Devoir n$^{\text{o}}$ 3

Pieter Belmans

17 décembre 2012

Exercice 1. Soit D un diviseur sur la sphère de Riemann $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$. Vérifier que :

a) $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) = \max\left\{0, 1 + \deg \mathrm{D}\right\}$;

b) $\dim \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) = \max\left\{0, -1 - \deg \mathrm{D}\right\}$;

Démonstration. a) Nous avons le théorème sur l'annulation d'indice de spécialité i(D) si $\deg \mathrm{D} \geq 2g - 2 + 1$. Mais dans le cas de la sphère de Riemann nous avons $g = 0$, donc ce théorème s'applique déjà dans le cas où $\deg \mathrm{D} \geq -1$. Alors Riemann-Roch nous donne que

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) &= 1 - g + \deg \mathrm{D} + \mathrm{i}(\mathrm{D}) \\ &= 1 + \deg \mathrm{D}. \end{aligned} \tag{1}$$

Pour le cas $\deg \mathrm{D} \leq -1$ nous avons comme toujours $\ell(\mathrm{D}) = 0$. Donc nous avons obtenu que

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) = \begin{cases} 1 + \deg \mathrm{D} & \deg \mathrm{D} \geq -1 \\ 0 & \deg \mathrm{D} \leq -1 \end{cases} \tag{2}$$

ce qui se laisse écrire comme $\dim \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) = \max\left\{0, 1 + \deg \mathrm{D}\right\}$.

b) Une reformulation de Riemann-Roch comme donnée au chapitre 18 "Dualité de Brill-Noether-Serre" dit que

$$\begin{aligned} \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) - \dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{-\mathrm{D}}) &= 1 - g - \deg -\mathrm{D} \\ &= 1 + \deg \mathrm{D}. \end{aligned} \tag{3}$$

Si nous appliquons la dualité de Brill-Noether-Serre, plus spécifiquement l'isomorphisme

$$\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \Omega_{-\mathrm{D}}) \cong \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}})^\vee \tag{4}$$

nous obtenons que (la dimension du dual d'un espace vectoriel à dimension finie a la même dimension !)

$$\dim \mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) - \dim \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{D}}) = 1 + \deg \mathrm{D} \tag{5}$$

et en appliquant le résultat de (a) nous avons

$$\max\left\{0, 1 + \deg \mathrm{D}\right\} - \dim \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_{\mathrm{X}}) = 1 + \deg \mathrm{D} \tag{6}$$

ou équivalent

(7) $\quad \dim \mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \mathcal{O}_\mathrm{X}) = \max\left\{0, -1-\deg \mathrm{D}\right\}.$

□

Exercice 2. Sur $\mathbb{P}^1_\mathbb{C}$, étant donné un diviseur $\mathrm{D} \geq 0$ effectif :

(8) $\quad \mathrm{D} = n_1 p_1 + \ldots + n_k p_k \qquad (n_i \geq 1),$

établir le théorème de Riemann-Roch en considérant des fractions rationelles.

Démonstration. J'ai déjà répondu à cette question dans l'examen partiel, mais faisons un synopsis ici.

Après changement de carte nous pouvons supposer que ∞ n'est pas parmi les points $p_1, \ldots, p_k$. Alors si z_i est la coordonnée locale pour p_i, les fonctions

(9) $$f_{i,j}(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{(z-z_i)^j} & z \neq \infty \\ 0 & z = 0 \end{cases} \qquad i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, n_i$$

nous donnent une base de $\mathcal{L}(\mathrm{D})$: la fonction $f_{i,j}$ à un pôle d'ordre j au point p_i. Alors il suffit d'observer que l'indice de spécialité est zéro pour $\mathrm{D} \geq 0$ car le genre est zéro, donc nous obtenons

(10) $\quad \ell(\mathrm{D}) = 1 + \deg \mathrm{D}$

où le +1 vient des fonctions constantes. □

Exercice 3. Soit S une surface de Riemann compacte de genre g et soit un diviseur $\mathrm{D} \in \mathrm{Div}(\mathrm{S})$ de degré $d = \deg \mathrm{D} \geq 2g+1$.

a) Vérifier que $\ell(\mathrm{D}) = d - g + 1$.

b) Soit $\left\{f_0, \ldots, f_{d-g}\right\}$ une base de $\mathcal{L}(\mathrm{D})$. Montrer que l'application

(11) $$\varphi \begin{array}{l} \mathrm{S} \to \mathbb{P}^{d-g}_\mathbb{C} \\ p \mapsto [f_0(p) : \ldots : f_{d-g}(p)] \end{array}$$

est bien définie, est injective et est immersive.

Démonstration. a) Comme toujours nous avons l'annulation d'indice de spécialité, parce que $\deg \mathrm{D} \geq 2g+1 \geq 2g-1$ et donc

(12) $\quad \ell(\mathrm{D}) = 1 - g + \deg \mathrm{D} = d - g + 1.$

b) Pour que cette application soit bien définie, il suffit de démontrer que les fonctions $f_0, \ldots, f_p$ ne s'annulent pas tous dans un point $p \in \mathrm{S}$ et qu'après changement de coordonnée holomorphe les fonctions $f_0, \ldots, f_p$ sont multipliées par un facteur holomorphe commun.

