Intégration

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

« Je propose, sans être ému, de déclamer à grande voix la strophe sérieuse et froide que vous allez entendre. » Isidore DUCASSE, Comte de LAUTRÉAMONT.

La science en formation présente un caractère changeant et humain, qu'elle perd avec le recul de l'époque, en se décharnant du superflu, en se rétractant à l'essentiel, pour devenir impersonnelle et squelettique. Arnaud DENJOY.

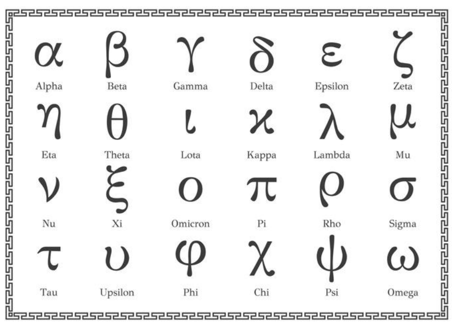

α Alpha
β Beta
γ Gamma
δ Delta
ε Epsilon
ζ Zeta
η Eta
θ Theta
ι Lota
κ Kappa
λ Lambda
μ Mu
ν Nu
ξ Xi
ο Omicron
π Pi
ρ Rho
σ Sigma
τ Tau
υ Upsilon
φ Phi
χ Chi
ψ Psi
ω Omega

Table des matières

Intégrale de Riemann

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Concept de fonction

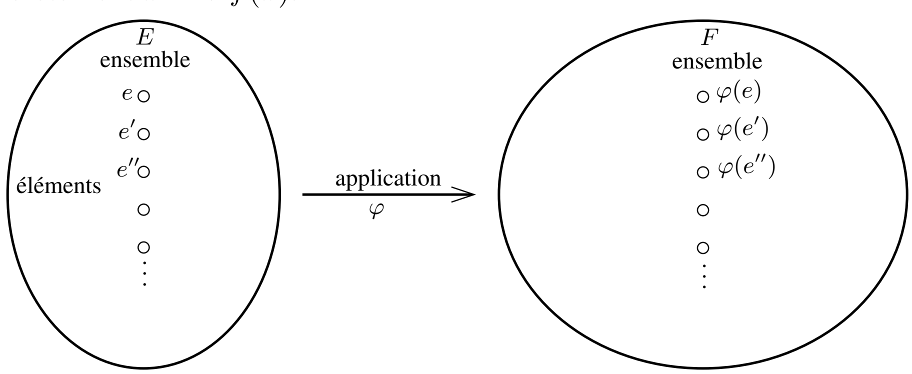
> Toute la Science mathématique repose sur l'idée de *fonction*, c'est-à-dire de dépendance entre deux ou plusieurs grandeurs, dont l'étude constitue le principal objet de l'Analyse. Il a fallu longtemps avant qu'on se rendît compte de l'étendue extraordinaire de cette notion ; c'est là, d'ailleurs, une circonstance qui a été très heureuse pour les progrès de la Science. [...] Dans les époques vraiment créatrices, une vérité incomplète ou approchée peut être plus féconde que la même vérité accompagnée des restrictions nécessaires.
> Émile PICARD

Dans les mathématiques contemporaines, une *fonction* réelle :

$$f\colon\quad \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},$$

est une *application*, c'est-à-dire qu'à tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique nombre réel $f(x) \in \mathbb{R}$, ce qui paraît très simple.

Mais contrairement à notre intuition habituelle, il se pourrait qu'un tel concept n'ait en fait rien d'évident, puisqu'*a priori*, aucune règle, aucune formule, aucune expression ne donne concrètement $x \longmapsto f(x)$.



En tout cas, depuis l'avènement de la théorie des ensembles dans les années 1890–1930, on admet le concept d'*application* :

$$\begin{aligned}\varphi\colon\quad E &\longrightarrow F\\ e &\longmapsto \varphi(e),\end{aligned}$$

dans une abstraction absolue, pure, non mystérieuse, aussi transparente et limpide que sur une figure 'simplette'.

Mais nous insisterons ici sur le fait que l'intuition minimale qui accompagne notre sentiment d'évidence lorsque nous écrivons :

$$x \longmapsto f(x)$$

cache de nombreuses questions mathématiques profondes qui sont encore loin d'être résolues à notre époque. Même la plus classique et la plus connue des intégrales, celle de Riemann à laquelle est consacrée ce chapitre, répond intelligemment à la question mathématique :

Comment définir l'intégrale $\int f(x)\,dx$ *d'une fonction ?*

C'est le mathématicien allemand Bernhard Riemann qui, vers 1854 et dans la lignée de Peter Lejeune-Dirichlet son maître, fut l'un des premiers à avoir conceptualisé la notion de fonction dans la généralité maximale $x \longmapsto f(x)$, bien avant la théorie des ensembles, *et Riemann voyait surtout qu'un tel concept très général de fonction ouvrait des questions mathématiques nouvelles et très difficiles*.

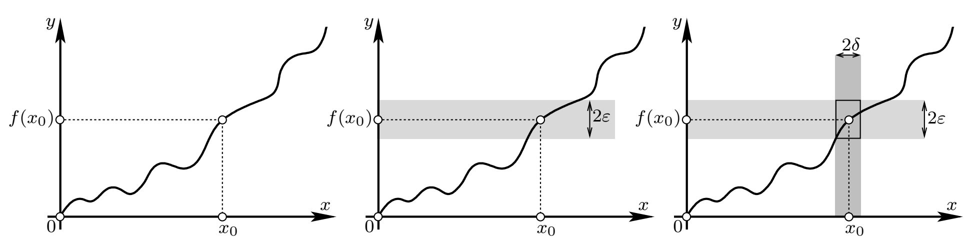
En fait, quelques décennies après Cauchy qui avait élaboré sa théorie des fonctions au début des années 1800, l'histoire de la théorie de l'intégration est essentiellement devenue une histoire des *tentatives* de donner à la notion d'*intégrale* l'extension la plus grande possible, afin d'embrasser le plus de fonctions *discontinues* possible, et ce, jusque dans les années 1950.

En effet, au bout d'un certain temps, les mathématiciens ont considéré qu'intégrer des fonctions continues, c'était '*trop facile*', et donc, qu'il fallait passer à des fonctions plus compliquées, qu'il fallait être plus ambitieux, ne serait-ce que pour des applications à la physique.

Mais tout d'abord, qu'est-ce qu'une fonction *continue* ?

Encore d'un point de vue moderne et très élaboré, la définition classique due à Weierstrass stipule que f est continue en un point $x_0 \in \mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\,x \quad |x - x_0| \leqslant \delta \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$



Géométriquement, quelle que soit la finesse $2\,\varepsilon > 0$ d'une bande horizontale centrée autour de la droite horizontale $\{y = f(x_0)\}$, il existe une bande verticale de largeur $2\,\delta$ assez petite centrée autour de la droite verticale $\{x = x_0\}$ telle que toute la partie du graphe correspondante *reste entièrement enfermée dans la bande horizontale choisie à l'avance*.

Mais historiquement, ce n'est pas du tout ainsi que les notions de fonction et de continuité sont apparues.

Fonctions définies par des expressions explicites arbitrairement complexes. En 1718, Bernouilli écrit dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* :

> **Définition :** On appelle ici **fonction** d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.

Euler prend la suite en 1734, et dans une note de l'Académie de Saint Pétersbourg, il introduit la notation :

$$f\big(\tfrac{x}{a}+c\big),$$

> pour désigner une fonction arbitraire de $\frac{x}{a}+c$.

En 1748, dans son *Introduction in analysis infinitorum*, Euler reprend la définition de Bernoulli en ajoutant le mot *analytique*, à savoir *développable en série entière convergente* :

> En conséquence, toute expression analytique dans laquelle, à côté de la variable z, toutes les quantités qui composent cette expression sont des constantes, est une fonction de cette même z ; ainsi $a+3\,z$, $a-4\,zz$, *etc.*

Qui plus est, Euler a essayé d'éclaircir l'idée de quantité constante et de quantité variable.

> **1.** Une quantité constante est une quantité déterminée, qui conserve toujours la même valeur.
>
> **2.** Une quantité variable est une quantité indéterminée, ou, si l'on veut, une quantité universelle, qui comprend toutes les valeurs déterminées.
>
> **3.** Une quantité variable devient déterminée, lorsqu'on lui attribue une valeur déterminée quelconque.
>
> **4.** Une fonction de quantité variable est une expression analytique composée, de quelque manière que ce soit, de cette même quantité et de nombres, ou de quantités constantes.
>
> **5.** Une fonction d'une variable est donc aussi une quantité variable.

Voici quelques exemples plus élaborés de fonctions au sens d'Euler — inutile de chercher à comprendre lorsqu'on ne connaît pas, il s'agit juste d'une visite sans guide d'un jardin zoologique mystérieux — :

$$\frac{e^{az}+e^{-az}}{e^{az}-e^{-az}},$$

$$\Gamma(z):=\frac{e^{-\gamma\,z}}{z}\prod_{n=1}^{+\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^{-1}e^{\frac{z}{n}},$$

$$\frac{\pi}{\sin(\pi z)},$$

$$\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}(-1)^n\,q^{\frac{3\,n^2-n}{2}},$$

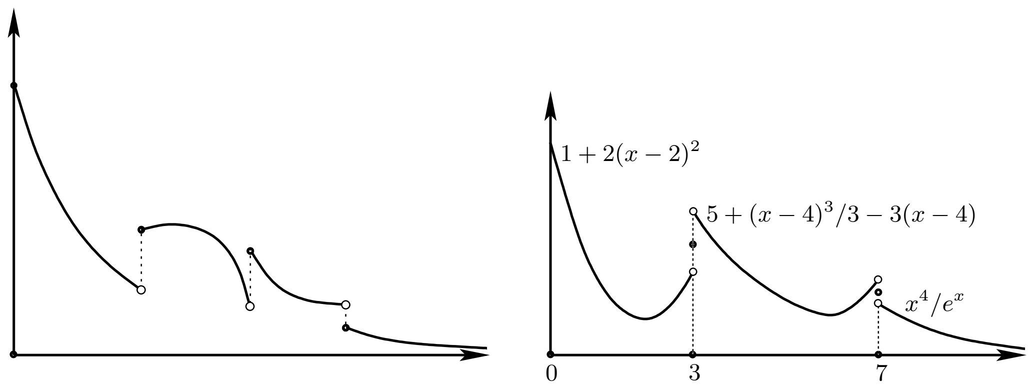
$$z^{z-\frac{1}{2}}\,e^{-z}\,\sqrt{2\pi}\left[1+\frac{1}{12\,z}+\frac{1}{288\,z^2}-\frac{139}{51840\,z^3}\right],$$

$$\int_0^{\pi/2}\sin^k x\,dx,$$

$$\frac{t}{1+t^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2\cdots(2k)}{3\cdot(2k+1)}\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^k.$$

En résumé, nous pouvons dire qu'une fonction au sens d'Euler est une fonction de la variable réelle, non constante, définie par une expression analytique, avec une totale liberté dans la complexité formelle, une fonction, donc, qui est donnée par des formules essentiellement explicites, en utilisant l'addition, la multiplication, la composition d'une manière arbitrairement complexe, et en incorporant aussi diverses constantes sympathiques.

Fonctions discontinues. En réponse à d'Alembert qui voulait maintenir que les fonctions devaient être données par une unique expression algébrique ou être développables en série entière convergente, Euler a été conduit à admettre que les courbes puissent être '*irrégulières*', ou '*discontinues*', au sens où elles soient formées d'un nombre fini de courbes différentes, mais toujours données par des formules.



En effet, longtemps dans l'histoire des mathématiques, les fonctions *discontinues* n'étaient que des fonctions lisses ($\mathscr{C}^\infty$) ou analytiques ($\mathscr{C}^\omega$) par morceaux, données par des formules explicites sur un nombre fini d'intervalles successifs.

Ainsi, ce qu'on appelait *discontinuité* ne désignait qu'un *changement de formule* en traversant un point spécifique.

L'Idée de fonction abstraite pure qui déclenche des Questions mathématiques. Mais avec Dirichlet et Riemann, le statut des fonctions change radicalement : le concept de fonction devient une abstraction idéale qui *provoque des questions mathématiques nouvelles*.

Nous venons de voir que l'*épure totale du concept* de fonction conduit à demander seulement qu'à tout réel $x \in \mathbb{R}$ est associé un unique réel $f(x) \in \mathbb{R}$, sans aucune hypothèse de continuité, sans formules, sans supposer que le nombre de points de discontinuité soit fini ou discret, en un mot : *sans aucune hypothèse*.

Si donc on admet un tel concept de fonction le plus général possible, alors de nombreuses questions surgissent :

Question. *Comment définir l'intégrale d'une fonction réelle* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *quelconque ?*

Question. *L'intégrale d'une fonction* f *existe-t-elle toujours ?*

Question. *Y-a-t-il un unique concept d'intégrale, ou* plusieurs concepts d'intégrale *qui ne sont pas équivalents entre eux ?*

Ce cours présentera trois concepts d'intégrale :

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Riemann}}$$

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Kurzweil-Henstock}}$$

$$\boxed{\textbf{Intégrale de Lebesgue}}$$

La plus classique est l'*Intégrale de Riemann*.

