces à plusieurs dimensions.

---

[1] Ce sont les deux corps valués les plus immédiatement signifiants d'un point de vue géométrique, et Lie travaille toujours implicitement d'abord 'en complexe', et il précise alors ensuite toujours explicitement que l'étude des groupes de transformations réels exige des considérations supplémentaires. Dans les espaces p-adiques complexes, pour pouvoir parler d'une géométrie signifiante, la propriété topologiquement exotique d'ultramétricité que possède le corps $\mathbb{C}_p$ des nombres complexes p-adiques oblige, d'après John Tate, à introduire une notion restreinte d'analyticité *via* un faisceau à la Grothendieck construit seulement sur certains ouverts « *admissibles* » qui sont des domaines de Laurent prédéfinis suffisamment étendus et suffisamment nombreux pour constituer ce qu'on appelle la « *géométrie p-adique rigide* » ([**396**]).

[2] Expression inspirée de Gilles Châtelet, titre d'un texte de Pierre Cartier ([**90**]).

Galois prenait comme levier métaphysique fondamental la constatation — incontournable — que les racines d'un polynôme général à coefficients rationnels :

$$a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n = 0$$
$$(z \in \mathbb{C},\ a_i \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0),$$

n'ont *a priori* aucune individualité propre et doivent par là-même être considérées comme indiscernables. D'après le théorème fondamental de l'algèbre (D'Alembert, Argand, Gauss), il existe dans $\mathbb{C}$ exactement n racines complexes à toute équation de degré n de cette sorte, comptées avec multiplicité, mais ans calcul numérique, sans principe de localisation géométrique, il n'y a *a priori* aucun moyen *fini* et algébrique de distinguer et d'individualiser ces racines, et par conséquent, le *groupe d'ambiguïté* de la dénomination possible des racines s'identifie au groupe maximal possible $\mathrm{Perm}\{1, 2, \dots, n\}$ de *toutes* les permutations d'un ensemble à n éléments. Par ailleurs, les coefficients a_i sont des constantes qui doivent en fait être pensées comme susceptibles de varier, car on attend de toute question générale telle que la résolubilité par radicaux systématisée par Lagrange dans les cas connus, que la ou les réponses qui lui correspondront s'appliqueront dans tous les cas de figures, c'est-à-dire en considérant que les a_i sont de vraies variables, *cf.* les formules de Cardan et de Ferrari dans lesquelles aucun ordre n'existe entre les racines. Il faut, commence Galois, destituer le moment apparemment anodin d'indexation 'des[3]' racines au moyen de lettres individualisantes $z_1, z_2, \dots, z_n$, tel est le point de départ. Ainsi, le fait que les n racines comptées avec multiplicités d'une équation algébrique de degré n générale ne puissent être individuées sans hypothèse supplémentaire illustre un principe général de la métaphysique des mathématiques :

l'ambiguïté et l'indécision sont consubstantielles à toute donation initiale,

et ce, parce que les donations initiales sont toujours *chargées d'inconnaissance*, et aussi parce que la généralité qu'elles embrassent en reste parfois longtemps au niveau de concepts préliminaires et purement potentiels[4].

[3] — l'article défini ici pourrait faire croire à tort que la distinction est légitime —

[4] Pour illustrer sous un autre angle cette dernière affirmation importante, on extrairera brièvement du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* ([**146**] ; *voir* [**321**] pour la traduction anglaise) l'exemple suivant où Engel et Lie annoncent que la connaissance du théorème fondamental d'après lequel les transformations infinitésimales d'un groupe continu fini de transformations sont *fermées* par crochet (*cf. infra*) n'est qu'un moment de connaissance partiel et au fond relativement insuffisant pour réaliser réellement les théorèmes de classification qui seront entrepris seulement dans le Vol. III. « *In Chap. 9, we have reduced the finding of all r-term groups to the determination of all systems of r independent*

Pour des raisons proprement *métaphysiques*[5], Galois affirmait ainsi que c'est la notion de *permutation* des racines, en tant que telle et envisagée abstraitement pour elle-même, qui est sous-jacente au problème de la résolution par radicaux des équations algébriques complexes, et plus généralement, à tout autre problème concernant les équations algébriques. Sans entrer ici plus avant dans la théorie, on se contentera d'observer — du point de vue de la philosophie générale des mathématiques — que l'adéquation même d'une étude à son objet exige fréquemment la révélation *imprévisible* de concepts qui sont inévidents ou invisibles au premier abord.

En conclusion de ces considérations générales rapportées brièvement à l'incipit de Galois, le respect de l'in-connaissance est rigoureusement nécessaire, et la saine in-connaissance mathématique sait dorénavant d'elle-même qu'elle pourra être *métaphysiquement* productrice de réalité mathématique déterminée.

Équations de transformation, groupe continu d'ambiguïté. À Galois, Lie emprunte alors un tel levier métaphysique, et il cherche à transférer tous les concepts que Cauchy, Serret, Jordan et d'autres ont su développer dans le cas des groupes finis, aux groupes continus de transformations. L'une des motivations initiales principales de Lie était d'élaborer des procédés généraux destinés à résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires d'ordre n quelconque :

$$a_0(x)\,y^{(n)}(x) + a_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,y'(x) + a_n(x)\,y(x) = 0,$$

lesquelles sont formellement et structurellement fort analogues aux équations algébriques. Par conséquent, il faut étudier en eux-mêmes les difféomorphismes :

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

que Lie suppose essentiellement locaux et qui sont, métaphysiquement parlant, les *analogues exacts* des permutations d'un ensemble fini de racines.

infinitesimal transformations $X_1f, \dots, X_rf$ which satisfy relations of the form :

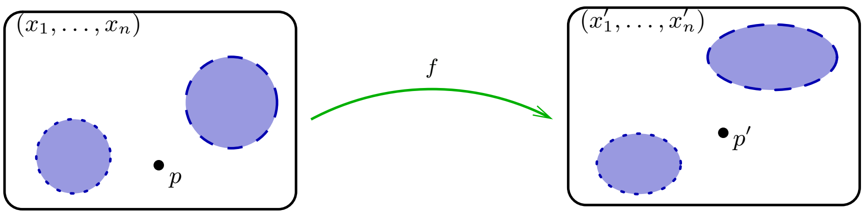
$$X_iX_kf - X_kX_if = [X_i,\, X_k] = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, X_sf,$$

with certain constants c_{iks}. Only later will we find means of treating this reduced problem ; temporarily, we must restrict ourselves to admitting systems $X_1f, \dots, X_rf$ of the concerned nature and to study their properties. Ici, l'in-connaissance temporaire est désignée dans la temporalité propre et locale d'une généralité légèrement aveugle qui annonce, entre parenthèses, certaines connaissances adéquates qu'elle se découvrira ultérieurement. Dans le destin ramifié de l'irréversible-synthétique, l'existence nécessaire de la « *mise en suspens spéculatif* » atteste le temps propre de la pensée.

[5] Une certaine « métaphysique non-calculatoire plane sur tous les calculs », s'exclamait Galois.

Au théorème qui constituait l'objectif principal de Galois, à savoir le résultat d'après lequel une équation algébrique est résoluble si et seulement si son groupe *discret* de Galois est *résoluble*, *i.e.* se décompose en une certaine suite de sous-groupes emboîtés les uns dans les autres dont les quotients successifs sont *tous* cycliques, Lie est parvenu assez rapidement à faire correspondre le théorème d'après lequel une telle équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre n est intégrable par un nombre fini de *quadratures* — primitives successives en partant des $a_i(x)$ — si et seulement si le groupe *continu* de symétries de Lie de l'équation en question se décompose en une certaine suite de sous-groupes emboîtés les uns dans les autres dont les quotients successifs sont *tous* de dimension 1. Mais à la différence de Galois et parce qu'il a bénéficié d'une prise de connaissance synoptique de résultats ultérieurs exposés par Serret et Jordan dans leurs traités, Lie a d'emblée et irréversiblement dirigé sa recherche mathématique vers l'étude *abstraite* des groupes continus de transformations, en argumentant philosophiquement de la nécessité de s'élever vers le problème le plus général possible, avant d'examiner comment des hypothèses supplémentaires liées à des problèmes géométriques spécifiques ou à des applications algébriques en petites dimensions vont impliquer des adaptations essentiellement mineures de la théorie générale : saine exigence mathématique, saine volonté de systématicité, saine décision d'orientation dans la pensée.

Ainsi faut-il commencer par penser et méditer ce qu'est un difféomorphisme permutant un continuum de points dans un espace dont la dimension n est arbitraire, à une époque relativement ancienne de la géométrie différentielle locale.



Représentation schématique d'un difféomorphisme local

Des zones entières de l'espace aux bords non définis, ou bien des régions virtuellement découpées par la pensée, sont déplacées différentiablement dans leur ensemble, subissant expansions, contractions, détentes, compressions, et rotations en tous endroits, aussi bien à un niveau local qu'au plan infinitésimal. On notera en passant que la conception d'une telle mobilité géométrique n'est en rien évidente, car elle ouvre sur des intuitions physiques vagues ou contradictoires, sans parvenir à visionner aisément la différentiabilité des lieux dans leu ensemble.

Plus généralement, motivé par les équations élémentaires qui représentent le mouvement des corps dans l'espace tridimensionnel euclidien, Lie considère des familles de difféomorphismes locaux :

$$\boxed{x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r) \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}}$$

qui sont paramétrés par un nombre fini r de paramètres $(a_1, \dots, a_r)$ réels ou complexes, les « constantes du mouvement », pourrait-on dire, et ce, en dimension $n \geqslant 1$ quelconque et avec un nombre arbitraire $r \geqslant 1$ de degrés de liberté : grande généralité de la théorie. Mais avant même de commencer à formuler les axiomes de groupe, Lie entreprend d'analyser abstraitement et pour elles-même de telles équations de transformations, sans aucune référence à la notion de mouvement.

Trois principes de pensée qui gouvernent la théorie de Lie. Il est alors important, afin de contrecarrer d'emblée un procès inexact qui est trop régulièrement intenté à Lie, de signaler brièvement quelles sont les hypothèses générales de travail que sa théorie admet une fois pour toutes (*cf.* [**320**]).

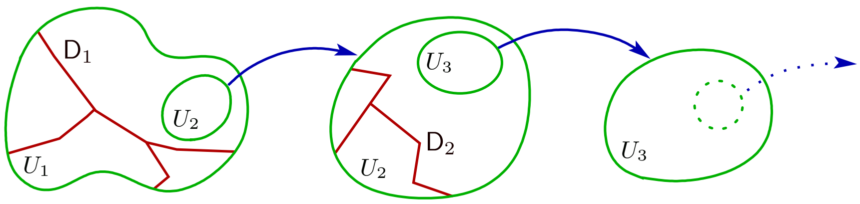
Hypothèse générale d'analyticité : Courbes, surfaces, variétés, groupes, sous-groupes, coefficients de transformations infinitésimales, *etc.*, tous les objets mathématiques de la théorie sont supposés *analytiques*[6] (réels ou complexes).

Principe de libre relocalisation générique : Si un objet mathématique donné est représenté par des fonctions analytiques dans un certain domaine U_1, toutes les fois que cela est nécessaire, on s'autorise à *relocaliser* les considérations à un *sous-domaine* $U_2 \subset U_1 \backslash \mathsf{D}_1$, où D_1 est un certain ensemble « indésirable »[7], et ceci, autant de fois que nécessaire. Le diagramme suivant a pour objectif de transmettre l'idée intuitive que des ouverts de taille décroissante sont pas à pas sélectionnés en dehors de lieux singuliers qui sont « gênants » pour les raisonnements génériques.

---

[6] Cette hypothèse fut justifiée par Lie en quelque sorte *a posteriori* pour sa théorie des groupes continus, dans les cas le plus fréquent où l'action sur l'espace est *transitive*. En effet, d'après l'un de ses théorèmes, on peut toujours, en partant de transformations transitives $x' = f(x;\, a)$ qui sont $\mathscr{C}^1$ par rapport aux a_j et $\mathscr{C}^2$ par rapport aux x_i, changer simultanément de coordonnées et de paramètres de manière à rendre *analytiques* les transformations. Ce résultat fut généralisé, dans les années 1950, par Gleason et Montgomery-Zippin, dans le cas plus délicats où l'on suppose seulement que l'action transitive est continue, en réponse à un problème que Hilbert connaissait de la théorie de Lie et que Lie lui-même avait formulé. La causalité motrice de la production de vérités mathématiques fonctionne en partie par recherche en extension d'affaiblissement d'hypothèses.

[7] Le plus souvent, D_1 est un ensemble analytique complexe défini comme lieu d'annulation de certaines quantités fonctionnelles attachées à la situation géométrique étudiée.



Représentation schématique du principe de relocalisation

Principe de non dénomination du lieu. Il est plausible que Lie réalisa rapidement qu'il était essentiellement inutile de préciser et de dénoter par une notation spécifique les ouverts impliqués dans les raisonnement, afin d'être plus bref et efficace pour les théorèmes de classification. Aussi les lieux sont-ils non nommés et essentiellement locaux[8].

Grâce à tous ces principes, il est alors possible d'interpréter rigoureusement tous les travaux de Lie dans un sens purement local sans qu'aucune incorrection ne puisse être vue.

Question préliminaire de dépendance paramétrique effective. Alors avec ces données, la toute première question à poser est la suivante : les difféomorphismes considérés :

$$x_i' = f_i\big(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r\big)$$

dépendent-ils réellement de *tous* les paramètres ? La présence écrite des lettres $a_1, \dots, a_r$ pourrait très bien être tout à fait fictive, et donc les fonctions analytiques f_i pourraient très bien ne dépendre d'aucun paramètre. C'est tout le paradoxe d'une notation très générale : héberger absolument toutes les potentialités sans être réellement en mesure de spécifier les propriétés fondamentales attendues.

Mais par ailleurs aussi, la désignation '$x' = f(x;\, a)$' d'apparence si simple et si accessible à l'intuition langagière, constitue une abstraction tout à fait *dérangeante* pour qui exige de conceptualiser en acte l'idée de mouvement. En rien de tels symboles ne peuvent-ils approcher d'une quelconque manière toute la complexité du mouvement des corps dans l'espace. Il est en effet clairement impossible, dans cette écriture extrêmement schématique '$x' = f(x;\, a)$', de retrouver les intuitions de fluidité, de mobilité ou de dynamicité. Plus encore : toutes les masses-pensées collatérales qui répondraient véritablement au devoir gaussien de conscientiser les significations mathématiques sont totalement absentes de cette courte chaîne de caractères

[8] Un certain nombre de résultats de Lie sont d'ordre semi-local, avec précision explicite des ouverts d'existence, notamment dans les chapitres 3 et 9 de [**146**], tandis que d'autres résultats sont réellement de nature globale, notamment la classification des sous-groupes infinitésimaux des groupes projectifs de dimensions 1, 2 et 3 qui est exécutée dans le Volume III [**148**].

'$x' = f(x;\, a)$'. On laissera donc provisoirement de côté pour quelques instants la question soulevée sur la présence réelle des paramètres pour spéculer sur l'*in*évidence troublante de cette écriture :

$$x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r), \quad \ldots\ldots, \quad x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r),$$

fût-elle déployée avec des points de suspension.

Le mouvement des continua et la mobilité fluide. La théorie de Lie s'inscrit dans une perspective tout aussi « métaphysique » que les travaux de Riemann sur les fondements de la géométrie différentielles, au sens aristotélicien du terme où la métaphysique est la science théorétique des premiers principes. En cherchant à traduire dans le monde continu la théorie des groupes finis de substitutions, Lie est parvenu à élaborer une *pensée mathématisée des mouvements possibles d'un espace abstrait en lui-même*, une pensée spatiale beaucoup plus riche et plus complexe que celle des trajectoires galiléennes ponctuelles, ou que celle des mobiles-test soumis à un champ gravitationnel ou électromagnétique, puisque les paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$ du mouvement sont multiples et sont inscrits *en synthèse* dans l'entité close et autonome qu'est la structure de groupe.

Soient le spectacle des nuages, de l'eau d'un torrent en crue, ou de l'éruption d'un magma en fusion. Comment saisir par la pensée cette fluidité en tout lieu des atomes qui sont emportés dans leur ensemble ? On ne doit pas oublier qu'au-delà des surfaces, dans la profondeur des matières fluides et sous des écorces virtuelles successives, se joue une tridimensionnalité des mobilités qui est quasiment invisible, à cause, notamment, de la planarisation projectivisante du champ visuel. Quelques instants de méditation *en tension* suffisent alors pour se convaincre qu'il y a effectivement une difficulté réelle à se rendre présente une représentation unitaire et conceptualisée du mouvement des corps physiques, et plus encore, un mouvement *abstrait et multi-paramétré* dans un espace à un nombre arbitraire de dimensions.

Aussi, antérieurement à tout développement mathématique, on doit se poser la question : « qu'est-ce qu'un mouvement au cours duquel *tous les points d'un continuum*, voire tous les quanta infimes d'un *discretinuum innombrable*, bougent *en même temps* par l'effet d'une mobilisation commune ? » Mais très rapidement, on se rend compte que le transfert *en totalité* '$x' = f(x;\, a)$' de tels points géométriques ou quanta phyiques est essentiellement *in*intuitionnable[9] ; en effet, les points, infinis en nombre, vivent

[9] En vérité, l'écriture '$x' = f(x;\, a)$' signifie beaucoup plus qu'une transformation ponctuelle individuelle de type $x' = f(x)$ après fixation des paramètres $a_1, \ldots, a_r$, puisque cette écriture désigne la totalisation de tous les mouvements communs possibles des x dans leur ensemble, lorsque $a_1, \ldots, a_r$ sont admis à varier sans aucune restriction. Pour intégrer mentalement ce concept grâce à un effort de pensée, il faudrait alors se représenter — ce qui n'est pas aisé — une sorte de brassage continu des points de l'espace dans plusieurs

en situation réciproque, et donc les déchirements, les enroulements, les torsions, les hypersurfaces de discontinuités, les lieux fractals de singularités, et d'autres possibilités physico-géométriques, sont toutes éventuellement comprises dans les transformations que les équations abstraites '$x' = f(x;\, a)$' symbolisent d'une manière exagérément rudimentaire, sans donc que l'on voie s'exprimer de telles possibilités dans ces équations innocentes, car le voir de la pensée formalisante actualise, focalise et limite.

Dépasser la monade subjectivo-centrée. On remarquera à nouveau qu'il est bien plus commode pour la pensée, uni-polarisée et subjectivo-centrée, de se représenter une *monade mobile* se déplaçant sur une trajectoire, que de se représenter, par exemple, le mouvement d'une myriade d'insectes, *en totalité et en simultanéité*. À vrai dire, au-delà du champ perceptif propre, presque rien dans les capacités sensibles et cognitives des êtres vivants n'est finalisé pour une appréhension *globale et parallélisée* des multiplicités spatio-temporelles. Et d'ailleurs, de manière assez analogue, la compréhension humaine limitée des concepts algébriques est très handicapée par l'incapacité biologique à appréhender les calculs d'un seul tenant sans les avoir au préalable *parcourus en successivité*.

Mais pour en revenir aux équations '$x' = f(x;\, a)$' dont le caractère trop rudimentaire pose problème, on peut d'ores et déjà signaler que Lie avait vraisemblablement construit de précieuses *représentations mentales dirigées* qui lui permettaient d'embrasser de manière riche et contentuelle cette conceptualisation abstraite '$x' = f(x;\, a)$' qu'il proposait, et ce, vraisemblablement à un niveau largement supérieur à ce qu'on pourra jamais en mesure d'intuitionner à nouveau en se replaçant dans ses écrits, puisque ces écrits sont seulement constitués de textes mathématiques formels, sans *aucune* publication à caractère didactique ou philosophique. Sans grand engagement exégétique, on peut en tout cas affirmer que Lie avait constamment à l'esprit les équations concrètes des groupes de transformations classiques : le groupe projectif [10], le groupe affine [11], *etc.*, et que la *présence continûment*

directions en chaque endroit, les déplacements étant causés par les r paramètres *via* une dépendance fonctionnelle quelconque. Il faudrait donc synthétiser *en pensée* les quatre arbitrarités impliquées : **1)** nombre de variables ; **2)** nombre de paramètres ; **3)** domaines d'existence ; **4)** constitution des dépendances fonctionnelles ; et cela n'est absolument pas évident.

[10] En dimension $n \geqslant 1$, les équations de transformations du groupe projectif sont :

$$x_i' = \frac{a_{1i}\, x_1 + \cdots + a_{ni}\, x_n + a_{n+1,i}}{a_{1,n+1}\, x_1 + \cdots + a_{n,n+1}\, x_n + a_{n+1,n+1}} \qquad (i = 1 \cdots n),$$

où les a_{ki} forment une matrice $(n+1) \times (n+1)$ de déterminant égal à 1.

[11] Les équations de ce groupe sont : $x_i' = b_{1i}\, x_1 + \cdots + b_{ni}\, x_n + b_{n+1,i}$.

mentalisée d'exemples caractéristiques dirige, souvent pour son plus grand bien, la pensée mathématique la plus abstraite.

Ainsi Lie a-t-il dû chercher à disposer d'un *acte de pensée synthétique* et *abstrait* qui permette d'*embrasser* le déplacement de *tous* les points d'un continuum qui se meuvent *en même temps*.

Et avant même de s'intéresser à la successivité temporelle, il faut d'abord concevoir ce que devient chacun des éléments du continuum au bout d'un temps fini fixé, autrement dit, il faut déclarer être capable, par la pensée, de saisir la position de chaque point après écoulement d'un certain laps de temps. C'est le concept de correspondance fonctionnelle qui entre en scène, non pas seulement au sens de l'Analyse à une variable réelle ou complexe, mais surtout au sens d'une *correspondance infinie* entre *espaces de points infinis* à plusieurs dimensions[12].

Abstraction des correspondances fonctionnelles. Or la théorie classique des fonctions fournit déjà une idée adéquate de correspondance, envisagée dans toute sa complexité. Par l'action d'une fonction f, tout point x d'un domaine de variabilité réelle ou complexe est transféré en un autre point réel $f(x)$, situé dans un espace auxiliaire de même nature. L'écriture qui a été transmise par le siècle des Lumières :

$$y = f(x)$$

symbolise alors très (trop) brièvement cette totalisation des transferts. En vérité, aucune formalisation ne parvient à (ou même ne cherche à) dénoter la « *dynamique de variabilisation* » qui accompagne le 'x' quelconque d'un domaine. Des actes collatéraux de la pensée intuitive sont alors indispensables pour créer en parallèle une saisie *démultipliante*. Déclarer des variables dans un langage formel quelconque ne dispense jamais l'intuition mathématicienne de chercher à se « rattraper aux branches », bien au contraire. Et l'intuition mathématique créatrice doit en permanence formuler ses questions propres qui sont absentes du texte lu. Ici par exemple, de telles questions pourraient porter sur la nature de la variable 'x', sur l'extension de son domaine de variation, ou sur la production d'une schématisation satisfaisante de la correspondance $x \mapsto f(x)$.

Sans en discuter métaphysiquement, on admettra donc comme convenu plus haut que la spatialité s'inscrit dans un cadre fondationnel numérisé. Ainsi, un espace géométrique quelconque à n dimensions sera-t-il envisagé, au moins localement, comme collection de n coordonnées cartésiennes

[12] Restrictions nécessaires de ces analyses : on admettra qu'il est impossible de remobiliser ici tous les aspects métaphysiques impliqués ; aussi considérera-t-on comme non soumis à la discussion spéculative certains de ces aspects-là qui sont bien étudiés dans d'autres sources, notamment : **1)** la numérisabilité du continu ; **2)** le calcul infinitésimal ; **3)** les hypothèses de régularité.

$(x_1, \dots, x_n)$ qui sont des nombres réels ou complexes. Qu'est-ce qu'une correspondance entre espaces à n dimensions ? La généralisation immédiate, à partir du symbole de fonction $y = f(x)$, de la symbolisation :

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

sera *algébriquement générative*, à défaut d'être *intuitivement complète*.

Les symboles sont imprégnés d'ignorance. Comme cela a déjà été amplement signalé, *l'incomplétude informative gît au cœur même de la généralité notationnelle*, et c'est surtout en géométrie que cette incomplétude se fait le plus cruellement sentir. À tout le moins, il semble nécessaire de faire droit à des *actes d'intuition rudimentaire*[13], et ces actes *s'expriment de manière transitoire et imparfaite dans le flux de transmission des connaissances mathématiques*. Aussi doit-on d'emblée accepter, et ce tout particulièrement en géométrie, que :

$\boxed{\textit{Les symboles mathématiques restent imprégnés d'ignorance et d'imperfection}}$.

Les concepts mathématiques s'expriment donc toujours un peu à l'aveugle et dans l'ombre, tandis que les éclaircissements et les rétablissements de visions sont généralement le fruit d'un travail intuitif long et coûteux. Les contrôles permanents de rigueur : « *Est-ce vrai* ? » « *Quelles sont les hypothèses exactes* ? » « *Cet énoncé ne rentre-t-il pas en contradiction avec un résultat connu* ? », toutes ces questions spécifiques assurent à leur insu une *prise progressive de pouvoir sur l'inconnu, qui est de type « conquête intuitive »*. Un tel mode de relation à l'esprit : « *provocation spontanée d'interrogations* », est fondamental dans l'accès aux mathématiques. L'intuition se questionne en chaque être qui cherche à appréhender.

De plus, on doit aussi conserver une trace mémorielle des questions qui ont été écartées ou mises entre parenthèses. Et même après avoir appris les résultats les plus élaborés de la géométrie différentielle ou de la topologie des variétés riemanniennes, la structuration interrogative fondamentale de l'intuition doit rester la même. On terminera ces considérations spéculatives générales par une remarque sur l'antinomie mathématique entre le discret et le continu ; en effet, les questions d'ontologie et de signification se posent à tous les instants.

Le *paradoxe de la discrétisation du continu* accompagnera toute la discussion des travaux de Lie. Parce que l'approfondissement des concepts de la géométrie des groupes révèle que leur étude mathématique relève *in fine* de l'algèbre différentielle et du calcul pur, il se trouve que *la pensée du continu*

[13] — non codifiés, mais intersubjectifs dans leurs grandes lignes —

en est réduite à être discrétisante, et donc exposée indéfiniment aux insuffisances qu'elle se découvre[14]. Autrement dit, par l'effet d'une limitation propre à la structuration de l'entendement, *la conceptualisation du continu géométrique est contrainte de le discrétiser en l'algébrisant.*

Essentialisation des paramètres. Maintenant, il faut reprendre question — inaugurale en théorie de Lie — soulevée brièvement un peu plus haut : « *Comment voir si les paramètres sont tous réellement présents dans les équations de transformations*[15] ? ». Dans l'écriture symbolique :

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r) \qquad {\scriptstyle (i\,=\,1\,\dots\,n)},$$

les paramètres sont placés après les variables. Cette écriture signifie que le point transformé $x' = (x_1', \dots, x_n')$ d'un point quelconque x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dépend non seulement du point lui-même, mais aussi de la valeur des paramètres $(a_1, \dots, a_r)$ qui offrent un nombre r arbitraire de degrés de liberté au mouvement possible. Afin de déterminer si ces paramètres sont véritablement présents, la meilleure manière de procéder est alors de découpler les variables géométriques principales $(x_1, \dots, x_n)$ de ces quantités auxiliaires $(a_1, \dots, a_r)$. Puisque toutes les fonctions f_i considérées sont supposées analytiques, il suffit à cet effet de les développer en série entière par rapport à x au voisinage de l'origine $x_0 = 0$[16] :

$$f_i(x;\, a) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \mathscr{F}_\alpha^i(a_1, \dots, a_r) \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \tag{12.29}$$

comme on le ferait d'une fonction $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_k\, z^k$ d'une variable complexe z qui est holomorphe au voisinage de l'origine $z_0 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Immédiatement, on voit apparaître une *famille infinie* de coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ qui sont tous des fonctions *analytiques* des paramètres $a_1, \dots, a_r$. On se trouve donc ici en présence d'un *schéma de réalisation* au sens lautmanien du terme : une question initiale, et si « archaïque » qu'elle n'est peut-être

[14] Dans les années 1980–2000, de nombreuses discussions philosophiques ont été conduite en relations avec le problème de Cantor sur la cardinalité du continu.

[15] Les 170 premières pages de la *Theorie der Transformationsgruppen* sont consacrées à une présentation très technique, élaborée et générale de la théorie de base dont le haut niveau de généralité fait obstacle à la compréhension. Les tous premiers paragraphes consacrés à l'essentialisation des paramètres exigent mordernisation et réécriture (*voir* [**320, 322**]). Ici, on analysera le problème et les sous-questions qui en découlent en se contentant de présenter les énoncés qui y répondent, mais sans chercher à reconstituer et à développer les arguments rigoureux de démonstration.

[16] Sans perte de généralité, on peut bien sûr supposer, quitte à effectuer une translation préalable, que l'origine appartient au domaine commun des fonctions f_i.

même pas exclusivement d'ordre philosophique ou mathématique, devient cause et créatrice de réalité mathématique.

Décider si tous les paramètres apparaissent, c'est est effet une question qui est si fondamentalement enracinée dans la dialectique physico-biologique de l'absence et de la présence qu'on doit l'envisager comme rattachée à la métaphysique archaïque de la question de l'être et du non-être. Au tout premier moment d'une donation quelconque se pose en effet la question de la vérification et de l'attestation, ou encore de la confirmation de la donation, et cette question-là est proprement archaïque, puisqu'elle régente tous les rapports des êtres animés au monde inanimé. Ainsi a-t-on immédiatement affaire à une *métamorphose irréversible de l'individuation effective* par laquelle l'objet générique « symbolisé » :

$$x_i' = f_i\big(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r\big) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

va être soumis à examen et à exploration, afin de subir des différenciations spécifiantes. On pourrait dire que la généralité imprécise, qui est l'ambiguïté même, éclate en précisions imprévisibles : *effectivité déraisonnable des mathématiques dans l'exporation conceptuelle*.

Mais lorsqu'on développe ainsi toutes les fonctions $f_i(x;\, a)$ en série entière, il ne demeure plus rien de l'intuition géométrique initiale d'après laquelle les points sont et doivent être mus par l'effet d'une variation paramétrique. L'acte de développer en série entière relève purement de l'Analyse[17], c'est-à-dire d'une pensée *non* géométrique. En effet, il semble presque totalement impossible[18] de saisir ce que représente sur le plan géométrique la capture de ces coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$. D'un seul coup :

---

[17] Le spectre d'une déclaration ontologique restrictive de type lagrangien — le fonctionnel pur s'identifie à de l'analytique grâce aux séries entière convergentes — ressurgit ici et pose en principe un problème d'extension en généralité, puisque l'on sait depuis plus d'un siècle que l'ontologie fonctionnelle va bien au-delà de l'algébrique et de l'analytique, et qu'elle comprend les classes de différentiabilité lisse $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$, les classes de Hölder $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, les espaces de Hilbert, de Sobolev, de Hardy, de Besov, *etc.*

[18] À vrai dire, l'examen d'équations de transformations simples telles que celles du groupe affine pour lesquelles le développement (12.29) p. 516 ne contient qu'un très petit nombre de termes montrerait que l'on peut donner, y compris dans le cas général, un sens infinitésimal clair aux premiers coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ avec $|\alpha| \leqslant 1$, où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. En effet, l'approximation :

$$x_i' \simeq \mathscr{F}_{0\cdots 0}^i(a) + \mathscr{F}_{1\cdots 0}^i(a)\, x_1 + \cdots + \mathscr{F}_{0\cdots 1}^i(a)\, x_n + \mathrm{O}(2)$$

à l'ordre 1 des premiers termes constitue une transformation affine $x_i' = u_i + v_{i1}\, x_1 + \cdots + v_{ni}\, x_n$ dont les coefficients sont remplacés par des fonctions (essentiellement arbitraires) de a. C'est Helmholtz qui a effectué, en commettant des erreurs mathématiques, une telle approximation à l'ordre 1, et c'est Lie qui en a fait l'un de ses outils principaux pour classifier les groupes de transformations. Spéculativement et à un niveau plus profond, on pourrait vouloir concevoir la signification géométrique des termes d'ordre supérieur $\mathscr{F}_i^\alpha$

le fonctionnel dépasse la capacité de conception de la pensée géométrique, et cette hétéronomie ubiquitaire en mathématiques se manifeste régulièrement comme un *abandon implicitement admis dans l'intersubjectivité* de l'exigence (presque impossible à satisfaire) de géométrisation complète par la pensée. Aussi dans le déploiement $f(x; a) = \sum_\alpha \mathscr{F}_\alpha x^\alpha$, une autre espèce d'infini, à savoir une collection infinie d'élément fonctionnels, s'immisce-t-elle dans l'infiniment petit de l'étendue continue, et subrepticement, commence à effacer en partie les significations géométriques qui ne parviendront rapidement plus à suivre les calculs.

En mathématiques, c'est la recherche de conditions nécessaires et suffisantes que Riemann plaçait explicitement au cœur de la production d'irréversible-synthétique[19]. Ici, une telle recherche de conditions nécessaires et suffisantes revient à élaborer des critères simples ou approfondis afin de pouvoir tester et déterminer si (et quand) tous les paramètres sont essentiels[20]. .

---

pour $|\alpha| \geqslant 2$, mais l'objectif délicat. Aussi renonce-t-on à tenter de suivre en pensée la signification géométrique des opérations de l'Analyse, et ce renoncement est très fréquent et fort admis en mathématiques.

[19] On rappellera l'exemple le plus simple, à savoir le théorème élémentaire de Riemann d'après lequel une fonction définie sur un intervalle réel est intégrable (au sens de Riemann) *si et seulement si* l'ensemble de ses points de discontinuités est de mesure nulle. Non content de repenser et de redéfinir l'intégrale de Cauchy, Riemann demande immédiatement — et trouve, dans le cas d'une question aussi simple — une *condition nécessaire et suffisante* pour qu'une fonction satisfasse sa définition nouvelle. Mais la métaphysique des conditions nécessaires et suffisantes chez Riemann dépasse largement le cadre de tels résultats simplistes et élémentaires, car elle se déclare implicitement dans ses écrits comme universellement exigible et renouvelable dans le tissu de l'inconnu mathématique, au contact de questions dont la complexité est arbitraire, non limitée, non devinable.

[20] Voici un autre exemple, tiré à nouveau de son mémoire d'habilitation de 1854, intitulé *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* ([**371**]).

> La question de la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique n'est donc résolue, jusqu'ici, que dans ces deux hypothèses, que la fonction soit généralement susceptible d'intégration et n'ait pas un nombre infini de maxima et de minima. Si cette dernière hypothèse n'est pas admise, les deux théorèmes d'intégration de Dirichlet ne suffisent plus pour décider de la question ; mais si la première hypothèse est rejetée, la règle de Fourier pour la détermination des coefficients n'est déjà plus applicable. La voie que nous allons suivre pour étudier cette question, sans faire de suppositions particulières sur la nature de la fonction, dépend de là, comme on le verra ; une voie aussi directe que celle de Dirichlet n'est pas possible par la nature même du problème.
>
> Nous recherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour un tel mode de développement des fonctions.

À cette fin, en prolongement des développements (12.29) p. 516, on peut introduire l'*application infinie des coefficients* :

$$\mathsf{F}_\infty : \quad \mathbb{C}^r \ni a \longmapsto \Big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\Big)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leqslant i \leqslant n} \in \mathbb{C}^\infty.$$

Toutefois, cet acte d'introduction semble n'apporter aucune information nouvelle par rapport aux développements des $f_i(x;\, a)$ en série entière : la donation de la collection complète des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ n'était-elle pas implicite dans les équations (12.29) p. 516 ?

Développement, donation, extraction : trois actes, il y a là en tout cas une métamorphose infime de l'envisagement et une continuité réelle des actes de pensée : ce sera toujours ainsi que Engel et Lie procéderont :

$$\boxed{\textit{par dérive fluide et continuée de l'engendrement synthétique.}}$$

L'extraction de cette application infinie des coefficients F_∞ répond donc en fait à une *nécessité interne de l'irréversible-synthétique qui pousse vers l'avant et pose en attente tout germe de progressivité mathématique possible*.

Ainsi ici, cette nouvelle application extraite F_∞ totalise la dépendance des équations de transformations $x_i = f_i(x;\, a)$ par rapport aux paramètres, et elle dit tout ce qui provient, et seulement ce qui provient, des paramètres dans les fonctions $f_i(x;\, a)$. Autrement dit, c'est la nécessité d'une continuité spéculative maximale dans la pensée qui fait que l'acte d'extraction des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ a dû et doit s'effectuer progressivement. D'autres moments spéculatifs intersticiels secondaires pourraient aussi être à l'œuvre afin d'assurer une encore plus grande continuité de la pensée, notamment le recours en arrière-plan à des exemples spéciaux de $x' = f(x;\, a)$ qu'on étudierait en parallèle. En tout cas, seule la continuité de la pensée est à même d'assurer le maintien contrôlé d'une sémantique aux facettes multiples.

Discontinuité axiomatique de l'engendrement synthétique. Une définition formelle de type axiomatique énoncera alors que les paramètres

$(a_1, \dots, a_r)$ sont dits *essentiels* si le *rang générique*[21] ρ_∞ de cette application F_∞ est maximal égal à r. Par « *essentiels* », il faut bien sûr entendre[22] « *tous essentiels* », c'est-à-dire « *tous présents* », ce qui veut dire aussi qu'aucun d'entre eux ne peut être supprimé.

D'emblée, avant même qu'un théorème ne suive, cette définition surprenante répond donc en trois moments au problème posé plus haut :

☐ développement des fonctions $f_i(x;\, a)$ en séries entières ;

☐ extraction de l'application infinie des coefficients F_∞ ;

[21] C'est-à-dire le rang maximal de l'application en un point a_0 générique dans l'espace des paramètres. D'une manière générale, le rang générique d'une application $f \colon \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ (ou de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$) qui à $x = (x_1, \dots, x_n)$ associe $(f_1(x), \dots, f_m(x))$ est défini comme étant le rang générique de sa *matrice jacobienne* $\big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)\big)_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant j \leqslant m}$, tandis que le rang générique d'une matrice rectangulaire $G(y) := (g_i^j(y))_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant j \leqslant m}$ de taille $n \times m$ dont les éléments $g_i^j = g_i^j(y)$ sont des fonctions analytiques d'un certain nombre de variables $y = (y_1, \dots, y_q)$ qui sont définies dans un certain domaine U de $\mathbb{C}^q$ (ou de $\mathbb{R}^q$) est défini comme suit. Pour tout entier ρ tel que $1 \leqslant \rho \leqslant \min(m,n)$, on peut former la collection de tous les déterminants de taille $\rho \times \rho$ (mineurs) qui sont extraits de cette matrice :

$$\Delta_{i_1,\dots,i_\rho}^{j_1,\dots,j_\rho}(y) := \begin{vmatrix} g_{i_1}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_1}^{j_\rho}(y) \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ g_{i_\rho}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_\rho}^{j_\rho}(y) \end{vmatrix}.$$

En partant de $\rho := \min(m,n)$, si tous ces déterminants sont identiquement nuls — en tant que fonctions de la variable y —, on passe alors de la taille ρ à la taille juste inférieure $\rho - 1$, on forme tous les mineurs, on teste leur annulation identique, et on recommence. Le *rang générique* ρ^* de la matrice $G(y)$ est alors le plus grand entier ρ tel qu'il existe au moins un tel mineur non identiquement nul, tous les mineurs d'une taille strictement supérieure étant identiquement nuls. On a $\rho^* = 0$ si et seulement si toutes les fonctions $g_i^j(y)$ sont nulles (cas inintéressant), et sinon, on a en toute généralité : $1 \leqslant \rho^* \leqslant \min(m,n)$. Enfin, pour une application F_∞ de $\mathbb{C}^r$ (ou de $\mathbb{R}^r$) à valeurs dans $\mathbb{C}^\infty$ (ou dans $\mathbb{R}^\infty$), le rang générique ρ_∞ de F_∞ est le maximum des rangs génériques des applications tronquées pour lesquelles on ne considère qu'un nombre fini de composantes de F_∞. Puisqu'il y a un nombre fini r de variables à la source, ce rang générique est toujours $\leqslant r$, donc fini et bien défini.

[22] Discuter, par divertissement, de la proximité, parfois déconcertante, du vocabulaire mathématique avec le vocabulaire prosaïque — « ouvert étoilé », « topologie étale », « positivité d'un fibré vectoriel holomorphe », « immeuble de Tits », « chambre de Weyl », « éponge de Serpienski », « lapin de Douady » — ne doit pas se faire en ignorant que l'intuition mathématique féconde assemble constamment la rigueur métaphorique (dont sa structure phénoménologique est naturellement dotée) à la production d'une textualité consacrée à une ontologie vue comme autonome et envisagée comme séparée. En dernier recours, la terminologie mathématique doit pouvoir disparaître complètement dans l'amovible, le modifiable, et l'interchangeable. C'est aussi pourquoi, plus généralement, un grand nombre de questions oiseuses qui font diversion en philosophie des mathématiques actives doivent être évitées. Élaguer l'inessentiel est essentiel.

□ calcul du rang générique ρ_∞ de F_∞.

Toutefois, pour ce qui concerne la *genèse effective* de résultats mathématiques, l'engendrement synthétique procède d'une manière tout à fait différente de cette succession surprenante de trois apparitions irréversibles reconstituées *a posteriori*.

En effet, au fur et à mesure que les objets se métamorphosent et se précisent dans l'analyse du problème par la pensée, la volonté d'engendrement synthétique *pose à nouveau toutes les questions qu'elle a conservées en mémoire*, et notamment ici, elle *pose à nouveau* la question initiale : « *Comment voir que tous les paramètres sont présents* ? ». Lie a certainement dû suivre un chemin génétique très différent de toute reconstitution axiomatique *a posteriori*, et il doit avoir engendré des *visions causales* adaptées à la compréhension du problème. Reconstituer une genèse autonome et convaincante d'un théorème mathématique, ce pourrait être se rapprocher de son invention même, mais les aspects causaux et adéquationnels se situent à un niveau plus profond.

Analyse de l'essentialité des paramètres. Néanmoins, il faut analyser plus avant l'énoncé sous-jacent à la définition : $\rho_\infty = r$ de l'essentialité des paramètres.

Ainsi, la réponse annoncée par cette définition tient dans la dépendance effective des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ par rapport à tous les paramètres $(a_1, \dots, a_r)$, et une telle dépendance s'avère être interprétable en termes de rang au sens du calcul différentiel. Il a déjà été dit ailleurs qu'une définition formelle n'explicite presque jamais les causalités de son auto-mouvement génétique. Ici brièvement, on observera en guise d'explication de la définition brute donnée ci-dessus, que si le rang générique de F_∞ est maximal égal à r, alors toutes les r possibilités de variations des paramètres $(a_1, \dots, a_r)$ semblent bien se réaliser effectivement dans la collection des fonctions $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$; par ailleurs, si ces fonctions sont complètement indépendantes de a, auquel cas le rang générique de F_∞ est clairement égal à zéro, on voit bien que les $f_i(x;\, a)$ sont complètement indépendantes des a aussi, donc dans ce cas limite, il semble bien que c'est en termes de rang (générique) que la réponse à la question posée se réalise.

Maintenant, afin de mieux comprendre les cas où le rang générique possède une valeur ρ_∞ intermédiaire entre 0 et r, à savoir les cas où $1 \leqslant \rho_\infty \leqslant r - 1$, il faut méditer plus en profondeur le champ spéculatif impliqué, à partir d'autres questions dérivées et plus fines, et à partir de démonstrations véritables, qu'elles soient esquissées dans un moment de recherche, ou bien appréhendées dans un moment de lecture[23].

[23] — *cf.* [**320, 322**] et ce qui va suivre à l'instant.

Ainsi est-on en présence ici d'une apparition nouvelle de la notion de rang d'une application différentiable entre deux espaces multidimensionnels, inattendue par rapport à ses conditions classiques d'émergence (géométrie des courbes, des surfaces, et des variétés). Bien entendu, cette apparition manifeste l'*interconnection* des questions mathématiques, peu comprise et peu analysée, parce qu'on en reste souvent au niveau de la constation et de l'étonnement, et parce que la question de l'unité des mathématiques touche à la philosophie. Cela dit, en relation avec une thèse d'Albert Lautman, cette interconnection avérée suggère que le questionnement possède une autonomie propre et une structuration archétypale qui est antérieure aux réalisations mathématiques effectives. Toutefois, une telle constatation de fait ne saurait satisfaire complètement le mathématicien, car ce dernier pourrait à juste titre désirer que l'analyse philosophique lui fournît des *méta-causes* qui soient *mathématiquement exploitables* dans les problématiques régionales.

Réduire le nombre des paramètres. Clairement, le jeu de l'exploration et du questionnement ne s'arrête par ici, puisque l'on n'a toujours pas compris[24] en quoi la définition proposée répond à la question initiale. En fait, à travers la première question « *Tous les paramètres sont-ils présents* », une seconde question sous-entendue était : « *S'il ne sont pas tous présent, que se passe-t-il* ? ». Autrement dit : « *Que doit-on faire lorsque le rang générique* ρ_∞ *de* F_∞ *est strictement inférieur à* r ? ».

Dans le cas où $\rho_\infty \leqslant r-1$, un énoncé crucial ([**320, 322**]) dit alors que l'on peut faire baisser le nombre des paramètres. En effet, grâce au théorème du rang constant[25], il s'avère que l'on peut construire de *nouvelles équations de transformations* :

$$x_i' = g_i\big(x;\, \mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\,\dots\,n)}$$

qui dépendent seulement de ρ_∞ nouveaux paramètres $(\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty})$, ainsi qu'une application analytique locale[26] :

$$a \longmapsto \big(\mathsf{u}_1(a), \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty}(a)\big)$$

qui a la propriété de redonner les anciennes équations de transformation quand on l'insère dans les nouvelles équations de transformations :

$$g_i\big(x;\, \mathsf{u}(a)\big) \equiv f_i(x;\, a) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\,\dots\,n)}.$$

Autrement dit, lorsque le rang générique ρ_∞ de l'application infinie des coefficients est strictement inférieur à sa valeur maximale possible r, un théorème crucial dit qu'on peut, quitte à effectuer une transformation $a \mapsto \mathsf{u}(a)$,

[24] Maintenir la mémoire d'une non-compréhension constitue un acte de pensée nécessaire dans la pluri-temporalité (dis)continue de l'accession à la connaissance mathématique.

[25] Relocaliser s'avère alors nécessaire, et cela est autorisé en théorie de Lie.

[26] — relocalisée, délocalisée —

supprimer $r - \rho_\infty$ paramètres, ce qui veut dire que ces paramètres n'apparaissent alors précisément plus du tout. Une telle application mathématique $a \mapsto \mathsf{u}(a)$ exprime alors comment éliminer toutes les inessentialités co-présentes qui étaient en partie invisibles.

Plus encore, par une méditation approfondie des arguments de démonstration[27] on se convainc qu'il est impossible de faire baisser le nombre de paramètres au-dessous de ρ_∞ au moyen de n'importe quelle application *analytique locale* d'un type similaire $a \longmapsto \big(\mathsf{v}_1(a), \ldots, \mathsf{v}_\mu(a)\big)$ avec $\mu \leqslant \rho_\infty - 1$. Autrement dit, *le nombre de paramètres réellement présents* (à une relocalisation près) *est exactement égal à* ρ_∞. Enfin, on retrouve le premier résultat comme corollaire de cet énoncé général, à savoir : *tous* les paramètres sont effectivement présents *si et seulement si* la valeur ρ_∞ du rang générique de l'application infinie des coefficients F_∞ est maximale possible, égale à r, le nombre des a_j écrits.

Comme cela a été signalé incidemment, la réduction de r à ρ_∞ du nombre de paramètres dans les équations de transformations peut être effectuée en relocalisant les fonctions $f_i(x;\, a)$ à un sous-domaine de leur domaine (commun) de définition. C'est l'application du théorème du rang constant qui l'exige, ou tout du moins, qui rend possible une démonstration convaincante. Néanmoins, on est en droit de se demander si une telle réduction du nombre de paramètres ne pourrait pas être établie aussi au voisinage des points (voire seulement, de certains points) du « mauvais » ensemble des paramètres au voisinage desquels le rang de l'application infinie des coefficients $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha \in \mathbb{N}^n}^{1 \leqslant i \leqslant n}$ n'est pas localement constant.

Interlude : schémas universels du questionnement mathématique. Spéculativement, une question comme cette dernière se rapporte à un schéma archaïque et universel : « une vérité qui est satisfaite sous certaines conditions demeurerait-elle encore vraie *plus généralement* lorsqu'on relaxe certaines de ces conditions ? ». C'est bien parce que la plupart des questions mathématiques se structurent en trame spéculative simple, commune et universelle qu'on est souvent dérouté par la complexité inattendue de certaines théories, et souvent déçu de constater que les réponses complètement satisfaisantes sont si rares, y compris après l'édification de nombreuses théories.

---

[27] Comme entendu, les arguments démonstratifs complets seront éludés afin de concentrer les spéculations sur les aspects métaphysiques internes à la mathématique des groupes de transformations. Le lecteur intéressé par les preuves formelles rigoureuses est alors renvoyé à [**320, 322**] pour de plus amples informations. En vérité, le discours mathématique écrit ne parvient pas à synthétiser tous les aspects de la pensée mathématique qui convergent vers l'auto-mouvement d'une compréhension proprement productrice par elle-même.

Problème de type kantien réactualisé : s'interroger sur les conditions de possibilité de l'irréversible-synthétique dans les mathématiques contemporaines ; s'étonner de la genèse continue de résultats déployés en approfondissement. Conséquence nécessaire pour tout système de philosophie des mathématiques : nécessité d'étudier la *question de la question*, à savoir :

Quelle est la place des *questions mathématiques* dans l'architecture mathématique en devenir ?

Analyses de satisfaction mathématique. Sans poursuivre dans la direction de telles généralités délicates, il faut reprendre les raisonnements. Le résultat précédent, valable au voisinage de tout point (générique) en lequel le rang de l'application $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ est maximal et localement constant égal à ρ_∞, apporte donc une réponse apparemmment entièrement satisfaisante à la question posée initialement, si on écarte l'étude des points non génériques[28].

Toutefois, ce résultat de réduction du nombre de paramètres ne fournit pas véritablement de moyen de connaître ou de calculer l'entier ρ_∞ qui compte le nombre de paramètres essentiels. C'est la *dynamique de l'insatisfaction* qui est motrice en mathématiques. Initialement, la question portait sur l'absence éventuelle de certains paramètres qu'il fallait supprimer à l'avance parce qu'ils sont superflus. Ensuite, de manière « irréversible », cette question a fait aboutir la connaissance synthétique à la « découverte » de l'application infinie F_∞ des coefficients. Grâce à cette dernière application, une *condition nécessaire et suffisante* pour la non-supprimabilité de quelque paramètre que ce soit a été obtenue, à savoir : $\rho_\infty = r$.

Cependant, il arrive très souvent en mathématiques que certaines conditions nécessaires et suffisantes soient ou bien trop élémentaires, ou bien trop peu informatives par rapport à une réponse possible visée. Dans de telles circonstances, il est alors très important d'être en mesure de *maintenir ouverte la question initiale dans et à l'intérieur de l'irréversibilité incomplète de sa réalisation* : c'est la méthode riemannienne, maintenant universalisée à la mathématique tout entière.

Malheureusement, cette méthode relève d'une réflexion trop panoramique pour que les mathématiciens contemporains se risquent à tenter d'en

[28] Lorsqu'on rejette le principe de relocalisation possible en un point générique, la question se complique et elle relève de la théorie des singularités, essentiellement inexistante à l'époque de Lie. Les applications analytiques quelconques, même locales, entre espaces de dimension finie, voire infinie, ont une complexité qui en fait un réservoir indéfini de réalité mathématique. En effet, leur étude relève du théorèmes d'aplatissement (Hironoka-Lejeune-Teissier), et d'autres énoncés de modifications analytiques dont la complexité sous-jacente n'est comprise qu'imparfaitement en dimension quelconque, notamment quant aux aspects effectifs.

systématiser les principes généraux éventuels. Puisque la tâche requiert une perception d'ensemble et exige une conscience philosophique, ce devrait être à la philosophie de systématiser et de produire une telle méthode, mais les mathématiques contemporaines sont devenues trop complexes et trop vastes pour toute pensée systématique.

En tout cas, si on abandonne une telle ambition universelle et si on se restreint à l'étude spécifique des équations '$x' = f(x; a)$', on devient maintenant responsable de deux questions qui doivent être maintenues vivantes dans le *champ interrogatif coprésent*. La première, presque trop profonde, demande si l'on peut considérer que la condition nécessaire et suffisante exprimée en termes de rang générique est la *meilleure* condition nécessaire et suffisante imaginable. Cette question spécifique relève d'une question générique qui est omniprésente dans tout le champ des mathématiques, à savoir la question qui demande si d'autres concepts et d'autres théorèmes plus « satisfaisants » ne se « cachent » pas encore « derrière » des théorèmes préliminaires « peu satisfaisants ». C'est grâce à de telles insatisfactions abstraites que la recherche d'adéquation est à même, à travers certains mathématiciens particulièrement exigents, de

se rouvrir en décelant le caractère insatisfaisant de ce qui se donnait pour satisfaisant.

La seconde question, plus concrète, demande simplement quels sont les moyens de produire un critère pratique pour déterminer ce rang générique ρ_∞, et elle sera commentée dans un instant, mais la première question sera délaissée pour plusieurs raisons : 1) la réduction des actions de groupes aux actions effectives est essentiellement bien comprise depuis Lie[29] ; 2) l'essentialisation des paramètres ne contitue qu'un moment liminaire de la théorie des groupes continus de transformations[30] ; 3) comme Lie, on admettra la

[29] La rémanence potentielle d'une question a une histoire au cours de laquelle certains mathématiciens en ont pris connaissance, l'ont étudiée, sondée, interrogée. Même si aucune métamathématique logicienne que ce soit n'est actuellement en mesure d'établir que certaines conditions nécessaires et suffisantes sont adéquates et indépassables, et donc par conséquent, qu'il est inutile d'en chercher de meilleures, trois facteurs peuvent expliquer pourquoi une telle recherche a été et doit être abandonnée : l'expérience mathématique accumulée sur des décennies, laquelle doit prendre en compte aussi toute les diverses tentatives de recherche stoppées ; une certaine compréhension des ontologies impliquées ; une analyse spéculative méditée (mais non écrite) des conditions du degré de satisfaction mathématique d'un résultat.

[30] Cet argument, lui aussi, a son importance convaincante : dans l'*a posteriori* de l'intention centrale d'une théorie — à savoir ici, l'édification d'une théorie des groupes continus de transformations entre espaces géométriques à un nombre quelconque de dimensions —, l'étude des questions liminaires doit s'effacer comme par oubli et élimination de dialectiques transitoires, et être remplacée ensuite par des hypothèses régulières légitimes qui constitueront de nouveaux points de départ : analogie lointaine avec l'*Aufhebung* hégélienne.

relocalisation libre afin d'éviter le problème délicat de l'unification entre la théorie des systèmes différentiels extérieurs et la théorie des singularités ; 4) on ne peut à vrai dire pas découvrir de contenus véritablement novateurs au-delà des réponses apportées par Lie[31] ; 5) on verra plus bas que les axiomes de groupes garantissent qu'aucune relocalisation n'est en fait nécessaire, afin de supprimer des paramètres inessentiels, dans le cas majeur qui intéresse Lie où les $x_i' = f_i(x;\, a)$ sont les équations de transformations d'un *groupe*[32]. Ce dernier argument, le plus convaincant d'une manière surprenante, pourrait indiquer qu'une certain harmonie préétablie habite la théorie des groupes de transformations et garantit son autonomie par rapport à d'autres champs de problèmes mathématiques eux-mêmes autonomes.

Caractérisation effective de l'inessentialité. En résumé, on recherche donc un critère effectif qui fasse mieux voir si tous les paramètres sont essentiels.

Tout d'abord, par définition, le rang générique de l'application F_∞ est égal au rang générique de sa matrice jacobienne infinie :

$$\mathrm{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a) = \Big(\frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a)\Big)_{1\leqslant j\leqslant r}^{\alpha\in\mathbb{N}^n,\,1\leqslant i\leqslant n},$$

qui est considérée ici comme une matrice ayant r lignes indexées par l'entier j, et possédant une infinité de colonnes, indexées simultanément par le multiindice α et par l'entier i. Déterminer le rang générique d'une matrice de taille finie requiert l'examen de tous ses mineurs (déterminants des sous-matrices extraites) qui sont en nombre *fini*. Dans le cas où la matrice est constituée d'une infinité de colonnes, on doit examiner une infinité de tels mineurs. Abstraitement parlant, cette différence ne pose pas de problème particulier, parce que la taille horizontale des mineurs est de toute façon bornée par le nombre fini r de lignes, et pour cette raison, lorsqu'on examine pas à pas tous les mineurs des sous-matrices de $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$ de taille $r \times s$ qui sont constituées des s premières colonnes de $\mathrm{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$, alors à mesure que s augmente vers l'infini, le rang maximal possible, toujours borné et $\leqslant r$,

[31] Affirmation basée sur une réflexion et sur une expertise.

[32] Ce dernier argument est le plus inattendu : tout groupe se constitue en homogénéité avec lui-même, localement autour de chacun de ses éléments, puisque ses automorphismes de translations sont inversibles. Il en découle que chaque élément éventuel de dégénérescence, *e.g.* le fait que l'application infinie des coefficients $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ a un rang inférieur à son rang maximal possible, se propage d'un paramètre a' vers tout autre paramètre a''. Autrement dit, pour un groupe, toute dégénérescence serait ubiquitaire, donc générique, ce qui contredirait immédiatement la définition d'après laquelle la dégénérescence décrit le lieu (rare) du non-générique. En conséquence de quoi, toute généricité de type groupe est ubiquitaire *sans exception*, c'est-à-dire *sans aucune dégénérescence*. En définitive, pour les groupes, la question de traverse disparaît d'elle-même.

finit nécessairement par se stabiliser en un certain entier $\rho_\infty \leqslant r$. Donc le rang générique ρ_∞ de $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$ est bien défini.

Toutefois, l'infini est impliqué dans cette définition *via* le nombre de colonnes $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$, et pour cette raison, le nombre minimal s^* de colonnes qu'il faut examiner n'est pas borné *a priori*. Autrement dit, la détermination de ρ_∞ est constructive dans son principe potentiel, mais non contrôlable *a priori* en termes de temps de vérification.

Pour répondre à cette imperfection, Lie produit une deuxième condition nécessaire et suffisante qui s'exprime en termes plus immédiatement finis d'annulation identique par un opérateur de dérivation. Par exemple, il est clair que les équations $x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, a_1, a_2, \dots, a_r)$ seront complètement indépendantes du premier paramètre a_1, à savoir qu'elles s'écriront en fait $x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, a_2, \dots, a_r)$ *si et seulement si* elles sont identiquement annulées par l'opérateur trivial $\mathscr{T} := \frac{\partial}{\partial a_1}$ de dérivation par rapport au paramètre a_1. Cette observation se généralise et donne une deuxième condition nécessaire et suffisante qui garantit l'essentialité des paramètres, par contraposition du point **(iii)** dans l'énoncé suivant.

Théorème. ([**146, 320, 322**]) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Dans les équations de transformation :*

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \mathscr{F}_\alpha^i(a)\, x^\alpha,$$

les paramètres $a_1, \dots, a_r$ ne *sont* pas *essentiels.*

(ii) *(Par définition) Le rang générique ρ_∞ de la matrice jacobienne infinie :*

$$\mathrm{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a) = \Big(\frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a)\Big)_{1 \leqslant j \leqslant r}^{\alpha \in \mathbb{N}^n,\, 1 \leqslant i \leqslant n}$$

est strictement inférieur à r.

(iii) *Localement au voisinage de* tout *point* (x_0, a_0)*, il existe un champ de vecteurs non nul à coefficients analytiques :*

$$\mathscr{T} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(a)\, \frac{\partial}{\partial a_k}$$

qui annihile identiquement tous les $f_i(x; a)$:

$$0 \equiv \mathscr{T}\, f_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_k\, \frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \sum_{k=1}^{r} \tau_k(a)\, \frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_k}(a)\, x^\alpha.$$

Maintenant, l'absence partielle de paramètres au niveau fonctionnel s'exprime aussi en termes différentiels : *complémentarité fondamentale entre le fini et l'infinitésimal*. Il est remarquable que Lie exprime systématiquement les concepts qu'il introduit à la fois dans le domaine fini et à la fois au niveau infinitésimal. Le second niveau éclaircit et affine le premier : progression irréversible de la connaissance mathématique.

Ensuite, il est naturel d'étudier plus à fond tous les cas intermédiaires où le rang générique de la matrice infinie des coefficients est quelconque. En effet, le théorème précédent supposait seulement que $\rho_\infty \leqslant r-1$, par exemple que $\rho_\infty = r-1$, mais on s'attend à ce que le nombre de paramètres non essentiels soit d'autant plus grand que ρ_∞ est petit, et il faudrait alors, pour affirmer une connaissance plus précise, être en mesure de relier le nombre de paramètres supprimables à la différence $r-\rho_\infty$. Chaque théorème possède quelques fenêtres évidentes de généralisation potentielle qui s'entrouvrent grâce à des constatations simples d'incomplétude, et c'est très souvent de cette manière-là qu'un auditoire pose des questions en conférence.

Quand les équations de transformations sont complètement indépendantes de k paramètres, par exemple pour fixer les idées, quand elles sont indépendantes des k premiers paramètres $a_1, \dots, a_k$, alors elles sont identiquement annulées par les k dérivations $\frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_k}$, et ces dérivations sont visiblement indépendantes les unes des autres. Dans le cas général on aura, de manière analogue à ce cas-modèle simple, autant de dérivations que de paramètres inessentiels, mais l'indépendance, comme le rang maximal, ne sera valable qu'en un point générique de l'espace des paramètres.

Théorème bis. *Plus généralement, si ρ_∞ désigne le rang générique de l'application infinie des coefficients :*

$$\mathsf{F}_\infty : \qquad a \longmapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n},$$

alors localement au voisinage de tout *point* (x_0, a_0)*, il existe exactement* $r-\rho_\infty$ *champs de vecteurs analytiques locaux :*

$$\mathscr{T}_\mu = \sum_{k=1}^{n} \tau_{\mu k}(a)\,\frac{\partial}{\partial a_k} \qquad {\scriptstyle (\mu=1\dots r-\rho_\infty)},$$

tels que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big(\mathscr{T}_1\big|_a, \dots, \mathscr{T}_{r-\rho_\infty}\big|_a\big)$ *qu'ils engendrent est égale à* $r-\rho_\infty$ *en tout paramètre (générique)* a *en lequel le rang de* F_∞ *est maximal égal à* ρ_∞*, et tels qu'ils annihilent identiquement toutes les fonctions* $f_i(x;a)$ *:*

$$0 \equiv \mathscr{T}_\mu\, f_i = \sum_{k=1}^{r} \tau_{\mu k}(a)\,\frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x;a) \qquad {\scriptstyle (i=1\dots n;\ \mu=1\dots r-\rho_\infty)}.$$

Pour conclure cette discussion sur l'essentialité des paramètres, sans perte de généralité, les paramètres peuvent être supposés, et seront toujours supposés essentiels Par Engel et Lie dans la suite de leur traité : *cette question est irréversiblement considérée comme résolue d'une manière suffisamment satisfaisante pour que sa co-présence soit régulièrement écartée par une hypothèse qui ne coûte rien.*

Redécouverte en géométrie de Cauchy-Riemann. En 1996, Nancy Stanton ([**418**]) a introduit une certaine notion de *non-dégénérescence holomorphe* pour les hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^{n+1}$. Ces dernières peuvent être représentées, dans des coordonnées holomorphes locales $(z_1, \ldots, z_n, w)$, par une équation (complexe) de la forme :

$$\begin{aligned} w &= \Theta\big(z_1, \ldots, z_n, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n, \overline{w}\big) \\ &= \sum_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n} \, \Theta_\alpha\big(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n, \overline{w}\big), \end{aligned}$$

et l'on démontre ([**313**]) que l'équation complexe *conjuguée*[33] :

$$\overline{w} = \overline{\Theta}\big(\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n, z_1, \ldots, z_n, w\big)$$

lui est complètement équivalente (condition de réalité).