La première partie est obtenu par considérer un point p d'annulation hypothétique, alors on appelle p "un point de base". Mais $\deg \mathrm{D} \geq 2g$

implique que les diviseurs D et $D-p$ sont non-spéciaux, ce qui veut dire que $i(D) = i(D-p) = 0$. Alors $\ell(D-p) = \ell(D)-1$ et cela implique qu'il n'y a pas de point de base, comme démontré dans Proposition IV.3.1 de [7].
La deuxième partie est claire après observer qu'on peut annuler localement les facteurs z^k communs (on explicitera cette technique ci-dessous), alors localement le biholomorphisme s'annule : la composition des fonctions holomorphe peut être considerée comme la substitution des développement en séries. Alors on peut faire disparaître les premiers coefficients et les puissances de z communes.
Pour l'injectivité, nous savons que $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}(D-p)$ sont engendrés par leurs sections globale (leur degré est assez grand), et donc il existe une fonction méromorphe globale $f \in H^0(S, \mathcal{L}(D-p))$ telle que

$$\mathrm{ord}_q(f) = -D(q) \tag{13}$$

et

$$\mathrm{ord}_p(f) \geq -D(p)+1. \tag{14}$$

Comme f est aussi dans $H^0(S, \mathcal{L}(D))$ on peut le développer dans la base :

$$f = \sum_{i=0}^{d-g} \lambda_i f_i. \tag{15}$$

Alors, prenons (V_1, z_1) et (V_2, z_2) deux voisinages de q et p, centrés sur q et p respectivement. Le faisceau $\mathcal{L}(D)$ est engendré par ses sections globales, donc

$$\begin{aligned} -D(p) &= \min_{i=0,\dots,d-g} \mathrm{ord}_p(f_i) \\ -D(q) &= \min_{i=0,\dots,d-g} \mathrm{ord}_p(f_i) \end{aligned} \tag{16}$$

et nous appelons ces entiers k_p resp. k_q. Localement f s'écrit comme

$$\begin{aligned} f &= z_1^{k_q} g \\ f &= z_2^{k_p} h \end{aligned} \tag{17}$$

et après la même technique les fonctions de base s'écrivent comme

$$\begin{aligned} f_i &= z_1^{k_q} g_i \\ f_i &= z_2^{k_p} h_i. \end{aligned} \tag{18}$$

Donc nous avons après l'annulation des facteurs communs :

$$F(q) = \left[g_0(q) : \dots : g_{d-g}(q)\right] \tag{19}$$

et

$$F(p) = \left[h_0(p) : \dots : h_{d-g}(q)\right]. \tag{20}$$

Mais à cause de (14) nous avons $F(p) \neq F(q)$.

Pour l'immersivité le même raisonnement fournit une application locale

$$(21) \quad F_0 = \varphi_0 \circ F \colon W_0 \to \mathbb{C}^{d-g}$$

où après renumérotation on peut supposer $g_0(p) \neq 0$. L'application F_0 est constuite en divisant par g_0, ce qui donne F_0 est (localement) immersive, et cela suffit.

J'ai consideré cette exercice comme une exercice de révision, ou assimilation synthétique du cours, basée sur chapitre 18, Dualité de Brill-Noether-Serre. Plus de détail est disponible dans le polycopié.

□

Exercice 4. Sur une surface de Riemann compacte, établir l'existence de formes différentielles élémentaires de troisiéme espéce (exactement deux pôles distincts d'ordre 1) en appliquant le théorème de Riemann-Roch.

Démonstration. Une 1-forme méromorphe élémentaire de troisième espèce, si elle existe, doit vivre dans l'espace $\Omega(D)$ où $D = -p - q$ avec $p \neq q$. Le degré de ce diviseur est -2, donc nous avons par l'annulation de $\ell(D)$ pour $\deg D \leq -1$ que $\ell(D) = 0$, et alors par le théorème de Riemann-Roch

$$(22) \quad \ell(D) - i(D) = 1 - g + \deg D \quad \Leftrightarrow \quad i(D) = g - \deg D - 1 = g + 1.$$

Si $g = 0$ nous construisons une forme différentielle méromorphe élélementaire de troisième espèce par prendre $p = z_0 \neq \infty$ et $g = z_1 \neq \infty$ après une transformation de Möbius, et alors mettons

$$(23) \quad f(z) := \frac{z - z_0}{z - z_1}.$$

Nous obtenons comme différentielle logarithmique normalisée

$$(24) \quad \varphi := \frac{1}{2\pi i} \frac{df}{f} = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{1}{z - z_0} - \frac{1}{z - z_1} \right)$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Si $g \geq 1$, il suffit de remarquer que $i(D) = g + 1 > i(-p) = g$ par annulation de $\ell(D)$ et donc il doit nécessairement exister une forme différentielle qui a un pôle dans q. Peut-être que cette fonction n'a pas de pôle dans p, mais appliquant le théorème d'annulation de la somme des résidus il existe un vrai pôle d'ordre 1 dans p, et les résidus sont aprés une normalisation donnés par

$$(25) \quad \mathrm{Res}_p \, \varphi = \frac{1}{2\pi i} \qquad \mathrm{Res}_q \, \varphi = \frac{-1}{2\pi i}.$$

Cette normalisation est admise car $\Omega(D)$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et multiplication par un scalaire induite multiplication sur les résidus, qui ne sont que des intégrales qui sont linéaires pour la multiplication. □

Exercice 5. Sur une surface de Riemann compacte S de genre $g \geq 1$ munie d'une base canonique (symplectique)

$$\gamma_1, \dots, \gamma_g, \gamma_{g+1}, \dots, \gamma_{2g} \tag{26}$$

de son premier groupe d'homologie $H_1(S, \mathbb{Z})$, si on spécifie les deux blocs de taille $g \times g$ de la matrices des périodes $\Pi_{g\times 2g} = \begin{pmatrix} Y_{g\times g} & Z_{g\times G} \end{pmatrix}$ associée à une base $\{\omega_1, \dots, \omega_g\}$ de $\Omega(S)$, vérifier que Y et Z sont inversibles.

Démonstration. Le point-clé est la deuxième rélation bilineaire de Riemann. Supposons d'abord que ω est une 1-forme holomorphe, telle que $\pi_i(\omega) = 0$ pour $i = 1, \dots, g$ (ou $i = g+1, \dots, 2g$), ce qui correspond à un bloc de la matrice des périodes. Alors la deuxième rélation est impossible à être rempli, donc ω doit être zéro.