L'*intégrale de Kurzweil-Henstock* est la seule qui montre véritablement que l'intégration :

$$\int f' = f$$

d'une fonction dérivée f' redonne la fonction f dont on est parti, ce qui semble être le minimum de tenue correcte qu'on puisse exiger de l'intégrale à son examen d'entrée en Licence 3 d'Intégration !

Enfin, à un niveau supérieur d'abstraction, c'est l'*Intégrale de Lebesgue* qui fait l'unanimité dans les mathématiques contemporaines pour sa plasticité, sa généralité, et sa complétude.

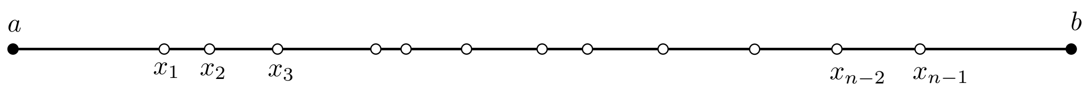
Donc en France et dans le monde, les cours de L3 en Mathématiques se font un devoir de présenter ce joyau de pensée qu'est la célèbre *Intégrale de Lebesgue*, bien qu'elle soit quelque peu difficile d'accès lors d'une toute première rencontre.

Alors pour faciliter une telle première rencontre, nous allons commencer par effectuer des révisions sur l'Intégrale de Riemann, en dévoilant quelques théorèmes nouveaux qui anticiperont la longue théorie de l'Intégrale de Legesgue.

2. Définition de l'intégrale de Riemann

Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$ et soit l'intervalle fermé borné donc compact :

$$[a, b] \subset \mathbb{R}.$$



Définition 2.1. [Subdivisions] Une *subdivision* Δ d'un tel intervalle $[a, b]$ est une suite finie de nombres réels $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ satisfaisant :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

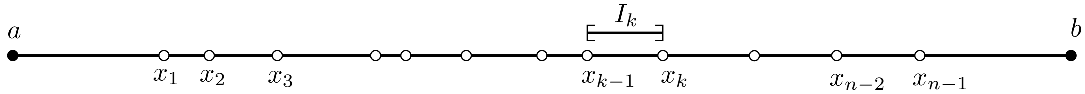
Étant donné une telle subdivision, considérons les intervalles :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k = 1 \cdots n)},$$

et notons :

$$\big|I_k\big| := x_k - x_{k-1}$$

leurs longueurs.



Définition 2.2. [Sommes de Darboux] À toute fonction $\boxed{\textit{bornée}}$:

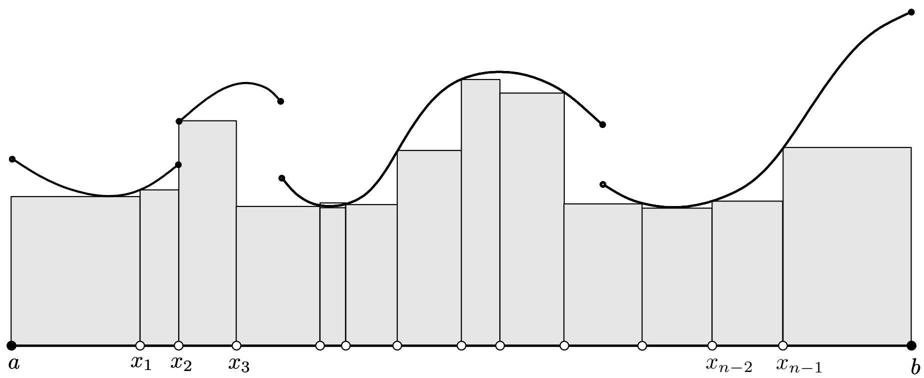
$$f\colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

à savoir qui satisfait :

$$-\infty < \inf_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \leqslant \sup_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) < \infty,$$

sont associées premièrement la *somme de Darboux inférieure* relativement à la subdivision Δ :

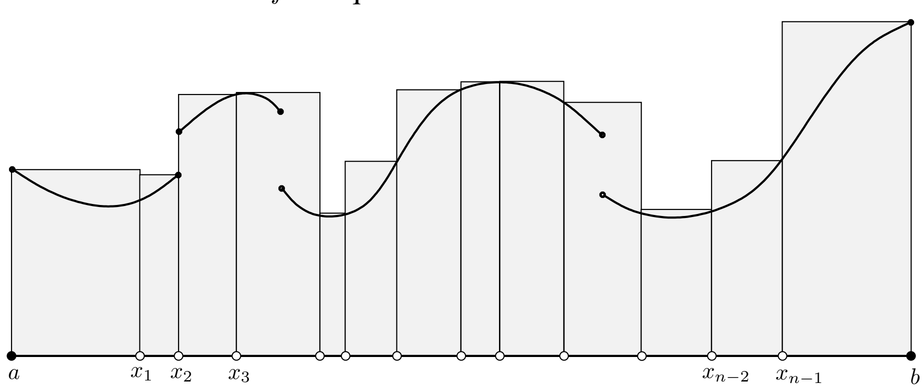
$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \inf_{x \in I_k} f,\end{aligned}$$



et deuxièmement la *somme de Darboux supérieure* :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &:= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f \\ &= \sum_{k=1}^{n} |I_k| \sup_{x \in I_k} f(x).\end{aligned}$$

La fonction n'est pas supposée continue, ni même discontinue seulement en un nombre fini de points (malheureusement, nos piètres figures sont incapables de montrer plus que 3 points de discontinuité), et aussi, il n'y a aucune raison pour que la subdivision Δ s'adapte aux points de discontinuité de f lorsqu'il en existe.



Comme sur les diagrammes, la fonction f n'est pas supposée continue ici, mais ces deux sommes finies existent simplement parce que toutes les quantités :

$$\inf_{x \in I_k} f \qquad \text{et} \qquad \sup_{x \in I_k} f$$

sont des nombres réels *finis*, puisque f est supposée *bornée*.

De plus, la somme de Darboux inférieure est minorée uniformément, comme le montre un délicieux calcul téléscopique facile :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) \;&=\; \sum_{k=1}^{n}\,\big(x_k - x_{k-1}\big)\,\inf_{I_k} f\\ &\geqslant\; \sum_{k=1}^{n}\,\big(x_k - x_{k-1}\big)\,\inf_{[a,b]} f\\ &=\; \Big(b - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_2 - x_1 + x_1 - a\Big)\,\inf_{[a,b]} f\\ &=\; (b-a)\,\inf_{[a,b]} f\\ &>\; -\infty,\end{aligned}$$

et, de manière symétrique, la somme supérieure est elle aussi majorée uniformément :

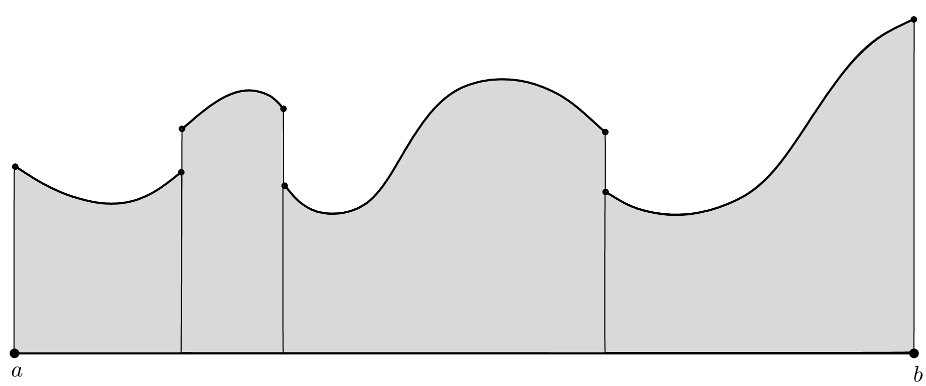
$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) \;&\leqslant\; (b-a)\,\sup_{[a,b]} f\\ &<\; \infty.\end{aligned}$$

Enfin, puisque :

$$\inf_{I_k} f \;\leqslant\; \sup_{I_k} f,$$

pour tout $k = 1, \dots, n$, ces sommes satisfont toujours manifestement (exercice direct) :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$

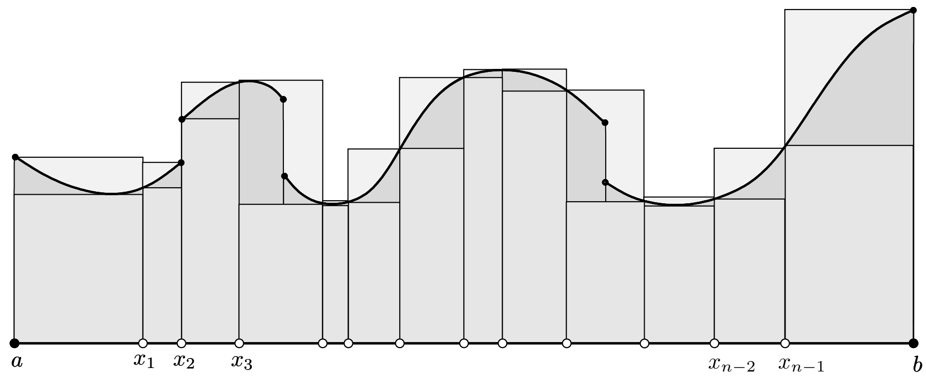


Interprétation géométrique en termes de l'aire de l'hypographe de f. Lorsque f est suffisamment régulière, disons continue $f \in \mathscr{C}^0$, voire même continûment différentiable $f \in \mathscr{C}^1$, et lorsque de plus $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, l'aire de la région :

$$\mathsf{hypographe}(f) := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\; 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

du Grec '*hypo*', '*sous*' — si tant est qu'on puisse donner à une telle aire un sens puisque la recherche de définitions variées pour la notion d'*intégrale* vise justement à se donner les moyens de calculer de telles aires —, sera visiblement approchée en-dessous par $\Sigma_\Delta(f)$, et approché au-dessus par $\Sigma^\Delta(f)$:

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \mathsf{Aire}\big(\mathsf{hypographe}(f)\big) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$



Notons que l'*hypo*thèse — il y a des '*hypo*' partout ! Décidément, les Grecs sont envahissants ! — ici faite que $f \geqslant 0$ est positive n'est essentiellement pas restrictive, puisque l'on peut toujours remplacer f par $f + \text{C}$ où $\text{C} \gg 1$ est une constante assez grande pour que $f + \text{C} \geqslant 0$.

Définition 2.3. [Intégrabilité au sens de Riemann] Une fonction *bornée* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *intégrable au sens de Riemann*, ou de manière abrégée *Riemann-intégrable*, si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Par exemple, les fonctions constantes $f(x) \equiv \text{C} \in \mathbb{C}$ sont trivialement Riemann-intégrables (exercice), heureusement, d'ailleurs.

Afin d'attribuer une valeur à l'*intégrale* de f :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \textbf{?},$$

il faut s'assurer que les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_{\Delta}(f)$ et supérieure $\Sigma^{\Delta}(f)$ convergent vers *une même valeur réelle* à mesure que $\varepsilon \to 0$, *i.e.* comme on s'y attend, à mesure que la subdivision s'enrichit de plus en plus de points pour que ces gratte-ciel de plus en plus étroits serrés les uns contre les autres approchent de mieux en mieux l'aire de l'hypographe de f.

Définition 2.4. Une subdivision Δ' de l'intervalle $[a, b]$ est dite être *plus fine* qu'une subdivision Δ de $[a, b]$ lorsque Δ' contient tous les points Δ et éventuellement aussi, de nombreux autres points.

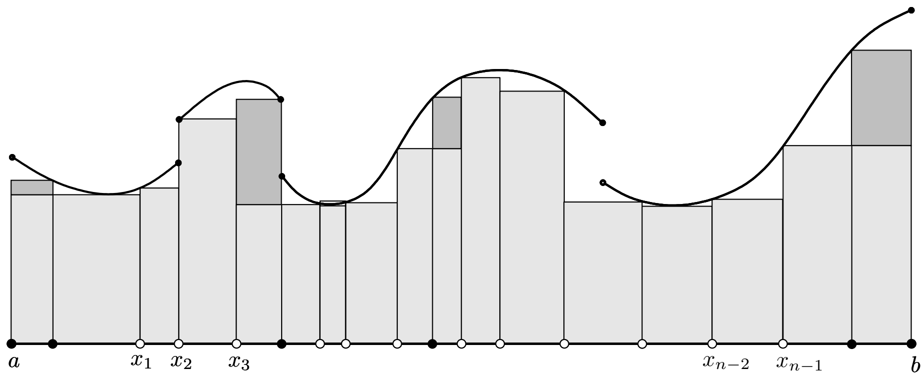
Attention ! On ne dira *jamais* que Δ est '*plus grosse*' que Δ', cela ne serait pas mathématiquement correct !

Alors, en ajoutant juste un point à la fois pour passer pas à pas de Δ à Δ', on démontre aisément par récurrence le :

Lemme 2.5. [Propriété cruciale de monotonie par rapport aux subdivisions] *Si une subdivision Δ' est plus fine qu'une subdivision Δ, on a toujours :*

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \Sigma_{\Delta'}(f) &\leqslant \\ &\leqslant \Sigma^{\Delta'}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta}(f),\end{aligned}$$

ce qui veut dire que le raffinement des subdivisions améliore l'approximation inférieure et l'approximation supérieure tout en réduisant l'écart qui les sépare.

