



Département de Mathématiques d'Orsay

UNIVERSITÉ
PARIS
SUD
Comprendre le monde
construire l'avenir



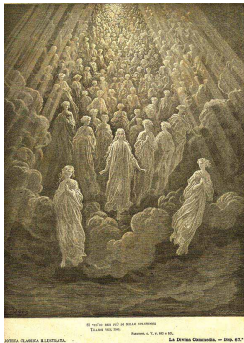
L'Ange de la Géométrie

Le Démon de l'Algèbre

Joël MERKER

ANGES ET DÉMONS

Anges en général



- **"Définition"** : Dans de nombreuses traditions, un *ange* — du latin *angelus*, emprunté au grec, *angelos*, messenger (de l'hébreu, *malakh*, messenger) — est une créature céleste.

- **Précisions** : Ce terme désigne un envoyé de Dieu, c'est-à-dire un intermédiaire entre Dieu et les hommes. Parfois il transmet un message divin, parfois il agit lui-même selon la volonté divine.
- **Existence ?** L'ange est normalement invisible, mais lorsqu'il se laisse voir, lors d'un rêve ou d'une vision, il a une apparence humaine, transfigurée par une lumière surnaturelle.
- **Angéologie** : L'*angéologie* est l'étude des anges, de leurs noms, de leur place dans la hiérarchie divine et de leur rôle.
- **Hiérarchie angélique** : La classification des anges selon Saint Thomas d'Aquin (docteur angélique) :

□ *Les Séraphins.*

Leur nom signifie chaleur et lumière. Ils sont enflammés de l'amour de Dieu au plus haut degré. Leur but premier est la purification et la dissipation des ténèbres et des doutes. Leur qualité principale est l'amour.

□ *Les Chérubins.*

Leur nom signifie sagesse et science. Ils sont capables de montrer à Dieu ceux qui doutent. Leur vertu est la science.

□ *Les Trônes.*

Leur nom signifie qu'ils sont les porteurs de la justice divine. Ils sont complètement sourds à toute tentation humaine. Ils sont la voix de Dieu auprès des hommes. Leur vertu est l'humilité.

● **Deux classes d'anges :** (chez Maïmonide) :

□ *les « permanents » ;*

□ *les « périssables ».*

● **Judah ha-Lévi (1085-1140) :**

«Comme pour les anges, certains sont créés à un moment donné à partir de subtils éléments de matière (comme l'air et le feu). Certains sont éternels (c'est-à-dire existent depuis l'éternité et pour l'éternité), et ce sont peut-être les intelligences spirituelles dont parlent les philosophes.»

- **Tradition musulmane :**

- les anges ne possèdent pas de libre-arbitre ;
- ils sont incapables de désobéir ;
- ils font simplement ce que Dieu leur demande !

Archanges

● **Anges et maîtres ascensionnés** : Actuellement, il y a sept puissants Archanges qui nous irradient particulièrement de lumière et qui nous aident tous sur Terre.

1. **Michel**,

2. **Jophiel**,

3. **Chamuel**,

4. **Gabriel**,

5. **Raphaël**,

6. **Uriel**,

7. **Zadkiël**.

● **Conversation spirituelle** : Au moment où vous sentez leur présence, demandez leur ce que vous désirez.

Nota Bene : Vous pouvez demander à votre *ange gardien* de vous entourer avec ses *ailles*, et/ou vous pouvez demander à votre Ange de caresser votre *aura*.

- **Rayon 2 : L'Archange Jophiel** : L'Archange Jophiel travaille avec le rayon jaune de la sagesse et de l'illumination. Il utilise sa force et sa puissance pour inspirer et éclairer l'esprit, les personnes acquièrent ainsi l'ouverture et la sagacité d'esprit. Sa mission spéciale est d'assister tous les aspects de l'éducation et de l'apprentissage ; il est particulièrement désigné pour les étudiants et enseignants, les ambassadeurs et les artistes. Il nous aidera à être plein de tact et prévoyant dans les situations difficiles. Sa retraite éthérique se situe au sud de la Grande Muraille, Chine, et on peut y accéder en dormant ou au cours de méditations.

- **Question :** *Pourquoi les Grecs n'ont-ils pas écrit de traité d'algèbre ?*

- **Simone Weil à André Weil :**

Je crois que l'explication ne peut être trouvée que dans une interdiction de nature philosophico-religieuse. Les jeux de ce genre devaient leur sembler impies. Car pour eux, les mathématiques constituaient, non un exercice de l'esprit, mais une clef de la nature ; clé recherchée non pas en vue de la puissance technique sur la nature, mais afin d'établir une identité de structure entre l'esprit humain et l'univers.

Les mathématiques étaient aux yeux des pythagoriciens (et de Platon) une condition de la plus haute vertu (et gardées secrètes à ce titre).

- **Jean-Jacques Szczeciniarz :**

Là encore, Simone Weil met l'accent sur les liens qui ont existé entre la pensée religieuse et la pensée mathématique (et qui de façon plus cachée continue de s'exercer).

On trouve en effet de très nombreuses occurrences de cette fonction religieuse attachée aux mathématiques dans les formulations d'Euclide. Et elle explique que les mathématiques, pour cette raison, n'étaient pas considérées comme un jeu. Et cela tient à la nature des règles qui régissent leur exercice. Cet argument vaut certainement encore pour nos mathématiques dans certaines formes des communautés qu'elles impliquent, dans la fascination qu'elles exercent.

- **Mots-clés :**

- Géométrie.

- Algèbre.

- Fascination.

- Croyance.

- Secret.

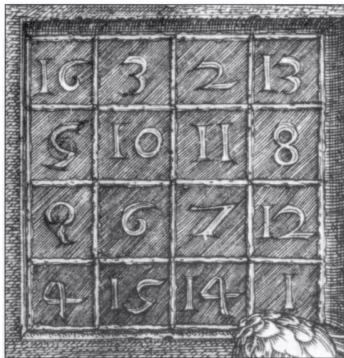
Albrecht Dürer, *Melancholia*



- **Un ange !** L'ange est figure principale de la composition. Féminin ? Il serait *personnification* de la géométrie et/ou de la mélancolie.
- **Mélancolie :** Étymologiquement, mélancolie signifie *bile noire* *humeur noire*. Un tempérament mélancolique comporte parfois dépression, neurasthénie.

- **Interprétation** : Dans un monde humain sous l'emprise des ténèbres, cette gravure de Dürer décrit un monde angélique en attente, prêt à restituer la lumière divine oubliée.
- **Allégorie** : Le putto et l'ange sont deux figures allégoriques parallèles (par leurs ailes). Assis tous deux, tournés dans la même direction, ils tiennent des objets semblables. Sur ce fond de similitudes leurs différences d'âge et d'attitude apparaissent renforcées. Étant perchée sur une roue de meunier, ou une meule à aiguiser, selon certains, la figure du putto rappelle manifestement l'imagerie de la Rota fortuna médiévale. Loin de se ressembler, les deux s'opposent. Le plus petit est occupé à griffonner tandis que le plus grand a abandonné toute velléité.
- **Impossible duplication du cube** : Les outils sur le sol, près du grand ange, se rapportent les uns au travail de la pierre, peut-être sont ils destinés à évoquer la réduction en pierre cubique du grand polyèdre, les autres au travail du bois.

- Carré magique de valeur 34 :



- **Ésotérisme mathématique** : Les carrés magiques sont, notamment dans les ésotérismes juif et islamique, associés à des connaissances secrètes qui furent transmises, pendant et avant l'époque de Dürer par des confréries d'ésotérisme chrétien qui maintenaient des relations suivies avec les initiés à l'ésotérisme islamique.

- **Valeur d'un carré magique :**

- Prendre les entiers de 1 à 16 :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16.

- S'en servir pour remplir les 16 cases d'un carré 4×4 .

- Assurer que la somme sur chaque ligne horizontale, verticale ou diagonale ait une même valeur.

- **Généralisation : Carrés magiques d'ordre n :** Ils ont n lignes et n colonnes, contenant les entiers :

1, 2,, n^2 .

La somme totale de tous ces nombres vaut :

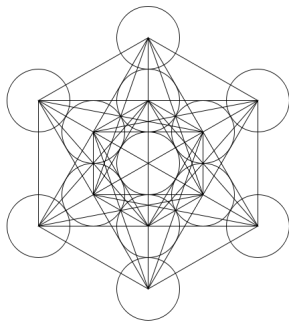
$$1 + 2 + \dots + n^2 = \frac{n^2(n^2 + 1)}{2},$$

tandis que la *valeur* de ce carré, c'est-à-dire la somme commune des lignes, des colonnes, des diagonales vaut :

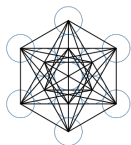
$$\frac{1 + 2 + \dots + n^2}{n} = \frac{n(n^2 + 1)}{2}.$$

Cube de Metatron

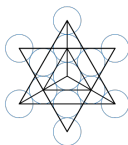
- **Archange Metatron** : Selon l'ésotérisme chrétien, l'Archange Metatron est directement relié à la Source Divine. Sa Fonction est : « Scribe du Livre de la Vie »



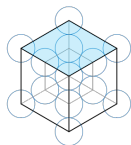
• Projections stéréographiques des solides de Platon :



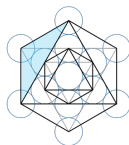
Metatron's
Cube



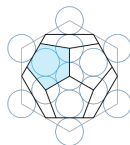
Star Tetrahedron
(Star of David)
(Aura)



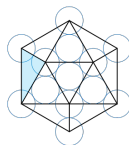
Hexahedron
(Cube)



Octahedron



Dodecahedron



Icosahedron

L'Archange Metatron régit le Chœur des Anges Séraphins, situé dans la première Triade d'Anges, en partant du Trône de Dieu.

