Examen corrigé

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. **(a)** Avec :

$$D := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 1 \leqslant y \leqslant 2,\ \ 0 \leqslant x \leqslant y^2\big\},$$

calculer :

$$I := \iint_D e^{x/y^2}\, dxdy.$$

Exercice 2. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit le sous-ensemble du plan euclidien :

$$A_\varepsilon := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\ \varepsilon^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 1\big\}.$$

(a) Représenter graphiquement cet ensemble A_ε. Quel nom amusant pourrait-on lui attribuer ?

(b) Avec un paramètre réel $\alpha > 0$, on introduit l'intégrale double :

$$I_\varepsilon(\alpha) := \iint_{A_\varepsilon} \frac{dx\, dy}{\big(x^2+y^2\big)^\alpha}.$$

En distinguant les deux cas $\alpha = 1$ et $\alpha \neq 1$, calculer la valeur de $I_\varepsilon(\alpha)$. Indication: Passer aux coordonnées polaires, et trouver, lorsque $\alpha \neq 1$:

$$I_\varepsilon(\alpha) = \text{constante}\Big(1 - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}\Big),$$

où la constante inconnue est à déterminer *sans erreur de calcul*.

(c) En déduire que :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \longrightarrow 0 \\ >}} I_\varepsilon(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{1-\alpha} & \text{pour } 0 < \alpha < 1, \\ +\infty & \text{si } \alpha = 1, \\ & \\ +\infty & \text{lorsque } 1 < \alpha. \end{cases}$$

Exercice 3. **(a)** Représenter le compact d'intégration $A := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x, y \in [0,1],\ \ z \in [1,2]\big\}$.
(b) Calculer l'intégrale triple $\int\int\int_A \frac{x\,y}{z^2}\,dxdydz$.
(c) Représenter le compact d'intégration $B := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ 0 \leqslant z \leqslant 1,\ \ -z \leqslant x \leqslant z,\ \ -z \leqslant y \leqslant z\big\}$.
(d) Calculer son volume Volume $B = \int\int\int_B 1\,dxdydz$.
(e) Calculer l'intégrale triple $\int\int\int_B z\,dxdyz$.

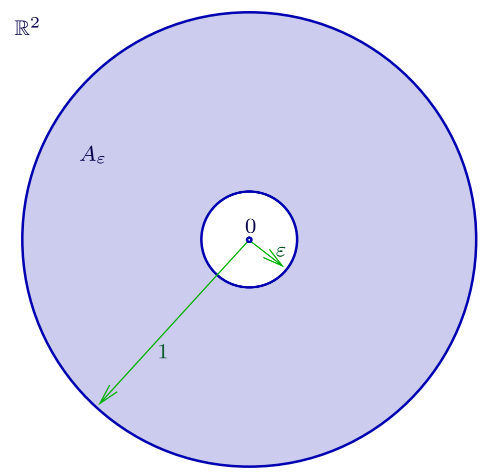
2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. (a) On a :

$$I = \int_1^2 dy \int_0^{y^2} e^{x/y^2}\,dx = \int_1^2 dy \left[y^2\, e^{x/y^2}\right]_0^{y^2} = \int_1^2 dy \left(y^2\, e^1 - y^2\, e^0\right)$$

$$= \left(e^1 - 1\right) \int_1^2 y^2\,dy = \left(e^1 - 1\right) \left[\frac{1}{3}\, y^3\right]_1^2 = \left(e^1 - 1\right) \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{7}{3} \left(e^1 - 1\right).$$

Exercice 2. (a) Il s'agit d'un *disque transpercé*, ou, si on préfère, d'un *anneau gras*.



(b) Le changement de variables :

$$x = r\cos\theta \qquad \text{et} \qquad y = r\sin\theta,$$

avec bien sûr pour notre bel anneau dodu :

$$\varepsilon \leqslant r \leqslant 1,$$

et aussi, évidemment :

$$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi,$$

en rappelant que :

$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta,$$

conduit à réexprimer l'intégrale recherchée sous une forme :

$$I_\varepsilon(\alpha) = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{r\,dr}{r^{2\alpha}} = \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r^{2\alpha-1}},$$

qui devient facile à calculer, mais il faut distinguer le cas $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\alpha) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 \frac{dr}{r} = \int_0^{2\pi} d\theta \Big[\log r\Big]_\varepsilon^1 \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{\log 1}_{\circ} - \log \varepsilon\Big)\, d\theta \\ &= -\,2\pi \log \varepsilon \qquad\qquad (>0), \end{aligned}$$

du cas $\alpha \neq 1$, où, pour trouver une primitive, on peut *éviter* d'avoir à utiliser une fonction compliquée comme le logarithme :