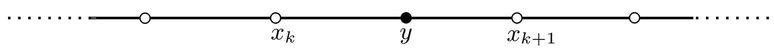


Plus sveltes sont les gratte-ciel, meilleures sont les approximations inférieure et supérieure.

Démonstration. En effet, ajoutons juste un point supplémentaire y à la subdivision quelconque Δ. Ce point appartiendra à un certain intervalle ouvert :

$$y \in \,]x_k, x_{k+1}[,$$

pour un certain entier $0 \leqslant k \leqslant n-1$.



Traitons seulement le cas des sommes de Darboux inférieures, le cas des sommes de Darboux supérieures étant complètement similaire.

Alors la seule différence entre la somme de Darboux inférieure associée à Δ et celle associée à $\Delta \cup \{y\}$, c'est qu'on remplace le terme :

$$\mathsf{I} := \big(x_{k+1} - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f$$

par les deux termes (repérer le signe '$+$') :

$$\mathsf{II} := \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{y \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant y} f,$$

les autres termes restant intouchés.

Mais puisque pour toute application bornée $F \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ d'un espace topologique X à valeurs dans $\mathbb{R}$ satisfait trivialement, pour tous sous-ensembles quelconques $A, B \subset X$:

$$\inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_A F \qquad \text{et} \qquad \inf_{A \cup B} F \leqslant \inf_B F,$$

on obtient ici par un calcul simple :

$$\begin{aligned}
\mathsf{I} &= \big(x_{k+1} - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1} - y + y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&= \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f \\
&\leqslant \big(x_{k+1} - y\big) \inf_{y \leqslant x \leqslant x_{k+1}} f + \big(y - x_k\big) \inf_{x_k \leqslant x \leqslant y} f \\
&= \mathsf{II},
\end{aligned}$$

la majoration qui conclut. □

Corollaire 2.6. [Miracle logique de l'intégrale de Riemann] *Étant donné deux subdivisions quelconques Δ_1 et Δ_2 de l'intervalle $[a,b]$, on a toujours :*

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(f).$$

Démonstration. La subdivision-réunion :

$$\Delta_1 \cup \Delta_2,$$

est simultanément plus fine que Δ_1 et plus fine que Δ_2, donc la monotonie cruciale qui vient d'être énoncée et démontrée assure que :

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma_{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1 \cup \Delta_2}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(f),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Rappelons maintenant le :

Théorème de la borne Supérieure/Inférieure. *Pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$* borné*, à savoir satisfaisant :*

$$E \subset [m, M],$$

pour certains réels $m < M$, il existe deux nombres réels uniques :

$$\mathsf{inf}\, E \in \mathbb{R} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{sup}\, E \in \mathbb{R}$$

tels que :

$$E \subset \big[\mathsf{inf}\, E,\ \mathsf{sup}\, E\big],$$

et qui sont optimaux *au sens où E n'est* pas *contenu dans :*

$$E \not\subset \big[\mathsf{inf}\, E + \varepsilon,\ \mathsf{sup}\, E\big],$$
$$E \not\subset \big[\mathsf{inf}\, E,\ \mathsf{sup}\, E - \varepsilon\big],$$

quel que soit $\varepsilon > 0$. □

Grâce au Lemme 2.5 de monotononie par rapport aux subdivisions, grâce à l'encadrement fixe valable pour toute subdivision Δ :

$$-\infty < \underbrace{(b-a) \inf_{[a,b]} f}_{=:\, m} \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \underbrace{(b-a) \sup_{[a,b]} f}_{=:\, M} < \infty,$$

et grâce au Théorème de la borne supérieure/inférieure les deux nombres réels :

$$I_*(f) := \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad I^*(f) := \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)$$

existent et ils satisfont :

$$\Sigma_\Delta(f) \xrightarrow{\text{croissant}} I_*(f) \leqslant I^*(f) \xleftarrow{\text{décroissant}} \Sigma^\Delta(f).$$

Autrement dit, les aires-sommes de gratte-ciel approchées en-dessous et au-dessus convergent toutes deux vers deux limites, éventuellement différentes, d'ailleurs.

Mais demander que f soit Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3, c'est justement demander (exercice mental) que :

$$I_*(f) = I^*(f).$$

Définition 2.7. L'intégrale au sens de Riemann d'une fonction *bornée* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est alors cette valeur commune :

$$\int_a^b f(x)\,dx := I_*(f) = I^*(f).$$

Nous laissons au lecteur en exercice de compréhension le soin de se convaincre de la véracité de l'énoncé synthétique suivant.

Lemme 2.8. *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable d'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ telle que :*

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$

ou, de manière équivalente, telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon. \qquad \square$$

Une définition alternative équivalente de la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ pourrait être de demander sur toutes les subdivisions Δ de $[a,b]$ que l'on ait :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

mais techniquement parlant, une telle définition s'avèrerait être moins économique que la Définition 2.3 lorsqu'il s'agit d'établir que certaines classes naturelles de fonctions sont automatiquement Riemann-intégrables, donc nous ne l'utiliserons pas.

En fait, c'est la Définition 2.3 que nous avons donné plus haut qui est la plus pratique, mais qu'exprime-t-elle au juste ? Elle dit plus précisément qu'une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est *Riemann-intégrable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

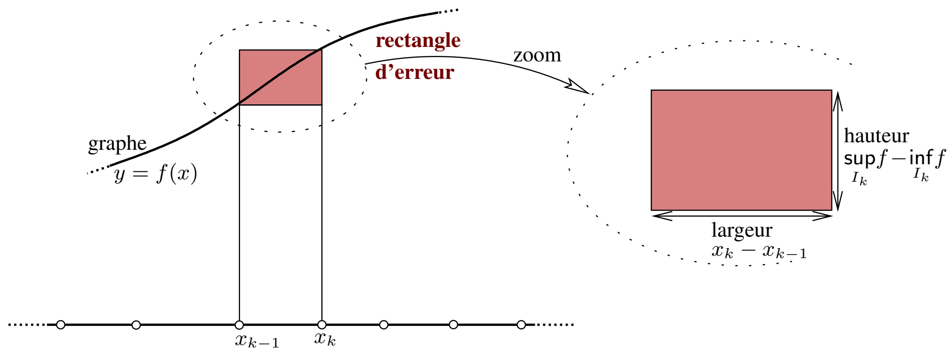
telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon,$$

mais justement, cette différence entre la somme de Darboux supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ et la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ se calcule comme :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\big|I_k\big| \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg)}_{k\text{-ème terme d'erreur}},$$

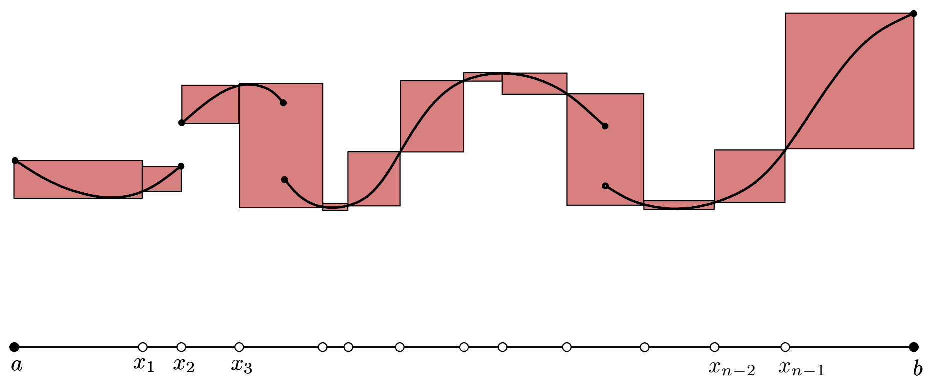
et géométriquement, le k-ème terme d'erreur représente l'aire d'un rectangle — plutôt assez écrasé en général — qui est la différence entre le k-ème gratte-ciel supérieur et le k-ème gratte-ciel inférieur.



On suppose sur la figure que $f \geqslant 0$, ce à quoi on peut toujours se ramener après translation.

Signification géométrique fondamentale de la Riemann-intégrabilité. *Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est Riemann-intégrable lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut approximer son hypographe $\{(x,y)\colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ en-dessous et au-dessus par des rectangles verticaux serrés les uns contre les autres, assez effilés et assez nombreux pour que :*

$$\text{somme des aires de tous les rectangles d'erreur } \leqslant \varepsilon.$$



3. Continuité uniforme des fonctions continues définies sur un intervalle compact

Soient à nouveau deux nombres réels :

$$-\infty < a < b < \infty,$$

et considérons l'intervalle réel fermé borné, donc compact :

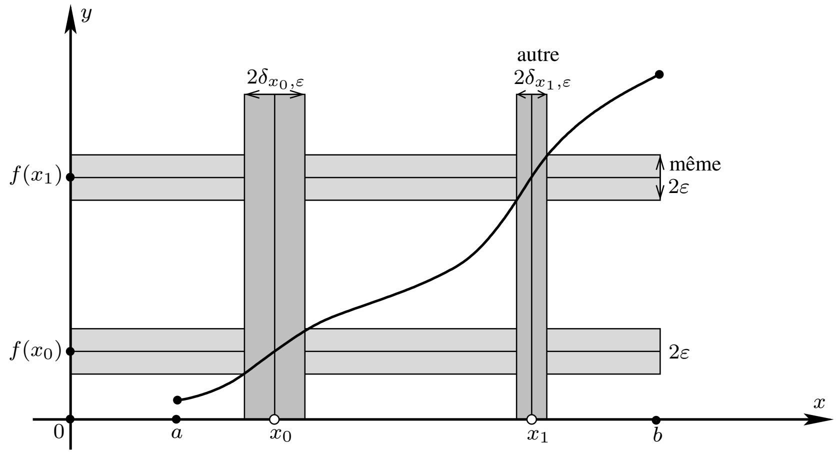
$$[a,b].$$

Définition 3.1. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue en un point* $x_0 \in [a,b]$ si :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_{x_0,\varepsilon} > 0 \quad \Big(\forall\,x \quad |x - x_0| \leqslant \delta_{x_0,\varepsilon} \implies \big|f(x) - f(x_0)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Ici, le $\delta_{x_0,\varepsilon}$ dépend en général inévitablement :

- du $\varepsilon > 0$ *arbitrairement petit* qu'on s'est donné à l'avance ;
- du point x_0 en lequel on teste si f est continue.



En un autre point $x_1 \in [a,b]$ en lequel f serait aussi continue, si l'on prenait le même $\varepsilon > 0$ très petit, il se pourrait en effet très bien qu'un $\delta_{x_1,\varepsilon}$ convenable en x_1 soit beaucoup plus petit que le premier $\delta_{x_0,\varepsilon}$ en x_0.

Définition 3.2. Une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *continue* lorsqu'elle est continue en *tout* point $x_0 \in [a,b]$.

Alors le fait qu'un $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ ne dépende pas du point x_0 en lequel on se situe, mais seulement de $\varepsilon > 0$, est exprimé par le concept mathématique important et classique de *continuité uniforme*.

Définition 3.3. Une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite *uniformément continue* lorsque :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \Big(\forall\, x' \in E \;\; \forall\, x'' \in E \quad |x' - x''| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Théorème 3.4. [dit de Heine] *Toute fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle fermé borné (donc compact) qui est continue en* tout *point $x \in [a,b]$ est en fait uniformément continue sur $[a,b]$.*

Le bonus, donc, c'est que le δ_ε ne dépend pas du point x, et c'est *vraiment* le fait que $[a,b]$ est *compact* qui va garantir une telle uniformité avantageuse.

Attention ! Lorsque f n'est définie et continue que sur un intervalle *ouvert* $]a,b[$, elle n'y est pas forcément uniformément continue (Exercice 1).

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par hypothèse, en tout point $x \in [a,b]$, il existe $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ tel que :

$$\forall\, x' \quad |x' - x| \leqslant \delta_{x,\varepsilon} \implies \big|f(x') - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Bien entendu, ces $\delta_{x,\varepsilon} > 0$ doivent être au moins assez petits pour que les intervalles :

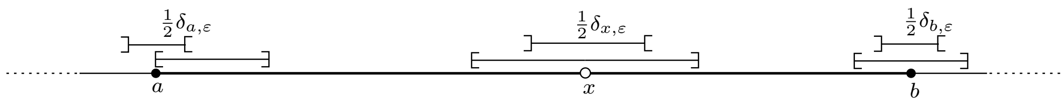
$$\big[x - \delta_{x,\varepsilon},\; x + \delta_{x,\varepsilon}\big] \;\subset\; \big[a,\; b\big]$$

soient contenus dans le domaine de définition de f. Mais à ce sujet, deux points spéciaux méritent attention, à savoir les extrémités :

$$x = a \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x = b,$$

puisqu'alors il faut se restreindre à considérer les intervalles :

$$\big[a,\ a+\delta_{a,\varepsilon}\big] \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big[b-\delta_{b,\varepsilon},\ b\big].$$



Considérons alors plutôt les intervalles *ouverts* rétrécis d'un facteur $\frac{1}{2}$:

$$I_x := \big]x-\tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon},\ x+\tfrac{1}{2}\delta_{x,\varepsilon}\big[,$$

la raison pour laquelle on choisit $\frac{1}{2}$ devant être comprise plus tard, et aux extrémités a et b, considérons aussi de même les deux intervalles ouverts complets :

$$\big]a-\tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon},\ a+\tfrac{1}{2}\delta_{a,\varepsilon}\big[, \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \big]b-\tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon},\ b+\tfrac{1}{2}\delta_{b,\varepsilon}\big[,$$

lesquels débordent donc légèrement de $[a,b]$.