Supposons alors que Y (resp. Z) n'est pas inversible, il existe alors $c_j \in \mathbb{C}$ pour $j = 1, \dots, g$ pas tout nuls tels que le vecteur des c_j fournit une combinaison de zéro non-triviale des lignes de Y (resp. Z).

Prenons maintenant $\omega = \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_i$, nous obtenons

$$\pi_i(\omega) = \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j = 0 \tag{27}$$

pour tout $i = 1, \dots, g$ (resp. $i = g+1, \dots, 2g$), ce qui est une contradiction parce que $\omega \neq 0$ par les assumptions sur les c_j. □

Exercice 6. Résumer en 15 à 30 lignes élégantes les idées de la démonstration de la deuxième proposition principale :

> Sur une surface de Riemann compacte, si un diviseur non nul $D \in \mathrm{Div}^0(S)$ appartient au noyau de l'application d'Abel-Jacobi : $AJ_S(D) = 0$, alors il existe une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}^\times(S)$ qui le représente : $\mathrm{div}(f) = D$.

Démonstration. Donc nous voulons démontrer l'existence d'une $f \in \mathcal{M}^\times(S)$, pour chaque diviseur

$$D = \sum_{l=1}^{k} p_l - \sum_{l=1}^{k} q_l \in \mathrm{Div}^0(S) \tag{28}$$

qui appartient au noyau de AJ_S, telle que $D = \mathrm{div}(f)$. Nous allons d'abord démonstrer l'équivalence de cette existence avec l'existence d'une forme différentielle méromorphe $\varphi \in \mathcal{M}\Omega(S)$ telle que

a) φ n'a que des pôles simples, et le diviseur des pôles satisfait

$$\mathrm{div}(\varphi)_\infty = \sum_{l=1}^{k} p_l \tag{29}$$

i.e. les pôles de φ se trouvent exactement dans les points où D permet des pôles ;

b) $\operatorname{Res}_{p_l} \varphi = n_l/2\pi\mathrm{i}$, avec $n_l \in \mathbb{Z}$ les poids des pôles de D, donc la multiplicité se trouve dans le résidu ;

c) $\int_{\gamma_i} \varphi \in \mathbb{Z}$, pour $\gamma_1, \ldots, \gamma_{2g} \in \mathrm{H}_1(\mathrm{S}, \mathbb{Z})$ une base.

qui nous permet de définir

$$f(p) := \exp\left(2\pi\mathrm{i} \int_q^p \varphi\right) \tag{30}$$

qui alors peut représenter D.

Commençons le résumé par démontrer cette équivalence. Il suffit de réaliser que dans les points qui ne sont pas de pôles le choix d'une courbe de p vers q est défini modulo une courbe fermée, dont l'intégrale s'exprime dans la base de $\mathrm{H}_1(\mathrm{S}, \mathbb{Z})$. Par condition (c) ces termes disparaissent après l'application exponentielle. Et donc par (a) f est holomorphe sur S en dehors les pôles.

Maintenant, dans les pôles $p_1, \ldots, p_k$ de φ, localement autour p_i nous avons

$$\varphi(z) = \frac{n_i}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + h(z) \tag{31}$$

où $h(z)$ est holomorphe, par (b). Fixons $p_0 \neq p_l$ dans cette carte, on notons z la coordonnée locale, alors

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(2\pi\mathrm{i} \int_q^p \varphi\right) \\ &= \exp\left(2\pi\mathrm{i}\left(\int_q^{p_0} \varphi + \int_{z_0}^z \frac{n_l}{2\pi\mathrm{i}} \frac{\mathrm{d}z}{z} + \int_{z_0}^z h(z)\mathrm{d}z\right)\right) \end{aligned} \tag{32}$$

en allant de q vers p_0 au voisinage du pôle p_l et d'abord et puis vers p dans la carte locale. Alors

$$\begin{aligned} &= \exp\left(2\pi\mathrm{i}\left(\int_q^{p_0} \varphi - \frac{n_l}{2\pi\mathrm{i}} \log z_0 + \frac{n_l}{2\pi\mathrm{i}} \log z + \int_{z_0}^z h(z)\mathrm{d}z\right)\right) \\ &= cz^{n_l}\mathrm{H}(z) \end{aligned} \tag{33}$$

où c est une constante qui est définie par l'intégral de q vers p_0 et $-n_l \log z_0/2\pi\mathrm{i}$, et H est une fonction holomorphe sans zéros. Donc f est une fonction méromorphe dans les pôles $p_1, \ldots, p_l$.

Pour construire cette forme différentielle méromorphe on va prendre la somme des formes différentielles élémentaires de troisième espèce. Cette somme satisfait immédiatement (a) et (b). L'existence de cettes formes élémentaires est discuté dans Exercice 4. Afin de démontrer qu'on peut trouver un φ qui satisfait à (b) on doit perturber la somme originelle de deux façons.

D'abord la base de $\Omega(\mathrm{S})$ peut être choisi telle que la matrice des périodes est de la forme $\begin{pmatrix}\mathrm{id}_{g\times g} & \mathrm{Z}_{g\times g}\end{pmatrix}$, ce qui est lié au résultat d'Exercice 5. Alors

$$\varphi' := \varphi - \sum_{\alpha=1}^{g} \left(\int_{\gamma_\alpha} \varphi\right) \omega_\alpha \tag{34}$$

satisfait

$$\int_{\gamma_i} \varphi' = 0 \tag{35}$$

pour $i = 1, \dots, g$. Alors nous pouvons obtenir que

$$\sum_{l=1}^{k} \int_{q_l}^{p_l} \omega_\alpha = \pi_{g+\alpha}(\varphi') \tag{36}$$

pour cette forme différentielle, après la généralisation des rélations bilinéaires de Riemann comme dans Exercice 7, et l'annulation comme dans (35).