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(\alpha) &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_\varepsilon^1 r^{-2\alpha+1}\, dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{-2\alpha+2}\, r^{-2\alpha+2}\right]_\varepsilon^1 \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\frac{1}{-2\alpha+2} - \frac{1}{-2\alpha+2}\,\varepsilon^{-2\alpha+2}\right) \\ &= \frac{2\pi}{2\alpha-2}\left(-1 + \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{1-\alpha}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon^{2\alpha-2}}\right). \end{aligned}$$

(c) Quand $0 < \alpha < 1$, on constate lorsque $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$ grâce à la positivité de l'exposant de ε que :

$$I_\varepsilon(\alpha) = \frac{\pi}{1-\alpha}\Big(1 - \underbrace{\varepsilon^{2(1-\alpha)}}_{\longrightarrow 0}\Big) \longrightarrow \frac{\pi}{1-\alpha}.$$

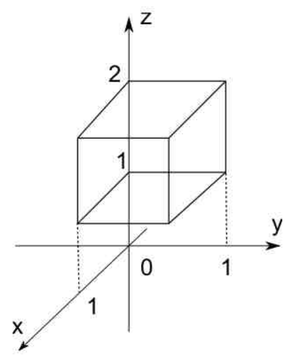
Puis, pour $\alpha = 1$, il est clair que :

$$I_\varepsilon(1) = -\,2\pi \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} \infty.$$

Enfin, quand $\alpha > 1$, on doit ré-écrire le résultat obtenu afin de mieux voir qu'on a effectivement :

$$I_\varepsilon(\alpha) = \underbrace{\frac{\pi}{\alpha-1}}_{>0}\left(\frac{1}{\varepsilon^{2(\alpha-1)}} - 1\right) \xrightarrow{\varepsilon \xrightarrow{>} 0} \infty.$$

Exercice 3. **(a)** Il s'agit d'un cube de côté 1.



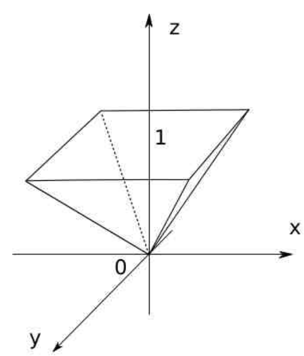
(b) Par séparation des variables, il vient aisément :

$$\int\!\!\int\!\!\int_A \frac{x\,y}{z^2}\,dxdydz \;=\; \int_0^1 x\,dx \int_0^1 y\,dy \int_1^2 \frac{dz}{z^2} \;=\; \Big[\frac{x^2}{2}\Big]_0^1 \Big[\frac{y^2}{2}\Big]_0^1 \Big[-\frac{1}{z}\Big]_1^2$$
$$= \Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)\Big(-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}\Big) \;=\; \frac{1}{8}.$$

(c) Pour chaque hauteur $z \in [0,1]$ fixée, la tranche :

$$B_z \;=\; [-z,z]\times[-z,z]\times\{z\}$$

est un carré horizontal de côté $2\,z$.



(d) Grâce à un théorème du cours :

$$\text{Volume}\,B \;=\; \int\!\!\int\!\!\int_B 1\,dxdydz \;=\; \int_0^1 dz \int\!\!\int_{B_z} dxdy \;=\; \int_0^1 \text{Aire}\big(B_z\big)\,dz$$
$$= \int_0^1 \big(2\,z\big)^2\,dz \;=\; \Big[\frac{4}{3}\,z^3\Big]_0^1 \;=\; \frac{4}{3}.$$

(e) De la même façon :

$$\int\!\!\int\!\!\int_B z\,dxdydz \;=\; \int_0^1 z\,dz \int\!\!\int_{B_z} dxdy \;=\; \int_0^1 z\,\text{Aire}\big(B_z\big)\,dz$$
$$= \int_0^1 z\,\big(2\,z\big)^2\,dz \;=\; \int_0^1 4\,z^3\,dz \;=\; \Big[z^4\Big]_0^1 \;=\; 1.$$