La condition de Stanton dit que l'hypersurface en question et *holomorphiquement non dégénérée* s'il n'existe pas de champ de vecteurs holomorphe :

$$\mathscr{T} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(z, w) \, \frac{\partial}{\partial z_k} + \tau_{n+1}(z, w) \, \frac{\partial}{\partial w}$$

qui annihile identiquement l'équation antiholomorphe $\overline{w} = \overline{\Theta}\big(\overline{z}, z, w\big)$, ce qui revient à dire que $\mathscr{T}$ annihile identiquement toutes les fonctions $\overline{\Theta}_\alpha(z_1, \ldots, z_n, w)$, quel que soit le multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. À un changement de notation près, cette notion revient exactement que celle dégagée par Lie plus d'un siècle auparavant. Peu de temps après Stanton, Baouendi-Rothschild se sont attribué le mérite d'une généralisation qui correspondait au 'Théorème bis' énoncé ci-dessus, mais il est clair que la priorité d'un tel résultat, même (re)publié dans des revues américaines cotés, revient à Lie.

L'unité des mathématiques se manifeste spécialement dans l'apparition ubiquitaire de questions-mères indépendantes. Ces questions conduisent à

33 Le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ n'est autre que $\overline{z} = x - iy$. La conjuguée $\overline{\theta}(z)$ d'une série entière convergente $\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k \, z^k$ n'est autre que la série dont on conjugue seulement les coefficients : $\overline{\theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\theta} \, z^k$. Il découle alors clairement de cette convention notationnelle que le symbole de conjugaison se distribue simultanément sur le symbole de fonction et sur le symbole de variable : $\overline{\theta(z)} \equiv \overline{\theta}(\overline{z})$. Tout cela se généralise immédiatement aux fonctions holomorphes de plusieurs variables.

des théories qui s'individuent de manière essentiellement autonome. La mathématique universelle de Lie englobe de nombreux résultats qui sont prétendûments réétudiés ou développés à l'époque actuelle.

Ontologie triple de l'opérateur $X(f)$

Système d'équations différentielles ordinaires. Dans l'espace réel ou complexe à n dimensions muni de coordonnées $x_1, \dots, x_n$, à tout opérateur linéaire différentiel quelconque d'ordre 1 :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est associé un système d'équations différentielles ordinaires :

$$\left[\begin{array}{ll} \dfrac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', \dots, x_n') & \\ x_i'(x;\, 0) = x_i & \scriptstyle (i = 1 \cdots n) \end{array}\right.$$

dont les solutions $t \mapsto x'(x,t)$ sont par définition des *courbes unidimensionnelles* ayant pour vecteur tangent en tout point x le vecteur prescrit $X|_x$. Au concept d'un tel opérateur différentiel quelconque X est donc simultanément associée la notion de *vecteur géométrique* attaché en tout point x de l'espace, vecteur qui varie d'une manière déterminée, quoique absolument quelconque, en fonction du point x. Dans le langage de Engel et de Lie, *l'opérateur $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ attache à tout point x en lequel ses coefficients $\xi_i(x)$ ne s'annulent pas tous ensemble une certaine ligne* [Strecke] *infiniment petite, et le long de cette ligne aussi, X détermine une certaine direction de progression* [Fortschreitungsrichtung] ; d'un point de vue projectif, la ligne en question est représentée par la proportion $\xi_1(x) : \cdots : \xi_n(x)$, tandis que sa longueur infinitésimale est égale à $\sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}\, \delta t$, où δt est une quantité réelle ou complexe infnitésimale. Si, en un point x, tous les coefficients $\xi_i(x)$ de l'opérateur X s'annulent, aucune direction de progression n'est attachée par X en ce point, qui est alors dit *singulier*.

Ainsi, le concept d'opérateur linéaire aux dérivées partielles réfère-t-il à la géométrie projective infinitésimale en tout point, notion que la géométrie différentielle globale postérieure aux années 1950 conceptualisera en termes de section du fibré tangent projectivisé à la variété ambiante. L'ontologie différentielle se géométrise dans l'infinitésimal, et avec cette observation, Lie a déjà enrichi l'objet $X(f)$ d'une ontologie double, de type Analyse et de type Géométrie, simultanément et complémentairement.

Des faisceaux de pensées spéculatives orientés vers la conceptualisation du mouvement des corps physiques ont dû animer les premiers inventeurs du calcul différentiel géométrique pour leur inspirer délimitations et enrichissements ontologiques. L'écriture mathématique analytique peine à exprimer ces pensées, qui forment pourtant l'un des soubassements fondationnels des objets mathématiques en tant qu'ils sont *pensés*. Pas plus que dans d'autres traités contemporains, on ne trouve véritablement chez Lie des réflexions métaphoriques et problématisantes sur la saisie du mouvement dans un symbolisme restreint qui en appelle à la potentialité pure et indécise du divers, bien qu'on puisse être certain, du point de vue de la genèse, que des pensées d'une telle nature formaient le quotidien de ses méditations. L'« Atlantide », c'est aussi la disparition regrettable, dans tout écrit mathématique finalisé, de ce qui constitue le mouvement des idées génétiques en quête de vérités.

Ici en tout cas, la résolution du système d'équations différentielles ordinaires associé à tout champ de vecteurs X peut au moins recevoir une interprétation graphique pleine d'évidence, dans la mesure où une intuition élémentaire transmise par le monde physique convainc tout un chacun que certaines *lignes de parcours pour les points-particules* se dessinent si l'on colle bout à bout toutes les infimes directions de progression qui se disposent les unes à la suite des autres, le lien de lissité et la disparition des angles s'effectuant dans l'infinitésimal. La cause profonde de l'intégrabilité d'un tel système d'équations différentielles ordinaires repose certainement en dernier recours sur la dynamique de l'espace physique, d'une manière analogue au fait que Riemann avait utilisé le principe physique de Dirichlet pour établir son célèbre théorème d'uniformisation des domaines simplement connexes de $\mathbb{C}$. Aussi Lie, fidèle à la tradition du calcul infinitésimal qui l'a précédé, s'efforce-t-il de faire voir et d'écrire que chaque point x doit être vu, dans le germe de son déplacement, comme glissant dans la direction de $X(x)$ d'une distance infiniment petite notée δt :

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1, \dots, x_n)\, \delta t \qquad {\scriptstyle (i = 1 \cdots n)},$$

le long de la courbe sur laquelle il est en train de progresser.

Basculement ontologique. Et c'est à cet instant précis qu'un nouveau basculement ontologique se révèle : si, en effet, chaque point de l'espace est déplacé d'une manière infime dans une direction déterminée, c'est que l'espace *dans son ensemble*, subit une certaine *transformation globale*, qu'on appellerait ici *difféomorphisme infiniment proche de l'identité* si l'on devait s'autoriser à recourir aussi à un langage plus contemporain. L'opérateur $X(f)$, d'abord différentiel en relation avec un problème d'Analyse, ensuite géométrique en tant qu'il indique un faisceau de directions, se révèle, dans un troisième moment, endosser une troisième *nature d'être mathématique*, en tant qu'il est germe de mouvement pour l'espace tout entier — tel est le dernier volet du triptyque ontologique qui est lié en filigrane à la théorie des groupes continus de transformations de l'espace à n dimensions.

Il faut revenir aux représentations physiques pour préciser cette troisième nature ontologique nouvelle. Si l'on imagine l'espace dans son ensemble comme rempli d'un fluide incompressible, alors on peut interpréter cette transformation infinitésimale simplement comme un mouvement [*Bewegung*] infiniment petit de ce fluide, et la quantité δt comme l'intervalle de temps infiniment petit durant lequel ce mouvement s'effectue. Ainsi, les quantités projectives $\xi_1(x): \cdots : \xi_n(x)$ sont les composantes de la vitesse de ce fluide [*Flüssigkeitstheilchens*] en un point quelconque x de l'espace. Tout un glissement fluide de l'espace en mouvement s'amorce en fait avec $X(f)$.

Le passage de l'infinitésimal au fini est aisément réalisé en acceptant la métaphysique classique du calcul infinitésimal, d'après laquelle tout produit $\infty \cdot \frac{1}{\infty}$ d'un infiniment grand par un infiniment petit s'identifie — dans la majorité des circonstances contrôlables — à une quantité finie. Ainsi, les *vrais* mouvements finis de l'espace naissent [*entstehen*] lorsque l'on répète une infinité de fois ces glissements fluides infinitésimaux $x_i' = x_i + \xi_i \, \delta t$, en repartant à chaque fois du point qui vient d'être atteint. Afin de parvenir effectivement à une transformation finie, on doit donc imaginer que le mouvement infiniment petit qui est engendré par la transformation infinitésimale $X(f)$ est itérée pendant un nombre infini d'intervalles de temps δt ; en d'autres termes, on doit suivre le mouvement du fluide pendant un intervalle de temps fini : tout revient donc à *intégrer*, au sens du calcul intégral, le système d'équations différentielles ordinaires associé ci-dessus à l'opérateur linéaire aux dérivées partielles X. Une particule fluide de l'espace qui est située en un point x au temps $t = 0$ atteindra, après un laps de temps t fini, un certain point $x' = x'(x;\, t)$ qui dépend à la fois de ce temps t et du point de départ x. Enfin, le mouvement du fluide de l'espace est stationnaire, puisque les vecteurs $X|_x$ sont indépendants du temps, et par conséquent, le processus de mouvement dans son ensemble reste identique à lui-même, quel que soit le temps auquel on le considère. Cette dernière observation simple mais cruciale montre bien que les mouvements forment un *groupe*, semblable au groupe de translations dans la direction d'un vecteur de l'espace : c'est ainsi que Lie confère à X, grâce à une méditation conceptuelle inspirée par la mécanique élémentaire des fluides, un troisième et dernier aspect ontologique nouveau : X définit un *groupe à un paramètre* de transformations continues de l'espace.

En résumé, l'être de :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est riche d'une *ontologie triple* :

• c'est un opérateur linéaire aux dérivées partielles sur l'espace à n dimension des $x_1, \dots, x_n$ auquel sont associés d'une part l'équation $X(f) = 0$ d'inconnue f et d'autre part le système d'équations différentielles ordinaires $\frac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', \dots, x_n')$, $i = 1, \dots, n$;

• c'est un champ de directions géométriques $X|_x$ basées en tout point x de l'espace et variant d'une manière *a priori* quelconque d'un point à un autre ;

• c'est une *transformation infinitésimale* — terminologie de Lie — qui indique, pour l'espace dans son ensemble, un germe de mouvement automatiquement doté d'une structure de groupe de glissements-translations le long des courbes intégrales.

Formule exponentielle analytique pour l'intégration. Ainsi, puisque toute particule de fluide déterminée se déplace le long d'une courbe qui passe par le point où elle se trouvait en un temps initial, l'espace est entièrement décomposé en courbes constituées de telle sorte que chaque particule reste sur la courbe où elle a été située (au moins) une fois ; ces courbes sont appelées *courbes intégrales* de la transformation infinitésimale $X(f)$. Bien entendu, elles sont paramétrées transversalement par un espace à $(n-1)$ dimensions, puisqu'une dimension d'extension est absorbée par les courbes.

En un point donné et fixé x, il est aisé de trouver la courbe intégrale qui passe par x : c'est le lieu de tous les points en lesquels x est transféré par l'application des transformations infinitésimales :

$$x_i' = x_i + \tfrac{t}{1}\, \xi_i(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Par conséquent, grâce à l'analyticité des coefficients $\xi_i(x)$, les équations :

$$x_i' = x_i + \frac{t}{1}\, \xi_i(x) + \frac{t^2}{1 \cdot 2}\, X(\xi_i)(x) + \frac{t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}\, X\big(X(\xi_i)\big)(x) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n)$$

représentent la courbe intégrale en question, lorsqu'on considère t comme une variable indépendante. En résumé :

Proposition. *La solution au système d'équation différentielles ordinaires :*

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{dx_i'}{dt} = \xi_i(x_1', \dots, x_n') \\ x_i'(x;\, 0) = x_i \qquad\qquad (i = 1 \cdots n) \end{array}\right.$$

associé à une transformation infinitésimale quelconque :

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

dont les coefficients $\xi_i(x)$ sont analytiques, est fournie par le développement en série entière convergente :

$$x_i'(x;\, t) = x_i + t\, X(x_i) + \cdots + \tfrac{t^k}{k!}\, X^k(x_i) + \cdots \qquad (i = 1 \cdots n),$$

formule dans laquelle la puissance k-ème X^k agit comme dérivation d'ordre k sur chaque coordonnée x_i fixée :

$$X^k(x_i) := \underbrace{X\big(\cdots\big(X}_{k \text{ fois}}(x_i)\big)\cdots\big).$$

De manière alternative, ce développement peut aussi être réécrit au moyen d'une simple notation exponentielle :

$$x_i' = \exp\big(t\, X\big)(x_i) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\, X)^k}{k!}(x_i) \qquad (i = 1 \cdots n).$$

Spéculation sur l'inéquivalence des équivalences. À un niveau ultérieur, cette dernière proposition achève d'établir l'équivalence mathématique fondamentale :

$$\boxed{\textbf{groupe local à un paramètre} \equiv \textbf{transformation infinitésimale}}\,,$$

$$\boxed{x' \exp(t\, X)(x) \;\equiv\; \textstyle\sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}}\,,$$

qui s'insère plus généralement dans l'équivalence fonctionnelle entre le différentiel infinitésimal et le local fini, tout en développant les premiers éléments d'une théorie géométrique du mouvement. Toutefois, cette équivalence ne saurait s'affirmer comme principe d'égalité absolue entre deux êtres initialement distincts qui deviendraient par là-même strictement interchangeables. Comme dans toute autre équivalence mathématique, l'ontologie est interrogation *en devenir* sur la structure et sur la constitution d'un être mathématique problématique. À travers les équivalences que l'être mathématique découvre à son propre sujet par l'analyse ou par la synthèse, l'être vise en effet à se déployer dans des espaces neufs qui soient propices à révéler sa nature intrinsèque, en supprimant toutes les formes d'arbitraire et de non-compréhension dont est entachée sa donation initiale.

À strictement parler, aucun énoncé mathématique d'équivalence entre deux concepts ou entre deux conditions spécifiques n'est réellement transparent dans une double circulation du sens. L'équivalence, en mathématiques, transcende tout concept logique ou méta-mathématique de termes formels syntaxiquement substituables.

En vérité, dans l'équivalence, doit se manifester un différentiel-synthétique du potentiel interrogatif, comme par l'effet d'une révélation progressive qui autoriserait à *oublier* presque définitivement le membre initial de l'« équivalence » pour ne retenir que le membre final, plus rapproché, bien que peut-être encore fort éloigné, de l'essence de la chose à comprendre. Quant au choix de brisure de symétrie dans l'équivalence, c'est-à-dire quant au choix de l'initial et du final dans l'équivalence en question, c'est bien sûr le concept de transformation infinitésimale qui doit en quelque sorte *éliminer* le concept de groupe local à un paramètre, pour s'y substituer comme objet d'étude principal. Et c'est effectivement ce que Lie affirmera systématiquement dans ses travaux : grâce à l'équivalence en question, on peut *mettre entre parenthèses* l'intervention de l'analyse comme procédé d'intégration pour se concentrer seulement sur la classification des transformations infinitésimales. L'infinitésimal se substitue au fini, car il est plus simple : il est *linéaire*.

À vrai dire, si l'on accepte en suivant Lie ce *différentiel d'inéquivalence interne à toute équivalence*, l'infinitésimalisation des transformations transporte alors la théorie des groupes principalement du côté de l'algèbre, et tout d'abord, du côté de l'algèbre *linéaire*. On peut donc maintenant se demander quelle doit être l'équivalence entre groupe à r paramètres et système de r transformations infinitésimales mutuellement indépendantes $X_1, \dots, X_r$. Ici, l'Un va provoquer l'imprévu du Multiple, c'est-à-dire forcer la genèse de concepts inattendus, mais pour l'instant, il faut achever l'étude des groupes à un seul paramètre.

Retour sur le symbole $X(f)$. Engel et Lie écrivent les champs de vecteurs X — qu'ils appellent systématiquement *transformations infinitésimales* — toujours sous la forme « Xf », non pas donc comme opérateur abstrait de dérivation, mais comme action effective sur une fonction-test toujours notée $f = f(x_1, \dots, x_n)$. L'action concrète de X sur f consiste bien entendu à le faire agir comme dérivation :

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Eu égard à l'équivalence ontologique sus-mentionnée, il est naturel de se demander maintenant (scholie) quelle est l'action d'un groupe fini à un paramètre sur les fonctions. Si donc $f = f(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction analytique arbitraire, si l'on compose f avec le flot du groupe à un paramètre :

$$f' := f(x_1', \dots, x_n') = f\big(x_1'(x;\, t), \dots, x_n'(x;\, t)\big),$$

et si l'on développe en série entière cette composition par rapport à t :

$$f' = \big(f'\big)_{t=0} + \tfrac{t}{1!}\,\big(\tfrac{df'}{dt}\big)_{t=0} + \tfrac{t^2}{2!}\,\big(\tfrac{d^2 f'}{dt^2}\big)_{t=0} + \cdots,$$

on doit calculer les quotients différentiels $\frac{df'}{dt}$, $\frac{d^2f'}{dt^2}$, ..., ce qui ne pose à vrai dire aucune difficulté :

$$\left[\begin{aligned} \frac{df'}{dt} &= \sum_{i=1}^n \frac{dx_i'}{dt}\,\frac{\partial f'}{\partial x_i'} = \sum_{i=1}^n \xi_i'\,\frac{\partial f'}{\partial x_i'} = X'(f'), \\ \frac{d^2f'}{dt^2} &= X'\Big(\frac{df'}{dt}\Big) = X'\big(X'(f')\big), \end{aligned}\right.$$

et ainsi de suite. En posant $t=0$, chaque x_i' devient x_i, la fonction f' devient f et $X'(f')$ devient $X(f)$, et ainsi de suite, et grâce à ces observations, on obtient le développement recherché :

$$\begin{aligned} f(x_1',\dots,x_n') &= f(x_1,\dots,x_n) + \tfrac{t}{1!}\,X(f) + \cdots + \tfrac{t^k}{k!}\,X^k(f) + \cdots \\ &= \textstyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(tX)^k}{k!}\,(f) = \exp(tX)(f), \end{aligned}$$

qui fait bien sûr réapparaître la symbolique exponentielle. Évidemment, par différentiation, on doit retrouver l'action infinitésimale :

$$Xf = \frac{d}{dt}\big(\exp(tX)(f)\big)_{t=0}.$$

Principe de retour spéculatif et mouvement rétrograde de la pensée, parmi les transformations du groupe à un paramètre $x' = \exp(t\,X)(x)$, celles pour lesquelles le paramètre t possède une valeur infiniment petite jouent un rôle particulièrement important. À cause d'une exigence liée à la *structure linéarisable* dans son ensemble de la théorie des groupes continus de transformations, Lie revient en arrière, supprime la considération de l'intégration et affirme que les transformations 'infiniment petites', ou infinitésimales, du groupe importent plus que ses transformations finies.

Si en effet on ne prend en considération que la première puissance de t — noté alors δt en tant qu'infinitésimal — dans la série analytique résolvante du système d'équations différentielles ordinaires :

$$x_i'(x;\,t) = x_i + t\,X(x_i) + \cdots \qquad {\scriptstyle (i\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

on ré-obtient l'expression de la transformation infinitésimale qui constituait le point de départ de la réflexion :

$$x_i' = x_i + \xi_i(x_1,\dots,x_n)\,\delta t \qquad {\scriptstyle (i\,=\,1\,\cdots\,n)}.$$

De manière analogue, l'action sur une fonction f se condense en un seul terme infinitésimal :

$$f' = f + X(f)\,\delta t,$$

c'est-à-dire de manière équivalente :

$$f(x_1',\dots,x_n') = f(x_1,\dots,x_n) + \delta t\,\sum_{i=1}^n \xi_i\,\frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Si l'on appelle $\delta x_i := x'_i - x_i$ l'incrément infinitésimal que subit chaque point de l'espace sous ladite transformation, on peut alors représenter aussi la transformation infinitésimale en question sous la forme :

$$\delta x_1 = \xi_1 \, \delta t, \ldots, \, \delta x_n = \xi_n \, \delta t.$$

Plus généralement, chaque fonction f subit l'incrément infinitésimal ou variation infinitésimale :

$$\delta f = f' - f = X(f) \, \delta t,$$

et c'est pour cette raison que Lie considère que la transformation infinitésimale X agit toujours sur une certaine fonction quelconque f :

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Ainsi, l'expression $X(f)$ est-elle prise comme *symbole* de la transformation infinitésimale en question, ce qui présente non seulement un avantage en termes de contraction symbolique — les n coordonnées x_i et x'_i n'apparaissent plus dans cette écriture résumée —, mais surtout, place aussi d'emblée la considération à un niveau purement infinitésimal et linéaire, donc plus simple et accessible aux études ultérieures. Puisque tout groupe à un paramètre de transformations de l'espace est complètement et uniquement déterminé par son générateur infinitésimal, on peut sans perte de généralité se restreindre à l'étude de ces $X(f)$. Il y a donc aussi par là-même un choix orienté de Lie, un *oubli décidé* quant aux équations finies du groupe, qui est justifié par une réalité d'étude globale.

Dans le tissu indécis de la réalité mathématique problématique, existent donc des *gradients synthétiques* qui doivent diriger l'action de la pensée construisante vers la nouveauté et la complexité accrue. C'est pour cette raison que les équivalences formelles qu'énoncent certaines propositions pour ponctuer logiquement un parcours théorique donné ne doivent en aucun cas être entendues comme des éléments réversibles et inorientés — pierre métaphysique angulaire de la mathématique universelle que Lie a parfaitement comprise.

Théorème de Clebsch-Frobenius

Décision ontologique quant aux résolubilités. Dans le Chapitre 5 de la *Theorie der Transformationsgruppen*, Engel et Lie mettent en place un théorème à la fois élémentaire et fondamental pour toute la théorie, théorème aujourd'hui dit « de Frobenius », et qui avait été auparavant établi dans son principe par Jacobi et Clebsch, à la suite de travaux de Cauchy, Weierstrass, Briot-Bouquet, Kowalewsky et Darboux. La question ne concernait pas, au sens moderne, la géométrie des distributions de k-plans dans un espace réel ou complexe à n dimensions, mais elle portait sur l'existence de solutions pour certaines équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre. Aussi Engel et Lie énoncent-t-ils clairement le résultat en référence à la recherche de solutions à un système de telles équations.

En toute généralité, on étudie donc un nombre *a priori* arbitraire q d'opérateurs différentiels d'ordre un :

$$X_1(f) = 0, \ \dots, \ X_q(f) = 0,$$

pensés comme agissant — virtuellement ou actuellement — sur une fonction quelconque $f = f(x_1, \dots, x_n)$ définie sur l'espace (réel ou complexe) des $x_1, \dots, x_n$ à un nombre quelconque n de dimensions et dont les coefficients $\xi_{ki} = \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n)$ sont certaines fonctions fixées, mais a priori quelconques, des variables ambiantes, à savoir :

$$X_k(f) = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \, \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,q)};$$

c'est donc un tel système qui est pris comme donnée de base dont on cherche l'espace des solutions.

Ce qui est très surprenant dans le moment exploratoire, c'est qu'une distinction imprévisible entre le cas où $q = 1$ et les cas où $q \geqslant 2$ va s'interposer immédiatement en tant que *réalisation métaphysique archaïque du divers par le possible*. Avant d'en venir à ce point, il convient de rappeler d'abord que l'on sait, depuis les travaux de Lagrange, qu'un unique opérateur différentiel d'ordre un :

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x) \, \frac{\partial}{\partial x_i},$$

fournit une (unique) équation aux dérivées partielles :

$$X(f) = 0$$

dont l'inconnue est une (unique) fonction $f = f(x_1, \dots, x_n)$ des variables ambiantes de l'espace des $x_1, \dots, x_n$: dans l'*a posteriori* de la possibilisation (imprévisible) de l'Un par le Divers, ce sera donc le cas (le plus) simple, mais alors à nouveau, par l'effet d'une *réouverture-en-retour* du flanc problématisant, ce cas le plus élémentaire va s'avérer devoir conduire à décider d'un choix quant aux univers ontologiques sous-jacents et donc aussi, à décider plus ou moins expressément d'une *stratégie d'évitement* vis-à-vis de certaines branches de problèmes difficiles qu'il faudra, presque volontairement, laisser de côté.

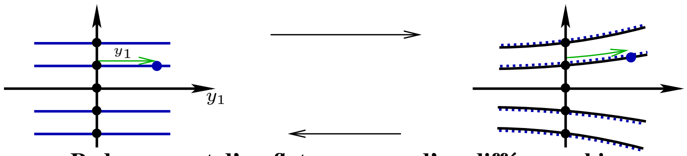
En effet, que ce soit du point de vue de l'intégration en termes de fonctions spéciales explicites, ou du point de vue de calculs numériques effectifs visant à connaître approximativement le flot d'un tel *champ de vecteurs* $X = \sum_{i=1}^n \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ (riche, grâce au support physique de son sens, d'une dynamique de création de réalité abstraite consistante), il se trouve que de nombreux problèmes délicats co-existent virtuellement à la donnée d'un tel objet X, lequel n'exprime par lui-même qu'une certaine *potentialité pure* de l'intégration. De même, la coprésence virtuelle du multiple théorique concerne aussi toute autre position d'un système d'équations aux dérivées partielles, selon que ces équations en système proviennent de la physique, ou qu'elles soient écrites d'une manière en quelque sorte gratuite, en profitant simplement de la richesse ontologique des univers fonctionnels. Autrement dit, la généralité très grande du choix des fonctions coefficients $\xi_1(x), \dots, \xi_n(x)$, supposés analytiques réels ou complexes par Engel et Lie, et ce, avec l'exigence implicite (et potentiellement ubiquitaire dans la *Theorie der Transformationsgruppen*) d'avoir à préciser ou de pouvoir en principe préciser la métamorphose et l'évolution des domaines d'existence, cette « *généralité-en-liberté* » constitue déjà, et aussi d'une certaine manière « *d'emblée à l'instant même de la déclaration hypothétique des étants* », une *position explicite d'un haut niveau d'abstraction décidé*. Penser et accepter les coefficients $\xi_i(x)$ en tant que fonctions analytiques générales et quelconques constitue en effet une abstraction particulièrement audacieuse pour le faisceau de problèmes spécifiques auxquels Clebsch, Mayer et d'autres contemporains de Lie se confrontaient régulièrement, et qui vont à présent être volontairement mis entre parenthèses. Il se trouve en effet que pour Lie, envisagé comme penseur opérant avec les concepts « as a whole » :

tout étant (être) fonctionnel s'articule à une incarnation géométrale, et c'est donc *en tant que* l'ontologie du fonctionnel va parvenir à s'abstraire pour se libérer de la matrice du spécial-explicite que cette ontologie va réussir à mieux découvrir ce qu'elle peut être et ce qu'elle peut devenir, voire éventuellement aussi ce qu'elle peut choisir de déclarer expressément sur elle-même dans les premiers moments de son auto-appropriation dans et par sa propre théorisation[1].

C'est pourquoi la donnée d'un unique opérateur différentiel $X = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ d'ordre 1 à plusieurs variables $x_1, \ldots, x_n$ va être envisagée par Lie dans l'abstraction géométrique pure de la collection de ses courbes intégrales, lesquelles sont par définition les courbes que l'on obtient en acceptant qu'il soit possible abstraitement de résoudre localement, quelles que soient les circonstances analytiques, l'équation $X(f) = 0$. Dans tous les cas connus et étudiés en petites dimensions depuis le seizième siècle et aussi dans de nombreux autres cas spécifiques, ces courbes, prises ensemble, forment toujours un empilement régulier, exactement comme le font les lignes de mouvement des particules d'un fluide physique en dehors des obstacles et des singularités. Les travaux de Cauchy dans le cas analytique et ultérieurement de Lipschitz, de Picard et d'autres lorsque les coefficients $\xi_i(x)$ sont supposés être seulement de classe $\mathscr{C}^1$, voire même lipschitziens, ont montré qu'il est justifié, grâce à un procédé d'itération infinie de type *Théorème du point fixe*, de penser que toute telle équation $X(f) = 0$ est complètement intégrable et possède en vérité toujours $(n-1)$ solutions mutuellement indépendantes. Il y a donc autant de courbes qu'il y a de dimensions transversales à une courbe donnée, c'est-à-dire une famille à $(n-1)$ paramètres de courbes, c'est-à-dire de solutions. Et lorsqu'on accepte l'homogénéité ontologique d'un univers géométrico-fonctionnel spécifié, par exemple, en supposant partout que les données sont à caractère analytique, il s'avère que l'acceptation de l'intégrabilité complète de l'équation $X(f) = 0$ — nonobstant les questions d'effectivité en termes numériques ou en termes de fonctions spéciales — revient à accepter que la collection

[1] Évidemment, l'enjeu ici dépasse la théorie des groupes de transformations, puisqu'il est clair que la fixation d'une ontologie homogène régulière par abstraction — et donc aussi par un appauvrissement corrélatif — des champs exploratoires constitue un universel de la pensée mathématique. Jamais d'ailleurs les déclarations de type axiomatique dans les systèmes hypothético-déductifs antiques ou modernes ne sont assez charpentées afin d'expliciter leurs *virtualités problématisantes* pour qu'on puisse soutenir sans conteste qu'elles assument vraiment la charge complète de l'*a posteriori* de leur développement. Au contraire, la nature ouverte des étants et ce qu'ils ont en eux de dynamique à caractère organique ne se révèlent toujours que *bien au-delà des seuils*, dans les moments synthétiques de la méditation survolante des théories que seul l'*a posteriori* d'une compréhension totalisante peut offrir.

des courbes intégrales du champ de vecteurs X puisse être *redressée localement* en une simple collection de *droites parallèles*.



Redressement d'un flot au moyen d'un difféomorphisme

Redressement d'une transformation infinitésimale. Et c'est au moment précis où la possibilité générale d'un redressement se dévoile à la pensée comme vérité démontrable que la réalité géométrique archaïque, partiellement relayée par des actes intuitifs qui doivent chercher à créer une certaine auto-évidence ciblée, engendre alors un nouvel aspect de l'ontologie analytique décidée en amont : par le théorème de redressement local, l'univers des étants analytiques s'avère en effet posséder en lui-même suffisamment de flexibilité pour *annuler toute ondulation*, ou plus exactement, pour embrasser toute ondulation en famille dans la normalité de directions linéaires uniformes. C'est donc ce fait surprenant que la théorie de Lie formule rigoureusement en termes de transformation d'un système d'équations différentielles vers une forme normale ultra-simple qui manifeste la *dynamique démonstrative* de l'irréversibilité mathématique.

Théorème. *Tout groupe continu de transformations à un paramètre :*

$$x_i' = \phi_i(x_1, \dots, x_n;\, t) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

satisfaisant des équations différentielles de la forme :

$$\frac{d\phi_i}{dt} = \xi_i(\phi_1, \dots, \phi_n) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

dirigées par la transformation infinitésimale (champ de vecteurs) :

$$X = \sum_{i=1}^{i=n} \xi_i(x_1, \dots, x_n)\, \frac{\partial}{\partial x_i}$$

est localement équivalent, après un certain changement de coordonnées locales de la forme :

$$y_i = y_i(x_1, \dots, x_n) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)},$$

à un simple groupe de translations restreint au premier axe y_1 dans ces nouvelles coordonnées :

$$y_1' = y_1 + t, \quad y_2' = y_2, \ \dots\dots, \ y_n' = y_n$$

dont le système d'équations aux dérivées partielles associé s'écrit simplement :

$$\frac{d\psi_1}{dt} = 1, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = 0, \; \ldots\ldots, \; \frac{d\psi_n}{dt} = 0,$$

et dont la transformation infintésimale directrice se réduit simplement à :

$$Y = \frac{\partial}{\partial y_1}.$$

À nouveau, il importe d'observer que le concept de système d'équations aux dérivées partielles d'ordre 1 s'inscrit dans une ontologie mobile et dynamique, en vertu de la modifiabilité du système de coordonnées, et que la décision théorique de Lie implique l'abandon total et définitif de tous les problèmes qui sont liés aux fonctions spéciales, à l'intégrabilité explicite, au comportement topologique global des courbes intégrales, à la présence de singularités, ou encore à la dynamique des feuilletages. Il y a donc bien là chez Lie une véritable *décision ontologique* par laquelle on choisit de découper un morceau ciblé de réel dans le tissu mathématique pluriel afin d'extraire certains étants mathématiques dont l'être est voulu spécifiquement épuré, et ce, afin d'*ouvrir* un champ d'exploration à visée géométrique et dont la nature va se transsubstantialiser progressivement vers l'algèbre.

On retrouve ici aussi l'importance de la décision de généricité, puisque le théorème de redressement énoncé à l'instant ne fonctionne essentiellement que localement, dans un certain voisinage d'un point où la transformation infinitésimale X ne s'annule pas. Ainsi, par cette définition volontaire d'une régionalité d'étude ciblée qui est implicitement signifiée au lecteur, Lie présente le redressement comme la toute première et la plus élémentaire de toutes les formes normales pour les groupes de transformations qu'il obtiendra ultérieurement dans son traité rédigé en collaboration avec Engel.

Le réel mathématique est pluriel, enchevêtré, d'une complexité supérieure à tout ce qui est imaginable. En profondeur, c'est pour cette raison que les théories mathématiques se restreignent à des inventions ciblées, à des décisions d'étude, à des choix spécifiques d'exploration. Par exemple, Lie semble parfaitement conscient de l'impossibilité d'effectuer la synthèse entre, d'une part, la théorie des groupes de transformations appliquée aux systèmes d'équations aux dérivées partielles, et d'autre part, une étude des comportements non génériques au voisinage des singularités — synthèse loin d'être réalisée de nos jours.

Du point de vue de la philosophie des mathématiques, ce qui est étonnant et quelque peu inexplicable au premier abord, c'est que les théories mathématiques, *même en restreignant considérablement leurs ambitions de réaliser des synthèses globales pour répondre à des faisceaux de questions* *entrelacées*, n'en demeurent pas moins déjà la plupart du temps d'une complexité qui *ouvre* sur l'irréalisabilité à cause d'indéfinitudes coprésentes. Autrement dit et parfois même après des spécifications très étroites, la plupart des branches mathématiques s'ouvrent en ramifications non achevées, voire inachevables. S'il est troublant, ce phénomène est aussi rassurant d'un point de vue métaphysique, en tant que les mathématiques apparaissent alors comme réservoir incomparable de liberté de penser.

Ici donc, le théorème de redressement d'un feuilletage régulier par les courbes intégrales d'une transformation infinitésimale (champ de vecteurs), pour géométriquement trivial et analytiquement simple qu'il soit, *ouvre sans qu'on s'en doute à cet instant* sur la classification des groupes continus de transformations, laquelle est irréalisable en totalité : germe de complexités du réel dans les principes les plus élémentaires, Lie s'y est engouffré et a pénétré seul en partant presque de zéro dans des régions extrêmement éloignées de la réalité mathématique.

Solutions mutuellement indépendantes d'une équation aux dérivées partielles. Maintenant, il est aisé de déterminer la solution générale f à une équation linéaire aux dérivées partielles du premier ordre $X(f) = 0$ comme ci-dessus. Les relocalisations libres étant autorisées, on peut supposer, après renumérotation éventuelle des variables, que le n-ème coefficient ξ_n ne s'annule pas dans un (petit) voisinage d'un point en lequel on centre l'origine du système des coordonnées. Après division par ξ_n, il est alors équivalent de rechercher des fonctions f qui sont annihilées par le nouvel opérateur différentiel :

$$X = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\xi_i(x)}{\xi_n(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_n},$$

toujours noté X par simplicité, dans lequel le coefficient de $\frac{\partial}{\partial x_n}$ est normalisé à 1, et qui satisfait maintenant $X(x_n) \equiv 1$.

Le système d'équations différentielles ordinaires qui définit les courbes intégrales de cette transformation infinitésimale, à savoir le système :

$$\frac{d\mathsf{x}_1}{dt} = \frac{\xi_1\big(\mathsf{x}(t)\big)}{\xi_n\big(\mathsf{x}(t)\big)}, \quad \ldots\ldots, \qquad \frac{d\mathsf{x}_{n-1}}{dt} = \frac{\xi_{n-1}\big(\mathsf{x}(t)\big)}{\xi_n\big(\mathsf{x}(t)\big)}, \qquad \frac{d\mathsf{x}_n(t)}{dt} = 1,$$

avec pour condition initiale, lorsque $t = 0$, un point arbitraire de l'hyperplan $\{x_n = 0\}$:

$$\mathsf{x}_1(0) = x_1, \ldots\ldots, \mathsf{x}_{n-1}(0) = x_{n-1}, \quad \mathsf{x}_n(0) = 0$$

est *résoluble* et possède — en vertu d'un théorème d'intégration établi à l'aide de séries majorantes à la Cauchy — pour unique solution vectorielle une certaine quantité déterminée de la forme :

$$\big(\mathsf{x}_1(x,t),\dots,\mathsf{x}_{n-1}(x,t),\mathsf{x}_n(x,t)\big)$$

qui est analytique dans un voisinage de l'origine. En fait, on a par une intégration évidente $\mathsf{x}_n(x,t)=t$, et les $(n-1)$ autres $\mathsf{x}_k(x,t)$ sont donnés par une formule exponentielle remarquable, fréquemment utilisée par Lie[2] :

$$\mathsf{x}_k(t)=\exp(tX)(x_k)=\sum_{l=0}^{+\infty}\frac{t^l}{l!}\,X^l(x_k)\qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n-1)},$$

où le symbole X^l agissant sur une fonction — ici la k-ème coordonnée x_k entendu comme fonction — quelconque f est défini par itération l fois de l'opérateur de différentiation X :

$$X^l(f):=\underbrace{X\big(\cdots\big(X}_{l\text{ fois}}(f)\big)\cdots\big).$$

Si l'on pose alors $t:=-x_n$ dans cette formule exponentielle — le signe 'moins' va être crucial — et si l'on introduit les $(n-1)$ fonctions $f_1,\dots,f_{n-1}$ définies par :

$$f_k(x_1,\dots,x_n):=\exp\big(-x_nX\big)(x_k)=\sum_{l=0}^{+\infty}(-1)^l\,\frac{(x_n)^l}{l!}\,X^l(x_k)$$
$$\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n-1),$$

alors la proposition suivante — énoncée ici sans démonstration — permet de conclure.

Proposition. *Les $(n-1)$ fonctions ainsi définies $f_1,\dots,f_{n-1}$ sont des solutions de l'équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre $X(f)=0$ qui sont* mutuellement indépendantes *au sens où leur matrice jacobienne $\big(\frac{\partial f_k}{\partial x_i}(x)\big)_{1\leqslant i\leqslant n}^{1\leqslant k\leqslant n-1}$ est de rang maximal égal à $n-1$ en tout point x. De plus, pour toute autre solution f de l'équation $X(f)=0$, il existe une fonction analytique locale $\Omega=\Omega_f\big(f_1,\dots,f_{n-1}\big)$ définie dans un voisinage de l'origine dans $\mathbb{K}^{n-1}$ et dépendant de f telle que :*

$$f(x)\equiv\Omega_f\big(f_1(x),\dots,f_{n-1}(x)\big),$$

pour tout x.

Que cette proposition soit énoncée sans démonstration technique ne doit pas dispenser d'en expliquer le contenu. La pensée mathématique procède par questionnements rudimentaires et par réponses synthétiques — souvent partielles, mais tel n'est pas le cas ici —, réponses qui « révèlent » en quelque sorte la nature et la texture de certains objets situés au préalable

[2] — mais qui perd tout sens lorsque les données sont seulement lisses, c'est-à-dire de classe $\mathscr{C}^\infty$, $\mathscr{C}^k$ ou $\mathscr{C}^1$, et non pas analytiques —

dans l'obscurité relative d'un inconnu partiel. La proposition ci-dessus dit *seulement* comment trouver les solutions, mais elle n'explique pas les *causes intrinsèques des vérités impliquées*, et elle ne dévoile pas non plus la métaphysique de ces $(n-1)$ formules exponentielles « magiques » :

$$\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \, \frac{(x_n)^l}{l\,!} \, X^l(x_k) \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1\,\cdots\,n-1).}$$

Du point de vue de la réception « phénoménologique » d'un tel résultat dans la conscience du mathématicien en action, habitué qu'il est à ce que les métaphysiques les plus complexes soient complètement sous-entendues dans la transmission écrite des connaissances, cette mise entre parenthèses fait partie des conventions nécessaires à une saine pratique efficiente de professionels, public auquel s'adressait Lie sans devoir expliciter à tout instant les soubassements spéculatifs de sa théorie. Tout compte fait, ne sont-ce pas principalement les caractéristiques synthétiques de la réponse qui importent, lorsqu'une question mathématique — modeste ici — reçoit une réponse complète et satisfaisante ? Aussi la philosophie des mathématiques se trouve-t-elle régulièrement transportée dans des positions qui sont assez inconfortables et insatisfaisantes sur le plan spéculatif, en tant que les mathématiques techniques jouent régulièrement en parallèle sur plusieurs niveaux de partitions de pensée qui, implicitement, *noient d'hétéronomie* tous les contenus étudiés. Ici en effet au contact d'une telle proposition technique, le philosophe des mathématiques devrait éprouver spontanément une exigence de méditation et de réflexion lente, mais ces aspects *nécessaires* de la pensée mathématique ne se voient pas du tout, ou plus du tout, exprimés dans la transmission écrite à travers le formalisme rhétorique standard de la présentation déductive : à nouveau, c'est « l'Atlantide du conceptuel », « l'Atlantide du causal », « l'Atlantide du méditationnel » qui s'interpose, expressions dans lesquelles le nom propre « Atlantide » renvoie à l'idée de submersion voir d'engloutissement de la pensée, phénomène d'autant plus regrettable qu'il s'étage sur plusieurs strates épochales de l'histoire des mathématiques, et qu'une grande proportion de la pensée mathématique technique reste néanmoins gouvernée par des tensions métaphysiques.

En vérité, loin s'en faut que l'écriture d'Engel et Lie, datant du dix-neuvième siècle, soit non-formalisée, non-axiomatique, non moderne, et donc par subreption implicitement imparfaite, car c'est en fait exactement le contraire, et il faudra s'attacher à démontrer cette affirmation dans certains des paragraphes qui vont suivre, car justement les aspects *questionnels*, *causaux*, *conceptuels*, *méditationnels*, sont mieux transmis que dans de nombreuses restitutions modernes de la théorie de Lie.

En tout cas, ici, la proposition technique en question a été énoncée, elle a dévoilé la solution à un problème précis, c'est-à-dire qu'un irréversible-synthétique été offert sans effort de recherche pour la pensée, en analogie lointaine avec le fait que le réel de la sensation s'offre aux sens comme un donné brut. Or pour des raisons méthodologiques ayant trait aux objectifs *philosophiques* de ces analyses, accord a été pris de ne pas entrer dans les démonstrations à la manière dont on le ferait dans un traité de mathématiques exhaustif ; au contraire, c'est l'occasion ici d'expliciter certains aspects de la pensée spéculative qui sont justement *masqués* dans les textes mathématiques formels.

Aussi, *pourquoi* les fonctions f_k sont-elles des solutions ? Voici donc maintenant la *cause* (calculatoire) du fait que les fonctions f_k sont des solutions de l'équation aux dérivées partielles $X(f) = 0$, cause qui explique d'une certaine manière *a posteriori* l'irruption du signe « moins » dans la formule exponentielle. Il s'agit en effet de vérifier que l'on a bien :

$$X(f_k) = 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1\cdots n-1)}.$$

Mais une application de la règle de Leibniz $X(fg) = fX(g) + gX(f)$ pour la différentiation d'un produit fg de deux fonctions f et g donne immédiatement, en posant $f := (x_n)^l$ et $g := X^l(x_k)$, où $l \in \mathbb{N}$ est un entier arbitraire et où l'indice inférieur k est compris entre 1 et $n-1$:

$$X\big[(x_n)^l\, X^l(x_k)\big] = l\,(x_n)^{l-1}\, X^l(x_k) + (x_n)^l\, X^{l+1}(x_k).$$

On en déduit par conséquent que l'application de cette différentiation X à chaque fonction f_k :

$$\begin{aligned}
X(f_k) &= X\bigg(\sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l\, \frac{(x_n)^l}{l\,!}\, X^l(x_k)\bigg)\\
&= \underbrace{\sum_{l=1}^{+\infty} (-1)^l\, \frac{l}{l\,!}\,(x_n)^{l-1}\, X^l(x_k)}_{\text{[noter que } \frac{l}{l!} = \frac{1}{(l-1)!} \text{ et remplacer } l \text{ par } l+1]} \qquad + \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l\, \frac{(x_n)^l}{l\,!}\, X^{l+1}(x_k)\\
&= \sum_{l=0}^{+\infty} \underbrace{(-1)^{l+1}}_{[= -(-1)^l]}\, \frac{(x_n)^l}{l\,!}\, X^{l+1}(x_k) + \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l\, \frac{(x_n)^l}{l\,!}\, X^{l+1}(x_k)\\
&= 0
\end{aligned}$$

fait apparaître, après quelques réorganisations simples expliquées en marge, deux séries infinies de termes dont les éléments s'annihilent immédiatement par paires correspondantes, phénomène qui est parfois appelé sommation

« téléscopique ». Ainsi, les $(n-1)$ formules :

$$f_k(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{l=0}^{+\infty} (-1)^l \, \frac{(x_n)^l}{l\,!} \, X^l(x_k) \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n-1)}$$

synthétisent, par un un processus de sommation infinie, un système complet de solutions.

Enfin, il reste encore à noter l'essence paradoxale de ces formules. En principe, résoudre une équation différentielle implique toujours un procédé d'*intégration*, mais ici d'une manière quelque peu surprenante, les solutions sont obtenues en sommant une infinité de termes $X^l(x_k)$ pondérés par les poids $(-1)^l \, \frac{(x_n)^l}{l\,!}$, lesquels termes :

$$X^l(x_k) = \underbrace{X\big(\cdots\big(X}_{l \text{ fois}}(x_k)\big)\cdots\big)$$

n'impliquent, pour être calculés, *que* des différentiations itérées des fonctions coordonnées x_k. Ainsi, l'intégration dans le cas analytique — les séries doivent converger pour avoir un sens — se ramène à une sommation de différentiations.

Ces *séries de Lie*, qui firent l'objet ultérieurement des premières travaux de l'algébriste Gröbner, impliquent alors clairement l'acceptation ontologique de résolubilité « géométrique » de toute équation aux dérivées partielles linéaire du premier ordre — dans le cas analytique — acceptation qui va devenir fondatrice d'un champ d'étude où la géométrie synthétique de Lie choisira de neutraliser et d'exclure certains des problèmes naturels de l'Analyse.

Intégrabilité des systèmes d'équations aux dérivées partielles. À présent, que se passe-t-il lorsqu'on a affaire non pas à une équation aux dérivées partielles, mais à un nombre $q \geqslant 2$ de telles équations aux dérivées partielles linéaires d'ordre 1 :

$$X_1(f) = 0, \ \ldots, \ X_q(f) = 0,$$

comme mentionné au début de ces considérations. Toute solution f satisfait alors trivialement aussi chaque équation de la forme :

$$X_j\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_j(f)\big) = 0$$
$${\scriptstyle (j,\ k\,=\,1\,\cdots\,n).}$$

Mais il s'avère ensuite par un calcul que la soustraction, dans ce commutateur de Jacobi $X_j\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_j(f)\big)$, des deux termes en lesquels les places de j et de k ont été interverties :

$$\begin{aligned}
X_j\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_j(f)\big) &= \sum_{i_1=1}^n \xi_{ji_1}\,\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\bigg(\sum_{i_2=1}^n \xi_{ki_2}\,\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}\bigg) - \sum_{i_1=1}^n \xi_{ki_1}\,\frac{\partial}{\partial x_{i_1}}\bigg(\sum_{i_2=1}^n \xi_{ji_2}\,\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}}\bigg) \\
&= \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n \bigg(\xi_{ji_1}\,\frac{\partial \xi_{ki_2}}{\partial x_{i_1}}\,\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}} + \underline{\xi_{ji_1}\,\xi_{ki_2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}}_{\circ}\bigg) - \\
&\quad - \sum_{i_1=1}^n\sum_{i_2=1}^n \bigg(\xi_{ki_1}\,\frac{\partial \xi_{ji_2}}{\partial x_{i_1}}\,\frac{\partial f}{\partial x_{i_2}} + \underline{\xi_{ki_1}\,\xi_{ji_2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}}_{\circ}\bigg) \\
&= \sum_{i=1}^n \bigg(\sum_{l=1}^n \xi_{jl}\,\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \xi_{kl}\,\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_l}\bigg)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}
\end{aligned}$$

fait incidemment disparaître tous les termes différentiés $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}$ qui sont du second ordre — fait notifié ci-dessus par des soulignements, modulo l'interversion d'indices $i_1 \leftrightarrow i_2$ dans la seconde somme double. Ces nouvelles équations différentielles, notées :

$$\begin{aligned}
(X_j\,X_k)(f) &:= \sum_{i=1}^n \xi_{jki}(x)\,\frac{\partial}{\partial x_i} \\
\text{avec : }\quad \xi_{jki}(x) &:= \textstyle\sum_{l=1}^n \xi_{jl}\,\frac{\partial \xi_{ki}}{\partial x_l} - \sum_{l=1}^n \xi_{kl}\,\frac{\partial \xi_{ji}}{\partial x_l}
\end{aligned}$$

par Lie s'ajoutent ainsi en quelque sorte *gratuitement, spontanément et nécessairement* au système initial $X_1(f) = \cdots = X_q(f) = 0$, et elles doivent alors aussi être considérées sur un plan d'égalité avec les équations dont on était parti, puisque f en est toujours solution ; ce sont des équations « cachées », « implicites », « coprésentes dans l'ombre du calcul », véritables exemplifications de la manifestation d'une métaphysique irréversible des synthèses mathématiques, en tant que ces synthèses révèlent progressivement des objets nouveaux qui étaient invisibles dans les moments premiers d'interrogation initiale.

En effet, la création spontanée de ces couples antisymétriques $(X_j\,X_k)$ *ouvre* vers un système qui sera constitué d'un nombre *a priori* plus élevé $q + \frac{q(q-1)}{2}$ d'équations aux dérivées partielles linéaires du premier ordre :

$$0 = X_1(f) = \cdots = X_q(f) = (X_1\,X_2)(f) = \cdots = (X_{q-1}\,X_q)(f).$$

Et c'est ici que la différence entre le cas $q = 1$ et les cas $q \geqslant 2$ se voit le mieux, puisque l'on a trivialement $(X\,X) \equiv 0$ pour tout opérateur X, et donc aucune équation n'est à ajouter de la sorte dans le cas $q = 1$, au sujet duquel on a déjà vu comment peut s'effectuer la résolution.

Dans le cas général où $q \geqslant 2$, le nombre $\frac{q(q-1)}{2}$ de nouvelles équations est toujours $\geqslant 1$, ce qui impose d'avoir égard à la dialectique de la différence et de la répétition. Autrement dit, la question naturelle qui se pose à présent est inévitablement : ces nouvelles équations sont-elles distinctes, sont-elles redondantes, ou plus généralement encore, sont-elles en partie distinctes et en partie redondantes ? C'est d'une certaine manière toujours ainsi que les métaphysiques du monde réel et de la pensée *gouvernent incidemment* le déploiement des théories mathématiques, à cause d'un maintien des questionnements archaïques qui s'avèrent incontournables pour le développement non contradictoire et complet des théories.

En effet, l'identique et le distinct demeurent hypothétiques et également possibles dans tout étude mathématique qui se place intentionnellement dans un champ de généralité élevé. Ici, il va sans dire que le procédé de Jacobi doit de surcroît être itéré un nombre non limité de fois : à nouveau ensuite, on doit prendre les $\frac{Q(Q-1)}{2}$ crochets de Jacobi-Lie entre les $Q := q + \frac{q(q-1)}{2}$ équations construites à l'instant, et continuer ainsi de suite, peut-être une infinité de fois. L'ouverture combinatoire créée par les crochets de Jacobi-Lie pourra-t-elle alors appeller une fermeture — au moins provisoire — quant au nombre d'équations qu'il faut en fait considérer avant de parler de résolution possible ? Ce qui est remarquable ici, avec la perspective de connaissances mathématiques plus récentes, c'est que le champ impliqué par la considération des systèmes dérivés à la Lie ouvre sur de nombreux sous-domaines de la géométrie différentielle qui sont actifs de nos jours et qui peuvent demeurer ouverts indéfiniment d'une manière pérenne : classification des algèbres de Lie nilpotentes associées aux distributions de k-plans totalement non-holonomes ; aspects effectifs du théorème d'accessibilité de Chow ; formules explicites pour les crochets itérés entre les champs de vecteurs ; généricité des distributions via théorèmes de transversalité dans les espaces de jets ; analyse sur les variétés sous-riemannienne ; structure des algèbres de Lie libres ; théorème de Nagano, de Sussmann ; construction de connexions de Cartan-Tanaka ; géométrie de Cauchy-Riemann locale ; classification des singularités des systèmes non intégrables ; *etc.* Face à de telles ouvertures qui n'étaient pas forcément invisibles ou insoupçonnables à l'époque de Lie, une posture philosophico-mathématique doit être choisie et décidée, à savoir, l'*abstraction non effective des procédés*.

C'est en effet un véritable raisonnement par abstraction que Lie effectue lorsqu'il contrôle d'une manière non effective et dans tous les cas possibles le nombre maximal de prises crochets de Jacobi itérés. En effet, grâce à un raisonnement élémentaire qui contourne toutes sortes d'aspects délicats pouvant ouvrir sur d'autres domaines de l'exploration mathématique (notamment, le calcul explicite de ces crochets itérés), Lie démontre aisément qu'après un certain nombre, *fini*, d'étapes, on peut supposer que le nouveau système, noté :

$$X_1(f) = \cdots = X_{q'}(f) = 0$$

et qui incorore un certain nombre des q' équations initiales — mais pas toujours leur totalité — satisfait les deux propriétés de *fermeture et de stabilités* suivantes, déjà comprises dans les travaux de Frobenius, Clebsch et prédécesseurs :

(i) en tout point x (dans un sous-domaine éventuellement restreint et relocalisé de l'espace), les q' directions vectorielles $X_1(x), \dots, X_{q'}(x)$ sont linéairement indépendantes ;

(ii) pour tous indices $j, k = 1, \dots, q'$, il existe des fonctions appropriées $\chi_{jk1}(x), \dots, \chi_{jkq'}(x)$ au moyen desquelles chaque crochet $(X_j\, X_k)$ se décompose selon le repère associé au système d'équations aux dérivées partielles :

$$X_j\big(X_k(f)\big) - X_k\big(X_j(f)\big) = \chi_{jk1}(x)\, X_1(f) + \cdots + \chi_{jkq'}(x)\, X_{q'}(f);$$

Ainsi, c'est la considération du nombre d'équations indépendantes — nombre toujours borné par la dimension ambiante n — qui permet de contrôler et de borner de manière finie la prolifération des équations, en prenant appui sur le principe de délocalisation en un point générique. Fruit de ses méditations et de ses travaux précédents, Lie sait à l'avance que même en acceptant ce principe de restriction générique, la ramification mathématique de sa théorie sera indéfinie et non complètement dominable par l'esprit. Même si la complexité des théorèmes de la théorie des groupes de transformations ne se manifeste pas encore à ce niveau, même si l'étude de la résolubilité du théorème de Frobenius avec des singularités (travaux de Malgrange) ou l'existence de séparatrices en présence de singularités pour les feuilletages holomorphes locaux en dimension deux (théorème de Seidenberg) constitueraient en elle-même un champ tout à fait légitime d'exploration, on soupçonne bien ici en quoi raisonner par abstraction et généralité laisse néanmoins libre tout un champ de possibilités « zoologiques », en tant que la dimension *quelconque* n et le nombre *quelconque* q d'équations formant un système *complet* (au sens des propriétés **(i)** et **(ii)**) pourront héberger de nombreux groupes

Théorème de Clebsch-Frobenius. Phénomène récurrent dans le tissu mathématique, toute condition de fermeture obtenue après analyse et réparation d'imperfections initiale sait déboucher sur un résultat définitif. La reformulation du théorème de Clebsch-Frobenius que choisissent Lie et Engel met l'accent sur la résolubilité du système d'équations aux dérivées partielles : en complète analogie avec le cas $q = 1$, des formules sont données qui généralisent ce cas.

Théorème 12. ([**146**], p. 91) *Tout système complet à q termes :*

$$\frac{\partial}{\partial x_{n-q+k}} + \sum_{i=1}^{i=n-q} \eta_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad\qquad (i = 1 \cdots q)$$

dont les coefficients η_{ki} se comportent régulièrement dans un voisinage de $x_1 = x_1^0$, …, $x_n = x_n^0$ possède $n - q$ solutions indépendantes $x_1^{(q)}$, …, $x_{n-q}^{(q)}$ qui se comportent régulièrement dans un certain voisinage de $x_1 = x_1^0$, …, $x_n = x_n^0$ et qui de plus, se réduisent à $x_1, \ldots, x_q$ après la substitution $x_{n-q+1} = x_{n-q+1}^0$, …, $x_n = x_n^0$.

Interprété géométriquement, ce théorème énonce une condition nécessaire et suffisante pour qu'un système analytique de q-plans dans l'espace des $(x_1, \ldots, x_n)$ se réalise comme collection des plans tangents à une certaine famille de sous-variétés de dimensions q, saisies localements, et ce, bien entendu, en un point générique, et aussi en filigrane, avec une coprésence questionnante potentielle (au moins pour nous, bien qu'elle apparaisse comme vraisemblablement absente de la pensée de Lie) quant à ce qui pourrait se passer dans un voisinage de singularités éventuelles. En tout cas, le caractère élémentarisé de ce théorème maintenant appelé universellement *Théorème de Frobenius* en géométrie différentielle constitue aussi le point de départ de la théorie globale des feuilletages, telle qu'elle s'est développée à partir des années 1950, notamment avec les travaux de Reeb. Confirmation supplémentaire du fait que toute fermeture synthétique locale dans un champ mathématique théorique donné laisse toujours l'étude de l'objet s'échapper d'elle-même, phénomène qui peut et qui doit être proprement appelé *ouverture* des mathématiques.

Du point de vue de la réalité mathématique archaïque, le théorème réfléchit sur la manière de ressaisir, par-delà une généralité fonctionnelle immédiate qui est celle des systèmes de coefficients de champs de directions, des conditions qui assurent la cohésion macroscopique d'un systèmes d'écailles infinitésimales. Plus avant encore dans l'archaïsme originaire, le théorème cherche à retrouver la figure ultra-simple des empilements pseudo-parallèles de courbes ou de surfaces, en rabattant irréversiblement la pensée vers la géométrie.

Le progrès incessant de l'irréversible-synthétique chez Lie

Systèmes d'équations admettant une transformation infinitésimale. Dans les chapitres 6, 7 et 8 du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen*[1], à la suite de la démonstration du théorème de Clebsch-Frobenius, Engel et Lie entament des considérations générales sur les systèmes d'équations qui restent invariants sous l'action d'une ou plusieurs tranformations infinitésimales, dans un espace à un nombre quelconque de dimensions, et ce, *a priori* sans aucune hypothèse restrictive, que ce soit sur la nature des équations en question, ou sur la complètude des systèmes d'opérateurs différentiels considérés. Ces trois chapitres articulent un moment théorique important dont l'extension en généralité est, du point de vue de l'architecte Lie, suffisamment primordiale pour devoir apparaître *avant* les trois théorèmes fondamentaux sur la structure des groupes et algèbres de Lie (Chapitre 9[2]). En effet, le problème général s'applique : 1) à l'étude abstraite des groupes de tranformations ; 2) à l'étude des orbites de l'action adjointe d'un groupe continu sur son algèbre infinitésimale ; 3) à la classification des sous-algèbres infinitésimales des algèbres de Lie des groupes projectifs ; 4) et aussi à l'étude des symétries de Lie des équations aux dérivées partielles. Il est frappant de constater que les restitutions modernes de ces idées[3] sont *moins générales* et plus restrictives que celles élaborées par Engel et Lie dans leur traité.

Le problème est le suivant. Dans l'espace réel ou complexe des variables $x_1, \dots, x_n$, on considère un système de $n - m$ équations analytiques ou algébriques quelconques :

$$\Omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \; \dots\dots, \; \Omega_{n-m}(x_1, \dots, x_n),$$

et l'on se donne pour commencer une transformation infnitésimale arbitraire :

$$X(f) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n) \, \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Comment comprendre et exprimer le fait que le groupe à un paramètre de transformations associé à $X(f)$ stabilise les points situés dans l'ensemble

---

[1] *Voir* [**146**] et [**322**] pour une traduction anglaise.

[2] *Voir* [**320**], § 3.8, pp. 131–158, pour des analyses qui ne seront pas reproduites ici.

[3] *Voir e.g.* [**346, 347**].

commun des zéros des Ω_k ? Ici, les variables $x_1, \dots, x_n$ pourraient abréger les coordonnées (fort nombreuses) d'un certain espace de jets, et les équations $\Omega_k = 0$ pourraient représenter les équations partiellement algébriques qui seraient associées, dans l'espace de jets, à un système d'équations aux dérivées partielles, la condition de stabilisation des points de l'ensemble $\{\Omega_k = 0\}$ signifiant que *les transformations intégrées transforment les graphes de solutions au système d'*EDP *en graphes de solutions*.

De manière quelque peu surprenante pour qui en resterait à la 'mythologie' de mathématiques pré-axiomatiques non parfaitement rigoureuses et cantonnées à la seule étude des comportements génériques, Lie aborde la question en deux moments : d'abord avec des hypothèses d'indépendance, puis sans aucune hypothèse, c'est-à-dire en parfaite complétude exploratoire.

Définition naturelle : Lie dit que le système $\{\Omega = 0\}$ — brièvement écrit sans indices — *admet* [*gestattet oder zulässt*] le groupe à un paramètre $\exp(tX)(x)$ si l'on a $\Omega\big(\exp(tX)(x)\big) = 0$ pour tout t dès que x appartient à $\{\Omega = 0\}$. Par différentiation $\frac{d}{dt}\big|_0$ relativement à t en $t = 0$, il découle immédiatement de cette condition que tous les $X\Omega_k$, $k = 1, \dots, n-m$, s'annulent en tout point de $\{\Omega = 0\}$.