Puis on utilise le fait que $\mathrm{D} \in \ker(\mathrm{AJ_S})$ qui nous permet décrire

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{k} \int_{q_l}^{p_l} \omega_\alpha &= \sum_{\beta=1}^{g} m_\beta \int_{\gamma_\beta} \omega_\alpha \\
&= \sum_{\beta=1}^{g} \left(m_\beta \int_{\gamma_\beta} \omega_\alpha + m_{g+\beta} \int_{\gamma_{g+\beta}} \omega_\alpha \right) \\
&= m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta} \int_{\gamma_{g+\beta}} \omega_\alpha \\
&= m_\alpha + \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta} \int_{\gamma_{g+\alpha}} \omega_\beta
\end{aligned} \tag{37}$$

où la prémière égalité est le fait que $\mathrm{D} \in \ker(\mathrm{AJ_S})$, la deuxième est formelle, pour la troisième on utilise le choix de base et la quatrième par la première rélation bilinéaire de Riemann. Ça nous donne la perturbation

$$\varphi'' := \varphi' - \sum_{\beta=1}^{g} m_{g+\beta} \omega_\beta \tag{38}$$

ce qui achèvera finalement (c) après une calculation légère, pour $\alpha = 1, \dots, g$ l'annulation de (35) sera important, pour $\alpha = g+1, \dots, 2g$ la relation entre (36) et (37) sera le point-clé. □

Exercice 7. En s'inspirant du cas (détaillé dans le cours) où ω et φ sont des 1-formes holomorphes, établir la formule page 22 du chapitre sur le théorème d'Abel :

$$\int_{\partial\Omega} v\varphi' = \sum_{\beta=1}^{g} \left(\pi_\beta(\omega)\pi_{g+\beta}(\varphi') - \pi_{g+\beta}(\omega)\pi_\beta(\varphi') \right). \tag{39}$$

Démonstration. Cette formule n'est qu'une reformulation immédiate des relations bilinéaires de Riemann, sauf qu'on ne peut pas appliquer le théorème de Stokes afin d'obtenir

$$\int_{\partial\Omega} u\varphi = \iint_{\Omega} \mathrm{d}u\varphi = 0 \tag{40}$$

comme dans légalité première dans ce théorème, car φ' a des pôles et donc $v\varphi'$ n'est pas une forme fermée. Laissons faire la preuve en détail maintenant.

Le bord $\partial\Omega$ s'identifie au bord du polygone P, comme illustré dans Figure 5.2 du polycopié, ou [6]. Donc

$$\partial\Omega = \gamma_1\gamma_{g+1}\gamma_1^{-1}\gamma_{g+1}^{-1} \cdots \gamma_g\gamma_{2g}\gamma_g^{-1}\gamma_{2g}^{-1} \tag{41}$$

et alors

$$\int_{\partial\Omega} v\varphi' = \sum_{i=1}^{g} \int_{\gamma_i} v\varphi' + \int_{\gamma_{g+i}} v\varphi' + \int_{\gamma_i^{-1}} v\varphi' + \int_{\gamma_{g+i}^{-1}} v\varphi'. \tag{42}$$

Maintenant on peut calculer la somme des intégrales pour γ_i et γ_i^{-1}, ce qui donne

$$\int_{\gamma_i} v\varphi' + \int_{\gamma_i^{-1}} v\varphi' = \int_{\gamma_i} \left(v(p) - v(p')\right) \varphi' \tag{43}$$

parce qu'on peut paramétriser γ_i et γ_i^{-1} par $[0,1]$ et alors reparamétriser γ_i^{-1} par $t \mapsto 1-t$. Maintenant le point-clé est qu'on peut calculer $v(p) - v(p')$ en changeant de contour d'intégration grâce à l'holomorphie de ω, comme illustré dans Figure 5.3 du polycopié ou [6]. Alors calculons

$$\begin{aligned} v(p) - v(p') &= \int_b^p \omega - \int_b^{p'} \omega \\ &= \int_{p'}^q \omega - \int_{\gamma_{g+i}} \omega + \int_q^p \omega \\ &= -\int_{\gamma_{g+i}} \omega \\ &= -\pi_{g+i}(\omega). \end{aligned} \tag{44}$$

Maintenant $v(p) - v(p')$ est une valeur constante, d'où

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_i} v\varphi' + \int_{\gamma_i^{-1}} v\varphi' &= -\pi_{g+i}(\omega) \int_{\gamma_i} \varphi' \\ &= -\pi_{g+i}(\omega)\pi_i(\varphi'). \end{aligned} \tag{45}$$

Faisons aussi l'autre égalité. Comme $v(p) - v(p')$ peut être déterminé par le changement de contour à $[p', q]$, γ_i^{-1} (ce qui est absolument crucial !) et $[p, q]$ nous avons par l'annulation comme ci-dessus

$$\begin{aligned} v(p) - v(p') &= -\int_{\gamma_i^{-1}} \omega \\ &= \int_{\gamma_i} \omega \\ &= \pi_i(\omega) \end{aligned} \tag{46}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_{g+i}} v\varphi' + \int_{\gamma_{g+i}^{-1}} v\varphi' &= \pi_i(\omega) \int_{\gamma_{g+i}} \varphi' \\ &= \pi_i(\omega)\pi_{g+i}(\varphi'). \end{aligned} \tag{47}$$

□

Exercice 8. Montrer en détail le lemme de la page 5 du polycopié "Théorème d'inversion de Jacobi" (distribue lundi 3 décembre 2012) et illustrer la (légère) différence entre le cas $n = 1$ et les cas $n \geq 2$ par un exemple.