Géométrie mystique

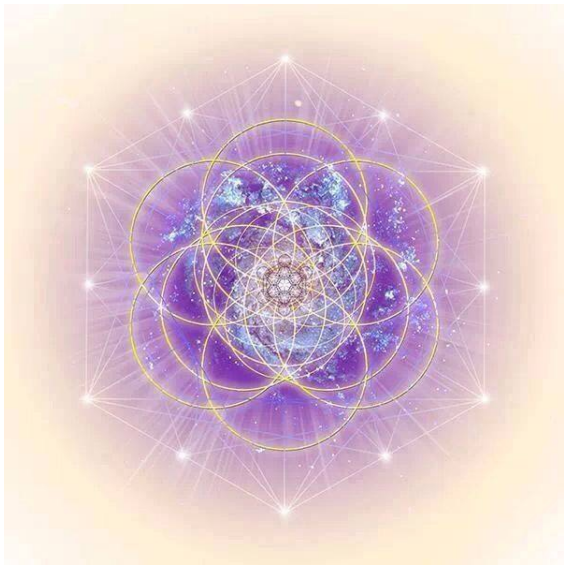
- **Géométrie angeresse :**



- Irradiation cosmique de la connaissance chez l'homme :



- **Scintillements :**



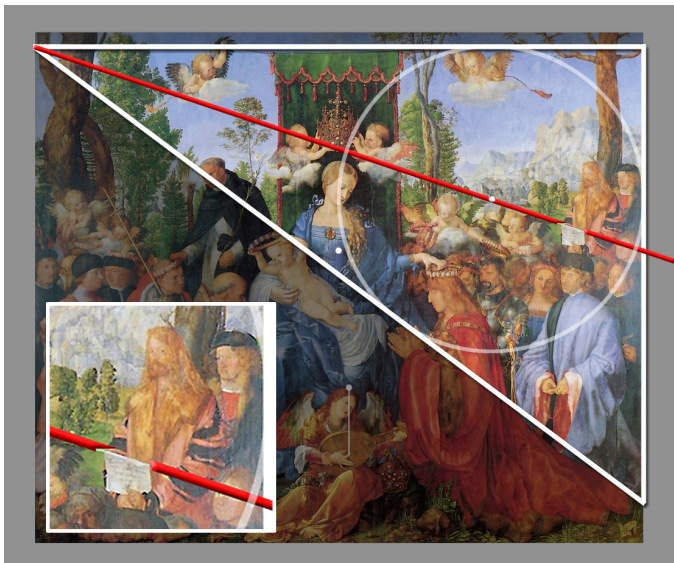
- Géométrie sacrée :



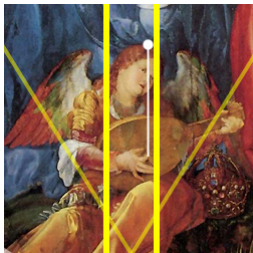
- **"Définition"** : La *Géométrie Sacrée* est une source d'information appartenant à l'humanité que nous avons oubliée, résidant dans notre subconscient. Elle représente le langage universel de la création. Tout le cosmos est construit dans une harmonie parfaite.
- **"Histoire"** : La Géométrie Sacrée a été enseignée comme compréhension particulière du processus de la Création. Cette information ésotérique a souvent été maintenue « cachée », se transmettant d'initié à initié au sein de sociétés secrètes.

Peinture, anges, perspective géométrique

- **La Vierge au rosaire de Dürer, 1506 :**

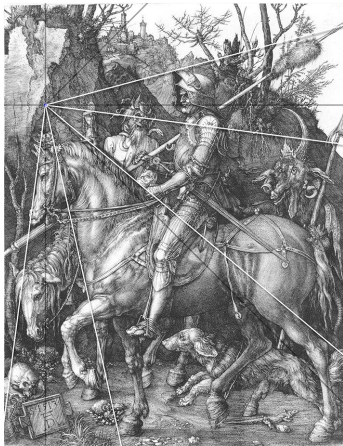


- Étude d'une partie du tableau :



- **Commentaire** : Les peintres pratiquaient la géométrie pour élaborer la Composition de leurs oeuvres. La pratique la plus simple quadrille la surface, les plus sophistiquées intègrent des éléments complexes, comme des spirales et certaines figures liées entre elles (mélange de triangles, de rectangles et de cercles).

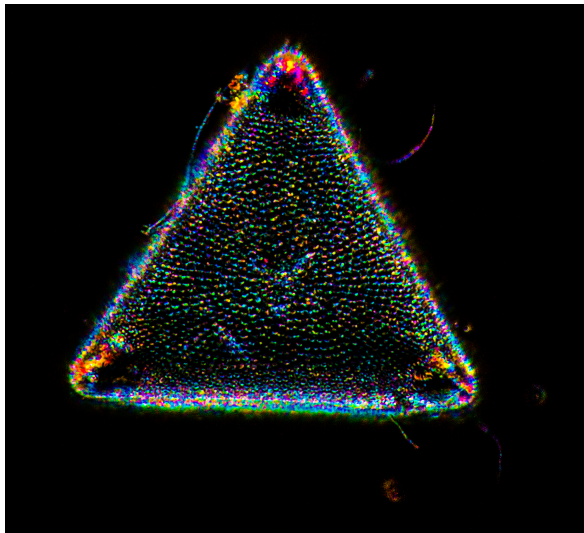
- Autre gravure de Dürer :



Quand la Géométrie est à la base à la construction d'un tableau, les éléments de ce tableau s'appuient sur des lignes tracées au préalable. Cette contrainte choisie par l'artiste influence considérablement son dessin. Par exemple, un bras peut s'ouvrir

pour épouser un cercle, une épée peut s'allonger jusqu'à pointer l'angle d'un carré. Les bissectrices, les diagonales et autres médiatrices sont autant de cloisons contre lesquelles tout objet de peinture peut s'appuyer, et même jouer ! Les musiciens sont intrigués par la position que Dürer donne aux mains de ces joueurs de luth. Ils ont raison de s'étonner, car elles jouent avec les cordes virtuelles de la Géométrie au lieu de se préoccuper des cordes réelles de leur instrument ! Ces lignes s'estompent au fur et à mesure que le tableau se construit, mais pas la position des mains. Il faut une étude de cette Géométrie pour révéler les cordes de la composition, mais elles sont toujours présentes en tant que traces de l'attention permanente de l'artiste.

Intermède : Géométrie planctonique



Espaces projectifs visibles

- **Directionnalités physiques** : Idée, mystérieusement physique, de *droite indépendante* étendue vers l'horizon translucide infini.



- **Force génétique du directionnel pour les concepts mathématiques.**

□ Cette physicalité des sources réveille la question de la dépendance ontologique archaïque mais problématique des mathématiques relativement au monde physique prosaïque immédiatement coprésent à toute conscience sensible.

□ Propulsion régulière se poursuivant sans déviation toujours dans l'au-delà de soi.

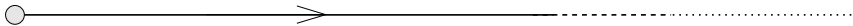
● **Interrogation légitime sur la nature de ce qu'est le « droit » de la ligne droite que la physique immédiate instancie.**

● **Question d'essence génératrice :** *Au-delà, donc, des simples constatations et à un niveau métaphysiquement antérieur à toute factualité intersubjective, y a-t-il une nécessité supérieure qui produirait l'émergence d'une **nature projective** autonome dans la conceptualisation mathématique géométrique ? En quoi une telle nature projective gouvernerait-elle le développement d'une **géométrie projective**, domaine a posteriori central dans les mathématiques contemporaines ?*

● **Thèse de l'indélébilité des questions métaphysiques profondes.** *De telles questions appartiennent au champ de l'origine « mystérieuse » et « archaïque » des mathématiques, et autour d'elles, naissent toujours d'autres questions tout aussi légitimes mais pour lesquelles l'élaboration théorique première*

manque, si tant est que la compréhension approfondie de ces questions ne puisse connaître d'autre destin que celui de la complexification-ramification rétroactive a posteriori.

- **Autre question surgissante** : De quelle manière le droit n'achève-t-il jamais sa course ?



- **Inachèvement de la rectilinéarité.** *La nature visible de ce qui se propage droitement dans des milieux transparents appelle immédiatement à un questionnement sur l'indéfini de sa course, et ouvre le questionnement sur la dialectique aristotélicienne entre l'infini actuel et l'infini potentiel.*

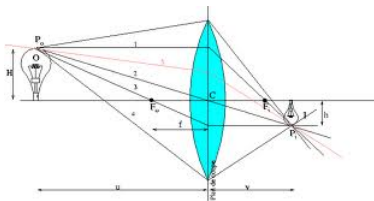
- **Méthode rétrospective en philosophie des mathématiques :**

□ Reconstituer le champ mystérieux du conceptuellement obstaclifiant en engageant la pensée dans les méandres

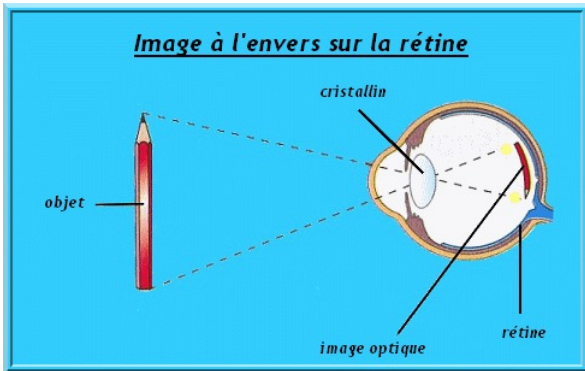
méditationnels de l'Inconnu pur potentiellement universalisable au sein de l'être-là

- **Autres difficultés sur le chemin d'une appréhension de la nécessité possible d'une *nature mathématique projective indépendante***

- **Structure projectrice de l'œil :**

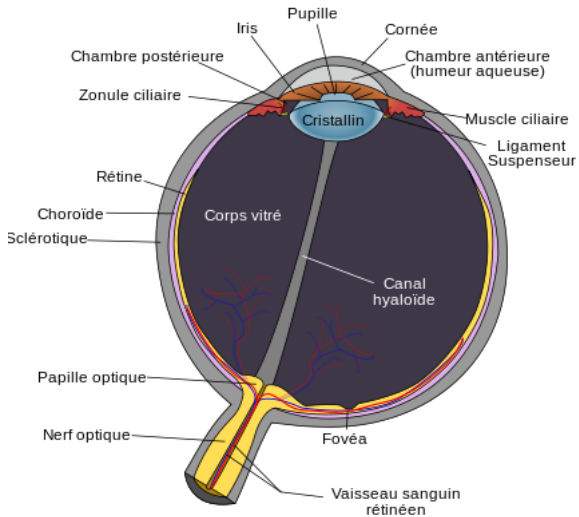


l'œil inverse l'image de tout objet situé dans le champ visuel :



Le haut devient le bas, la droite devient la gauche.