> Ces considérations nous conduisent à mettre en place la définition suivante :
>
> *Un système d'équations :*
>
> $$\Omega_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \;\dots\dots,\; \Omega_{n-m}(x_1, \dots, x_n) = 0$$
>
> admet *la transformation infinitésimale Xf dès que les $n-m$ expressions $X\Omega_k$ s'annulent au moyen*[4] *du système des équations.* [**322**], 122

Immédiatement, la question réciproque se pose de savoir si *inversement*, le fait que les $X\Omega_k$ s'annulent sur $\{\Omega = 0\}$ implique que les tranformations

[4] Malgré les apparences premières, cette notion — non définie expressément et qui pourrait sembler n'avoir qu'un sens algébrique — pour une fonction de s'annuler 'au moyen' d'un système d'équations n'a en fait rien de problématique, puisqu'elle revient à demander que $X_k f(x_0) = 0$ s'annule en tout point x_0 de l'ensemble $\{\Omega = 0\}$. Par ailleurs, dans la concrétude des exemples extrêmement nombreux étudiés par Lie dans ses travaux de classification des groupes (Volume 3 de la *Theorie der Transformationsgruppen*), la notion possède un sens plus algébrique, réinterprétable en termes d'idéaux. Le lecteur formé aux définitions formalistes contemporaines pourra reprocher dans un premier instant l'absence de précision définitionnelle, mais ce serait faire erreur ici que de se détourner de la théorie de Lie sous un prétexte aussi mineur, puisque presque immédiatement dans les pages qui suivent, la dialectique entre le générique et le non générique va forcer ladite définition à se réaliser sous forme d'un théorème précis, rigoureux, irréprochable. Autrement dit, une définition conceptuelle initiale est soumise à des tensions qui la forcent à s'éclaircir, à se dévoiler, à se justifier.

intégrées $\exp(tX)(x)$ stabilisent $\{\Omega = 0\}$. C'est d'ores et déjà à ce moment-là que la *bifurcation nécessaire entre le générique et le non-générique* va s'avérer créatrice d'une réalité mathématique à laquelle la force génétique de Lie va devoir se confronter. Pour anticiper les conclusions générales, c'est aussi en cela que la mathématique de Lie pourra être qualifiée d'*universelle*, en tant qu'elle s'*attèle* à la résolution de toute question qui se présente sur le chemin d'une théorie nouvelle des groupes continus de transformations, sachant évidemment par ailleurs que sa mathématique est *particulière*, en tant que thématiquement focalisée sur la réalisation d'un analogue continu de la théorie de Galois discrète pour les équations algébriques.

En tout cas, dans ces chapitres 6, 7 et 8, la dialectique entre le générique et le non-générique ne concernera *que* les familles de transformations infinitésimales. Toujours en effet, les *équations* (algébriques ou analytiques) seront étudiées *après relocalisation* en des points où des déterminants fonctionnels satisfont des hypothèses de rang constant. Pour une première approche, Engel et Lie sont en effet particulièrement clairs sur l'hypothèse qu'ils sous-entendront dans tous les énoncés de théorèmes et propositions qui suivront.

> Mais avant toute chose, nous voulons encore faire l'observation suivante. Nous considérons naturellement seulement les systèmes d'équations :
>
> $$\Omega_1 = 0, \, \ldots, \, \Omega_{n-m} = 0$$
>
> qui sont réellement satisfaits par certains systèmes de valeurs $x_1, \ldots, x_n$; en même temps, nous nous restreignons *toujours* aux systèmes de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ dans le voisinage desquels les fonctions $\Omega_1, \ldots, \Omega_{n-m}$ se comportent régulièrement. De plus, nous voulons *une fois pour toutes* nous accorder sur la chose suivante : à moins que le contraire ne soit expressément autorisé, tout système d'équations $\Omega_1 = 0$, ..., $\Omega_{n-m} = 0$ que nous considérons devra être constitué de telle sorte que les $(n-m) \times (n-m)$ déterminants de la matrice :
>
> $$(1) \qquad \left| \begin{array}{ccc} \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Omega_{n-m}}{\partial x_n} \end{array} \right|$$
>
> ne s'annulent pas tous au moyen de $\Omega_1 = 0$, ..., $\Omega_{n-m} = 0$. [**322**], 121

> Il reste encore à démontrer que la définition énoncée ci-dessus est aussi indépendante de la forme du système d'équations $\Omega_1 = 0$, ..., $\Omega_{n-m} = 0$. Ce n'est que lorsqu'on aura établi ce fait que la légitimité de la définition sera réellement établie. [**322**], 123

Enfin, toute définition comprend en elle-même la question de son adéquation propre, qui peut soit confirmer et stabiliser une ontologie sous-jacente riche, soit rebondir en germes d'ouverture.

Cette hypothèse de non-annulation garantira incidemment, grâce à un lemme communément appelé aujourd'hui 'de Hadamard[5]', que la condition de « s'annuler au moyen de » a un sens mathématique précis et contrôlé.

Le premier énoncé démontré par Engel et Lie[6] stipule en effet que si un tel système d'équations :

$$\Omega_1(x_1,\dots,x_n)=0,\ \dots\dots,\ \Omega_{n-m}(x_1,\dots,x_n)=0$$

admet une transformation infinitésimale :

$$Xf=\sum_{i=1}^{n}\xi_i(x_1,\dots,x_n)\,\frac{\partial}{\partial x_i},$$

et si $V=V(x_1,\dots,x_n)$ est une fonction qui s'annule au moyen de ce système d'équations, alors la fonction XV s'annule *aussi* au moyen de $\Omega_1=0$, ..., $\Omega_{n-m}=0$. Grâce à la condition que $\{\Omega=0\}$ est une sous-variété lisse, cette proposition est démontrée en induisant toutes les considérations à l'intérieur de la sous-variété, représentée sous la forme d'un graphe :

$$x_1=\varphi_1(x_{n-m+1},\dots,x_n),\ \dots\dots,\ x_{n-m}=\varphi_{n-m}(x_{n-m+1},\dots,x_n).$$

Conséquence directe par application répétée à $V:=\Omega_k$, $k=1,\dots,n-m$:

Théorème 14. *Le système d'équations :*

$$\Omega_1(x_1,\dots,x_n)=0,\ \dots\dots,\ \Omega_{n-m}(x_1,\dots,x_n)=0$$

admet toutes les transformations du groupe à un paramètre Xf si et seulement si il admet la transformation infinitésimale Xf, c'est-à-dire, lorsque toutes les $n-m$ expressions $X\Omega_k$ s'annulent au moyen de $\Omega_1=0$, ..., $\Omega_{n-m}=0$.

Scholie. Comme tant d'autres conditions nécessaires et suffisantes qui sont liminaires à une théorie, ce premier énoncé n'a ni le statut d'une tautologie, ni celui d'une pure équivalence entre deux conditions, contrairement à ce que son architecture logique pourrait laisser croire. En effet, des deux conditions, la première est plus délicate et plus coûteuse en termes de vérification, puisqu'elle requiert une connaissance des équations *intégrées* du groupe à un paramètre, alors que la seconde, d'une nature purement différentielle, ne demande que de différentier selon X chaque équations $\Omega_k=0$ et de 'voir

[5] *Toute fonction locale $f=f(x_1,\dots,x_n)$ de classe au moins $\mathscr{C}^1$ qui s'annule sur une sous-variété locale lisse $N\subset\mathbb{R}^n$ de codimension c représentée par des équations $r_1(x)=\cdots=r_c(x)=0$ de classe au moins $\mathscr{C}^1$ s'écrit sous la forme :*

$$f(x)=r_1(x)\,\widetilde{f}_1(x)+\cdots+r_c(x)\,\widetilde{f}_c(x),$$

pour certains restes-multiplicateurs $\widetilde{f}_i(x)$ de classe au moins $\mathscr{C}^0$.

[6] [**322**], Chap. 7, Prop. 2, p. 124.

ou vérifier' (dans les applications concrètes) qu'elles sont conséquence des equations $\Omega_k = 0$. □

Lie montre ensuite par un contre-exemple que la condition de maximalité du rang de la matrice jacobienne des Ω_k joue un rôle.

> On peut voir que le Théorème 14 n'est plus vrai lorsque l'hypothèse sur les déterminants de la matrice (1) n'est pas satisfaite. En effet, considérons par exemple le système d'équations :
>
> $$\Omega_1 = x_1^2 = 0, \ \ldots, \ \Omega_{n-m} = x_{n-m}^2 = 0,$$
>
> au moyen duquel tous les déterminants $(n-m) \times (n-m)$ de la matrice (1) s'annulent. On trouve pour ces équations : $X\Omega_k = 2\,x_k\,Xx_k$, donc tous les $X\Omega_k$ s'annulent au moyen de $\Omega_1 = 0, \ldots, \Omega_{n-m} = 0$, quelle que soit la forme que peut avoir Xf. Par conséquent, si le Théorème 14 était encore vrai ici, le système d'équations :
>
> $$x_1^2 = 0, \ \ldots, \ x_{n-m}^2 = 0$$
>
> admettrait n'importe quel groupe à un paramètre Xf, ce qui, manifestement, n'est pas le cas. [**322**], 126

On trouve donc dans Lie des exemples d'espaces analytiques *non réduits*. Interprétation directe : la condition que les $X\Omega_k$ s'annulent sur l'ensemble $\{\Omega = 0\}$ est nécessaire, mais non suffisante, pour qu'il soit stabilisé localement par le flot d'un groupe à un paramètre. En vue d'applications ultérieures, Engel et Lie sont ainsi amenés à présenter une proposition — sans surprise dans son principe — qui dégage une hypothèse *naturellement suffisante* afin d'assurer la stabilité par un flot d'un ensemble quelconque de zéros *lorsqu'aucune hypothèse n'est faite sur le déterminant fonctionnel*. Sur cet exemple simple, on voit toute la force rhétorique de la pensée qui progresse *dialectiquement par dégagement d'hypothèses nouvelles afin d'embrasser un plus large univers de cas dégénérés*.

Proposition. 3 ([**322**], p. 126) *Si, dans les variables $x_1, \ldots, x_n$, un système d'équations :*

$$\Delta_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ \Delta_s(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

est donné, au sujet duquel il n'est pas supposé que ses équations sont mutuellement indépendantes, et même moins, que les déterminants $s \times s$ de la matrice :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Delta_1}{\partial x i_1} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_1} & \cdot\,\cdot & \frac{\partial \Delta_s}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

s'annulent ou ne s'annulent pas au moyen de $\Delta_1 = 0, \ \ldots, \ \Delta_s = 0$, alors ce système d'équations admet sûrement toutes les transformations d'un groupe à un paramètre Xf lorsque les s expressions $X\Delta_\sigma$ peuvent être représentées *sous la forme :*

$$X\Delta_\sigma \equiv \sum_{\tau=1}^{s} \rho_{\sigma\tau}(x_1, \dots, x_n)\, \Delta_\tau \qquad\qquad (\sigma = 1 \cdots s),$$

et lorsque, au même moment, les $\rho_{\sigma\tau}$ se comportent régulièrement pour les systèmes de valeurs $x_1, \dots, x_n$ qui satisfont le système d'équations $\Delta_1 = 0, \dots, \Delta_s = 0$.

Scholie. Aspect remarquable d'une telle formulation : la *non-hypothétisation* est explicitement écrite et prononcée dans la durée d'une énonciation propositionnelle pure. Loin d'avoir réduit l'énoncé à une simple conséquence 'logique' entre une hypothèse affaiblie et une conclusion intéressante, Lie *veut* que le *sens oppositionnel* de l'hypothèse *non-hypothétisante* apparaisse explicitement dans le *moment-pensé* de la proposition, comme exigé par les structures d'*une* phénoménologie mathématique universelle. □

Bien entendu, la démonstration revient seulement — dans le cas analytique – à appliquer un nombre quelconque de fois la dérivation X aux equations $X\Delta_\sigma = \sum_{\tau=1}^{s} \rho_{\sigma\tau}\, \Delta_\tau$, ce qui donne tout d'abord :

$$\begin{aligned} XX\Delta_\sigma &\equiv \sum_{\tau=1}^{s} \left\{ X\rho_{\sigma\tau} + \sum_{\pi=1}^{s} \rho_{\sigma\pi}\, \rho_{\pi\tau} \right\} \Delta_\tau \\ &=: \sum_{\tau=1}^{s} \rho_{\sigma\tau}^{2}\, \Delta_\tau, \end{aligned}$$

et à vérifier ensuite (aisément) par récurrence sur la longueur de différentiations successives qu'il existe, pour tout $l \geqslant 1$, certaines fonctions-coefficients $\rho_{\sigma\tau}^{l} = \rho_{\sigma\tau}^{l}(x)$ assurant que les dérivées itérées des Δ_σ sont encore combinaisons des Δ_τ :

$$\underbrace{X\big(\cdots\big(X}_{l \text{ fois}}(\Delta_\sigma)\big)\cdots\big) = \sum_{\tau=1}^{s} \rho_{\sigma\tau}^{l}\, \Delta_\tau,$$

pour en déduire une formule :

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma\big(\exp(tX)(x)\big) &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l}{l!}\, X^l(\Delta_\sigma)(x) \\ &= \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{t^l}{l!}\, \rho_{\sigma\tau}^{l}(x)\, \Delta_\tau(x), \end{aligned}$$

qui montre immédiatement que $x \in \{\Delta = 0\}$ implique de même $\exp(tX)(x) \in \{\Delta = 0\}$ pour tout t.

Scholie. Dans la théorie des singularités, la notion de champ de vecteur tangent à un espace analytique singulier reprend essentiellement la définition donnée par Lie. Aspect évident d'universalité, donc, de la pensée de Lie, en relation avec la pensée mathématique dans son ensemble : le questionnement coprésent est signalé, exprimé, pris en charge, et maintenu dans une ouverture qui lui est propre. Qu'on n'entende néanmoins pas ici de renvoi herméneutique — légitime par ailleurs — à des relectures historiques, puisque la théorie de Lie progresse dans un mouvement d'abstraction autonome qui lui est propre et dont de nombreux aspects ne furent plus modernisés ou développés ultérieurement. □

Question inverse : déterminer les systèmes invariants par un groupe. En première lecture, les §§ 31 à 36 du long Chapitre 7 dans le Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* pourront surprendre quant à leur objectif, inhabituel voire inconnu pour la théorie moderne des groupes de Lie. Déjà au début du chapitre, une annonce avait été faite qui pourrait avoir été inaperçue à cet instant-là, car *le réflexe de l'objectalité pousse toujours à se le représenter comme un donné*.

> Tout d'abord, nous allons définir ce qui doit être entendu par la phrase que le système d'équations :
>
> $$\Omega_1(x_1,\dots,x_n)=0,\ \dots\dots,\ \Omega_{n-m}(x_1,\dots,x_n)=0$$
>
> admet la transformation infinitésimale $X(f)$. Ensuite, nous allons résoudre le problème extrêmement important de déterminer tous les systèmes d'équations qui admettent des transformations infinitésimales données*. [**322**], 121

Scholie. Problème inverse, donc : non pas élaborer des critères et des algorithmes pour savoir si et quand une certaine sous-variété effectivement donnée est invariante par un flot, mais au contraire *faire naître* tous les systèmes d'équations possibles qui soient invariants par une collection quelconque de transformations infinitésimales, *sans aucune hypothèse d'intégrabilité*. Analogie lointaine aussi — et toutefois certaine — avec la *méthode inverse d'Abel*, analysée par Vuillemin : non seulement l'*inversion* d'une question change radicalement les perspectives, mais surtout, elle est *exigée a posteriori* par la réminiscence d'un champ de pré-exploration mathématique. C'est en vertu de telles exigences internes que Lie construit ainsi les premières portes d'entrée dans sa théorie des groupes continus de transformations : il l'inscrit d'emblée dans une théorie potentiellement plus générale des systèmes *quelconques* d'équations aux dérivées partielles. □

* Cf. Lie, Scientific Society of Christiania 1872–74, as also Math. Ann. Vol. XI, Vol. XXIV, pp. 542–544.

Dans le paragraphe précédent, nous avons montré que la détermination de tous les systèmes d'équations qui admettent le groupe à un paramètre Xf revient à déterminer tous les systèmes d'équations qui admettent la transformation infinitésimale[7] Xf. Donc la question surgit de rechercher [*Es entsteht daher die Frage nach*] tous les systèmes d'équations $\Omega_1 = 0, \dots, \Omega_{n-m} = 0$ $(m \leqslant n)$ qui admettent la transformation infinitésimale :

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

[**322**], 128

Scholie. Premier moment, *rappel d'une progression* : à partir de maintenant, l'invariance peut et doit être envisagée exclusivement au niveau infinitésimal. Au delà d'un simple rôle rhétorique, ce rappel exprime principalement la nécessité de re-mobiliser une nouvelle *force d'avancement*. Le critère précédent :

$$X\Delta \in \big\langle \Delta \big\rangle$$

doit donc s'instituer comme un nouveau point de départ élémentaire, simple reprise de la question originaire, en un point de la théorie encore situé non loin du son point de départ initial et toujours loin de tout point d'achèvement, surtout lorsque le champ intrinsèque est ouvert dans une indéfinitude de principe. Ledit critère n'a en effet réalisé qu'un tout premier geste d'avancement, dans et à travers lequel la distance au but visé doit demeurer capable de se penser et de s'auto-évaluer. □

Scholie. L'expression : 'revient à' n'est donc en aucun cas à interpréter comme une réponse aux questions que Lie se pose. Les vraies questions mathématiques exercent leur tension à un niveau beaucoup plus élevé ; dans l'irréversible-synthétique, seules des micro-transitions peuvent être prétendues résolues par une proposition, par une équivalence, par un lemme. C'est bien en cela que le *maintien du questionnement* appartient toujours implicitement à la dynamique de l'exposition mathématique, en tant que la *mémoire permanente de l'inachèvement coprésent* irrigue d'imperfections toutes les forces actives de réalisation. Chez Engel et Lie, ce *travail du maintien d'ouverture au sein du progrès dans l'irréversible-synthétique* est accompli de manière architecturale. □

Scholie. Deuxième moment ensuite, *naissance-poursuite d'une question prolongée* : l'invariance se renverse, inverse l'ordre de son apparition et se

[7] L'ambiguïté terminologique qui veut que le groupe continu à un paramètre et son générateur infinitésimal reçoivent tous deux la même notation Xf témoigne probablement d'une intention ontologique, voire d'une volonté d'affirmer la *focalisabilité* de la pensée sur un concept-chose visible en de multiples facettes. Les moments d'intuition-en-compréhension-orientée sont omniprésents et nécessaires.

questionne au-delà, dans la *réciprocité-complémentarité* d'avec son objet. L'invariance, en effet, qui concerne simultanément l'objet et ses mouvements en tant qu'un tout, doit s'exprimer à la fois comme simplification morphologique des étants géométriques, et comme stabilisation générique des actes de parcours. Vraisemblablement, la dérive du questionnement vers de l'infinitésimal pur saura métamorphoser avantageusement la conception de l'invariance en lui ouvrant de nouveaux espaces de réponses possibles au niveau différentiel. Et en tout cas ici, la mathématique de Lie dans sa textualité accepte de déclarer explicitement l'un des caractères universels de la métaphysique générale des mathématiques : la *surrection 'naturelle' du questionnement.* □

Théorème 15. ([**322**], p. 130) *Il y a deux sortes de systèmes d'équations qui admettent la transformation infinitésimale :*

$$Xf = \sum_{i=1}^{n} \xi_i(x_1, \ldots, x_n) \, \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

et donc[8] *en général qui admettent toutes les transformations du groupe à un paramètre Xf. Les systèmes d'équations de la première espèce sont représentés par des relations complètement arbitraires entre les solutions de l'équation linéaire aux dérivées partielles $Xf = 0$. Les systèmes d'équations de la seconde espèce sont de la forme :*

$$\xi_1 = 0, \ \ldots, \ \xi_n = 0, \qquad \psi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \psi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots,$$

où les ψ sont absolument arbitraires, pourvu bien sûr qu'il y ait des systèmes de valeurs $x_1, \ldots, x_n$ qui satisfont les équations en question.

Scholie. À l'extrémité opposée du principe de délocalisation générique, la maximalisation du non-générique re-bascule vers une certaine homogénéité comportementale des objets mathématiques. Dans le cas d'une seule transformation infinitésimale, nulle hybridation entre le générique et le non-générique ne s'interpose : en les points où tous les coefficients de Xf s'annulent, tout reste au repos, l'invariance et automatique, et toute invariance intermédiaire est une invariance. Aucune synthèse entre comportements hétéronomes n'est tentée par Lie ; ce sera l'objectif de mathématiques plus récentes telles que la théorie des singularités, ou telles que l'étude des lieux caractéristiques pour les équations aux dérivées partielles, domaines où les synthèses restent encore très ouvertes et peu étudiées. □

[8] Principe d'*hygiène-en-compréhension* pour la mentalisation mémorielle continue des mathématiques : rappeler — même dans l'énoncé pur d'un résultat — les moments précédents d'acquisition de connaissance.

Invariance par une collection de transformations infinitésimales. Dans le cas d'une seule transformation infinitésimale Xf, en un point générique et sans chercher à effectuer une synthèse entre les lieux où Xf s'annule et les lieux où elle ne s'annule pas, le Théorème 15 fournit une réponse définitive et complètement satisfaisante, du point de vue de la théorie de Lie. Toutefois, dans les applications, ce n'est pas une, mais plusieurs transformations infinitésimales prises ensemble qui sont données, et la question va se complexifier à cause de la dimension quelconque, à cause du caractère arbitraire de ces transformations, et à cause de l'absence d'hypothèse d'intégrabilité.

À présent donc, Engel et Lie considèrent q transformations infinitésimales arbitraires :

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \, \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad \qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,q)}$$

et ils recherchent les systèmes d'équations $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\dots$ qui admettent toutes ces transformations infinitésimales.

Il est vrai qu'en présence d'une action (locale) de groupe continu de transformations sur un espace géométrique, les générateurs infinitésimaux forment une algèbre de Lie fermée par crochets grâce à certaines *constantes de structure*, donc aussi un système *complet* au sens de Clebsch, en vertu d'un théorème fondamental (Chapitre 9). Toutefois, Lie se dispense de mentionner ce fait non pas seulement à cause d'un choix d'organisation réciproque entre les chapitres, mais surtout parce qu'il vise constamment à embrasser la plus grande généralité possible. Ainsi décide-t-il de placer ses réflexions sur ce problème *avant* de le spécialiser au cas des systèmes complets (Chapitre 8), et donc implicitement aussi, au cas des groupes de transformations ; c'est-à-dire *avant* le Chapitre 9 dédié aux théorèmes les plus fondamentaux de la théorie.

Tout d'abord, le principe de relocalisation en un point générique et la même analyse qui avait précédé la démonstration du théorème de Clebsch-Frobenius permettent de se ramener d'emblée à un système complet, puisque l'invariance d'un système d'équations par deux opérateurs différentiels implique instantanément son invariance par leur crochet. Ainsi, le problème de déterminer tous les systèmes d'équations qui admettent q transformations infinitésimales données $X_1 f, \dots, X_q f$ peut toujours être ramené à la détermination de tous les systèmes d'équations qui, outre $X_1 f, \dots, X_q f$, admettent de plus certaines transformations infinitésimales :

$$X_{q+1} f, \, \dots, \, X_{q'} f \qquad \qquad {\scriptstyle (q' \,\geqslant\, q),}$$

où maintenant les équations :

$$X_1 f = 0, \, \dots, \, X_q f = 0, \;\; X_{q+1} f = 0, \, \dots, \, X_{q'} f = 0$$

définissent un système complet qui comportent autant de termes qu'il y a d'équations indépendantes en lui (après relocalisation en un point générique). Ainsi le problème de départ se ramène-t-il précisément au suivant :

> Considérons q transformations infinitésimales en les variables $x_1, \dots, x_n$:
> $$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots q)}$$
> ayant la propriété que parmi les q équations :
> $$X_1 f = 0, \; \dots, \; X_q f = 0,$$
> il y a exactement $p \leqslant q$ équations qui sont mutuellement indépendantes, et ayant la propriété que toute famille de p équations indépendantes parmi ces q équations forme toujours un système complet qui appartient à $X_1 f = 0, \dots, X_q f = 0$. Chercher tous les systèmes d'équations en $x_1, \dots, x_n$ qui admettent les transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_q f$. [**322**], 133

Sous cette hypothèse de départ non restrictive, les mineurs $(p+1) \times (p+1)$ de la matrice $q \times n$:

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot\,\cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot\,\cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

s'annulent tous identiquement, tandis que ses mineurs $p \times p$ ne s'annulent pas tous identiquement.

> La première étape vers la solution à notre problème est de distribuer le système d'équations qui admettent les q transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_q f$ en deux classes distinctes [*in zwei getrennte Classen*] ; comme principe de classification, nous prenons ici le comportement des déterminants $p \times p$ de la matrice ci-dessus.
>
> Dans la première classe, nous plaçons tous les systèmes d'équations au moyen desquels tous les déterminants $p \times p$ de la matrice ci-dessus ne s'annulent pas.
>
> Dans la seconde classe, nous plaçons tous les systèmes d'équations au moyen desquels tous les déterminants $p \times p$ de la matrice en question s'annulent. [**322**], 133–134

Autrement dit si on ré-exprime cela d'un point de vue géométrique, la première classe comprend (après relocalisation en un point générique) les sous-variétés $N \subset \mathbb{R}^n$ en restriction auxquelles les q champs de vecteurs $X_1\big|_N, \dots, X_q\big|_N$ engendrent un espace vectoriel de rang maximal possible :

$$p := \max_{x \in \mathbb{R}^n} \operatorname{rg}\Big(\operatorname{Vect}\big(X_1\big|_x, \; \dots, \; X_q\big|_x\big)\Big),$$

tandis que la seconde classe comprend celles pour lesquelles le rang baisse strictement :

$$\operatorname{rg}\Big(\operatorname{Vect}\big(X_1\big|_N, \; \dots, \; X_q\big|_N\big)\Big) \leqslant p - 1,$$

et demeure bien sûr constant, quitte à réutiliser le principe de délocalisation en un point générique.

Scholie. Dans le cas général d'un nombre quelconque de champs de vecteurs $X_1, \ldots, X_q$ en comparaison avec le cas précédemment étudié d'un seul champ de vecteurs X, à la dichotomie de localisation entre le cas où X s'annule et le cas où il ne s'annule correspond maintenant toute une échelle de localisations intermédiaires qui doivent naturellement être repérées et quantifiées par le rang — générique et constant après relocalisation — de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs. □

Invariance générique par un système complet. Le premier théorème est une application directe du théorème de Clebsch-Frobenius. L'espace est divisé (feuilleté) en variétés intégrales et toute sous-variété invariante est nécessairement réunion *quelconque* de variétés intégrales.

Théorème 17. ([**322**], p. 136) *Si q transformations infinitésimales $X_1f, \ldots, X_qf$ en les variables $x_1, \ldots, x_n$ fournissent exactement $p \leqslant q$ équations indépendantes lorsqu'on les égale à zéro, par exemple $X_1f = 0, \ldots, X_pf = 0$, et si ces dernières équations forment un système complet à p termes, alors tout système d'équations :*

$$\Omega_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \ \ldots, \ \Omega_{n-m}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

qui admet les q transformations infinitésimales $X_1f, \ldots, X_qf$ sans modifier l'indépendance des équations :

$$X_1f = 0, \ \ldots, \ X_pf = 0,$$

est représenté par des relations entre les solutions du système complet à p termes $X_1f = 0, \ldots, X_pf = 0$.

Cas général de dégénérescence arbitraire du rang induit. L'analyse se complique et se ramifie *considérablement* lorsque le rang de l'espace vectoriel engendré par $X_1, \ldots, X_q$ a une valeur non maximale, notée h, intermédiaire quelconque, c'est-à-dire satisfaisant $1 \leqslant h \leqslant p-1$, le cas $h = 0$ étant implicitement couvert par la deuxième partie du Théorème 15. Lie s'attaque à l'étude de ce cas général et formule un énoncé extrêmement long qui dévoile à la fois le caractère algorithmique et le caractère semi-algébrique ou semi-analytique du problème, eu égard aux stratifications possible de l'espace en lieux géométriquement lisses.

Dans un premier moment, l'énoncé ci-dessous prend acte de la nécessité de former et de simplifier les équations du lieu des points x où le rang des q vecteurs $X_1\big|_x, \ldots, X_q\big|_x$ est égal à un tel entier h fixé à l'avance avec $1 \leqslant h \leqslant p-1$, obtenues en calculant tous les mineurs $(h+1) \times (h+1)$ et en excluant le sous-lieu où tous les mineurs $h \times h$ s'annulent. Dans les applications, ce moment-là peut vite devenir extraordinairement complexe, car le nombre des mineurs d'une matrice explose de manière polynomiale (à h fixé) voire exponentielle (tous les mineurs) avec la taille de la matrice. De plus, la tension d'invariance exige que ce lieu soit élargi, et c'est pourquoi il faut *ajouter* à ces équations toutes les équations que l'on obtient à partir des mineurs en les différentiant au moyen des X_k. Une fois cette opération effectuée, on relocalise en un point générique et on représente le lieu des zéros commun à cette (potentiellement gigantesque) collection d'équations sous la forme d'un graphe. Puisque $h \leqslant p - 1$, la codimension de ce graphe est $\geqslant 1$, et en induisant le problème au graphe, la dimension ambiante à baissé : on peut donc enfin rapporter le problème initial à une récurrence sur la dimension.

Théorème 18. ([**322**], pp. 140–141) *Si q transformations infinitésimales :*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad (k = 1 \cdots q)$$

sont constituées de telle sorte que tous les déterminants $(p+1) \times (p+1)$, mais pas tous les déterminants $p \times p$, de la matrice :

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \cdot\ \cdot & \xi_{1n} \\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot \\ \xi_{q1} & \cdot\ \cdot & \xi_{qn} \end{vmatrix}$$

*s'annulent identiquement, et de telle sorte que toute collection de p équations indépendantes parmi les équations $X_1 f = 0, \dots, X_q f = 0$ forme un système complet à p termes, alors on trouve de la manière suivante tous les systèmes d'équations en $x_1, \dots, x_n$ qui admettent $X_1 f, \dots, X_q f$ et qui annulent en même temps tous les déterminants $(h+1) \times (h+1)$ de la matrice ci-dessus, mais pas tous les déterminants $h \times h$: en formant des déterminants [*durch Determinantenbildung*], on cherche pour commencer le plus petit système d'équations pour lesquelles tous les déterminants $(h+1) \times (h+1)$ de la matrice s'annulent, tandis que tous les déterminants $h \times h$ ne s'annulent pas. S'il existe un système de cette sorte, et si $W_1 = 0, \dots, W_l = 0$ est l'un d'entre eux, alors on forme les équations $X_k W_i = 0$, $X_j X_k W_i = 0, \dots$, et on détermine de cette manière les systèmes d'équations les plus petits qui embrassent $W_1 = 0, \dots, W_l = 0$, qui sont admis par $X_1 f, \dots, X_q f$ et qui n'annulent pas tous les déterminants $h \times h$ de la matrice ; si $W_1 = 0, \dots, W_{n-m} = 0$ $(n - m \geqslant l)$ est un tel système d'équations qui n'annule pas, par exemple, le déterminant :*

$$\Delta = \sum \pm \xi_{1,\,n-h+1} \cdots \xi_{h,\,n-h+h},$$

alors h est $\leqslant m$ et les équations $W_1 = 0, \dots, W_{n-m} = 0$ peuvent être résolues par rapport à $n - m$ des variables $x_1, \dots, x_{n-h}$, par exemple comme suit :

$$x_k = \varphi_k(x_{n-m+1}, \dots, x_n) \qquad (k = 1 \cdots n - m).$$

Enfin, on détermine tous les systèmes d'équations en les m variables $x_{n-m+1}, \dots, x_n$ qui admettent les h transformations infinitésimales réduites :

$$\begin{aligned}\overline{X}_k f &= \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,\, n-m+\mu}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m},\; x_{n-m+1}, \dots, x_n)\, \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \\ &= \sum_{\mu=1}^{m} \big[\xi_{k,\, n-m+\mu}\big]\, \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}} \qquad (k = 1 \cdots h)\end{aligned}$$

et qui n'annulent pas le déterminant :

$$\big[\Delta\big] = \sum \pm \big[\xi_{1,\, n-h+1}\big] \cdots \big[\xi_{h,\, n_h+h}\big].$$

Chacun de ces systèmes d'équations représente, après ajout des équations $x_1 = \varphi_1, \dots, x_{n-m} = \varphi_{n-m}$, un système d'équations ayant la constitution recherchée. En effectuant tous les développement indiqués dans tous les cas possibles, on obtient tous les systèmes d'équations qui ont la constitution demandée.

Scholie. Plusieurs aspects importants de la pensée de Lie s'avèrent maintenant visibles à la lecture de ce théorème très élaboré. Tout d'abord, le caractère semi-algébrique ou semi-analytique du problème est clairement notifié, puisque l'on doit se placer en un lieu où certaines fonctions s'annulent, tandis que d'autres fonctions ne s'annulent pas. Ensuite, bien que cela ne soit pas écrit, la notion de stratification est clairement utilisée, puisqu'à chaque étape, la relocalisation en des points où toutes les données ont un comportement constant est nécessaire et admise. Enfin, le caractère *algorithmique* du théorème est clairement visible lui aussi, puisque son énoncé se déroule comme une suite d'actes précis, la possibilité d'une boucle s'exprimant à la fin du théorème. □

Scholie. C'est à nouveau ici une manifestation du *caractère d'universalité* de la pensée de Lie que d'être à même de formuler des universaux mathématiques au contact d'un problème arbitraire. D'être capable aussi de suggérer la potentialité indéfinie d'un énoncé. □

Le problème qui a été énoncé au début du § 32 est maintenant essentiellement résolu. En effet, grâce au Théorème 18, ce problème est réduit à la détermination de tous les systèmes d'équations en les m variables $x_{n-m+1}, \ldots, x_n$ qui admettent les h transformations infinitésimales $\overline{X}_1 f, \ldots, \overline{X}_h f$. Mais c'est un problème du même type[9]que le problème original, lequel est maintenant simplifié en tant que le nombre m des variables est plus petit que n. [**322**], 123

Cas d'induction de rang maximal sur un graphe. Pour terminer, Engel et Lie étudient un cas important et utile dans les applications, pour lequel nulle induction sur la dimension est nécessaire.

Théorème 19. ([**322**], p. 145) *Si un système de $n - m$ équations indépendantes en les variables $x_1, \ldots, x_n$ admet les h transformations infinitésimales :*

$$X_k f = \sum_{i=1}^{n} \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n) \, \frac{\partial f}{\partial x_i} \qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots h)}$$

et si en même temps, le déterminant :

$$\Delta = \sum \pm \, \xi_{1,\, n-h+1} \cdots \xi_{h,\, n-h+h}$$

ne s'annule ni identiquement, ni au moyen du système d'équations, alors h est $\leqslant m$ et le système d'équations peut être résolu par rapport à $n - m$ des variables $x_1, \ldots, x_{n-h}$, par exemple comme suit :

$$x_1 = \varphi_1(x_{n-m+1}, \ldots, x_n), \; \ldots\ldots, \; x_{n-m} = \varphi_{n-m}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n).$$

Maintenant, si, pour le système des valeurs $x_1, \ldots, x_n$ de ces équations, toutes les expressions $[X_k, X_j]$ peuvent être représentées sous la forme :

$$[X_k, X_j] = \sum_{s=1}^{h} w_{kjs}(x_1, \ldots, x_n) \, X_s f \qquad {\scriptstyle (k, j = 1 \cdots h)},$$

où les w_{kjs} se comportent régulièrement pour les systèmes de valeurs concernés, alors on trouve de la manière suivante tous les systèmes d'équations qui comprennent les équations :

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \; \ldots, \; x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0,$$

[9] Toutefois, une légère charge inductive modifie quelque peu la nature du problème, car on doit tenir compte en sus du système d'équations formé au moyen des mineurs initiaux. Engel et Lie consacrent quelques paragraphes à expliquer en détail pourquoi l'algorithme se généralise sans difficulté au cas où un système d'équations auxilaire impose une contrainte supplémentaire ([**322**], p. 141). De même, dans l'exposé qu'il fit de sa méthode d'équivalence au Séminaire Julia en 1937, Élie Cartan consacrera quelques lignes à expliquer que cette méthode se généralise au cas où il faut tenir compte de quelques relations non différentielles supplémentaires.

qui admettent les transformations infinitésimales $X_1 f, \dots, X_h f$ et qui n'annulent pas le déterminant Δ : on forme les h transformations infinitésimales réduites :

$$\overline{X}_k f = \sum_{\mu=1}^{m} \xi_{k,\, n-m+\mu}\big(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-m},\, x_{n-m+1}, \dots, x_n\big)\, \frac{\partial f}{\partial x_{n-m+\mu}}$$

$$(k = 1 \cdots h);$$

alors lesx h équations mutuellement indépendantes $\overline{X}_1 f = 0, \dots, \overline{X}_h f = 0$ forment un système complet à h termes en les variables indépendantes $x_{n-m+1}, \dots, x_n$; si :

$$u_1(x_{n-m+1}, \dots, x_n), \dots,\, u_{m-h}(x_{n-m+1}, \dots, x_n)$$

sont des solutions indépendantes de ce système complet, alors :

$$x_1 - \varphi_1 = 0, \dots, x_{n-m} - \varphi_{n-m} = 0, \qquad \Phi_i(u_1, \dots, u_{m-h}) = 0$$

$$(i = 1, 2, \cdots)$$

est la forme générale du système d'équations recherché ; ici, il faut entendre que les Φ_i sont des fonctions arbitraires de leurs arguments.

Autour de la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$

Zêtas pairs et nombres de Bernouilli. En juin 1978, au *Centre International de Rencontres Mathématiques* (CIRM) basé à Luminy au cœur des Calanques de Marseille se sont tenues des "Journées arithmétiques" qui sont restées dans les annales de l'histoire de l'arithmétique. Depuis quelques jours circulait une rumeur surprenante : Roger Apéry, mathématicien français exerçant à l'Université de Caen et peu engagé à l'époque dans la compétition internationale en arithmétique, aurait annoncé être en mesure de démontrer l'irrationalité de la valeur en $s = 3$ de la fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

laquelle converge absolument pour tout nombre complexe s de partie réelle $\mathrm{Re}\, s > 1$. Euler en 1735 s'était rendu célèbre en trouvant la somme exacte des inverses des carrés des entiers[1] :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

et peu de temps après, un théorème beaucoup plus général était démontré qui reposait sur une formule sommatoire trouvée indépendamment, aux alentours de 1735, par Euler et par Maclaurin[2] pour calculer avec une très grande précision les valeurs approchées de certaines sommes discrètes.

---

[1] Problème dit *de Bâle*, posé par Pietro Mengoli en 1644, qu'Euler aborda grâce à une méthode d'accélération de convergence qui lui permit de deviner, dans la valeur approchée $1,6449340668482264365\cdots$, la présence des décimales de π^2, à un facteur 6 près !

[2] Les *polynômes de Bernouilli* $B_n(x)$ sont définis comme les coefficients de Taylor du développement en série entière de la fraction exponentielle :

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n(x)\, \frac{z^n}{n!}.$$

Soient p et $q \geqslant p+1$ deux entiers relatifs. Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes qui est définie sur le segment $[p, q]$ et qui est dérivable jusqu'à l'ordre pair $2k \geqslant 2$. Alors on a :

$$\sum_{j=p+1}^{q-1} f(j) = -\,\frac{f(p)+f(q)}{2} + \int_p^q f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}(1)}{(2j)!}\,\big[f^{(2j-1)}(q) - f^{(2j-1)}(p)\big] + \mathsf{R}_k,$$

Théorème. ([**359**]) *En tout entier pair strictement positif* $2k$ *les valeurs de la fonction zêta sont des multiples rationnels de* π^{2k} *:*

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k},$$

où les nombres de Bernouilli $B_{2k} \in \mathbb{Q}$*, qui sont rationnels, apparaissent dans le développement en série entière suivant*[3] :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

et peuvent aussi être obtenus en partant de $B_0 = 1$*,* $B_1 = -\frac{1}{2}$ *et en itérant la relation de récurrence*[4] :

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0 \qquad (n \geqslant 2).$$

Or la question de savoir si l'on peut calculer par des formules analogues et aussi limpides les valeurs de la fonction zêta aux entiers *impairs* $\zeta(2k + 1)$, ce qui complèterait définitivement les travaux d'Euler, cette question est ouverte depuis plus de deux siècles, et elle l'est encore très largement de nos jours. L'annonce d'Apéry en 1978 à Marseille fit grand bruit : c'était la première fois qu'un zêta impair cédait aux assauts de l'investigation.

Accès élémentaire à l'ouverture. Voici donc une figure à la fois simple et élémentaire de l'ouverture mathématique étendue sur un temps long : le connu est lacunaire, et l'inconnu indémontré semble coprésent comme quelque chose d'aussi clair et évident que le connu effectif et démontré. Sur cet exemple de la fonction zêta en effet, la lacunarité de la connaissance mathématique frappe par une concrétude intuitive immédiate : sans que nul ait besoin de la diriger, l'intuition se représente d'emblée l'ensemble des nombres entiers comme « troué » une fois sur deux, et ce, sans véritable raison, parce que l'esprit est certain par ailleurs que puisque les « trous »

---

où le reste R_k qui s'exprime au moyen du polynôme de Bernoulli $\mathsf{B}_{2k}(x)$:

$$\mathsf{R}_k = -\int_p^q f^{(2k)}(x) \frac{\mathsf{B}_{2k}(x - \mathrm{Ent}(x))}{(2k)!} dx,$$

est en général très petit lorsque k est grand. Un calcul exact de l'intégrale fournit alors une asymptotique de la somme discrète $\sum_{j=p+1}^{q-1} f(j)$ dont la précision dépend de k.

[3] On vérifie que la fonction $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ est paire, donc les coefficients des puissances impaires z^{2m+1} s'annulent pour tout $m \geqslant 1$.

[4] En effet, ces relations s'obtiennent en développant le produit dans l'identité :

$$z \equiv \left(e^z - 1\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \Bigg(\sum_{n_1 \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1!}\Bigg)\Bigg(\sum_{n_2 \geqslant 0} \frac{B_{n_2}}{n_2!}\Bigg) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\substack{n_1+n_2=n \\ n_1 \geqslant 1}} \frac{n!}{n_1!\, n_2!} B_{n_2}.$$

n'existent manifestement pas dans la succession des entiers, il n'y a aucune raison que les valeurs des zêtas impairs $\zeta(2k+1)$ échappent à l'investigation.

La connaissance des entiers $2k+1$ n'existe-t-elle pas de tout temps ? Ne peut-on pas écrire, manipuler et calculer numériquement ces zêtas impairs :

$$\zeta(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \, ?$$

Pourquoi cette ignorance mathématique relative ? Comment expliquer un tel état de fait ? Pourquoi des formules analogues à celles d'Euler font-elles défaut ? Manqueront-elles nécessairement toujours ? A-t-on tenté de démontrer qu'il n'existe aucune formule algébrique qui représente les $\zeta(2k+1)$ en fonction des nombres algébriques, des nombres π, e, ainsi que d'autres valeurs des fonctions transcendantes élémentaires ? Découvrira-t-on ultérieurement des raisons mathématiques profondes (et pour l'instant en partie invisibles) qui « expliqueront *a posteriori* » pourquoi la question est restée ouverte aussi longtemps ?

Spéculation intermédiaire. Le problème majeur que nous pose l'ouverture mathématique *réelle* — c'est-à-dire l'ouverture placée en acte devant un ensemble de problèmes qu'on ne sait pas véritablement attaquer — c'est que nous sommes déjà préstructurés par une connaissance préalable des schèmes généraux de questionnements possibles qui sont hérités du passé et stratifiés dans la mémoire vivante de la recherche. Irrationalité de $\sqrt{2}$, transcendance de π, incomplétude syntaxique et incomplétude sémantique de tout système formel hypothético-déductif qui contient l'arithmétique de Peano ([**300**]), inexistence d'un algorithme universel susceptible de décider à coup sûr l'existence ou l'inexistence de solutions rationnelles des équations algébriques diophantiennes à coefficients entiers ([**300, 301**]), impossibilité de classifier complètement toutes les variétés compactes de dimension $\geqslant 4$ ([**420**]), et autres résultats négatifs : la connaissance mathématique placée devant toute ouverture est d'une certaine manière déjà trop riche d'options possibles qui ont été déjà réalisées dans d'autres champs. Force et cécité.

Mais outre la mémorisation des résultats de nature essentiellement logique qui possèdent un enjeu important quant à la nature des questions techniques que l'on peut se poser en mathématiques, il existe, en amont, un état de fait plus métaphysique et plus lié au destin de certaines questions philosophiques *à travers* la mathématique. En effet, l'ouverture mathématique au sens large, c'est un être-là de ce qui se présente potentiellement comme de l'inconnu non exploré, souvent local, et jamais totalement déconnecté de ce qui a déjà été compris. Or le questionnement proprement philosophique est abondamment imprégné et secondé par la mémoire historique des structures du langage. En effet, l'acte de questionner possède ses propres structures, ses variabilités spéculatives et tout un ensemble de sous-entendus de réponses possibles. Aussi en mathématiques, l'accès à l'ouverture peut-il sembler au premier abord s'exprimer comme il se doit dans la plénitude de la formulation des questions qui ne sont pas encore résolues, mais il n'en est en général rien car à notre époque, toute la recherche existante est *spécialisée*, et cet état de fait est irréversible. En définitive, on peut donc être victime d'une certaine *illusion* d'accéder à l'ouverture réelle par la formulation de questions simples et compréhensibles au sujet de problèmes mathématiques précis qui sont encore ouverts aujourd'hui, parce que le véritable accès à l'ouverture coprésente du temps irréversible exige de s'enrichir de toute la pensée spécialisée qui se débat au moment présent avec les questions en question. Il y donc là une très grande différence de nature avec les questions *proprement philosophiques* pour lesquelles la *thèse d'ouverture pérenne* (apories socratiques, antinomies kantiennes) possède un sens incontestable.

Par exemple, après Apéry, Cohen, Van der Poorten et Beukers en 1978–79, de nombreux auteurs tels que Sorokin, Ball, Rivoal, Zudilin, Prévost, Nesterenko et d'autres ont travaillé dans les années 1990-2000 sur l'irrationalité des zêtas impairs $\zeta(2k+1)$ en cherchant à prolonger la piste ouverte par Roger Apéry. Grâce à un survol rapide de la littérature sur le sujet (*cf.* [**373**]), on se convainc alors aisément que rien dans la constatation que l'irrationalité de $\zeta(5)$ reste encore aujourd'hui une question mathématique *ouverte* ne donne un quelconque *accès* à la perception *sur le terrain spécialisé* de tous les obstacles insurmontés qui se sont présentés aux spécialistes qui y réfléchissent toujours. Intégrales de Beukers, séries hypergéométriques, méthode du col, approximants de Padé, polyzêtas multiples, récurrences linéaires imprévisibles : toute une artillerie de techniques et de *calculs* a été développée et systématisée afin de prolonger les germes d'idées générales entrevues par Apéry. Il est alors satisfaisant de constater que l'on a actuellement plusieurs énoncés qui s'approchent de la conjecture d'irrationalité.

Théorème. (RIVOAL, *voir* [**373**]) *Une infinité de zêtas impairs sont irrationnels. De plus, au moins un des neuf nombres :*

$$\zeta(5),\quad \zeta(7),\quad \zeta(9),\quad \zeta(11),\quad \zeta(13),\quad \zeta(15),\quad \zeta(17),\quad \zeta(19),\quad \zeta(21)$$

est irrationnel.

Théorème. (ZUDILIN, *voir* [**374**]) *Au moins un des quatre nombres* $\zeta(5)$, $\zeta(7)$, $\zeta(9)$ *et* $\zeta(11)$ *est irrationnel.*

Mais la compréhension quasi-instantanée de ces énoncés dans lesquels transparaît une certaine incomplétude — « au moins un des X nombres suivants satisfait ce qui est conjecturé pour chacun d'entre eux » — contrastera avec l'insatisfaction que tout lecteur curieux aura de ne pas comprendre aisément les démonstrations de la littérature récente. Grâce à cet exemple, on voit bien que la discussion *philosophique* de l'ouverture en mathématique est un problème très délicat. Nous y reviendrons.

Assertions mathématiques énigmatiques. Apéry lui-même ne publia qu'un résumé de sa preuve, et ce sont des arithméticiens comme Beukers, Cohen, Van der Poorten et d'autres qui se sont mobilisés pour tester, vérifier, et réaliser complètement les détails possibles d'une ou plusieurs démonstrations. La prestation orale de Roger Apéry avait engendré un scepticisme général chez tous les auditeurs non francophones, tant les énoncés présentés maladroitement *et sans preuves* semblaient peu plausibles aux arithméticiens présents[5]. Voici donc ces quatre assertions surprenantes.

Assertion 1. *Pour tous* $a_1, a_2, \ldots$ *:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_k)} = \frac{1}{x}.$$

Assertion 2.

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}.$$

Assertion 3. Considérons la récurrence linéaire d'ordre deux :

$$n^3 u_n = \big[-34\,n^3 + 51\,n^2 - 27\,n + 5\big] u_{n-1} - (n-1)^3\, u_{n-2} \qquad (n \geqslant 2).$$

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$, $b_1 = 5$ et ensuite par la relation de récurrence pour tout $n \geqslant 2$. Alors les b_n sont tous des nombres entiers (!). Soit de même $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ et ensuite de manière similaire par la relation de récurrence pour tout $n \geqslant 2$. Alors les a_n sont des nombres rationnels dont le dénominateur divise d_n^3, où d_n est le plus grand commun diviseur des n premiers entiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

Assertion 4. On a :

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \zeta(3) = 1{,}202\,056\,903\cdots,$$

et de plus la convergence est si rapide que $\zeta(3)$ ne peut pas être rationnel. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe q_ε^0 tel que pour toute fraction rationnelle $\frac{p}{q}$ réduite (p et q premiers entre eux) avec $q \geqslant q_\varepsilon^0$, on a :

$$\Big|\zeta(3) - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{\theta+\varepsilon}}, \qquad \theta = 13{,}41782\ldots$$

[5] « After Cohen's report at Helsinki, someone sourly commented : 'A victory for the French peasant ...' ; to this Nick Katz retorted : 'No... ! No ! This is marvellous ! It is something Euler could have done... » ([**359**], p. 203).

Traces effacées : le labyrinthe de la reconstitution. Admettons temporairement sans en débattre ici que l'antinomie dialectique entre *préexistence mathématique* et *construction effective* demeurera à jamais inaccessible à l'entendement philosophique, en analogie lointaine avec les antinomies kantiennes. Il n'en reste pas moins que le caractère souvent chaotique et mystérieux des transmissions exploratrices suggère, pour les mathématiques *transmises*, la métaphore du *labyrinthe cryptique*.

Ici, Apéry l'explorateur annonce ses quatre énoncés-clés. Ceux-ci sont, pour lui, clairs et véridiques. Ce sont les noyaux durs de « réalité » mathématique qu'il a rencontrés sur son chemin de recherche : piliers, intersections, bifurcations. Du point de vue de l'auteur, tout est cohérent et tout est compréhensible. Pour Apéry en effet, ces quatre assertions *elliptiques* s'intègrent dans un riche réseau *non elliptique* de questions, de méditations, d'essais, d'obstacles, d'échecs et de réussites. Les vrais actes de la pensée sont rétifs aux raccourcis : pour comprendre vraiment, on doit tout parcourir dialectiquement. Mais dans le message crypté qu'Apéry résume en quatre moments, le temps étiré de sa pensée et de ses calculs s'est presque totalement effacé, il a presque totalement disparu. Face à un auditoire, ou vis-à-vis de tout lecteur circonspect, l'explorateur revenu de son pays lointain s'expose malgré lui à une situation où ce qu'il dit être vrai ne fait que proposer implicitement à autrui d'imaginer d'autres entrées pour pénétrer dans un labyrinthe mathématique plus vaste que ce que son propre parcours ne lui a révélé.

Le labyrinthe, ce n'est pas forcément une architecture spécifique constituée d'allées cloisonnées qui s'entrecroisent, ou bien un réseau de souterrains dissimulés sous un château abandonné, ou encore une forêt impénétrable qui fait écran en son sein à la lumière du jour. Au sens abstraitement métaphorique et second du terme, le labyrinthe a essentiellement pour fonction d'égarer celui qui y entre et de l'égarer sans fin s'il n'en découvre pas, au moins en partie, le plan invisible.

> [Le labyrinthe] comporte de multiples tours et détours où, même sans s'en rendre compte, on revient sur ses pas [...] [Il s'agit] de tromper celui qui s'y aventure par la présence d'un grand nombre de pas et de lui faire recommencer indéfiniment la même errance. Pline, *Histoire naturelle*, [**375**], vol. II p. 2298.

Mais en mathématique, l'entrée dans le labyrinthe ne doit en aucun cas être interprétée comme la réduction du Multiple à l'Un. Nulle pelote de fil magique et conducteur n'est disponible *a priori* pour guider la pensée exploratrice et pour lui permettre d'effectuer le double parcours d'une entrée unique vers une sortie unique. Il serait donc tout à fait inexact de faire une analogie, même lointaine, avec la légende de Thésée tuant le Minotaure pour délivrer la princesse Ariane. Si Apéry nous a transmis son fil conducteur elliptique, c'est que tout au long de ce fil ténu se trouvent potentiellement d'innombrables germes de linéaments transversaux qui conduiront peut-être à démontrer l'irrationalité de *tous* les $\zeta(2k+1)$, voire même leur transcendance.

Au fond, la fonction première de tout labyrinthe architectural est d'égarer. Et s'égarer dans l'indéfini temporel et spatial du calcul et de la pensée n'est pas moins possible que dans toute construction architecturale imaginée par les poètes. Car dans le vrai labyrinthe métaphorique de la réalité mathématique en devenir, les voies par lesquelles on peut s'engager, les voies par où on peut se perdre, et les voies grâce auxquelles on peut faire fructifier ses résultats sont innombrables. Par extension, le labyrinthe mathématique figure alors l'univers entier des possibles mathématiques, et *vice versa*.

Comme les microcosmes qui sont hébergés en lui, le macrocosme spéculatif est formé d'espaces aux cloisons floues, et ces parois indécises entre le connu et l'inconnu sont elles-mêmes susceptibles d'être remplacées par des relations nouvelles qui ouvriront de nouveaux passages dont on ignorait jusqu'à ce jour où ils pourraient mener. Dans un parcours empli d'illusions, d'apparences, de faux-semblants, et sans qu'il soit possible d'en découvrir *à l'avance* toutes les voies qui sont sans issue, il est clair que le labyrinthe des mathématiques ouvre sans cesse sur d'autres labyrinthes.

> La force du jour me contraignit à chercher refuge dans une grotte ; au fond, il y avait un puits ; dans le puits, une échelle qui s'évanouissait dans la ténèbre inférieure. Je descendis ; à travers un chaos de galeries sordides, j'arrivai à une vaste chambre circulaire presque invisible. Cette cave avait neuf portes ; huit introduisaient à un labyrinthe qui, insidieusement, ramenait à la même chambre. La neuvième (grâce à un autre labyrinthe) donnait sur une seconde chambre circulaire, identique à la première. J'ignore le nombre total de chambres ; ma malchance et mon angoisse les multiplièrent. Jorge Luis Borges, *L'immortel*, trad. R. Caillois et R.L.F. Durand, [**375**], p. 2299.

Ainsi la transmission des résultats mathématiques par le langage s'accompagne-t-elle habituellement chez de nombreux auteurs d'un geste plus ou moins (in)volontaire d'*effacement partiel de la pensée*. La formulation très résumée qu'emploient les publications mathématiques s'inscrit de fait dans un *a posteriori* de la genèse qui voile ou qui masque toutes les causalités dialectiques. Plus grave encore : la finalisation des formulations supprime en général toute référence à la situation initiale de problème ouvert. Dès l'instant où les buts sont atteints, ce qui s'est passé est en quelque sorte *irréversible* : puisque la compréhension a capturé et formulé le compris, elle élimine du même coup définitivement l'incompréhension à laquelle elle était confrontée auparavant.

> Proofs are what Littlewood and I call gas, rhetorical flourishes designed to affect psychology, pictures on the board in the lecture, devices to stimulate the imagination of the pupils. This is plainly not the whole truth, but there is a good deal in it. The image gives us a genuine approximation to the processes of mathematical pedagogy on the one hand and of mathematical discovery on the other; it is only the very unsophisticated outsider who imagines that mathematicians make discoveries by turning the handle of some miraculous machine. G.H. Hardy, Rouse Ball lecture, 1928.

Figure générique de la récurrence : contracter les expressions symboliques. Analysons maintenant en détail l'assertion la plus élémentaire, l'Assertion numéro 1. Elle découle de l'identité finie suivante, lorsqu'on fait tendre K vers l'infini, et nous donnerons pour simplifier le même nom : « Assertion 1 » aux deux versions : finie, ou infinie.

Assertion 1. *Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres réels ou complexes quelconques, en nombre infini. Alors pour tout entier $K \geqslant 1$, on a l'identité dans le corps des fractions rationnelles en une variable réelle ou complexe x :*

(12.29)

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)},$$

avec la convention que le produit $a_1 a_2 \cdots a_{k-1}$ à gauche se réduit à la constante 1 lorsque $k = 1$.

Devant tout énoncé, avant toute démonstration, l'intuition mathématique questionnante doit s'étonner.

Première réaction. D'où vient cette identité ? Est-elle vraie ? Que dit-elle ? Que fait-elle ? Quelle est sa charge synthétique ?

Plusieurs réponses simples : une somme étendue (membre de gauche) est contractée en seulement deux fractions rationnelles (membre de droite). L'identité en question est finie, universelle et presque complètement indépendante de toute spécification ontologique. De plus, elle semble trivialement vraie dans le premier cas $K = 1$. Enfin, dans le cas général, il semblerait à première vue que toute l'affaire se réduise à vérifier des identités algébriques élémentaires.

Telles sont par exemple certaines réactions possibles que l'*intuition de compréhension* devra ou pourra engendrer face à tout énoncé synthétique qui apparaît brusquement. L'intuition de compréhension fonctionne de manière non déductive. Que ce soit dans l'amphithéâtre du CIRM en juin 1978, ou à la lecture du rapport palpitant de Van der Poorten [**359**], sa seule arme, c'est le questionnement technique.

Mais aussi, à peine l'intuition de compréhension a-t-elle terminé de se forger quelques idées préliminaires qu'elle en revient presque malgré elle au niveau initial de l'étonnement métaphysique : à quoi sert ou servira cet énoncé dont on ignore à première vue en quoi il s'insère *causalement* dans une démonstration comme celle de l'irrationalité de $\zeta(3)$?

Deuxième réaction. Cet énoncé s'enracine-t-il dans un procédé archétypal et universel ?

On pense bien sûr à l'identité algébrique élémentaire :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \tag{12.29}$$

valable non seulement quand x est un nombre naturel, réel, complexe, ou même quaternionique — distinct de 1 évidemment —, mais aussi beaucoup plus généralement lorsqu'on l'écrit sous une forme qui chasse le dénominateur, à savoir :

$$\big(\mathrm{Id} - T\big) \circ \big[\mathrm{Id} + T + T^{\circ 2} + \cdots + T^{\circ n}\big] = \mathrm{Id} - T^{\circ(n+1)}, \tag{12.29}$$

lorsque $x =: T$ est un endomorphisme linéaire $T\colon E \to E$ d'un espace vectoriel. Si de plus $|x| < 1$, ou si l'espace E est muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ pour laquelle la norme d'opérateur correspondante de T :

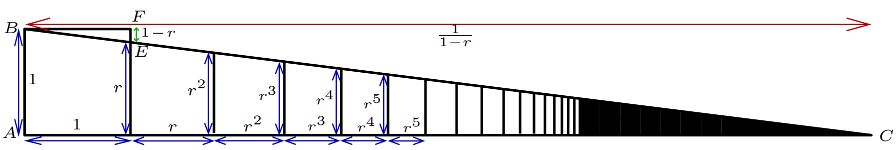
$$\|T\| := \sup_{e \in E,\ \|e\|=1} \frac{\|T(e)\|_E}{\|e\|_E} < 1$$

est strictement inférieure à 1, alors lorsque n tend vers l'infini, le terme de reste x^{n+1} ou $T^{\circ(n+1)}$ s'évanouit progressivement en tendant vers 0, de telle sorte que l'inverse numérique de $1 - x$ ou l'inverse de l'opérateur $\mathrm{Id} - E$ est représenté par la série convergente :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{ou} \qquad \big(\mathrm{Id} - T\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{\circ n}$$

de *tous* les termes monomiaux x^k ou $T^{\circ k}$ qui sont formés par itération simple et uniforme de la multiplication ou de la composition. D'une certaine manière, l'accomplissement en acte de l'infinité de toute série géométrique[6]

[6] Voici une démonstration diagrammatique de l'identité $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$ valable pour tout $0 < r < 1$. Le long triangle ABC est semblable au petit triangle BFE, donc $AC = AB \cdot \frac{BF}{FE} = 1 \cdot \frac{1}{1-r}$.



s'identifie à la réalisation d'une *clôture d'inversibilité*. Et déjà pour tout entier n fini l'identité (12.29) ou (12.29) effectuait la *contraction remarquable* d'une suite arbitrairement longue de termes dont chacun se déduit du terme précédent par un procédé uniforme ; au final en effet, seulement deux termes suffisent pour donner la valeur complète de cette somme étendue :

$$\frac{1}{1-x} \qquad \text{et} \qquad -\frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad -T^{\circ(n+1)}.$$

Mais alors, existe-t-il des parentés profondes entre ces deux types d'identités (12.29) et (12.29) ? Existe-t-il un archétype de sommation-contraction qui s'exerce en amont de ces deux réalisations spécifiques ? Existe-t-il ici une essence universelle de calcul formel qu'il faudrait alors recentrer afin de faire fonctionner à fond l'exigence qu'ont les mathématiques de résumer tout procédé synthétique en un acte de pensée simplifié ? Ces questions s'inscrivent dans une problématique plus large de métaphysique des mathématiques.

Troisième réaction. Comment s'approprier définitivement l'énoncé, comment en résumer la teneur, et comment le placer précisément là où il se doit dans l'architecture d'une démonstration ?

Avant toute preuve, l'intuition *qui est une pensée* rebondit de tous côtés, anticipe et pose des jalons provisoires. Ce qui compte le plus : maintenir vivantes dans chaque éclaircissement ultérieur toutes les questions profondes, causales, métaphysiques face auxquelles on n'aura pas répondu dans ce moment de premier examen.

Preuve déductive de l'Assertion 1. Considérons tout d'abord le cas $K = 1$. Le membre de droite est-il égal au membre de gauche ? Testons-le, réduisons au même dénominateur et simplifions :

$$\frac{1}{x+a_1} =?= \frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+a_1)} = \frac{x+\underline{a_1}_\circ - \underline{a_1}_\circ}{x(x+a_1)} = \frac{\underline{x}_\circ}{\underline{x}_\circ(x+a_1)} = \frac{1}{x+a_1} \qquad \text{OK.}$$

En raisonnant par récurrence, supposons maintenant que l'énoncé est démontré jusqu'au niveau K et testons ce qu'il advient lorsqu'on ajoute au membre de gauche de l'identité générale qu'il nous faut démontrer, le terme correspondant à $k = K + 1$, afin de faire monter le niveau d'un cran. On obtient un membre de gauche dans lequel une réduction spontanée au même dénominateur et une simplification immédiate du numérateur, effectuées comme suit :

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K+1} = \sum_{k=1}^{K} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})}
&\overset{\text{hyp-réc}}{=} \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{-a_1 a_2 \cdots a_K(x+a_{K+1}) + a_1 a_2 \cdots a_K\, x}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)(x+a_{K+1})} \qquad \text{[développer } (x+a_{K+1})\text{]} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K a_{K+1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})} \qquad \text{[même formule au niveau } K+1\text{]},
\end{aligned}
$$

conduisent visiblement à achever la récurrence. □

Reconstituer *a posteriori* des éléments de genèse. Mais au-delà de l'appropriation déductive, une *quatrième réaction* de l'intuition questionnante s'avère indispensable : il faut à présent renverser la synthèse et se replacer en situation d'ignorance relative. Ce n'est en effet qu'à ce prix que l'intuition pourra avoir accès à certaines causalités supérieures qui sont spécifiques au problème considéré. Prenons donc maintenant le temps de nous replacer, même artificiellement et pour les besoins de l'analyse, dans une situation de *recherche* face à l'expression que l'on souhaite simplifier, mais sans admettre que nous connaissions déjà la réponse, à savoir sans connaître le membre de droite (12.29) de l'Assertion 1, c'est-à-dire en partant seulement de la question : à quels calculs doit-on soumettre le membre de gauche ?