Démonstration. Nous prenons $\epsilon > 0$ tel que $h(0,\ldots,0,z)$ n'a qu'un zéro en z pour $|z| < \epsilon$, ce qui est possible grâce au théorème des zéros isolés d'une fonction holomorphe à une variable. Alors nous déduisons qu'on peut prendre ρ tel que

$$(48)\quad |h(\mu_1,\ldots,\mu_n,z)| \geq c/2 > 0$$

si $|\mu_i| < \rho|$, où $c > 0$ est obtenu par considérer

$$(49)\quad |h(0,\ldots,0,z)| \geq c > 0$$

comme dans le polycopié, ce qui est possible parce h est continue. Donc nous obtenons partie a), par considérer l'intégrale

$$(50)\quad \mathrm{n}(\mu_1,\ldots,\mu_n) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\epsilon} \frac{h_z(\mu_1,\ldots,\mu_n,z)}{h(\mu_1,\ldots,\mu_n,z)} \mathrm{d}z$$

qui reste constante, comme dans la démonstration du lemme à page 27 du chapitre 4, "Théorème de préparation de Weierstrass et applications".

Les racines ne sont pas forcément distinctes si $n \geq 2$, on peut considérer la fonction

$$(51)\quad h(\mu_1,\mu_2,z) = z^2 + (\mu_1 - \mu_2)$$

qui a deux racines égales si $\mu_1 = \mu_2$.

Pour partie b) on peut généraliser le lemme sur page 28 de chapitre 4, "Théorème de préparation de Weierstrass et applications" d'une façon directe. La rélation exacte entre

$$(52)\quad \sum_{1\leq\gamma_1<\ldots<\gamma_l\leq k} z_{\gamma_1}(\mu_1,\ldots,\mu_n)\cdots z_{\gamma_l}(\mu_1,\ldots,\mu_n)$$

et les sommes de Newton n'est pas importante, il suffit de se réaliser que

$$(53)\quad \sum_{i=1}^{k} z_i(\mu_1,\ldots,\mu_n)^l = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{|z|=\epsilon} z^l \frac{h_z(\mu_1,\ldots,\mu_n,z)}{h(\mu_1,\ldots,\mu_n,z)} \mathrm{d}z$$

nous donne que les sommes de Newton sont holomorphe, et alors les fonctions (52) sont aussi holomorphes. □

Exercice 9. Montrer en détail que le d-ième ($d \geq 1$) produit symétrique $\mathrm{S}^{(d)}$ d'une surface de Riemann compacte S est toujours une variété complexe de dimension d (réfléchir d'abord sur le cas $d = 2$; polycopié distribué le lundi 3 décembre 2012).

Démonstration. On doit d'abord montrer que le quotient $\mathrm{S}^{(d)} = \mathrm{S}^d / \mathrm{Sym}_d$ est séparé. Prenons alors deux points distincts de $\mathrm{S}^{(d)}$, ils correspondent aux deux diviseurs

$$(54)\quad \mathrm{D} = \sum_{i=1}^{d} p_i \quad \text{et} \quad \mathrm{D}' = \sum_{i=1}^{d} q_i$$

tels qu'il y a une différence entre les p_i et q_i, ou bien une différence de multiplicité. En groupant et ordonnant les points par multiplicité, nous pouvons donc trouver une indice i_0 telle que $p_{i_0} \neq q_{i_0}$. Maintenant il suffit de prendre des voisinages distincts pour ces points, ce qui est possible parce que S est séparée. Pour les autres point nous prenons des voisinages quelconques tels qu'ils sont disjoints si les point sont inégaux. Après prendre le quotient les produits des voisinages restent disjoints.

Maintenant pour démontrer qu'on a vraiment une variété complexe de dimension d je voulais utiliser que l'action de Sym_d est proprement discontinue (le groupe est fini suggeste cela), comme expliqué dans [4]. Alors il suffit de prendre un voisinage U de chaque point $x \in \mathrm{S}^{(d)}$ tel que $\sigma(\mathrm{U}) \neq \mathrm{U}$ pour $\sigma \neq \mathrm{id}$. Soit $\varphi \colon \mathrm{U} \to \mathbb{C}^d$ la carte locale, alors $(\pi(\mathrm{U}), \varphi^{-1} \circ \pi|_{\mathrm{U}}^{-1})$ est une carte locale pour $\pi(x)$, où π est le quotient.

Mais cela n'est pas possible, malheureusement ! Donc j'ai appris quelque chose sur les constructions des variétés, bien que ce ne soit possible ici.

Une démonstration qui est correcte est par prendre des cartes locales (U_i, z_i) telles que $\mathrm{U}_i \cap \mathrm{U}_j = \emptyset$ si $p_i \neq p_j$ et $z_i = z_j$ si $p_i = p_j$. Si nous appliquons l'application de quotient $\pi \colon \mathrm{S}^d \to \mathrm{S}^{(d)}$ au produit $\mathrm{U}_1 \times \cdots \times \mathrm{U}_d$ nous obtenons un ouvert qui contient l'image de D.

Alors le théorème fondamentale de l'algèbre nous donne que l'application

$$(55) \quad \sum_{i=1}^{d} q_i \mapsto \left(\sigma_1\left(z_i(q_i)\right), \ldots, \sigma_d\left(z_i(q_i)\right)\right)$$

où les σ_i sont les fonctions symétriques élémentaires fournit une carte locale pour le point

$$(56) \quad \sum_{i=1}^{d} \in \pi\left(\mathrm{U}_1 \times \cdots \times \mathrm{U}_d\right)$$

parce que toute l'information peut être reconstituée. Pour expliciter cela, considérons un point $(p_1, \ldots, p_d) \in \mathrm{S}^{(d)}$ où $p_i \neq p_j$ si $i \neq j$. Alors il n'a y a pas de branchement, localement π est un revêtement maintenant. Si $d = 2$ (ou plus généralement $\mathrm{D} = dp$) on voit qu'on obtient $(z_1 + \ldots + z_d, \ldots, z_1 \cdots z_d)$ dans $\mathbb{C}^d$. Mais on peut reconstituer tous les z_i, et donc tous les q_i d'une façon unique ! Donc ça finit la démonstration. J'étais inspiré par [5].