Puisque l'on a trivialement :

$$\bigcup_{x\in[a,b]}\{x\} = [a,b],$$

et puisque chaque intervalle ouvert $I_x \ni x$ contient x, on voit que :

$$\bigcup_{x\in[a,b]} I_x \supset [a,b].$$

Nous pouvons donc appliquer un résultat censé être bien connu en L3 MFA (si tel n'est pas le cas, résoudre l'Exercice 2, ou lire la suite de ce chapitre).

Théorème 3.5. [dit de Heine-Borel] *De tout recouvrement d'un intervalle fermé borné (donc compact) :*

$$[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} I_j,$$

par une famille quelconque *d'intervalles* ouverts *non vides :*

$$I_j \subset \mathbb{R},$$

indexée par un ensemble J de cardinal éventuellement arbitrairement grand, on peut extraire *un sous-recouvrement* <u>fini</u>*, à savoir il existe un entier $n \geqslant 0$ et $(n+1)$ indices :*

$$j_0, j_1, j_2, \dots, j_n \in J$$

tels que, en fait :

$$[a,b] \subset \underbrace{I_{j_0}\cup I_{j_1}\cup I_{j_2}\cup\cdots\cup I_{j_n}}_{\substack{\text{un nombre fini d'intervalles ouverts}\\ \text{suffit en fait pour recouvrir}}}. \qquad \square$$

Une application de ce résultat fondamental donne un nombre $(n+1) \geqslant 2$ de points distincts :

$$x_0,\ x_1,\ \dots,\ x_{n-1},\ x_n \in [a,b]$$

ordonnés de manière croissante avec nécessairement (exercice : pourquoi ?) :

$$x_0 = a \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x_n = b,$$

tels que la réunion de nos intervalles ouverts réduits à moitié :

$$\bigcup_{0\leqslant k\leqslant n} \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\ x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[\ \supset\ [a,b]$$

recouvre tout l'intervalle $[a,b]$ de définition de f.

Or souvenons-nous qu'à chacun des points $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ de $[a,b]$ sont associées des quantités :

$$\delta_{x_0,\varepsilon} > 0,\ \delta_{x_1,\varepsilon} > 0,\ \dots\dots,\ \delta_{x_{n-1}} > 0,\ \delta_{x_n} > 0,$$

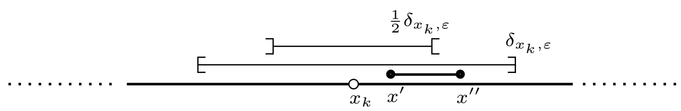
et définissons alors la plus petite d'entre elles :

$$\begin{aligned}\delta_\varepsilon &:= \mathsf{min}\big(\delta_{x_0,\varepsilon},\ \delta_{x_1,\varepsilon},\ \dots,\ \delta_{x_{n-1},\varepsilon},\ \delta_{x_n,\varepsilon}\big)\\ &> 0.\end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration que f est uniformément continue, il suffit de prouver une :

Assertion 3.6. *Avec ce $\delta_\varepsilon > 0$, pour tous $x', x'' \in [a,b]$, on a :*

$$|x' - x''| \leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon \ \Longrightarrow\ \big|f(x') - f(x'')\big| \leqslant 2\,\varepsilon.$$



En effet premièrement, puisque nos intervalles ouverts recouvrent $[a,b]$, il existe un point de référence x_k tel que :

$$x' \in \big]x_k - \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon},\ x_k + \tfrac{1}{2}\delta_{x_k,\varepsilon}\big[,$$

et donc par définition de $\delta_{x_k,\varepsilon}$:

$$\big|f(x') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Deuxièmement, par une simple inégalité triangulaire, on a aussi :

$$\begin{aligned}|x'' - x_k| &\leqslant |x'' - x'| + |x' - x_k|\\ &\leqslant \tfrac{1}{2}\,\delta_\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\delta_{x_k,\varepsilon}\\ &\leqslant \delta_{x_k,\varepsilon},\end{aligned}$$

ce qui nous fait comprendre pourquoi nous avions rétréci les intervalles d'un facteur $\frac{1}{2}$ puisque nous voyons ainsi que x'' appartient aussi à l'intervalle qui nous permet de déduire que :

$$\big|f(x'') - f(x_k)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, une dernière inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\big|f(x') - f(x'')\big| &\leqslant \big|f(x') - f(x_k)\big| + \big|f(x_k) - f(x'')\big|\\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

nous fournit la conclusion terminale. □

En Topologie Générale, on démontre d'une manière très analogue le :

Théorème 3.7. *Une application continue $F\colon X \longrightarrow Y$ d'un espace topologique métrique (X,d) munie d'une distance d à valeurs dans un autre espace topologique (Y,e) munie d'une distance e est nécessairement uniformément continue lorsque X est* compact. □

4. Classes élémentaires de fonctions Riemann-intégrables

Définition 4.1. Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes, décomposée en parties réelle et en partie imaginaire comme :

$$f(x) = u(x) + \sqrt{-1}\, v(x),$$

est dite *intégrable au sens de Riemann* si u et v le sont, et on définit :

$$\int_a^b f(x)\,dx := \int_a^b u(x)\,dx + \sqrt{-1}\int_a^b v(x)\,dx.$$

Théorème 4.2. *Toute fonction continue :*

$$f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

est Riemann-intégrable.

Démonstration. Rappelons que toute fonction continue $F\colon X \to \mathbb{C}$ sur un espace topologique X *compact* est uniformément continue.

Ici, l'intervalle fermé borné $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est compact, donc f est uniformément continue, ce qui s'exprime en caractères symboliques comme :

$$\forall\,\varepsilon > 0, \quad \exists\,\delta(\varepsilon) > 0 \quad \Big(\forall\,x'\ \forall\,x'' \in [a,b], \quad \big|x'-x''\big| \leqslant \delta(\varepsilon) \implies \big|f(x')-f(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Pour montrer que f est Riemann-intégrable, en partant de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il s'agit de trouver une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

Or nous prétendons que si l'entier $n \gg 1$ est choisi assez grand pour que :

$$\frac{b-a}{n} \leqslant \delta(\varepsilon),$$

alors la subdivision la plus simple à n intervalles, à savoir celle qui est équidistribuée à écarts horizontaux constants tous de même longueur $\frac{1}{n}$:

$$\Delta = \bigg\{a,\ \underbrace{a+\frac{b-a}{n}}_{=:\,x_1},\ \underbrace{a+2\,\frac{b-a}{n}}_{=:\,x_2},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{a+(n-1)\,\frac{b-a}{n}}_{=:\,x_{n-1}},\ b\bigg\},$$

va facilement convenir.

En effet, pour une telle subdivision, les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f sont :

$$\Sigma_\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\,\mathsf{inf}\bigg\{f(x)\colon\ a+(k-1)\,\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a+k\,\frac{b-a}{n}\bigg\},$$

$$\Sigma^\Delta(f) = \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\,\mathsf{sup}\bigg\{f(x)\colon\ a+(k-1)\,\frac{b-a}{n} \leqslant x \leqslant a+k\,\frac{b-a}{n}\bigg\},$$

et donc en abrégeant comme d'habitude $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, leur soustraction vaut :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n}\bigg(\mathsf{sup}_{I_k} f - \mathsf{inf}_{I_k} f\bigg). \end{aligned}$$

Mais comme $f\big|_{I_k}$ est *continue* sur l'intervalle *compact* I_k, elle y atteint d'après un théorème connu sa borne inférieure et sa borne supérieure :

$$\begin{aligned} \exists\, x_k^- \quad & \text{tel que} \quad f(x_k^-) \,=\, \inf_{I_k} f, \\ \exists\, x_k^+ \quad & \text{tel que} \quad f(x_k^+) \,=\, \sup_{I_k} f. \end{aligned}$$

De plus, comme $x_k^- \in I_k$ et $x_k^+ \in I_k$ avec par choix de $n \gg 1$:

$$\big|I_k\big| \,=\, \frac{b-a}{n} \,\leqslant\, \delta(\varepsilon),$$

on voit instantanément que :

$$\big|x_k^- - x_k^+\big| \,\leqslant\, \delta(\varepsilon),$$

et donc au final :

$$\begin{aligned} 0 \,&\leqslant\, \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &=\, \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \bigg(\underbrace{f(x_k^+) - f(x_k^-)}_{\leqslant\, \varepsilon} \bigg) \\ &\leqslant\, \varepsilon\,(b-a) \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} \\ &\leqslant\, \varepsilon\,(b-a), \end{aligned}$$

ce qui conclut, quitte à remplacer ε à l'avance par $\varepsilon/(b-a)$. □

Définition 4.3. Une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *croissante* lorsque :

$$\forall\, x' \ \forall\, x'' \,\in\, [a,b] \qquad x' \leqslant x'' \;\Longrightarrow\; f(x') \leqslant f(x'').$$

Elle est dite *décroissante* lorsque :

$$\forall\, x' \ \forall\, x'' \,\in\, [a,b] \qquad x' \leqslant x'' \;\Longrightarrow\; f(x') \geqslant f(x'').$$

Définition 4.4. Une fonction $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *monotone* lorsqu'elle est ou bien croissante, ou bien décroissante sur *tout* l'intervalle $[a,b]$.

Il faut bien faire attention que la notion de monotonie peut être *localisée :* une fonction peut fort bien ne pas être monotone sur l'intervalle $[a,b]$ tout entier, mais être monotone sur des sous-intervalles assez petits $J \subset [a,b]$, penser par exemple à $\theta \mapsto \sin\theta$ sur $[0,2\pi]$, fonction qui est croissante sur $[0,\frac{\pi}{2}]$, puis décroissante sur $[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}]$, et enfin croissante sur $[\frac{3\pi}{2},2\pi]$.

Notons aussi que toute fonction monotone $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, par exemple croissante, est nécessairement bornée, puisque :

$$a \,\leqslant\, x \,\leqslant\, b \;\Longrightarrow\; \underbrace{f(a)}_{>\,-\infty} \,\leqslant\, f(x) \,\leqslant\, \underbrace{f(b)}_{<\,\infty}.$$

Théorème 4.5. *Toute fonction monotone (bornée) f sur un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable.*

Démonstration. Pour fixer les idées, nous supposerons f croissante, car le cas où f est décroissante se traiterait de manière entièrement similaire. D'ailleurs, c'est un exercice facile de vérifier qu'une fonction f est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est, et donc, si on partait d'une fonction décroissante f, on se ramènerait de toute façon à une fonction croissante en travaillant avec $-f$.

Prenons une subdivision quelconque de l'intervalle $[a, b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

et attendons de voir naturellement quelle condition simple Δ doit satisfaire pour que $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon$.

Posons comme à l'accoutumée :

$$I_k := \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad (k = 1 \cdots n).$$

Pour calculer les sommes de Darboux inférieure et supérieure de f associées à Δ, comme f est supposée croissante, *on sait* ce que valent les bornes inférieures et supérieures de f sur les intervalles I_k :

$$f(x_{k-1}) \,=\, \inf_{I_k} f \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad f(x_k) \,=\, \sup_{I_k} f,$$

tout simplement parce que :

$$x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k \implies f(x_{k-1}) \leqslant f(x) \leqslant f(x_k).$$

Alors la différence entre les deux sommes de Darboux en question se majore aisément sans valeur absolue puisque tous les termes sont positifs :

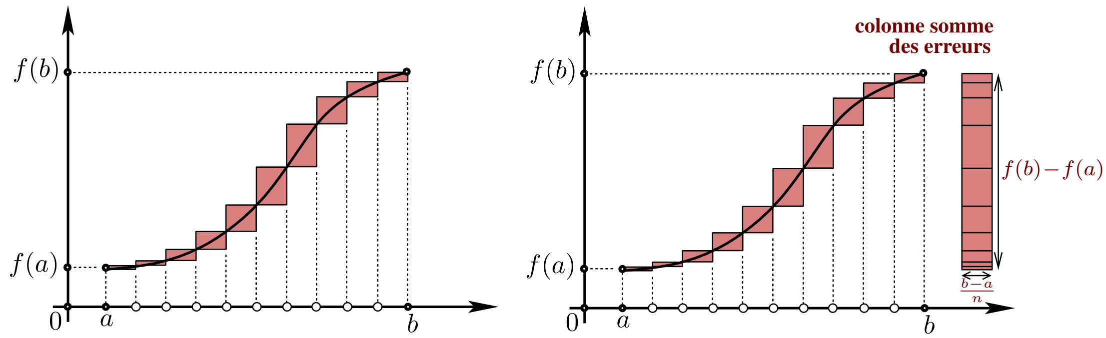
$$\begin{aligned}
0 \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \,&=\, \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg) \\
&=\, \sum_{k=1}^n \big(\underbrace{x_k - x_{k-1}}_{\geqslant 0}\big)\Big(\underbrace{f(x_k) - f(x_{k-1})}_{\text{toujours} \geqslant 0}\Big) \\
&\leqslant\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sum_{k=1}^n \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big) \\
\text{[Somme téléscopique !]} \qquad &=\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \cdots \\
&\qquad\qquad \cdots + f(x_{n-1}) - f(x_{n-2}) + f(b) - f(x_{n-1})\Big] \\
&=\, \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \big[f(b) - f(a)\big].
\end{aligned}$$

En conclusion, pourvu seulement que la subdivision Δ soit choisie assez resserrée pour que :

$$x_k - x_{k-1} \,\leqslant\, \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} \qquad\qquad (k = 1 \cdots n),$$

on obtiendra bien $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon$. □

Graphiquement, la Riemann-intégrabilité des fonctions monotones s'illustre de manière spectaculairement éclairante.