Aussi commence-t-on par examiner ce que donnent les sommes considérées $\sum_{k=1}^{K}$ pour les petites valeurs de K, avec un seul objectif : *deviner les métamorphoses symboliques adéquates*. Comme le gymnaste soumet tout son corps à de nouveaux enchaînements gestuels, le chercheur, lui, s'exerce régulièrement à exécuter des calculs qui sont nouveaux par rapport à sa pratique habituelle.

Pour $K = 2$, on peut tout d'abord réduire au même dénominateur la somme des deux fractions présentes :

$$\frac{1}{x+a_1} + \frac{a_1}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{x+a_1+a_2}{(x+a_1)(x+a_2)}.$$

Immédiatement, on s'interroge : que voit-on ? Deux observations favorables : tandis qu'il est clair qu'au dénominateur on trouve nécessairement le produit des $(x + a_k)$, au numérateur, le terme x est suivi de la somme de tous les a_k, pour k allant de 1 jusqu'à $K = 2$ bien entendu.

Examinons maintenant la somme jusqu'à $K = 3$, réduisons au même dénominateur $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)$, développons le numérateur, et réorganisons-le en cherchant à y faire apparaître des symétries formelles :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+a_1}+\frac{a_1}{(x+a_1)(x+a_2)}&+\frac{a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\&=\frac{x+a_2+a_1}{(x+a_1)(x+a_2)}+\frac{a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\&=\frac{(x+a_1+a_2)(x+a_3)+a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\&=\frac{x^2+x(a_1+a_2+a_3)+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}.\end{aligned}$$

D'ores et déjà, la combinatoire générale commence à se préciser : ici, le coefficient de x est la somme des a_k, et le coefficient constant est la somme de tous les produits possibles deux à deux des $a_{k_1}a_{k_2}$ avec $k_1 < k_2$ — pour tous les indices k allant de 1 jusqu'à $K = 3$ bien sûr. Le calcul au niveau $K = 4$ que nous ne reproduisons pas ici fournira le résultat similaire :

$$\frac{x^3+x^2(a_1+a_2+a_3+a_4)+x(a_1a_2+\cdots+a_3a_4)+a_1a_2a_3+\cdots+a_2a_3a_4}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}.$$

Si l'on veut raisonner ici en toute généralité, on devra alors « *reconnaître* » dans les numérateurs les fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_j(a_1,\dots,a_K) := \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant K} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}$$

qui collectent tous les produits possibles de j nombres a_k pour k compris entre 1 et K, la commutativité du produit permettant de supposer pour éviter les redondances que les indices $k_1, k_2, \dots, k_j$ sont ordonnés de manière strictement croissante.

Mais s'agit-il vraiment là d'un acte de *reconnaissance* ? Oui, pour le mathématicien qui possède déjà une culture initiale sur les fonctions symétriques élémentaires, notamment au sujet des racines d'un polynôme de degré quelconque. Toutefois, au-delà d'une mémoire culturelle stratifiée par une pratique et par une formation, l'esprit du mathématicien-philosophe doit chercher à s'inscrire au mieux dans une *position d'ouverture* ; pour cette raison, il est préférable de parler ici d'une *genèse symbolique et locale* des fonctions symétriques élémentaires. Certes, cette genèse est renouvelée par rapport à d'autres contextes tels que la théorie algébrique des équations, mais elle se révèle ici comme *intrinsèquement présente* au sein du calcul à effectuer. D'une certaine manière, on doit être capable à tout instant de (re)*conceptualiser* le général symbolique dans le particulier du calcul. Dans tout réseau potentiel de connexions, la mathématique est une *genèse qui questionne*, et elle est perpétuellement replacée en situation d'engendrer ou de réengendrer les concepts. Et lesdits concepts ne sont parfois qu'une manière commode d'abréger *en partie* les calculs complexes auxquels on est confronté.

Maintenant que la (re)conceptualisation de toutes les sommes symétriques de produits est acquise, « il est clair » par induction après examen des trois cas $K = 2, 3, 4$ ci-dessus que la somme générale à calculer devra s'écrire :

$$\frac{x^{K-1} + x^{K-2}\,\sigma_1(a) + x^{K-3}\,\sigma_2(a) + \cdots + x^1\,\sigma_{K-2}(a) + \sigma_{K-1}(a)}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)}. \tag{12.29}$$

Dans cette constant affirmatif : « il est clair » se jouent deux moments métaphysiques standard de la pensée mathématique.

Premier moment : *acte de création intuitive de la généralité*. Du point de vue du sujet réfléchissant qui cherche à engendrer de la réalité mathématique, c'est là que naît la vraie pensée. En effet, c'est seulement à travers le sujet mathématique pensant que la création d'une synthèse pure est possible : aucune mathématique qui serait engendrée par des automatismes physiques et matériels n'est possible *a priori*.

Deuxième moment : *confiance justifiée en la véracité de l'induction mathématique*. Il serait en effet *très inadéquat* ici de convoquer les problématiques philosophiques sceptiques sur l'induction, puisque déjà l'effectuation minutieuse des calculs pour les cas $K = 3$ et $K = 4$ suggérait tous les mécanismes uniformes et rigoureux qui sont suffisants pour élaborer la démonstration générale par récurrence. En particulier, nous nous dispenserons de rédiger une démonstration commentée du cas général, car il vaut mieux ajouter que la *perception anticipée* des régularités générales dans les calculs particuliers fait partie des structures fondamentales de la compréhension mathématique.

Que faut-il retenir de ce parcours de *reconstitution a posteriori* des éléments de genèse ? Premier fait : la genèse considérée n'a pas spontanément conduit à l'identité qui était énoncée dans l'Assertion 1. Elle a débouché sur une autre formule, la formule (12.29), qui possède sa propre autonomie d'harmonie et de complétude formelles. Bien entendu, on pourra retrouver l'identité de l'Assertion 1 en observant que la réduction au même dénominateur des deux fractions de (12.29), à savoir :

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K) - a_1a_2\cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)} = \frac{x^K + x^{K-1}\,\sigma_1(a) + \cdots + x\,\sigma_{K-1}(a)}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)}$$

redonne par développement et après division par x celle (12.29) que nous avons obtenue par une autre voie. Mais ce qui compte ici, à l'issue de ce parcours didactique, c'est de souligner que *la convergence du synthétique est nécessairement exposée au multiple*. Autrement dit, l'être symbolique du synthétique s'exprime toujours de plusieurs manières. Quelle est la forme la plus adéquate en soi, ou la plus appropriée à la résolution d'un problème donné ? La décision doit rester en suspens le plus longtemps possible.

Décider des actes de calcul. À titre d'illustration du principe d'après lequel une grande partie des actes de pensée qui accompagnent le calcul mathématique ne transparaissent pas dans le texte rédigé, citons la démonstration apparemment simple de l'Assertion 2 que donne Van der Poorten dans [**359**], avant d'en disséquer toute la complexité.

> Now put $x = n^2$, $a_k = -k^2$, and take $K = n - 1$ to obtain
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(n-1)^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}.$$
>
> Writing $\epsilon_{n,k} = \frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!}$, because
>
> $$(-1)^k\, n\left(\epsilon_{n,k} - \epsilon_{n-1,k}\right) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)},$$
>
> we have
>
> $$\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\left(\epsilon_{n,k}-\epsilon_{n-1,k}\right) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\epsilon_{N,k}-\epsilon_{k,k}\right)$$
>
> $$= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}$$
>
> and on noting that as $N \to \infty$ the first term on the right vanishes, we have the Assertion 2. [**359**], p. 197.

Dans l'écriture mathématique, dès que les équations apparaissent et que les calculs entrent en scène, quantité d'actes intermédiaires sont escamotés, bien qu'ils relèvent de la pensée et du langage. Par contraste, tout texte en prose à caractère didactique (histoire, philosophie, presse) est pris dans les structures complexes et rigoureuses de la langue des essais : significations, liaisons, transitions, rien n'est laissé au hasard dans l'intention d'écriture.

Mais en mathématiques et quand il s'agit du calcul, la langue naturelle est beaucoup trop retenue et restreinte, voire reléguée à une espèce de frontière imprécise où on la cantonne à rester dans l'ombre et dans les limbes. Aucune « ortho-graphie » et aucune « ortho-syntaxie » du calcul ne se sont constituées avec le temps, tant et si bien que les moeurs scientifiques ont rendu recevable toute publication qui se contente de dire au lecteur « on a ceci : », « on obtient cela : », « on en déduit que : », sans plus de façons. C'est cette absence passablement regrettable de *grammaire stable et minimale du calcul* qui est l'une des raisons de l'opacité des mathématiques pour les philosophes et pour les littéraires, parce que de leur point de vue, l'expression *continue* de la pensée est exigible *dans les textes*.

Reprenons donc cette démonstration de l'Assertion 2. On applique l'identité (12.29) avec $x := n^2$, avec $a_k := -k^2$ et avec $K := n-1$.

En observant que :

$$(-1^2)(-2^2)\cdots(-(k-1)^2) = (-1)^{k-1}\,(k-1)!^2,$$

les numérateurs s'avèrent alors être, au signe $(-1)^{k-1}$ près, des carrés de factorielles, et l'on peut alors détailler les tous premiers actes de simplification qui se présentent à nous dans le membre de droite :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-1)^2)}$$
$$= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\underline{(n-1)!}_\circ}{n\,n\,\underline{(n-1)}_\circ(n+1)\underline{(n-2)}_\circ(n+2)\cdots\underline{(n-(n-1))}_\circ(n+n-1)}.$$

Avant de poursuivre la restitution des calculs de Van der Poorten, que se passe-t-il entre la première et la deuxième ligne ?

La pensée qui calcule est toujours inscrite dans une situation d'ouverture *absolument universelle*, qui s'exprime par une *question générique* : « *comment décider du prochain acte* ? » La question est en effet constamment : « *quel acte de calcul effectuer* ? » C'est *la* question, il n'y a qu'*elle*, et elle est tout le temps « *là* ».

Rappelons le *schematum* de l'exponentielle : tout arbre discret qui présente des points de bifurcation croît de manière exponentielle, même quand dans une certaine *proportion*, une partie de ses branches naissantes est supprimée aléatoirement. Ici, c'est-à-dire *dans l'universel indécis du calcul*, la pensée est *a priori* confrontée à une *exponentiation potentielle* de ses actes, et donc à l'impossibilité de tout embrasser. Il faut par conséquent définir une *posture décisionnelle viable*. Là est tout l'enjeu pour qui veut engendrer de l'irréversible-synthétique en mathématiques.

> Gauss declared, and his notebooks attest to it, that his way of arriving at mathematical truths was "through systematic experimentation". **[149]**, p. .

Donc à la deuxième ligne ci-dessus (nous poursuivons les explications), la question générale qui se pose est : « Que faire ? » Répondons seulement dans l'*a posteriori* des décisions qui ont déjà été prises (*cf.* citation ci-dessus) : on ne touche pas à $\frac{1}{n^2}$, on réécrit en le duplicant le carré $(n-1)!^2$, on factorise au dénominateur tous les n^2-k^2 présents *via* la formule élémentaire $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, *y compris* :

$$n^2 = (n^2-0^2) = (n-0)(n+0) = n\,n,$$

et l'on simplifie enfin, en les soulignant pour plus de clarté symbolique, les deux factorielles qui peuvent être supprimées au numérateur et au dénominateur, en observant — fait quasi-gelstaltiste de la géométrisation du symbolique — l'entrelacement entre ce qui est conservé et ce qui est supprimé.

Ainsi, sans répéter la somme dont on est parti, mais en conservant un marqueur déictique facile à mémoriser : « expression dont on est parti » afin de signifier que le calcul continue à être *orienté* vers des métamorphoses signifiantes, résumons ce qui vient d'être obtenu et poursuivons le commentaire *a posteriori* des décisions de calcul qui conduiront à l'Assertion 2 :

$$\begin{aligned}
\textsf{expression dont on est parti} &= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{n\,n\,(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{\underline{2}_{\textsf{ins}}\,(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\underline{n}_{\textsf{ins}}}{n\,n\,(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\underline{2n}_{\textsf{ins}}} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}\,n!}{n^2\,\frac{(2n)!}{n!}} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

À la deuxième ligne, le facteur $\underline{2n}_{\textsf{ins}}$ a été ajouté à la fois au dénominateur et au numérateur, où il a été de plus *divisé* en ses deux multiplicandes $\underline{2}_{\textsf{ins}}$ et $\underline{n}_{\textsf{ins}}$ de manière à ce que le facteur $\underline{n}_{\textsf{ins}}$ puisse *s'absorber spontanément* dans la factorielle $(n-1)!$ Ensuite, à la troisième ligne, le facteur $n\,n$ qui provenait de (n^2-0^2) et que l'on avait soumis, pour des raisons d'uniformité, à la même factorisation $(n-0)(n+0)$ que ceux qui le suivaient, est à nouveau contracté en utilisant la notation *puissance*, à savoir : on le réécrit sous sa forme originale n^2. Commentons plus généralement ce dernier acte.

Micro-spéculation sur la dynamique du calcul : tout le possible des métamorphoses pose question et s'offre au pivot de la réeffectuation. Chaque retour en arrière implique acte de décision, réinterprétation des gradients symboliques et *reprise* des calculs. Parce qu'*aucun possible n'appartient à la mathématique idéale*, les actes d'homogénéisation formelle qui semblaient définitifs sont eux aussi indéfiniment soumis à révision.

Enfin pour terminer le commentaire complet de ces quatre lignes de calcul, un *acte de reconnaître* est effectué : le symbole binomial $\binom{2n}{n}$ au dénominateur se resynthétise visiblement à partir de $\frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{1}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Créer la différence téléscopique. « Posons à présent », dit la démonstration :

$$\mathsf{E}_{n,k} := \frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!},$$

« et observons », poursuit-elle, que :

$$(-1)^k\,n\,\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^1)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)}.$$

Comme en de nombreux autres lieux de la mathématique écrite, il y a ici deux pétitions de principe qui font chacune violence à la compréhension du lecteur. Premièrement, la représentation comme différence des termes sous le signe *somme* dont on est parti s'annonce sans aucune justification : c'est comme une sorte de création *ex nihilo*. Deuxièmement, l'annonce brute semble prétendre que cette relation est immédiate, évidente, visible à l'œil nu, sans qu'on doive examiner des calculs intermédiaires au microscope. Encore une fois, causalité et continuité sont rompues, car la vérification de cette identité demande un certain nombre d'actes incompressibles :

$$\begin{aligned}
(-1)^k\, n\left[\mathsf{E}_{n,k}-\mathsf{E}_{n-1,k}\right] &= (-1)^k\, n\left[\frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!}-\frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[-\,\frac{n}{2}\,\frac{k^2}{k^3}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}+\frac{n}{2}\,\frac{k^2}{k^3}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[-\,\frac{n}{2k}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\left(\frac{n-k}{n+k}-1\right)\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[\frac{n}{\underline{-\,2k}_{\circ}}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\left(\frac{\underline{-\,2k}_{\circ}}{n+k}\right)\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[n\,\frac{(n-1-k)!}{(n+k)!}\right].
\end{aligned}$$

Dès la deuxième ligne, on fait apparaître en quelque sorte *à l'avance* le facteur commun $(-1)^{k-1}(k-1)!^2$ qui est attendu dans le membre de droite visé. Ensuite, on doit réorganiser les termes entre accolades, et une factorisation spontanée (troisième ligne) fait naître dans une sous-parenthèse la soustraction de deux termes que l'on réduit au même dénominateur (quatrième ligne), pour remarquer (passage à la cinquième ligne) que la quantité $-\,2k$ se simplifie. Ensuite, afin de rapporter le dernier terme entre crochets à la forme annoncée, on peut écrire plus explicitement les factorielles qui apparaissent au numérateur et au dénominateur de manière à effectuer des simplifications décalées :

$$\begin{aligned}
n\,\frac{(n-1-k)!}{(n+k)!} &= \frac{\underline{n}_{\circ}\,\underline{(n-1-k)\cdots 2\cdot 1}_{\circ\circ}}{\underline{1\cdot 2\cdots(n-1-k)}_{\circ\circ}\,(n-k)\cdots(n-1)\,\underline{n}_{\circ}\,(n+1)\cdots(n+k)}\\
&= \frac{1}{(n-1)(n+1)\cdots(n-k)(n+k)}\\
&= \frac{1}{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)},
\end{aligned}$$

en terminant par un développement des facteurs $(n-j)(n+j)=n^2-j^2$.

Maintenant que nous avons (seulement) expliqué en détail les deux premières lignes de calculs de la citation ci-dessus, les questions contingentes ou métaphysiques ressurgissent : comment Apéry a-t-il été conduit à ces transformations symboliques essentiellement élémentaires ? Et surtout : quel est le *sens* cette nouvelle expression :

$$\frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}?$$

Que doit-on y lire ? Qu'apporte-t-elle par rapport à l'irrationalité visée de $\zeta(3)$?

Toutes ces questions de « finalité mathématique locale » ou de « motivation continuée » sont en général gommées du texte mathématique écrit. L'une des raisons principales de ces effacements, c'est que

le calcul est aussi volatil que le geste.

En mathématiques, l'écrit n'est pas assez puissant pour exprimer tous les actes élémentaires de la pensée.

Reste maintenant à achever l'analyse. Grâce à cette représentation (toujours mystérieuse) du terme sommé sous la forme $(-1)^k\, n\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big]$, nous sommes à même d'examiner ce que donne la sommation, pour $n = 1$ jusqu'à un entier N arbitraire, du dernier terme de la première ligne de la citation ci-dessus, à savoir :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} && \text{[remplacer]}\\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big]\\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k+1}^{N}(-1)^k\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] && \text{[intervertir les sommes].}
\end{aligned}$$

Réflexe de calculateur : face à toute somme *double* ou face à toute intégration *multiple*, on doit essayer d'intervertir l'ordre des sommations ou l'ordre des intégrations, parce que vraisemblablement, on pourra ainsi exécuter presque gratuitement un acte élémentaire d'irréversible-synthétique. Autrement dit : une première sommation double fournit une première lecture, et *pour avancer*, on doit chercher une autre vision, une autre expression, une autre représentation. Toute action-transformation est à tester, fût-elle automatique. Ici immédiatement, il nous faut donc intervertir la double sommation. Se pose alors le problème technique de savoir de quelle manière les bornes de sommation doivent changer. Et une fois que l'on a compris quels devaient être les échanges de bornes de sommation, une fois que l'interversion des sommes est effectuée, on a alors la confirmation remarquable que l'on progresse dans la direction appropriée, celle du gradient d'information synthétique, puisque la nouvelle seconde somme :

$$(-1)^k\sum_{n=k+1}^{N}\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] = (-1)^k\,\big[\mathsf{E}_{N,k} - \mathsf{E}_{k,k}\big]$$

est *téléscopique* au sens où l'on a :

$$A - \underline{B}_\circ + \underline{B}_\circ - \underline{C}_\circ + \underline{C}_\circ - \underline{D}_\circ + \cdots + \underline{L}_\circ - \underline{M}_\circ + \underline{M}_\circ - N = A - N,$$

ce qui nous donne ainsi une expression simplifiée et raccourcie de la somme considérée :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} &= \sum_{k=1}^{N} (-1)^k \big[\mathsf{E}_{N,k} - \mathsf{E}_{k,k}\big] \\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}},\end{aligned}$$

dans laquelle on peut alors finalement remplacer $\mathsf{E}_{N,k}$ et $\mathsf{E}_{k,k}$ par leurs expressions complètes pour atteindre l'identité annoncée. La fin de la démonstration consiste à observer que le premier terme du membre de droite ci-dessus :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} = 0,$$

tend vers 0 lorsque N tend vers ∞, et donc en conclusion, on obtient bien une nouvelle représentation de $\zeta(3)$:

$$\boxed{\zeta(3) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} = \Big(2 + \frac{1}{2}\Big) \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}}.$$

Critère d'irrationalité. Revenons maintenant à l'irrationalité de $\zeta(3)$. Un nombre β est *irrationnel* s'il n'est pas de la forme (rationnelle) p_0/q_0 pour deux entiers relatifs p_0 et q_0 dans $\mathbb{Z}$. Il en découle qu'un nombre rationnel $b_0 = p_0/q_0$ avec $p_0, q_0 \in \mathbb{Z}$ satisfaisant aussi sans perte de généralité $q_0 \geqslant 1$, jouit de la propriété que pour tout autre nombre rationnel p/q qui est *distinct* de lui, à savoir qui est tel que $p_0 q - p q_0 \neq 0$, on a l'inégalité :

$$\left| b_0 - \frac{p}{q} \right| = \left| \frac{p_0 q - p q_0}{q q_0} \right| \geqslant \frac{1}{q q_0} = \frac{\mathsf{const}}{q} \tag{12.29}$$

qui mesure la *non proximité* quantitative universelle entre $\frac{p_0}{q_0}$ et toute autre fraction $\frac{p}{q}$; en effet, si l'entier $p_0 q - p q_0$ est non nul, sa valeur absolue est certainement minorée par 1.

À l'inverse, il est connu que pour tout nombre irrationnel β, il existe toujours une infinité de fractions rationnelles p/q — par exemple les fractions réduites de son développement en fraction continue — qui satisfont l'inégalité opposée avec une puissance au carré :

$$\left| \beta - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}.$$

Logiquement, la non-satisfaction de l'inégalité (12.29) fournit un critère qui garantit l'irrationalité d'un nombre β défini d'une manière quelconque, pourvu qu'on puisse le représenter comme la limite d'une suite de nombres rationnels satisfaisant la condition suivante.

Lemme standard. *S'il existe une suite* $\big(\frac{p_n}{q_n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres rationnels tous distincts* $\frac{p_n}{q_n} \neq \beta$ *du nombre donné* β *mais qui convergent vers lui et qui satisfont de plus l'inégalité quantitative* :

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1+\mathsf{c}}} \qquad (n=0,1,2,3,\cdots) \tag{12.29}$$

pour un certain nombre réel $\mathsf{c} > 0$, *alors* β *est* irrationnel. □

Venons-en maintenant à l'Assertion 3. Apéry en 1978 n'avait pas seulement formulé la relation de récurrence linéaire en question :

$$n^3\, u_n + (n-1)^3\, u_{n-2} = \big[34\, n^3 - 51\, n^2 + 27\, n - 5\big] u_{n-1}, \tag{12.29}$$

mais il avait aussi donné des expressions *explicites* pour les suites a_n et b_n.

Proposition principale. *Si l'on pose :*

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \qquad \text{et} \qquad a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k},$$

où les quantités $c_{n,k}$ *sont définies par :*

$$c_{n,k} := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2\, m^3 \binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \qquad (k \leqslant n),$$

alors les nombres rationnels $b_n \in \mathbb{N}$ *et* $a_n \in \mathbb{Q}$ *satisfont la relation de récurrence linéaire* (12.29) *avec les conditions initiales :*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 6 \qquad \text{et} \qquad b_0 = 1, \quad b_1 = 5.$$

> We were quite unable to prove that the sequences $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined above did satisfy the recurrence of Assertion 3. Apéry rather tartly pointed out to me in Helsinki that he regarded this more a compliment than a criticism of his method. But empirically (numerically) the evidence was utterly compelling. It seemed indeed that $\zeta(3)$ had been proved irrational, because the rest, *i.e.* Assertion 4, follows quite easily. [**359**], p. 198.

Élasticité de la nomination symbolique. Avant d'aborder la démonstration de cette proposition surprenante qui précise l'Assertion 3, résumons les principaux arguments qui conduisent à conclure que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. Méthodologie standard en mathématiques : admettre provisoirement un énoncé technique et difficile, conserver le provisoire en mémoire, et en déduire d'abord des conséquences avant d'y *revenir* ultérieurement. À une autre échelle temporelle, Grothendieck s'était conduit d'une manière analogue vis-à-vis des conjectures de Weil, en laissant provisoirement de côté certaines questions qui ne devaient logiquement être attaquées qu'à la fin des explorations, et c'est Deligne qui est *revenu* en amont pour revisiter et résoudre de telles questions laissées en suspens.

Ainsi, commençons par poser tout d'abord pour abréger :

$$P(n-1) := 34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5.$$

Pourquoi ? Quelle est la signification de l'acte simple qui consiste à introduire une notation supplémentaire $P(n-1)$ pour désigner un polynôme, à savoir ici le polynôme $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$, lequel est déjà connu et ne nécessite aucun symbole supplémentaire pour être lu ?

Déjà, voici que s'interpose la *métaphysique de l'instant propre de tout acte* : les exigences du principe de raison ne sont presque jamais respectées d'une manière absolue. Formulées au niveau le plus élevé, *ces exigences voudraient que chaque acte mathématique porte en lui des raisons justifiantes qui le motivent et qui l'expliquent*. Ces exigences voudraient que soient effacées au mieux les traces rémanentes de mystère qui entachent l'instant propre de tout acte. Les mathématiques ne sont-elles pas une science des causalités abstraites, objectives et *a priori* ? À son plus haut niveau, l'exigence de penser en raison voudrait donc que soit mis au point un langage mathématique totalisant qui *exprime à chaque instant les motivations et les causalités de tout acte et de tout calcul*.

Or ici, on peut répondre en guise de justification que l'expression relativement complexe $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$ apparaîtra inchangée dans la suite, et donc que pour des raisons d'économie de lecture, il est commode d'abréger cette expression en lui donnant un autre « nom » $P(n-1)$ que l'on gardera en mémoire. Mais à cette réponse s'oppose une objection recevable : en alléguant une telle justification, on navigue de manière ambiguë entre l'après et l'avant, et on trahit donc en quelque sorte le principe pur de raison qui voudrait que les raisons soient sur le champ raisons en elles-mêmes. À nouveau, l'acte de donner un nom n'est justifié en dernier recours que par la mémoire qu'a l'acteur d'avoir effectué des explorations préalables. Le lecteur est alors censé nous croire sur parole lorsque nous disons que l'abréviation $P(n-1)$ sera *commode*. Car elle pourrait tout compte fait ne pas être si commode que cela, par exemple au cas où la notation $P(n-1)$ n'apparaîtrait que deux ou trois fois dans la suite, ou parce qu'il n'est pas certain du tout que l'on se souviendra cinq pages plus loin du fait que $P(n-1)$ désignait ce polynôme précis $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$ et non pas un polynôme quelconque, ou encore parce que le choix même de la suite de caractères $P(n-1)$ n'est peut-être pas le meilleur choix du point de vue de la recherche d'une harmonie symbolique dans le texte écrit.

Toute notation doit être soumise à une révisibilité permanente.

Mais ce ne sont pas ces discussions de méthodologie liées à la genèse du texte mathématique qui constituent le cœur philosophique des actes de dénominations symboliques en mathématiques. Le vrai problème, c'est l'*élasticité*, à savoir la *dilatabilité* et la *contractibilité* des symboles dans les calculs. Le « grossissement des expressions » est si visible et si sensible dans l'utilisation des systèmes électroniques contemporains que l'un des enjeux majeurs du calcul est de réussir à faire voir les structures principales par un jeu de notations interchangeables qui permettront de *dilater et de contracter à volonté les expressions soumises au calcul*. Et la question à résoudre au coup par coup, c'est bien de savoir *quelle* partie symbolique devra être soumise à un jeu de permutations nominales. Tout compte fait, c'est exactement de cette manière-là que les symboles de Christoffel sont apparus chez Christoffel en 1870 ([**111**]) : simplement comme abréviations d'expressions algébrico-différentielles massives qui se transportaient de manière essentiellement atomique dans les calculs de dérivées successives des termes de courbure que Riemann avait découverts. Ce n'est qu'une cinquantaine d'années plus tard, en 1918, que Levi-Civita a su interpréter géométriquement ces quantités atomiques comme collection de symboles fondamentaux associés de manière unique à une certaine connexion riemannienne symétrique. En définitive, et ce sera là une thèse proprement gaussienne :

Il y a un voir géométral *du calcul formel qui est au centre de toute genèse conceptuelle.*

Voici un autre exemple relié aux travaux de l'auteur ([**316**]). Quand dans un calcul formel complexe, touffu, se présentent des relations polynomiales de degré trois entre certaines expressions longues telles que par exemple :

$$N^{10} := \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3'' \\ f_1'''' & f_2'''' & f_3'''' \end{vmatrix} f_1' f_1' - 3 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1'''' & f_2'''' & f_3'''' \end{vmatrix} f_1' f_1'' +$$
$$+ 4 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} f_1' f_1''' + 3 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} f_1'' f_1'',$$

il est parfois *intrinsèquement* avisé d'introduire une notation nouvelle et qui parle d'elle-même, par exemple :

$$\Delta_{1,2,3}^{(\alpha),(\beta),(\gamma)} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} & f_3^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} & f_3^{(\beta)} \\ f_1^{(\gamma)} & f_2^{(\gamma)} & f_3^{(\gamma)} \end{vmatrix},$$

afin de *contracter de manière appropriée* :

$$\begin{aligned} N^{10} := {} & \Delta_{1,2,3}^{',''',''''}\, f_1' f_1' - 3\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,''''}\, f_1' f_1'' + \\ & + 4\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\, f_1' f_1''' + 3\,\Delta_{1,2,3}^{',\,'',\,'''}\, f_1'' f_1'' \end{aligned}$$

les quantités concernées dont l'expression complète s'avérait trop massive. De cette manière, on se donne la possibilité de s'élever d'un cran au-dessus de la complexité symbolique, et de travailler ainsi en ne retenant que les informations formelles qui joueront véritablement dans les calculs ultérieurs. Au moment où le calcul tensoriel naît en géométrie riemannienne, notamment chez Ricci et Levi-Civita, les tensions d'élasticité symbolique suscitent toute une histoire dialectique fascinante quant à la manière dont les choix de contraction notationnelle se sont stabilisés.

Conséquences de la proposition principale. Réécrivons maintenant de manière plus concise la relation de récurrence que satisfont les deux suites a_n et b_n en cherchant à exhiber un parallélisme syntaxique :

$$\begin{aligned} 0 &= n^3\, a_n - P(n-1)\, a_{n-1} + (n-1)^3\, a_{n-2} \\ 0 &= n^3 b_n - P(n-1)\, b_{n-1} + (n-1)^3\, b_{n-2} \end{aligned}$$

qui justifie à l'avance l'acte que voici : multiplions la première équation par b_{n-1} et soustrayons-en la deuxième équation multipliée par a_{n-1}, de telle sorte que les deux termes où apparaît $P(n-1)$ s'annihilent :

$$n^3\big[a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n\big] = (n-1)^3\big[a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1}\big].$$

Réécrivons cette équation en divisant ses deux membres par n^3 et ensuite, pour des valeurs descendantes de l'entier n, itérons-la en elle-même et à l'intérieur d'elle-même, afin de faire disparaître, pas à pas et par simplification, les quotients successifs $\frac{(k-1)^3}{k^3}$ de cubes de nombres entiers :

$$\begin{aligned} a_n\, b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n &= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \big[a_{n-1}\, b_{n-2} - a_{n-2}\, b_{n-1}\big] \\ &= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \tfrac{(n-2)^3}{(n-1)^3}\, \big[a_{n-2}\, b_{n-3} - a_{n-3}\, b_{n-2}\big] \\ &= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \tfrac{(n-2)^3}{(n-1)^3} \cdots \tfrac{2^3}{3^3}\, \tfrac{1^3}{2^3}\, \big[a_1\, b_0 - a_0\, b_1\big] \\ &= \tfrac{1^3}{n^3} \cdot 6. \end{aligned}$$

Sans commenter certains des soubassements métaphysiques de la notion de limite, admettons maintenant que la quantité définie par :

$$\chi_n := \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}$$

tend vers zéro lorsque n tend vers ∞ ; en vérité, cette propriété peut être déduite de l'observation — à vérifier rigoureusement, mais nous nous en dispenserons — que $c_{n,k}$ tend vers $\zeta(3)$ lorsque $n \to \infty$, uniformément pour tout $k \leqslant n$.

Ici, l'acte de dénomination : « introduire la notation χ_n » possède un *sens motivationnel précis* : eu égard au critère déjà vu qui garantit l'irrationalité d'un nombre réel, l'objectif pourra être d'établir que la différence de $\zeta(3)$ à ses approximants rationnels $\frac{a_n}{b_n}$ est telle qu'une inégalité du type (12.29) sera satisfaite pour un certain réel $\mathsf{c} > 0$. C'est l'objectif visé.

D'après les calculs qui précèdent, la différence entre deux χ_n successifs est connue, à savoir elle vaut :

$$\begin{aligned}\chi_n - \chi_{n+1} &= \tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \\ &= \tfrac{a_n\, b_{n+1} - a_{n+1}\, b_n}{b_n\, b_{n+1}} \\ &= \tfrac{6}{(n+1)^3\, b_n b_{n+1}}.\end{aligned}$$

Mais alors une sommation « spontanément possible » $\sum_{k=n}^{\infty}$ de ces égalités nous donne, en tenant compte bien sûr de $\chi_\infty = 0$, la représentation suivante de χ_n :

$$\begin{aligned}\chi_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \big(\chi_k - \chi_{k+1}\big) \\ &= 6 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, b_k\, b_{k+1}}.\end{aligned}$$

Afin d'estimer quantitativement la petitesse de ces différences positives : $\chi_n = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} > 0$, il est donc approprié d'estimer la grandeur des b_k pour $k \geqslant n$.

Lemme. *Il existe une constante strictement positive telle que :*

$$b_n > \mathsf{const} \cdot \big(2,40\big)^{4n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Sans nous imposer d'en reconstituer tous les éléments rigoureux, résumons les arguments principaux de la démonstration. Pour commencer, divisons par n^3 la relation de récurrence linéaire (12.29) :

$$0 = b_n - \big[34 - \tfrac{51}{n} + \tfrac{27}{n^2} - \tfrac{5}{n^3}\big]\, b_{n-1} + \big[1 - \tfrac{3}{n} + \tfrac{3}{n^2} - \tfrac{1}{n^3}\big]\, b_{n-2}.$$

Alors, puisque les termes en $\frac{1}{n}$, en $\frac{1}{n^2}$ et en $\frac{1}{n^3}$ deviennent négligeables quand n augmente, il est tout à fait vraisemblable que asymptotiquement lorsque n tend vers l'infini, les termes de la suite b_n se comporteront comme les termes de la nouvelle suite $\widetilde{b}_n$ qui satisfait la relation *approximée* de récurrence linéaire à coefficients *constants* :

$$0 = \widetilde{b}_n - 34\,\widetilde{b}_{n-1} + \widetilde{b}_{n-2}.$$

Mais alors, puisque le polynôme caractéristique $x^2 - 34\,x + 1$ de cette dernière relation de récurrence possède les deux racines :

$$17 \pm 12\,\sqrt{2} = \big(1 \pm \sqrt{2}\big)^4,$$

il est connu que les termes $\widetilde{b}_n$ peuvent être représentés *pour tout* n sous la forme générale :

$$\widetilde{b}_n = \mathsf{const} \cdot \big[(1+\sqrt{2})^4\big]^n + \mathsf{const} \cdot \big[(1-\sqrt{2})^4\big]^n.$$

Deux arguments techniques doivent enfin être mis au point afin de garantir que $\widetilde{b}_n$ approxime bel et bien le comportement asymptotique de b_n et afin d'assurer que la constante ci-dessus devant le terme dominant $\big[(1+\sqrt{2})^4\big]^n$ est *non nulle*. Enfin pour conclure, on utilise la minoration triviale $1+\sqrt{2} = 2,41421\cdots > 2,40$. □

Quelques commentaires intercalaires sur ce lemme seront les bienvenus pour montrer toute la complexité syllogistique des mathématiques techniques par rapport au langage universel de la pensée. Ici, dans l'énoncé du lemme, un choix de concrétude a été fait : remplacer $1 + \sqrt{2}$ par le nombre décimal $2,40$. Pourquoi cela ? demandera-t-on. À nouveau, cet acte sera essentiellement justifiable *a posteriori*. Disons ici que les informations importantes se réduiront seulement à comparer deux nombres réels x_1 et $x_2 > x_1$ dont la différence $x_2 - x_1$ est environ égale à 11, donc de petites pertes dans les inégalités de majoration telles que :

$$1+\sqrt{2} - 2,40 = 2,414\cdots - 2,400 = 0,014\cdots$$

n'auront aucune incidence sur le résultat final. Autant donc montrer en quelque sorte à l'avance avec $2,40$ que l'on ne visera que des comparaisons numériques très simples. Mais on pourrait aussi à l'inverse préférer conserver l'information exacte $(1+\sqrt{2})^{4n}$ sans s'imaginer qu'il vaut mieux, du point de vue de la vulgarisation des résultats, écrire $(2,40)^{4n}$. On sait bien que tout dans l'écriture littéraire ou philosophique est choix, et en mathématiques, les choix purement techniques accentuent davantage l'exponentialité potentielle des combinaisons possibles du langage.

Van der Poorten ([**359**]) ne donne même pas une ligne de démonstration ou de justification pour un tel lemme. Vraisemblablement, l'énoncé lui semble trop élémentaire par rapport au niveau requis pour aborder la démonstration d'Apéry. Mais tout aussi bien, la démonstration d'un tel énoncé serait techniquement trop difficile à rédiger de manière concise pour mériter d'apparaître dans un article publié par une revue internationale. En vérité, le raisonnement mathématique doit constamment pouvoir autonomiser certains énoncés qui se décomposent sous la forme de suites d'arguments techniques pénibles à lire — et encore plus pénibles à écrire. Ici en tout cas, pour le mathématicien qui connaît la théorie des suites récurrentes linéaires, il ne fait aucun doute, une fois qu'on a divisé par n^3 la relation (12.29), que l'on est ramené à la suite approximante $\widetilde{b}_n = 34\,\widetilde{b}_{n-1} - \widetilde{b}_{n-2}$ à coefficients constants, pourvu que l'on sache déjà à l'avance que la suite considérée b_n tend vers l'infini avec n. Mais si l'on doit en disséquer tous les arguments techniques et si l'on doit s'atteler à sa table de travail afin d'écrire une démonstration complète, on se trouvera vite confronté à une difficulté qui est omniprésente dans la recherche en mathématique : *comment* rendre élégant ce qui ne l'est manifestement pas ?

Il est clair aussi que le lemme que l'on rencontre ici relève d'une vérité mathématique plus générale. On pourrait très bien pour cette raison chercher à produire un énoncé englobant qui aurait plus de chances d'être rendu élégant. Toutefois, puisque l'énoncé général ne sera en rien utile par la suite — sauf si, de manière purement hypothétique, on était en mesure de l'appliquer dans une démonstration générale de la conjecture toujours ouverte que tous les zêtas impairs $\zeta(2n+1)$ sont irrationnels —, un tel travail serait en l'occurence essentiellement inutile. Donc en définitive, le mathématicien-écrivain se trouve contraint d'en rester là, voire même de choisir comme Van der Poorten de passer sous silence toute démonstration secondaire — qui sera ainsi laissée au lecteur. Et du point de vue de la *rencontre* d'une « réalité » mathématique, on se trouve aussi contraint d'accepter l'existence de ce qu'on appelle parfois oralement — dans une métaphore peu relevée mais tout à fait symptomatique d'un état de fait — le « camboui technique » des démonstrations. Le « chaos technique », ce serait aussi la manière rébarbative dont les calculs mathématiques se combinent par un mécanisme imprévisible comme le ferait un amoncellement de blocs rocheux et de cailloux disparates dans une avalanche montagn'harde. Or les mathématiques contemporaines et futures ne sont rien d'autre que cela, un chaos-camboui de complexités rebutantes qui sont encadrées par quelques grandes directions d'idéalités plus ou moins dominantes. Simplicité et élégance ne concerneraient que les énoncés mathématiques qui correspondent aux corps purs simples dans le tableau des éléments chimiques de Mendeleïev, si une telle analogie avait un sens.

Poursuivons maintenant la fin de la démonstration. Ainsi dans la représentation de la différence entre $\zeta(3)$ et ses approximants rationnels que nous venons d'obtenir :

$$\chi_n = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = 6\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, b_k\, b_{k+1}},$$

comme il est clair que la suite des $b_k \sim \mathsf{const}\big(1+\sqrt{2}\big)^{4n}$ devient croissante pour k assez grand, sachant aussi que la série $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$ est uniformément bornée par une constante, on peut *majorer* (en valeur absolue) cette différence par une expression du type :

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{\mathsf{const}}{(b_n)^2}. \tag{12.29}$$

Ici, l'écriture même du membre de droite est constituée de telle sorte que l'on souligne principalement que c'est une puissance seconde de b_n qui apparaît au dénominateur, tandis que la valeur de la constante strictement positive du numérateur importe peu.

À cette occasion, on en vient à redire que l'écriture mathématique doit savoir profiter de l'élasticité du langage pour opérer en subduction relative avec l'information formelle qu'elle choisit de transmettre. Sans que nous ayons eu besoin de signaler expressément une convention explicite, on aura d'ailleurs noté que la notation « const » a désigné jusqu'à présent une constante strictement positive qui dépend du contexte mais dont la valeur exacte peut être oubliée pour plus de simplicité. Ainsi ce symbole « const » possède-t-il toutes les qualités presque magiques d'une quantité indéfinie qui, sans aucunement modifier son être propre, peut absorber toutes les quantités qui sont de même nature qu'elle :

$$\mathsf{const} + \mathsf{const} = \mathsf{const} \qquad \mathsf{et} \qquad \mathsf{const} \cdot \mathsf{const},$$

et qui peut aussi se résorber en elle-même :

$$\tfrac{\mathsf{const}}{\mathsf{const}} = \mathsf{const}$$

sans rien perdre de ce qu'elle est en tant qu'être.

Pourquoi un tel symbole ? Dans les calculs de type « inégalités », après un certain nombre d'étapes, les constantes qui apparaissent sont tellement mélangées les unes aux autres d'une manière imprévisible qu'il est impossible de rendre harmonieuse leur expression courante. Alors plutôt que de recourir à des expressions emboîtées et rebutantes du type :

$$c_1 < \left(\frac{\frac{C_1^2}{4}(n-1)}{K_{10} + \left(\frac{(n-1)9C_1^2}{4}\right)^{\frac{2+\alpha}{2}} K_9}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

mieux vaut admettre un « symbole-poubelle » qui ne conservera pas la mémoire précise de toutes les constantes qui se sont agglutinées en lui à chaque effectuation d'une inégalité, mais qui désignera seulement une quantité essentiellement anodine et inoffensive qu'il est nécessaire de maintenir dans un vague relatif afin de s'épargner des efforts en calculs inutiles. À nouveau, on voit grâce à cette analyse combien le choix du dosage des calculs est au centre de la pensée mathématique.

En revenant maintenant à (12.29), n'oublions pas que la proposition principale signalait une différence importante entre les a_n et les b_n : en effet, seuls ces derniers sont des nombres *entiers* ($\in \mathbb{Z}$), et à cause de dénominateurs qui sont présents dans les quantités $c_{n,k}$, les quantités a_n sont en fait des nombres *rationnels* ($\in \mathbb{Q}$). Écrivons-les alors sous la forme réduite :

$$a_n = \tfrac{a_n'}{a_n''}, \qquad \text{avec } a_n' \text{ et } a_n' \text{ entiers et premiers entre eux.}$$

Sans démonstration, nous admettrons l'énoncé suivant[7].

Lemme. *Pour tout entier positif* $n \geqslant 1$*, on a :*

$$2\,a_n \in \frac{\mathbb{Z}}{1^3} + \frac{\mathbb{Z}}{2^3} + \cdots + \frac{\mathbb{Z}}{n^3} = \frac{\mathbb{Z}}{[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)]^3}.$$

Par conséquent, le dénominateur a_n'' de a_n jouit de la majoration :

$$a_n'' \leqslant 2\,[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)]^3.$$

Or une conséquence du théorème de Hadamard et de la Vallée-Poussin sur la distribution des nombres premiers[8] est que ce plus grand commun multiple entre les n premiers entiers $1, 2, \ldots, n$ est asymptotiquement, lorsque n tend vers l'infini[9], à peine supérieur à e^n, à savoir pour être précis : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n) \leqslant C_\varepsilon \cdot e^{n(1+\varepsilon)}.$$

Si l'on majore donc $e = 2,71828\cdots$ disons par $2,80$, on aura l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned} a_n'' &\leqslant 2\,\big[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)\big]^3 \\ &< \mathsf{const} \cdot \big(2,80^3\big)^n, \end{aligned}$$

valable pour tout entier n, avec une certaine constante qu'il n'est pas utile de connaître. Ainsi pouvons maintenant revenir à l'inégalité (12.29), la réécrire en précisant bien que dans l'écriture fractionnaire $\frac{a_n'}{a_n'' b_n}$, les deux quantités

[7] La preuve dans [**359**], p. 198, est-elle erronée ?

[8] Le nombre de nombres premiers p inférieurs ou égaux à un entier n donné est asymptotiquement équivalent, lorsque n tend vers l'infini, à $\frac{n}{\log n}$, ou encore (estimation équivalente mais plus fine sur le plan numérique) au logarithme intégral $\int_2^n \frac{1}{\log t}\,dt$

[9] En effet, la plus grande puissance $p^\alpha \leqslant n$ d'un nombre premier qui est inférieur à n satisfait $\alpha = \mathrm{Ent}\big(\frac{\log n}{\log p}\big)$, puisque $p^\alpha = e^{\alpha \log p}$ par définition. Ainsi : $\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n) = \prod_{p \leqslant n} p^{\mathrm{Ent}\left(\frac{\log n}{\log p}\right)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n \sim n^{\frac{n}{\log n}} = e^n$.

a'_n et $a''_n b_n$ sont effectivement des *entiers* :

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\zeta(3) - \frac{a'_n}{a''_n b_n}\right| < \frac{\mathsf{const}}{(b_n)^2}$$
$$\overset{?}{<} \frac{\mathsf{const}}{(a''_n b_n)^{1+\mathsf{c}}},$$

et nous interroger enfin s'il est possible, afin d'établir l'irrationalité de $\zeta(3)$, de trouver une constante $\mathsf{c} > 0$ strictement positive telle que :

$$(b_n)^2 > (a''_n b_n)^{1+\mathsf{c}}, \qquad \text{ou de manière équivalente :} \qquad (b_n)^{1-\mathsf{c}} > (a''_n)^{1+\mathsf{c}}.$$

Or d'après la minoration et la majoration connues :

$$b_n > \mathsf{const} \cdot (2,40)^{4n} \qquad \text{et} \qquad a''_n < \mathsf{const} \cdot (2,80)^{3n}$$

de b_n et de a''_n, une telle inégalité sera évidemment satisfaite pourvu qu'elle le soit entre ce minorant et ce majorant, à savoir pourvu qu'il existe un certain $\mathsf{c} > 0$ tel que l'on ait :

$$\left[(2,40)^{4(1-\mathsf{c})}\right]^n > \left[(2,80)^{3(1+\mathsf{c})}\right]^n$$

pour tous les entiers n assez grands. Mais puisque les deux puissances n-èmes de part et d'autre peuvent visiblement être supprimées, et puisqu'un simple calcul numérique montre que :

$$2,40^4 = 33,176\cdots > 21,952\cdots = 2,80^3,$$

il est clair que la petite perturbation $4(1-\mathsf{c})$ de l'exposant 4 de $2,40$ et que la petite perturbation analogue $3(1+\mathsf{c})$ de l'exposant 3 de $2,80$ ne changeront rien au fait que cette dernière inégalité est stricte, pourvu que $\mathsf{c} > 0$ soit assez proche de 0. Ces arguments achèvent donc notre restitution commentée de la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$, sous réserve bien entendu que la proposition principale ci-dessus aura été démontrée dans la suite.

Examen a posteriori des adéquations relatives. Sans effectuer les deux approximations concrètes ci-dessus $2,40$ et $2,80$ qui étaient un peu *ad hoc*, on peut vérifier rigoureusement que tout revient à constater numériquement que l'inégalité :

$$\left[(1+\sqrt{2})^4\right]^n > e^{3n}$$

est satisfaite, c'est-à-dire après suppression des puissances n-èmes, que l'on a :

$$(1+\sqrt{2})^4 > e^3.$$

> It is useful to notice that very little more than just proving the Main Proposition (p. 588) is required for Apéry's proof. After all, it is quite plain that $a_n/b_n \to \zeta(3)$; the b_n are integers, and the lemma on p. 596 shows that the a_n are "near-integers". Above, we showed that given that the sequences satisfy the recursion (12.29), the irrationality of $\zeta(3)$ follows because from
>
> $$\log\left[(1+\sqrt{2})^4\right] > 3,$$
>
> we obtain the existence of some $c > 0$. Thus, as implied in various asides, most of the earlier argument is quite irrelevant. [**359**], pp. 199–200.

Remarquable renversement spéculatif ! Van der Poorten prétend ici à juste titre que seule compte vraiment la proposition principale *dans laquelle sont introduites les quantités $a_{n,k}$, $b_{n,k}$ et $c_{n,k}$ ainsi que leurs relations de récurrence*. S'il s'agit d'aller droit au but, les deux Assertions 1 et 2 sont donc essentiellement hors de propos. Qui plus est, Van der Poorten réaffirme explicitement un fait métaphysique fondamental qui est intrinsèque à la genèse en acte des mathématiques, et que nous citerons à nouveau, avec insistance, tant il est rare de voir ces choses-là écrites dans un articles contemporain de mathématiques.

> Thus, as implied in various asides, most of the earlier argument is quite irrelevant.

Même dans l'*a posteriori* d'une découverte, tests d'adéquation et examens de nécessités soumettent la pensée mathématique à une forte tension interne. Ces exigences qui sont enracinées dans le penser philosophique relèvent avant tout d'un penser spéculatif et universel que rien néanmoins ne systématise ou ne désigne explicitement dans les pratiques contemporaines des mathématiques. Malgré ce manque de définition des méthodes, on n'en est pas moins toujours spontanément conduit à continuer à « chercher » encore, là où il pourrait sembler que tout ce qui était visé a déjà été « trouvé ». À savoir : chercher à mieux comprendre les causalités techniques et à mieux deviner les raisons profondes. Trop peu analysées par l'épistémologie contemporaine, ces tensions dirigent et orientent quasiment toutes les pratiques de recherche. Mais l'expérience montre, nous dit Van der Poorten, qu'elles conduisent le plus souvent à réviser sans pitié la pertinence (relevance) des arguments. Tant au niveau du sujet créateur que de l'intersubjectivité scientifique, l'adéquation de la démonstration à son objectif reste souvent un Graal inatteignable. On pourrait même démontrer sans difficulté que dans les manuscrits de recherche en mathématiques, la genèse de vérités intuitives ou formelles « consomme » encore plus de « brouillons » que la genèse littéraire.

En tant que question ouverte, l'irrationalité de $\zeta(3)$ s'étend en effet sur plus de deux siècles. Des centaines d'arithméticiens et d'analystes s'y sont essayés, et même dans l'*a posteriori* de la démonstration réussie d'Apéry, la pensée mathématique ne peut s'empêcher d'effacer tout ce qui ne se rapporte pas directement à l'objectif prédéfini. C'est là un trait fondamental, presque compulsif de la pensée mathématique, et qui lui vient sans aucun doute de ses ascendances philosophiques. Dans tout labyrinthe qui a déjà été exploré en partie il subsiste une multiplicité de questions rémanentes, et notamment celles qui poussent à chercher inlassablement la nouveauté démonstrative et l'économie absolue d'arguments. Avant de passer à la démonstration de la proposition principale, donnons quelques exemples élémentaires de preuves très économiques.

Démonstration ultra-simple par Calabi de l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Commençons par reproduire ce qui peut être considéré comme la preuve « la plus simple » du théorème d'Euler qui donne la valeur de $\zeta(2)$. Elle n'utilise ni produit infini du type :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

ni théorème subtil d'inversion entre somme infinie et intégrale impropre, ni la formule sommatoire raffinée d'Euler-McLaurin, mais seulement la formule du changement de variables dans une intégrale double. De plus, elle fait voir l'expression de la somme infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ comme *compactée* d'emblée sous la forme d'une intégrale, ce qui montre bien la complémentarité et la dualité profonde entre sommations discrètes et intégrations continues.

> We start, for fun, with an ultra-simple proof of Euler's formula $\zeta(2) = \pi^2/6$ discovered a few years ago by E. Calabi. Expanding $(1 - x^2y^2)^{-1}$ in a geometric series and integrating termwise gives
>
> $$\int\int_S (1 - x^2y^2)^{-1}\, dxdy = 1^{-2} + 3^{-2} + 5^{-2} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\zeta(2),$$
>
> where S is the square $[0, 1] \times [0, 1]$. But the clever substitution $(x, y) = \left(\frac{\sin u}{cos v}, \frac{\sin v}{cos u}\right)$ has Jacobian precisely $1 - x^2y^2$ and maps the open triangle $T = \{u, v > 0,\, u + v < \pi/2\}$ bijectively to the interior of S, so $\int\int_S (1 - x^2y^2)^{-1} dxdy = \int\int_T dudv = \frac{\pi^2}{8}$. **[462]**, p. 498.

Ces sept lignes de démonstration appellent plusieurs commentaires. Grand amateur des démonstrations ultra-courtes, Don Zagier a aussi publié ([**463**]) une démonstration du théorème des nombres premiers :

$$\mathrm{Card}\,\big\{p \in \mathbb{N}\colon\ p \text{ nombre premier } \leqslant n\big\} \sim \frac{\log n}{n}$$

rédigée en trois pages seulement et qui est tout à fait compréhensible lorsqu'on possède une Licence en mathématiques. Dans la rédaction même des sept lignes ci-dessus, Zagier imprime donc aussi problablement sa griffe à la démonstration frappante de Calabi.

Tout d'abord, dans les raisonnements cités, s'exprime une pensée qui guide les actes dans un ordre où rien n'est laissé au hasard, bien qu'aucune causalité motivationnelle ne puisse, eu égard à la contrainte de concision extrême, y apparaître. Quand le lecteur découvre une telle démonstration, il doit donc en accepter la règle du jeu : implicitement, tout est astuce, court-circuit et artifice de guidage dans les calculs. Partir du développement en série géométrique[10] :

$$\int\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}dx \int_0^1 y^{2n}dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{2n+1}$$

permet en effet d'arriver par une voie apparemment détournée à la valeur de $\zeta(2)$ grâce à l'observation tout à fait élémentaire et bien connue que :

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots = \frac{1}{2^2}\,\zeta(2)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Mais le plus surprenant, c'est bien entendu le changement trigonométrique-rationnel de variables qui permet de ramener le calcul de l'intégrale $\int\int_{[0,1]^2}(1-x^2y^2)^{-1}$ à une intégrale — *sur un triangle* ! — de la fonction constante égale à 1. Un tel argument est spectaculaire, et Calabi ne l'a probablement trouvé que parce qu'il cherchait une démonstration aussi élémentaire et aussi courte que possible du théorème d'Euler. Ces raccourcis-là sont imprévisibles, mais à un niveau supérieur, on ne peut s'empêcher de penser qu'ils témoignent d'une immanence relationnelle que nous ne percevons qu'imparfaitement.

En résumé, la genèse de démonstrations ultra-courtes confirme un fait métaphysique central au sujet des mathématiques : dans le labyrinthe infini-dimensionnel des relations potentielles ou actuelles entre expressions algébriques, différentielles ou intégrales, il est quasiment impossible de sélectionner d'emblée les actes de recherche qui dirigent vers l'économie adéquate des arguments et des calculs. C'est pourquoi dynamique et dialectique de la pensée restent les ressources principales dans toute entreprise de recherche.

Interlude : spéculations sur l'identité $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Analysons maintenant un exemple d'artifice élégant de calcul qui est sensiblement plus simple. Il est bien connu qu'aucune méthode basée sur la connaissance des primitives de fonctions élémentaires ne permet d'effectuer le calcul de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. La méthode orthodoxe ([**235**]) pour évaluer cette intégrale gaussienne consiste à en calculer le *carré*. *A posteriori*, il n'y a

[10] On se convaincra aisément que sommation et intégration double sont effectivement interchangeables ici.

rien d'étonnant à ce que ce soit le carré de cette intégrale qui se prête le mieux à un calcul explicite, pourvu que l'on sache *à l'avance* que cette intégrale vaut $\sqrt{\pi}$. Mais *a priori*, il en va tout autrement : rien ne permet de savoir à l'avance qu'une intégrale donnée fera intervenir telles et telles quantités transcendantes reliées entre elles à travers telle ou telle combinaison algébrique. Le mathématicien qui cherche à évaluer une nouvelle intégrale inconnue peut donc difficilement perdre son temps à tester de manière systématique un très grand nombre de combinaisons algébriques possibles, en sachant pertinemment qu'au plus une seule d'entre elles pourra convenir, et peut-être même *aucune*[11]. Il y a donc en quelque sorte un *tour de passe-passe* dans le geste qui consiste à annoncer de but en blanc : « calculons plutôt le carré de l'intégrale inconnue ». Le problème principal en effet, c'est que l'acquisition de connaissance mathématique est un processus en quelque sorte *irréversible*, au sens positif du terme où l'atteinte d'une vérité recherchée est irréversiblement créatrice d'un ordre rationnel local, tandis que la confirmation d'une vérité déjà connue est une activité secondaire qui demande beaucoup moins d'invention.

> According to a dictum of Littlewood any identity, once verified, is trivial. [**359**], p. 200.

On sait bien pour l'intégrale gaussienne que l'élévation au carré de $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ suivie d'un découplage $I \cdot I$ du carré I^2 et d'une différenciation dyadique des notations :

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dx\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \end{aligned}$$

permet de ramener le calcul de I^2 à une intégrale *bidimensionnelle* dont l'intégrande $e^{-x^2-y^2}$ est invariant par toute rotation centrée à l'origine. Par conséquent, ce nouvel intégrande s'identifie en coordonnées polaires (r, θ) à la fonction purement radiale e^{-r^2}. Il suffit alors de connaître le déterminant jacobien de la transformation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes :

$$(r,\,\theta) \longmapsto (x, y) := \big(r\cos\theta,\; r\sin\theta\big),$$

c'est-à-dire de savoir que $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, pour ramener le calcul de cette intégrale double à une intégrale double qui ne fait plus intervenir que des

[11] Néanmoins, on peut déléguer une telle tâche à des ordinateurs convenablement programmés.

fonctions dont les primitives existent au sens élémentaire du terme :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta \\ &= \bigg(\int_0^{2\pi} d\theta \bigg) \cdot \bigg(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\, r\, dr \bigg) \\ &= \big[\theta\big]_0^{2\pi} \Big[-\tfrac{1}{2}\, e^{-r^2} \Big]_0^{\infty} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

puisqu'il est tout à fait clair[12] que grâce au facteur r, une primitive élémentaire de $r\, e^{-r^2}$ est tout simplement $\frac{1}{2} e^{-r^2}$. Mais peut-on prétendre que cette preuve est absolument simple, puisqu'elle considère comme connu le calcul des intégrales doubles infinies ?

> Even a straight-A high-school senior can't understand some of the above equations unless he is a true math enthusiast for his age. At least in this sense, this method is not so simple. Is there any way so simple that earnest high-school students can understand it ? [**235**], p. 39.

Certes, la recherche de démonstrations économiques relève plus généralement d'un problème que la théorie de la démonstration explore depuis l'émergence d'une métamathématique hilbertienne consacrée à l'étude de la cohérence, de la complétude et de la catégoricité des systèmes formels. Certes, on peut aussi rechercher une autre méthode qui n'utilise que des primitives de fonctions élémentaires[13]. Mais d'un point de vue philosophique général, ce qui nous intéresse le plus ici, c'est de montrer sur ces exemples simples que le questionnement micro-spéculatif pur dirige le réel mathématique à la manière dont la contextualisation expérimentale crée, en mécanique quantique, la réalité qui est perçue (reçue) par l'appareil de mesure.

Identités algébriques entre factorielles. Venons-en enfin à la partie vraiment nouvelle de la démonstration d'Apéry, à savoir la proposition principale p. 588. Il est surprenant de constater qu'elle est beaucoup moins élémentaire qu'il n'y paraît.

> According to a dictum of Littlewood any identity, once verified, is trivial. Surely the fact that the sequences a_n and b_n satisfy the linear recurrence relations (12.29) is very nearly a counterexample. [**359**], p. 200.

---

[12] Notons rétrospectivement qu'il manquait cruellement un facteur x devant e^{-x^2}.

[13] Par exemple ([**235**]), on peut proposer alternativement de calculer de deux manières différentes l'intégrale $J := \int_0^\infty \int_0^\infty x\, e^{-x^2(y^2+1)}\, dxdy$, à savoir premièrement en intégrant d'abord par rapport à x : $J = \int_0^\infty \frac{1}{2} \frac{1}{y^2+1}\, dy = \frac{1}{2} \big[\arctan(y)\big]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$, et ensuite deuxièmement en posant $t = xy$, d'où $xdxdy = dtdx$ et donc : $J = \big(\int_0^\infty e^{-t^2}\, dt\big) \cdot \big(\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx\big) = \big(\frac{I}{2}\big)^2$, ce qui redonne $I = \sqrt{\pi}$ en comparant ces deux expressions de J.

Pour commencer, il sera commode de donner un nom aux éléments qui sont soumis à la sommation dans b_n et dans a_n :

$$b_{n,k} := \binom{n}{k}^2 \qquad \text{et :} \qquad a_{n,k} := b_{n,k}\, c_{n,k},$$

de telle sorte que l'on peut écrire :

$$b_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \qquad \text{et :} \qquad a_n = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k}\, c_{n,k}.$$

Il s'agit là d'un acte de nomination des éléments secondaires qui aura son utilité propre mais qui n'éclaire pour l'instant en rien la question. Réécrivons alors avec ces notations la relation de récurrence (12.29) dont on doit établir qu'elle est satisfaite par la suite $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, mais en observant au préalable par un calcul direct que :

$$34\,(n+1)^3 - 51\,(n+1)^2 + 27\,(n+1) - 5 = 34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5,$$

afin de faire voir, en augmentant n d'une unité, ladite relation qui est satisfaite entre b_{n+1}, b_n et b_{n-1}, ce qui nous donne :

$$0 \overset{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \big\{(n+1)^3\, b_{n+1,k} - \big[34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5\big]\, b_{n,k} + n^3\, b_{n-1,k}\big\}.$$

Voilà qui est bien facile, mais que faire maintenant ?

> Neither Cohen nor I had been able to prove the main proposition in the intervening 2 months. After a few days of fruitless effort the specific problem was mentioned to Don Zagier (Bonn), and with irritating speed he showed that indeed the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the recurrence. [**359**], p. 200.

A posteriori, le « truc » de la démonstration, c'est d'introduire les nouvelles quantités :

$$B_{n,k} := 4\,(2n+1)\big[k(2k+1) - (2n+1)^2\big]\,\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2,$$

et d'observer qu'elles satisfont les relations *non triviales et non évidentes* :

$$\boxed{\begin{aligned} B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3\,\overbrace{\binom{n+1}{k}^2\binom{n+1+k}{k}^2}^{b_{n+1,k}} - \big[34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5\big]\cdot \\ \cdot\underbrace{\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2}_{b_{n,k}} + n^3\,\underbrace{\binom{n-1}{k}^2\binom{n-1+k}{k}^2}_{b_{n-1,k}} \end{aligned}}$$

> [...] and, *O mirabile dictu*, the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ does indeed satisfy the recurrence (12.29) by virtue of the method of *creative telescoping*. [**359**], p. 200.

Fût-il armé d'une pensée spéculative aguerrie à la transmission d'information irréversible, le lecteur ne manquera pas néanmoins d'être désarçonné. Par quelles voies Zagier a-t-il donc pu *deviner* que les quantités présentes sous le signe $\sum_{k=0}^{n+1}$ pouvaient être réalisées comme différences de deux termes qui jouiraient de la propriété d'annulation téléscopique[14] :

$$0 = \sum_{k=0}^{n+1} B_{n,k} - B_{n,k-1} = B_{n,n+1} - B_{n,-1} = 0 - 0 = 0\,?$$

La question génétique est d'autant plus gênante que la vérification de l'identité satisfaite par la différence $B_{n,k} - B_{n-1,k}$ représente un calcul substantiel. Voyons néanmoins en quelques lignes comment on pourrait y parvenir, sans avoir aucune idée de la manière dont une telle identité pourrait s'inscrire dans une théorie générale.