Remarquons qu'on a utilisé le fait que les racines d'un polynôme changent d'une façon continue (et même holomorphe) avec le changement des coefficients, ce qui est une application d'Exercice 8. □

Exercice 10. Sur un tore $\mathrm{S} = \mathbb{C}/\Lambda$ où $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ avec $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, donner une démonstration directe du théorème de Riemann-Roch dans le cas d'un diviseur effectif (plus facile que le cas général) :

$$(57) \quad \mathrm{D} = \sum_{i=1}^{k} n_i p_i \qquad (n_i \geq 1).$$

On pourra choisir des images inverses $z_i \in \mathbb{C}$ des p_i à travers la projection $\mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$, et utiliser les fonctions

$$\begin{aligned} f_{i,j}(z) &= \frac{(-1)^j}{(j+1)!}\frac{\mathrm{d}^j\wp(z-z_i)}{\mathrm{d}z^j} \qquad (i=1,\dots,k; j=0,\dots,n_i-2) \\ g_i(z) &= (z_i - z_{i+1})\left(\frac{1}{(z-z_i)(z-z_{i+1}} + \sum_{\omega\in\Lambda\setminus\{0\}} \frac{1}{(z-z_i-\omega)(z-z_{i+1}-\omega)} - \frac{1}{\omega}\right) \\ &\qquad (i=1,\dots,k-1). \end{aligned} \tag{58}$$

Démonstration. Nous voulons montrer que

$$\ell(\mathrm{D}) - i(\mathrm{D}) = 1 - 1 + \deg \mathrm{D} \tag{59}$$

et par l'annulation de $i(\mathrm{D})$ pour $\deg \mathrm{D} \geq 2g-1 = 1$ nous devons montrer l'égalité

$$\ell(\mathrm{D}) = \deg \mathrm{D}. \tag{60}$$

Concernant le cas $\mathrm{D} = 0$ il suffit d'observer qu'on a comme toujours seulement les fonctions constantes, et $i(\mathrm{D}) = 1$ pour cette même raison.

Supposons $\deg \mathrm{D} \geq 1$, nous observons d'abord que par le théorème sur la représentation des fonctions elliptiques et la proposition sur l'ordre des pôles de $\wp$ et $\wp'$ dans le polycopié "Fonction $\wp$ de Weierstrass" qu'on a $\ell(\mathrm{D} = p) = 1$, il n'y a que les fonctions constantes.

Alors les g_i et $f_{i,j}$ sont doublement périodiques, au cas de $f_{i,j}$ parce que c'est le dérivé (d'une translation) d'une fonction doublement periodique. Pour les g_i il suffit de réaliser que la sommation reste invariante après les translations $z \mapsto z + \omega_i$, parce qu'on somme sur le réseau Λ et alors le premier terme devient une partie de cette somme (un autre devient le terme isolé) et $1/\omega^2$ reste invariant sous cette transformation.

Maintenant nous considérons le comportement des $f_{i,j}$. Nous savons que $\wp$ a un pôle double aux points de Λ, $\wp'$ un pôle triple aux points de Λ et en général $\wp^{(n)}$ un pôle d'ordre $n+2$, ce qui est claire par le développement en séries de Laurent de $\wp$ comme $1/z^2 + h(z)$ avec h holomorphe. Alors nous voyons que c'est nécessaire de prendre j jusqu'à $n_i - 2$. Remarquons aussi que l'exercice comme elle est donnée n'est pas correcte : si $\mathrm{D} = 2p$ nous avons besoin de $\wp$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{D})$ mais $n_1 = 2$ n'admet pas une fonction $f_{1,j}$! J'ai corrigé cette erreur dans mon dévoir ci-dessus.

Les fonctions g_i forment les fonctions avec deux pôles simples, et par faire des combinaisons linéaires nous pouvons construire toutes fonctions avec des pôles simples qui viennent en paires. Alors les fonctions $f_{i,j}$, g_i et les fonctions constantes forment une base de $\mathcal{L}(\mathrm{D})$, toute configuration des pôles peut être obtenue en faisant des combinaisons linéaires.

Pour la dimension de $\mathcal{L}(D)$, nous calculons

$$\begin{aligned}
\ell(D) &= \#\left\{f_{i,j} \mid i = 1,\dots,k; j = 0,\dots,n_i-2\right\} + \#\left\{g_i \mid i = 1,\dots,k-1\right\} + 1 \\
&= \left(\sum_{i=1}^{k} n_i - 1\right) + (k-1) + 1 \\
&= \sum_{i=1}^{k} n_i \\
&= \deg D.
\end{aligned} \tag{61}$$

□

Exercice 11. Résumer en 15 à 30 lignes intelligentes les grandes étapes de la démonstration du théorème d'inversion de Jacobi (utiliser le polycopié distribué le lundi 3 décembre 2012).