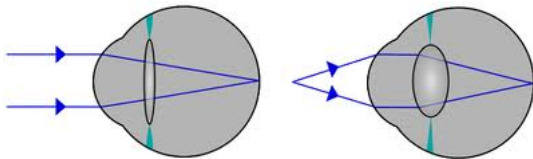
Survient alors encore une autre question inassumable, trop complexe et trop vaste pour être résolue en totalité.



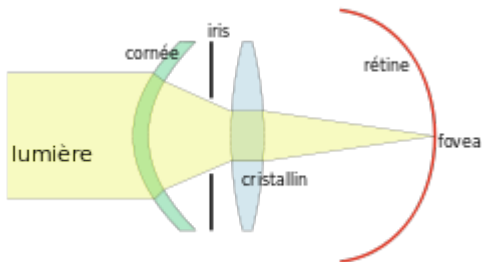
- **Question de finalité biologique.** *En quoi la traversabilité ou la limpidité des milieux aériens ou aquatiques dans lesquels évoluent les espèces animées se distinguerait-elle d'autres milieux au sein desquels une appréhension sensorielle réellement tridimensionnelle serait possible ?*

L'inventivité biologique du monde pourrait ainsi avoir créé certains êtres susceptibles de se mouvoir *dans toute l'épaisseur simultanée des trois dimensions spatiales euclidiennes*, certains êtres réellement abilités à « voir tridimensionnellement » un milieu rigide non traversable, non bidimensionnalisable, *non projectivisable*.

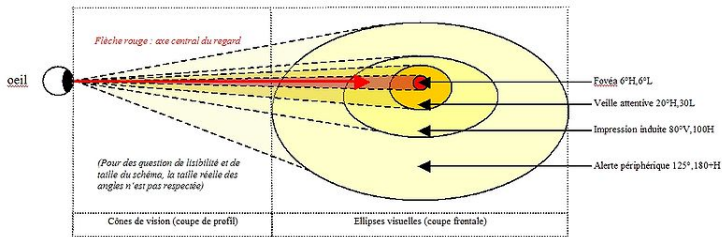
- **Rétine :**



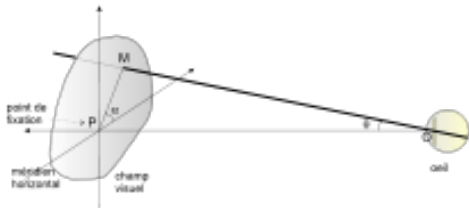
- **Bi-dimensionnalisation biologique** : À l'entrée du globe oculaire, le cristallin — merveille inimitable de micro-technie biologique —, petit disque fibreux, transparent, flexible, a pour principale fonction de *focaliser l'image sur la rétine*, à savoir de capturer, de réduire et de concentrer l'information extérieure tridimensionnelle sur un arrière-plan concave légèrement bombé qui, lui, est en première approximation, bidimensionnel.



• Sphères virtuelles :



- **Angles solides** : Sur la sphère idéale virtuelle qu'il transporte avec lui, le champ visuel de l'œil balaye des angles solides de plus en plus larges auxquels des récepteurs sensoriels sont spécifiquement adaptés.



Conséquemment, le champ visuel de l'œil, bien qu'étant par définition un volume (un cône de révolution), s'approprie une section plane perpendiculaire aux demi-axes optiques par lesquels il balaie librement l'espace traversable.

Espaces projectifs mathématiques

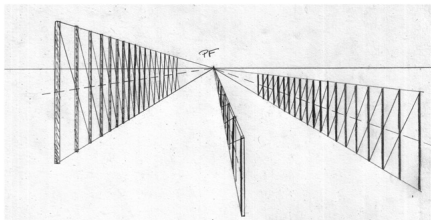
- **Résumé** : Ainsi, l'œil voit *planairement*. Les organes de la vision possèdent la vertu de *bidimensionnaliser* le tridimensionnel. C'est donc au moins dans la constitution biologique des êtres que se manifeste une nécessité *a posteriori* du projectif mathématique, comme perte-projection d'une dimension pour appropriation-perception.
- **L'infini (in)visible** : Mais alors, c'est grâce à cette formidable puissance que l'œil a de parcourir les rayons sans rencontrer d'obstacle que l'*infini semble se présenter comme devenant parfaitement visible*.



- **Point de fuite ferroviaire :**



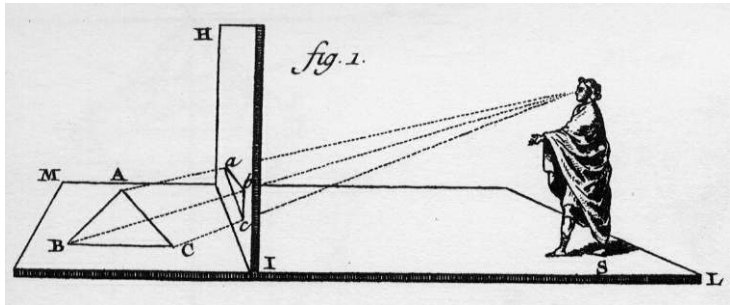
- **Rectilinéarités de civilisation :**



- **Attraper des points à l'infini** : L'éloignement physique, la distance à parcourir, s'installent donc dans une situation particulièrement paradoxale avec la possibilité d'attraper les points d'horizon dans le champ visuel.

Thèse. *La projection visuelle opère une compactification immédiate de l'espace, une actualisation instantanée de l'infini.*

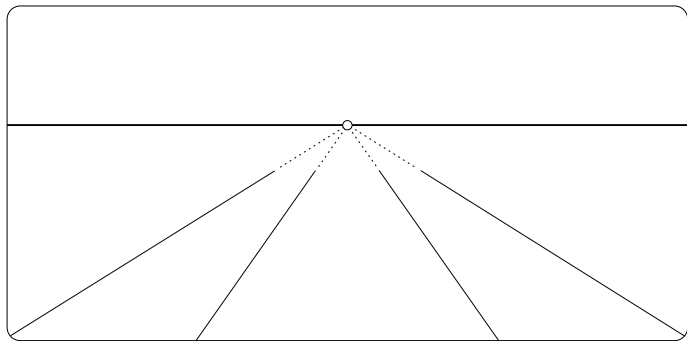




- **Projectivités géométriques**

Thèse. *La pensée mathématique va alors abstraire adéquatement ce procédé de rapatriement de l'infini par compactification géométrique.*

- Géométriser :



Thèse. *L'abstraction mathématique élargit librement les modalités contingentes du réel, elle déréalise le réel brut afin de créer une nouvelle espèce de réel qui s'avérera posséder a posteriori sa propre force d'auto-engendrement conceptuel dynamique.*

● **Commentaire** : Mais ici, l'acte de compactification par projection-perte-de-dimension ne se contente d'ailleurs nullement de capturer l'infini à l'intérieur du cadre fini de l'écran bidimensionnel : de surcroît, l'essence immédiatement accessible du projectif mathématique manifeste aussi simultanément une remarquable :

Thèse. [Complémentarité entre l'extrinsèque et l'intrinsèque]
Toute projectivisation par projection planaire inscrit l'espace externe de l'objectalité géométrique diversifiée dans la saisie-appropriation visant à l'internalisation du donné, en réponse à une exigence universelle d'immanentisation de la donation mathématique.

● **Commentaire** : Ainsi, rétrospectivement, c'est-à-dire dans l'*a posteriori* imprévisible d'explorations mathématico-spéculatives de plus en plus approfondies, le rôle ubiquitaire et répétitif des espaces projectifs comme conditions d'externalité universelle se révèle de plus en plus incontestable, venant de la sorte compléter, à la manière dont Helmholtz en rêvait, la présence manifeste de l'étant mathématique par des faisceaux de nécessités intensives qui raisonnent démonstrativement *a priori*.

Thèse. *La projection tend à immanentiser l'externalité en accouplant l'extrinsèque à l'intrinsèque.*

● **Spéculation** : Cependant, à travers tout acte métaphysique involontaire de cette espèce, l'ordre de toute perspective reste entaché de ses aspects initiaux d'arbitraire : Pourquoi tel ou tel plan de projection ? Existe-t-il un lien entre diverses projections planaires ? Une cohérence globale sous-tend-elle la variabilité des processus ?

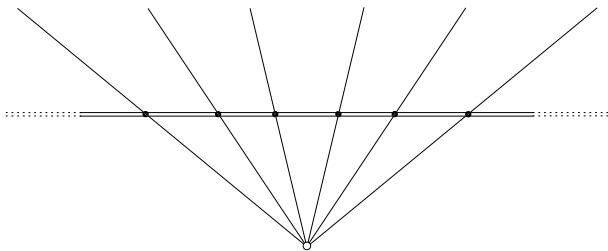
Thèse. *Si la mathématique est une pensée, c'est qu'elle interroge constamment le substrat théorique dans la tension intensive ineffaçable d'un questionnement en recherche de compréhension.*

Bien sûr, une comparaison entre projections multiples va faire naître une pensée synthétique supérieure, irréversiblement éclairée d'aspects nouveaux qui complèteront une compréhension imprégnée d'un questionnement ineffaçable, constitutif d'une subjectivité mathématique transcendantale en recherche d'elle-même, dans et par le maintien des questionnements purs en tant que tels.