Évidemment, il faut commencer par développer tous les coefficients binomiaux présents sous la forme de quotients de factorielles, y compris pour les deux termes $B_{n,k}$ et $B_{n,k-1}$. Le résultat de cette expansion s'étend alors sur plusieurs lignes, le tout pivotant autour d'une égalité qui reste à vérifier :

$$\begin{aligned}
& 4\,(2n+1)\big[k(2k+1) - (2n+1)^2\big]\frac{\underline{n!^2}_\circ}{k!^2\,(n-k)!^2}\,\frac{(n+k)!^2}{k!^2\,\underline{n!^2}_\circ} - \\
& - \,4(2n+1)\big[(k-1)(2k-1) - (2n+1)^2\big]\frac{n!^2}{(k-1)!^2\,(n-k+1)!^2} \\
\overset{?}{=} \quad & (n+1)^3\,\frac{(n+1)!^2}{k!^2\,(n-k+1)!^2}\,\frac{(n+k+1)!^2}{k!^2\,(n+1)!^2} - \\
& - \,\big[34\,n^3 + 52\,n^2 + 27\,n + 5\big]\,\frac{n!^2}{k!^2\,(n-k)!^2}\,\frac{(n+k)!^2}{k!^2\,n!^2} + \\
& + n^3\,\frac{(n-1)!^2}{k!^2\,(n-k-1)!^2}\,\frac{(n+k-1)!^2}{k!^2\,(n-1)!^2}.
\end{aligned}$$

Si nous multiplions alors les deux côtés de l'égalité à établir tout d'abord par $k!^2\,k!^2\,(n-k+1)!^2$ et ensuite par $\frac{1}{(n+k-1)!^2}$ afin de faire disparaître toutes les factorielles ainsi que tous les dénominateurs, l'identité à établir revient à vérifier que l'on a bien :

$$\begin{aligned}
& 4\,(2n+1)\big[k(2k+1) - (2n+1)^2\big]\,(n-k+1)^2\,(n+k)^2 - \\
& - \,4\,(2n+1)\,\big[(k-1)(2k-1) - (2n+1)^2\big]\,k^2\,k^2 \\
\overset{?}{=} \quad & (n+1)^3\,(n+k+1)^2\,(n+k)^2 - \\
& - \,\big[34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5\big]\,(n-k+1)^2\,(n+k)^2 + \\
& + n^3\,(n-k+1)^2\,(n-k)^2.
\end{aligned}$$

C'est une identité entre polynômes de degré *sept* en les deux variables (k, n). Pour l'établir, « il suffit » de développer tous les produits et de vérifier ensuite « simplement » que la somme de tous les monômes obtenus ainsi à

[14] On a bien entendu ici $B_{n,n+1} = 0$ et $B_{n,1} = 0$, grâce à la convention standard que les coefficients binomiaux $\binom{p}{q}$ doivent être posés égaux à 0 lorsque $q \leqslant -1$ et lorsque $q \geqslant p+1$.

gauche du signe $\stackrel{?}{=}$ coïncide avec la somme de tous les monômes qui se situent à droite du signe $\stackrel{?}{=}$. Cette opération est essentiellement aussi directe que de vérifier qu'un certain nombre donné d'une vingtaine de chiffres est le produit de deux nombres premiers dont on a la connaissance. Il n'en reste pas moins que l'effectuation *effective* de tels calculs de vérification exige tout de même une grande dextérité technique et qu'elle pourrait prendre un certain temps au cas où l'on commettrait au passage quelques petites erreurs dans les étapes intermédiaires. En effet, le développement complet, disons de l'avant dernière ligne est le suivant :

$$
\begin{aligned}
&5\,n^2 + 37\,n^3 + 163\,n^5 + 110\,n^4 + 5\,k^4 - 10\,k^3 + 34\,n^7 + 119\,n^6 - 122\,n^3k^2 - 102\,n^2k^3 - \\
&- 13\,n^2k^2 + 27\,nk^4 - 54\,nk^3 + 156\,n^3k + 64\,n^2k + 170\,n^4k - 68\,n^5k^2 + 68\,n^5k - \\
&- 170\,n^4k^2 + 51\,k^4n^2 + 34\,n^3k^4 - 68\,n^3k^3 + 5\,k^2 + 17\,nk^2 + 10\,nk
\end{aligned}
$$

et le développement de chacune des quatre autres lignes est d'une longueur comparable.

Il y a donc en définitive des *étages inférieurs* du calcul qui s'avèrent être d'une complexité symbolique substantielle et dans lesquels les coefficients entiers, les monômes, et les polynômes se combinent de manière essentiellement imprévisible lorsque les structures générales font défaut. De nos jours, il est très facile de confier à un logiciel de calcul formel la vérification de la dernière identité, après simplification des factorielles. Sommer cinq polynômes de degré sept en deux variables (k, n) qui incorporent chacun plus de vingt-cinq monômes, c'est là en effet une tâche essentiellement ingrate pour le lecteur de la démonstration d'Apéry. Néanmoins, il ne faut pas se cacher que c'est peut-être là, dans ces calculs excentriques et presque infaisables que se cachent les vraies causalités adéquates. On se trouve alors confronté de nos jours à un risque assez menaçant pour le développement futur des mathématiques : *trop confier les calculs aux machines prive l'esprit, le dépossède même du questionnement génétique* in situ.

Bilan intermédiaire. Ces analyses spéculatives ont redémontré quelques vérités qui sont inhérentes à la pratique effective des mathématiques. Tout d'abord, lecture et relecture d'un texte mathématique publié (comme celui de Van der Poorten) ne donneront pas forcément accès à la vraie pensée qui gouverne la genèse d'un théorème mathématique. Car la vraie pensée, en tant qu'elle est en permanence sollicitée par des exigences métaphysiques quant à l'ouverture coprésente des causalités mathématiques est d'une complexité extraordinairement plus grande que ce qui est transmis dans le texte publié. Alors dans la pratique et dans la communication entre mathématiciens, on en est toujours réduit à tenter de reconstituer les traces effacées d'un parcours dialectique. Même si l'on réécrit une démonstration à partir d'une annonce ou d'une publication, on n'aura essentiellement rien compris en profondeur tant que l'on n'aura pas cherché à reconstituer le *tissu de questions en recherche d'adéquation* qui gravitent autour des concepts. Il faut alors restaurer les questions abstraites de la gouvernance métaphysique afin de réarticuler de manière globale la perception que l'on a d'un champ de recherche. Il faut effectuer seul en sa propre conscience le travail nécessaire d'élévation panoramique. C'est un paradoxe : la mathématique qui se veut une science de progrès et pour laquelle la possibilité d'une architecture cumulative et hiérarchisée des connaissances ne fait aucun doute en est réduite à *oublier*.

Génétique mathématique technique : un exemple

Argument. En étudiant un problème de géométrie algébrique où la question à résoudre se ramène à travailler avec des sommes finies, nous allons maintenant montrer comment la genèse des idées techniques locales se heurte au *mystère omniprésent de la non-connaissance du geste à effectuer*. Bien que nous puissions en principe tout à fait nous dispenser de signaler les motivations originales de ce problème, nous souhaitons néanmoins par souci de complétude effectuer un rappel adapté qui pourra éventuellement être sauté en première lecture[1], puisque tout se ramène à engendrer un calcul formel effectif général à partir d'un examen de cas « simples ». L'illustration génétique proprement dite débutera donc un peu plus loin ci-dessous, à savoir p. 614.

Origine du problème. Soit $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ une *surface projective algébrique* dans l'espace projectif complexe de dimension 3 qui est définie comme le lieu des zéros d'un certain polynôme de degré $d \geqslant 1$ et qui est géométriquement lisse. Au-dessus de cette surface, on construit un certain *fibré de jets* $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ qui dépend d'un premier entier $\kappa \geqslant 1$, l'*ordre des jets*, et d'un deuxième entier $m \geqslant 1$, le *poids* commun des vecteurs d'une fibre quelconque. Grâce au théorème dit *de Riemann-Roch-Hirzebruch*, on calcule la *caractéristique d'Euler* asymptotique de ce fibré et elle s'exprime en fonction des classes de Chern c_1 et c_2 du fibré cotangent à X. La seule chose qui compte pour la suite, c'est que le coefficient de c_2 dans cette caractéristique d'Euler asymptotique est donné par la formule purement numérique :

$$\mathsf{coeff}_{\mathsf{c}_2}\big[\mathsf{Car\text{-}Eul}(\mathscr{E}_{\kappa,m})\big] = \frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2\,(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg).$$

Ici, entre parenthèses, on reconnaît bien sûr les sommes partielles de la série d'Euler $\zeta(2) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}$. Par ailleurs, le coefficient devant la parenthèse dépend explicitement de m et de κ.

Or on démontre ([**321**]) que ce fibré $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ peut essentiellement être représenté comme une certaine somme directe de fibrés dit *de Schur* qui sont indécomposables en sommes directes de fibrés de dimension inférieure, et dont on connaît la structure. En particulier, il existe des formules, valables

[1] *Voir* [**321**] pour plus de détails.

en toute dimension, qui donnent la caractéristique d'Euler de ces fibrés indécomposables. Par souci de cohérence entre toutes les formules de caractéristique, se pose alors la question de vérifier par le calcul que la somme des caractéristiques d'Euler de tous les fibrés en lesquels se décompose le gros fibré de jets $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ redonne bien sa propre caractéristique d'Euler.

Sans rentrer plus avant dans les détails, disons seulement que nous avons affaire ici à un objet qui, à cause de la théorie des représentations, se décompose en somme directe :

$$\mathsf{Objet} = \mathsf{Objet}_1 \oplus \mathsf{Objet}_2 \oplus \cdots \oplus \mathsf{Objet}_N$$

d'objets plus simples. Puisque la caractéristique d'Euler possède la propriété fondamentale d'*additivité* par rapport à de telles décompositions, on doit donc en principe avoir :

$$\mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}\big) = \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_1\big) + \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_2\big) + \cdots + \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_N\big),$$

et aussi bien entendu, la même propriété pour le coefficient de c_2 qui nous intéresse dans cette caractéristique. Cette propriété d'additivité qui provient de la théorie des fibrés holomorphes et de la théorie des représentations va donc se *réincarner dans le domaine archaïque des nombres entiers* et fournir une *formule nouvelle et purement numérique* qu'il va falloir démontrer indépendamment par souci de cohérence. Le problème, c'est qu'une telle vérification de cohérence va exiger beaucoup plus de travail démonstratif que de vérifier une addition toute simple telle que par exemple $\frac{N(N+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + N$.

C'est là un des traits essentiels que les mathématiques partagent avec l'évolution des êtres animés sur le sol terrestre, c'est-à-dire les découvertes imprévisibles de réalités relationnelles nouvelles dont l'existence en acte est pour ainsi dire *provoquée* par les chemins que l'on emprunte ou par les questions que l'on cherche à résoudre. Et à un niveau beaucoup plus abstrait, toutes les identités calculatoires finies que produisent l'algèbre, la théorie des nombres et la combinatoire sont imprégnées d'un *contexte problématique déclencheur* qui les *détermine*. L'antinomie entre une réalité mathématique qui serait préexistente *a priori* et des constructions effectives qui seraient ontologiquement validables seulement dans l'*a posteriori* des démonstrations rigoureuses n'a un sens aporétique que parce que l'entendement, dans son accès aux relations entre objets mathématiques, est contraint par une spatio-temporalité propre. À une théorie de la relativité pour la cinématique des corps répond peut-être un relativisme des réalités mathématiques synthétisées par rapport aux conjectures, projets et questions que l'on se propose d'étudier. En effet, très fréquemment, un énoncé conjectural donné propose un objectif qualitatif ou quantitatif précis qui s'avère, au fur et à mesure que les explorations progressent, ne produire qu'une petite fraction de la réalité impliquée.

Les formules qui fournissent les caractéristiques d'Euler pour les fibrés indécomposables s'articulent comme suit. Introduisons κ variables réelles à indices simples $y_1, y_2, \dots, y_\kappa$ et $\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}$ variables réelles à indices doubles et ordonnés de manière strictement croissante $y_{1,2}, \dots, y_{1,\kappa}, y_{2,3}, \dots\dots, y_{\kappa-1,\kappa}$. On supposera que ces variables sont positives : $y_\lambda \geqslant 0$ et $y_{\lambda_1,\lambda_2} \geqslant 0$ pour tous $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ et tous $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \kappa$. Dans le quadrant réel positif $\mathbb{R}^{2\kappa-1}_{\geqslant 0}$ de dimension $(2\kappa-1)$, on considère alors les $(\kappa-1)$ simplexes-hyperplans $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\lambda, \dots, \Delta_{\kappa-1}$ dont les $(\kappa-1)$ équations sont les suivantes :

$$
\begin{aligned}
\Delta_1 :& \quad 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_2 + y_1 + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2},\\
\Delta_2 :& \quad 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_2 + y_{2,\kappa} + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_\lambda :& \quad 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_\lambda + y_{\lambda,\kappa} + y_{\lambda-1,\kappa} + \cdots + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\Delta_{\kappa-1} :& \quad 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + y_{\kappa-1,\kappa} + \cdots + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + y_{1,2},
\end{aligned}
$$

où chaque ligne contient exactement $(2\kappa-1)$ lettres y. Ensuite, on introduit les multiplicités avec lesquelles apparaissent les fibrés indécomposables, c'est-à-dire le nombre de fois qu'un objet Objet_k comme ci-dessus apparaît avec répétition, et ces multiplicités s'avèrent être identifiables à des différences entre deux coefficients binomiaux (excepté dans les deux premiers cas) :

$$
N_\kappa^1 := 1, \quad N_\kappa^2 := \kappa - 2, \quad N_\kappa^{\kappa-1} = \frac{(2\kappa-5)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\kappa-2)} - \frac{(2\kappa-5)\cdots\kappa}{1\cdots(\kappa-4)},
$$

c'est-à-dire en toute généralité pour tout λ tel que $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa - 1$:

$$
\begin{aligned}
N_\kappa^\lambda &:= \frac{(\kappa+\lambda-4)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\lambda-1)} - \frac{(\kappa+\lambda-4)\cdots\kappa}{1\cdots(\lambda-3)}\\
&= \binom{\kappa-3+\lambda-1}{\lambda-1} - \binom{\kappa-3+\lambda-3}{\lambda-3},
\end{aligned}
$$

avec la convention habituelle et naturelle que tout coefficient binomial $\binom{b}{a}$ pour lequel $a \leqslant -1$ ou $a \geqslant b+1$ est considéré comme nul. Nous admettrons alors que lorsqu'on l'applique au coefficient de c_2 pour la caractéristique d'Euler, la formule d'additivité donne, en terme de ces multiplicités combinatoires N_κ^λ, l'identité suivante qui doit être vérifiée *numériquement* par souci de cohérence (d'où le signe $\overset{?}{=}$) :

$$
\mathsf{coeff}_{\mathsf{c}_2}\big[\mathsf{Car\text{-}Eul}(\mathscr{E}_{\kappa,m})\big] = \frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg) \overset{?}{=}
$$

(12.29)

$$\overset{?}{=} \frac{m^{2\kappa+1}}{3!} \bigg\{ N_\kappa^1 \cdot \frac{1}{3\cdot 4\cdots(\kappa+1)} \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_1} \left(\frac{y_1}{1}+\frac{y_2}{2}+\frac{y_3}{3}+\cdots+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^3 +$$
$$+ N_\kappa^2 \cdot \frac{1}{3\cdot(\kappa+1)(\kappa+2)} \cdot \frac{1}{2\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_2} \left(\frac{y_2}{2}+\frac{y_3}{3}+\cdots+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^3 +$$
$$+\cdots+$$
$$N_\kappa^\lambda \cdot \frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_\lambda} \left(\frac{y_\lambda}{\lambda}+\cdots+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^3$$
$$+\cdots+$$
$$N_\kappa^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(2\kappa-1)} \cdot \frac{1}{(\kappa-1)\kappa} \cdot \int_{\Delta_{\kappa-1}} \left(\frac{y_{\kappa-1}}{\kappa-1}+\frac{y_\kappa}{\kappa}\right)^3 \bigg\}.$$

Ce n'est pas simple, mais nous allons simplifier toutes les intégrales qui apparaissent dans cette longue formule afin de nous ramener à une identité de pure arithmétique élémentaire entre nombres rationnels. Ici, les cubes de sommes de fraction $\frac{y_\mu}{\mu}$ qu'il faut intégrer sur les simplexes-hyperplans Δ_λ peuvent être développés grâce à la formule du multinôme de Newton, que nous écrirons comme suit :

$$\big(Y_\lambda+\cdots+Y_\kappa\big)^3 = \sum_{\substack{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3 \\ q_\lambda\geqslant 0,\,\dots,\,q_\kappa\geqslant 0}} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}\,\big(Y_\lambda\big)^{q_\lambda}\cdots\big(Y_\kappa\big)^{q_\kappa},$$

où les q_μ pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \kappa$ sont des entiers positifs. Ainsi quand on intègre ces sommes finies, on est conduit à devoir calculer des intégrales du type :

$$\text{(12.29)} \qquad \mathsf{Intégrale}_\lambda := \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \int_{\Delta_\lambda} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}\,\frac{(y_\lambda)^{q_\lambda}}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{(y_\kappa)^{q_\kappa}}{\kappa^{q_\kappa}},$$

où l'on voit apparaître, dans les dénominateurs, des puissances q_μ-èmes des entiers μ, pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \kappa$. Or ces intégrales peuvent être calculées très simplement grâce à un lemme élémentaire (énoncé ci-dessous) qui généralise l'intégration basique suivante :

$$\int_{y_1+y_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2}\, dy_2 = \int_0^1 (1-y_2)^{j_1}\, y_2^{j_2}\, dy_2 = \cdots = j_1! \int_0^1 \frac{y^{j_2+j_1}}{(j_2+1)\cdots(j_2+j_1)}\, dy_2 =$$
$$= \frac{j_1!\, j_2!}{(j_1+j_2+1)!},$$

et qui se démontre par récurrence en effectuant des intégrations par parties itérées. Quelques commentaires s'imposent pour présenter ce lemme.

Dans la technique mathématique interne, la généralité est toujours relative et dynamique. Elle s'articule par rapport à un problème *local* d'embrassement formel et elle exprime une synthèse formulaire *locale*. Elle entretient aussi des liens effacés de justification avec tous les calculs particuliers et inductifs effectués en sous-main afin d'en garantir le bien-fondé, la correction et la rigueur.

Par ailleurs, l'expérience de la recherche et la pratique effective de certains calculs créent des certitudes locales fiables quant à certains champs de la mathématique élémentaire, notamment l'arithmétique élémentaire ou l'algèbre commutative sur des anneaux classiques. En effet, dans de tels champs, la véracité de certains énoncés mathématiques s'enracine dans un socle absolu de cohérence. Aussi la portée sceptique de la croix empiriste du problème de l'induction, à savoir l'éventualité perpétuelle de contre-exemplification au général inductif, doit-elle être rigoureusement limitée aux champs mathématiques qui sont véritablement imprégnés d'ouverture et d'ignorance. Il serait en effet absurde de croire que la croix empiriste de l'induction puisse porter sur les domaines établis dans lesquels les certitudes mathématiques fondamentales sont acquises et régulièrement confirmées. Aussi énoncerons-nous sans démonstration le lemme suivant en affirmant qu'il découle sans difficulté d'une généralisation très accessible du calcul particulier que nous venons de détailler à l'instant. Ce lemme doit donc être lu comme une évidence qui déploie tout ce qu'il est nécessaire de savoir afin de poursuivre les calculs dans lesquels interviennent ces types d'intégrales, notamment dans les calculs que nous venons d'interrompre pour répondre aux exigences de commentaire. Par ailleurs, dans l'énonciation même de ce lemme, il est important, *par un choix appropié de notations*, de *respecter l'insertion locale* de cette *pensée en généralité* qui vient se greffer de manière quelque peu externe au calcul en cours.

Lemme. *Pour tout $p \geqslant 2$ et pour tous exposants entiers quelconques $j_1, j_2, \dots, j_p \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_p=1 \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ \cdots\ y_p\geqslant 0}} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \cdots y_p^{j_p}\, dy_2 \cdots dy_p = \frac{j_1!\ j_2!\ \cdots\ j_p!}{(j_1+j_2+\cdots+j_p+p-1)!}. \qquad \square$$

Seule une nouvelle lettre p est introduite. Dans sa rhétorique, l'énoncé souligne le caractère quelconque des exposants. Les variables y ordonnées ici linéairement $y_1, y_2, \dots, y_p$ et sans lacunes doivent d'ores et déjà être envisagées comme remplacées mentalement pour application désirée par les $(2\kappa - 1)$ variables y_λ et y_{λ_1,λ_2} *avec lacunes* qui interviennent dans l'équation d'un simplexe-hyperplan quelconque Δ_λ. Aussi pouvons-nous maintenant calculer cette somme d'intégrales (12.29) que nous avions laissée en suspens, et si l'on veut respecter absolument la continuité de la pensée, il nous faut extraire de l'intégrale à calculer tous les coefficients numériques qu'elle incorpore, afin de faire apparaître une intégrale à calculer qui est exactement du type considéré par le lemme :

$$
\begin{aligned}
\text{Intégrale}_\lambda &= \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}\cdot\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}\cdot\int_{y_\kappa+\cdots+y_\lambda+y_{\lambda,\kappa}+\cdots+y_{1,2}=1}(y_\lambda)^{q_\lambda}\cdots(y_\kappa)^{q_\kappa}\\
&= \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \frac{3!}{\underline{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}_\circ}\cdot\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}\cdot\frac{\underline{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}_\circ}{(q_\lambda+\cdots+q_\kappa+(2\kappa-1)-1)!}\\
&= \frac{3!}{(2\kappa+1)!}\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}.
\end{aligned}
$$

Dans les calculs qui doivent alors se poursuivre spontanément, on observe que le produit des factorielles des q_μ pour $\lambda\leqslant\mu\leqslant\kappa$ se neutralise et que la longue factorielle au dénominateur qui semblait dépendre des entiers $q_\lambda,\dots,q_\kappa$, en est en fait indépendante, puisque seule apparaît leur somme $q_\lambda+\cdots+q_\kappa$, toujours égale à 3. Ainsi peut-on sortir cette factorielle $(3+(2\kappa-1)-1)!=(2\kappa+1)!$ de la sommation et nous voyons apparaître des sommes du type :

$$\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}$$

qui, incontestablement, ont des liens de parenté formelle avec la somme eulérienne $\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}$, tout en étant apparamment beaucoup plus complexes : *genèse omnipossible aux formes imprévisibles*.

Identité à démontrer. Si nous revenons maintenant au long membre de droite de l'équation (12.29) à vérifier, et que nous le réécrivons avec la notation $\sum_{\lambda=1}^{\kappa}$ afin d'en contracter l'extension, tout revient donc à établir l'identité :

$$
\begin{aligned}
\frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2\,(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg) \overset{?}{=} \frac{m^{2\kappa+1}}{\underline{3!}_\circ}\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1}N_\kappa^\lambda\cdot\frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\\
\cdot\frac{1}{\lambda\cdots\kappa}\cdot\frac{\underline{3!}_\circ}{(2\kappa+1)!}.
\end{aligned}
$$

Mais avant de poursuivre, un toilettage est encore possible. En effet, de part et d'autre du symbole $\overset{?}{=}$, on peut visiblement simplifier la puissance commune du poids $m^{2\kappa+1}$, on peut aussi simplifier la factorielle commune $(2\kappa+1)!$ au dénominateur, et l'on peut aussi multiplier les deux côtés par la factorielle au carré $(\kappa!)^2$ pour la faire disparaître du membre de gauche, tandis que dans le membre de droite, on peut enfin accoupler naturellement cette factorielle aux inverses de produits d'entiers qui lui sont apparentés, mais en découplant au préalable cette puissance seconde[2] :

$$\frac{\kappa!}{3\cdots\kappa(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\frac{\kappa!}{\lambda\cdots\kappa}=2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)},$$

ce qui produit bien entendu une simplification évidente et spontanée. Ainsi en définitive, l'identité à démontrer s'écrit-elle après nettoyage :

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\overset{?}{=}\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1}N_\kappa^\lambda\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\bigg(\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}\cdots\kappa^{q_\kappa}}\bigg)\\ \text{avec :}\quad N_\kappa^\lambda:=\tfrac{(\kappa+\lambda-4)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\lambda-1)}-\tfrac{(\kappa+\lambda-4)\cdots\kappa}{1\cdots(\lambda-3)}.\end{gathered}}$$

Maintenant, notre problème $\overset{?}{=}$ est devenu purement numérique et ne dépend plus que de deux entiers quelconques $\kappa\geqslant 2$ et λ avec $1\leqslant\lambda\leqslant\kappa-1$. Ont complètement disparu de nos considérations tous ces objets de la géométrie complexe : la surface algébrique projective $X^2\subset\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$; le fibré de jets $\mathscr{E}_{\kappa,m}$; l'application du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch ; les classes de Chern c_1 et c_2 ; la troncature asymptotique.

Ici s'illustre donc une thèse troublante sur la nature profonde des mathématiques et que nous chercherons à exprimer comme suit. En mathématiques, ce qu'on qualifie de conceptuel n'est peut-être rien d'autre qu'une entrée en matière liminaire, un premier moment d'englobement par la pensée au seuil de complexités ultérieures. Mais cette première approche est appelée à conduire ensuite, dans un deuxième moment, à des complexités d'ordre supérieur, dans le domaine de la constructivité et de l'effectivité par exemple, là où les questions dominatrices continueront à être présentes tandis que les premiers concepts qui se présentaient comme réponses seront contraints de s'effacer partiellement. Et éventuellement aussi, puisque c'est souvent ainsi que les choses se passent, les concepts initiaux et simples seront soumis à approfondissement ou à révision tant que les questions non résolues continueront à faire vivre leur destin d'ouverture.

En présence d'ouverture mathématique véritable, il y a certainement un moment où il faut se représenter que les visions, les concepts, les expressions et les notations que l'on utilisait jusqu'à présent ne font qu'entrevoir une toute petite partie d'une « réalité réalisable ». Cette remise en cause pourrait devenir d'une ampleur telle qu'elle commanderait de réviser complètement la manière dont on a abordé la question jusqu'à présent. À l'échelle du chercheur individuel, il est en effet capital de pouvoir réviser complètement ses

[2] En permanence dans le calcul, il faut en effet être capable de redéployer complètement toute expression mathématique qui aurait été auparavant contractée à l'aide d'une notation symbolique standard, comme par exemple ici $(\kappa!)^2=\kappa!\cdot\kappa!$, afin de regarder si la réexpression d'un tout quelconque et local en certaines de ses parties n'indiquerait éventuellement pas le « bon geste de calcul » que l'on doit effectuer.

objectifs et ses croyances, de refonder complètement ses approches, de reprendre au tout début une question qui n'aboutit pas, bref de revenir intégralement sur ses pas lorsqu'on s'aperçoit que la voie empruntée s'avérera peut-être sans issue ou en partie *inadéquate*. Or à l'échelle historique, il n'est pas du tout impossible dans un avenir relativement proche que les mathématiques, de plus en plus *finitisées dans une complexité calculatoire mieux maîtrisée*, conduisent à relativiser le jugement d'appréciation sur l'importance des conceptualisations en montrant qu'il existe une certaine *dynamique interne* de la production d'égalités et de relations entre objets mathématiques, le conceptuel au sens classique du terme ne se situant qu'au seuil de phénomènes beaucoup plus complexes. Il est possible que cela conduise les mathématiques à se réviser et à s'unifier en systématisant mieux les calculs qui apparaissent de manière récurrente dans divers domaines des mathématiques. Il est possible aussi que des causalités plus profondes de l'unité soient mieux perçues quand l'être de calculs mathématiques présents en plusieurs endroits sera mieux compris.

Préliminaires à l'étude des petites valeurs $\kappa = 2, 3, 4, 5$. Ainsi notre objectif est le suivant : effectuer un parcours génétique et dialectique raffiné afin de tester notre capacité à deviner les *dynamiques d'égalisation* qui sont suscitées par l'identité encadrée à vérifier (ci-dessus). Nous allons donc partir du long membre de droite, et chercher à le contracter sous la forme $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{\kappa^2}$.

Une difficulté substantielle et en quelque sorte inattendue va se présenter à nous : comme tous les nombres considérés sont des nombres entiers ou rationnels, ce sont des nombres purement numériques, c'est-à-dire non symbolisés au moyen de lettres grecques ou latines, et ils auront donc la propriété d'*agglutinement sans restriction* qui découle de l'addition (soustraction) et de la multiplication (division). Or en présence d'une grande quantité de tels nombres, comme dans ce qui va suivre où apparaîtront beaucoup de fractions rationnelles, *cette propriété de contraction numérique fait diversion à tout moment*. Nous avons déjà vu à plusieurs reprises (notamment ci-dessus et dans le paragraphe p. 582) que dans les expressions rationnelles qui comportent des indices, des factorielles, et des sommations, *les agglutinements et les simplifications portent toujours seulement sur une partie spécifique des expressions considérées*. Or le vrai problème quand on fait des calculs, c'est de déterminer dans quelle direction doivent aller les métamorphoses symboliques qui apportent de l'entropie d'information positive. Par conséquent, lorsque tout est numérique, *trop* de calculs-métamorphoses s'offrent et sont possibles. Il faut donc bien qu'existe chez les mathématiciens doués en calcul une pensée (complexe) du choix et de la sélection des calculs à faire, une sorte de vision des nécessités dynamiques locales du symbolique, bref toute une pensée remarquable qui n'est quasiment jamais écrite ou analysée dans les textes publiés.

Quelques remarques préliminaires seront utiles avant d'entamer cette présentation génétique qui va consister à montrer, sur les cas particuliers $\kappa = 2, 3, 4, 5$, comment pourrait s'articuler la recherche de gestes de calculs appropriés. Le but est de partir du membre de droite de l'identité encadrée à vérifier et de lui faire subir des transformations qui aboutiront au membre de gauche, plus simple, plus bref et plus concis. La contraction des expressions formelles suggère l'existence d'une *flèche de l'irréversible-synthétique*. Ce qui se déploie sur le plan formel serait comme gravir une ou plusieurs collines afin de passer d'une ou plusieurs vallées à d'autres. Et il y auraitune *direction orientée* de tout parcours calculatoire.

Dans les analyses ci-dessous, on commencera d'abord par lister les valeurs exactes des entiers N_κ^λ pour $\lambda = 1, 2, \ldots, \kappa - 1$. Ensuite, on déploiera la somme entre parenthèses :

$$\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \frac{1}{\lambda^{q_\lambda}} \cdots \frac{1}{\kappa^{q_\kappa}},$$

en regardant plus précisément toutes les solutions possibles de l'équation $q_\lambda + \cdots + q_\kappa = 3$, c'est-à-dire en fait, si l'on introduit des indices μ_i compris entre λ et κ, qu'il y a exactement quatre possibilités :

- ☐ un $q_{\mu_1} = 3$, les autres nuls ;
- ☐ un $q_{\mu_1} = 2$, un autre $q_{\mu_2} = 1$ avec $\mu_2 > \mu_1$, les autres nuls ;
- ☐ un $q_{\mu_1} = 1$, un autre $q_{\mu_2} = 2$ avec $\mu_2 > \mu_1$, les autres nuls ;
- ☐ trois $q_{\mu_1} = q_{\mu_2} = q_{\mu_3} = 1$ avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, les autres nuls.

Ainsi cette somme se déploie-t-elle pour revêtir la forme plus explicite et plus informative :

$$\sum_{\lambda\leqslant\mu_1\leqslant\kappa} \frac{1}{\mu_1^3} + \sum_{\lambda\leqslant\mu_1<\mu_2\leqslant\kappa} \frac{1}{\mu_1^2}\frac{1}{\mu_2} + \sum_{\lambda\leqslant\mu_1<\mu_2\leqslant\kappa} \frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2^2} + \sum_{\lambda\leqslant\mu_1<\mu_2<\mu_3\leqslant\kappa} \frac{1}{\mu_1}\frac{1}{\mu_2}\frac{1}{\mu_3}.$$

Que s'est-il passé ? Arrêtons-nous un instant, cela en vaut la peine.

Les calculs sont en permanence une métaphysique.

Dès l'instant où la somme $\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}$ a été écrite, c'est-à-dire au moment où nous avons appliqué la formule du multinôme de Newton, cette somme est apparue en tant que telle, et nous avons choisi de la représenter sous une forme qui correspond précisément à la métaphysique symétrique du multinôme. En effet, si l'on considère par exemple pour fixer les idées la formule du *binôme* qui donne le développement de $(x + y)^n$, le fait de l'écrire sous la forme :

$$\big(x+y\big)^n = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!\,q!}\,x^p\,y^q$$

montre bien la symétrie entre les deux variables x et y, et entre les deux exposants p et q. Mais cette forme n'est pas encore suffisamment informative, car le symbole $\sum_{p+q=n}$ *cache* une explicitation supplémentaire. Ce symbole se présente en effet comme explicite en lui-même, mais il *cache* la recherche *nécessaire* de tous les couples d'entiers (p,q) tels que $p+q=n$. Avec sa symétrie formelle, ledit symbole $\sum_{p+q=n}$ retient donc en lui une micro-question technique dont on voit bien, sur l'exemple multinomial $\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}$ qui nous intéresse, qu'elle est incontournable : au prochain geste de calcul, il faudra bien déterminer une manière d'embrasser par la pensée la totalité des couples (p,q) dont la somme est égale à n. Il faudra bien *briser la symétrie formelle initiale* et réécrire ce développement sous la forme plus explicite :

$$\big(x+y\big)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\,x^p\,y^{n-p}$$

qui transmettra une règle essentiellement mécanique et permettra d'écrire successivement tous les termes du développement binomial en question, sans avoir à se poser la question de savoir sur quoi exactement porte la somme.

Ainsi d'une manière très générale, s'exprime *abstraitement et a priori* une exigence d'explicitation totale dans les calculs qui s'oriente dynamiquement vers l'approfondissement de l'information. Donc si l'on continue encore plus avant à rendre droit à cette exigence, ce sera vers une pensée *proprement eulérienne* que l'écriture mathématique se dirigera. En effet, même l'écriture que nous venons d'améliorer à l'instant :

$$\sum_{p=0}^{n} \mathsf{expression}(p,\,n)$$

n'est pas encore suffisamment expressive pour transmettre toutes les informations aptes à féconder l'intuition du calcul. Mieux vaut en effet déployer « *à la Euler* » tous les termes l'un après l'autre :

$$x^n + \tfrac{n!}{(n-1)!\,1!}\,x^{n-1}\,y^1 + \tfrac{n!}{(n-2)!\,2!}\,x^{n-2}\,y^2 + \cdots + \tfrac{n!}{1!\,(n-1)!}\,x^1\,y^{n-1} + y^n,$$

et notifier en même temps à l'intuition par d'invisibles petits « drapeaux » et par des annotations manuscrites virtuelles quelle est la « règle » de passage d'un terme au suivant : elle seule explicite vraiment la « logique interne » d'une telle sommation. Il est en effet très différent d'écrire que l'on somme une expression qui dépend de n et de p, et de faire mieux voir avec des points de suspension « $\cdots$ » toute l'extension potentiellement réelle d'une telle somme, comme si tous ses termes devaient être écrits en acte, à ceci près que le geste de complétion serait suspendu au moment même où l'on a compris toute la logique des termes intermédiaires. Avantage subsidiaire de toute écriture avec trois petits points « $\cdots$ » : un lien virtuellement visible est maintenu avec tous les cas particuliers concrets $n = 1, 2, 3, 4, 5$ qui sont à l'origine de l'induction du particulier au général. Ce serait comme si l'écriture vraiment adéquate devait *informer* au maximum des liens virtuels entre les objets symboliques, et non pas contracter en éliminant ces liens dans l'*a posteriori* d'une synthèse.

Par exemple, si l'on voulait réaliser ici une explicitation encore plus informative, on pourrait même s'offrir le luxe *d'insérer au milieu des trois petits points* le terme générique de la sommation tout en ajoutant de nouveaux points de suspension de part et d'autre :

$$x^n + \tfrac{n!}{(n-1)!\,1!}\, x^{n-1}\, y^1 + \tfrac{n!}{(n-2)!\,2!}\, x^{n-2}\, y^2 + \\ + \cdots + \tfrac{n!}{(n-p)!\,p!}\, x^{n-p}\, y^p + \cdots + \tfrac{n!}{1!\,(n-1)!}\, x^1\, y^{n-1} + y^n,$$

afin de mieux faire voir les résonances qui existent entre les premiers termes, les derniers termes et les termes médians quelconques. On voit bien maintenant que cette dernière écriture plus développée synthétise quasiment tous les aspects[3] de la pensée interne à la formule du binôme :

☐ déploiement sous forme d'une sommation symétrique dans laquelle s'exprime comme une sorte de principe de vases communicants entre les puissances de x et celles de y ;

☐ indication des germes de généralité par l'écriture des trois premiers termes de la somme et par la notification de ses deux derniers termes ;

☐ réalisation effective de la généralité suggérée par l'apparition en acte et à la place médiane du terme général $\tfrac{n!}{(n-p)!\,p!}\, x^{n-p}\, y^p$;

☐ visionnement d'une extension éventuellement longue par la présence double des sommations intermédiaires « $+ \cdots +$ ».

Remarquons aussi au passage que nous avions d'ores et déjà employé (à dessein) une telle écriture maximalement informative au moment d'écrire la première version de notre identité à vérifier (12.29), nonobstant le fait qu'une telle écriture imposait d'utiliser plusieurs lignes et un grand nombre

[3] Excepté peut-être le suivant : on pourrait même écrire $\tfrac{n!}{n!\,0!}\, x^n$ et $\tfrac{n!}{0!\,n!}\, y^n$ au lieu de seulement x^n et y^n afin de mieux notifier la présence de tous les coefficients binomiaux. Mais peut-être au contraire que le fait de choisir d'écrire seulement x^n et y^n montre mieux que les deux termes extrêmes de la puissance initiale $(x + y)^n$ sont évidemment x^n et y^n, et peut-être bien aussi que le fait de ne pas écrire ces deux coefficients binomiaux triviaux rajoute un « *epsilon* » de portée synthétique en laissant à l'intuition le soin d'effectuer cette complétion élémentaire.

de symboles. Il y aurait ici comme une géométrisation partielle du symbolique qui exigerait de privilégier l'extension par rapport à la contraction. La travail de recherche mathématique dans les manuscrits montre en effet que les déploiements sont nécessités de manière interne au calcul et que les contractions notationnelles n'ont en général que peu de pouvoir de fécondation face à l'ouverture, bien qu'elles soient en général utilisées *a posteriori* pour la transmission des résultats.

Les deux valeurs élémentaires $\kappa = 2$ **et** $\kappa = 3$**.** Tout d'abord, lorsque $\kappa = 2$, on a $N_2^1 = 1$, et l'expression dont on part et que l'on doit transformer de manière à faire apparaître $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ s'écrit :

$$2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^3}\right).$$

Dans la somme des quatre termes entre parenthèses, faisons apparaître autant que possible l'expression désirée $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$. Pour cela, il suffit d'observer, par un acte de synthèse intuitive, que l'on est en présence de l'identité triviale :

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$$

afin de reconstituer un produit à partir d'une expression dans laquelle se dissimule son développement. Cela nous donne ici :

$$\begin{aligned}\text{même expression} &= 2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right)\\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right)\\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2},\end{aligned}$$

comme voulu. Il semblerait alors que cette idée de faire apparaître $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ soit la bonne et qu'elle soit promise à une grande généralité, et même que la suite s'avère relativement aisée.

Mais voyons ce qu'il en est réellement au niveau suivant $\kappa = 3$. On a alors $N_3^1 = 1$ et $N_3^2 = 1$, et la somme à simplifier s'écrit :

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) +\\ &+ 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2}\right).\end{aligned}$$

Il est bien entendu hors de question d'additionner brutalement toutes ces fractions, ou de réduire à $\frac{p}{q}$ les deux fractions $1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$ et $1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}$ qui sont en position de coefficient devant les grandes parenthèses. En effet, rappelons que l'on cherche à deviner des calculs généraux valables pour κ quelconque, et que dans de tels calculs où certains nombres entiers quelconques seront symbolisés par des lettres κ, λ, μ, tandis que d'autres nombres joueront seulement le rôle de constantes absolues (par exemple un facteur 2 global), chaque nombre devra alors jouir en quelque sorte à l'avance d'une individuation spécifique. C'est pourquoi *aucun « mélange » entre nombres entiers n'est autorisé au début des calculs*.

Prenons un exemple très simple pour mieux illustrer ce propos. Dans la somme concrète :

$$2+4+6+8+10$$

qui préfigure la somme générale élémentaire :

$$2+4+6+\cdots+2n,$$

il faut être à même d'*individuer* un coefficient 2 global :

$$2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5=2\big(1+2+3+4+5\big),$$

et de l'extraire d'une sommation des cinq premiers entiers strictement positifs. Ce facteur 2 qui est une constante absolue possède une essence locale et il doit être mis à part. Dans les vrais manuscrits de calculs à la main, il peut être judicieux et avantageux d'utiliser des couleurs distinctes pour dénoter les différences d'essence entre les symboles numériques, mais une telle technique implique de nombreuses corrections et réactualisations, car au début de toute recherche, les essences sont indécises et imprécises.

Donc dans l'écriture de la somme que nous voulons simplifier en toute généralité :

$$\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} N_\kappa^\lambda\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\bigg(\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}\cdots\kappa^{q_\kappa}}\bigg),$$

même dans le cas concret $\kappa=3$ que nous venons d'expliciter, nous cherchons à conserver (au moins provisoirement et aussi longtemps que les bons calculs n'auront pas encore été devinés) la mémoire des multiplicités N_κ^λ, la mémoire de la constante absolue 2 et la mémoire des coefficients rationnels $\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}$.

Maintenant, à la première et à la deuxième ligne, réécrivons les termes entre parenthèses de manière à faire apparaître les sommes d'inverses de carrés de nombres entiers. Ici, contrairement au cas $\kappa=2$, la somme voulue $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ n'apparaît pas directement. À la première ligne en effet, le dernier terme $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ est « de trop », tandis qu'à la deuxième ligne, le terme $\frac{1}{1^2}$ ne pourra certainement pas apparaître *ex nihilo*. Admettons alors ces écarts avec notre objectif et factorisons donc comme nous le pouvons les deux lignes :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} = & 1\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\bigg[\bigg(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg]+\\ & +2\cdot 1\cdot \frac{1}{4\cdot 5}\bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg).\end{aligned}$$

L'idée serait la suivante : le dernier terme de la première ligne pourrait tout à fait bien *compléter* la deuxième ligne de manière à y faire apparaître, de quelque manière que ce soit, le terme manquant $\frac{1}{1^2}$. Contractons donc les deux sommes d'inverses de nombres entiers $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et indiquons par un signe qui parle de lui-même que le dernier terme de la première ligne devrait éventuellement être descendu à la seconde ligne pour la compléter :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} & = 1\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\bigg[\frac{2\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+\frac{1}{\underline{1\cdot 2\cdot 3}}{}_{\swarrow}\bigg]+\\ & \quad +2\cdot 1\cdot \frac{1}{4\cdot 5}\bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg) =\\ & = 1\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\bigg[\frac{11}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)\bigg]+\\ & \quad +2\cdot 1\cdot \frac{1}{4\cdot \underline{5}_\circ}\cdot\frac{\underline{5}_\circ}{2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}.\end{aligned}$$

Mais avant de poursuivre, signalons à nouveau que si nous avions simplifié et réduit au même dénominateur toutes les fractions présentes, *comme l'aurait fait un ordinateur-bulldozer à qui l'on aurait confié la vérification de cette identité*, aucune des *décisions signifiantes* de calcul que nous avons prises jusqu'à présent n'aurait été devinée. Sans insister sur le fait que notre reconstitution de $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ et de $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ *faisait déjà sens en anticipant le cas général* par rapport à l'objectif visé, notons ici un micro-détail technique qui va s'avérer crucial : l'entier $\underline{5}_\circ$ se simplifie à la dernière ligne ci-dessus. Conservons donc en mémoire la nouvelle première ligne sans la recopier, observons l'apparition de la fraction $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ en facteur commun de tous les éléments de la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} & = \text{en mémoire}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+1\cdot 2\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{1^2}\\ & = \text{en mémoire}+2\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg),\end{aligned}$$

et engendrons la fraction neutre $\frac{1}{1^2}$ pour faire apparaître complètement la somme voulue. Ça marche ! Maintenant, il reste juste à vérifier que lorsqu'on additionne le résultat obtenu à la première ligne conservée en mémoire, on obtient bien la somme voulue $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}$, et tel est bien le cas :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} &= 1 \cdot 2 \cdot \frac{11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right),\end{aligned}$$

puisque $1 \cdot 2 \cdot 11 + 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$.

La valeur $\kappa = 4$. Maintenant, il semblerait que tous les procédés de calcul aient été devinés en filigrane. Étudions quand même le cas $\kappa = 4$ qui pourrait nous réserver des surprises. Puisque $N_4^1 = 1$, $N_4^2 = 2$ et $N_4^3 = 2$, la somme à simplifier s'écrit :

$$\begin{aligned}& 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \underline{\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}\right] + \\ & + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5 \cdot 6}\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \underline{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}\right] + \\ & + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6 \cdot 7}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right).\end{aligned}$$

Évidemment, comme l'idée précédente a marché, nous descendons le dernier terme de la seconde ligne à la troisième ligne pour chercher à faire apparaître les termes manquants $\frac{1}{1^2}$ ou $\frac{1}{2^2}$. Nous désignons par l'expression « en mémoire » tous les termes qui précèdent pour ne pas avoir à les recopier tels quels :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot \underline{1}_{\text{ins}}}{\underline{1}_{\text{ins}} \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 2}{5 \cdot 6 \cdot \underline{7}_{\circ}} \cdot \frac{4 + 3_{\circ}}{3 \cdot 4}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot \underline{2^2}_{\text{ins}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{\underline{2^2}_{\text{ins}}}\right) + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}}}{\underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right).\end{aligned}$$

À la première ligne, le facteur 7 se simplifie, comme c'était le cas précédemment pour un facteur 5 lorsque $\kappa = 3$; ce micro-phénomène semble être à même de se généraliser lorsque κ sera quelconque. Ensuite, à la deuxième ligne, l'insertion d'un facteur $1 \cdot 2$ au dénominateur de la seconde fraction qui est exigé par la complétion de la factorielle $\underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ semble montrer que le numérateur complété doit incorporer $1^2 \cdot 2^2$. Cette micro-métamorphose formelle en recherche d'harmonie semble se confirmer aussi sur la première fraction, où l'insertion de la fraction manquante $\frac{1}{2^2}$ impose de remonter le facteur 2^2 au numérateur, et où le facteur 1^2 était aussi apparu naturellement auparavant. Bien entendu, la constante absolue 2 et les deux valeurs $N_4^2 = 2$, $N_4^3 = 2$ restent pour l'instant en facteur de ces deux fractions sous la forme *non fusionnée* $2 \cdot 2$, en attente peut-être d'une absorption spontanée à la fin du calcul. Il est alors remarquablement avantageux de constater que la fraction complétante $\frac{1}{2^2}$ et la somme tronquée $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$ sont multipliées par le *même nombre rationnel en facteur multiplicatif commun*, à savoir : $2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$.

Et maintenant, on devine presque immédiatement comment vont s'enchaîner les calculs restants. Les quatre dernières fractions de la première des trois lignes dont on était parti vont descendre et faire apparaître en quelque sorte automatiquement le terme $\frac{1}{1^2}$ qui nous manquait encore dans la somme tronquée $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$, et ce, *avec le même nombre rationnel en facteur multiplicatif commun*. Tout du moins, nous espérons que tel sera bien le cas, et nous devons donc déterminer s'il en va ainsi pour le mieux dans le meilleur des harmonies symboliques formelles.

Dans les trois lignes à simplifier dont nous sommes partis, conservons en mémoire sans le réécrire le premier terme dans lequel apparaissait $\frac{1}{1^2}$, faisons réapparaître les deux termes qui suivent, et recopions l'expression que nous venons de finaliser :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} = \text{en mémoire} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{4+3+2+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} \cdot \frac{3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 3}{2 \cdot 3 \cdot 4}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \\ + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2}\right).\end{aligned}$$

La suite des calculs consiste à sommer les entiers qui apparaissent aux numérateurs des fractions que nous avons réduites au même dénominateur :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} = \text{en mémoire} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 26}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}\right) + \\ + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2}\right),\end{aligned}$$

et à simplifier ensuite si possible les entiers qui sont incorporés dans les factorielles. Pour effectuer une telle simplification, factorisons l'entier 10 $(= 4 + 3 + 2 + 1)$ sous la forme $2 \cdot 5$, et regroupons aussi les deux derniers termes, ce qui nous donne (en n'écrivant que ce qui vient d'être modifié) :

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{2 \cdot \underline{5}_\circ}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{5}_\circ} + 2 \cdot 2 \cdot \left[\frac{1^2(26 + 2^2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right]\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2}\right).$$

Maintenant, un « miracle arithmétique élémentaire » se produit :

$$26 + 2^2 = 30 = 5 \cdot 6,$$

et l'on peut donc *simplifier le facteur* $5 \cdot 6$ *au numérateur et au dénominateur* $\frac{\underline{5 \cdot 6}_\circ}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \underline{5 \cdot 6}_\circ}$, ce qui réduit à la même factorielle $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4$ tous les dénominateurs présents de telle sorte que la fraction manquante $\frac{1}{1^2}$ peut venir compléter comme il faut la somme tronquée $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$:

$$2 \cdot 1 \cdot \frac{\underline{1^2}_{\text{ins}} \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{\underline{1^2}_{\text{ins}}} \right) + 2 \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} \right) = 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} \right).$$

Il reste seulement à reprendre le premier terme de la somme à simplifier que nous n'avons pas encore touché, et à lui additionner ce résultat que nous venons d'obtenir :

$$\begin{aligned} \text{à simplifier} &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} \right) + \\ &\quad + 2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} \right). \end{aligned}$$

On factorise $50 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3$ sous la forme $10 \cdot 5$ pour faire disparaître le facteur 5 qui disparaît, et l'on obtient :

$$\begin{aligned} \text{à simplifier} &= \left[\frac{2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \right] \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2} \right) \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2}, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que le résultat voulu dans le cas $\kappa = 4$.

La valeur délicate $\kappa = 5$. Passons maintenant au cas $\kappa = 5$. Puisque $N_5^1 = 1$, $N_5^2 = 3$, $N_5^3 = 5$ et $N_5^4 = 5$, la somme à simplifier s'écrit :

(12.29)

$$\begin{aligned} & 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} \left[\left(\frac{1}{1} + \cdot + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{5^2} \right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right] + \\ & + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} \left[\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{5^2} \right) + \underline{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}} \right] + \\ & + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 8} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) + \underline{\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}} \right] + \\ & + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right). \end{aligned}$$

Comme précédemment, soumettons seulement au calcul la dernière ligne et le dernier terme de l'avant-dernière ligne afin de faire apparaître la fraction manquante $\frac{1}{3^2}$:

$$\begin{aligned} \text{à simplifier} &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \underline{9}_\circ} \left(\frac{\underline{5 + 4}_\circ}{4 \cdot 5} \right) \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot \underline{3^2}_{\text{ins}}}{\underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{1}{3^2} \right) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{1 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{ins}}}{\underline{1 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{ins}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right). \end{aligned}$$

Tout se passe comme prévu pour l'instant. Ensuite, reprenons le premier terme de la troisième ligne de (12.29) et faisons aussi descendre le dernier terme de la deuxième ligne de (12.29) pour les additionner tous deux à celui que nous venons de calculer :

$$2\cdot 3\cdot \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{5+4+3+2}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)+2\cdot 5\cdot \frac{1\cdot 2}{6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{4\cdot 5+3\cdot 5+3\cdot 4}{3\cdot 4\cdot 5}\right)\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+$$
$$+\,2\cdot 5\cdot \frac{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right).$$

Pour éviter les recopiages inutiles, nous conservons en mémoire tous les termes intouchés qui précèdent dans l'expression à simplifier. À ce stade, on s'attend bien sûr à pouvoir faire apparaître le facteur manquant $\frac{1}{2^2}$. À cette fin, comme précédemment, sommons les deux numérateurs $5+4+3+2=14$ et $4\cdot 5+3\cdot 5+3\cdot 4=47$, et regroupons ensuite les deux derniers termes, en observant que le nombre $47+3^2=56=7\cdot 8$ se simplifie :

$$2\cdot 3\cdot \frac{1^2\cdot 2\cdot \underline{7}_{\circ}\cdot \underline{2^2}_{\mathsf{ins}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \underline{7}_{\circ}}\left(\frac{1}{\underline{2^2}_{\mathsf{ins}}}\right)+2\cdot 5\cdot \frac{1^2\cdot 2^2\cdot \big(\underline{47+3^2}_{\circ}\big)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot \underline{7\cdot 8}_{\circ}}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right).$$

Mais à ce moment précis, on constate qu'il est malheureusement impossible de faire apparaître la somme voulue $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$: en effet, bien que la factorielle restante au dénominateur $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$ soit exactement la même, les deux facteurs $2\cdot 3\cdot 1^2\cdot 2\cdot 2^2$ et $2\cdot 5\cdot 1^2\cdot 2^2$ *ne coïncident pas*.

C'est un phénomène imprévu. Devant toute difficulté ou disharmonie, la première réaction saine est de s'interroger pour déterminer si une erreur de calcul n'a pas été commise en amont, ce qui, le cas échéant, pourrait sauver l'idée que tous les calculs devraient se passer comme dans le cas $\kappa=4$.

L'erreur potentielle, ici, s'identifie à une véritable remise en question.

Rarement, l'erreur de calcul est une erreur pure. Au contraire, l'erreur *potentielle* implique de tester la fiabilité de ce que l'on croit avoir deviné. Souvent douloureuse, l'erreur agit donc comme un test rétroactif par lequel on doit sélectionner les bonnes décisions de calcul et supprimer les décisions hâtives ou les opérations inexactes. Et comme aucun calcul ne doit être faux, il faut *a priori* reparcourir toutes les étapes du calcul pour trier entre le vrai et le faux d'un parcours génétique inabouti et toujours en devenir. S'il devait exister une réflexion totalisante sur la recherche mathématique qui se hissât au niveau d'une discipline universitaire contemporaine qu'on appelle la *génétique littéraire*, il faudrait qu'une telle réflexion analyse et typifie les micro-erreurs de calcul dans les manuscrits.

Mais ici, il n'y a pas d'erreur, nous n'avons pas commis d'erreur, et nous n'avons pas non plus tenté de faire transparaître quelques unes des erreurs de calcul qui structurent la dialectique manuscrite de la recherche des bons gestes de calcul. Dans ces conditions, il faut admettre que les calculs sont justes jusqu'à présent et trouver une nouvelle idée locale pour faire face à ce défaut d'harmonie formelle. Il n'est alors pas certain que l'idée choisie sera appropriée pour traiter le cas général : les décision sont nécessaires face à tout obstacle, mais elles engagent peut-être dans la mauvaise direction. La dynamique du calcul doit donc aussi être une mémoire complète de toutes les décisions prises sans certitudes, c'est-à-dire une mémoire de toutes les ouvertures possibles vers d'autres décisions, une mémoire douée non seulement d'un pouvoir de réactualisation permanente, mais aussi d'un pouvoir perpétuel de retour à des points de bifurcation entrevus.

Ici, nous choisirons de sauver en quelque sorte l'harmonie formelle que nous avions observée dans les cas $\kappa = 3$ et $\kappa = 4$: faisons apparaître la somme désirée $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$ multipliée par le facteur $2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$, et rejettons sous forme de « reste » le terme en $\frac{1}{2^2}$ qui ne correspond pas à ce que nous attendions ; autrement dit, réécrivons ce que nous venons d'obtenir sous la forme :

$$2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

Appelons :

$$\textsf{écart} := \left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 2^2 \cdot 2 - 2 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right) \tag{12.29}$$

ce deuxième terme, conservons-le en mémoire, et poursuivons le calcul. Il nous faut à présent faire réapparaître certains des termes qui étaient conservés en mémoire, et notamment le premier terme de la deuxième ligne de (12.29), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} &2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7}\left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 4 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right)\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \\ &\quad + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \textsf{écart}. \end{aligned}$$

Or au numérateur de la première ligne, la somme est égale à $154 = 2 \cdot 7 \cdot 11$, donc 7 se simplifie, et nous obtenons le résultat :

$$\left[2 \cdot 3 \cdot \frac{1^2 \cdot 2 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\right]\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \textsf{écart},$$

qui se simplifie encore en :

$$2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \textsf{écart}, \tag{12.29}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à traiter la première ligne de (12.29), que nous métamorphosons comme suit :

$$\begin{aligned} &2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6}\left[\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right]\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) \\ &+ 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right). \end{aligned}$$

Le premier numérateur est égal à 274, le second à 85, et donc en additionnant avec (12.29), nous obtenons que l'expression à simplifier (12.29) devient :

$$2 \cdot \frac{1^2 \cdot 274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+2 \cdot 1 \cdot \frac{85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}+$$
$$+2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\text{écart}.$$

C'est seulement maintenant que nous pouvons déteminer le sort du terme d'écart défini par (12.29) : avant de nous rendre compte d'un échec, nous avions voulu y faire apparaître la fraction $\frac{1}{2^2}$, mais à présent, il s'avère plus approprié d'y faire apparaître plutôt la fraction $\frac{1}{1^2}$ pour compléter, en collaboration avec le deuxième terme $2 \cdot 1 \cdot \frac{85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$ de la somme ci-dessus, la somme tronquée $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$. En effet, si nous procédons ainsi, le terme d'écart se réécrit sous la forme :

$$\text{écart} = 2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}\right),$$

et de là découle le calcul final grâce à l'addition triviale $1^2 \cdot 85 + 1^2 = 86$:

$$2 \cdot \frac{1^2 \cdot 274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+2 \cdot 1 \cdot \frac{1^2 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}\right)+$$
$$+2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}\right)$$
$$= 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)$$
$$= \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2},$$

comme voulu. Ainsi le résultat est-il démontré pour $\kappa = 5, \dots$

☐ Deviner
☐ Engendrer des actes généraux
☐ $\neq$ Maple
☐ Mélanges de rationnels
☐ Conceptualiser les liens.

Séries hypergéométriques multiples et polylogarithmes

De l'Un au Multiple : passage à plusieurs variables. Les fonctions de plusieurs variables s'articulent aux fonctions d'une variable en vertu de principes métaphysiques que l'on doit méditer avant toute considération spécialisée.

☐ Principe d'engendrement par le nombre : le deux de la dyade engendre le multiple pur partout et sans restriction[1].

☐ Principe d'omnipossibilité mathématique : le multiple quelconque et non limité héberge potentiellement tous les possibles mathématiques.

☐ Principe des nécessités internes et imprévisibles : la considération des fonctions d'une variable requiert souvent et contre toute attente l'étude des fonctions d'un nombre quelconque de variables[2].

---

[1] La question épistémologique est alors la suivante : « comment décrire le type de pluralité qui se laisse voir dans le travail mathématique qui consiste à passer en plusieurs variables et développer une conception qui prend en compte plusieurs variables ? » (Jean-Jacques Szczeciniarz, [**429**]).

[2] Exemple canonique : les n racines complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ d'un polynôme à *une* variable complexe $P(z) = a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n$ et à coefficients complexes $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$, paramètrent tous les polynômes de degré n possibles à un niveau plus profond que ses coefficients bruts a_i. L'Un fonctionnel du z inconnu exponentié au plus n fois est tributaire d'un Multiple de racines paramétrantes.

Autre exemple : Smale ([**411**]) a conjecturé (*Mean Value Conjecture*) l'énoncé suivant : pour tout polynôme complexe $P(z)$ de degré n dont la dérivée $P'(z)$ possède les $n-1$ racines complexes $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (*points critiques* comptés avec multiplicité) et pour tout point $z \neq b_j$ distinct des b_j, il existe au moins un indice $j_z \in \{1, \ldots, n-1\}$ qui dépend *a priori* de z tel que $\frac{|P(z)-P(b_{j_z})|}{|z-b_{j_z}|} \leqslant \frac{n-1}{n}\, |P'(z)|$. Bien que cette dernière estimation conjecturale soit inspirée de l'*inégalité de la moyenne* en théorie des fonctions d'*une* variable, il existe une approche naturelle du problème qui fait appel aux fonctions symétriques, et à la théorie de l'élimination en *plusieurs variables*. En effet, on peut considérer P comme déterminé, à une constante près, par une collection $B := \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ de $(n-1)$ points critiques quelconques dans $\mathbb{C}$ qui *paramétrisent* la primitive $P_B(z) := \int_0^z (w-b_1)\cdots(w-b_{d-1})\, dw$ de $P_B'(z) = (w-b_1)\cdots(w-b_{n-1})$. Grâce à une translation effectuée au préalable, on se ramène à $z=0$, d'où $P_B(z)=0$, et alors tout revient à démontrer que dans l'espace $\mathbb{C}^{n-1}$ de tous les b_j, on a :

$$\max_{\{b_1,\ldots,b_{n-1}\}}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n-1}\ \frac{|P_B(b_j)|}{|b_j|\cdot|P_B'(z)|} \leqslant \tfrac{n-1}{n}.$$

Le champ du multiple pur est celui d'une ontologie mathématique illimitée dans ses diversifications potentielles. Aussi le passage à plusieurs variables constitue-t-il un acte tout aussi bien nécessaire que vertigineux d'entrée dans l'ouverture absolue du savoir.

Polyzêtas à plusieurs variables. Rentrons maintenant plus avant dans l'expertise contemporaine concernant les fonctions zêtas à plusieurs variables. Ici, en survolant des conjectures et des résultats récents, nous allons analyser et commenter quelques unes des stratégies que la recherche contemporaine développe face à des problèmes ouverts réputés difficiles.

Soit $k \geqslant 1$ un entier quelconque qui désignera le nombre de variables, et soit $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ un k-uplet de nombres entiers $s_i \geqslant 1$. On peut montrer, et nous allons l'admettre[3], que la série zêta multiple à termes positifs définie par :

$$\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geqslant 1} \frac{1}{(n_1)^{s_1} (n_2)^{s_2} \cdots (n_k)^{s_k}}$$

est convergente pour tout $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ dès que $s_1 \geqslant 1$, donc bien définie[4], alors qu'elle diverge en général lorsque $s_1 = 1$, cas que nous laisserons de

La question étant invariante par permutation quelconque des b_j, il est alors naturel de commencer par réexprimer ces quotients $s_i(B) := \frac{|P_B(b_j)|}{|b_j| \cdot |P'_B(z)|}$ au moyen des fonctions symétriques élémentaires $\beta_k := \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n-1} b_{j_1} \cdots b_{j_k}$. Le problème devient alors algébrique et d'une complexité telle qu'on ne sait pas actuellement réaliser cette approche.

[3] Il n'est pas aisé de rédiger une démonstration à la fois élégante et convaincante de ce fait élémentaire qui revient, d'après le principe de comparaison entre sommations discrètes et sommations continues, à établir que l'intégrale itérée :

$$\int_1^\infty \frac{dx_1}{(x_1)^{s_1}} \int_1^{x_1} \frac{dx_2}{(x_2)^{s_2}} \cdots \int_1^{x_{k-2}} \frac{dx_{k-1}}{(x_{k-1})^{s_{k-1}}} \int_1^{x_{k-1}} \frac{dx_k}{(x_k)^{s_k}}$$

est *finie* (*i.e.* $< \infty$), puisqu'on est contraint de distinguer sans élégance plusieurs cas peu harmonieux suivant les valeurs des exposants s_i. Cela explique peut-être, comme en d'autres circonstances, que la démonstration soit passée sous silence dans la littérature sur le sujet : les mathématiques définissent un langage qui *sélectionne en partie* ce qui mérite d'être exprimé. Toutefois, par un examen rapide des deux premiers cas $k = 1$ et $k = 2$, on se convaincra facilement que la condition $s_1 \geqslant 2$ *cause et assure* la convergence, sans que les valeurs des autres exposants $s_2, \dots, s_k$ interfèrent. Ensuite, le principe de véracité inductive contrôlé par une intuition éduquée au calcul — en l'occurence, le calcul des séries et des intégrales — va donner permission, au lecteur éclairé comme au rédacteur expert, d'admettre l'énoncé sans autre contrôle qu'une telle vérification en privé sur une feuille manuscrite. On voit à nouveau par cet exemple combien les *sous-entendus* complices peuvent faire écran à la compréhension d'un domaine des mathématiques pour ceux qui n'y sont pas formés.