Démonstration. Nous souhaitons démontrer la surjectivité de l'application

$$\mathrm{AJ}_S\colon \mathrm{Div}^0(S) \to J(S). \tag{62}$$

Nous admettons le théoréme de l'application propre, afin de trouver la "proposition générale" qui nous donne des critères pour la surjectivité d'un morphisme $f\colon X \to Y$ entres des variétés complexes connexes compactes de même dimension. Nous appliquerons cela dans le cas où $X = S^{(g)}$, $Y = \mathbb{C}^g/\Lambda$, $f = \mathrm{AJ}_S$. Cette surjectivité suffit pour démontrer la surjectivité du morphisme

$$\mathrm{AJ}_S\colon \mathrm{Div}^0(S) \to J(S) \tag{63}$$

en prenant $p \in S$ fixé, et alors l'ensemble

$$S^{(g)} - gp = \left\{D - gp \mid D \in S^{(g)}\right\} \tag{64}$$

contient les diviseurs de degré 0 de la forme $D - gp$. Et sous AJ_S la translation avec $-gp$ n'est qu'un automorphisme de $\mathbb{C}^g/\Lambda$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{AJ}_S(-gp) &= \mathrm{AJ}_S\left(-\sum_{i=1}^{g} p\right) \\
&= \left(-g\int_q^p \omega_1, \dots, -g\int_q^p \omega_g\right)
\end{aligned} \tag{65}$$

ce qui ne détruit pas la surjectivité.

Les conditions qu'on doit contrôler pour la "proposition générale" sont

a) les fibres de AJ_S sont connexes ;

b) les différentielles sont des isomorphismes dans un ouvert de Zariski.

Pour démontrer (a) on obtient d'abord que

$$\mathrm{AJ}_S^{-1}(\mathrm{AJ}_S(D)) = \alpha\mathbb{P}(\mathcal{L}(D)) = |D|, \tag{66}$$

un système linéaire au sens de géométrie algébrique, et alors l'image sous le morphisme holomorphe $\alpha\colon \mathbb{P}(\mathcal{L}(\mathrm{D})) \to \mathrm{S}^{(g)}$ de l'espace projectif (qui est connexe) est connexe.

Finalement, nous pouvons démontrer que le rang de la matrice de Brill-Noether pour D un diviseur effectif générique (i.e. tous les points sont distincts) est donné par $\dim(\mathrm{cl}\,\varphi_{\mathrm{K}}(\mathrm{D})) + 1$ où φ_{K} est le plongement canonique, donc il est maximal pour l'ouvert de Zariski des diviseur effectifs génériques. □

Exercice 12. Si $f\colon \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une application holomorphe entre surfaces de Riemann compactes, démonstrer en détail que la restriction

$$\mathrm{X} \setminus f^{-1}\left(f(\mathrm{Crit}(f))\right) \to \mathrm{Y} \setminus f(\mathrm{Crit}(f)) \tag{67}$$

est un revêtement.

Démonstration. La restriction

$$f_{\mathrm{res}}\colon \mathrm{X} \setminus f^{-1}\left(f(\mathrm{Crit}(f))\right) \to \mathrm{Y} \setminus f(\mathrm{Crit}(f)) \tag{68}$$

est un revêtement si tout point $y \in \mathrm{Y} \setminus f(\mathrm{Crit}(f))$ possède un voisinage ouvert U dont la préimage

$$f_{\mathrm{res}}^{-1}(\mathrm{U}) = \bigcup_{j\in \mathrm{J}} \mathrm{V}_j \tag{69}$$

consiste en une famille d'ouverts $\mathrm{V}_j \subseteq \mathrm{X}$ disjoints deux à deux tels que chaque application restreinte

$$f_{\mathrm{res}}\mid_{\mathrm{V}_j}\colon \mathrm{V}_j \to \mathrm{U} \tag{70}$$

est un homéomorphisme.

Utilisant le lemme et le théorème sur page 25 de chapitre "Revêtements purs et revêtements ramifiés" nous obtenons que

$$\mathrm{Crit}(f) = \left\{y \in \mathrm{Y} \mid \mathrm{d}f_y = 0\right\} \tag{71}$$

est l'ensembles des points où f n'est pas un homéomorphisme local. Alors la restriction de f à f_{res} fait disparaître tous les points de branchement et leurs préimages, et f_{res} est donc un homéomorphisme local.

Maintenant il suffit de se réaliser qu'on peut appliquer le théorème sur page 35 par compacité de X et Y. □

Exercice 13. Qu'est-ce que le théorème de Sard ? Trouver dans la littérature des énoncés divers de ce théorème.

Démonstration. D'abord un peu d'histoire. Le théorème de Sard, ou de Morse-Sard, est un résultat dans le domaine d'analyse, qui est une amélioration faite en 1942 par Sard [11] d'un théorème de Morse qui date de 1939 [9]. Le théorème original est

> If $m \leq n$, the set of critical values of the map
>
> (72) $y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^m), \qquad j = 1, 2, \ldots, n$
>
> of a region R of euclidean m-space into part of euclidian n-space, where each function f^j is of class $\mathcal{C}^q$ in R, $q \geq 1$, is of m-dimensional measure zero *without further hypothesis on q* ; if $m > n$, the set of critical values of the map is of n-dimensional measure zero providing that $q \geq m - n + 1$.

J'ai trouvé quelques reformulations dans la littérature. D'abord, dans un livre très joli de Sternberg [12], Theorem 3.1 sur page 47 est une version plus forte (après une modification assez triviale) qui est plutôt dans le domaine de géométrie differentiélle :

> Let M_1 and M_2 be $\mathcal{C}^k$ manifolds of dimension n_1 and n_2 respectively. Let f be a map of class $\mathcal{C}^k$ of $M_1 \to M_2$. The critical values of f form a set of measure zero if
>
> (73) $k - 1 \geq \max\{n_1 - n_2, 0\}$.

Dans un livre ancien [8] de mathématicien célèbre Milnor une version assez faible est donné sur page 10.

> Let $f : U \to \mathbb{R}^n$ be a smooth map, defined on an open set $U \subseteq \mathbb{R}^m$, and let
>
> (74) $C := \left\{ x \in U \mid \operatorname{rank} df_x < n \right\}$.
>
> Then the image has Lebesgue measure 0.