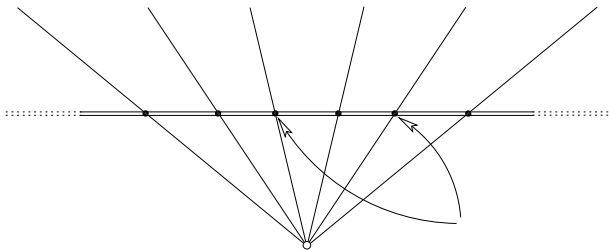
Thèse. *En mathématiques, la cohérence est une manifestation interne, une expérience de la pensée — et non pas une expérience de pensée —, une expérimentation par la pensée, dans son parcours interrogatif suspendu rigoureusement au réel des problèmes, une expérience, donc, de phénomènes locaux de cohérence qui sont totalement indépendants d'un quelconque libre-arbitre subjectif, et qui néanmoins, ne peuvent conduire à une certitude absolue concernant un éventuel caractère objectif incontestable de la chose.*

● **Commentaire :** *A posteriori*, donc, la constitution déductive, voire axiomatico-déductive, du champ théorique définitionnel initial de la théorie des espaces projectifs trouve un langage minimal qui offre à la pensée une voie de circulation structurée, bien que n'exprimant pas dans et sous tous les angles-langages possibles de la pensée les aspects dialectiques, unitaires, producteurs de cohérence immanente.

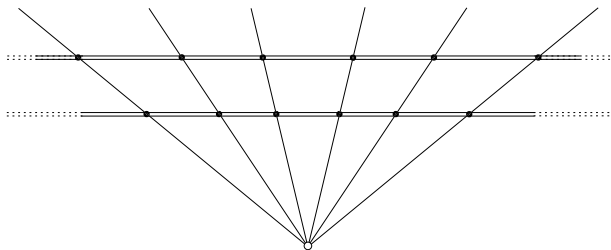
• **Commentaire** : L'espace projectif, pour la mathématique des définitions structurantes, ce sera l'espace des droites qui passent par l'origine dans un espace vectoriel époinché, à savoir privé de l'origine. De la sorte, la compacité n'apparaît pas immédiatement dans sa limpidité initiale, mais ce qui importe le plus à ce tout premier stade, c'est de faire voir que les perspectives mobilisent une variabilité géométrique librement et multiples orientable, en coprésence de l'exigence indélébile de pensée dominatrice.



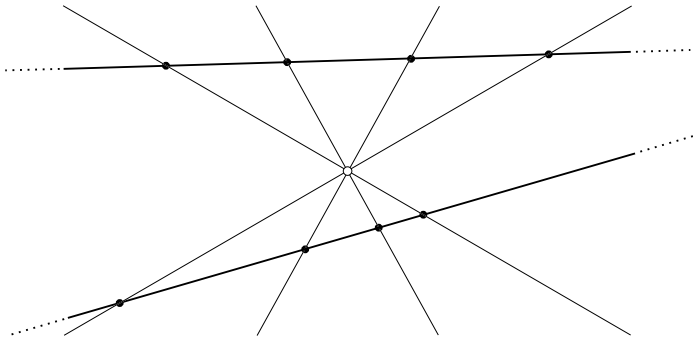
L'œil-origine, donc, faisceautise les perspectives en centralisant l'épure géométrique multiple.



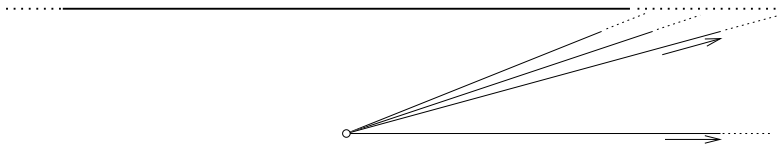
Libérées de l'appareillage biologique de la perception visuelle, les trajectoires-droites deviennent *abstraitement interceptrices* : apparition de points-multiples découpant de manière univoque l'être de la rectilinéarité variable.



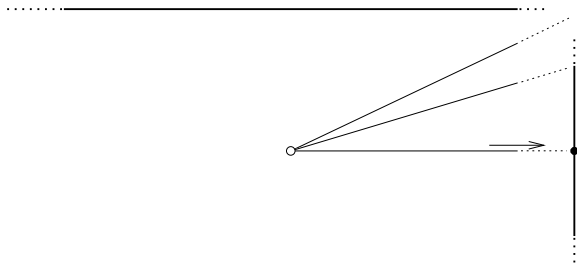
L'équivalence interceptrice éclate en tant qu'évidence géométrique thalésienne : tout point répond à tout point, quelle que soit la distance d'éloignement, rigoureusement parallèle dans un premier moment.



Puis surgit l'angulation : les perspectives s'illustrent, elles entrent en mouvement, s'animent, car les questions intuitives jaillissent.

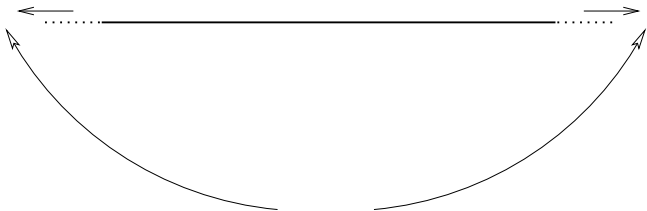


C'est à l'infini d'interception invisible que conduit l'abaissement ultime jusqu'au parallélisme.

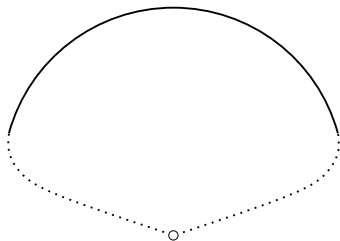


Enfin entre en scène le *Projectif dans son essence la plus pure* :

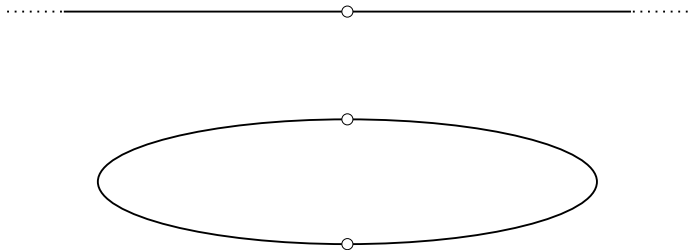
- **Finitation projective de l'infini** : *Tout point qui semble rejeté à l'infini dans une première perspective initiale peut être instantanément recapturé dans le fini nouveau d'une autre projection perspectivante.*



Ainsi topologiquement, le point à l'infini doit être unique, identique à lui-même et à lui-seul.



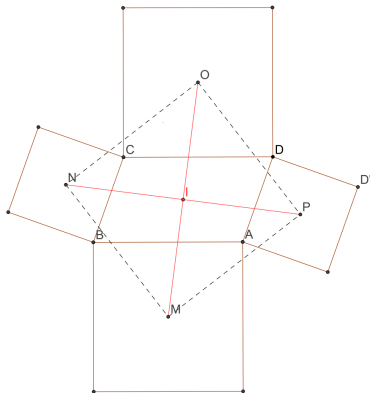
Et la droite aux extrémités lancées dans l'interstellaire se referme sur elle-même, devient *cercle*, paradigme absolu de la compacité et de l'auto-fermeture immanente.



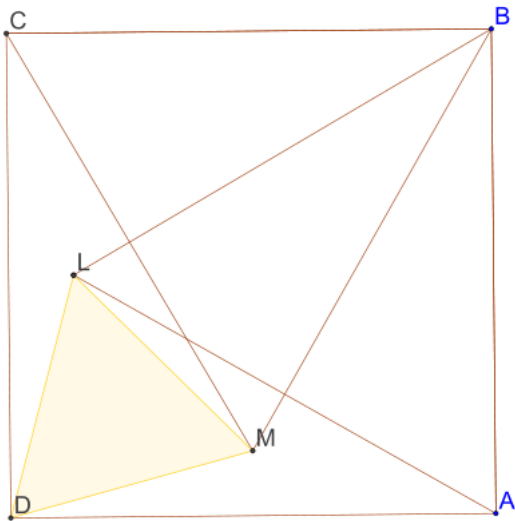
GÉOMÉTRIE IMMÉDIATE

Théorèmes de Thébault (1937–1938)

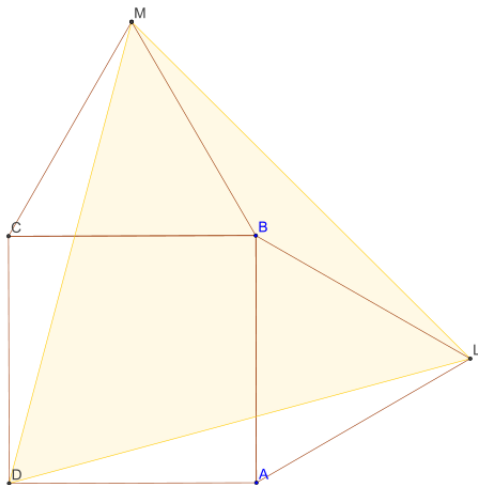
- 4 Carrés construits sur un parallélogramme :



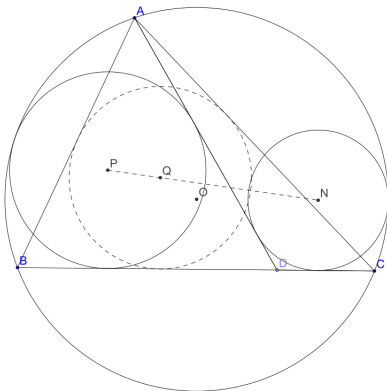
- Deux triangles équilatéraux construits sur les côtés consécutifs d'un carré : Cas intérieur :



- Deux triangles équilatéraux construits sur les côtés consécutifs d'un carré : Cas extérieur :

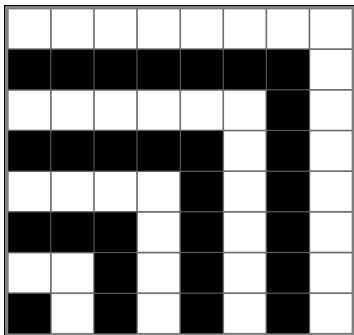


Théorème. Soit ABC un triangle quelconque, soit Q le centre du cercle inscrit, soit \mathcal{C} le cercle circonscrit, soit un point $D \in BC$ quelconque, soit N le centre du cercle tangent à DC , DA , \mathcal{C} , et soit P le centre du cercle tangent à DB , DA , \mathcal{C} . Alors P , Q , N sont alignés.