[4] Par analogie avec la convergence, pour des valeurs complexes $s \in \mathbb{C}$, de la fonction zêta de Riemann à une variable $\zeta(s) = \sum_{n=1} n^{-s}$ dès que $\operatorname{Re} s > 1$, on peut aussi vérifier que cette *fonction polyzêta* converge lorsque l'on a :

$$\operatorname{Re} s_1 > 1, \qquad \operatorname{Re}(s_1 + s_2) > 2, \quad \dots\dots, \qquad \operatorname{Re}(s_1 + s_2 + \cdots + s_k) > k,$$

côté. C'est ainsi qu'est classiquement introduite la généralisation à plusieurs variables des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$. « *Pourquoi ces séries* ? », demandera-t-on, car elles semblent provenir d'une nécessité ontologique autre que celle d'une apparition par laquelle le Multiple naît spontanément de l'Un.

Causalité multiplicative. Pour convenir d'une terminologie, l'entier k sera appelé la *profondeur* de la série zêta multiple $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k)$, et la somme $s_1+s_2+\cdots+s_k \in \mathbb{N}$ sera appelée son *poids*. En vertu d'une nécessité interne à la combinatoire des nombres, ces fonctions apparaissent presque obligatoirement lorsqu'on effectue le produit entre fonctions zêtas classiques à une variable ; voici donc une première réponse possible à la question du « *pourquoi* » qui manifestait son insatisfaction spontanée face à une définition non motivée. Il en faudra d'autres, et nous ne pourrons prétendre les délivrer véritablement, car cela demanderait un recul et une expertise que nous ne possédons pas : *connaître, en mathématiques, c'est d'abord accepter l'ignorance que l'on reçoit en partage.*

Par exemple, pour s et s' entiers tous deux $\geqslant 2$, le produit de deux sommes infinies :

$$\zeta(s)\cdot\zeta(s') = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{n'\geqslant 1}\frac{1}{n'^{s'}}$$

se développe naturellement en une somme doublement infinie, dans laquelle on est amené à distinguer les trois cas : $n = n'$; $n > n'$; et : $n < n'$ qui sont purement symétriques, c'est-à-dire de manière symbolique et générale en ne conservant que les opérateurs de sommation :

$$\sum_n\cdot\sum_{n'} = \sum_{n'=n} + \sum_{n>n'} + \sum_{n<n'},$$

ce qui nous donne, dans le cas qui nous intéresse ici :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{s+s'}} + \sum_{n>n'\geqslant 1}\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{n'^{s'}} + \sum_{1\leqslant n<n'}\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{n'^{s'}}.$$

Après interversion, dans la troisième somme, du produit $\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{n'^{s'}} = \frac{1}{n'^{s'}}\,\frac{1}{n^s}$, on reconnaît la série $\zeta(s', s)$ écrite sous sa forme définitionnelle, et on obtient ainsi la formule élémentaire dite *de réflexion* :

$$\zeta(s)\,\zeta(s') = \zeta(s+s') + \zeta(s,\, s') + \zeta(s',\, s), \tag{12.29}$$

qui montre un premier *principe génétique inscrit dans le calcul* pour faire naître les séries zêtas à plusieurs variables. Mais puisque les atomes symboliques du calcul ne sont aucunement dotés d'un pouvoir d'auto-engendrement analogue à celui des systèmes vivants, il faut que la pensée

---

mais nous ne nous intéresserons dans la suite qu'à des valeurs *entières* des exposants s_i.

se dépense en efforts de conceptualisation afin d'embrasser et de synthétiser véritablement le principe génétique qui est à l'œuvre ici.

Plusieurs autres commentaires métaphysiques s'offrent aussi à la méditation. Tout d'abord, c'est la division en trois sommations $\sum_{n=n'}$, $\sum_{n>n'}$ et $\sum_{n<n'}$ du produit de deux sommes infinies $\sum_n \cdot \sum_{n'}$ qui a *engendré* les séries zêtas à deux variables. La position de *définitions* en mathématiques est presque toujours antéposition *a posteriori* par rapport à des causalités métaphysiques plus profondes que le langage formel se résout à ne pas chercher à exprimer, l'objectif étant à vrai dire hors d'atteinte. Il n'en reste pas moins que ces causalités sont *dominatrices au sens faible*, sans impact direct sur l'antinomie générale entre préexistence *a priori* et construction *a posteriori* des objets mathématiques, mais en exerçant des *tensions archétypales locales* dans le tissu des relations — en grande partie invisibles — qui existent entre les objets mathématiques.

Par ailleurs, le calcul ci-dessus a montré que chacune des trois sommes possédait son autonomie propre en tant qu'objet naissant dans la décomposition. À la *non-invariance*, par rapport à la transposition $(s, s') \mapsto (s', s)$, de la somme double $\sum_{n>n'\geqslant 1} \frac{1}{n^s n'^{s'}}$ définie initialement, répond l'invariance d'une décomposition complètement symétrique (12.29), dans laquelle apparaissent $\zeta(s, s')$ *et* son homologue $\zeta(s', s)$. Enfin, les séries zêtas à deux variables se révèlent alors être des briques combinatoires élémentaires pour la déconstruction d'un produit, ces briques étant appelées *s'auto-engendrer par prolifération combinatoire*. Le sens en lequel elles s'avèrent être indécomposables reste à comprendre plus en profondeur, au fur et à mesure que l'on progresse dans la compréhension de leurs caractéristiques, voire de leur ubiquité unifiante en mathématiques.

> This subject has deep connections with many other mathematical topics : combinatorics (the theory of quasisymmetric functions, Radford's Theorem and Lyndon words), Lie and Hopf algebras, Écalle's theory of resurgent series, Goncharov's work on mixed Tate motives on $\operatorname{Spec}\mathbb{Z}$, polylogarithms, monodromy of differential equations, the fundamental group of the projective line minus thee points and Belyi's Theorem, the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$, the group of Grothendieck-Teichmüller, knot theory and Vassiliev invariants, K-theory, Feynman diagrams and quantum field theory, quasi-triangular quasi-Hopf algebras and Drinfeld's associator Φ_{KZ} (related to the connection of Knizhnik-Zamolodchikov). [**451**], p. 582.

Dominer l'induction : deux approches inéquivalentes du produit de mélange. Maintenant, il est clair que la multiplication entre séries polyzêtas fait naître d'autres polyzêtas d'une plus grande profondeur. Dès que naissent les zêtas doubles par un procédé multiplicatif, l'exigence de compréhension commande d'examiner ce qu'il adviendrait en termes de *généralité maximale* si l'on effectuait tous les produits possibles entre séries zêtas multiples. Car on se convainc sans attendre qu'un procédé général est à l'œuvre ici.

Mais *ce procédé est-il essentiellement dominable par la pensée au moyen d'un nombre restreint de symboles* ? Telle est la vraie question, car il est très rare que l'on puisse fermer localement l'ouverture mathématique, c'est-à-dire répondre complétement à une question.

En tout cas, on peut au moins poursuivre les calculs et établir par exemple une formule analogue à la formule de réflexion (12.29) pour le produit entre un zêta double et un zêta simple :

$$\zeta(s,s')\,\zeta(s'') = \zeta(s,\,s',\,s'') + \zeta(s,\,s'',\,s') + \zeta(s'',\,s,\,s') + \zeta(s+s'',\,s') + \zeta(s,\,s'+s''),$$

en remarquant au niveau des multiplications de sommes que l'on a :

$$\sum_{n>n'} \times \sum_{n''} = \sum_{n>n'>n''} + \sum_{n>n''>n'} + \sum_{n''>n>n'} + \sum_{n=n''>n'} + \sum_{n>n'=n''} .$$

Après qu'un certain nombre de tels calculs effectués « en privé » par de nombreux mathématiciens depuis les premières découvertes d'Euler sur des feuillets manuscrits qui n'ont jamais été publiés, il faudra bien à un moment ou à un autre que la volonté de puissance conceptuelle ait remporté le combat contre cette générativité symbolique et qu'elle ait proposé, chez quelques mathématiciens du passé, un procédé général pour exprimer le résultat d'un produit quelconque de multizêtas, *sans avoir à conduire aucun calcul intermédiaire impliquant des sommes multiples*.

Rappelons que la genèse réelle d'un théorème général (même relativement élémentaire) passe par des degrés dialectiques extrêmement complexes et qu'il est quasiment impossible de se resituer réellement dans la situation d'ouverture que représente le fait de devoir chercher à exprimer généralement un phénomène que personne n'a exprimé auparavant, en inventant des concepts et en décortiquant les noyaux durs qui sont impliqués. Aussi nous contenterons-nous, comme c'est souvent le cas en philosophie des sciences, de proposer une analyse commentative *a posteriori* du théorème qui répond à la question : « *comment exprimer généralement la multiplication entre deux séries zêtas multiples* ? ».

Il existe deux versions d'un tel théorème[5] : **1)** une version algébrico-récursive qui explicite seulement les relations minimales qui sont suffisantes à l'engendrement ; et : **2)** une version explicite et concrète qui fournit une « recette » directement applicable pour calculer un produit quelconque de

[5] Nous nous inspirons librement de [**451**] et nous étoffons la technique de remarques philosophiques.

multizêtas. C'est cette deuxième version qui semble apporter le plus d'information, puisqu'elle ne repousse pas des calculs inachevés dans des formules d'induction ouvertes ; nous la présenterons alors en premier.

Soient donc $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s_1', \dots, s_{k'}')$ deux suites finies d'entiers $\geqslant 1$ dont les longueurs k et k' sont en général distinctes, avec $s_1 \geqslant 2$ et $s_1' \geqslant 2$ pour garantir la convergence. Alors le produit de $\zeta(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s}')$, à savoir :

$$\bigg(\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geqslant 1} \frac{1}{(n_1)^{s_1} \cdots (n_k)^{s_k}}\bigg) \cdot \bigg(\sum_{n_1' > \cdots > n_{k'}' \geqslant 1} \frac{1}{(n_1')^{s_1'} \cdots (n_{k'}')^{s_{k'}'}}\bigg),$$

est égal (*théorème*) à la somme de tous les multizêtas $\zeta(\underline{\sigma}) = \zeta(\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ dont la profondeur h appartient à l'intervalle $\big[\max(k, k'),\, k + k'\big]$ qui sont obtenus par *mélange* de $\underline{s}$ et de $\underline{s}'$ comme suit. De toutes les manières possibles, on insère dans la suite $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et dans la suite $\underline{s}' = (s_1', \dots, s_{k'}')$, des 0 — y compris éventuellement avant le premier terme et après le dernier terme — afin de former deux suites de même longueur sans jamais laisser apparaître 0 à une même i-ème place, et on définit $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ comme la somme, terme à terme verticalement, des deux suites ainsi construites. Par exemple, on a cinq possibilités pour mélanger (s, s') et (s''), que l'on peut représenter par un diagramme d'addition :

$$\begin{array}{ccc} s & s' & 0 \\ 0 & 0 & s'' \\ \hline s & s' & s'' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} s & 0 & s' \\ 0 & s'' & 0 \\ \hline s & s'' & s' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 0 & s & s' \\ s'' & 0 & 0 \\ \hline s'' & s & s' \end{array} \qquad \begin{array}{cc} s & s' \\ s'' & 0 \\ \hline s+s'' & s' \end{array} \qquad \begin{array}{cc} s & s' \\ 0 & s'' \\ \hline s & s'+s'' \end{array}$$

La *relation de mélange entre polyzêtas* s'écrit alors :

$$\zeta(\underline{s}) \cdot \zeta(\underline{s}') = \sum_{\underline{\sigma}} \zeta(\underline{\sigma}),$$

où σ décrit toutes les suites $(\sigma_1, \dots, \sigma_h)$ ainsi obtenues par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$.

Cette description est mathématiquement très satisfaisante, parce qu'elle exprime un concept de mélange symbolique entre deux suites d'entiers quelconques dont certaines entrées sont autorisées à s'additionner parfois deux à deux, tandis que d'autres demeurent inchangées grâce à une dilatation préalable de chaque chaîne de caractères : insertion contrôlée et non redondante verticalement de symboles innocents 0. Rien dans cette définition n'indique un algorithme récursif de dénombrement, mais elle a le mérite de permettre, sur des cas concrets comme ci-dessus, de déterminer directement par des raisonnements simples toutes les suites $\underline{\sigma}$ qui doivent apparaître *sans avoir* *à effectuer tous les calculs de mélange entre suites de longueur inférieure*[6]. On pourrait aussi (*voir* ci-dessous) exprimer différemment cette recette de mélange en cherchant à se représenter géométriquement toutes les décompositions possibles d'un produit du type :

$$\Bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} \mathsf{expression}(n_1,\dots,n_k)\Bigg)\cdot\Bigg(\sum_{n_1'>\cdots>n_{k'}'\geqslant 1} \mathsf{expression}(n_1',\dots,n_{k'}')\Bigg).$$

Venons-en maintenant à la première version du produit de mélange, qui est préférée par la pensée algébrique contemporaine en vertu d'une exigence non formulée qui souhaite contrôler la prolifération symbolique et la réduire à un nombre restreint de germes de procédés élémentaires. On considère tous les mots construits sur l'alphabet à deux lettres $X := \{x_0, x_1\}$. À chaque entier strictement positif $s \geqslant 1$, on associe le mot :

$$y_s := x_0^{s-1}\, x_1 = \underbrace{x_0 \cdots x_0}_{(s-1)\ \text{fois}}\, x_1,$$

et à chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ avec $k \geqslant 1$ qui est formée d'entiers quelconques $s_i \geqslant 1$, on associe le mot :

$$x_{\underline{s}} := y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k}.$$

Ainsi, $x_{\underline{s}}$ est-il une suite finie de lettres x_0 et de lettres x_1. De plus, la profondeur k de $\underline{s}$ et son poids $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$, tels qu'ils ont été définis plus haut, s'identifient respectivement au nombre d'occurences de x_1, et au nombre total de lettres x_0 ou x_1. On désigne ensuite par X^* l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, et on note $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ l'anneau des polynômes en les deux variables *non commutatives* x_0 et x_1 dont les coefficients sont rationnels : ce sont toutes les combinaisons $\sum \frac{p}{q} \cdot w$ linéaires de mots $w \in X^*$ à coefficients rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On se convainc aisément qu'il y a une correspondance biunivoque entre les mots w de X dont la dernière lettre est x_1, c'est-à-dire les mots $w \in X^* x_1$, et les mots $x_{\underline{s}}$ qui sont associés à une suite finie $(s_1, s_2, \dots, s_k)$[7]. Il en découle que les *mots convergents*, à savoir ceux qui correspondent aux suites $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ telles que $s_1 \geqslant 2$, sont, outre le mot vide, exactement tous les mots de $X^* x_1$ qui commencent par x_0. Autrement dit, les mots convergents sont précisément les mots de $x_0 X^* x_1$. Pour un tel mot convergent $w \in x_0 X^* x_1$, si $\underline{s}(w)$

[6] C'est bien là le défaut principal des procédés récursifs ouverts qui n'ont pas atteint le degré de fermeture exigible par une connaissance adéquate et complète : ils obligent à reparcourir toutes les étapes inférieures pour connaître le résultat à un niveau fixé à l'avance.

[7] En effet, toute séquence continue de $(s-1)$ lettres x_0 interrompue par l'apparition de x_1 dans un mot correspond à $x_0^{s-1} x_1 = y_s$, et lorsque plusieurs lettres x_1 se suivent sans interruption, on a autant d'occurences de $y_1 = x_0^{1-1} x_1 = x_1$ avec des indices $s = 1$ tous égaux à 1.

désigne la suite d'entiers $\geqslant 1$ qui lui est associée, on pose :

$$\zeta(w) := \zeta\big(\underline{s}(w)\big).$$

Pour $k = 0$, la suite vide $\underline{s} = \emptyset$ est codée par le mot vide qui sera noté e. Il est commode de convenir que $\zeta(\emptyset) = \zeta(e) = 1$. On prolonge alors par linéarité la définition de $\zeta(w)$ aux *polynômes convergents*, qui sont les éléments w de $\mathbb{Q}\left\langle X \right\rangle$ s'écrivant comme combinaisons linéaires à coefficients rationnels de mots de l'ensemble $x_0 X^* x_1$.

Nous pouvons maintenant énoncer la définition récursive du produit de mélange. Par récurrence sur la longueur des mots, on définit une loi interne $*$ sur l'ensemble $X^* x_1$, qu'on appelle *produit de mélange* et qui est associative et commutative, comme suit. Tout d'abord, le mot vide est neutre :

$$e * w = w * e = w,$$

pour tout w dans $X^* x_1$. Ensuite, pour tous entiers $s, t \geqslant 1$ et tous mots w, w' dans $X^* x_1$, en supposant que le produit de mélange $*$ soit déjà défini entre tous les mots de longueur inférieure ou égal au maximum des longueurs de w et de w', on définit :

$$(y_s w) * (y_t w') := y_s(w * y_t w') + y_t(y_s w * w') + y_{s+t}(w * w'). \tag{12.29}$$

On vérifie alors[8], avec les notations précédentes, que :

$$x_{\underline{s}} * x_{\underline{s}'} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}},$$

où σ décrit toutes les suites $(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ obtenues par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$, ce qui signifie que les relations de mélange introduites précédemment peuvent se réécrire :

$$\zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w * w'),$$

pour tous w et w' dans $x_0 X^* x_1$.

Rédiger la démonstration de ces deux assertions exigerait ou bien de procéder par récurrence (approche de type structuraliste, la plus économique), ou bien de formuler plus précisément et en toute généralité comment naissent les suites $(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$; c'est cette dernière approche plus explicite que nous allons mettre en œuvre ultérieurement. Se pose alors la question de déterminer, par l'analyse de la pensée, quelle est l'approche du mélange qui est la plus informative, la plus explicite, la plus synthétique, bref la plus en adéquation avec les exigences internes de la

[8] Dans [**451**], la démonstration de cette assertion — qui n'est pas véritablement immédiate — n'est pas fournie : elle est laissée au lecteur.

connaissance mathématique. Or notre thèse à ce sujet est la suivante : dans aucune des deux formules structuralistes :

$$x_{\underline{s}} * x_{\underline{s}'} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}} \qquad \text{et} \qquad \zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w * w')$$

d'apparence claire et simple, le mélange $*$ n'est réellement explicité. Ce que disent ces formules compactes s'en tient au niveau du résultat d'un processus admis, mais au fond essentiellement inconnu, si ce n'est au niveau absolument basique des mots de petites longueur grâce à la règle (12.29). Considérer ces formules comme de vrais théorèmes, ce serait un peu comme dire que la multiplication $a \cdot b = c$ entre deux nombres entiers a et b donne un troisième nombre entier c, sans réellement dire comment c s'exprime ou se calcule en fonction de a et de b. La notion de mélange est ainsi repoussée comme dans la boîte noire qu'est le symbole « $*$ », ou tout autre symbole atomique. Par là même, le mélange est donc considérée à la fois comme non problématique et comme donné acte dans le symbole « $*$ ». C'est donc dans l'alliance entre un symbolisme contracté et l'admission d'une donation en acte que se construit une représentation essentiellement fallacieuse du mélange, dans laquelle restent cachées des synthèses non exécutées qui demeurent en fait problématiques et difficiles à réaliser.

Carence synthétique du structuralisme. La définition inductive (12.29) du mélange convient parfaitement à la programmation sur ordinateur, parce qu'elle énonce une règle qui est extrêmement simple dès qu'on a suffisamment de puissance pour l'itérer brutalement : en effet, l'ordinateur calcule mécaniquement un produit donné $v * v'$ en lisant le premier y_i à gauche des deux mots $v = y_s w$ et $v' = y_t w'$ afin de développer le tout sous forme de trois termes comme ci-dessus. Ensuite, il réapplique la même règle élémentaire aux trois produits de mélange obtenus $w * y_t w'$, $y_s w * w'$ et $w * w'$, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement des lettres y_i d'un côté ou de l'autre du symbole $*$, c'est-à-dire jusqu'à n'avoir que des produits de mélange de la forme triviale $u*e$ ou $e*u'$. À la fin, on obtient un très grand nombre de mots qui sont des concaténations de y_i. Notons que ce procédé simpliste est essentiellement exponentiel, puisque chaque produit de mélange partiellement développé donne en général naissance à trois 'fils'.

En procédant de cette manière, l'ordinateur n'effectue aucune synthèse, mais il peut lire à très grande vitesse plusieurs milliers de produits de mélange partiellement développés qui sont entrelacés à des monômes en les y_i, développer partiellement tous les produits de mélange lus, réorganiser le résultat, et recommencer à développer les produits de mélange restants jusqu'à épuisement. Aussi cette définition algébrique récursive est-elle à la fois satisfaisante sur le plan conceptuel, en tant qu'elle énonce explicitement

quel est le *seul geste élémentaire* (12.29) que l'on doit connaître pour calculer un produit de mélange quelconque, et elle est à la fois *insatisfaisante*, en tant qu'elle maintient dans l'ombre ce qui se passe réellement lorsque tous les termes obtenus par développement se *mélangent algébriquement* pour donner au final un grand nombre de mots en les y_i. La règle unique et générale (12.29) dissimule donc une ignorance complète quant au résultat final qu'on est susceptible d'obtenir. S'en contenter, ce serait comme croire embrasser par le regard et par la pensée un chêne centenaire dont on ne connaîtrait que les régions de ramification, alors qu'aucune vision globale et synthétique ne s'en dégagerait. Après un moment de réflexion, on se convaincra aisément que ces remarques s'étendent quasiment sans modification à toute la pensée structuraliste dans son ensemble.
Dégager des règles atomiques et structurantes n'est qu'un moment liminaire d'*analyse* qui ne peut en rien se substituer à l'exigence mathématique universelle d'effectuer des *synthèses*.
Voici un exemple qui illustrera en quoi la règle structurale n'indique rien pour les synthèses. Il est tout à fait prévisible que pour certains couples de mots convergents w et w' de $x_0X^*x_1$ qui possédent une structure combinatoire particulière, l'*effectuation synthétique effective* du mélange fournisse des formules qui possèdent une certaine structure formelle harmonieuse, alors qu'une telle possibilité est purement potentielle du point de vue de la règle « structurale » (12.29).

Penser synthétiquementl'engendrement du mélange. Reprenons maintenant le problème à partir de zéro. La question est : « comment deux polyzêtas se multiplient entre eux ? » L'objectif est de dépasser les deux approches précédentes : **1)** structures algébriques ; et : **2)** recette combinatoire, afin d'élaborer une *représentation synthétique explicite et complète* du produit de mélange. Comme le calcul tensoriel, une telle représentation sera amenée à consommer de nombreux indices, signes de sommation et points de suspension, mais ce n'est qu'à ce prix : *accepter le déploiement du symbolique*, que l'on pourra vraiment rendre ses droits à l'*exigence de synthèse* qui était essentiellement passée sous silence dans les deux précédentes approches. Synthétiser, c'est penser l'effectuation d'une ou plusieurs règles dans leur ensemble et en toute généralité. Mais chacune des deux approches **1)** et **2)** se contente d'énoncer seulement des règles élémentaires et algorithmisables, et néglige donc ouvertement :

□ l'exigence de penser le mélange entre séries polyzêtas, en toute généralité et sans restrictions, dialectiquement, progressivement et sur des exemples génériques ;

□ l'exigence de se confronter au problème peut-être délicat de *représenter symboliquement* la généralité quelconque du mélange entre séries polyzêtas.

Présentons donc une *approche synthétique*[9] qui réalisera — nous l'argumenterons — ces exigences. Au lieu de produits d'inverses $\frac{1}{(n_i)^{s_i}}$ de puissances d'entiers, supposons plus généralement que les deux sommandes soient constitués chacun de produits de longueur quelconque de fonctions arbitraires d'une variable entière, et considérons le produit :

$$\bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)\bigg)\cdot\bigg(\sum_{n_{k+1}>\cdots>n_{k+l}\geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1})\cdots f_{k+l}(n_{k+l})\bigg),$$

où les nombres k et l de produits de fonctions sont quelconques. Pour application aux polyzêtas, il suffira bien entendu de choisir les fonctions $f_h(n_h) := \frac{1}{(n_h)^{s_h}}$, où les s_h sont des entiers strictement positifs pour $h = 1, \dots, k, k+1, \dots, k+l$, avec $s_1 \geqslant 2$ et $s_{k+1} \geqslant 2$ pour assurer la convergence.

Quand on développe le produit, la plupart des termes sont tels qu'aucun des k premiers entiers $n_1, \dots, n_k$ n'est égal à un des l derniers entiers $n_{k+1}, \dots, n_{k+l}$. Laissons donc de côté pour l'instant les circonstances où des coïncidences se produisent (elles seront examinées ultérieurement), et étudions les termes de *mélange* « *pur* » entre les deux sommes, c'est-à-dire : définissons tous les entrelacement possibles *sans coïncidences* entre les deux suites d'inégalités strictes :

$$n_1 > \cdots > n_k \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} > \cdots > n_{k+l},$$

en respectant l'ordre strict de la première et de la deuxième suite. Par exemple, dans le cas $k = 3$ et $l = 2$, entrelacer sans coïncidences :

$$n_1 > n_2 > n_3 \qquad \text{et} \qquad n_4 > n_5$$

donne exactement dix suites distinctes d'inégalités entre $3 + 2 = 5$ entiers :

$$\begin{array}{ll}
n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > n_5, & n_1 > n_4 > n_5 > n_2 > n_3, \\
n_1 > n_2 > n_4 > n_3 > n_5, & n_4 > n_1 > n_2 > n_3 > n_5, \\
n_1 > n_2 > n_4 > n_5 > n_3, & n_4 > n_1 > n_2 > n_5 > n_3, \\
n_1 > n_4 > n_2 > n_3 > n_5, & n_4 > n_1 > n_5 > n_2 > n_3, \\
n_1 > n_4 > n_2 > n_5 > n_3, & n_4 > n_5 > n_1 > n_2 > n_3.
\end{array}$$

Chaque entrelacement constitue une suite d'inégalités strictes entre $k+l$ entiers, et il y a $\frac{(k+l)!}{k!\,l!}$ tels entrelacements distincts — observons que $\frac{(3+2)!}{3!\,2!} = 10$ —, puisqu'il faut choisir k places parmi $k + l$ pour disposer les k entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$ sans déranger leur ordre décroissant, les l places restantes étant automatiquement occupés par $n_{k+1}, \dots, n_{n+l}$ sans déranger leur

[9] Les formules qui vont suivre ne sont pas tirées des articles spécialisés que nous avons pu consulter.

ordre décroissant. Au même moment, il faut repérer à quelle place, dans les $k+l$ places possibles, vont atterrir les entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$, tandis que, comme nous venons de le dire, les autres entiers $n_{k+1}, n_{k+2}, \dots, n_{k+l}$ occuperont certainement et sans ambiguïté exactement les l places restantes. Disons alors que le premier entier n_1 va occuper la place $\sigma(1)$, où $\sigma(1)$ est un entier compris entre 1 et $k+l$, que le deuxième entier n_2 va occuper la place $\sigma(2)$, et ainsi de suite, c'est-à-dire généralement que chaque entier n_h pour tout $h = 1, \dots, k, k+1, \dots, k+l$ va occuper une certaine place :

$$\sigma(h) \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}.$$

Comme toutes les places sont distinctes et qu'elles doivent toutes être occupées d'après l'hypothèse temporaire de non-existence de coïncidences, σ constitue alors nécessairement une *bijection* de l'ensemble $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$ sur lui-même. De plus, comme les inégalités doivent être respectées, on doit avoir :

$$\sigma(1) > \cdots > \sigma(k) \qquad \text{et} \qquad \sigma(k+1) > \cdots > \sigma(k+l).$$

Inversement, toute bijection σ de $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$ qui satisfait ces deux conditions entrelace les deux suites d'inégalités strictes $n_1 > \cdots > n_k$ et $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l}$.

On notera $\mathfrak{S}_{k+l}$ l'ensemble des bijections σ de l'ensemble $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, classiquement appelé *groupe des permutations de* $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, mais que nous préférons voir ici comme l'ensemble des applications de *changements de places* pour les entiers $n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+l}$, en conservant la *sémantique* propre au problème étudié ici[10]. Si σ^{-1} désigne la bijection inverse, l'entier qui atterrit à la première place dans la suite des $k+l$ inégalités modifiées n'est autre que $n_{\sigma^{-1}(1)}$, et plus généralement, l'entier $n_{\sigma^{-1}(h)}$ atterrit à la h-ème place, quel que soit $h \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, et donc la série d'inégalités modifiées s'écrit :

$$n_{\sigma^{-1}(1)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(h)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(k+l)}.$$

Il découle de ces considérations que la collection de *tous* les termes *sans coïncidences* que l'on obtient en développant le produit des deux sommes considérées s'identifie à la comme suivante :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)}} \sum_{n_{\sigma^{-1}(1)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(k+l)} \geqslant 1} \left(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i(n_i) \prod_{1 \leqslant j \leqslant l} f_{k+j}(n_{k+j}) \right).$$

[10] La synthèse est aussi bien un travail de mise en forme symbolique qu'un acte mental d'embrassement et de compréhension par la pensée. En aucun cas les notations symboliques ne doivent faire écran à l'expression dans la langue universelle de la pensée. C'est pourquoi la sémantique conceptuelle choisie doit être en adéquation avec la nature des obets étudiés, et l'on doit se garder d'exporter ou de déformer des significations initiales.

Enfin, pour se ramener à une vraie somme de la forme de celles dont on est parti, il suffit de poser :

$$n_{\sigma^{-1}(h)} =: n'_h \qquad \text{pour tout } \; h \in \{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l\},$$

d'où $n_h = n'_{\sigma(h)}$, ce qui nous donne la somme typique :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \; \sum_{\substack{\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\\ \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}} \; \sum_{n'_1>\cdots>n'_{k+l}\geqslant 1} \bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_i\big(n'_{\sigma(i)}\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{k+j}\big(n'_{\sigma(k+j)}\big)\bigg).$$

On a donc traité le cas du mélange « pur », c'est-à-dire sans coïncidences ; dans le langage de la version **2)**, il s'agit du cas où il y a toujours exactement un 0 sur l'une des deux lignes du diagramme d'addition.

Le travail de synthèse qui précède a donc formulé le concept de *mélange sans coïncidences de deux suites ordonnées linéairement en respectant les deux ordres*. Ce concept n'était pas exprimé synthétiquement ni dans la version **1)**, ni dans la version **2)** : il demeurait dans l'ombre d'une induction non complétée. De plus, les raisonnements précédents ont montré explicitement le résultat du développement du produit — certes partiel, abstraction faite des termes qui incorporent des coïncidences —, en terme des fonctions $f_i(n_i)$.

Toutefois, un examen de l'application visée aux polyzêtas montre que le travail de synthèse et de métamorphose symbolique n'est pas encore complètement achevé[11]. Pour mieux comprendre et repérer les imperfections rémanentes d'une généralité travaillée, il faut revenir régulièrement aux exemples concrets : *entrelacement dialectique universel entre exemples et généralité*. Considérons alors, dans le développement du produit concret :

$$\bigg(\sum_{n_1>n_2>n_3\geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1}}\,\frac{1}{n_2^{s_2}}\,\frac{1}{n_3^{s_3}}\bigg)\cdot\bigg(\sum_{n_4>n_5\geqslant 1} \frac{1}{n_4^{s_4}}\,\frac{1}{n_5^{s_5}}\bigg),$$

[11] Réflexe interrogatif transmis aux mathématiques par la méditation philosophique : « *l'achèvement est-il atteint* ? » Cette question métaphysique cruciale et omniprésente ne fait l'objet d'aucune analyse ou étude dans la pensée contemporaine. Elle s'inscrit aussi bien dans la dialectique hégélienne des étapes de la conscience vers le savoir absolu que dans la discussion des objectifs de recherche au niveau des grands organismes de recherche. Et puisque l'achèvement est rarement atteint en mathématiques, on se contente d'admettre une circulation, dans toutes les pensées intersubjectives en apprentissage, des grands paradigmes théoriques (algèbre linéaire, calcul différentiel et intégral, théorie de Galois, intégrale de Lebesgue, ...) qui ont signé comme un point d'orgue d'achèvement dans l'histoire des mathématiques, sans se rendre suffisamment compte que les marques de l'achèvement en tant qu'achèvement ne sont pas plus *méditées* actuellement qu'elles ne le furent par le passé, et qu'elles cachent la plupart du temps des marques encore plus profondes d'inachèvement intemporel.

le terme de mélange pur qui correspond par exemple au changement de place $\sigma : (1,2,3,4,5) \longmapsto (1,4,2,5,3)$, à savoir :

$$\sum_{n_1>n_4>n_2>n_5>n_3\geqslant 1} \frac{1}{n_1^{s_1}} \frac{1}{n_2^{s_2}} \frac{1}{n_3^{s_3}} \frac{1}{n_4^{s_4}} \frac{1}{n_5^{s_5}}.$$

En posant $n_1' = n_1$, $n_2' = n_4$, $n_3' = n_2$, $n_4' = n_5$ et $n_5' = n_3$, nous avons mis plus haut cette somme (dans le cas général) sous la forme :

$$\sum_{n_1'>n_2'>n_3'>n_4'>n_5'\geqslant 1} \frac{1}{{n_1'}^{s_1}} \frac{1}{{n_3'}^{s_2}} \frac{1}{{n_5'}^{s_3}} \frac{1}{{n_2'}^{s_4}} \frac{1}{{n_4'}^{s_5}},$$

mais les cinq inverses de nombres entiers ne sont pas écrits ici de telle sorte que les cinq nouveaux entiers n_1', n_2', n_3', n_4' et n_5' apparaissent dans le bon ordre. Il faut donc encore user de la commutativité du produit entre nombres rationnels pour réorganiser la somme comme suit :

$$\sum_{n_1'>n_2'>n_3'>n_4'>n_5'\geqslant 1} \frac{1}{{n_1'}^{s_1}} \frac{1}{{n_2'}^{s_4}} \frac{1}{{n_3'}^{s_2}} \frac{1}{{n_4'}^{s_5}} \frac{1}{{n_5'}^{s_3}},$$

et l'on reconnaît maintenant clairement le zêta multiple :

$$\zeta(s_1, s_4, s_2, s_5, s_3),$$

qui constitue l'un des dix polyzêtas de profondeur cinq apparaissant dans le développement du produit $\zeta(s_1, s_2, s_3)\,\zeta(s_4, s_5)$. Si nous revenons donc à notre somme typique dans le cas général, il nous faut encore réorganiser les deux produits multiples :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_i\big(n'_{\sigma(i)}\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{k+j}\big(n'_{\sigma(k+j)}\big) = f_1\big(n'_{\sigma(1)}\big)\cdots f_k\big(n'_{\sigma(k)}\big)\, f_{k+1}\big(n'_{\sigma(k+1)}\big)\cdots f_{k+l}\big(n'_{\sigma(k+l)}\big),$$

de manière à ce que les $k+l$ entiers $n_1', \dots, n_k', n_{k+1'}, \dots, n_{k+l}'$ soient lus dans l'ordre croissant. Bien entendu, c'est le symbole de changement de place inverse σ^{-1} qu'il faut employer pour transformer ce double produit multiple comme voulu en le produit :

$$\begin{aligned} & f_{\sigma^{-1}(1)}\big(n_1'\big)\cdots f_{\sigma^{-1}(k)}\big(n_k'\big)\, f_{\sigma^{-1}(k+1)}\big(n_{k+1}'\big)\cdots f_{\sigma^{-1}(k+l)}\big(n_{k+l}'\big) = \\ & \qquad = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_{\sigma^{-1}(i)}\big(n_i'\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{\sigma^{-1}(k+j)}\big(n_{k+j}'\big), \end{aligned}$$

dans lequel $n_1', \dots, n_k'$, $n_{k+1}', \dots, n_{k+l}'$ apparaissent dans le bon ordre. En définitive, pour ce qui concerne seulement les sommes sans coïncidences (comme nous en avions convenu temporairement), nous avons donc achevé la synthèse du développement, et nous lui avons donné une forme déployée :

$$\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\\ \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}} \sum_{n_1'>\cdots>n_{k+l}'\geqslant 1} \bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_{\sigma^{-1}(i)}\big(n_i'\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{\sigma^{-1}(k+j)}\big(n_{k+j}'\big)\bigg)},$$

que nous allons commenter dans un instant. Dans le cas des polyzêtas, on en déduit immédiatement comme corollaire que dans le produit de $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ avec $\zeta(s_{k+1}, \ldots, s_{k+l})$, la somme de tous les termes de mélange pur qui ne font pas apparaître de coïncidences est égale à :

$$\boxed{\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)}} \zeta\big(s_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(k)}, s_{\sigma^{-1}(k+1)}, \ldots, s_{\sigma^{-1}(k+l)}\big)}\,.$$

Voilà donc nos premières formules. Avant d'étudier le cas beaucoup plus délicat des sommes avec coïncidences, arrêtons-nous un instant pour comparer cette troisième approche aux deux versions précédentes **1)** et **2)** du produit de mélange. Ici, la recette pratique qui consistait à insérer des 0 est proprement synthétisée et elle est réalisée en toute généralité pour ce qui concerne le mélange pur : en effet, la formule encadrée montre avec toutes les précisions nécessaire quels sont tous les zêtas multiples qui doivent apparaître, avec leurs arguments exacts. Cette formule dit tout d'abord qu'une somme portera sur toutes les bijections σ de l'ensemble $\{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l\}$; mais aussi, on ne considère que, et exactement que, les bijections qui respectent l'ordre croissant des k premiers, et des l derniers termes. On voit donc ici que la sommation exprimée sur ces bijections *réalise complètement* la synthèse de pensée qui était sous-jacente à la recette de mélange avec insertion de zéros. Cette règle très pratique et très intuitive lorsque k et l sont de petits entiers en restait au niveau manipulatoire et particulier, consciente peut-être des germes de synthèse et de généralité qui pouvaient y être entrevus, mais non mobilisée par le devoir de formuler le procédé sous-jacent pour le dépasser et pour l'embrasser. Toute synthèse mathématique doit être un *dépassement et un embrassement*, exigé de l'intérieur, mais aussi nécessaire pour repartir ensuite à la rencontre d'autres exigences de synthèse : c'est l'aspect proprement *dynamique* de l'irréversible-synthétique. Ensuite, après cette déclaration explicite de sommation, laquelle doit donc aussi bien être vue comme symbolisée mathématiquement qu'exprimée dans la langue synthétique universelle de la pensée (comme nous venons de le faire), apparaît l'information la plus importante : le *résultat générique* que donne le produit de mélange pur, à savoir les *arguments précis* des polyzêtas qui doivent apparaître, leur nombre $(k+l)$, et leurs indices, *tous exprimés d'une manière visiblement régulière en fonction de l'inverse de la bijection* σ. Il s'agit donc bien là d'une *synthèse* : domination de l'engendrement analytique et expression compacte de la généralité. Et au niveau micro-symbolique, d'autres synthèses secondaires s'emboîtent dans la synthèse principale, comme le montre par exemple la présence des quatre séries de points de suspension, ou encore, le fait d'admettre que σ^{-1} est donné en même temps que σ.

Le cas des sommes avec coïncidences. L'étude de cas par approfondissement progressif en complexité, et le maintien du lien intuitif aux cas déjà traités par spécialisation sont des figures dialectiques classiques de la pensée mathématique, et elles marquent aussi l'omniprésence du synthétique.

Avec l'objectif maintenant de lever la restriction temporaire concernant l'inexistence de coïncidences, reprenons donc le produit initial à développer :

(12.29)
$$\bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)\bigg)\cdot\bigg(\sum_{n_{k+1}>\cdots>n_{k+l}\geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1})\cdots f_{k+l}(n_{k+l})\bigg),$$

et considérons maintenant le cas le plus général possible où un certain nombre, disons ρ, d'entiers n_i parmi les k entiers $n_1,\dots,n_k$ coïncident avec ρ entiers parmi les l autres entiers $n_{k+1},\dots,n_{k+l}$, avec bien sûr $\rho\leqslant\min(k,l)$. Autrement dit, supposons qu'il existe deux ρ-uplets d'indices ordonnés :

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k \qquad\text{et}\qquad 1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l$$

dont les entiers associés coïncident par paires :

$$n_{i_1}=n_{k+j_1},\quad n_{i_2}=n_{k+j_2},\ \ \dots\dots,\ \ n_{i_\rho}=n_{k+j_\rho}.$$

Le cas $\rho=0$ s'identifie à ce qui a déjà été amplement étudié. Pour fixer « géométriquement » les idées, on peut former un diagramme qui représente, sous forme encadrée, les coïncidences d'entiers dans les deux successions suivantes d'inégalités décroissantes [12] :

(12.29)
$$\begin{array}{ccccccccccccc}
n_1 & > & \cdots & > & n_{i_1-1} & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_1}\\ n_{k+j_1}\end{array}} & > & n_{i_1+1} & > & \cdots & > & n_{i_2-1} & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_2}\\ n_{k+j_2}\end{array}}\\
n_{k+1} & > & \cdots & > & n_{k+j_1-1} & > & & > & n_{k+j_1+1} & > & \cdots & > & n_{k+j_2-1} & > &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
> & \cdots\cdots & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_{\rho-1}}\\ n_{k+j_{\rho-1}}\end{array}} & > & n_{i_{\rho-1}+1} & > & \cdots & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_\rho}\\ n_{k+j_\rho}\end{array}} & > & \cdots & > & n_k\\
> & \cdots\cdots & > & & > & n_{k+j_{\rho-1}+1} & > & \cdots & > & & > & \cdots & > & n_{k+l}.
\end{array}$$

À nouveau, la diagrammatisation est un acte de synthèse spécifique ; au-delà d'une dichotomie logique (égalité *versus* différence), au-delà d'une expression combinatoire indicielle (ordonnancement des indices), la mise en correspondance visuelle des coïncidences et des non-coïncidences confère une

[12] On fera attention au fait que le nombre k d'entiers à la première ligne n'est pas égal, en général, au nombre l d'entiers de la deuxième ligne, contrairement à ce que l'alignement des entiers non encadrés, des signes d'inégalité et des points de suspension pourrait faire croire. De même, entre deux blocs encadrés, le nombre d'entiers à la première ligne est en général distinct du nombre d'entiers à la deuxième ligne. Cette remarque admise, il faut alors embrasser synthétiquement les deux séries d'inégalités en spécifiant, par une sorte de « sursynthèse mentale », les écarts de longueurs que le formalisme n'indique pas. Des « sursynthèses mentales » *innombrables* accompagnent et complètent le langage mathématique formalisé, et sans elles, aucune fécondation de l'intuition de recherche ne serait possible.

géométrie à l'acte de pensée initial. Pour les $k - \rho + l - \rho$ entiers se situant entre les blocs de coïncidences, le mélange pourra alors se faire en appliquant les principes du paragraphe précédent. Tout d'abord, les $i_1 - 1 + j_1 - 1$ entiers :

$$n_1 > \cdots > n_{i_1 - 1} \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} > \cdots > n_{k+j_1-1}$$

qui apparaissent à gauche de la première coïncidence dans (12.29) pourront s'entrelacer *sans auncune coïncidence* en respectant l'ordre décroissant dans lequel ils sont ordonnés par blocs. Plus précisément, on considère l'ensemble des bijections σ_1 de l'ensemble :

$$\big\{1, \ldots, i_1 - 1, k+1, \ldots, k + j_1 - 1\big\}$$

sur lui-même, que l'on identifie (implicitement) à l'ensemble des $i_1 - 1 + j_1 - 1$ premiers entiers strictement positifs, et l'on se restreint à la considération des bijections σ_1 qui satisfont, *via* une telle identification (implicite)[13] :

$$\sigma_1(1) < \cdots < \sigma_1(i_1 - 1) \qquad \text{et} \qquad \sigma_1(k+1) < \cdots < \sigma_1(k + j_1 - 1).$$

De manière analogue, les $i_2 - i_1 - 1 + j_2 - j_1 - 1$ entiers situés entre les deux coïncidences $n_{i_1} = n_{k+j_1}$ et $n_{i_2} = n_{k+j_2}$ du diagramme (12.29), à savoir :

$$n_{i_1+1} > \cdots > n_{i_2-1} \qquad \text{et} \qquad n_{k+j_1+1} > \cdots > n_{k+j_2-1}$$

pourront s'entrelacer *sans aucune coïncidence* au moyen de toutes les bijections σ_2 de l'ensemble :

$$\big\{i_1 + 1, \ldots, i_2 - 1,\ k + j_1 + 1, \ldots, k + j_2 - 1\big\}$$

qui satisfont les deux séries d'inégalités :

$$\sigma_2(i_1{+}1) < \cdots < \sigma_2(i_2{-}1) \qquad \text{et} \qquad \sigma_2(k{+}j_1{+}1) < \cdots < \sigma_2(k{+}j_2{-}1).$$

De proche en proche, on introduit des bijections similaires σ_3, …, σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$. Alors, quand on développe le produit (12.29), tous les termes possibles seront collectés de la manière suivante.

☐ Spécifier le nombre ρ de coïncidences entre la première liste $n_1 > \cdots > n_k$ d'entiers strictement décroissants et la deuxième liste $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l}$, pour toutes les valeurs possibles $\rho = 0, 1, 2, \ldots, \min(k, l)$.

☐ Spécifier précisément les entiers qui coïncident, c'est-à-dire établir le diagramme complet (12.29) des coïncidences et des différences.

Ces deux spécifications reviennent à dire que le développement complet du produit (12.29) devra commencer par la déclaration synthétique de toutes ces

[13] En fait, puisque $k + 1 > i_1 - 1$, il n'est pas nécessaire de faire une telle identification pour que les inégalités en question signifient, comme voulu, que les ordres de chacun des deux blocs soient préservés.

possibilités-là, organisées naturellement sous la forme de trois sommations explicites :

$$\sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l},$$

et les expressions suivantes devront, de quelque manière, faire apparaître les coïncidences $n_{i_1} = n_{k+j_1}$, …, $n_{i_2} = n_{k+j_2}$, $n_{i_\rho} = n_{k+j_\rho}$. Le choix d'une spécification effectuée en acte correspond à se placer à droite du troisième symbole de sommation. Ensuite, il s'agit, pour chaque paire de séries d'inégalités situées dans le diagramme (12.29) entre deux blocs de coïncidence d'effectuer le mélange pur, c'est-à-dire de réaliser simultanément des mélanges purs par paquets :

$$\infty \geqslant \left\{\begin{array}{l} n_1 > \cdots > n_{i_1} \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+1} > \cdots > n_{k+j_1-1} \end{array}\right\} > n_{i_1} > \left\{\begin{array}{l} n_{i_1+1} > \cdots > n_{i_2-1} \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+j_1+1} > \cdots > n_{k+j_2-1} \end{array}\right\} > n_{i_2} > \cdots$$

$$\cdots > n_{i_\rho} > \left\{\begin{array}{l} n_{i_\rho+1} > \cdots > n_k \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+j_\rho+1} > \cdots > n_{k+1} \end{array}\right\} \geqslant 1.$$

Grâce aux développements qui précèdent, on peut, pour chaque paquet, exprimer le résultat du mélange pur au moyen des bijections σ_1, σ_2, …, σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$. En définitive, on obtient donc la proposition générale suivante qui *synthétise* tous les aspects du produit de mélange et qui exprime complètement et de manière absolument explicite le résultat du développement du produit (12.29). Tel qu'il est exprimé ici, le résultat n'apparaît pas dans la littérature spécialisée sur le sujet, et nous utilisons le symbole de référence bibliographique vide « **[**$*$**]** » pour signifier la légère nouveauté (ou originalité) de l'énoncé. Le produit $f(n)g(n)$ de deux fonctions d'un même entier $n \geqslant 1$ sera noté $[fg](n)$ afin de mettre en exergue le fait que les arguments des deux fonctions coïncident. Bien entendu, de tels produits apparaîtront précisément aux entiers de coïncidence n_{i_1}, n_{i_2}, …, n_{i_ρ}.

Proposition. *Soient $k \geqslant 1$ et $l \geqslant 1$ deux entiers et pour tout $h \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, soit :*

$$\mathbb{N}_{>0} \ni n_h \mapsto f_h(n_h) \in \mathbb{C}$$

une fonction d'une seule variable entière $n_h \geqslant 1$ et à valeurs complexes. Alors le produit des deux sommations sur collections d'entiers indicés et strictement croissants :

$$\bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)\bigg) \cdot \bigg(\sum_{n_{k+1}>\cdots>n_{k+l}\geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1})\cdots f_{k+l}(n_{k+l})\bigg),$$

se développe et se réorganise sous la forme d'une somme triple de sommations similaires :

$$
\sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l}
$$

$$
\sum_{\substack{\sigma_1\in\mathsf{Bijections}(\{1,\dots,i_1-1,k+1,\dots,k+j_1-1\})\\ \sigma_1(1)<\cdots<\sigma_1(i_1-1)\ \text{et}\ \sigma_1(k+1)<\cdots<\sigma_1(k+j_1-1)}} \sum_{\substack{\sigma_2\in\mathsf{Bijections}(\{i_1+1,\dots,i_2-1,k+j_1+1,\dots,k+j_2-1\})\\ \sigma_2(i_1+1)<\cdots<\sigma_2(i_2-1)\ \text{et}\ \sigma_2(k+j_1+1)<\cdots<\sigma_2(k+j_2-1)}} \cdots
$$

$$
\sum_{\substack{\sigma_\rho\in\mathsf{Bijections}(\{i_{\rho-1}+1,\dots,i_\rho-1,k+j_{\rho-1}+1,\dots,k+j_\rho-1\})\\ \sigma_\rho(i_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(i_\rho-1)\ \text{et}\ \sigma_\rho(k+j_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(k+j_\rho-1)}} \sum_{\substack{\sigma_{\rho+1}\in\mathsf{Bijections}(\{i_\rho+1,\dots,k,k+j_\rho+1,\dots,k+l\})\\ \sigma_{\rho+1}(i_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k)\ \text{et}\ \sigma_{\rho+1}(k+j_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k+l)}}
$$

$$
\sum_{\substack{n_1'>\cdots>n_{i_1-1}'>n_{k+1}'>\cdots>n_{k+j_1-1}'>n_{i_1}>n_{i_1+1}'>\cdots>n_{i_2-1}'>n_{k+j_1+1}'>\cdots>n_{k+j_2-1}'>n_{i_2}>\cdots\cdots>\\ >n_{i_{\rho-1}}>n_{i_{\rho-1}+1}'>\cdots>n_{i_\rho-1}'>n_{k+j_{\rho-1}+1}'>\cdots>n_{k+j_\rho-1}'>n_{i_\rho}>n_{i_\rho+1}'>\cdots>n_k'>n_{k+j_\rho+1}'>\cdots>n_{k+l}'\geqslant 1}}
$$

$$
f_{\sigma_1^{-1}(1)}(n_1')\cdots f_{\sigma_1^{-1}(i_1-1)}(n_{i_1-1}')f_{\sigma_1^{-1}(k+1)}(n_{k+1}')\cdots f_{\sigma_1^{-1}(k+j_1-1)}(n_{k+j_1-1}')\big[f_{i_1}f_{k+j_1}\big](n_{i_1})
$$

$$
f_{\sigma_2^{-1}(i_1+1)}(n_{i_1+1}')\cdots f_{\sigma_2^{-1}(i_2-1)}(n_{i_2-1}')f_{\sigma_2^{-1}(k+j_1+1)}(n_{k+j_1+1}')\cdots f_{\sigma_2^{-1}(k+j_2-1)}(n_{k+j_2-1}')\big[f_{i_2}f_{k+j_2-1}\big](n_{i_2})
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
f_{\sigma_\rho^{-1}(i_{\rho-1}+1)}(n_{i_{\rho-1}+1}')\cdots f_{\sigma_\rho^{-1}(i_\rho-1)}(n_{i_\rho-1}')f_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_{\rho-1}+1)}(n_{k+j_{\rho-1}+1}')\cdots f_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_\rho-1)}(n_{k+j_\rho-1}')\big[f_{i_\rho}f_{k+j_\rho}\big](n_{i_\rho})
$$

$$
f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(i_\rho+1)}(n_{i_\rho+1}')\cdots f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k)}(n_k')f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+j_\rho+1)}(n_{k+j_\rho+1}')\cdots f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+l)}(n_{k+l}').
$$

sur collections d'entiers indicés et strictement croissants :

$$
n_1'>\cdots>n_{i_1-1}'>n_{k+1}'>\cdots>n_{k+j_1-1}'>n_{i_1}>n_{i_1+1}'>\cdots>n_{i_2-1}'>n_{k+j_1+1}'>\cdots>n_{k+j_2-1}'>n_{i_2}>\cdots\cdots
$$

$$
>n_{i_{\rho-1}}>n_{i_{\rho-1}+1}'>\cdots>n_{i_\rho-1}'>n_{k+j_{\rho-1}+1}'>\cdots>n_{k+j_\rho-1}'>n_{i_\rho}>n_{i_\rho+1}'>\cdots>n_k'>n_{k+j_\rho+1}'>\cdots>n_{k+l}'\geqslant 1,
$$

en nombre total égal à $k+l-\rho$.

Cette formule n'est particulièrement longue et complexe que parce que la synthèse impliquée le requiert, et dans un instant, nous allons la réexprimer dans le langage universel de la pensée afin de bien démontrer qu'elle réalise la synthèse désirée d'une manière qui est tout à fait déchiffrable et accessible[14]. Néanmoins, fréquemment dans la pensée mathématique contemporaine, un accord tacite existe pour reléguer de telles formules au rang de « monstres » indignes d'apparaître dans les textes publiés, sous couvert de lisibilité et d'accessibilité. Ou encore : le formalisme notationnel étant d'une plasticité extraordinaire, on fera tout pour contracter les symboles : supprimer les points de suspension ; admettre des abréviations ; quantifier d'une manière qui n'est pas constructive. Et pour légitimer ce travail de remodelage, on argumenterait tacitement qu'il y aurait comme un « plafond de verre » admis intersubjectivement pour la longueur « acceptable » des formules mathématiques. Mais il n'y a aucune raison *a priori* pour que les

[14] Bien que le formalisme mathématique aime à se structurer d'une manière quelque peu ésotérisme, notamment en abaissant le pourcentage de mots de la langue naturelle qui interviennent dans les énoncés et dans leurs démonstrations, tout ce qui est écrit ou publié peut être lu uniquement en termes de la langue universelle de la pensée.

synthèses mathématiques soient limitées en taille, et d'ailleurs, l'expression synthétique du produit de mélange lié au séries polyzêtas n'est qu'une pièce élémentaire dans l'examen des conjectures diophantiennes (*voir* plus bas), d'autres pièces devant être aussi convoquées qui exigent de leur côté leur propres synthèses (fussent-elles longues elles aussi), et ensuite, d'autres synthèses entre ces pièces synthétiques seront de surcroît nécessaire pour avancer dans l'exploration des relations algébriques entre polyzêtas. Autrement dit : nous essayons de dire que le calcul à plusieurs variables exige d'*effectuer des synthèses entre synthèses autonomes*, et que très vite, la présence ubiquitaire de calculs hétérogènes et disparate place les mathématiques en face de synthèses entre synthèses qui sont très difficiles à réaliser, à formuler, ou à embrasser d'une manière satisfaisante, que ce soit par des actes de l'esprit ou par un symbolisme approprié. En tout état de cause, sachant déjà qu'une synthèse « à part » et autonome comme l'est celle que nous venons de proposer pour le produit de mélange s'avère souvent difficile à réaliser ou même à embrasser mentalement, on devine déjà maintenant que dans la suite des recherches sur les propriétés diophantiennes des polyzêtas, on sera essentiellement contraint, au moins actuellement, d'abandonner l'espoir de réaliser pleinement les synthèses entre synthèses, et on est donc conduit à calculer avec des ordinateurs dans certains cas particulier, sans pourvoir (pour l'instant) travailler réellement au niveau de la généralité quelconque. Comment en effet injecter et manipuler algébriquement des formules du type de celles qui sont encadrées ci-dessus et ci-dessous dans des calculs difficiles avec des séries hypergéométriques multiples ?

Argumentons toutefois, en relisant notre longue formule, que la synthèse autonome et indépendante que nous avons proposée ci-dessus est tout à fait accessible à la pensée universelle, grâce aux développements qui précèdent. Voici donc comment on doit ou on peut (re)lire cette formule.

Le produit (12.29) à calculer se réorganise comme somme de produits du même type pour lesquels les sommations portent sur un nombre égal à $k + l - \rho$ d'entiers satisfaisant $n_1'' > \cdots > n_{k+l-\rho}'' \geqslant 1$, où ρ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $\min(k, l)$. Pour chaque valeur de ρ, on choisit ρ entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\rho \leqslant k$ et aussi ρ entiers $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\rho \leqslant l$ qui seront les indices de coïncidences entre les deux séries d'inégalités $n_1 > \cdots > n_k \geqslant 1$ et $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l} \geqslant 1$ présentes dans chacun des deux termes du produit (12.29). Une fois ce choix fait, que l'on peut représenter par le diagramme (12.29), on effectue la somme sur tous les changements de places σ_1, …, σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$ qui respectent l'ordre de chacune des deux lignes d'entiers distincts placées entre deux blocs de coïncidence, ce qui fait $\rho + 1$ telles sommations au total. Enfin, une fois choisis ρ, les entiers de coïncidences $i_1, \dots, i_\rho$, $j_1, \dots, j_\rho$ et les changements de place σ_1, …, σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$, on trouve comme souhaité une somme du même type général que les deux sommes à multiplier, et cette nouvelle somme possède les caractères suivants. Elle porte sur $k + l - \rho$ entiers satisfaisant $n_1'' > \cdots > n_{k+l-\rho}'' \geqslant 1$, et l'argument de cette somme est un certain produit de fonctions f_h de ces arguments $n_1'', \ldots, n_{k+l-\rho}''$ (intervenant dans le même ordre) ; de plus, les indices h des fonctions qui apparaissent sont paramétrés par les bijections déjà introduites : la première livrée de telles fonctions fait intervenir l'inverse σ_1^{-1} de la bijection σ_1, et en fin de ligne, on trouve le produit des deux fonctions f_{i_1} et f_{k+j_1} du même argument $n_{i_1} = n_{k+j_1}$ qui correspond à la première coïncidence préassignée par les choix précédents ; la seconde livré fait de même en termes de σ_2^{-1}, et se termine par $\big[f_{i_2} f_{k+j_2}\big](n_{i_2})$, et ainsi de suite, ce qui termine notre (re)lecture de la formule synthétique. Il est important d'ajouter que la synthèse mentale proposée par cette formule ne sera réellement possible que si on la met à tout instant en correspondance dialectisante et synthétisante avec la formule plus simple du mélange pur, qui apparaît d'ailleurs précisément comme la collection de sommations correspondant au premier choix d'un nombre nule $\rho = 0$ de coïncidences.

Corollaire. *En particulier, le produit de deux séries zêtas multiples convergentes s'exprime explicitement comme la somme suivante de séries zêtas multiples :*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\zeta\big(s_1, s_2, \ldots, s_k\big) \cdot \zeta\big(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+l}\big) = \\
&= \sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l} \\
&\qquad \sum_{\substack{\sigma_1\in\mathsf{Bijections}(\{1,\ldots,i_1-1,k+1,\ldots,k+j_1-1\}) \\ \sigma_1(1)<\cdots<\sigma_1(i_1-1) \text{ et } \sigma_1(k+1)<\cdots<\sigma_1(k+j_1-1)}} \quad \sum_{\substack{\sigma_2\in\mathsf{Bijections}(\{i_1+1,\ldots,i_2-1,k+j_1+1,\ldots,k+j_2-1\}) \\ \sigma_2(i_1+1)<\cdots<\sigma_2(i_2-1) \text{ et } \sigma_2(k+j_1+1)<\cdots<\sigma_2(k+j_2-1)}} \cdots \\
&\qquad \sum_{\substack{\sigma_\rho\in\mathsf{Bijections}(\{i_{\rho-1}+1,\ldots,i_\rho-1,k+j_{\rho-1}+1,\ldots,k+j_\rho-1\}) \\ \sigma_\rho(i_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(i_\rho-1) \text{ et } \sigma_\rho(k+j_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(k+j_\rho-1)}} \quad \sum_{\substack{\sigma_{\rho+1}\in\mathsf{Bijections}(\{i_\rho+1,\ldots,k,k+j_\rho+1,\ldots,k+l\}) \\ \sigma_{\rho+1}(i_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k) \text{ et } \sigma_{\rho+1}(k+j_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k+l)}} \\
&\zeta\Big(s_{\sigma_1^{-1}(1)}, \ldots, s_{\sigma_1^{-1}(i_1-1)}, s_{\sigma_1^{-1}(k+1)}, \ldots, s_{\sigma_1^{-1}(k+j_1-1)}, s_{i_1} + s_{k+j_1}, \\
&\quad s_{\sigma_2^{-1}(i_1+1)}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(i_2-1)}, s_{\sigma_2^{-1}(k+j_1+1)}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(k+j_2-1)}, s_{i_2} + s_{k+j_2}, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad s_{\sigma_\rho^{-1}(i_{\rho-1}+1)}, \ldots, s_{\sigma_\rho^{-1}(i_\rho-1)}, s_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_{\rho-1}+1)}, \ldots, s_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_\rho-1)}, s_{i_\rho} + s_{k+j_\rho}, \\
&\quad s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(i_\rho+1)}, \ldots, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k)}, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+j_\rho+1)}, \ldots, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+l)} \Big)
\end{aligned}
}
$$

dont le nombre d'arguments est compris entre $k + l - \rho$ et $k + l$.

Autrement dit, nous affirmons sans hésiter que le synthétique, en mathématique, ne peut pas se dispenser d'une activité mentale ou intuitive qui a le pouvoir de concentrer et d'embrasser beaucoup plus d'information que ne le font les textes écrits, lesquels sont pris dans la guangue de leurs choix et de leurs symboles, et sont incapables aussi d'exprimer toutes les relations pensées au moment de la genèse. Ce serait comme si on pouvait s'imaginer que les brouillons et esquisses des écrivains rayonnent encore quelque peu dans les textes littéraires pour en faire ce qu'ils sont sans que l'on s'en rende reéellement compte au moment de la lecture. Le non-écrit n'en est pas moins *pensé*.

Le produit de mélange lié aux intégrales de Chen.

$$\zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w \sqcup\!\sqcup w').$$

Dynamique de l'égalité

Un calcul simple : $(a-b)(a+b) = a^2-b^2$**.** On souhaite démontrer *lentement* que le produit de la somme et de la différence de deux nombres est égal à la différence de leurs carrés :

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2,$$

relation qui remonte à l'Antiquité et que l'on enseigne dans les toutes premières années d'apprentissage mathématique.

Avant même d'entamer une démonstration, s'exprime un réflexe de mathématicien rompu au calcul : il faut se décider d'abord à questionner la signification de cette relation, ou plus exactement, se décider à lui conférer une ou plusieurs significations, même provisoires. En clair, il faut chercher à découvrir les marqueurs intuitifs d'un mouvement invisible dans le symbolisme statique de l'énonciation.