Pour expliquer la notion de mesure de Lebesgue dans le cas de $\mathbb{R}^n$ il donne cette remarque :

> In other words, given any $\epsilon > 0$, it is possible to cover $f(C)$ by a sequence of cubes in $\mathbb{R}^n$ having total n-dimensional volume less than ϵ.

Il remarque aussi que la preuve a besoin d'assez de dérivés, mais il ne donne pas la borne. Pour lui, toutes les fonctions sont lisses.

Enfin, dans un livre bizarre (carré et avec une typographie très laide) de Abraham [1], le théorème de Sard se trouve au page 37, dans Theorem 15.1 :

> Let $f : U \to \mathbb{R}^p$ where U is open in $\mathbb{R}^n$. Let f be $\mathcal{C}^r$ where
>
> (75) $r > \max\left\{0, n - p\right\}$.
>
> Then the set of critical values of f has measure 0 in $\mathbb{R}^n$.

□

Exercice 14. Qu'est-ce que le théorème de l'application propre de Remmert ?

Démonstration. Remarquons d'abord qu'il est facile de se tromper, il me semble que le lemme de Remmert-Stein est plus connu que le vrai théorème de l'application propre de Remmert, qui a l'impression de ne pas être appelé "de Remmert" si explicitement. Le résultat original est donné dans [10].

Dans un livre de Whitney [13], avec une couverture à la typographie bizarre, nous trouvons le théorème à page 150, dans Theorem 4A, qui dit :

> Let V and W be analytic spaces, and let $F\colon V \to W$ be c-holomorphic and proper into W. Then $X = F(V)$ is analytic in W, and $\dim X = \operatorname{rank} F$.

La notion de c-holomorphicité est une abbréviation de "continuous weakly holomorphic" et implique que F doit être continu sur V et holomorphe à l'intérieur. Remarquons que par Theorem 4C sur page 118 de [13] le c-holomorphicité et le homorphicité normal sont égaux pour les variétés.

Maintenant, pour un autre énoncé, dans le livre beaucoup plus récent d'un groupe d'auteurs [2] on trouve comme Theorem 1.2 sur page 5 :

> Let X, Y be complex spaces and $\pi\colon X \to Y$ a proper holomorphic map. Then $\pi(X)$ is an analytic subset of Y.

Ici, la rélation au lemme de Remmert-Stein est explicitement discutée. Aussi le fait que ce théorème est une conséquence de théorème de Grauert sur les images directes est donné, et ce résultat est très connu dans la situation de géométrie algébrique, comme par exemple Theorem III.8.8(b) dans [7] :

> Let $f\colon X \to Y$ be a projective morphism of noetherian schemes, let $\mathcal{O}_X(1)$ be a very ample invertible sheaf on X over Y, and let $\mathcal{F}$ be a coherent sheaf on X. Then for all $i \geq 0$, $R^i f_*(\mathcal{F})$ is a coherent sheaf on Y.

Remarquons qu'il suffit de prendre le morphisme f propre, comme illustré dans Théorème III.3.2.1 de [3] :

> Soient Y un préschéma localement noethérien, $f\colon X \to Y$ un morphisme propre. Pour tout $\mathcal{O}_X$-module cohérent $\mathcal{F}$, les $\mathcal{O}_Y$-modules $R^q f_*(\mathcal{F})$ sont cohérents pour $q \geq 0$.

Le théorème au sens analytique est donné dans Theorem 2.1 de [2] :

> Let $\pi\colon X \to Y$ be a proper holomorphic map between the complex spaces X and Y. Let $\mathcal{F}$ be a coherent analytic sheaf on X. Then, for any q (≥ 0) the q-th direct image $R^q\pi_*(\mathcal{F})$ is a coherent analytic sheaf on X.

□

Bibliographie

[1] Ralph Abraham and Joel Robbin. *Transversal mappings and flows*. Benjamin Press, 1967.

[2] Steven Bell, Jean-Luc Brylinski, Alan Huckleberry, Raghavan Narasimhan, Ch. Okonek, Georg Schumacher, A. Van de Ven, and Steven Zucker. *Complex Manifolds*. Encyclopedia of Mathematical Sciences Series. Springer, 1997.

[3] Jean Dieudonné and Alexandre Grothendieck. *Éléments de géométrie algébrique : III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents, Première partie*, volume 11. Publications Mathématiques de l'IHÉS, 1963.

[4] Mike Field. *Several Complex Variables and Complex Manifolds I*. London Mathematical Society Lecture Note Series. Cambridge University Press, 1982.

[5] Philipp Griffiths and Joe Harris. *Principles of Algebraic Geometry*. Pure and applied mathematics. Wiley, 1994.

[6] Phillip Griffiths. *Introduction to Algebraic Curves*. Translations of Mathematical Monographs. American Mathematical Society, 1989.

[7] Robin Hartshorne. *Algebraic Geometry*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1977.

[8] John Willard Milnor. *Topology from the differentiable viewpoint*. Princeton landmarks in Mathematics. Princeton University Press, 1965.

[9] Anthony Perry Morse. The behaviour of a function on its critical set. *Annals of Mathematics*, 40(1) :62–70, 1939.

[10] Reinhold Remmert. Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. *Mathematische Annalen*, 133 :328–370, 1957. 10.1007/BF01342886.

[11] Arthur Sard. The measure of the critical values of differentiable maps. *Bulletin of American Mathematical Society*, 48(2) :883–890, 1942.

[12] Shlomo Sternberg. *Lectures on differential geometry*. Prentice-Hall, 1964.

[13] Hassler Whitney. *Complex analytic varieties*. Addison-Wesley series in mathematics. Addison-Wesley, 1972.