Sommes de carrés, de cubes, de puissances k -èmes

- **Question de l'Ange de la Géométrie : Que vois-tu ?**



- **Réponse : Je vois :**

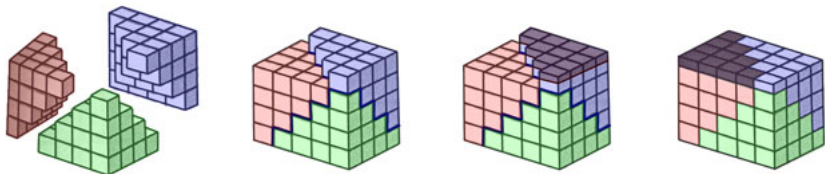
$$n^2 = 1^2 + 3^2 + \dots + (2n - 1)^2.$$

- **Méfie-toi, ange, car je suis le démon de l'Algèbre !**

- **Angle de la Géométrie, peux-tu aussi faire voir :**

$$1 + 4 + 9 + \dots + n^2 = \frac{n(n + \frac{1}{2})(n + 1)}{3}.$$

- **Certainement, démon de l'Algèbre :**



Nécessité de dé-géométriser ?

- **Premiers nombres de Bernoulli :**

$$B_0 = 1,$$

$$B_1 = -\frac{1}{2},$$

$$B_2 = \frac{1}{6},$$

$$B_3 = 0,$$

$$B_4 = -\frac{1}{30}.$$

- **Convention local :**

$$B_1 = +\frac{1}{2}.$$

- **Formules de Faulhaber :**

$$\sum_{k=1}^n k^p = \frac{1}{p+1} \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j} B_j n^{p+1-j}.$$

• **Exemples :**

$$1^1 + 2^1 + 3^1 + \dots + n^1 = \frac{n^2 + n}{2},$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6},$$

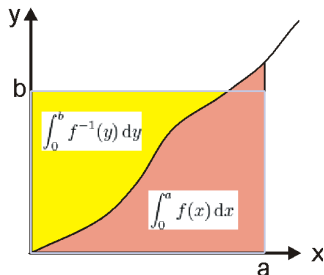
$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4},$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30},$$

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12},$$

$$1^6 + 2^6 + 3^6 + \dots + n^6 = \frac{6n^7 + 21n^6 + 21n^5 - 7n^3 + n}{42}.$$

Inégalité intégrale de Young



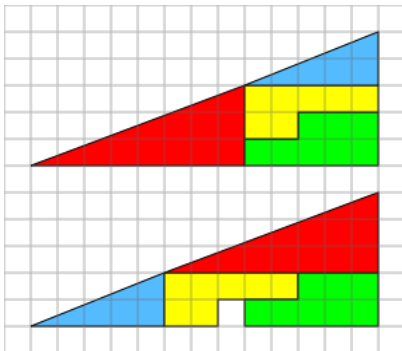
Théorème. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue strictement croissante telle que $f(0) = 0$. Alors pour tout b avec $0 \leq b \leq f(a)$, on a :

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy,$$

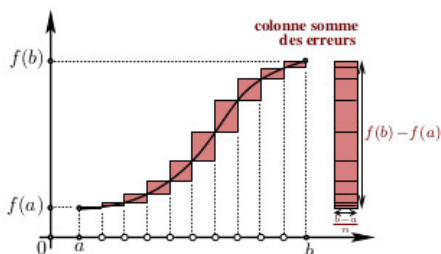
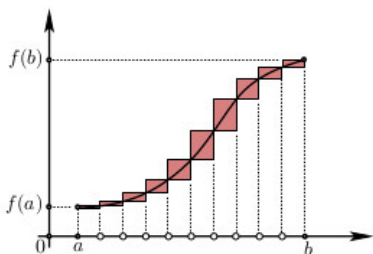
avec égalité seulement lorsque $b = f(a)$.

Peut-on parler de démonstration ?

- **Question** : *Les preuves sans mots constituent-elles des démonstrations au sens mathématique du terme ?*
- **Écueil des preuves visuelles** : Possibilité de résultats manifestement absurdes
- **Exemple** : **Paradoxe du carré manquant** :

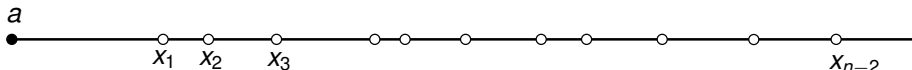


Intégrabilité au sens de Riemann des fonctions monotones



Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$ et soit l'intervalle fermé borné donc compact :

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$



• **Subdivisions** : Une *subdivision* Δ d'un tel intervalle $[a, b]$ est une suite finie de nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ satisfaisant :

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

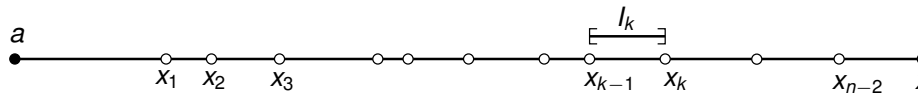
Étant donné une telle subdivision, considérons les intervalles :

$$I_k := [x_{k-1}, x_k] \quad (k = 1 \dots n),$$

et notons :

$$|I_k| := x_k - x_{k-1}$$

leurs longueurs.



- **Sommes de Darboux** : À toute fonction bornée :

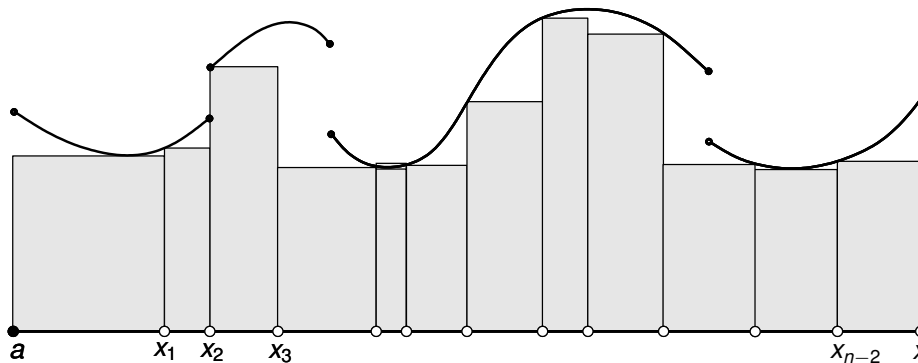
$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

à savoir qui satisfait :

$$-\infty < \inf_{a \leq x \leq b} f(x) \leq \sup_{a \leq x \leq b} f(x) < \infty,$$

sont associées premièrement la *somme de Darboux inférieure* relativement à la subdivision Δ :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Delta}(f) &:= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^n |I_k| \inf_{x \in I_k} f, \end{aligned}$$

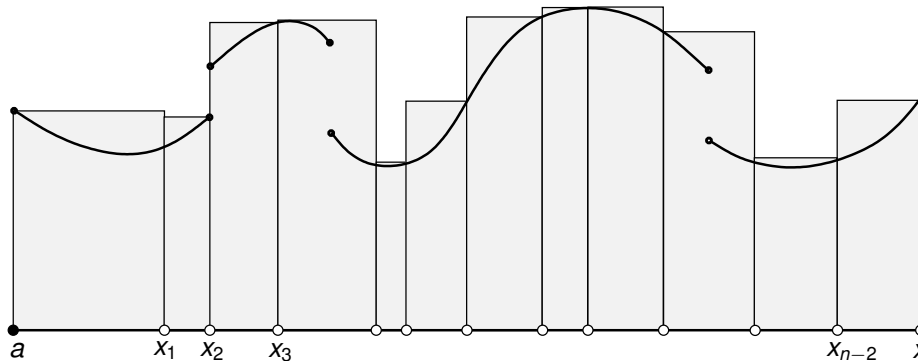


et deuxièmement la *somme de Darboux supérieure* :

$$\begin{aligned}
 \Sigma^{\Delta}(f) &:= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \sup_{x_{k-1} \leq x \leq x_k} f \\
 &= \sum_{k=1}^n |I_k| \sup_{x \in I_k} f(x).
 \end{aligned}$$

- **Observation spéculative** : La fonction f n'est pas supposée continue, ni même discontinue seulement en un nombre fini de points. Et aussi, il n'y a aucune raison pour que la subdivision Δ s'adapte aux points de discontinuité de f lorsqu'il en existe.

Dialectique diagrammatique



- **Observation** : Toutes les quantités :

$$\inf_{x \in I_k} f \quad \text{et} \quad \sup_{x \in I_k} f$$

sont des nombres réels *finis*, puisque f est supposée *bornée*.