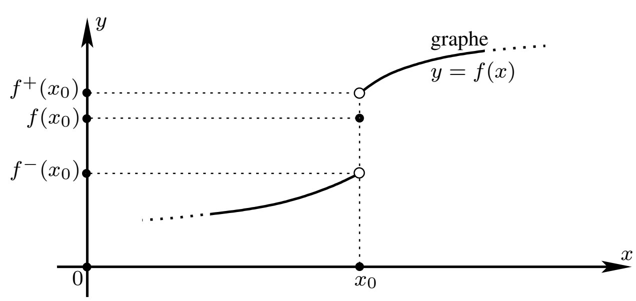
Pour simplifier, la figure est réalisée dans le cas d'une fonction croissante *continue*, avec une subdivision à pas constant $x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n}$. Cette figure montre que la somme totale des erreurs correspond à une colonne dont la hauteur reste égale à $f(b) - f(a)$, donc bornée, tandis que la largeur de la base, égale à $\frac{b-a}{n}$, tend vers zéro quand $n \to \infty$. L'aire de ce rectangle-colonne vertical somme des erreurs :

$$\frac{b-a}{n} \times \big(f(b) - f(a)\big) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

tend donc bien vers zéro lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Toutefois, il importe de noter que le théorème que nous venons de démontrer est valable pour toute fonction monotone sans hypothèse de continuité.

Il existe d'ailleurs des fonctions monotones qui ont un nombre fini, voire infini dénombrable, de points de discontinuité. Mais nous verrons que les fonctions monotones sont '*presque partout*' différentiables, où le sens qu'il convient de donner à l'expression '*presque partout*' dépendra d'une théorie supérieure, celle de Lebesgue, notre objectif principal dans ce cours.



En tout cas pour l'instant, rappelons que toute fonction monotone $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet, en tout point $x_0 \in [a,b]$, une *limite à gauche* et une *limite à droite*, à savoir plus précisément :

$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) =: f^-(x_0),$$

$$\forall\, x_0 \in [a,b] \quad \exists \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) =: f^+(x_0),$$

les deux notations $f^-(x_0)$ et $f^+(x_0)$ pour ces deux limites parlant tout à fait à l'intuition ; en effet, l'existence de ces deux limites découle simplement par monotonie de f d'une application du Théorème de la borne inférieure/supérieure :

$$f^-(x_0) = \sup \underbrace{\big\{ f(x) \in \mathbb{R} \colon \, x < x_0 \big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(a), f(x_0)]},$$

$$f^+(x_0) = \inf \underbrace{\big\{ f(x) \in \mathbb{R} \colon \, x > x_0 \big\}}_{\text{ensemble borné} \subset [f(x_0), f(b)]}.$$

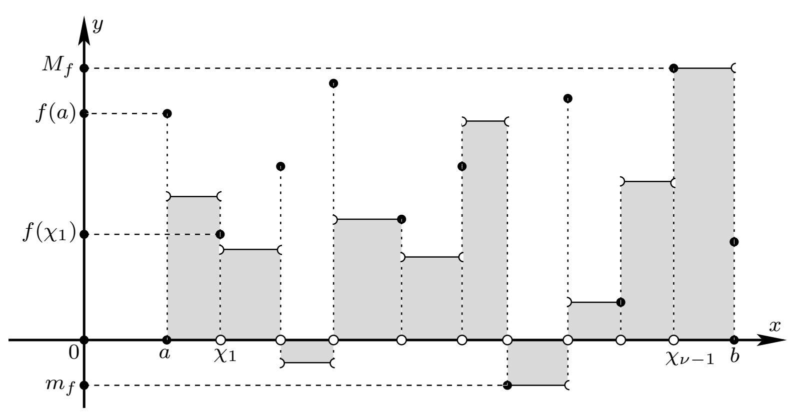
Définition 4.6. Une fonction bornée $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelée *fonction en escalier* sur $[a,b]$ s'il existe une suite croissante finie de 'points-seuils' :

$$a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b,$$

et s'il existe des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{\nu-1}, c_\nu \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{aligned}
f(x) &= c_1 && \forall\, \chi_0 < x < \chi_1, \\
f(x) &= c_2 && \forall\, \chi_1 < x < \chi_2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
f(x) &= c_{\nu-1} && \forall\, \chi_{\nu-2} < x < \chi_{\nu-1}, \\
f(x) &= c_\nu && \forall\, \chi_{\nu-1} < x < \chi_\nu,
\end{aligned}$$

aucune condition particulière n'étant demandée sur les valeurs $f(a)$, $f(\chi_1)$, ..., $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$, qui apparaissent en noir sur la figure.



Autrement dit, sur chaque intervalle ouvert $]\chi_{\lambda-1}, \, \chi_\lambda[$, la fonction est constante :

$$f\big|_{]\chi_{\lambda-1}, \chi_\lambda[} \equiv c_\lambda \qquad\qquad (1 \leqslant \lambda \leqslant \nu).$$

Même si les valeurs de $f(a)$, $f(\chi_1)$, ..., $f(\chi_{\nu-1})$, $f(b)$ sont éventuellement libres d'être totalement déconnectées des constantes $c_1, c_2, \dots, c_{\nu-1}, c_\nu$, on est certain puisque la fonction est bornée que les deux quantités :

$$m_f := \inf_{x \in [a,b]} f(x) \, > \, -\infty,$$

$$M_f := \sup_{x \in [a,b]} f(x) \, < \, \infty,$$

sont *finies*.

Théorème 4.7. *Toute fonction en escalier $f^{\mathsf{esc}} \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, et plus précisément, dans les notations de la Définition générale 4.6, la valeur de son intégrale est la somme des aires (orientées) des rectangles :*

$$\int_a^b f^{\mathsf{esc}}(x)\,dx = \big(\chi_1 - a\big)\,c_1 + \big(\chi_2 - \chi_1\big)\,c_2 + \cdots + \big(\chi_{\nu-1} - \chi_{\nu-2}\big)\,c_{\nu-1} + \big(b - \chi_{\nu-1}\big)\,c_\nu.$$

Démonstration. Sans perte de généralité, on peut supposer que :

$$m_{f^{\mathsf{esc}}} < M_{f^{\mathsf{esc}}},$$

car si au contraire on avait $m_{f^{\mathsf{esc}}} = M_{f^{\mathsf{esc}}}$, la fonction f^{esc} serait *constante*, auquel cas le théorème serait trivial.

Intuitivement, on pourrait être tenté de prétendre que la démonstration est immédiate, puisqu'il semble suffire de choisir la subdivision :

$$\square := \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \cdots < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\},$$

mais les 'inf' et les 'sup' qui apparaissent dans les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\square$ et $\Sigma^\square$ sont par définition à prendre sur les intervalles *fermés* $[\chi_{\lambda-1}, \chi_\lambda]$, et justement, comme on n'a aucune connaissance des valeurs aux extrémités $f(\chi_{\lambda-1})$ et $f(\chi_\lambda)$, il y a comme qui dirait '*un petit hic*'.

L'Exercice 5 montre qu'on peut modifier la définition des sommes de Darboux pour que ce problème technique disparaisse. Mais il vaut mieux mettre ici au point une démonstration indépendante, pour faire apparaître des idées géométriques qui resserviront ultérieurement.

Intuitivement, lorsqu'on interprète l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ comme étant l'aire de l'hypographe $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$ d'une fonction en escalier $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives, les $(\nu+1)$ segments verticaux entre les immeubles :

$$\big\{0 \leqslant y \leqslant f(a)\big\} \bigcup \big\{0 \leqslant y \leqslant f(\chi_1)\big\} \bigcup \cdots \bigcup \big\{0 \leqslant y \leqslant f(\chi_{\nu-1})\big\} \bigcup \big\{0 \leqslant y \leqslant f(b),$$

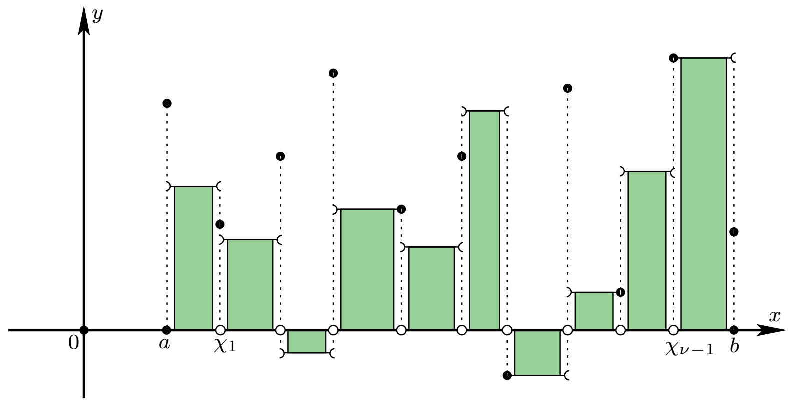
s'ils se mettent à dépasser commes des antennes de télécommunication attachées aux parois verticales, comptent de toute façon pour rien en termes de surface : ils sont *de mesure nulle*.

Pour rendre cette idée rigoureuse, adjoignons des points à la subdivision $\square$ en introduisant, pour un $\delta > 0$ très petit, en tout cas plus petit que :

$$\delta < \tfrac{1}{2} \min\big\{\chi_1 - a,\ \chi_2 - \chi_1,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1} - \chi_{\nu-2},\ b - \chi_{\nu-1}\big\},$$

à chaque fois deux points serrés de part et d'autre de chaque point de $\square$:

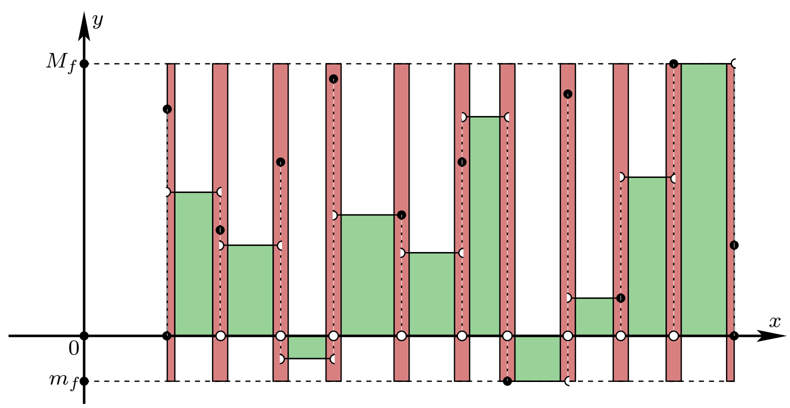
$$\Delta := \Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1 - \delta,\ \chi_1,\ \chi_1 + \delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1} - \delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1} + \delta,\ b - \delta,\ b\Big\}.$$



À ce moment-là, on est certain que sur tous les intervalles *fermés :*

$$\big[a+\delta,\ \chi_1-\delta\big],\ \ \big[\chi_1+\delta,\ \chi_2-\delta\big],\ \ \dots\dots\dots,\ \ \big[\chi_{\nu-2}+\delta,\ \chi_{\nu-1}-\delta\big],\ \ \big[\chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta\big],$$

la fonction est bel et bien constante, y compris aux extrémités.



Pour cette subdivision Δ, nous laissons au lecteur le soin de se convaincre par la réflexion que l'erreur entre sommes de Darboux :

$$\Sigma^{\Delta}(f)-\Sigma_{\Delta}(f)$$

est majorée par la somme des aires de $(\nu+1)$ tours verticales ultra-fines entre les immeubles amaigris, toutes ces tours étant d'une hauteur égale à :

$$M_f-m_f\ >\ 0,$$

et toutes — excepté les deux demi-tours en a et en b — ayant une largeur à la base égale à :

$$2\,\delta,$$

donc au total la somme des erreurs possède le majorant :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta}(f)-\Sigma^{\Delta}(f)\ &\leqslant\ \big(M_f-m_f\big)\,\big(\delta+\underbrace{2\delta+\cdots+2\delta}_{\nu-1\text{ fois}}+\delta\big)\\&=\ \big(M_f-m_f\big)\,\nu\,2\,\delta\end{aligned},$$

une quantité qui peut être rendue arbitrairement petite, *i.e.* plus petite qu'un $\varepsilon > 0$ quelconque fixé à l'avance, pourvu que :

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{(M_f - m_f)\, 2\, \nu},$$

ce qui conclut la démonstration et fournit la valeur annoncée pour $\int_a^b f(x)\, dx$ (exercice de compréhension). □

Au niveau de progression que nous venons d'atteindre, il importe de réinterpréter la Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ à l'aide du concept de fonction en escalier.