Produits d'une somme quelconque et de sa différence quelconque : a et b sont ici présents en généralité pure. Dans ce moment d'exploration antédémonstrative, l'intuition questionnante peut décider de *mettre entre parenthèses* toutes les questions d'appartenance (élaborées), telles que : « dans quel anneau, dans quelle algèbre, dans quel corps ou dans quel univers ensembliste ? » ces deux quantités a et b sont-elles supposées varier. Elle peut aussi décider — dialectique immédiate de l'*a posteriori* d'une pensée déjà prononcée presque involontairement — d'accepter ces questions sur l'étant des quantités, et aussi, sans les étudier pour l'instant, elle peut décider de continuer à les maintenir jusque dans l'exploration de la démonstration, afin par exemple de chercher à déterminer dans quel univers d'étants les plus généraux possibles une telle relation mathématique sera vraie, tout en maintenant vivante la certitude que toutes les expressions considérées ont visiblement un sens lorsque a et b désignent des entiers naturels, que l'on peut même supposer positifs avec a supérieur ou égal à b, si l'on veut se dispenser d'avoir à penser l'hypostase du négatif.

Au total, la question sur la nature des étants est bien coprésente, elle ne constitue qu'un aspect de l'appropriation-exploration primitive, mais il peut fort bien se produire qu'elle s'auto-convoque ici et prenne la forme d'une exigence minimale élémentaire de précision initiale. En effet, le mathématicien contemporain en activité éprouve toujours le besoin de préciser dans quel domaine "existent" les étants qu'il introduit. Il s'agit donc là d'un problème ontologique permanent, d'une coprésence permanente de la question de l'étant, qui est systématiquement neutralisée par des affirmations précises et des hypothèses claires quant à la nature des étants que l'on considère. Mais ce n'est pas parce que ces étants sont rapportés à telle ou telle structure mathématique ou à telle ou telle théorie mathématique connue que la question de l'être de l'étant est résolue par un acte de déclaration ontologique se rapportant à une structure ou à une théorie. Dans le mouvement coprésent permanent des questions à l'intérieur des calculs, la question de l'être doit toujours s'imaginer n'être pas définitivement résolue par une déclaration initiale, en particulier parce que le penseur mathématique possède toujours la liberté de vouloir généraliser et changer d'hypothèses. En définitive, le a et le b dans cette lecture préliminaire de l'identité $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ sont multiples et mobiles non seulement dans une généralité spécifiée possible, mais aussi dans une *potentialité maintenue ouverte sur la nature modifiable de leur étant propre*. Et l'on peut tout à fait décider d'oublier cette dynamique problématisante de l'ontologie mathématique au moment d'entrer dans l'application des règles de calcul symbolique, à un moment où l'intuition de l'être des « objets » se verra confrontée au défaut d'intuition sur l'opérativité élémentaire à laquelle on peut les soumettre. En résumé :

Thèse fondamentale : *Universalité et complexité des dialectiques d'appropriation initiale*.

Que ce soit pour le a et le b d'une identité algébrique élémentaire ou pour le X et le Y d'un schéma sur $\mathbb{Q}_p((t))$, la mathématique est confrontée au même type de questions, et ces questions sont et demeurent d'ordre philosophique, en tant qu'elles touchent à l'ontologie problématique d'êtres abstraits et incorporels. En quoi et comment ces questions « rayonnent »-t-elles dans le tissu vivant de l'activité mathématique ? Ce problème de philosophie des mathématiques requiert une étude effective, mais il ne vient pas seul, car la problématicité coprésente universelle est synthétique en tant que multiplicité pure de questions possibles.

À présent, $a-b$ et $a+b$ reviennent à la pensée, imprégnée encore des questions qu'elle vient de décider de quitter parce qu'une mémoire d'entendement commande de revenir à la chose à étudier. Là aussi, il y a mouvement, décision, complexité d'acte, humanité non mécanique. Puisque les questions d'appropriation sont universelles, multiples et complexes, savoir s'en libérer temporairement est un acte non seulement possible, mais aussi nécessaire :

La dynamique mathématique est principalement de type décisionnel.

Donc $a - b$ et $a + b$, le « moins » et le « plus », multipliés entre eux : symétrie et complétude, les opérations opposées s'articulent ensemble, et chose surprenante, elle se multiplient. Et ici, dans le produit $(a - b)(a + b)$, il se trouve que le « moins » précède le « plus », mais le « plus » pourrait tout aussi précéder le « moins », peut-être parce qu'on pourrait penser que tel est le cas en toute logique. D'ores et déjà, en première lecture, des questions s'expriment ainsi sur le « *comment écrire* ? », et sur le respect d'harmonies et de préséances opératoires. Si le « plus » précède *logiquement* le « moins » dans l'élaboration d'une théorie axiomatique des nombres entiers, doit-on ici écrire plutôt $(a+b)(a-b)$? ou bien accepter un flottement grâce à l'interchangeabilité des facteurs (commutativité de la multiplication élémentaire) ? ou bien encore écarter ce type de considérations mineures ? ou bien encore peut-être s'imaginer deviner que derrière la mise en avant du « moins », une intention dynamique non exprimée existait bel et bien, et que cette intention est en rapport avec une réflexion sur la nature *adéquate* de cette identité ?

Ainsi cet acte de questionner sur l'*écriture* du premier membre $(a-b)(a+b)$ de l'identité à analyser révèle-t-il que toute mise en forme symbolique est pleine de choix ou de non-choix, d'intentions ou de non-intentions, en tout cas, de questions de choix et d'intention qui ne sont en rien explicitées dans la pure écriture formelle, et qui pourtant sont absolument déterminantes quant à l'élaboration de calculs sains. Mathématiquement parlant, le nombre de permutations d'un ensemble fini à n éléments, égal au produit $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)\, n$ des n premiers entiers strictement positifs, devient vite extraordinairement grand quand n dépasse $n = 9$ ou 10. Ici bien entendu, il n'y a que deux possibilités, à savoir $(a - b)(a + b)$ et $(a + b)(a - b)$, mais dans la plupart des contextes algébriques, même très élémentaires au départ, le nombre incontrôlable de possibilités d'interchanger les représentations d'une même expression par des symboles contraint à *intentionnaliser l'écriture par certaines règles fines qui sont invisibles axiomatiquement*.

En résumé, les aspects *dynamiques* de cette identité élémentaire :

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 - b^2$$

incorporent au moins trois composantes :

- variabilité libre et mobilité implicite des quantités a et b ;
- commutativités algébriques et symétries relationnelles ;
- orientation temporelle et irréversibilité « thermodynamique ».

Mais alors, toutes ces spéculations universalisables ont laissé la pensée en attente sur le seuil des vrais calculs qui sont au fondement de la démonstration de ladite identité élémentaire. Que la démonstration s'efface devant l'énoncé et que les résultats finaux soient privilégiés par rapports aux calculs intermédiaires est seulement la marque d'une canalisation rhétorique habituelle du discours. Ce n'est pas parce que chaque lecteur de son propre côté, mentalement ou sur une feuille de brouillon, se sera convaincu de la véracité de ce calcul très simple qui tient en une seule ligne :

$$(a-b)(a+b) = a(a+b) - b(a+b) = a^2 + ab - ba + b^2 = a^2 - b^2,$$

que la dynamique dudit calcul aura été ressentie ou comprise, voire analysée. En effet, dans tout acte de vérification humaine, le suspens de la fin et l'omniprésence de la flèche orientationnelle du temps sont enveloppés dans et portés par l'être physico-dynamique de l'acteur humain. Pour que ce calcul puisse être codable à une échelle de quelques angströms non pas passivement dans un *a posteriori* mécanique guidé par des circuits microscopiques, mais *activement* dans l'*a priori* d'une ouverture questionnante ramifiée, il faudrait que l'informatique invente une programmation du décisionnel ouvert. En vérité, chaque moment d'élaboration d'acte est riche de questionnements virtuels et infralinguistiques. Ce n'est donc pas par hasard que les mathématiques fonctionnennent si bien de manière quasi « autistique » chez certains sujets doués, puisque les non-dits du dynamisme y abondent.

En tout cas, le produit $(a-b)(a+b)$ doit *appeler* des actes orientés. Il doit contenir en lui les germes de ses premières métamorphoses. C'est lui qui demande un parcours démonstratif ouvert. Ainsi, par une confiance aveugle en un principe métaphysique de l'omnipossibilité transformationnelle en mathématique, ce produit $(a-b)(a+b)$ se pose en première instance comme germe de multiples mouvements calculatoires. Que la structure d'algèbre commutative spécifie les concepts d'addition, de soustraction et de multiplication en listant un certain nombre d'axiomes ne circonscrit en rien toute l'ouverture exponentielle des actes de calcul possibles dans une algèbre commutative. L'exigence d'hypostasier certaines structures mathématiques sous une forme axiomatique précise procède à revers de la dynamique ouverte du calcul, et contrairement à cette dernière qui ne trouve jamais de limite dans son illimitude intrinsèque, l'hypostase morpho-structurale trouve rapidement une formulation achevée, bornée, définitive. Autrement dit, le structurel est une pensée du seuil, une pensée du fondement, une pensée de la clarification initiale, mais elle n'embrasse en aucun cas les ontologies exploratoires.

Donc le produit $(a-b)(a+b)$ porte en lui tous les germes de transformations qui sont possibles dans une certaine structure, par exemple, dans une simple structure d'algèbre commutative pour fixer les idées. Le réductionnisme structuraliste aura beau prétendre qu'à chaque étape d'un calcul, seuls sont possibles les actes de calcul qui sont encadrés par la structure ambiante, il lui échappera le point crucial que si tous les actes possédaient le statut schématisé et épuré qu'énoncent les axiomes, la réalité mathématique ne pourrait plus manifester cette résistance à la réalisation qui la rend opaque à tous ses niveaux.

Thèse : *Insuffisance philosophique du structuralisme en mathématiques.*

L'exponentiation des possibles, croix du tout structural. Cette affirmation étant d'un enjeu crucial pour les spéculations qui vont suivre, elle mérite d'être argumentée en raisonnant par l'absurde et aussi d'être illustrée au moyen d'un autre exemple beaucoup plus substantiel que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ quant à l'ampleur des calculs impliqués.

Argumentation par l'absurde. Supposons par exemple que dans une structure mathématique donnée relativement simple, un certain nombre d'opérations prédéfinies, par exemple les sept opérations $+$, $-$, $\times$, $*$, $\#$, $\perp$, $\&$ impliquant chacun un nombre fini d'objets, soit possible à chaque moment du calcul, sans limitation ou risque d'incohérence. Soit maintenant une démonstration donnée pour un théorème raisonnablement intéressant de la théorie. Si cette démonstration exige environ une trentaine d'opérations, ce qui est en fait un minimum pour un théorème qui enrichit vraiment la théorie, l'exploration aveugle de toutes les possibilités représenterait environ $7^{30} \cong 2,25.10^{25}$ collections de trente actes de calcul. En comparaison, quatre-vingt années représentent environ $2,52.10^9$ secondes. Autre exemple : en admettant que si l'on travaille dans une simple structure d'algèbre commutative, seulement trois opérations, à savoir $+$, $-$, $\times$, sont possibles à chaque moment, explorer de manière exhaustive trente opérations représenterait quand même $3^{30} \cong 2,05.10^{14}$ actes de calcul aussi. Et en vérité, dans toute démonstration vraiment ouverte, l'appel à des expressions déjà rencontrées, les retours en arrière et les boucles partielles de calculs sont très nombreux, ce qui augmenterait encore les exponentielles si l'on devait tenir compte de ces possiblités supplémentaires. Comme la pensée mathématique humaine est manifestement incapable de telles totalisations, il est maintenant visiblement extrêmement clair qu'*il est absurde de croire ou de penser que la mise en axiomes des structures fondamentales permet d'embrasser l'être et la nature des objets mathématiques.*

Scholie. Admettre que les structures élémentaires initiales ont un rôle architecturant qui s'inscrit de plein pied dans l'*actuel*, c'est rejeter sans plus façons l'indéfini éternellement potentiel dans lequel baignent les mathématiques humaines, et c'est donc s'illusionner sur le véritable contrat métaphysique auxquelles elles sont soumises dans leur destin exploratoire. En vérité, parent pauvre de l'ouverture et piètre succédané de la totalisation, l'exponentiation ne fait qu'indiquer un possible qui est inaccessible pour de simples raisons de taille. Comme pour la démonstration par diagonalisation récursive des théorèmes d'incomplétude auxquels sont soumises les théories formelles incorporant l'arithmétique, ce n'est que par idéalisation d'une indéfinité potentielle d'actes que l'on peut s'imaginer, pour les besoins d'un raisonnement par l'absurde, embrasser en un seul tout la totalité des théorèmes qui sont syntaxiquement démontrables dans une théorie formelle donnée. □

Exemple de champ calculatoire complexe. Avant de reprendre sur $(a-b)(a+b)$, il peut être utile de montrer en quoi la simplicité schématique des axiomes de la structure d'algèbre commutative n'exprime en rien la complexité potentielle des calculs. Qu'il soit par exemple proposé de développer et de réorganiser l'expression suivante (*cf.* [**4**]) :

$$\Delta^2\big[\Upsilon_x^\sim\big]+\Delta\big[-2\Upsilon^\sim\Delta_x+\Lambda_1^\sim\,\Upsilon_u^\sim-\Upsilon^\sim\,\Lambda_{1,u}^\sim\big]-\Lambda_1^\sim\,\Upsilon^\sim\,\Delta_u,$$

où l'on a par définition, en termes d'une fonction $\varphi=\varphi(x,y,u)$ de trois variables $(x,y,u)\in\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned}\Delta &= 1+\varphi_u^2, \qquad \Lambda_1^\sim=\varphi_y-\varphi_x\,\varphi_u,\\ \Upsilon^\sim &= -\varphi_{xx}-\varphi_{yy}-2\,\varphi_y\,\varphi_{xu}-\varphi_x^2\,\varphi_{uu}+2\,\varphi_x\,\varphi_{yu}-\varphi_y^2\,\varphi_{uu}+\\ &\qquad\qquad +2\,\varphi_y\,\varphi_u\,\varphi_{yu}+2\,\varphi_x\,\varphi_u\,\varphi_{xu}-\varphi_u^2\,\varphi_{xx}-\varphi_u^2\,\varphi_{yy},\end{aligned}$$

et où les dérivées partielles sont notées avec des indices inférieurs, par exemple $\psi_x=\frac{\partial}{\partial x}\psi$. Après avoir calculé toutes les dérivées partielles $\Upsilon_x^\sim$, Δ_x, $\Upsilon_u^\sim$, $\Lambda_{1,u}^\sim$ et Δ_u qui apparaissent, on doit développer des produits d'expressions relativement longues, additionner le tout, simplifier les termes et réorganiser l'ensemble d'une manière cohérente. Une telle tâche n'est pas immédiate, bien que seules des opérations structurellement élémentaires soient impliquées. Ceci montre à nouveau que dans le simple "$A+B=B+A$" ou dans le simple "$A(B+C)=AB+AC$" se cachent des situations d'une complexité et d'une diversité extrêmement variables et que le remplacement de A, B, C par des expressions de la vie mathématique réelle n'est pas un acte aussi simple que ce que l'idéalisation du concept de substitution aime à se le représenter mentalement.

Scholie. Qu'il soit aussi (re)dit en passant qu'une phénoménologie floue des actes de pensée possibles encadre le sujet dans sa confrontation au réel ardu du calcul, et ce, d'une manière tellement riche, diverse voire « inanalysable », que la philosophie paradigmatique des mathématiques se résout régulièrement à en conceptualiser la pratique sans dépasser le niveau d'un discours qui est métaphoriquement vraisemblable, et ce, grâce à l'autopuissance intuitive d'un langage qui n'est « fluide » que parce qu'il a été sédimenté par le passé, par la répétition, par la circulation, et par l'évidence du donné. Au contraire, l'intuition qui vit au contact des mathématiques ne se met que trop souvent à l'épreuve de sa propre exigence de compréhension par blocages et obstacles multiples. □

Trois concepts dynamiques : Expansion, Annihilation, Harmonisation. Ainsi, la multiplication entre $(a-b)$ et $(a+b)$ appelle par elle-même son propre développement. Le contracté appelle sa dilatation, et réciproquement aussi, le dilaté appelle sa contraction. Expansion symbolique et contraction symbolique, telle est la sève duelle du calcul, le sang fondamental qui l'irrigue de forces internes.

Ici, trois chemins détaillés de calcul peuvent être empruntés. Soit le développement par le produit porte d'abord sur le premier facteur avant de poursuivre son déploiement complet :

$$\begin{aligned}(a-b)\times(a+b) &= a\times(a+b)-b\times(a+b)\\ &= a\times a+a\times b-b\times a-b\times b,\end{aligned}$$

soit il commence par porter sur le second facteur :

$$\begin{aligned}(a-b)\times(a+b) &= (a-b)\times a+(a-b)\times b\\ &= a\times a-b\times a+a\times b-b\times b,\end{aligned}$$

soit enfin, il se déploie en se distribuant d'emblée en épuisant toutes les possibilités de multiplication :

$$\text{un élément du premier facteur} \times \text{un élément du second facteur},$$

mais cette dernière possibilité demande, pour être véritablement réalisée, une règle de lecture des termes dans l'un et l'autre facteur, par exemple de gauche à droite en donnant la primeur au premier facteur :

$$(a-b)\times(a+b) = a\times a+a\times b-b\times a-b\times b.$$

Aussi l'expansion n'est-elle jamais unique, même dans des cas absolument élémentaires. L'ordre de parcours peut varier. À cause de la commutativité de l'addition, on peut changer l'ordre des facteurs dans tout produit quelconque de sommes quelconques, à savoir on a :

$$\prod_{i=1}^{n}\big(a_1^i+a_2^i+\cdots+a_{\ell(i)}^i\big) = \prod_{i=1}^{n}\big(a_1^{\sigma(i)}+a_2^{\sigma(i)}+\cdots+a_{\ell(\sigma(i))}^{\sigma(i)}\big),$$

pour toute bijection quelconque (permutation) σ de l'ensemble $\{1,2,\dots,n\}$. Ainsi, chaque monôme absolument commutatif :

$$a_{k_1}^1\times a_{k_2}^2\times\cdots\times a_{k_n}^n = a_{k_{\sigma(1)}}^{\sigma(1)}\times a_{k_{\sigma(2)}}^{\sigma(2)}\times\cdots\times a_{k_{\sigma(n)}}^{\sigma(n)}$$

qui apparaît dans le développement d'un tel produit s'inscrit alors dans une somme n-uple assez considérable :

$$\sum_{k_1=1}^{\ell(1)}\sum_{k_2=1}^{\ell(2)}\cdots\sum_{k_n=1}^{\ell(n)} a_{k_1}^1 a_{k_2}^1\cdots a_{k_n}^n$$

laquelle ensuite, à cause de la commutativité de l'addition, est à son tour soumise à une pivotation indécise quant à l'ordre d'apparition de ses $\ell_{(1)} \times \cdots \times \ell_{(n)}$ termes. On doit prendre garde qu'il y a en tout :

$$\big(\ell_{(1)} \times \cdots \times \ell_{(n)}\big)! = \prod_{i=1}^{\ell_{(1)} \times \cdots \times \ell_{(n)}} i$$

réarrangements de $\ell_{(1)} \times \cdots \times \ell_{(n)}$ monômes additionnés, ce qui peut être un nombre gigantesque puisque la factorielle $N!$ d'un entier naturel $N \in \mathbb{N}$ explose exponentiellement comme $\big(\frac{N}{e}\big)^N \sqrt{2\pi N}$, d'après la formule de Stirling. Ainsi donc, l'*expansion* ou *développement* est un acte de calcul qui, loin d'être seulement automatique, ouvre sur des questions d'organisation et de mise en ordre.

Scholie. Qu'est-ce donc alors que la « dynamique du calcul », sinon l'idée qu'il existe certaines tensions organisatrices infimes inexprimables dans la syntaxe basique d'une théorie qui doivent diriger les métamorphoses symboliques dans un océan exponentiel de possibilités dont la plupart n'ont pas d'intérêt synthétique ? Plus profondément, et sans aucun finalisme implicite, la « dynamique des métamorphoses symboliques par égalités successives » est l'expression en termes mathématiques formels d'une pensée qui oriente les transformations vers certains buts synthétiques, lesquels sont fréquemment amenés à se modifier et à se recadrer au contact des difficultés que l'exigence de synthèse rencontre. C'est pour cette raison que la pivotation permutationnelle, comme tout autre ambiguïté dénotationnelle d'ailleurs, doivent être systématiquement éliminées en effectuant des choix essentiellement uniques qui ont du sens et qui expriment de la meilleure manière possible les éléments synthétiques a priori qui sont visés. Aussi dans l'étude d'un problème donné, ce ne sera essentiellement qu'une seule écriture de la somme :

$$\sum_{k_1=1}^{\ell_{(1)}} \sum_{k_2=1}^{\ell_{(2)}} \cdots \sum_{k_n=1}^{\ell_{(n)}} a_{k_1}^1 a_{k_2}^1 \cdots a_{k_n}^n$$

parmi les $n! \big(\ell_{(1)} \times \cdots \times \ell_{(n)}\big)!$ possibles qui aura du sens pour continuer les calculs en direction d'une synthèse visée. Trouver une telle écriture doit faire question au moment de l'acte de développement du produit $\prod_{i=1}^n \big(a_1^i + \cdots + a_{\ell(i)}^i\big)$ et doit aussi se réévaluer régulièrement par des retours en arrière dans les moments ultérieurs. $\square$

Thèse fondamentale : *Chaque moment s'auto-interroge : permanence absolue, en mathématiques, d'un questionnement étoilé, indécis, ouvert*[1].

Scholie. Non seulement chaque acte infime de calcul possède un « sens en questions » lorsqu'il est inscrit dans sa temporalité locale, mais les résultats eux-mêmes portent aussi en eux les marques d'interrogations multiples. □

Ainsi les termes doivent-ils se réorganiser après tout premier développement « brut » : telle est l'exigence minimale du dynamisme interne des calculs. Or au-delà des pivotations permutationnelles, certains termes peuvent disparaître : c'est l'*annihilation*, concept qui a un statut philosophique particulièrement important quant à l'interprétation du sens des résultats, comme les spéculations qui vont suivre l'argumenteront.

Par exemple, dans le développement élémentaire :

$$(a-b)\times(a+b) = a\times a + \underline{a\times b}_{\textcircled{1}} - \underline{b\times a}_{\textcircled{1}} - b\times b,$$

les deux produits croisés $a \times b$ et $-b \times a$ s'annihilent, comme on le sait. Qu'ils soient soulignés ici, avec une étiquette numérotée, afin de signifier quel terme s'annihile avec quel terme, semble être superflu, puisque l'*œil* du mathématicien voit immédiatement que ces deux termes qui se suivent disparaissent. Toutefois, voici par exemple une équation plus complexe ([**314**]) dans lequel quinze jeux de deux ou trois termes *non placés à la suite l'un de l'autre* s'annihilent :

$$\begin{aligned}
0 = {} & -2\,G_{yy} + \tfrac{4}{3}\,H_{xy} - \tfrac{2}{3}\,L_{xx} + \\
& + G_y\,L + G\,L_y - H\,H_y - \underline{G_y\,\Theta^1}_{\textcircled{15}} + G\,L_y - 2\,G\,M_x - \underline{G\,H\,M}_{\textcircled{11}} + \\
& + \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,(L)^2}_{\textcircled{1}} - \underline{G\,M\,\Theta^0}_{\textcircled{2}} - \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,(\Theta^1)^2}_{\textcircled{3}} - \underline{\tfrac{1}{3}\,H_y\,\Theta^0}_{\textcircled{4}} + \underline{\tfrac{2}{3}\,L_x\,\Theta^0}_{\textcircled{5}} + \\
& + \underline{2\,G\,M\,\Theta^0}_{\textcircled{2}} - \underline{\tfrac{1}{2}\,H\,L\,\Theta^0}_{\textcircled{6}} - \underline{\tfrac{1}{2}\,H\,\Theta^0\,\Theta^1}_{\textcircled{7}} + \underline{\tfrac{1}{2}\,L\,(\Theta^0)^2}_{\textcircled{8}} + \underline{\tfrac{1}{2}\,(\Theta^0)^2\,\Theta^1}_{\textcircled{9}} - \\
& - 2\,G_x\,M - 2\,G\,M_x + \tfrac{1}{2}\,H_x\,L + \tfrac{1}{2}\,H\,L_x + \underline{\tfrac{1}{2}\,H_x\,\Theta^1}_{\textcircled{10}} + \\
& + \tfrac{1}{6}\,H\,L_x - \tfrac{1}{3}\,H\,H_y + \underline{G\,H\,M}_{\textcircled{11}} - \underline{\tfrac{1}{4}\,(H)^2\,L}_{\textcircled{12}} - \underline{\tfrac{1}{4}\,(H)^2\,\Theta^1}_{\textcircled{13}} + \\
& + \underline{\tfrac{1}{4}\,H\,L\,\Theta^0}_{\textcircled{6}} + \underline{\tfrac{1}{4}\,H\,\Theta^0\,\Theta^1}_{\textcircled{7}} - \underline{\tfrac{1}{2}\,L_x\,\Theta^0}_{\textcircled{5}} + G_y\,L - \tfrac{1}{2}\,H_x\,L - \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,(L)^2}_{\textcircled{1}} + \\
& + \underline{\tfrac{1}{4}\,H^2\,L}_{\textcircled{12}} + \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,L\,\Theta^1}_{\textcircled{14}} - \underline{\tfrac{1}{4}\,L\,\left(\Theta^0\right)^2}_{\textcircled{8}} + \underline{G_y\,\Theta^1}_{\textcircled{15}} - \underline{\tfrac{1}{2}\,H_x\,\Theta^1}_{\textcircled{10}} - \\
& - \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,L\,\Theta^1}_{\textcircled{14}} + \underline{\tfrac{1}{4}\,H^2\,\Theta^1}_{\textcircled{13}} + \underline{\tfrac{1}{2}\,G\,(\Theta^1)^2}_{\textcircled{3}} - \underline{\tfrac{1}{4}\,\left(\Theta^0\right)^2\,\Theta^1}_{\textcircled{9}} - \underline{\tfrac{1}{6}\,L_x\,\Theta^0}_{\textcircled{5}} + \\
& + \underline{\tfrac{1}{3}\,H_y\,\Theta^0}_{\textcircled{4}} - \underline{G\,M\,\Theta^0}_{\textcircled{2}} + \underline{\tfrac{1}{4}\,H\,L\,\Theta^0}_{\textcircled{6}} + \underline{\tfrac{1}{4}\,H\,\Theta^0\,\Theta^1}_{\textcircled{7}} - \underline{\tfrac{1}{4}\,L\,(\Theta^0)^2}_{\textcircled{8}} - \\
& - \underline{\tfrac{1}{4}\,(\Theta^0)^2\,\Theta^1}_{\textcircled{9}},
\end{aligned}$$

[1] Une phénoménologie de la problématicité mathématique coprésente dans toutes les « pratiques » reste à inventer. À la différence d'une phénoménologie du « donné », elle devrait examiner les structures d'un questionnement éclaté dans la pensée pure.

pour donner au final, après une réorganisation des termes restants (laquelle ne sera pas détaillée ici), le résultat contracté suivant :

$$\begin{aligned} 0 = -2\,G_{yy} + \tfrac{4}{3}\,H_{xy} - \tfrac{2}{3}\,L_{xx} + \\ + 2(G\,L)_y - 2\,G_x\,M - 4\,G\,M_x + \tfrac{2}{3}\,H\,L_x - \tfrac{4}{3}\,H\,H_y. \end{aligned}$$

Souligner, numéroter, simplifier, réoganiser : certaines expressions longues et complexes contiennent en elles une *toile relationnelle d'annihilations*. Certes, on pourrait s'imaginer que les molécules de calcul ont le pouvoir de s'auto-(dés)agréger par elles-mêmes, mais :

Thèse fondamentale. *En mathématiques, nul automatisme empirique, et il n'y a pas d'essence motrice séparée.*

Scholie. Il est vrai que les machines à calcul canalisent physiquement de nombreux automatismes électr(on)iques, mais c'est la programmation et ce sont les « ordres » donnés aux ordinateurs qui *décident à l'avance* d'un protocole d'agrégations et de désagrégations : aucun calcul proprement mathématique ne s'exécute *tout seul* comme l'eau tombe du ciel. Les mathématiques automotrices, les mathématiques automatiques n'existent pas, car leur dynamisme génétique est, toujours pour l'instant, engendré par des sujets porteurs d'une motricité biologique. □

Ainsi l'acte de désigner les annihilations par soulignements et numérotations permet-il de faire prendre corps, intuitivement et formellement, à un passage crucial du calcul, à savoir le moment où certains termes entrent en scène pour tisser des relations nouvelles et métamorphoser l'expression initiale. Qu'est-ce alors que le signe « $=$ », sinon la marque de ce mouvement *orienté*, et en quelque sorte irréversible, des expressions vers leur propre simplification synthétique ? Ce signe « $=$ » porte la mémoire d'un passage, il signifie non pas une parfaite équivalence réversible entre deux expressions qui seraient égales et identiques l'une à l'autre en vertu de la symétrie formelle d'une relation logique binaire, mais il signifie qu'un calcul transformationnel intermédiaire a été exécuté et que ce calcul possède un sens mathématique. Aussi l'identité élémentaire :

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

dit-elle précisément que le produit de la différence et de la somme entre deux nombres est en fait égal à une expression différente, plus simple en un certain sens, à savoir la différence entre le carré des deux nombres en question. C'est donc par la volonté d'y voir une *égalité* que l'on souhaite sous-entendre la synthèse par annihilation de deux termes opposés, synthèse qui est maintenant rejetée dans une démonstration sous-entendue. Toutefois, l'essence de cette identité élémentaire s'identife manifestement à la disparition des deux termes croisés $a \times b - b \times a$: *c'est la dynamique interne au calcul qui forme les énoncés-théorèmes*.

L'annihilation créatrice d'intrinséquéité. Dans d'autres situations plus complexes, l'annihilation entre termes peut s'avérer posséder une fonction particulièrement troublante dans le calcul pur en tant qu'elle apporte une information conceptuelle d'ordre élevé, à savoir en tant qu'elle *transsubstantie de l'extrinsèque en de l'intrinsèque*.

Afin d'illustrer adéquatement cette assertion, soit à nouveau l'exemple, dans l'espace euclidien tridimensionnel $\mathbb{R}^3$, de la courbure d'une surface gaussienne[2] représentée par une application paramétrée :

$$\begin{aligned}(u,v) \longmapsto & \big(x(u,v),\, y(u,v),\, z(u,v)\big) \\ & =: \mathbf{x}(u,v)\end{aligned}$$

de classe au moins $\mathscr{C}^2$ (définie dans un certain ouvert de $\mathbb{R}^2$) et qui satisfait la condition d'immersivité :

$$\text{rang} \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix} = 2,$$

où, comme à l'accoutumée, les indices inférieurs désignent brièvement les dérivées partielles. Bien entendu, avec une vision plückérienne, cette condition revient à supposer que la somme des carrés des mineurs 2×2 de cette matrice jacobienne 3×2 ne s'annule jamais :

$$0 \neq \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2.$$

Les trois composantes $E = E(u,v)$, $F = F(u,v)$ et $G = G(u,v)$ de la métrique quadratique infinitésimale induite sur la surface par la métrique pythagoricienne de $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} dx^2 + dy^2 + dz^2 &= (x_u du + x_v dv)^2 + (y_u du + y_v dv)^2 + (z_u du + z_v dv)^2 \\ &= (x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)\, du^2 + 2(x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)\, dudv + (x_v^2 + y_v^2 + z_v^2)\, dv^2 \\ &=: E\, du^2 + 2F\, dudv + G\, dv^2 \end{aligned}$$

[2] Par souci de complétude expositionnelle, il est nécessaire d'effectuer auparavant quelques rappels définitionnels qui ne seront pas commentés quant à la dynamique interne des calculs, mais qui seront néanmoins intentionnellement soutenus par une continuité serrée entre raisonnements et expressions symboliques.

sont alors visiblement données, en fonction de cette immersion paramétrisante, par les formules :

$$\begin{aligned} E &:= x_u^2 + y_u^2 + z_u^2, \\ F &:= x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v, \\ G &:= x_v^2 + y_v^2 + z_v^2. \end{aligned}$$

Un calcul sans mystère du rapport entre une certaine aire infinitésimale sur la surface et l'aire infinitésimale qui lui correspond sur une sphère auxiliaire montre que la courbure de Gauss de la surface en l'un de ses points de paramètres (u, v) est donnée, quantitativement, comme le quotient :

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2},$$

par le déterminant[3] :

$$EG - F^2 = \left(\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 \right)^2$$

de la *première forme fondamentale* $Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, du déterminant de la *seconde forme fondamentale* :

$$L\, du^2 + 2M\, dudv + N\, dv^2,$$

dont les trois coefficients $L = L(u, v)$, $M = M(u, v)$ et $N = N(u, v)$ sont les produits scalaires :

$$L := \mathbf{x}_{uu} \cdot \mathbf{n}, \qquad M := \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{n}, \qquad N := \mathbf{x}_{vv} \cdot \mathbf{n}$$

des trois dérivées partielles d'ordre deux $\mathbf{x}_{uu}$, $\mathbf{x}_{uv}$ et $\mathbf{x}_{vv}$ du vecteur paramétré $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u, v) \in \mathbb{R}^3$ avec le vecteur normal unitaire à la surface :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} = \mathbf{n}(u, v) &:= \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|} \in \mathbb{R}^3 \\ &= \frac{1}{(EG - F^2)^{1/2}} \left(\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \ - \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \right), \end{aligned}$$

où la notation $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ désigne le produit vectoriel « des physiciens » entre deux vecteurs $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ - \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}, \ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right).$$

Mais ici, ces trois composantes L, M, N ne sont en rien intrinsèques : elles dépendent fortement du déploiement paramétrique de la surface dans un espace à trois dimensions.

[3] Vérifier formellement cette identité et en reconstituer ensuite le sens géométrique.

Or l'algèbre déterminantielle élémentaire montre que le volume (orienté) du parallélépipède (orienté) $[\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]$ que trois vecteurs quelconques $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ embrassent dans l'espace $\mathbb{R}^3$ est donné soit par le produit scalaire entre un vecteur et le produit vectoriel entre les deux autres vecteurs, soit encore par le simple déterminant[4] 3×3 de ces trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}([\mathbf{a}\,\mathbf{b}\,\mathbf{c}]) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{c}\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} \\ &= \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.\end{aligned}$$

Il en découle immédiatement que les trois composantes L, M et N de la seconde forme fondamentale s'expriment chacune comme un certain déterminant 3×3, et alors la courbure de Gauss s'exprime naturellement comme la soustraction suivante entre deux produits de déterminants :

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\big[(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uu})\,(\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{vv}) - (\mathbf{x}_u\times\mathbf{x}_v\cdot\mathbf{x}_{uv})^2\big] \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uu} \\ y_u & y_v & y_{uu} \\ z_u & z_v & z_{uu}\end{vmatrix}\,\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{vv} \\ y_u & y_v & y_{vv} \\ z_u & z_v & z_{vv}\end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv}\end{vmatrix}^2\right\}.\end{aligned}$$

Ici s'achève le préliminaire constitué de rappels non commentés, car c'est à ce moment précis que plusieurs « petites » astuces de calcul entrent en scène pour *éliminer expéditivement toute trace d'extrinsèque dans* κ.

Tout d'abord, il est bien connu que le produit de deux déterminants carrés est égal au déterminant du produit matriciel :

$$\det(A)\det(B) = \det(AB).$$

Donc la dynamique en attente de l'acte prochain de calcul suggère instamment de tester ce que donnera le développement du produit. Et sans qu'une explication simple puisse être alléguée, il se trouve — astuce mystérieuse comme tant d'autres astuces en mathématiques qui possèdent chacune de leur côté une signification métaphysique cachée — que le deuxième produit de déterminants doit non seulement *se libérer* de cette notation intempestive qu'est le *carré* Δ^2 et se *restaurer*[5] en lui-même comme un vrai produit entre

[4] Toutes ces formules, clairement équivalentes les unes aux autres, reviennent simplement à développer le déterminant 3×3 en question par rapport à l'une de ses trois colonnes.

[5] **Thèse.** *Les actes de* dé-*contraction du symbolique, c'est-à-dire de* ré-*expansion de ce qui a été intempestivement contracté à cause d'un mauvais désir de domination par réductions symboliques, forment l'*arcane suprême du calcul*, dans la mesure où toute pensée*

deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{vmatrix},$$

mais encore et qui plus est — et c'est bien *là* que le calculateur doit être doué d'une vigilance extrême quant aux *pivotations symboliques imprévisibles* que son attention pourrait manquer —, se transmuer infimement en un produit entre déterminants en vertu de la formule générale d'invariance du déterminant par transposition, ce qui donne ici :

$$\det(A)\det(B) = \det(A)\det({}^tB) = \det(A\,{}^tB).$$

Immédiatement, la *nécessité* d'une transposition, *proprement interne à l'essence du calcul*, se fait ressentir *aussi* quant au second produit de deux déterminants. Ainsi, premier et deuxième produits de déterminants se préparent-ils à mieux faire insuffler l'intrinsèque dans la formule de la courbure,

---

mathématique unitaire doit répondre à l'impératif catégorique d'accepter les délinéaments de son indéfinitude.

puisque l'on constate que le premier produit de déterminants, après transposition de son premier facteur, se transforme en un nouveau déterminant[6] :

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{vv} \\ y_u & y_v & y_{vv} \\ z_u & z_v & z_{vv} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u^2+y_u^2+z_u^2 & x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v & x_ux_{vv}+y_uy_{vv}+z_uz_{vv} \\ x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v & x_v^2+y_v^2+z_v^2 & x_vx_{vv}+y_vy_{vv}+z_vz_{vv} \\ x_ux_{uu}+y_uy_{uu}+z_uz_{uu} & x_vx_{uu}+y_vy_{uu}+z_vz_{uu} & x_{uu}x_{vv}+y_{uu}y_{vv}+z_{uu}z_{vv} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2}\,G_u \\ F & G & \frac{1}{2}\,G_v \\ \frac{1}{2}\,E_u & F_u - \frac{1}{2}\,E_v & x_{uu}x_{vv}+y_{uu}y_{vv}+z_{uu}z_{vv} \end{vmatrix}$$

dont tous les éléments, *excepté seulement le dernier en bas à droite* :

$$x_{uu}x_{vv}+y_{uu}y_{vv}+z_{uu}z_{vv},$$

s'expriment en fonction des trois coefficients *intrinsèques* E, F, G de la métrique infinitésimale $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$. De manière analogue, le second produit de déterminants, après transposition de son premier

[6] Vérifier par exemple la relation $x_ux_{vv}+y_uy_{vv}+z_uz_{vv} = F_v - \frac{1}{2}\,G_u$, de même que les trois autres relations sous-entendues dans le passage du premier au deuxième signe d'égalité, ne présente aucune difficulté, puisque, grâce à la règle de Leibniz pour la différentiation d'un produit, on a par exemple $F_v = x_{uv}x_v+x_ux_{vv}+y_{uv}y_v+y_uy_{vv}+z_{uv}z_v+z_uz_{vv}$ et $G_u = 2x_vx_{uv}+2y_vy_{uv}+2z_vz_{uv}$, d'où effectivement la disparition désirée des termes croisés dans la soustraction $F_v - \frac{1}{2}\,G_u$. Toutefois qu'il soit bien entendu ici — s'il est besoin de rappeler un tel fait dialectique régulateur — qu'une telle vérification *a posteriori* n'explicite *en rien* les *causalités profondes qui gouvernent la transmutation vers l'intrinsèque dirigée par le calcul*. En vérité, le calcul originairement conduit par Gauss dans son mémoire [**181**] témoigne d'une *vision plus systématique et mieux organisée* des relations algébrique fondamentales entre toutes ces quantités différentielles. Du point de vue d'une pensée gaussienne *absolutisée*, force est alors de constater qu'en jetant leurs *projecteurs paradigmatiques en partie aveuglants*, les approches par court-circuits géométrico-conceptuels qui ont été sédimentées puis stabilisées dans l'histoire des mathématiques (Weingarten ; Riemann ; Christoffel ; Lipschitz ; Levi-Civita ; Cartan) *ombragent* quelque peu *inopportunément* la toile unitaire de tensions computationnelles *fertiles* dans laquelle circulait Gauss. □

facteur, se transforme en un nouveau déterminant :

$$\begin{vmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \\ x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_{uv} \\ y_u & y_v & y_{uv} \\ z_u & z_v & z_{uv} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_u^2+y_u^2+z_u^2 & x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v & x_ux_{uv}+y_uy_{uv}+z_uz_{uv} \\ x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v & x_v^2+y_v^2+z_v^2 & x_vx_{uv}+y_vy_{uv}+z_vz_{uv} \\ x_ux_{uv}+y_uy_{uv}+z_uz_{uv} & x_vx_{uv}+y_vy_{uv}+z_vz_{uv} & x_{uv}^2+y_{uv}^2+z_{uv}^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & x_{uv}^2+y_{uv}^2+z_{uv}^2 \end{vmatrix}$$

dont tous les éléments encore, *excepté encore le dernier en bas à droite* :

$$x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2,$$

s'expriment en fonction des trois coefficients *intrinsèques* E, F, G de la métrique infinitésimale $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$. Au total, grâce à ces transformations, la courbure gaussienne s'exprime maintenant sous la forme :

$$\kappa = \frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{ \begin{vmatrix} E & F & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ F & G & \frac{1}{2}G_v \\ \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v & \underline{x_{uu}x_{vv}+y_{uu}y_{vv}+z_{uu}z_{vv}} \end{vmatrix} - \right.$$

$$\left. - \begin{vmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_v \\ F & G & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u & \underline{x_{uv}^2+y_{uv}^2+z_{uv}^2} \end{vmatrix} \right\}.$$

À ce stade, une question évidente se pose dans la micro-seconde d'une « *Geistesmasse* » (masse-pensée) riemannienne : est-il possible d'éliminer *complètement* ces deux dernières traces extrinsèques (soulignées) dans l'expression de la courbure ? C'est à ce point précis qu'une *annihilation créatrice d'intrinséquéité* entre en scène.

En effet, toute différence entre deux déterminants 3×3 dont les parties 2×2 en haut à gauche coïncident :

$$\begin{vmatrix} a & b & I \\ c & d & J \\ K & L & \mathsf{X} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & I' \\ c & d & J' \\ K' & L' & \mathsf{X}' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & I \\ c & d & J \\ K & L & \mathsf{X}-\mathsf{X}' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b & I' \\ c & d & J' \\ K' & L' & 0 \end{vmatrix}$$

se comporte, comme on s'en convainc aisément, comme simple opérateur de soustraction $\mathsf{X} - \mathsf{X}'$ entre les deux derniers éléments X et X' situés en bas à droite, tous les autres éléments restant inchangés. Mais ici alors, bien que ni le premier terme extrinsèque rémanent dans le premier déterminant :

$$\mathsf{X} := x_{uu}x_{vv} + y_{uu}y_{vv} + z_{uu}z_{vv},$$

ni son homologue, extrinsèque-rémanent lui aussi, dans le second déterminant :

$$\mathsf{X}' = x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2$$

ne puissent, chacun de leur côté, être exprimés d'une quelconque manière en fonction des trois éléments intrinsèques E, F, G et de leurs dérivées partielles de tous ordres[7], leur soustraction quant à elle :

$$\mathsf{X} - \mathsf{X}' = x_{uu}x_{vv} + y_{uu}y_{vv} + z_{uu}z_{vv} - x_{uv}^2 - y_{uv}^2 - z_{uv}^2$$

va s'avérer — presque « miraculeusement », comme l'a découvert Gauss — être exprimable en fonction des dérivées partielles d'ordre deux des fonctions E, F, G : c'est donc bien là que les deux éléments extrinsèques rémanents dans chacun de ces deux termes :

$$\begin{aligned}\mathsf{X} &= \widetilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{intrins\grave{e}que}} + \mathsf{extrins\grave{e}que}, \\ \mathsf{X}' &= \widetilde{\mathsf{X}}'_{\mathsf{intrins\grave{e}que}} + \mathsf{extrins\grave{e}que}',\end{aligned}$$

vont *disparaître* — $\boxed{\textit{annihilation créatrice d'intrinséquéité}}$ — dans la soustraction :

$$\begin{aligned}\mathsf{X} - \mathsf{X}' &= \widetilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{intrins\grave{e}que}} + \underline{\mathsf{extrins\grave{e}que}}_{\circ} - \widetilde{\mathsf{X}}'_{\mathsf{intrins\grave{e}que}} - \underline{\mathsf{extrins\grave{e}que}'}_{\circ} \\ &= \widetilde{\mathsf{X}}_{\mathsf{intrins\grave{e}que}} - \widetilde{\mathsf{X}}'_{\mathsf{intrins\grave{e}que}},\end{aligned}$$

grâce à au fait crucial que les deux restes extrinsèques intempestifs *s'avèrent être ici égaux* :

$$\mathsf{extrins\grave{e}que} = \mathsf{extrins\grave{e}que}'.$$

En effet, on a le lemme suivant qui clôt l'analyse de cet exemple d'annihilation dans le calcul mathématique.

Lemme. *Les trois coefficients E, F, G de la première forme fondamentale $ds^2 = E\,du^2 + 2F\,dudv + G\,dv^2$ satisfont la relation :*

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{2}\,E_{vv} + F_{uv} - \tfrac{1}{2}\,G_{uu} &= x_{uu}x_{vv} + y_{uu}y_{vv} + z_{uu}z_{vv} - x_{uv}^2 - y_{uv}^2 - z_{uv}^2 \\ &= \mathsf{X} - \mathsf{X}'.\end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. En effet, on calcule, pas à pas, d'abord toutes la première dérivée partielle E_v puis la seconde dérivée partielle E_{vv} :

$$\begin{aligned}E_v &= 2x_u x_{uv} + 2y_u y_{uv} + 2z_u z_{uv}, \\ E_{vv} &= 2(x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) + 2x_u x_{uvv} + 2y_u y_{uvv} + 2z_u z_{uvv},\end{aligned}$$

[7] Quel est l'argument ?

puis similairement pour F_u et F_{uv} :

$$\begin{aligned}
F_u &= x_u x_{uv} + y_u y_{uv} + z_u z_{uv} + x_v x_{uu} + y_v y_{uu} + z_v z_{uu},\\
F_{uv} &= (x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) + (x_{uu} x_{vv} + y_{uu} y_{vv} + z_{uu} z_{vv}) + \\
&\qquad + x_u x_{uvv} + y_u y_{uvv} + z_u z_{uvv} + x_v x_{uuv} + y_v y_{uuv} + z_v z_{uuv},
\end{aligned}$$

et enfin G_u et G_{uu} :

$$\begin{aligned}
G_u &= 2x_v x_{uv} + 2y_v y_{uv} + 2z_v z_{uv},\\
G_{uu} &= 2(x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) + 2x_v x_{uuv} + 2y_v y_{uuv} + 2z_v z_{uuv},
\end{aligned}$$

afin de vérifier que dans la combinaison linéaire spécifique $-\frac{1}{2}\,E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}\,G_{uu}$ de dérivées partielles secondes, *toutes les dérivées partielles troisièmes extrinsèques disparaissent* :

$$\begin{aligned}
&-\tfrac{1}{2}\,E_{vv} + F_{uv} - \tfrac{1}{2}\,G_{uu} = \\
&= -(x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) - \underline{x_u x_{uvv} - y_u y_{uvv} - z_u z_{uvv}}_{\circ} + \\
&\quad + (x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) + (x_{uu} x_{vv} + y_{uu} y_{vv} + z_{uu} z_{vv}) + \\
&\quad + \underline{x_u x_{uvv} + y_u y_{uvv} + z_u z_{uvv}}_{\circ} + \underline{x_v x_{uuv} + y_z y_{uuv} + z_v z_{uuv}}_{\circ\circ} - \\
&\quad - (x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2) - \underline{x_v x_{uuv} - y_v y_{uuv} - z_v z_{uuv}}_{\circ\circ} \\
&= x_{uu} x_{vv} + y_{uu} y_{vv} + z_{uu} z_{vv} - x_{uv}^2 - y_{uv}^2 - z_{uv}^2,
\end{aligned}$$

et de constater qu'il ne reste au final que les dérivées partielles secondes qui reconstituent $\mathsf{X} - \mathsf{X}'$. $\square$

Il reste à réinterpréter ce lemme avec les notations précédentes en y faisant apparaître ledit terme extrinsèque commun à X et à X' qui disparaît dans la soustraction. Si l'on pose :

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathsf{X}} &:= -\tfrac{1}{2}\,E_{vv} + \tfrac{1}{2}\,F_{uv},\\
\widetilde{\mathsf{X}}' &:= -\tfrac{1}{2}\,F_{uv} + \tfrac{1}{2}\,G_{uu},
\end{aligned}$$

on vérifie aisément alors que :

$$\begin{aligned}
\textsf{extrinsèque} := \tfrac{1}{2}\big(x_{uv}^2 + y_{uv}^2 + z_{uv}^2\big) + \tfrac{1}{2}\big(x_{uu} x_{vv} + y_{uu} y_{vv} + z_{uu} z_{vv}\big) + \\
+ \tfrac{1}{2}\big(x_u x_{uvv} + y_u y_{uvv} + z_u z_{uvv}\big) - \tfrac{1}{2}\big(x_v x_{uvv} + y_v y_{uvv} + z_v z_{uvv}\big).
\end{aligned}$$

Identité à soi de l'être égal à lui-même. Le mauvais et plat concept d'égalité, c'est celui auquel tout le monde pense :

$$A = A,$$

et qui nous vient toujours immédiatement à l'esprit : la tautologie logique de l'assertion d'identité à soi-même, répétition immensément vide de l'être qui se déclare « être ce qu'il est et rien de plus, sinon » — raisonnons mécaniquement par l'absurde — « il ne serait plus rigoureusement égal à lui-même ».

Répétition et différence. Mais déjà la répétition est une première différence. L'« A » du premier « A », comme une initiale de ce qui subsume un genre possible du divers, ou encore, comme désignation de variable mathématique susceptible d'endosser un champ spécifique du numérique ou un domaine intangible de l'univers ensembliste zermélo-fraenkélien, ce « premier A » tout simple que nous écrivons dans un premier temps avec toute la lenteur physique d'un scribe, d'un étudiant, ou d'un élève :

$$A =$$

suspendus que nous sommes dans l'« $=$ » qui le suit, ce premier « A » quête par nature un *alter ego* et recherche aussi un « deuxième A » qui ne sera pas « premier A », et donc sera déjà un peu et d'une certaine manière un « A » autre que « A ».

Culte du signe « = ». Tel est le jeu fascinant de la *dynamique de l'égalité* : comme tous les gestes virtuoses du géomètre qui se produit en conférence et au tableau, ce signe-fétiche et merveilleux dont sont remplies nos milliers de pages de calculs est toujours *germe virtuel d'une différence et d'une nouveauté* ; il nous sert indéfiniment à propulser vers l'avant l'« irréversible-synthétique » — ce *sang* des mathématiques que Kant n'avait pas vu — et à faire rebondir inlassablement nos intuitions. Entre ces deux barres horizontales :

$$=$$

c'est en effet une boule centripète de questions possibles qui sont prises en sandwich. Et si le signe retenu par l'histoire importe peu, seule compte la *dynamique intrinsèque de l'égalité*, demandeuse insatiable d'altérité.

Renverser l'ordre des symboles. C'est pour toutes ces raisons et d'autres encore plus complexes et plus profondes que les deux règles suivantes doivent gouverner l'alchimie interne des manuscrits étoffés de calculs délicats.

Règle 1 : Donner la préséance au zéro. Ne jamais écrire : « $\mathsf{X} = 0$ », mais toujours à l'inverse :

$$0 = \text{une expression longue et complexe},$$

comme par exemple [arxiv.org/abs/0910.2861/] — excusez du peu ! — :

$$
\boxed{
\begin{aligned}
0 = \sum_{\mu=1}^{n+1} \sum_{\nu=1}^{n+1} \Big[\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\} - \\
- \tfrac{\delta_{k_1,\ell_1}}{n+2} \sum_{\ell'=1}^{n} \Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\} - \\
- \tfrac{\delta_{k_1,\ell_2}}{n+2} \sum_{\ell'=1}^{n} \Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{k_2} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\} - \\
- \tfrac{\delta_{k_2,\ell_1}}{n+2} \sum_{\ell'=1}^{n} \Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{\ell'} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{\ell'} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\} - \\
- \tfrac{\delta_{k_2,\ell_2}}{n+2} \sum_{\ell'=1}^{n} \Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{\ell'} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{k_1} \partial z_{\ell'} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\} + \\
+ \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \big[\delta_{k_1,\ell_1} \delta_{k_2,\ell_2} + \delta_{k_2,\ell_1} \delta_{k_1,\ell_2} \big] \cdot \\
\cdot \sum_{\ell'=1}^{n} \sum_{\ell''=1}^{n} \Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]} \cdot \Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell''}]} \bigg\{ \Delta \cdot \frac{\partial^4 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{\ell''} \partial \bar{t}_\mu \partial \bar{t}_\nu} - \sum_{\tau=1}^{n+1} \Delta^{\tau}_{[\bar{t}^\mu \bar{t}^\nu]} \cdot \frac{\partial^3 \Theta}{\partial z_{\ell'} \partial z_{\ell''} \partial \bar{t}^\tau} \bigg\}.
\end{aligned}
}
$$

Règle 2 : Au positif, préférer le négatif. Commencer toute addition suspendue par un signe « – » et placer volontairement les signes « – » au début des équations et des parenthèses, comme par exemple :

$$y_{xx} = -\square^1_{xx} + y_x \cdot \big(-2\,\square^1_{xy} + \square^0_{xx}\big) + (y_x)^2 \cdot \big(-\square^1_{yy} + 2\,\square^0_{xy}\big) + (y_x)^3 \cdot \square^0_{yy}.$$

L'algèbre immanente nous est inaccessible Nonobstant tout ce que le jeu dominant du *conceptuel a posteriori* aime à faire accroire, les mathématiques *sont dans leur essence même* du calcul pur. La dynamique d'égalisation n'est qu'une simple arme humaine de mobilité dans l'immobilité symbolique. Mais l'algèbre quant à elle, non locale, non temporelle et non sérielle synthétise toutes les relations possibles immanentes dans son internalité immobile inaccessible. Prenons donc l'altérisation dynamique du concept d'égalité comme le signe de notre incapacité à voir vraiment le :

$$A = A$$

absolu de l'Algèbre.

Bibliographie

[1] Académie des Sciences : *Grand prix de mathématiques*, C. R. Acad. Sci. Paris **XLIV** (1857), 793–795.

[2] Ackerman, M. ; Hermann, R. : *Sophus Lie's 1880 Transformation Group paper*, Math. Sci. Press, Brookline, Mass., 1975.

[3] Aczel, D. : *L'énigme du théorème de Fermat*, Desclée de Brouwer, Paris, 1998.

[4] Aghasi, M. ; Merker, J. ; Sabzevari, M. : *Effective Cartan-Tanaka connections on $\mathscr{C}^6$ strongly pseudoconvex hypersurfaces $M^3 \subset \mathbb{C}^2$*, arxiv.org/abs/1104.1509, 113 pp. ; annoucement to appear in the *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, autumn 2011.

[5] Albalat, M. : *Ouvrages sur le style*, Paris, 1905.

[6] Alinhac, S. ; Gérard, P. : *Opérateurs pseudodifférentiels et théorème de Nash-Moser*, Collection Savoirs Actuels, InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1991.

[7] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di mathematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, I : **39** (1901), 273–316.

[8] Amaldi, U. : *Contributo alla determinazione dei gruppi finiti dello spazio ordinario*, Giornale di mathematiche di Battaglini per il progresso degle studi nelle universita italiane, II : **40** (1902), 105–141.

[9] Arnaudiès, J.-M. : *Sur la résolution explicite des équations de degré 5, quand elles sont résolubles par radicaux*, Bull. Sci. Math. **100** (1976), 241–254.

[10] Arnaudiès, J.-M. ; Fraysse, H. : *Cours de mathématiques – 1. Algèbre*. Dunod, Paris, 1987.

[11] Arnaudiès, J.-M. ; Lelong-Ferrand, J. : *Cours de mathématiques. Tome 1. Algèbre*. Troisième édition. 1er Cycle Universitaire. Classes Préparatoires. Mathématiques. Dunod, Paris, 1977. x+534 pp.

[12] Arnol'd, V.I. : *Ordinary differential equations*. Translated from the Russian and edited by R.A. Silverman, MIT Press, Cambridge, Mass.-London, 1978.

[13] Arnol'd, V.I. : *Dynamical systems. I. Ordinary differential equations and smooth dynamical systems*, Translated from the Russian. Edited by D. V. Anosov and V. I. Arnol'd. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 1. Springer-Verlag, Berlin, 1988. x+233 pp.

[14] Audin-Lafontaine (Eds.) : *Holomorphic curves in symplectic geometry*, Progress in Mathematics, **117**, Birkhäuser, Berlin, 1994.

[15] Awane, A. ; Goze, M. : *Pfaffian systems, k-symplectic systems*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000, xiv+240 pp.

[16] Ayoub, J. : *Paolo Ruffini's contributions to the quintic*, Arch. Hist. Exact Sci. **23** (1980/81), no. 3, 253–277.

[17] Azra, J.-P. ; Bourgne, R. : *Écrits mathématiques d'Évariste Galois*, Gauthier-Villars & C[ie], Paris, 1962, 541 pp.

[18] Bachelard, G. : La connaissance approchée, Vrin, Paris, 1921.

[19] Bachelard, G. : *L'œuvre de Jean Cavaillès* (1950), 215–227.

[20] Badiou, A. : *Platon et/ou Aristote-Leibniz. Théorie des ensembles et théorie des Topos sous l'oeil du philosophe.* in [16] L'objectivité Mathématique, pp. 61–83.

[21] Badiou, A. : *De la Vie comme Nom de l'Être*, manuscrit, 1996.

[22] Badiou, A. : *L'Être et l'événement*, Paris, Le Seuil, 1990.

[23] Bailey, D. ; Borwein, J. : *Mathematics by experiment. Plausible reasoning in the 21st century*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, second edition, 2008, xi+371 pp.

[24] Bailey, D. ; Borwein, J. ; Girgensohn, R. : *Experimentation in mathematics. Computational paths to discovery*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, first edition, 2004, x+357 pp.

[25] Bao, D. ; Chern, S.-S. ; Shen, Z. : *An introduction to Riemann-Finsler geometry*. Graduate Texts in Mathematics, 200. Springer-Verlag, New York, 2000. xx+431 pp.

[26] Bardos, C. : *Historique sommaire de l'équation de Kortweg et de Vries : un exemple de l'interaction entre les mathématiques pures et appliquées*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^o 25, 1983, 14 pp.

[27] Barthes, R. : *La préparation du romain, I et II, Cours et séminaires au Collège de France (1978–1979 et 1979–1980)*, texte établi, annoté et présenté par Nathalie Léger, Seuil, Paris, 2003, 478 pp.

[28] Baudelaire, C. : *Les Fleurs du mal*, Gallimard, La Pléïade, Paris, 1975.

[29] Bayet, A. : *Les idées mortes*, Comély, Paris, 1908.

[30] Becker, O. : *Mathematische Existenz, Unterschungen zur Logik und Ontologie Mathematischen Phänomene*, Halle a. S. 1927. Paru aussi dans : Jahrbuch f. Philosophie u. phänomenologische Forschung (1927).

[31] Bell, E.T. : *Les grands mathématiciens*, traduit de l'anglais et préfacé par A. Gandillon, Payot, Paris, 1939.

[32] Berger, M. ; Gostiaux, B. : *Géométrie différentielle : variétés, courbes et surfaces*, PUF, Paris, 1987.

[33] Beth, E.W. : *L'existence en mathématiques*, conférences faites à la Sorbonne au titre des échanges franco-néerlandais (1954). Collection de Logique Mathématique, Sér. A, 10. Gauthier-Villars, Paris, 1956.

[34] Beukers, F. : *A note on the irrationality of $\zeta(2)$ and $\zeta(3)$*, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[35] Beukers, F. : *Gauss' hypergeometric function*, in : "Arithmetic and geometry around hypergeometric functions", pp. 23–42, Progress in Mathematics, Vol. 260, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[36] Bianchi, L. : *Lezioni sulla teoría dei gruppi finiti di trasformazioni*, Enrico Spoerri Editore, Pisa, 1918.

[37] de Biasi, P.-M. : *Flaubert : dynamique de la genèse*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (1988), 87–102.

[38] Bidaut, M.-F. : *Théorèmes d'existence et d'existence «en général» pour des problèmes de contrôle optimal*, Paris, Laboratoire d'Analyse Numérique, Paris 6, 1974, 18 pp.

[39] Bierman, K.-R. : *Carl Friedrich Gauß. Der "Fürst der Mathematiker" in Briefen und Gesprächen*, C.H. Beck, München, 1990.

[40] Bitbol, M. : *Cours de DEA : « Expliquer et prédire »*, Institut d'Histoire des Sciences et des Techniques, 1994–95.

[41] Bluman, G.W. ; Kumei, S. : *Symmetries and differential equations*, Applied mathematical sciences, 81, Springer-Verlag, Berlin, 1989, xiv+412 pp.

[42] Bochnak, J. ; Coste, M. ; Roy, M.-F. : *Géométrie algébrique réelle*, Ergenisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 12. Springer-Verlag, Berlin, x+373 pp.

[43] Boi, L. : *The influence of the Erlangen Program on Italian geometry, 1880–1890 : n-dimensional geometry in the works of D'Ovidio, Veronese, Segre and Fano*, Arch. Internat. Hist. Sci. **40** (1990), no. 124, 30–75.

[44] Boi, L. : *L'espace : concept abstrait et/ou physique ; la géométrie entre formalisation mathématique et étude de la nature*, pp. 65–90 in [**48**].

[45] Boi, L. : *Mannigfaltigkeit und Gruppenbegriff. Zu den Veränderungen der Geometrie im 19. Jahrhundert*, Math. Semesterber. **41** (1994), no. 1, 1–16.

[46] Boi, L. : *Le concept de variété et la nouvelle géométrie de l'espace dans la pensée de Bernhard Riemann : l'émergence d'une nouvelle vision des mathématiques et de ses rapports avec les sciences fondamentales*, Arch. Internat. Hist. Sci. **45** (1995), no. 134, 82–128.

[47] Boi, L. : *Le problème mathématique de l'espace. Une quête de l'intelligible*. Préfacé par René Thom. Springer-Verlag, Berlin, 1995, xxiv+526 pp.

[48] Boi, L. ; Flament, D. ; Salanskis, J.-M. (eds.) : *1830–1930 : A century of geometry, Epistemology, history, mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1992, viii+304 pp.

[49] Bólyai, J. : *Appendix*, Lispsiae, B.G. Teubner, 1903, 40 pp.

[50] Boniface, J. : *Hilbert et la notion d'existence en mathématiques*, Vrin, Coll. 'Mathesis', Paris, 2004.

[51] Bouligand, G. : *Les aspects intuitifs des mathématiques*, Gallimard, Paris, 1944.

[52] Bouligand, G. : *La mathématique, Science des problèmes*, Rev. génér. des Sc. **53** (1946), 118–124.

[53] Bouligand, G. : *Le déclin des absolus mathématico-logiques*, Sedes, Paris, 1950.

[54] Bouligand, G. : *Connaissance mathématique, idée de construction et d'existence*, Cong. Int. Phil. Math. Paris, Actualités Scientifiques et Industrielles, 1137, Hermann, Paris, 1951.

[55] Bouligand, G. : *Aspects courants de la recherche mathématique, indépendants de son objet*, C. R. Acad. Sci. Paris, **242** (1956), 2689–2692.

[56] Bourguignon, J.-P. : *Transport parallèle et connexions en géométrie et en physique*, dans : *1830–1930 : a century of geometry. Epistemology, history and mathematics*, L. Boi and J.-M. Salanskis Ed., Springer, Berlin, 1993, pp. 150–164.