Lemme. *La somme de Darboux inférieure est minorée uniformément.*

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Delta}(f) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{I_k} f \\ &\geq \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \inf_{[a,b]} f \\ &= \left(b - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_2 - x_1 + x_1 - a \right) \inf_{[a,b]} f \\ &= (b - a) \inf_{[a,b]} f \\ &> -\infty, \end{aligned}$$

Lemme. *La somme de Darboux supérieure est majorée uniformément.*

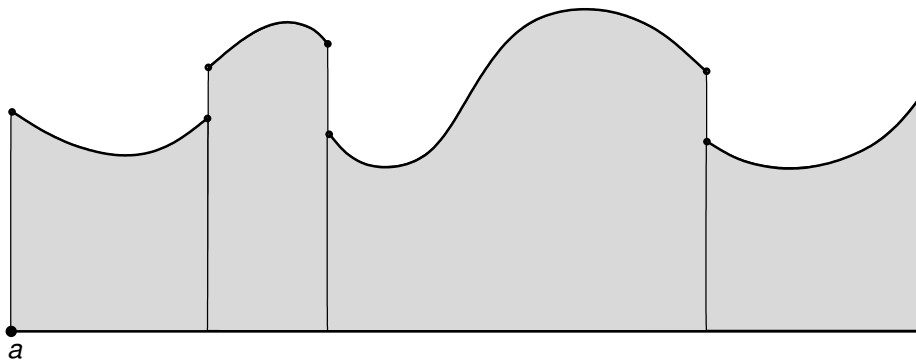
$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(f) &\leq (b - a) \sup_{[a,b]} f \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Enfin, puisque :

$$\inf_{I_k} f \leq \sup_{I_k} f,$$

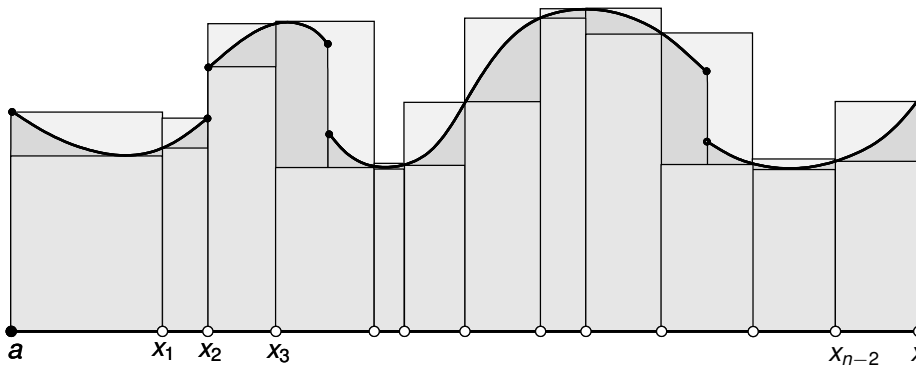
pour tout $k = 1, \dots, n$, ces sommes satisfont toujours manifestement (exercice direct) :

$$\Sigma_{\Delta}(f) \leq \Sigma^{\Delta}(f).$$



- **Interprétation géométrique en termes de l'aire de l'hypographe de f .**

$$\Sigma_{\Delta}(f) \leq \text{Aire}(\text{hypographe}(f)) \leq \Sigma^{\Delta}(f).$$



• **Intégrabilité au sens de Riemann** : Une fonction *bornée* $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann*, ou de manière abrégée *Riemann-intégrable*, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leq \varepsilon.$$

Théorème. *Toute fonction monotone (bornée) f sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

• **Démonstration :**

$$\begin{aligned} 0 \leq \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \left(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\geq 0} \underbrace{(f(x_k) - f(x_{k-1}))}_{\text{toujours } \geq 0} \end{aligned}$$

$$\leq \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \sum_{k=1}^n (f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

[Somme télescopique !]

$$= \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) \left[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \dots \right. \\ \left. \dots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1}) \right]$$

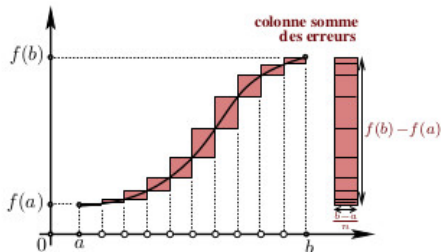
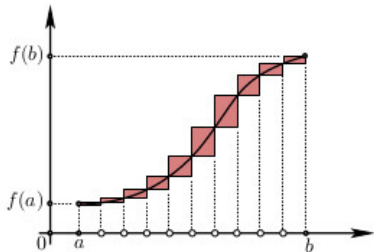
$$= \max_{1 \leq k \leq n} (x_k - x_{k-1}) [f(b) - f(a)].$$

- **Ainsi** : Pourvu seulement que la subdivision Δ soit choisie assez resserrée pour que :

$$x_k - x_{k-1} \leq \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \quad (k=1 \dots n),$$

on obtiendra bien $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq \varepsilon$.

- **Intuition diagrammatique** :

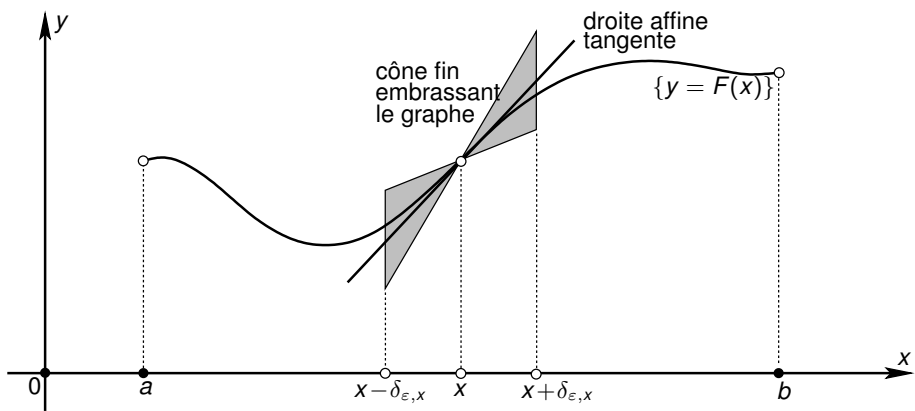


Intégration de la dérivée d'une fonction

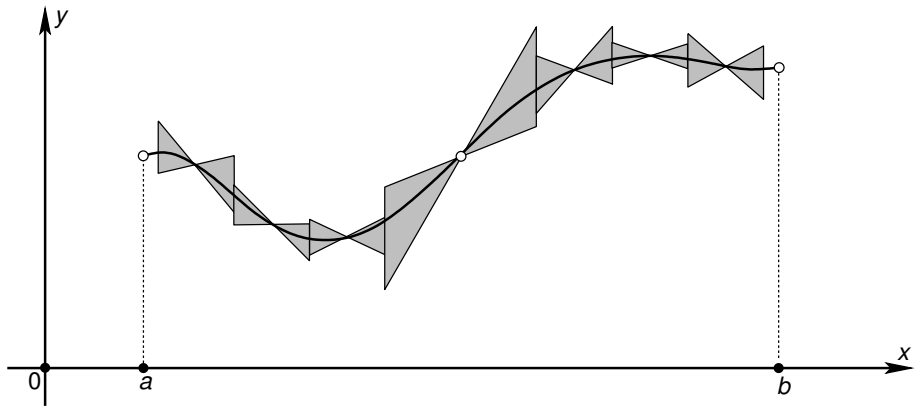
- **Question :** Quand peut-on écrire :

$$\int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

- **Dérivée en un point :**

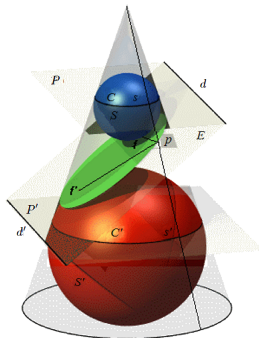


- Canalisation par des cônes :

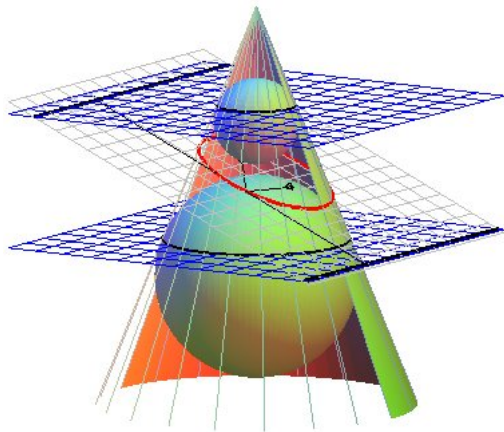


Sphères de Dandelin

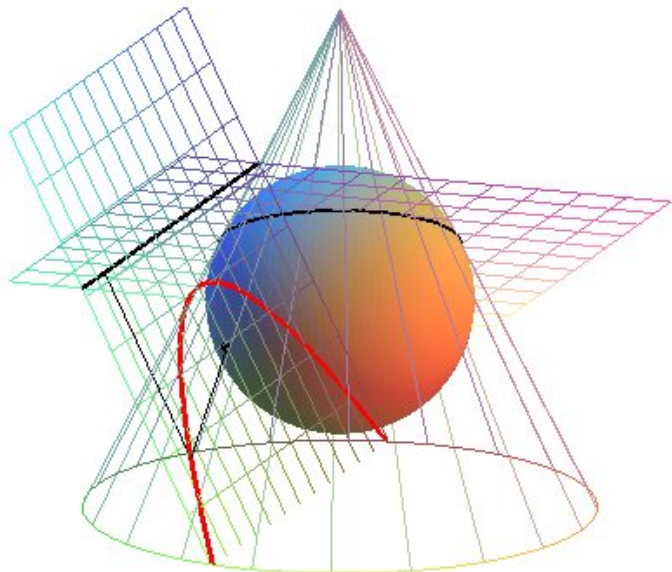
- Sections coniques : Cas d'une ellipse :



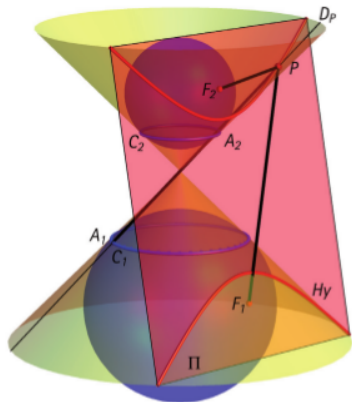
- Autre illustration :



- Sections coniques : Cas d'une parabole :



- Sections coniques : Cas d'une hyperbole :



Théorème. [Dandelin 1822] *Si une ellipse, une parabole, ou une hyperbole est obtenue comme section conique d'un cône de révolution par un plan, alors il existe deux sphères à la fois tangentes au cône et au plan de la conique (de part et d'autre de ce plan pour l'ellipse et d'un même côté de ce plan pour l'hyperbole), et les points de tangence des deux sphères au plan sont les foyers de la conique.*

- **Complément** : Les directrices de la conique sont les intersections du plan de la conique avec les plans contenant les cercles de tangences des sphères avec le cône.