En effet, la somme de Darboux inférieure de f associée à une subdivision Δ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\, dx,\end{aligned}$$

s'avère, grâce au théorème que nous venons de démontrer, être *égale* à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier inférieure* f_Δ^{esc} naturellement associée à f, laquelle est définie, en introduisant pour abréger les $(n+1)$ constantes :

$$c_\Delta^1(f) := \inf_{a \leqslant x \leqslant x_1} f(x), \qquad c_\Delta^2(f) := \inf_{x_1 \leqslant x \leqslant x_2} f(x), \qquad \dots\dots, \qquad c_\Delta^n(f) := \inf_{x_{n-1} \leqslant x \leqslant x_n} f(x),$$

dans les n intervalles *ouverts* de la subdivision par :

$$\begin{aligned} & f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^1(f) && \forall\, a < x < x_1, \\ & f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^2(f) && \forall\, x_1 < x < x_2, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ & f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) := c_\Delta^n(f) && \forall\, x_{n-1} < x < b, \end{aligned}$$

tandis que les valeurs de cette fonction en escalier inférieure f_Δ^{esc} aux points de la subdivision — sans importance pour la valeur de son intégrale $\int f_\Delta^{\mathsf{esc}}$ — sont simplement assignés à être celles de la fonction originale :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}}(a) := f(a), \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x_1) := f(x_1), \qquad \dots\dots, \qquad f_\Delta^{\mathsf{esc}}(b) := f(b).$$

De manière entièrement similaire, la somme de Darboux supérieure de f associée à la même subdivision Δ :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &= \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1} \leqslant x \leqslant x_k} f(x) \\ &= \int_a^b f^\Delta_{\mathsf{esc}}(x)\, dx,\end{aligned}$$

s'avère être égale à l'intégrale d'une certaine *fonction en escalier supérieure* f^Δ_{esc} dont il n'est pas nécessaire d'expliciter la définition.

En tout cas, ces deux fonctions en escalier *encadrent* f :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f^\Delta_{\mathsf{esc}},$$

et en appliquant l'intégration $\int_a^b(\cdot)$ qui respecte les inégalités entre les fonctions grâce au Théorème 5.1 ci-dessous, on réobtient :

$$\underbrace{\Sigma_\Delta(f)}_{=\int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}} \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \underbrace{\Sigma^\Delta(f)}_{=\int_a^b f_{\mathsf{esc}}^\Delta}.$$

En accord avec les intuitions géométriques qui transparaissaient volontairement dans tous les diagrammes qui précèdent, nous pouvons alors effectivement énoncer une :

Proposition 4.8. [Réinterprétation fondamentale de la Riemann-intégrabilité] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe* deux *fonctions en escalier encadrant f :*

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}}$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Sur un plan strictement *logique*, l'équivalence entre les deux définitions n'est pas immédiate, mais l'Exercice 7 propose de s'en convaincre rigoureusement.

5. Propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann

Théorème 5.1. *Si $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables définies sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, alors :*

(i) [Additivité] *leur somme $f+g$ est elle aussi Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx;$$

(ii) [Dilativité] *pour toute constante $\lambda \in \mathbb{C}$, la fonction $\lambda\, f$ est Riemann-intégrale avec :*

$$\int_a^b \lambda\, f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx;$$

(iii) [Croissance de l'intégrale] *si f et g sont à valeurs* réelles *et si :*

$$f(x) \leqslant g(x) \qquad {\scriptstyle (\forall\, x\in[a,b])},$$

alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx;$$

(iv) [Règle de Chasles] *pour tout $c \in \,]a,b[$, en restriction aux deux intervalles $[a,c]$ et $[c,b]$, la fonction f est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

(v) [Dégénérescence] *Lorsque $b=a$, auquel cas l'intervale $[a,a] = \{a\}$ est réduit à un point :*

$$0 = \int_a^a f(x)\,dx.$$

Définition 5.2. [Convention de Chasles algébrique] En accord avec ces propriétés, lorsque les bornes d'intégration sont inversées, il convient de poser :

$$\int_b^a f(x)\,dx \overset{\text{def}}{=} -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Contentons-nous d'établir rigoureusement l'additivité **(i)**, les propriétés **(ii)** et **(iii)** se vérifiant par le même type d'arguments, tandis que **(iv)** demande simplement de raffiner les subdivisions concernées en leur ajoutant seulement le point c. Quant à **(v)**, *stricto sensu*, la théorie n'a été développée jusqu'à présent que pour $-\infty < a < b < \infty$, mais il est clair que lorsque $b = a$, quelle que soit la subdivision Δ choisie, toutes les différences $(x_k - x_{x-1})$ dans les sommes de Darboux sont nulles, d'où $0 = \Sigma_\Delta(f) = \Sigma^\Delta(f)$.

Grâce à la reformulation synthétique du Lemme 2.8, si on se donne un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, la Riemann-intégrabilité de f et de g s'exprime en disant qu'il existe deux subdivisions :

$$\Delta_1 = \Delta_1(\varepsilon) \qquad \text{et} \qquad \Delta_2 = \Delta_2(\varepsilon)$$

de l'intervalle $[a, b]$ telles que :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$
$$\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,$$

simultanément. Bien entendu, on est instantanément tenté d'introduire leur *réunion :*

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

car le Lemme 2.5 crucial de monotonie :

$$\Sigma_{\Delta_1}(f) \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f),$$
$$\Sigma_{\Delta_2}(g) \leqslant \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(g) \leqslant \Sigma^{\Delta_2}(g),$$

assure qu'on aura aussi :

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon,$$
$$\int_a^b g(x)\,dx - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(g) \leqslant \int_a^b g(x)\,dx + \varepsilon,$$

maintenant pour une seule et même subdivision Δ de $[a, b]$. Une addition directe de ces deux inégalités donne alors un résultat à conserver en mémoire :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \Sigma_\Delta(g) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \Sigma^\Delta(g) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + 2\,\varepsilon.$$

Lemme 5.3. *Pour tout sous-intervalle fermé :*

$$I \subset [a, b],$$

on a :

$$\inf_{x\in I} f(x) + \inf_{x\in I} g(x) \leqslant \inf_{x\in I} \big((f+g)(x)\big)$$
$$\sup_{x\in I} \big((f+g)(x)\big) \leqslant \sup_{x\in I} f(x) + \sup_{x\in I} g(x).$$

Démonstration. Contentons-nous de prouver l'inégalité sur les inf, celle sur les sup étant similaire et équivalente (exercice).

Posons pour abréger :

$$\varphi := \inf_{x\in I} f(x), \qquad \psi := \inf_{x\in I} g(x), \qquad \chi := \inf_{x\in I} \big(f(x)+g(x)\big).$$

Par définition, on a donc en particulier :

$$\varphi \leqslant f(x), \qquad \psi \leqslant g(x), \qquad \chi \leqslant f(x)+g(x) \qquad {\scriptstyle (\forall\, x\in I)},$$

mais puisqu'il s'agit de l'*infimum* pour cette troisième et dernière inégalité, il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments $x_n \in I$ telle que :

$$\chi + \varepsilon_n \,=\, f(x_n) + g(x_n),$$

avec un léger décalage supérieur $\varepsilon_n \geqslant 0$ qui tend vers zéro $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ lorsque $n \to \infty$. Alors par jeu d'inégalités simples :

$$\begin{aligned}\varphi + \psi \,&\leqslant\, f(x_n)+g(x_n)\\ &=\, \chi + \varepsilon_n,\end{aligned}$$

et à la limite $\varphi + \psi \leqslant \chi$, ce qu'il fallait faire voir. □

Grâce à cette inégalité sur les inf, nous pouvons majorer l'addition des sommes de Darboux inférieures de f et de g :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g) \,&=\, \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\inf_{I_k} f \,+\, \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\inf_{I_k} g\\ &=\, \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\Big[\,\inf_{I_k} f + \inf_{I_k} g\,\Big]\\ &\leqslant\, \sum_{k=1}^n \big(x_k-x_{k-1}\big)\,\inf_{I_k}\big(f+g\big)\\ &=\, \Sigma_\Delta(f+g),\end{aligned}$$

et de manière entièrement similaire, le lecteur vérifiera que pour les sommes de Darboux supérieures, on a l'inégalité :

$$\Sigma^\Delta(f+g) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g).$$

Une synthèse entre les deux inégalités obtenues s'exprime comme pour le mieux dans le meilleur des mondes :

$$\Sigma_\Delta(f)+\Sigma_\Delta(g) \,\leqslant\, \Sigma_\Delta(f+g) \underbrace{\leqslant}_{\text{toujours vrai}} \Sigma^\Delta(f+g) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f)+\Sigma^\Delta(g).$$

Enfin, une comparaison visuelle avec le résultat conservé en mémoire ci-dessus fournit l'information finale :

$$\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx - 2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à gauche}} \leqslant \Sigma_\Delta(f+g) \leqslant \Sigma^\Delta(f+g) \leqslant \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx + 2\,\varepsilon}_{\text{gendarme à droite}},$$

grâce à laquelle, étant donné que :

$$\text{différence entre les deux gendarmes} \,=\, 4\,\varepsilon,$$

on voit que :

$$\Sigma^{\Delta}(f+g) - \Sigma_{\Delta}(f+g) \leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui conclut que $f+g$ est Riemann-intégrable et en bonus automatique aussi, que $\int(f+g) = \int f + \int g$. $\square$

Corollaire 5.4. *L'application :*

$$f \longmapsto \int_a^b f(x)\,dx$$

est une application linéaire sur l'espace des fonctions bornées Riemann-intégrables sur $[a,b]$. $\square$

Proposition 5.5. *Soit* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction bornée définie sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, et soit un point quelconque :*

$$c \in]a,b[.$$

Si, pour tout $\delta > 0$ *arbitrairement petit, les deux restrictions :*

$$f\big|_{[a,\,c-\delta]} \qquad \text{et} \qquad f\big|_{[c+\delta,\,b]}$$

sont Riemann-intégrables, alors f *elle-même est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. Notons :

$$\sup_{[a,b]} |f| =: M_{|f|} < \infty,$$

et pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons $\delta > 0$ assez petit pour que :

$$4\,\delta\,M_{|f|} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Par hypothèse, il existe deux subdivisions Δ_1 de $[a, c-\delta]$ et Δ_2 de $[c+\delta, b]$ telles que les différences entre les sommes de Darboux associées sont arbitrairement petites :

$$\begin{aligned} (0 \leqslant)\quad \Sigma^{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) - \Sigma_{\Delta_1}\big(f\big|_{[a,c-\delta]}\big) &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}, \\ (0 \leqslant)\quad \Sigma^{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) - \Sigma_{\Delta_2}\big(f\big|_{[c+\delta,b]}\big) &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Alors tout simplement pour la subdivision réunion :

$$\Delta := \Delta_1 \cup \Delta_2,$$

qui contient bien entendu $\{c-\delta\}$ et $\{c+\delta\}$ comme extrémité droite de Δ_1 et gauche de Δ_2 ce qui ajoute le seul segment $[c-\delta, c+\delta]$ de longueur $2\,\delta$, les sommes de Darboux deviennent :

$$\begin{aligned} \Sigma_{\Delta}(f) &= \Sigma_{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \inf_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma_{\Delta_2}(f), \\ \Sigma^{\Delta}(f) &= \Sigma^{\Delta_1}(f) + 2\,\delta \sup_{[c-\delta,c+\delta]} f + \Sigma^{\Delta_2}(f), \end{aligned}$$

et donc par soustraction :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(f)-\Sigma_{\Delta}(f) &\leqslant \Sigma^{\Delta_1}(f)-\Sigma_{\Delta_1}(f)+2\,\delta\,\Big(\sup_{[c-\delta,c+\delta]} f-\inf_{[c-\delta,c+\delta]} f\Big)+\Sigma^{\Delta_2}(f)-\Sigma_{\Delta_2}(f)\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+2\,\delta\,2\,M_{|f|}+\frac{\varepsilon}{3}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3},\end{aligned}$$

quantité arbitrairement petite, ce qui conclut. $\square$

Définition 5.6. Une fonction $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ est dite *continue par morceaux* lorsqu'il existe une suite croissante de points :

$$a<\eta_1<\eta_2<\cdots<\eta_{\nu-1}<\eta_\nu<b,$$

telle que f est continue en restriction à chacun des intervalles :

$$[a,\eta_1[,\qquad]\eta_1,\eta_2[,\qquad \ldots\ldots,\qquad]\eta_{\nu-1},\eta_\nu[,\qquad]\eta_\nu,b].$$

On notera :

$$f\,\in\,\mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b]).$$

Corollaire 5.7. *Toute fonction bornée $f\in\mathscr{C}^0_{\mathsf{pm}}([a,b])$ est Riemann-intégrable avec :*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{\eta_1} f(x)\,dx+\int_{\eta_1}^{\eta_2} f(x)\,dx+\cdots+\int_{\eta_{\nu-1}}^{\eta_\nu} f(x)\,dx+\int_{\eta_\nu}^{b} f(x)\,dx. \qquad\square$$

Une autre question importante est de déterminer si le *produit* fg de deux fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable. Cette propriété positive sera un corollaire de l'énoncé général suivant.