[57] Boutroux, P. : *Sur la notion de correspondance*, Revue de Métaphysique et de morale, **12** (1904), 909–920.

[58] Boutroux, P. : *L'idéal scientifique des mathématiciens*, Alcan, Paris, 1920.

[59] Bouveresse, J. : *Le pays des possibles. Wittgenstein, les mathématiques et le monde réel*, Éditions de Minuit, Paris, 1988.

[60] Brechenmacher, F. : *Les matrices : formes de représentations et pratiques opératoires (1850–1930)*, Site expert des Écoles Normales Supérieures et du Ministère de l'Éducation Nationale, décembre 2006, 65 pp. www.dma.ens.fr/∼culturemath/

[61] Browder, F. : *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, Symposium in Pure Mathematics Dekalb IL 1974, Providence RI American mathematical society 1976, xii+628 pp.

[62] Brunschvig, L. : *La notion moderne de l'intuition*, Revue de Métaphysique et de morale **19** (1911), 145–176.

[63] Brunschvig, L. : *Les étapes de la philosophie mathématique*, Paris, 1912.

[64] Burman, H.-W. ; Neuenschwander, E. : *Die Entwicklung der Mathematik an der Universität Göttingen*, Die Geschichte der Verfassung und der Fachbereiche der Georg-August-Universität zu Göttingen, 141–159, Göttinger Universitätsschr. Ser. A Schr., 16, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1994.

[65] Bryant, R.L. ; Chern, S.S. ; Gardner, R.B. ; Goldschmidt, H.L. ; Griffiths, P.A. : *Exterior differential systems*, Mathematical Sciences Research Institute Publications, 18, Springer-Verlag, New York, 1991, viii+475 pp.

[66] Cameron, P.J. : *Permutation groups*, London Mathematical Society Student Texts, 45, Cambridge University Press, Cambridge, 1999, x+220 pp.

[67] Campbell, J.E. : *Introductory treatise on Lie's theory of finite continuous transformation groups*, The Clarendon Press, Oxford, 1903.

[68] do Carmo, M.P. : *Differential geometry of curves and surfaces*, Translated from the Portuguese, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976, viii+503 pp.

[69] do Carmo, M.P. : *Riemannian geometry*, Translated from the second Portuguese edition by Francis Flaherty. Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser, Boston, 1992, xiv+300 pp.

[70] Cartan, É. : *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff*, Ann. Éc. Norm. **16** (1899), 239–332 ; [Œuvres compl. II, 1, 303–396.

[71] Cartan, É. : *Sur l'équivalence des systèmes différentiels*, C. R. Acad. Sc. **135** (1902), 781–783.

[72] Cartan, É. : *Sur les équations de la gravitation d'Einstein*, J. Math. pures et appl. **1** (1922), 141–203 [Œuvres compl. III, 1, 549–612]

[73] Cartan, É. : *Sur un théorème fondamental de M. H. Weyl*, J. Math. pures et appl. **2** (1923), 167–192 [Œuvres compl. III, 1, 633–658].

[74] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion projective*, Bull. Soc. Math. France **52** (1924), 205–241.

[75] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Éc. Norm. **40** (1923), 325–412 [Œuvres compl. III, 1, 659–746].

[76] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Éc. Norm. **41** (1924), 1–25 [Œuvres compl. III, 1, 799–823].

[77] Cartan, É. : *Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée*, Ann. Éc. Norm. **42** (1925), 17–88 [Œuvres compl. III, 2].

[78] Cartan, É. : *La géométrie des espaces de Riemann*, Mémorial des sciences mathématiques, fascicule IX, Paris, Gauthier-Villars, 1925.

[79] Cartan, É. : *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, 1928.

[80] Cartan, É. : *Notice historique sur la notion de parallélisme absolu*, Math. Ann. **102** (1930), 698–706.

[81] Cartan, É. : *Sur la théorie des systèmes en involution et ses applications à la relativité*, Bull. Soc. Math. France **59** (1931), 88–118.

[82] Cartan, É. : *Les problèmes d'équivalence* (Séminaire de Math., 4^e année, 1936–37), Œuvres complètes, II, 1311–1334, Gauthier-Villars, Paris, 1953.

[83] Cartan, É. : *La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle*, Paris, Gauthier-Villars, 1937.

[84] Cartan, É. : *Les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques*, Actualités Scientifiques et Industrielles, no. 994, Hermann, Paris, 1945.

[85] Cartan, É. : *Leçons sur la géométrie des espaces de Riemann*, Paris, Gauthier-Villars, deuxième édition revue et augmentée, 1951.

[86] Cartan, É. : *Notice sur les travaux scientifiques*, Œuvres, Tome 1, Vol. 1, Paris, Gauthier-Villars, 1952.

[87] Cartan, É. : *Œuvres complètes*, publiées avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique, Gauthier-Villars, Paris, 6 volumes, 1952–53.

[88] Cartan, H. : *Formes différentielles : applications élémentaires au calcul des variations et à la théorie des surfaces*, Paris, Hermann, 1967.

[89] Cartier, P. : *La folle journée, de Grothendieck à Connes et Kontsevich*, *Évolution des notions d'Espace et de Symétrie*, Fetschrift for the 40^{th} anniversary of the IHÉS, Publications de l'IHÉS, Bures-sur-Yvettes, 1998.

[90] Cartier, P. : *Théories de Galois géométriques*, Prépublication IHES/M/08/62, décembre 2008.

[91] Castonguay, C. : *Meaning and existence in Mathematics*, Library of exact Philosophy, Vol. 9, Springer Verlag, Berlin, 1924.

[92] Cauchy, A.-L. : *Mémoire sur le nombre des valeurs qu'une fonction peut acquérir*, in Œuvres complètes, Paris, Gauthiers-Villars, (2) I, 64–90, 1882–1938.

[93] Cavaillès, J. : *Réflexions sur le fondement des mathématiques*, Communication au Travaux du IX^e Congrès de philosophie (Congrès Descartes), Actualités Scientifiques et Industrielles, **535**, Hermann, Paris, 1935.

[94] Cavaillès, J. : *Méthode axiomatique et formalisme* Actualités Scientifiques et Industrielles, **608**, **609** et **610**. Hermann, Paris, 1938.

[95] Cavaillès, J.; Lautman, A. : *La pensée mathématique*, Communications de Jean Cavaillès et d'Albert Lautman à la Société française de Philosophie, 4 Février 1939.

[96] Cavaillès, J. : *Oeuvres complètes de Philosophie des Sciences*, Hermann, Paris, 1994.

[97] Caveing, M. : *Le problème des objets dans la pensée mathématique*, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2004, 286 pp.

[98] Cendrars, B. : *Trop c'est trop*, Équateur, Denoël, Paris, 1985.

[99] Chaperon, M. : *Autour du théorème de Poincaré-Birkhoff*, in Séminaire Sud-Rhodanien de géométrie, Collection « Travaux en cours », VI, Hermann, Paris, 1987, 1–10.

[100] Chapman, R. : *Evaluating* $\zeta(2)$, www.secamlocal.ex.ac.uk/~rjc/etc/zeta2.pdf

[101] Char, R. : *Recherche de la base et du sommet*, *III Grands astreignants ou la conversation souveraine*, *La barque à la proue altérée*, *Oeuvres complètes, Gallimard, La Pléïade, Paris, 1983, p. 719.*

[102] Charon, J.E. : *15 Leçons sur la relativité générale, avec une introduction au calcul tensoriel*, Genève, Kister, 1963.

[103] Châtelet, G. : *Les enjeux du mobile*, Seuil, Coll. Des Travaux, Paris, 1993.

[104] Châtelet, G. : *Vivre et penser comme des porcs. De l'incitation à l'envie et à l'ennui dans les démocraties-marchés*, Exils, Coll. Essais, Paris, 1998.

[105] Chern, S.-S. : *Finsler geometry is just Riemannian geometry without the quadratic restriction*, Notices of the Amer. Math. Soc. **43** (1996), no. 9, 959–963.

[106] Chevalley, C. : *Albert Lautman et le souci logique*, Revue d'Histoire des Sciences, **40** (1987), no. 1, 47–77.

[107] Chihara, C.S. : *Existence en mathématiques*, Collection Philosophie-Mathématiques, Irem Paris Nord, 1986, 24 pp.

[108] Chihara, C.S. : *Constructubility and Mathematical Existence*, Clarendon Press, Oxford, 1990.

[109] Chirka, E.M. : *Complex analytic sets*, Mathematics and its applications (Soviet Series), **46**. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1989. xx+372 pp.

[110] Chorlay, R. : *Mathématiques globales : l'émergence du couple local/global dans les théories géométriques (1851–1953)*, préface de C. Houzel, à paraître dans la collection « Sciences dans l'Histoire », Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 2009.

[111] Christoffel, B. : *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke* 2^{ten} *Grades*, Borchardt J. LXX. 46–70. 1870 (1870).

[112] Clifford, W.K. : *The postulate of science of space*, 1873 ; reproduit dans [**342**], pp. 552–567.

[113] Clifford, W.K. : *On the hypotheses which lie at the bases of geometry*, pp. 55–69 in Mathematical papers, MacMillan, London, 1882.

[114] Conférences EDP : *Conférences internationales des Sciences mathématiques, organisées par l'Université de Genève ; série consacrée aux Équations aux dérivées partielles ; conditions propres à déterminer les solutions*, L'Enseignement Mathématique, **35** (1936), 5–151.

[115] Colette, J.-P. : *Histoire des mathématiques*, Vuibert, Paris, 1979.

[116] Connes, A. : *La pensée d'Évariste Galois et le formalisme moderne*, téléchargeable sur site.

[117] Connes, A. : *Entretien*, La Recherche **332** (2000),109–111.

[118] Costermans, C. ; Enjalbert, J.-Y. ; Minh, H.N. ; Petitot, M. : *Structure and asymptotic expansion of multiple harmonic sums*, ISSAC'05, 100–107 (electronic), ACM, New York, 2005.

[119] Dahan-Dalmedico, A. : PEIFFER, J. : *Une histoire des mathématiques. Routes et dédales*, Point/Science, Paris, 1986.

[120] Darboux, G. : *Sur le problème de Pfaff*, Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, **VI** (1882), no. 1, 14–36 et 49–68.

[121] Darboux, G. : *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, 4 vol., Gauthier-Villars, Paris, 1887–1896.

[122] Darrigol, O. : *Numbers and measure : Hermann von Helmholtz at the crossroads of mathematics, physics, and psychology*, Stud. Hist. Phil. Sci. **34** (2003), 515–573.

[123] Darrigol, O. : *A Helmholtzian approach to space and time*, Stud. Hist. Phil. Sci. **38** (2007), 528–542.

[124] Debever, R. (ed.) : *Élie Cartan — Albert Einstein. Letters on absolute parallelism 1929–1932*, French and English transl. by J. Leroy and J. Ritter, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1979.

[125] Dedekind, R. : *Bernhard Riemann's Lebenslauf*, in [**368**], pp. 541–558.

[126] Deleuze, G. : *Différence et répétition*, Presses Universitaires de France, Paris, 1972.

[127] Deleuze, G. : *L'image-mouvement*, Minuit, Paris, 1983.

[128] Demailly, J.-P. : *Analytic and algebraic geometry*, lecture notes available at : `http ://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~demailly`.

[129] Desanti, J.-T. : *Les idéalités mathématiques*, Le Seuil, Paris, 1968.

[130] Desanti, J.-T. : *Préface à la réédition de* [**63**] *chez Albert Blanchard*, Paris, 1993, I–IX.

[131] Descartes, R. : *Principes de la Philosophie, lettre-préface*.

[132] Diderot, D. : *Pensées sur l'interprétation de la nature*, Opuscule de 1754.

[133] Dixon, J.D. ; Mortimer, B. : *Permutation groups*, Graduate Texts in Mathematics, 163, Springer-Verlag, New York, 1996, xii+346 pp.

[134] Dombrowski, P. : *150 years after Gauss' « disquisitones generales circa superficies curvas »*, Astérisque **62**, Société mathématique de France, 1979.

[135] Edwards, H. : *Galois theory*. Graduate Texts in Mathematics, 101. Springer-Verlag, New York, 1984. xiii+152 pp.

[136] Ehrhardt, C. : *Le mémoire de Galois sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux (1831)*, Bibnum, 2009, 15 pp.

[137] Einstein, B. : *Zur allgemeinen Relativitätstheorie*, Sitzungsberichte der Akademie der Wiss. zu Berlin 1915 (1915), 778–786.

[138] Einstein, A. : *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*, Annalen der Physik **49** (1916), 769–822. Traduction française dans : [**141**], pp. 179–227.

[139] Einstein, A. : *Auf die Riemann-Metrik und den Fern-Parallelismus gegründete einheitliche Feld theorie*, Math. Ann. **102** (1930), 685–697.

[140] Einstein, A. : *Théorie unitaire du champ physique*, 4 exposés à l'IHP en novembre 1929 rédigés par Alexandre Proca, Ann. Inst. Poincaré **1** (1930), 1–24.

[141] Einstein, A. : *Œuvres choisies, Relativités I, Relativités restreinte et générale*, Textes choisis et présentés par Françoise Balibar, Olivier Darrigol, Bruno Jech et John Stächel, Le Seuil/Éditions du CNRS, Paris, 1993

[142] Einstein, A. : *Œuvres choisies, Relativités II*, Le Seuil/Éditions du CNRS, Paris, 1993

[143] Eisenhart, L.P. : *Spaces admitting complete absolute parallelism*, 1932.

[144] Eisenhart, L.-P. : *Continuous groups of transformations*, Dover Publication, Inc., New York, 1933, ix+301 pp.

[145] Encyclopédie philosophique universelle ; *Les notions philosophiques*, Paris, Presses Universitaires de France, 1990.

[146] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Erster Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xii+638 pp. (1888). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[147] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, viii+559 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[148] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xxix+836 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[149] Epstein, D. ; Levy, S. : *Experimentation and proof in mathematics*, Notices of the Amer. Math. Soc. **42** (1995), no. 6, 670–674.

[150] Escofier, J.-P. : *Galois theory*, transl. L. Schneps, Graduate Texts in Mathematics, 204, Springer-Verlag, Berlin, 2001, xiv+280 pp.

[151] van den Essen, A. : *Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture*, Progress in Mathematics, 190, Birkhäuser Verlag, Basel, 2000, xviii+329 pp.

[152] Euler, L. : *De summis serierum reciprocarum*, Comm. Acad. Sci. Petrop. **7** (1734/1735), 123–134. Opera Omnia I :14, 1924, pp. 73–86.

[153] Euler, L. : *Recherches sur la courbure des surfaces*, Commentatio 333 indicis Enestroemiani, Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin **16** (1760), 1767, pp. 119–143.

[154] Farwell, R. ; Knee, C. : *The geometric challenge of Riemann and Clifford*, pp. 98–106 in [**48**].

[155] Favard, J. : *Élaboration des notions de courbe et de surface en géométrie différentielle*, Congrès International de Philosophie des Sciences, (Paris, 1949), Actualités Scientifiques et Industrielles **1137**, Hermann, Paris, 1951, 37–49.

[156] Fine, B. : Rosenberger, G. : *The fundamental theorem of algebra*, Undergraduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 1997. xii+208 pp.

[157] Fischler, S. : *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...]*, Séminaire Bourbaki, 55e année, 2002–2003, no 910, Astérisque **294** (2004), 27–62.

[158] Flament, D. : *La Lineale Ausdehnungslehre (1844) de Hermann Günther Grassmann*, pp. 205–221 in [**48**].

[159] Flament, D. : *Histoire des nombres complexes. Entre algèbre et géométrie*, CNRS Éditions, Paris, 2003, 501 pp.

[160] Flament, D. ; Kouneiher, J. ; Nabonnand, P. ; Szczeciniarz, J.-J. : *Géométrie au XXème siècle, 1950–2000. Histoire et horizons*, Hermann Éditeurs, Paris, 2005, 424 pp.

[161] Forsyth, A.R. : *Theory of differential equations. Part I. Exact equations and Pfaff's problem*, Cambridge University Press, 1890.

[162] Fraenkel, A. : *Sur la notion d'existence dans les mathématiques*, L'Enseignement Mathématique, **34** (1935), 18–32.

[163] Fraenkel, A. : *Zum Diagonal-verfahren Cantors*, Fundamenta Mathematicæ, **25** (1935), 45–50.

[164] Freudenthal, H. : *Riemann, Georg Friedrich Bernhard*, in *Dictionary of scientific biography*, vol. 11, New York, 447–456.

[165] Freudenthal, H. : *Neuere Fassungen des Riemann-Helmholtz-Lieschen Raumproblems*, Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 374–405 (1956).

[166] Freudenthal, H. : *Die Grundlagen der Geometrie um die Wende des 19. Jahrhunderts*, Semesterberichte Münster **7** (1960/61), 2–25.

[167] Freudenthal, H. : *The main trends in the foundations of geometry in the 19th century*, pp. 613–622 in Proceedings of the 1960 international congress for logic, methodology and philosophy of science, Stanford, California, Aug. 24–Sept. 2, 1960, Stanford Univ. Press.

[168] Freudenthal, H. : *Lie groups in the foundations of geometry*, Advances in Mathematics **1** (1964), no. 2, 145–190.

[169] Frobenius, G. : *Über das Pfaffsche Problem*, J. für die reine u. angew. Math. **82** (1877), 230–315 [Abhandlungen 1, 249–334].

[170] Gabrielov, A.M. : *Complements of subanalytic sets and existential formulas for analytic functions*, Invent. Math. **125** (1996), 1–12.

[171] Galois, É. : *Mémoire sur la condition de résolubilité des équations algébriques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées.

[172] Galois, É. : *Œuvres mathématiques*, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, Gauthier-Villars, Paris, 1897. Deuxième édition revue et corrigée, 1951.

[173] Gantmacher, F. : *Théorie des matrices*, traduit du russe par C. Sarthou, 2 Vol., Paris, Dunod, 1966.

[174] Gardner, R.B. : *The method of equivalence and its applications*, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics **58** (SIAM, Philadelphia, 1989), 127 pp.

[175] Gauss, C.F. : *Werke*, 14 vols. Leipzig, Teubner, 1863–1933. Réédité en 12 vols, Hildesheim, Olms, 1981.

[176] Gauss, C.F. : *Disquisitiones arithmeticæ*, tome I des Werke, seconde impression, 1870. Traduction en français par Poullet-Delisle, Courcier, Paris, 1807. Réimpression Blanchard, Paris, 1953.

[177] Gauss, C.F. : *Another proof of the theorem that every integral rational algebraic function of one variable can be resolved into real factors of the first or second degree*, 1815, www.monad.me.uk/misc/gauss.pdf

[178] Gauss, C.F. : *Allgemeine Auflösung der Aufgabe : Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird*. Astron. Abh. (1825), 1–30. Werke IV, 189–216.

[179] Gauss, C.F. : *Neue allgemeine Untersuchungen über die krummen Flächen*. Manuscrit, 1825, Werke VIII, 408–442.

[180] Gauss, C.F. : *Anzeige : Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gött. Gel. Anz. (1827), 1761–68. Werke IV, 341–47.

[181] Gauss, C.F. : *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Comment. soc. Gött. **6** (1828), 99–146. Werke IV, 217–58. Traduites en français par M. E. Roger, Albert Blanchard, Paris, 1967.

[182] Gilain, C. : *Sur l'histoire du théorème fondamental de l'algèbre : théorie des équations et calcul intégral*, Arch. Hist. Exact Sci. **42** (1991), no. 2, 91–136.

[183] Gilson, E. : *L'Être et l'Essence*, Vrin, Paris, 1948.

[184] Gödel, K. : *What is Cantor's continuum problem* ?, American Mathematical monthly, **54** (1947), 515–525.

[185] Goldstein, C. ; Ritter, J. : *The varieties of unity : sounding unified theories 1920–1930*, in : A. Ashtekar et al. (eds.) *Revisiting the Foundations of Relativistic Physics*, Kluwer, Dordrecht, 2003, pp. 93–149.

[186] Golubitski, M. : *Primitive actions and maximal subgroups of Lie groups*, J. Differential Geom. **7** (1972), 175–191.

[187] Gönner, H.F. : *On the history of unified field theories*, Living reviews in relativity **7** (2004), no. 2 : `www.livingreviews.org/lrr-2004-2`

[188] González López, A. ; Kamran, N. ; Olver, P.J. : *Lie algebras of vector fields in the real plane*, Proc. London Math. Soc. **64** (1992), no. 2, 339–368.

[189] Gorbatsevich, V.V. ; Onishchik, A.L. ; Vinberg, E.B. : *Foundations of Lie theory and Lie transformation groups*, Encyclopædia of mathematical sciences, vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[190] Goze, M. ; Khakimdjanov, Y. : *Nilpotent Lie algebras*, Mathematics and its Applications, 361, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 1996, xvi+336 pp.

[191] Granger, G.-G.. : *Formes, opérations, objets*, Vrin, Mathesis, Paris, 1994.

[192] Grassmann, H.G. : *La science de la grandeur extensive, La Lineale Ausdehnungslehre*. Traduit de l'allemand par Dominique Flament et Bernd Bekemeier, avec une préface de Flament. Collection Sciences dans l'Histoire. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1994. 52+xvi+206+xlviii pp.

[193] Gray, J. : *On the history of the Riemann mapping theorem*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 34 (1994), 47–94.

[194] Griffiths, P.A. : *Poincaré and Algebraic Geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 147–159.

[195] Gröbner, W. : *Die Lie-Reihen und ihre Anwendungen*, Math. Monog. Veb Deutschen Verlag der Wissenschaften, 1960.

[196] Gromov, M. : *Interview : Mikhaïl Gromov*, dans : Mathématiques de 1950 à 2000, J.-P. Pier Éditeur, p. 1213.

[197] Grothendieck, A. : *Récoltes et Semailles*, *Prélude en quatre mouvements*, *Promenade à travers une œuvre — ou l'enfant et la mère*, Montpellier, 1984.

[198] Gunning, R. : *Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables*, 3 vol., Wadsworth & Brooks/Cole, I : Function theory, xx+203 pp., II : Local theory, +218 pp, III : Homological theory, +194 pp., 1990.

[199] Hadamard, J. : *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique*, Traduit de l'anglais par Jacqueline Hadamard, Librairie Scientifique Albert Blanchard, Paris, 1959.

[200] Hagège, C. : *Dictionnaire amoureux des langues*, Plon/Odile Jacob, Paris, 2009, 729 pp.

[201] Hannequin, A. : *La preuve ontologique cartésienne défendue contre la critique de Leibniz*, Revue de Métaphysique et de Morale, **4** (1896), 433–458.

[202] Hawkins, T. : *Jacobi and the birth of the theory of Lie groups*, Arch. Hist. Exact Sci. **42** (1991), 187–278.

[203] Hawkins, T. : *The birth of Lie's theory of groups*, The mathematical intelligencer **16** (1994), no. 2, 6–17.

[204] Hawkins, T. : *Emergence of the theory of Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[205] Hawkins, T. : *Frobenius, Cartan, and the problem of Pfaff*, Arch. Hist. Exact Sci. **59** (2005), 381–436.

[206] Hegel, G.W.F. : *La Science de la Logique*, Trad. P.J. Labarrière et G. Jarczyk, Aubier Montaigne, Paris, 1972.

[207] Hegel, G.W.F. : *Leçons sur l'histoire de la philosophie. Introduction, bibliographie, philosophie orientale*, Traduction de Gilles Marmasse, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2004, 207 pp.

[208] Hegel, G.W.F. : *Qui pense abstrait ?* [Wer denkt abstract ?], manuscrit, 1807. Édition bilingue accompagnée d'une notice et d'un essai sur l'exotérisme hégélien, par Ari Simhon, Hermann Éditions, Paris, 2007, 176 pp.

[209] Heidegger, M. : *La thèse de Kant sur l'être*, in *Questions II*, pp. 375–422, Gallimard, collection «Tel», Paris, 1996.

[210] Heidegger, M. : *Platon Lehre von der Warheit*, Francke A. G., Berne, 1947 ; trad. André Préau, *La doctrine de Platon sur la vérité*, in *Questions II*, pp. 423–468, Gallimard, collection «Tel», Paris, 1996.

[211] Heinzmann, G. : *Helmholtz and Poincaré's considerations on the genesis of geometry*, pp. 245–249 in [**48**].

[212] Heinzmann, G. : *The foundations of geometry and the concept of motion : Helmholtz and Poincaré*, Science in Context **14** (2001), 457–470.

[213] Helgason, S. : *Sophus Lie, the mathematician*.

[214] Helmholtz, H. von : *Über die Thatsälichen Grundlagen der Geometrie*, in Wisssenschaftliche Abhandlungen, vol. II, pp. 610–617.

[215] Helmholtz, H. von : *Über die Thatsachen, die der Geometrie zum Grunde legen*, Nachriten von der königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, no. 9, 3 June 1868. Wisssenschaftliche Abhandlungen, vol. II, pp. 618–639. English translation in [**218**], pp. 39–58.

[216] Helmholtz, H. von : *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrische Axiome*, in Vörtrage und Reden, vol. II, pp. 1–31. English translation in [**218**], pp. 1–26.

[217] Helmholtz, H. von : *Zählen und Messen, erkenntnistheoretisch betrachtet*, Philosophische Aufsätze Eduard Zeller zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum gewidmet, Leipzig, Fues Verlag, 1887, pp. 17–52. English translation in [**218**], pp. 72–103.

[218] Helmholtz, H. von : *Epistemological writings*, The Paul Hertz/Moritz Schlick centenary edition of 1921 with notes and commentary by the editors M.F. Lowe, S. Cohen and Y. Elkana, Boston studies in the philosophy of science, Reidel, Dordrecht, 1977, xxxvii+205 pp.

[219] Henriot, J. : *Article « Existence » dans l'Encyclopédie Philosophique Universelle*, Les Notions Philosophiques, Paris, Presses Universitaires de France, 1990.

[220] Herbart, J.F. : *Über philosophisches Studien*, pp. 227–296 in Sammtliche Werke in chronologischer Reihenfolge, herausgegegen von Karl Kehrbach und Otto Flügel, Erstdruck Langensalza 1899–1912, 19 vols. ; Scientia Verlag, Aalen, 1964.

[221] Hilbert, D. : *Grundlagen der Geometrie*, B.G. Teubner, Leipzig, 1899.

[222] Hilbert, D. : *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes*, Paris, Gauthier-Villars, traduction M.I. Laugel, 1902, 59 pp ; réédition Gabay, 1990.

[223] Hilbert, D. : *Über das Dirichlet'sche Princip*, Jahresbeicht der Deutschen Mathematik Vereinigung, **VIII** (1900), 184–188. Trad. M.I. Laugel, Nouvelles Annales de Mathématiques, 3^e série, **XIX** (1900), 337–344.

[224] Hilbert, D. : *Pensée axiomatique*, L'Enseignement Mathématique, **20** (1905), pp. 122–136.

[225] Hitchin, N. : *Projective geometry*, lecture notes, b3 course 2003, www.oxford.co.uk.

[226] Hörmander, L. : *L^2 estimates and existence theorems for the $\overline{\partial}$ operator*, Acta Mathematica, **113**, (1965), 89–152.

[227] Hörmander, L. : *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, Van Nostrand Company, New York, 1966.

[228] Hörmander, L. : *On the existence and the regularity of linear pseudodifferential equations*, L'Enseignement Mathématique, **17** (1971), 99–163.

[229] Hörmander, L. : *Implicit function theorems*, Lecture notes, Stanford Univ., 1977.

[230] Houzel, C. : *La géométrie algébrique. Recherches historiques*. Préface de Roshdi Rashed, Librairie scientifique Albert Blanchard, Paris, 2002, v+365 pp.

[231] Hughston, L.P. ; Tod, K.P. : *An introduction to general relativity*, London Mathematical Society Student Texts, No. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[232] Hulpke, A. : *Constructing transitive permutation groups*, J. Symbolic Computation.

[233] Hyppolite, J. : *Logique et existence*, Presses Universitaires de France, Paris, 1991.

[234] Imbert, C. : *Phénoménologies et langues formulaires*, Presses Universitaires de France, Paris, 1992.

[235] Iwasawa, H. : *Gaussian integral puzzle*, Notices of the Amer. Math. Soc. **56** (2009), no. 2, 38–41.

[236] Jordan, C. : *Commentaire sur Galois*, Clebsch. Ann. I. 142–160 (1869).

[237] Jordan, C. : *Traité des substitutions et des équations algébriques*, Gauthier-Villars, Paris, 1870. Nouveau tirage. Paris : Librairie Scientifique & Technique Albert Blanchard XVIII, 667 pp., 1957.

[238] Kant, I. : *Critique de la raison pure*, trad. en français par A. Tremesaygues et B. Pacaud, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.

[239] Kiernan, M. : *The development of Galois theory from Lagrange to Artin*, Archive Hist. Exact Sciences, 1972, 40–154.

[240] Killing, W. : *Die Zusammensetzung der stetigen endlichen Transformationsgruppen. Vierter Theil*, Math. Ann. **36** (1890), 161–189.

[241] Klein, F. : *Zur nicht-Euklidischen Geometrie*, in Gesammelte mathematische Abhandlungen (3 vols., 1921–1923), Vol. 1, pp. 352–383.

[242] Klein, F. : *Riemann und seine Bedeutung für die Entwicklung der modernen Mathematik*, in Ges. Math. Abh., Bd. 3, Berlin, J. Springer, IX u. 774 u. 36 S., 1923.

[243] Klein, F. : *Conférence faite à la Société de philosophie de Vienne le 14 Octobre 1905*.

[244] Klein, F. : *On Riemann's theory of algebraic functions and their integrals*, A Supplement to the Usual Treatises, translated by F. Hardcastle, Dover, New York, 1963.

[245] Klein, F. : *Le Programme d'Erlangen : considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes*, traduit par H.E. Padé ; préface de J. Dieudonné ; postface du P.F. Russo, Paris, Gauthier-Villars, 1974

[246] Kline, M. : *Mathématiques, la fin de la certitude*, Trad. J.-P. Chrétien-Goni et C. Lazzeri, Christian Bourgois, Paris, 1980.

[247] Knapp, A. : *Lie Groups. Beyond an Introduction*. Second edition. Progress in Mathematics, 140. Birkäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2002. xviii+812 pp.

[248] Kobayashi, S. : *Transformation groups in differential geometry*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 70, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New-York, 1972.

[249] Kobayashi, S. ; Nomizu, K. : *Foundations of differential geometry*, I, Interscience publishers, John Wiley & Sons, New York, 1963. xi+329 pp.

[250] Krantz, S.G. : *Function theory of several complex variables*, Second Edition, The Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Pacific Grove, CA, 1992, xvi+557 pp.

[251] Kraus, A. : *Théorie de Galois. Cours accéléré de DEA*, Université de Paris 6, www.institut.math.jussieu.fr/dea/aa/dea01-02/Galois.pdf

[252] Kreisel, G. : *Informal rigour and completeness proofs*, in : *Problems in the Philosophy of Mathematics*, I. Lakatos ed. North Holland, 1967, pp. 138–185.

[253] Kreyszig, E. : *Introduction to differential geometry and Riemannian geometry*, University of Toronto Press, 1968.

[254] Kreyszig, E. : *On surface theory in E^3 and generalizations*, Expo. Math. **12** (1994), 97–123.

[255] Lafontaine, J. : *Introduction aux variétés différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, EDP Sciences, 1996, 299 pp.

[256] Lagrange, J.-L. : *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*, Mémoires de l'Académie de Berlin de 1770–1771. Œuvres, tome III, Section II, pp. 205–424, Gauthier-Villars, Paris, 1867–1912.

[257] Lagrange, J.-L. : *Sur l'intégration des équations à différences partielles du permier ordre*, Nouv. Mém. Acad. des Sci. et Belles-Lettres Berlin, 1772, (1774), 353–372.

[258] Lang, S. : *Analysis II*, Addison Wesley, 1969.

[259] Lang, S. : *Real analysis*. Second edition, Addison-Wesley, xv+533 pp, 1983.

[260] Lang, S. : *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.

[261] Languereau, **H. ;** Merker, C. : *Le mémoire de Gauss sur les surfaces courbes et la naissance de la géométrie différentielle intrinsèque*, Publications de l'IREM de Besançon, Presses Univ. de Franche-Comté, 2004, iii+82 pp.

[262] Largeault, J. : *Intuition et intuitionisme*, Vrin, Mathesis, Paris, 1993.

[263] Laugwitz, D. : *Bernhard Riemann, 1826–1866. Turning points in the conception of mathematics*, traduit en anglais par Abe Shenitzer, Birkhäuser, Basel, 1999.

[264] Lautman, A. : *Mathématique et réalité*, Communication au Congrès International de Philosophie Scientifique de Paris (1935), Hermann, Actualités Scientifiques et Industrielles, Paris, 1936.

[265] Lautman, A. : *De la réalité inhérente aux théories mathématiques*, Communication au IX^e Congrès International de Philosophie, Paris, 1937.

[266] Lautman, A. : *Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits*, Union générale d'Éditions, Coll. 10/18, Paris, 1977. Écrits rassemblés par M. Loi. Préface de M. Loi, de J. Dieudonné et de O. Costa de Beauregard.

[267] Lautman, A. : *Les mathématiques, les idées et le réel physique*, présentation de Jacques Lautman, étude de Fernando Zalamea, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2006, 315 pp.

[268] Lebesgue, H. : *Sur le problème de Dirichlet*, Rendiconti del Circolo di Matematico di Palermo, **24** (1907), pp. 371–402.

[269] Lebesgue, H. : *Conditions de régularité, conditions d'irrégularité, conditions d'impossibilité dans le problème de Dirichlet*, C. R. Acad. Sci. Paris, **178** (1924), 349–354.

[270] Lebesgue, H. : *Sur l'existence des plans tangents aux surfaces applicables sur le plan*, Fund. Math. **25** (1935), 157–162.

[271] Lefebvre, E. : *Structure et objet de l'Analyse Mathématique*, Gauthier-Villars, Paris, 1958.

[272] Legendre, A-.M. : *Eléments de géométrie*, Firmin Didot, Paris, 1817.

[273] Leibniz, G.W. : *La monadologie*.

[274] Lelong, P. : *Quelques remarques sur la recherche et la création des objets souples en analyse mathématique*, dans : *Les grands systèmes des sciences et de la technologie*, Paris, Masson, 1994, pp. 461–475.

[275] Leray, J. : *Les problèmes non linéaires*, L'Enseignement Mathématique, **35** (1936), 139–151.

[276] Levi-Civita, T. : *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e consequente specificazione geometrica della curvatura riemanniana*, Rend. Circ. Mat. Palermo **42** (1917), 173–204.

[277] Levi-Civita, T. ; Ricci, G. : *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications*, Math. Ann. **54** (1901), 125–201.

[278] Lévy, P. ; Mandelbrojt, S. ; Malgrange, B. : *La vie et l'oeuvre de Jacques Hadamard*, Monographies de l'Enseignement Mathématique, $n^o 16$, Genève, 1967.

[279] Libermann, P. : Article *Géométrie différentielle* dans J. Dieudonné (Ed.), *Abrégé d'histoire des mathématiques*, 1700–1900, Paris, Hermann, 1978.

[280] Libermann, P. : *Élie. Cartan (1869–1951)*, Travaux mathématiques, Fasc. VIII, 115–158. Sém. Math. Luxembourg, Centre Univ. Luxembourg, 1996.

[281] Lie, S. : *Über Gruppen von Transformationen*, Göttinger Nachrichten 1874 (1874), 529–542. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 1–8 [3 December 1874].

[282] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen III. Bestimmung aller Gruppen einer zweifach ausgedehnten Punktmannigfaltigkeit*, Archiv for Mathematik **3** (1878), 93–128. Reprinted in *Abhandlungen* **5**, 78–133.

[283] Lie, S. : *Theorie der Transformationsgruppen*, Math. Ann. **16** (1880), 441–528 ; translated in English and commented in : [**2**].

[284] Lie, S. : *Bemerkungen zu v. Helmholtzs Arbeit : Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Leipz. Ber. 1886, Supplement, abgeliefert 21. 2. 1887, S. 337–342. Vorgelegt in der Sitzung vom 25. 10. 1886. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 374–379.

[285] Lie, S. : *Über die Grundlagen der Geometrie. I. Abhandlung.* Leipz. Ber. 1890, Heft II, abgeliefert 5. 11. 1890, S. 284–321. Vorgelegt in der Sitzung vom 7. 7. 1890. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 380–413.

[286] Lie, S. : *Über die Grundlagen der Geometrie. II. Abhandlung.* Leipz. Ber. 1890, Heft III, abgeliefert 26. 2. 1891, S. 355–418. Vorgelegt in der Sitzung vom 20. 10. 1890. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 414–468.

[287] Lie, S. : *Bemerkungen zu neueren Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie*, Leipz. Ber. 1892, Heft I, abgeliefert 27. 4. 1892, S. 106–114. Vorgelegt in der Sitzung vom 1. 2. 1892.

[288] Lie, S. : *Sur les fondements de la géométrie*, Comptes Rendus de l'Académie de Paris **114** (1892), 461–463. *Gesammelte Abhandlungen*, Vol II, 477–479.

[289] Lie, S. : *Influence de Galois sur le développement des mathématiques*, publié dans *Le centenaire de l'École Normale* 1795-1895, Hachette, 1895.

[290] Lie, S. : *Gesammelte Abhandlungen, Band 2, Teil 1*, Herausgegeben von Friedrich Engel und Poul Heegaard, Geometrische Abhandlungen, Abteilung 2, Teil 1, Leipzig : B. G. Teubner, Oslo : H. Aschehoug & Co. VIII, 479 S, 1935.

[291] le Lionnais, F. : *Les grands courants de la pensée mathématique*, Cahiers du Sud, Paris, 1948.

[292] Lobachevskiĭ, N.I. : *Geometrical researches on the theory of parallels*, translated in English by G.B. Halsted, Chicago, Open court publishing company, 1914, 50 pp.

[293] Lojasiewicz, S. ; Zehnder, E. : *An Inverse Function Theorem in Fréchet Spaces*, J. Funct. Analysis, **33** (1979), 165–174.

[294] Lovelock, D. ; Rund, H. : *Tensors, differential forms, and variational principles*, John Wiley & Sons, New York, 1975.

[295] Lusin, N. : *Les ensembles analytiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1930.

[296] Lusin, N. : *Sur les ensembles toujours de première catégorie*, Fund. Math. **21** (1939), pp. 114–126.

[297] Macdonald, I.G. : *Symmetric functions and Hall polynomials*. Second edition. With contributions by A. Zelevinsky. Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1995. x+475 pp.

[298] Malgrange, B. : *Équations aux dérivées partielles*, Conférences aux carrés, rédigées par A. Cesero, ENS, 1966.

[299] Malgrange, B. : *Ideals of Differentiable Functions*, Tata Institute of Fundamental Research Studies in Mathematics, No. 3, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay ; Oxford University Press, London, 1967, vii+106 pp.

[300] Manin, Y. : *A course in mathematical logic*. Translated from the Russian by Neal Koblitz. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 53, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977, xiii+286 pp.

[301] Matiyasevich, Y.V. : *Hilbert's tenth problem*. Translated from the 1993 Russian original by the author. With a foreword by Martin Davis. Foundations of Computing Series, MIT Press, Cambridge, MA, 1993, xxiv+264 pp.

[302] Mazur, B. : *Le Renard et le Hérisson*, dans : *Grandes et petites énigmes mathématiques*, La Recherche, numéro spécial, **346**, Octobre 2001.

[303] Merker, J. : *L'ontologie explicite des théorèmes d'existence en mathématiques*, Séminaire de Philosophie et Mathématiques (Maurice Loi, Pierre Cartier), Paris, ENS Ulm, novembre 1996, Publication de l'IREM Paris Nord, 1997, 66 pp.

[304] Merker, J. : *La satisfaction mathématique*, texte écrit pour le Colloque Mathématiques et Inconscient, Paris, ENS Ulm, juin 1997, 28 pp.

[305] Merker, J. : *Penrose ou l'apothéose du platonisme*, Revue de l'HPMP (1998), 21–26.

[306] Merker, J. : *Article* Analyse Complexe, Encyclopédie d'Histoire et de Philosophie des Sciences, sous la direction de Dominique Lecourt, Presses Universitaires de France, 1999, 42–48.

[307] Merker, J. : *Deux infinis cousus main*, Revue de Synthèse, Numéro spécial Pensée des Sciences, (1999), 163–172.

[308] Merker, J. : *L'Obscur mathématique ou l'Ouvert mathématique*, Communication au colloque Le réel en mathématiques, Cerisy (Normandie), du 3 au 7 septembre 1999 ; Agalma Éditeur, Diffusion Le Seuil, Paris, 2004, pp. 65–91.

[309] Merker, J. : *L'île mathématique*, Revue Études, octobre 2001 et novembre 2001 (publié en deux parties), **395**, no. 4, 341–351 et **395**, no. 5, 493–504.

[310] Merker, J. : *Hommage à Gilles Châtelet*, Prépublication LATP, no. 7, 2001, 82 pp.

[311] Merker, J. : *Itération et fractales dynamiques*, Communication au colloque Épistémologie des systèmes dynamiques, Paris, École Supérieure de Chimie, novembre 1999. *Chaos et Systèmes dynamiques*, S. Franceschelli, T. Roque, M. Paty eds., Hermann, Paris, 2007, pp. 111–131.

[312] Merker, J. : *Sur la philosophie des mathématiques de Wittgenstein*, 38 pages, arxiv.org/abs/0801/

[313] Merker, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of $\mathbb{C}^n$ and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), no. 6, 751–824.

[314] Merker, J. : *Characterization of the Newtonian free particle system in $m \geqslant 2$ dependent variables*, Acta Applicandæ Mathematicæ, **92** (2006), no. 2, 125–207.

[315] Merker, J. : *Du trinôme du second degré à la théorie de Galois*, Didactiques, Presses Universitaires de Franche-Comté, 2007.

[316] Merker, J. : *An algorithm to generate all polynomials in the k-jet of a holomorphic disc $D \to \mathbb{C}^n$ that are invariant under source reparametrization*, Journal of Symbolic Computation, **45** (2010), 986–1074 arxiv.org/abs/0808.3547/

[317] Merker, J. : *Lie symmetries and CR geometry*, J. Mathematical Sciences, **154** (2008), no. 6, 817–922.

[318] Merker, J. : *Lie algebras of holomorphic vector fields in dimensions 1, 2 and 3*, unachieved version downloadable at www.dma.ens.fr/$\sim$merker/

[319] Merker, J. : Diverio, S. ; Rousseau, E. : *Effective algebraic degeneracy*, Inventiones Mathematicæ **180** (2010), 161–223.

[320] Merker, J. : *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, Hermann Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, xxiii+325 pp., 2010.

[321] Merker, J. : *Algebraic differential equations for entire holomorphic curves in projective hypersurfaces of general type*, 89 pages, arxiv.org/abs/1005.0405.

[322] Merker, J. : *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, **650** pages, arxiv.org/abs/1003.3202. Soumis à Springer-Verlag.

[323] Meyer, M. : *Découverte et justification en sciences. Kantisme et néopositivisme*, Klincksieck, Paris, 1979.

[324] Meyer, M. : *De la problématologie. Philosophie, science, langage*, Mardaga, Bruxelles, 1986, 352 pp.

[325] Meyer, M. : *Science et Métaphysique chez Kant*, Presses Universitaires de France, Paris, 1988.

[326] Meyer, M. : *Pour une critique de l'ontologie*, Editions de l'Université de Bruxelles, Bruxelles, 1991.

[327] Milnor, J. : *Dynamics in one complex variable*, Annals of Mathematics Studies, 160, Princeton University Press, Princeton, NJ, Third Edition, 2006, viii+304 pp.

[328] Monna, A.F. : *Évolution des problèmes d'existence en analyse*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^o 22, Irem Paris Nord, 1983, 10pp.

[329] Montgomery, D. ; Zipping, L. : *Topological transformation groups*, Interscience Publishers, New York-London, 1955. xi+282 pp.

[330] Moser, J. : *A new technique for the construction of solutions of non linear differential equations*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **47** (1961), 1824–1831.

[331] Moser, J. : *A rapidly convergent method and nonlinear partial differential equations*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, **20** (1966), 265–315 (I) ; 499–535 (II).

[332] Mouloud, N. : *Logique et Ontologie*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^0 20, Irem Paris Nord, 1982, 29 pp.

[333] Nabonnand, P. : *La polémique entre Poincaré et Russell au sujet du statut des axiomes de la géométrie*, Rev. Histoire Math. **6** (2000), no. 2, 219–269.

[334] Nabonnand, P. : *Cartan et les connexions*, Textes des journées d'études des 17 et 18 mars 2005, *Fibrés, fibrations et connexions*, Paris : Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 2005, 1–33.

[335] Nabonnand, P. : *La théorie des "Würfe" de von Staudt — une irruption de l'algèbre dans la géométrie pure*, Arch. Hist. Exact Sci. **62** (2008), no. 3, 201–242.

[336] Nash, J. : *The imbedding problem for Riemannian manifolds*, Ann. of Maths. (2) **63** (1956), 20–63.

[337] Nathanson, M.B. : *Desperately seeking mathematical truth*, arxiv.org/abs/0809.-1372/

[338] Neuenschwander, E. *Lettres de Bernhard Riemann à sa famille*, Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques, **2** pp. 85–131, Inst. Henri Poincaré, Paris, 1981.

[339] Neuenschwander, E. : *über die Wechselwirkungen zwischen der französischen Schule, Riemann und Weierstraß. Eine Übersicht mit zwei Quellenstudien*, Archive for History of Exact Sciences **24** (1981), 221–255. English translation in Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 87–105.

[340] Neuenschwander, E. *A brief report on a number of recently discovered sets of notes on Riemann's lectures and on the transmission of the Rieamnn Nachlass*, Historia Mathematica **15** (1988), 101–113 ; also in [**369**], pp. 855–867.

[341] Neuenschwander, E. : *Documenting Riemann's impact on the theory of complex functions*, Math. Intelligencer **20** (1998), no. 3, 19–26.

[342] Newman, J.R. : *The world of mathematics*, vol. 1, New York, Simon & Schuster, 1956.

[343] Nietzsche, F. *Fragments posthumes, Été-automne 1884*, 26 [294], Paris, Gallimard, vol. X, 1982.

[344] Nirenberg, L. : *Existence theorems in partial differential equations*, Mimeographed Lecture Notes, New York University, 1954.

[345] Nowak, G. : *Riemann's Habilitationsvortrag and the synthetic a priori status of geometry*, The history of modern mathematics, Vol. I (Poughkeepsie, NY, 1989), 17–46, Academic Press, Boston, MA, 1989.

[346] Olver, P.J. : *Applications of Lie groups to differential equations*. Springer Verlag, New York, 1986. xxvi+497 pp.

[347] Olver, P.J. : *Equivalence, Invariance and Symmetries*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995, xvi+525 pp.

[348] Pasch, M. : *Vorlesungen über neuere Geometrie*, B.G. Teubner Leipzig, 1882.

[349] Panza-Salanski (Éds.) : *L'objectivité mathématique*, Masson, Paris, 1995.

[350] Passare, M. : *How to compute* $\sum 1/n^2$ *by solving triangles*, Amer. Math. Monthly **115** (2008), no. 8, 745–752.

[351] Patras, F. : *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, Presses Universitaires de France, 2001, 195 pp.

[352] Petitot, J. : *Morphogénèse du sens*, Presses universitaires de France, Paris, 1985.

[353] Petitot, J. : *Refaire le Timée. Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman*, Rev. Histoire Sci. **40** (1987), no. 1, 79–115.

[354] Petitot, J. : *Pour un platonisme transcendantal*, in [**349**], pp. 147–178.

[355] Petitot, J. : *Mathématique et Ontologie*, in : *La scienza tra Filosofia e Storia in Italia nel Novecento*, F. Minazzi et L. Zanzi Ed., Rome, Istituto Poligrafico et Zecca dello Stato, 1987, pp. 191–211.

[356] Pfaff, J. : *Methodus generalis æquationes differentiarum necnon æquationes differentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcumque variabiles complete integrandi*, Abh. König. Akad. Wissen. Berlin (1814–1815), 76–136.

[357] Poincaré, H. : *Du rôle de l'intuition et de la logique en mathématiques*, Deuxième Congrès International des mathématiciens, (Paris 1900), 1902.

[358] Poincaré, H. : *Analyse des Travaux Scientifiques de Henri Poincaré faite par lui-même*, écrite en 1901 à la demande de G. Mittag-Leffler, dans : *Acta Mathematica* **38** (1921), 55–64.

[359] van der Poorten, A. : *A proof that Euler missed . . . Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1** (1979), 195–203.

[360] Portnoy, E. : *Riemann's contribution to differential geometry*, Historia Mathematica **9** (1982), 1–18.

[361] Rao, M.R.M. : *Ordinary differential equations, theory and applications*, Edward Arnold, London, 1981.

[362] Raymond, J.-P. : *Conditions nécessaires et suffisantes d'existence et de solutions en calcul des variations*, Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire, **4** (1987), n^o2, 169–202.

[363] Reich, K. : *Die Geschichte der Differentialgeometrie von Gauss bis Riemann (1828–1868)*, Arch. Hist. Exact Sc. **11** (1973), 273–382.

[364] Reid, C. : *Hilbert.* With an appreciation of Hilbert's mathematical work by Hermann Weyl, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1970.

[365] Remmert, R. : *The Riemann-file Nr. 135 of the* Philosophische Fakultät *of the Georgia Augusta at Göttingen*, Math. Intelligencer **15** (1993), no. 3, 44–48.

[366] Richard, J.-P. : *Microlectures*, Collection Poétique, Le Seuil, Paris, 1979, 285 pp.

[367] Riemann, B. : *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, Habilitationsvortrag, 10 juni 1854. Abhandlungen der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen **13** (1868). Trad. J. HOÜEL, in [**371**], pp. 280–299.

[368] Riemann, B. : *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, édité avec l'aide de R. Dedekind et H. Weber, Leipzig, Teubner, 1876 ; 2ème édition par H. Weber, 1892.

[369] Riemann, B. : *Gesammelte mathematische werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*, Nach der Ausgabe von Heinrich Weber und Richard Dedekind, neu herausgegeben von Raghavan Narasimhan, Springer-Verlag, Berlin & Teubner, Leipzig, 1990, vi+911 pp.

[370] Riemann, B. : *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*, pp. 145–155 in [**371**].

[371] Riemann, B. : *Œuvres mathématiques*, traduites en français par L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1898. Réédition J. Gabay, Paris, 1990.

[372] Riemann, B. : *Sur la psychologie et la métaphysique*, traduit en français dans : *Fusion*, no. 92, septembre-octobre 2002.

[373] Rivoal, T. : *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \ldots, \zeta(21)$, Acta Arith. **103** (2002), no. 2, 157–167.

[374] Rivoal, T. : *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta de Riemann*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 1, 351–365.

[375] le Robert, *Dictionnaire culturel en langue française*, sous la direction d'Alain Rey, Paris, 2005. Article « Labyrinthe ».

[376] Rosenfeld, B.A. : *A history of noneuclidian geometry. Evolution of the concept of a geometric space*, Springer-Verlag, Berlin, 1998, ix+471 pp.

[377] Rougier, L. : *La philosophie géométrique de Henri Poincaré*, Alcan, Paris, 1908.

[378] Rowe, D.E. : *Episodes in the Berlin-Göttingen rivalry, 1870–1930*, Math. Intelligencer **22** (2000), no. 1, 60–69.

[379] Russell, B. : *An essay on the foundations of (modern) geometry*. With a foreword by Morris Kline, Dover Phoenix Editions, Mineola, 1956.

[380] Sagan, B.E. : *The symmetric group. Representations, combinatorial algorithms, and symmetric functions*. Graduate Texts in Mathematics, 203, Springer-Verlag, Berlin, xv+238 pp.

[381] Salanskis, J.-M. : *L'herméneutique formelle*, Éditions du CNRS, Paris, 1991.

[382] Samuel, P. : *Projective geometry*, Undergraduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1988, ix+156 pp.

[383] Sauer, T. : *Field equations in teleparallel spacetime : Einstein's Fernparallelismus approach toward unified field theory*, `arXiv:physics/0405142`.

[384] Schauder, J. : *Über linear elliptische Differentialgleichungen Zweiter Ordnung*, Math. Zeitschrift, **38** (1933), 257–282.

[385] Schering, E. : *Zum Gedächtniss an B. Riemann*, Nachr. v. d. Kön. Ges. d. Wiss. zu Göttingen, 1866, S. 339 ; in [**369**], pp. 828–847.

[386] Scholz, E. : *Geschichte des Mannigfaltigkeitsbegriffs von Riemann bis Poincaré*, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980. 430 pp.

[387] Scholz, E. : *Riemanns frühe Notizen zum Mannigfaltigkeitsbegriff und zu den Grundlagen der Geometrie*, Arch. Hist. Exact Sci. **27** (1982), no. 3, 213–232.

[388] Scholz, E. : *Herbart's influence on Bernhard Riemann*, Historia Mathematica **9** (1982), 413–440.

[389] Scholz, E. : *Riemann's vision of a new approach to geometry*, pp. 22–34 in [**48**].

[390] Scholz, E. : *The concept of manifold, 1850–1950*, History of topology, 25–64, North-Holland, Amsterdam, 1999.

[391] Scholz, E. : *C.F. Gauss' Präzisionsmessungen terrestrischer Dreiecke und seine Überlegungen zur empirischen Fundierung der Geometrie in den 1820er Jahren*, In : Folkerts, M. e.a. (eds.) Form, Zahl, Ordnung ... Stuttgart : Steiner (2004), 355-380 ; arxiv.org/abs/math.HO/0409578/

[392] Scholz, E. : *Hermann Weyl's analysis of the "problem of space" and the origin of gauge structures*, Science in Context **17** (2004), no. 1-2, 165–197.

[393] Scholz, E. : *Curved spaces : Mathematics and empirical evidence, ca. 1830 – 1923*. Oberwolfach Reports 2 (4), 2006, 3195–3198.

[394] Scholz, E. : *Another look at Miller's myth*, to appear in Philosophia Scientiae.

[395] Schouten, J.A. : *Ricci calculus. An introduction to tensor analysis and its geometrical applications*, 2nd ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1954.

[396] Schraen, B. : *Introduction à la géométrie p-adique rigide*, Exposé à la journée de réception des prix de l'Académie des Sciences, ENS Ulm, Paris, 6 novembre 2009.

[397] Sergeraert, F. : *Un théorème de fonctions implicites sur certains espaces de Fréchet et quelques applications*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4^e série, **5**, 1972, 599–660.

[398] Serre, J.-P. : *Groupes de Galois sur* $\mathbb{Q}$. Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88. Astérisque No. 161-162 (1988), Exp. No. 689, 3, 73–85 (1989).

[399] Serre, J.-P. : *Topics in Galois theory*, Second edition. With notes by Henri Darmon. Research Notes in Mathematics, 1. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, 2008. xvi+120 pp.

[400] Serret, J.-A. : *Cours d'algèbre supérieure*, 2 vol., 4ème éd., Gauthier-Villars, Paris, 1877.

[401] Sharpe, R.W. : *Differential Geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, xix+421 pp.

[402] Siegel, C.L. : *Über Riemanns Nachlaß zur analytischen Zahlentheorie*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B : Studien, Bd. 2, 45–80 ; Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1, 275–310.

[403] Sinaceur, H. : *Corps et Modèles*, Vrin, Mathesis, Paris, 1991.

[404] Sinaceur, H. : *Du formalisme à la constructivité : le finitisme*, Revue internationale de philosophie, numéro spécial sur Hilbert, 1994, 251–284.

[405] Sinaceur, H. : Jean Cavaillè. Philosophie mathématique, Presses Universitaires de France, Paris, 1994.

[406] Sinaceur, M.-A. : *Dedekind et le programme de Riemann*, Rev. d'Histoire Sci. **43** (1990), no. 2-3, 221–235. Suivi de la traduction de 'Analytische Untersuchungen zu Bernhard Riemanns Abhandlungen über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen', par R. Dedekind, *ibidem*, 236–296.

[407] Skoda, H. : *Application des techniques L^2 à la théorie des idéaux d'une algèbre de fonctions holomorphes avec poids*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 4^e série, **5** (1972), 545–579.

[408] Smadja, I. : *Essai sur la notion de schématisme en arithmétique*, Thèse de doctorat, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, juin 2002, 553 pp.

[409] Smadja, I. : *Équations aux dérivées partielles et philosophie naturelle. Remarques sur l'héritage herbartien de Bernhard Riemann*, Ars Experientiam Recte Intelligendi. Saggi filosofici. Polimetrica, Milan, 2004.

[410] Smale, S. : *An infinite dimensional version of Sard's theorem*, Amer. J. Math., **87** (1965), 861–866.

[411] Smale, S. : *Mathematical problems for the next century*, Mathematics : frontiers and perspectives, eds. Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P. and Mazur, B., Amer. Math. Soc., 2000.

[412] Souriau, E. : *Les différents modes d'existence*, Vrin, Paris, 1943.

[413] Speiser, A. : *Naturphilosophische Untersuchungen von Euler bis Riemann*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **157** (1927), 105–114.

[414] Spivak, M. : *Differential geometry*, volumes one and two, Brandeis university, 1970.

[415] Stäckel, P. : *Gauß als Geometer*, Gauss Werke, 10, 2, Abhandlung 4, 1–123.

[416] Stahl, G. : *Les questions et leur logique*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^o 38, Irem Paris Nord, 1985, 71 pp.

[417] Stahl, G. : *Existence et non existence en logique mathématique*, Collection Philosophie-Mathématiques, n^o 65 bis, Irem Paris Nord, 1990, 24 pp.

[418] Stanton, N. : *Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 1, 209–233.

[419] Sternberg, S. : *Lectures on differential geometry*, Chelsea, 1983.

[420] Stillwell, J. : *Classical topology and combinatorial group theory*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 72 Springer-Verlag, New York, 1993, xii+334 pp.

[421] Stillwell, J. : *Galois theory for beginners*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 1, 22–27.

[422] Stillwell, J. : *Sources of hyperbolic geometry. History of Mathematics*, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, RI ; London Mathematical Society, London, 1996. x+153 pp.

[423] Stormark, O. : *Lie's structural approach to PDE systems*, Encyclopædia of mathematics and its applications, vol. 80, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, xv+572 pp.

[424] Stubhaug, A. : *The mathematician Sophus Lie*, Spinger-Verlag, Berlin, 2000, xi+555 pp.

[425] Sturmfels, B. : *Algorithms in invariant theory*, Texts and Monographs in Symbolic Computation, Springer-Verlag, Vienna, 1993, vi+197 pp.

[426] Szczeciniarz, J.-J. : *Desanti, philosophe des mathématiques*, Actes du Colloque Desanti, Bastia 1997.

[427] Szczeciniarz, J.-J. : *Copernic et la révolution copernicienne*, Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 1998, 438 pp.

[428] Szczeciniarz, J.-J. : *Le phénomène Hartogs*, pp. 39–58.

[429] Szczeciniarz, J.-J. : *L'Un et le Multiple : réflexions sur le passage en plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, pp. 269–286.

[430] Szczeciniarz, J.-J. : *L'un et le multiple, le phénomène Hartogs en géométrie complexe*, Presses de la Maison des Sciences de l'Homme, 2001, pp. 39–58.

[431] Szczeciniarz, J.-J. : *Hegel et la philosophie de la nature, Mathématique, physique, philosophie*, Epistémologiques (EDP Science), p. 15 sq.

[432] Szczeciniarz, J.-J. : *La Terre immobile. Aristote, Ptolémée, Husserl*, préface de Thibault Damour, Paris Presses universitaires de France, 2003 xii+418 pp.

[433] Szczeciniarz, J.-J. : *Une réflexion métaphysique sur la périodicité, devons-nous rester grecs* ?, in : Chaos et systèmes dynamiques, Eléments pour une épistémologie, S. Franceschelli, T. Roque et M. Paty Eds., Paris, Hermann, 2007, 303–325.

[434] Szczeciniarz, J.-J. : *Jean Cavaillès, l'axiomatisation de la production mathématiques, quelques exemples*, L'archicube, 2007, 47–72.

[435] de Tannenberg, W. ; Vessiot, E. : *Compte Rendu et analyse de* [**146**], Bull. Sci. Math., 2 e série, **13** (1889), 113–148.

[436] Tazzioli, R. : *Riemann, le géomètre de la nature*, Les génies de la science, no. 12, Pour la Science, numéro spécial, août-novembre 2002.

[437] Thiele, R. : *Mathematics in Göttingen (1737–1866)*, Math. Intelligencer **16** (1994), no. 4, 50–60.

[438] Thurston, W.P. : *Mathematical education*, arxiv.org/math.HO/0503081, 2005.

[439] Tignol, J.-P. : *Leçons sur la théorie des équations.* Monographies de Mathématique, 1. Université Catholique de Louvain, Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Louvain-La-Neuve, 1980. 250 pp.

[440] Tilliete, X. : *L'intuition intellectuelle de Kant à Hegel*, Vrin, Paris, 1995.

[441] Titchmarsh, E.C. : *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford, Clarendon Press, 1951.

[442] Torretti, R. : *Philosophy of geometry from Riemann to Poincaré*, (2nd ed.), Reidel, Dordrecht, 1984.

[443] Valibouze, A. : *Sur les relations entre les racines d'un polynôme*, Acta Arithmetica, **131** (2008), no. 1, 1–27.

[444] Vasilesco, F. : *Le problème de Dirichlet dans le cas le plus général*, L'Enseignement Mathématique, **35**, (1936), 88–106.

[445] Verriest, G. : *Évariste Galois et la théorie des équations algébriques*, in [**17**], 320–373.

[446] Viterbo, C. : *Une introduction à la géométrie symplectique*, Gazette des mathématiciens, **54** (1992), 81–96.

[447] Vuillemin, J. : *Mathématiques et métaphysique chez Descartes*, Presses Universitaires de France, Collection Épiméthée, Paris, 1960.

[448] Vuillemin, J. : *La philosophie de l'algèbre*, Presses Universitaires de France, Collection Épiméthée, Paris, 1962.

[449] Wahl, J. : *Traité de Métaphysique*, Payot, Paris, 1953.

[450] Wahl, J. : *Vers la fin de l'ontologie*, Sedes, Paris, 1956.

[451] Waldschmidt, M. : *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **12** (2000), 581–595.

[452] Walsh, J.L. : *History of the Riemann mapping theorem*, Amer. Math. Monthly **80** (1973), 270–276.

[453] Waring, E. : *Meditationes Algebricæ*, an English translation of the work of Edward Waring by Dennis Weeks, American Math. Soc., Providence, 1991.

[454] Weil, A. : *De la métaphysique aux mathématiques*, Oeuvres, tome II, p. 408.

[455] Weinberg, S. : *Gravitation and cosmology : principles and applications of the general theory of relativity*, Wiley, New York, 1972.

[456] Weitzenböck, R. : *Invariantentheorie*, Groningen, Noordhoff, 1923.

[457] Weitzenböck, R. : *Differentialinvariaten in der Einsteinschen Theorie des Fernaparallelismus, Prüssische Akademie der Wissenschaften*, Phys.-Math. Klasse, Sitzungsberichte, 1928, 466–474.

[458] Weyl, H. : *Vorwort des Herausgebers. Erläuterungen*. in : [**369**], pp. 740–768.

[459] Weyl, H. : *Riemanns geometrische Ideen, ihre Auswirkung und ihre Verknüpfung mit der Gruppentheorie* (écrit en 1925), Herausg. von K. Chandrasekharan, Springer, 1988.

[460] Winter, M. : *Note sur l'intuition en mathématiques*, présentée au Congrès de philosophie (Heidelberg, 1908), Revue de Métaphysique et de Morale, (1908), 921–925.

[461] Winter, M. : *La méthode dans la philosophie des mathématiques*, Alcan, Paris, 1911.

[462] Zagier, D. : *Values of zeta functions and their applications*, in : "First European congress of mathematics", Vol. II, pp. 497–512, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1994.

[463] Zagier, D. : *D. Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708.