Alain Connes

The duality :

Geometry \longleftrightarrow **Algebra**

already present in projective geometry, allows, when it is viewed as a mutual enhancement, to translate back and forth from geometry to algebra and to obtain statements that would be hard to guess if one would stay confined in one of the two domains. This is best illustrated by a very simple example.

- **Image d'Épinal** : Les mathématiques fonctionnent sur deux registres complémentaires : « le visuel » qui perçoit instantanément le sens d'un théorème sur une figure géométrique, et « l'écrit » qui s'appuie sur le langage, sur une algèbre, et s'inscrit dans la durée.
- **Hermann Weyl** : « l'ange de la géométrie et le diable de l'algèbre » se partagent la scène.
- **Commentaire** : Les travaux d'Alain Connes s'inscrivent dans la relation entre ces deux registres. Jusqu'à la découverte en 1925 de la mécanique quantique, la géométrie classique était basée sur la

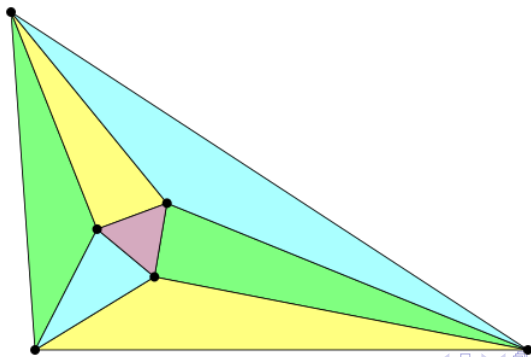
dualité, inaugurée par Descartes et l'introduction des coordonnées cartésiennes, entre géométrie et algèbre commutative. L'algèbre commutative, est une algèbre dans laquelle le produit de deux quantités algébriques ne dépend pas de l'ordre de leurs termes, c'est-à-dire que :

$$A \cdot B = B \cdot A.$$

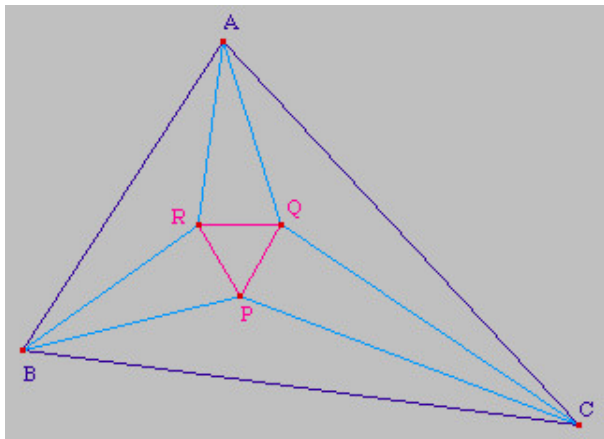
Avec la découverte de la mécanique quantique par Heisenberg, l'espace géométrique des états d'un système microscopique, un atome par exemple, s'est enrichi de nouvelles propriétés de ses coordonnées, comme le moment et la position qui ne commutent plus. Le but de la géométrie non-commutative est de généraliser la dualité entre espace géométrique et algèbre au cas plus général où l'algèbre n'est plus commutative. Cela conduit à modifier deux concepts fondamentaux des mathématiques, ceux d'espace et de symétrie, et à adapter l'ensemble des outils mathématiques, dont le calcul infinitésimal et la cohomologie à ces nouveaux paradigmes.

Théorème de Morley

Théorème. [« Miracle de Morley »] Soit ABC un triangle quelconque. Si on trace les trissectrices de ses angles (géométriques), celles adjacentes aux côtés se coupent en trois points P , Q , R , et alors PQR est un triangle équilatéral. Alain CONNES

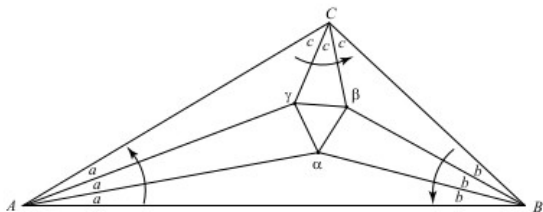


Apparemment ignoré par les géomètres antérieurs ou hâtivement abandonné en raison d'incertitudes liées à la trisection et à la constructibilité, le problème n'apparut réellement qu'il y a un siècle.



This is typical of the power of the duality between on the one hand the visual perception (where the geometrical facts can be sort of obvious) and on the other hand the algebraic understanding.

- **Démonstration :**



- **Nombres complexes :**

$$z = x + \sqrt{-1} y \in \mathbb{C}.$$

- **Transformations affines :**

$$z \mapsto \lambda z + l.$$

- **Hypothèse constante :**

$$\lambda \neq 1.$$

- **Composition de similitudes :**

$$z \mapsto \lambda z = \underbrace{|\lambda|}_{\text{homothétie}} \cdot \underbrace{e^{\sqrt{-1} \text{Arg } \lambda}}_{\text{rotation}} \cdot z,$$

avec des translations :

$$z \mapsto z + \underbrace{\ell}_{\text{vecteur}}.$$

- **Troisième racine de l'unité :**

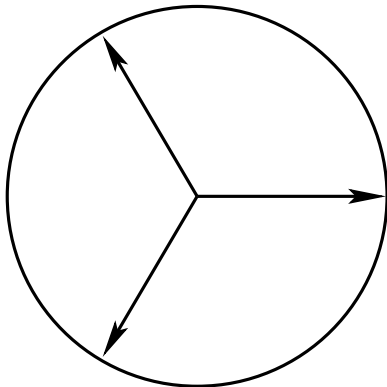
$$j := e^{\frac{\sqrt{-1} 2\pi}{3}},$$

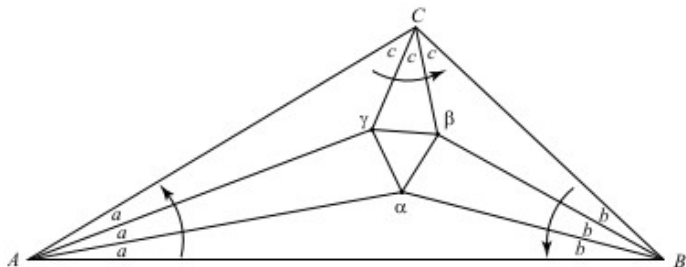
satisfaisant donc :

$$j^3 = 1.$$

- **Fait géométrico-algébrique élémentaire :**

$$0 = 1 + j + j^2.$$





Lemme. *Un triangle α, β, γ dans $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, est équilatéral si et seulement si :*

$$0 = \alpha + j\beta + j^2\gamma.$$

The relation $\alpha + j\beta + j^2\gamma = 0$ is a well known characterization of equilateral triangles. It means $\frac{\alpha-\beta}{\gamma-\beta} = -j^2$, so that one passes from the vector $\overrightarrow{\beta\gamma}$ to $\overrightarrow{\beta\alpha}$ by a rotation of angle $\pi/3$.

Alain CONNES.

- **Preuve** : Résoudre :

$$\gamma \cdot (j^2 \gamma = -\alpha - j\beta).$$

- **Calculer et simplifier** :

$$\gamma - \beta = -j\alpha + j\beta.$$

- **Obtenir en effet** :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha - \beta}{\gamma - \beta} &= \frac{\alpha - \beta}{-j\alpha + j\beta} \\ &= -\frac{1}{j} \\ &= -j^2 \\ &= e^{\sqrt{-1} \frac{\pi}{3}}. \end{aligned}$$

- Transformation euclidiennes :

$$\text{Rotation} \left(A, \frac{2a}{3} \right) =: f,$$

$$\text{Rotation} \left(B, \frac{2b}{3} \right) =: g,$$

$$\text{Rotation} \left(C, \frac{2c}{3} \right) =: h.$$

- Écrire :

$$f = \lambda z + \ell,$$

$$g = \mu z + m,$$

$$h = \nu z + n.$$

- **Euclide :**

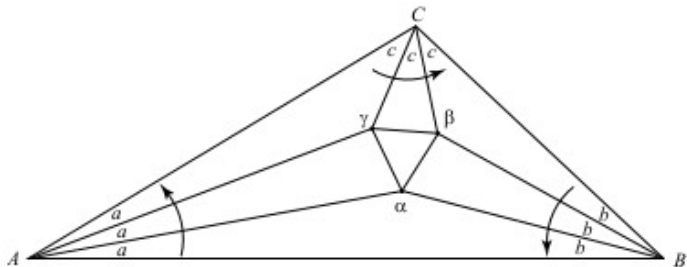
$$a + b + c = \pi,$$

i.e. :

$$2a + 2b + 2c = 2\pi.$$

- **Conséquence :**

$$f^3 \circ g^3 \circ h^3 = 1.$$



- Géométrie :

$$\alpha = \text{Fix}(f \circ g),$$

$$\beta = \text{Fix}(g \circ h),$$

$$\gamma = \text{Fix}(h \circ f).$$

Lemme. [Exercice d'algèbre !] Alors on a :