Théorème 5.8. *Si une fonction bornée $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ est Riemann-intégrable et si une fonction $\varphi\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est continue, alors leur composée :*

$$\varphi\circ f\colon\quad [a,b]\stackrel{f}{\longrightarrow}\mathbb{R}\stackrel{\varphi}{\longrightarrow}\mathbb{R}$$

est elle aussi Riemann-intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Par hypothèse, la quantité :

$$M_{|f|}:=\sup_{x\in[a,b]}\big|f(x)\big|\,<\,\infty$$

est finie. Pour effectuer la composition $\varphi\circ f$, il suffit en fait de connaître φ seulement sur l'intervalle *compact :*

$$\big[-M_{|f|},\,M_{|f|}\big],$$

intervalle sur lequel, d'ailleurs, φ est — gratuitement grâce au Théorème 3.4 de Heine — uniformément continue :

$$\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,\delta_\varepsilon>0\quad\Big(\forall\,|y'|\leqslant M_{|f|}\ \ \forall\,|y''|\leqslant M_{|f|}\quad \big|y'-y''\big|\leqslant\delta_\varepsilon\implies\big|\varphi(y')-\varphi(y'')\big|\leqslant\varepsilon\Big).$$

Soit donc un tel $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, et soit un $\delta_\varepsilon>0$ associé. Notons en passant qu'il est loisible de rapetisser $\delta_\varepsilon>0$ tout en conservant vraie cette implication $\Longrightarrow$ de continuité uniforme, et à la fin de la démonstration, nous aurons besoin d'avoir :

$$0<\delta_\varepsilon\leqslant\varepsilon,$$

ce que nous pouvons donc d'ores et déjà supposer.

Puisque f est Riemann-intégrable, en prenant le carré $(\delta_\varepsilon)^2$ de ce $\delta_\varepsilon > 0$ comme quantité arbitrairement petite $\varepsilon^\sim > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_{\varepsilon^\sim} = \Delta_{(\delta_\varepsilon)^2} = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ assez fine pour que l'erreur entre les sommes de Darboux associées :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant (\delta_\varepsilon)^2,$$

soit majorée par $(\delta_\varepsilon)^2$. Autrement dit, on adapte à l'avance une finesse extrême — puisque $\delta_\varepsilon^2 \ll \varepsilon$ — de la subdivision afin de compenser ce que va faire perdre la composition avec φ.

Comme à l'accoutumée, pour $k = 1, \dots, n$, notons $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Il s'agit maintenant de regarder et d'estimer la différence entre les sommes de Darboux de $\varphi \circ f$ associées à Δ :

$$\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) = \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\sup_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) - \inf_{x \in I_k} \varphi \circ f(x)\bigg).$$

À cet effet, décomposons l'ensemble des indices en *deux* classes *disjointes :*

$$\begin{aligned} \big\{1, 2, \dots, n-1, n\big\} &= K \cup K', \\ \emptyset &= K \cap K', \end{aligned}$$

la première classe repérant tous les indices :

$$K := \Big\{k \in \{1, \dots, n\} \colon \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \leqslant \delta_\varepsilon\Big\},$$

pour lesquels on peut appliquer en composition la continuité uniforme de φ écrite ci-dessus, ce qui nous donne [1] :

$$\sup_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) - \inf_{x \in I_k} \varphi \circ f(x) \leqslant \varepsilon,$$

seulement donc lorsque $k \in K$.

Alors la première fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$:

$$\Sigma^\Delta(\varphi \circ f) - \Sigma_\Delta(\varphi \circ f) = \underbrace{\sum_{k \in K} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K)} + \underbrace{\sum_{k \in K'} \big(\text{même chose}\big)}_{\text{Erreur}(K')}$$

1. Voici les détails. Pour $k \in K$ et pour tous $x', x'' \in I_k$, on vérifie que :

$$\big|f(x'') - f(x')\big| \leqslant \sup_{x \in I_k} f(x) - \inf_{x \in I_k} f(x) \leqslant \delta_\varepsilon,$$

d'où grâce à la continuité uniforme de φ :

$$\big|\varphi\big(f(x'')\big) - \varphi\big(f(x')\big)\big| \leqslant \varepsilon,$$

et en prenant simplement le supremum sur x'' et l'infimum sur x', on obtient ce qui est écrit dans le corps du texte.

va être aisément majorée :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Erreur}(K) &= \sum_{k\in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\underbrace{\sup_{I_k} \varphi\circ f - \inf_{I_k} \varphi\circ f}_{\leqslant\,\varepsilon}\bigg) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k\in K} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\
&\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\
&= \varepsilon\,(b-a),
\end{aligned}
$$

par une quantité arbitrairement petite.

Ensuite et par ailleurs, lorsque $k \in K'$, à savoir par définition lorsque :

$$
\delta_\varepsilon < \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f,
$$

en multipliant par $(x_k - x_{k-1})$ et en sommant seulement sur K', on déduit :

$$
\begin{aligned}
\delta_\varepsilon \sum_{k\in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) &< \sum_{k\in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f\bigg) \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \big(\text{même chose}\big) \\
\text{[Reconnaître]} \qquad &= \Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \\
&\leqslant \big(\delta_\varepsilon\big)^2,
\end{aligned}
$$

d'où après une division par δ_ε qui explique pourquoi on avait choisi $(\delta_\varepsilon)^2$ à l'avance :

$$
\sum_{k\in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \leqslant \delta_\varepsilon.
$$

Grâce à cette inégalité, la *deuxième* fraction concernée de la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de $\varphi \circ f$ va être majorée par :

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Erreur}(K') &= \sum_{k\in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \bigg(\sup_{I_k} \varphi\circ f - \inf_{I_k} \varphi\circ f\bigg) \\
&\leqslant 2 \underbrace{\sup_{|y|\leqslant M_{|f|}} |\varphi|}_{=:\,C_\varphi\,<\,\infty} \cdot \sum_{k\in K'} \big(x_k - x_{k-1}\big) \\
&\leqslant 2\,C_\varphi\,\delta_\varepsilon,
\end{aligned}
$$

car on a généralement :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\sup_{x\in I_k} \varphi\circ f(x)\bigg| &\leqslant \sup_{|y|\leqslant M_{|f|}} |\varphi(y)| =: C_\varphi, \\
\bigg|\inf_{x\in I_k} \varphi\circ f(x)\bigg| &\leqslant \sup_{|y|\leqslant M_{|f|}} |\varphi(y)| =: C_\varphi,
\end{aligned}
$$

pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$ sans restriction.

Enfin, par simple addition des majorants des deux types d'erreurs :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(\varphi\circ f)-\Sigma_{\Delta}(\varphi\circ f) &= \mathsf{Erreur}(K)+\mathsf{Erreur}(K')\\ &\leqslant \varepsilon\,(b-a)+2\,C_\varphi\,\delta_\varepsilon\\ &\leqslant \varepsilon\,\big[(b-a)+2\,C_\varphi\big],\end{aligned}$$

quantité qui est manifestement arbitrairement petite puisque l'on a assuré à l'avance que $\delta_\varepsilon \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut l'intégrabilité de $\varphi\circ f$. □

Plusieurs applications de ce Théorème 5.8 de composition tombent alors de l'arbre mathématique comme de délicieuses mirabelles bien mûres.

Corollaire 5.9. *Si* $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *et* $g\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *sont deux fonctions bornées Riemann-intégrables, alors leur produit :*

$$f\,g$$

est lui aussi Riemann-intégrable.

Démonstration. En effet, on sait déjà que $f+g$ et $f-g$ sont Riemann-intégrables, et alors le Théorème 5.8 appliqué avec $\varphi(y):=y^2$ assure que $(f+g)^2$ et $(f-g)^2$ sont aussi Riemann-intégrables, d'où la conclusion par l'identité algébrique élémentaire :

$$f\,g=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4},$$

dont l'essence intime remonte aux mathématiques de la Préhistoire, temps béni de la cueillette. □

Corollaire 5.10. [Très souvent utile] *Si une fonction bornée* $f\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *est Riemann-intégrable, alors la fonction valeur absolue :*

$$|f|$$

est elle aussi bornée Riemann-intégrable avec de plus :

$$\bigg|\int_a^b f(x)\,dx\bigg|\leqslant\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. En effet, le même Théorème 5.8 s'applique instantanément à $\varphi(y):=|y|$, donc $|f|$ est Riemann-intégrable.

Ensuite, les deux inégalités :

$$-|f|\leqslant f\leqslant |f|$$

restent vraies après intégration grâce à la propriété **(iii)** du Théorème 5.1 :

$$-\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx\leqslant\int_a^b |f(x)|\,dx\leqslant\int \big|f(x)\big|\,dx.$$ □

Corollaire 5.11. [Très souvent utile] *Soit une fonction bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon\quad [a,b]\longrightarrow\mathbb{C}.$$

Alors pour tout intervalle compact :

$$[c,d]\Subset[a,b],$$

on a la majoration :

$$\left| \int_c^d f(x)\,dx \right| \leqslant \max_{[c,d]} |f| \cdot \underbrace{(d-c)}_{\text{longueur de l'intervalle}}. \qquad \square$$

Dans la lignée de ces considérations élémentaires, il est parfois avisé de localiser la partie positive $\geqslant 0$ d'une fonction ainsi que sa partie négative $\leqslant 0$.

Définition 5.12. Si $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction définie sur un espace topologique X, soient :

$$f^+(x) := +\max\big(0,\ f(x)\big), \qquad (x \in X)$$
$$f^-(x) := -\min\big(f(x), 0\big), \qquad (x \in X)$$

deux fonctions à valeurs $\geqslant 0$ satisfaisant (exercice) :

$$f = f^+ - f^-.$$

Intuitivement, la '*partie positive*' de f est dans f^+, tandis que sa '*partie négative*' est dans $-f^-$.

Manifestement aussi :

$$|f| = f^+ + f^-.$$

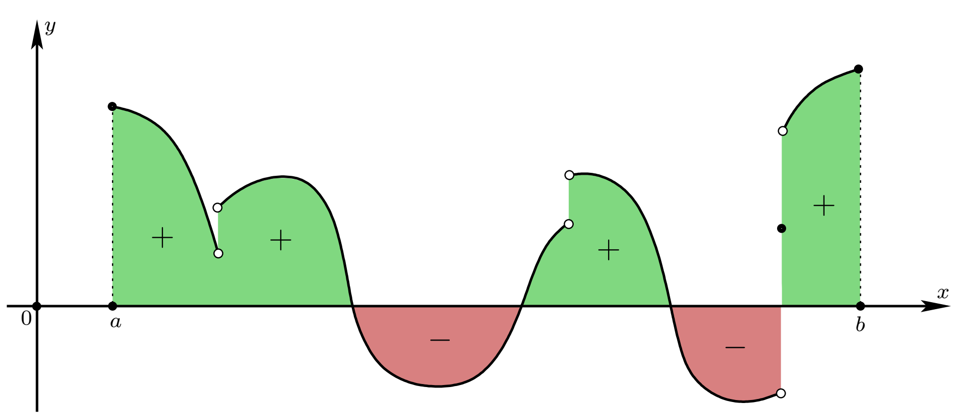
Corollaire 5.13. *Si une fonction bornée $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable, alors ses parties positive et négative :*

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \qquad \text{et} \qquad -f^- = \frac{-|f| + f}{2}$$

sont elles aussi Riemann-intégrables, avec :

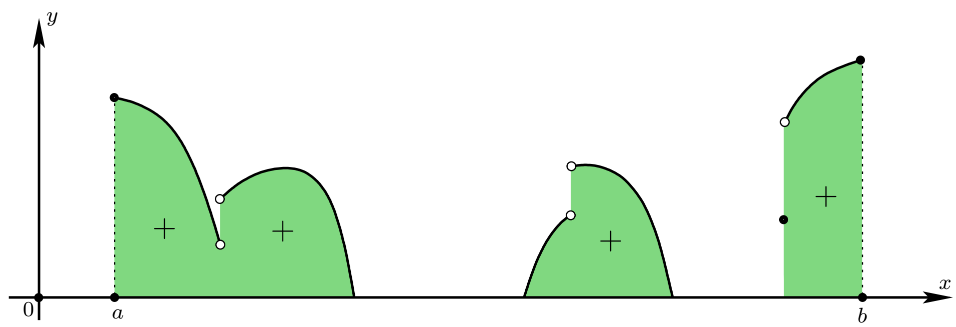
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx,$$
$$\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)\,dx. \qquad \square$$

Géométriquement, le graphe d'une fonction réelle qui prend des valeurs positives et négatives délimite une région bidimensionnelle :



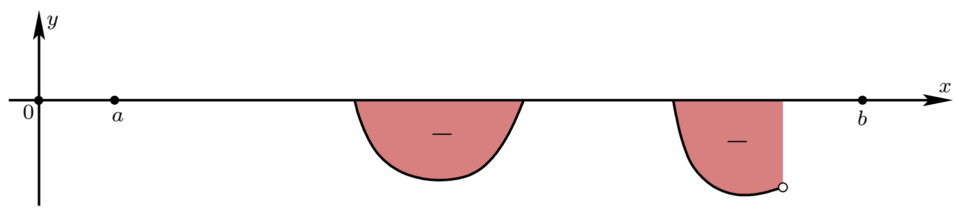
découpée par l'axe des x en une première région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ 0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}$$



et une deuxième région :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ -\ f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\},$$



sachant que l'intégrale de f est la somme des aires orientés de ces deux régions :

$$\int_a^b f(x)\,dx=\mathsf{Aire}\Big(\big\{0\leqslant y\leqslant f^+(x)\big\}\Big)-\mathsf{Aire}\Big(\big\{-\ f^-(x)\leqslant y\leqslant 0\big\}\Big);$$

ici, la notion d'aire bidimensionnelle pourrait être précisée mathématiquement, mais nous nous en dispenserons, puisque la théorie de Lebesgue se chargera de le faire dans un cadre général et englobant.