$$f \circ g \circ h(z) = jz + \text{translation},$$

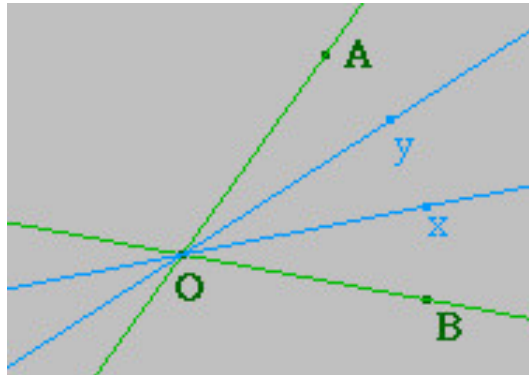
toujours avec $j^3 = 1$, et aussi :

$$0 = \alpha + j\beta + j^2\gamma.$$

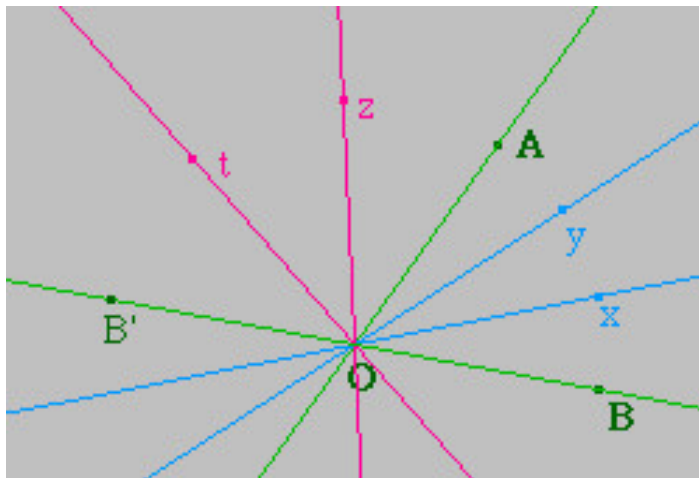
- **Observation** : Vrai plus généralement dans un corps K .

Déploiements du théorème de Morley

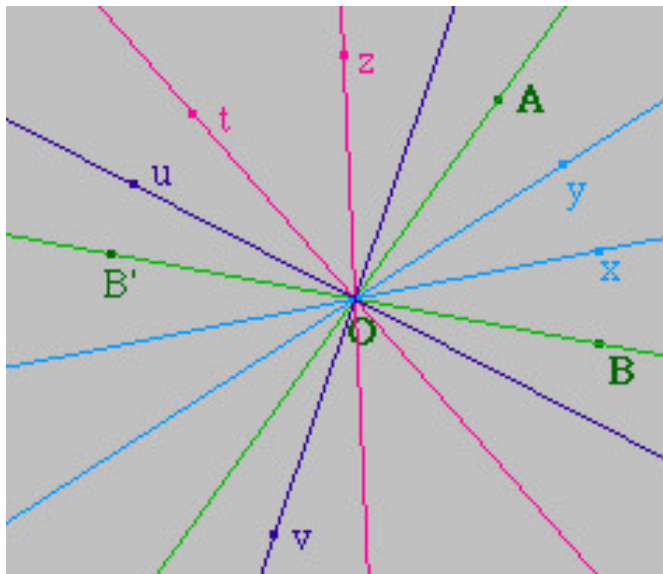
- **2 trisectrices "intérieures"** :



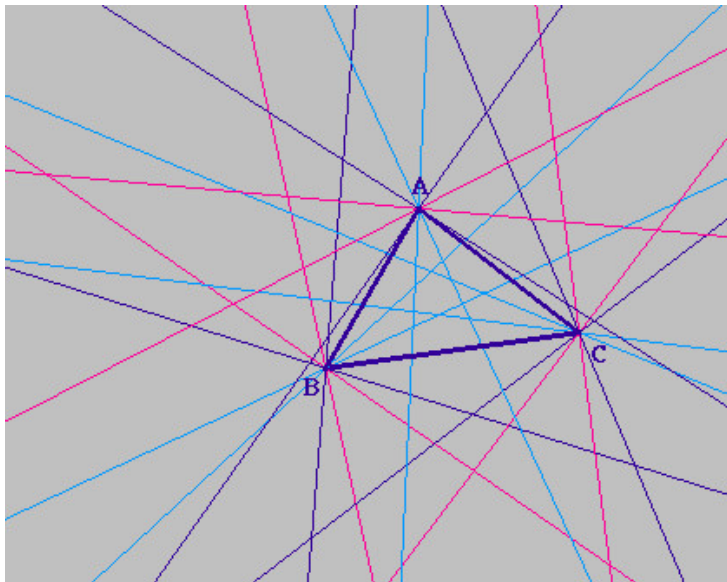
- 4 trisectrices de droites :



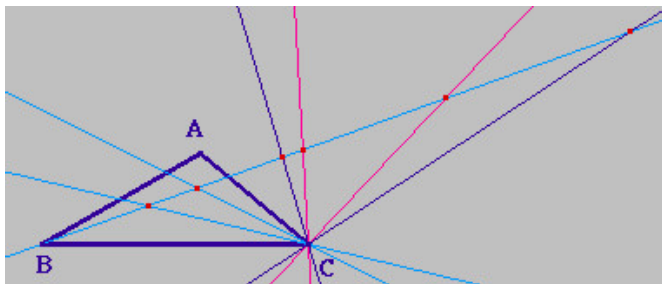
- 6 trisectrices d'un angle de vecteurs :



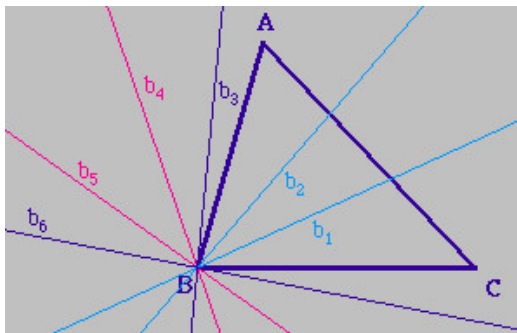
- 18 trisectrices d'un triangle :



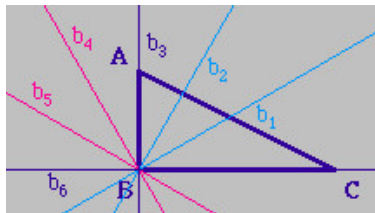
- Intersections entre trisectrices :



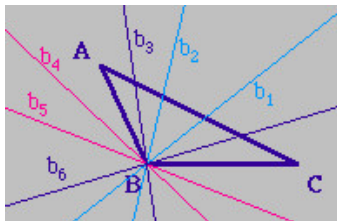
- Trisectrices intérieures :



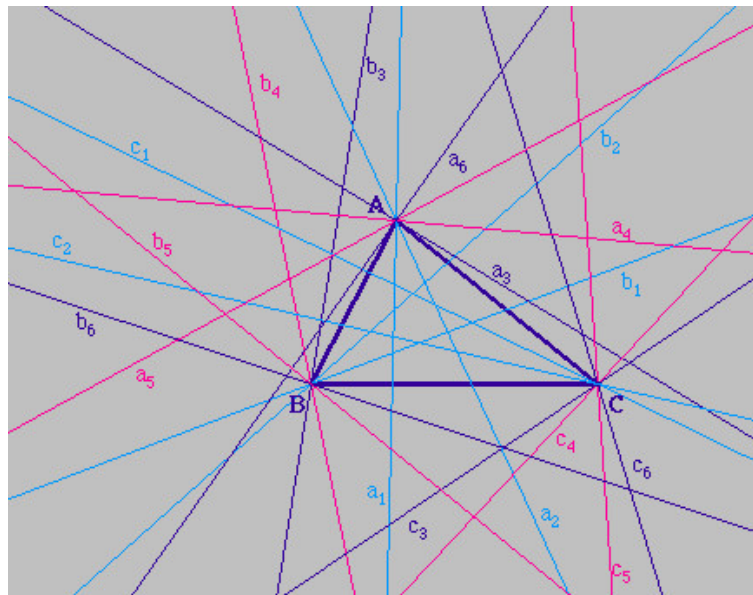
- Angle 90 degrés :



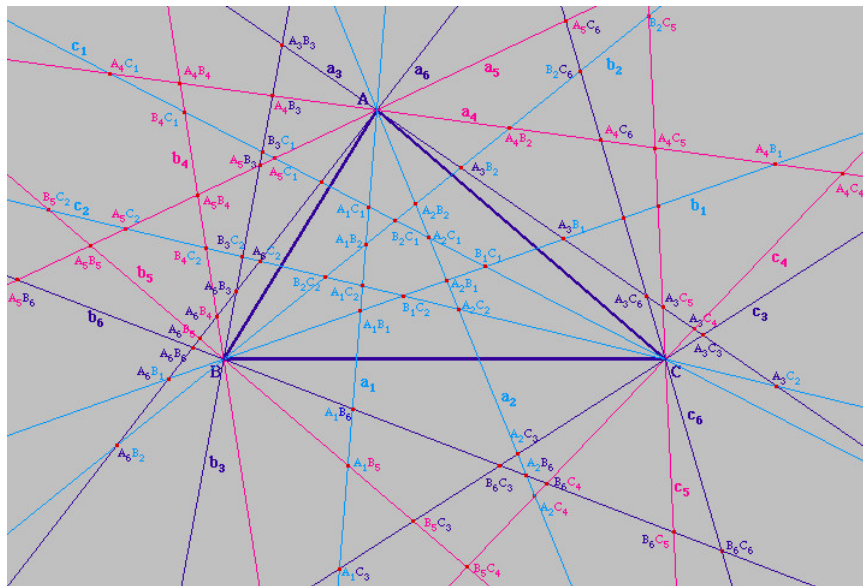
- Angle 120 degrés :



- 1-3-5 et 2-4-6 :



• Figure complète :



• M[^]eme figure vue de loin :