Principe de proximité entre sommation discrète et intégration continue. *Intuitivement et philosophiquement, la version approchée, finie, discrète d'une intégrale étant une grande somme — par exemple de Darboux —, on peut s'imaginer que le signe de sommation :*

$$\sum$$

se métamorphose progressivement en le signe d'intégration :

$$\int,$$

ce qu'on résumera symboliquement par :

$$\sum\approx\int$$

En particulier, l'analogue de l'intégrale d'un produit :

$$\int fg$$

est la somme de produits de nombres :

$$\sum \lambda_i \mu_i.$$

Mais puisqu'il est déjà impossible d'exprimer une somme à deux termes :

$$\lambda_1 \, \mu_1 + \lambda_2 \, \mu_2$$

algébriquement en fonction de $\lambda_1 + \lambda_2$ et de $\mu_1 + \mu_2$, il n'y a aucune raison pour que l'intégrale $\int fg$ d'un produit de deux fonctions intégrables s'exprime algébriquement en fonction de $\int f$ et de $\int g$.

Toutefois, on sait qu'en *élevant au carré*, une identité remarquable élémentaire (exercice) :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big) \, \big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) - \big(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2\big)^2 = \underbrace{\big(\lambda_1 \mu_2 - \mu_1 \lambda_2\big)^2}_{\text{toujours} \geqslant 0}$$

dont le second membre est positif, montre qu'on a toujours l'inégalité :

$$\big(\lambda_1^2 + \lambda_2^2\big) \, \big(\mu_1^2 + \mu_2^2\big) \, \geqslant \, \big(\lambda_1 \mu_1 + \lambda_2 \mu_2\big)^2.$$

Plus généralement, avec $\lambda_1, \dots, \lambda_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$ et $\mu_1, \dots, \mu_{\mathrm{N}} \in \mathbb{R}$, l'*identité de Lagrange* (laissée en exercice) :

$$\Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}^2\Big) \, \Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\mathrm{N}}^2\Big) - \Big(\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}} \mu_{\mathrm{N}}\Big)^2 = \underbrace{\sum_{1 \leqslant j \leqslant k \leqslant \mathrm{N}} \big(\lambda_j \mu_k - \mu_j \lambda_k\big)^2}_{\text{quantité toujours positive}}$$

conduit à l'*inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :*

$$\Big(\lambda_1 \mu_1 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}} \mu_{\mathrm{N}}\Big)^2 \, \leqslant \, \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\mathrm{N}}^2\Big) \, \Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\mathrm{N}}^2\Big).$$

À la limite lorsqu'il y a une infinité de termes, on aboutit intuitivement au :

Théorème 5.14. [Inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale] *Si f et g sont deux fonctions réelles bornées Riemann-intégrables sur $[a, b]$, alors :*

$$\bigg| \int_a^b f(x) \, g(x) \, dx \bigg| \leqslant \bigg(\int_a^b f(x)^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}} \, \bigg(\int_a^b g(x)^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Démonstration. L'Exercice 11 propose de déduire ce théorème d'un passage à la limite dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète, mais il existe une voie plus économique.

Grâce aux résultats qui précèdent, nous savons maintenant que les quatre fonctions :

$$f^2, \qquad g^2, \qquad f \, g, \qquad \big(t \, f + g\big)^2,$$

où $t \in \mathbb{R}$ est quelconque, sont Riemann-intégrables, et nous pouvons développer la quantité intégrale positive :

$$\begin{aligned} 0 \, &\leqslant \, \int_a^b \big(t \, f(x) + g(x)\big)^2 \, dx \\ &= \, t^2 \, \underbrace{\int_a^b f(x)^2 \, dx}_{=: \, \alpha \, \geqslant \, 0} + t \, \underbrace{2 \int_a^b f(x) \, g(x) \, dx}_{=: \, \beta} + \underbrace{\int_a^b g(x)^2 \, dx}_{=: \, \gamma \, \geqslant \, 0}, \end{aligned}$$

ce qui conduit à un trinôme du second degré en t :

$$\alpha\, t^2 + \beta\, t + \gamma,$$

lequel, pour être toujours $\geqslant 0$, doit avoir son discriminant :

$$\beta^2 - 4\,\alpha\,\gamma \;\leqslant\; 0$$

négatif ou nul (exercice), inégalité qui équivaut à celle de Cauchy-Schwarz. □

6. Intégrale de Riemann et primitives

Définition 6.1. Une fonction $F\colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dite 1-*lipschitzienne* s'il existe une constante $C \geqslant 0$ telle que :

$$\forall\, x' \in E \quad \forall\, x'' \in E \qquad \big|F(x') - F(x'')\big| \;\leqslant\; C\,\big|x' - x''\big|,$$

avec exposant 1 dans $|x' - x''|^1$.

En particulier, les fonctions 1-lipschitziennes sont continues, et même uniformément continues (exercice mental) !

Proposition 6.2. *Étant donné une fonction bornée Riemann-intégrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, donc Riemann-intégrable sur tout intervalle $[a,x]$ avec $a \leqslant x \leqslant b$, la fonction de x définie par :*

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est continue et même 1-lipschitzienne sur $[a,b]$:

$$\big|F(x') - F(x'')\big| \;\leqslant\; M_{|f|} \cdot \big|x' - x''\big|,$$

avec la constante $M_{|f|} = \sup\limits_{[a,b]} |f|$.

Démonstration. En effet, partant donc de deux points quelconques :

$$x' \in [a,b] \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad x'' \in [a,b],$$

on majore aisément la différence :

$$\begin{aligned}
\big|F(x') - F(x'')\big| \;&=\; \left|\int_a^{x'} f(t)\,dt - \int_a^{x''} f(t)\,dt\right| \\
&=\; \left|\int_{x''}^{x'} f(t)\,dt\right| \\
&\leqslant\; \big|x' - x''\big| \cdot \max_{[a,b]} |f|,
\end{aligned}$$

ce qui prouve la 1-lipschitzianité de f. □

Théorème 6.3. *Soit une fonction continue donc bornée Riemann-intégrable :*

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un point $x_0 \in \,]a,b[$, la limite $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existe, à savoir si :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

alors la fonction définie pour $a \leqslant x \leqslant b$ par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

est dérivable en x_0 avec :

$$F'(x_0) = f(x_0).$$

Démonstration. Il s'agit de déterminer si le quotient différentiel :

$$\begin{aligned}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} &= \frac{1}{h}\bigg(\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\bigg) \\ &= \frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt\end{aligned}$$

admet une limite lorsque $h \xrightarrow{\neq} 0$.

Or par hypothèse, f est continue en x_0 :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta_\varepsilon > 0 \quad \Big(\forall\,t \quad |t - x_0| \leqslant \delta_\varepsilon \implies |f(t) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Alors avec ce même $\delta_\varepsilon > 0$, puisque l'objectif est de montrer que $F'(x_0) = f(x_0)$, on estime la différence entre ce quotient différentiel, écrit pour un $h \neq 0$ satisfaisant $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$, et cette valeur attendue :

$$\begin{aligned}\bigg|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\bigg| &= \bigg|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt - \frac{h}{h}\,f(x_0)\bigg| \\ &= \bigg|\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h} \big(f(t) - f(x_0)\big)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \frac{1}{\underline{|h|}_{\circ}}\,\underbrace{\max_{|t-x_0|\leqslant|h|} \big|f(t) - f(x_0)\big|}_{\leqslant\,\varepsilon} \cdot \underline{|h|}_{\circ} \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

les deux quantités infimes $|h|/|h| = 1$ disparaissant agréablement, ce qui conclut. □

Définition 6.4. Étant donné une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$, on appelle *primitive* de f une fonction $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ dérivable en tout point dont la dérivée :

$$F' = f$$

redonne la fonction.

Assertion 6.5. *Deux primitives d'une fonction sur un intervalle $[a,b]$ diffèrent toujours seulement d'une constante, à savoir :*

$$F_1' = f \qquad \text{et} \qquad F_2' = f$$

implique :

$$\exists\,C \in \mathbb{C} \quad \forall\,x \in [a,b] \quad F_2(x) = F_1(x) + C.$$

Démonstration. En effet, une soustraction immédiate donne :

$$0 = \big(F_1 - F_2\big)',$$

et donc l'énoncé revient à dire qu'une fonction dérivable dont la dérivée est identiquement nulle est en fait une fonction constante, ce qui est connu. $\square$

Corollaire 6.6. *Si $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\,\mathbb{C}\big)$ est continue sur $[a,b]$, alors la fonction :*

$$F\colon \quad \begin{aligned} [a,b] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ x &\longmapsto \int_a^x f(t)\,dt \end{aligned}$$

est de classe $\mathscr{C}^1$, et c'est l'unique primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration. On vient de voir que F est dérivable en tout point, de dérivée égale à f. Évidemment :

$$F(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0.$$

Comme les primitives sont définies à une constante près, F est bien l'unique primitive en question. $\square$

Théorème 6.7. [Théorème fondamental du calcul différentiel] *Soit $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui est dérivable en tout point. Si sa dérivée $f := F'$ est Riemann-intégrable, alors :*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Démonstration. Soit une subdivision quelconque de $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Considérons la formule téléscopique :

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \big[F(x_k) - F(x_{k-1})\big].$$

Comme F est continue et dérivable sur chaque intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ de dérivée $f := F'$, le Théorème des valeurs intermédiaires assure, pour tout $k = 1, \dots, n$, qu'il existe un point :

$$c_k \in [x_{k-1}, x_k]$$

tel que :

$$F(x_k) - F(x_{k-1}) = \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(c_k).$$

Instantanément, il en découle que :

$$\big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; F(x_k) - F(x_{k-1}) \;\leqslant\; \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

En sommant $\sum_{k=1}^{n}(\cdot)$ ces deux inégalités, on obtient :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; F(b) - F(a) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f).$$

Mais comme f est Riemann-intégrable :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) = \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

ce qui force :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

et conclut. □

Théorème 6.8. [Intégration par parties] *Soient* $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions continues sur un intervalle fermé borné* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *qui sont dérivables sur* $[a,b]$ *et telles que* f' *et* g' *sont Riemann-intégrables sur* $[a,b]$. *Alors on a la formule :*

$$\int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \ = \ f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx.$$

Démonstration. La fonction produit $f\,g$ est continue sur $[a,b]$, et grâce à la formule de Leibniz :

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'.$$

Comme les quatre fonctions f, g, f', g' sont Riemann-intégrables, il en va de même pour $f\,g'$, $f'\,g$, $(f\,g)'$. Alors le Théorème qui précède donne :

$$\begin{aligned}\int_a^b f'(x)\, g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx \ &= \ \int_a^b (f\,g)'(x)\, dx \\ &= \ (f\,g)(b) - (f\,g)(a),\end{aligned}$$

ce qui est la formule annoncée. □

7. Changement de variable dans les intégrales

Soit comme précédemment un intervalle fermé borné :

$$[a,b] \Subset \mathbb{R},$$

et soit une application continue :

$$\varphi\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Un énoncé de Topologie Générale censé être connu dans ce cours, à savoir le :

Théorème 7.1. *Soit une application* continue :

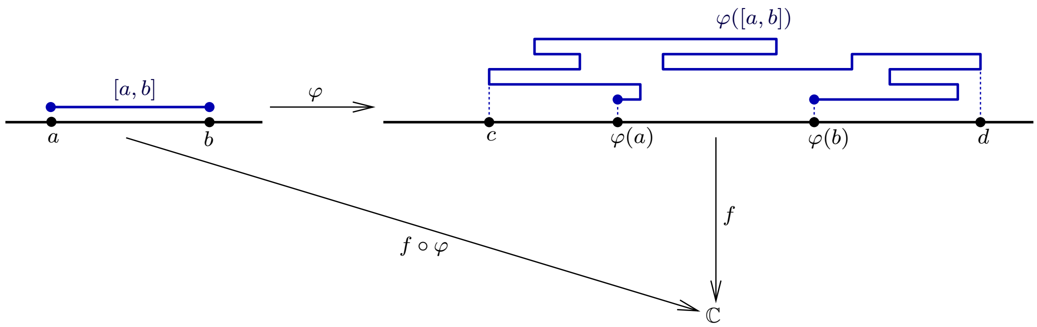
$$F\colon \quad X \longrightarrow Y$$

entre deux espaces topologiques X *et* Y. *Si* $K \Subset X$ *est un sous-ensemble* compact et connexe*, alors son image* $F(K)$ *est aussi compacte et connexe.* □

assure alors que l'image par φ de l'intervalle $[a,b]$:

$$\varphi\big([a,b]\big) \ = \ [c,d],$$

est aussi un certain intervalle fermé borné $[c,d] \Subset \mathbb{R}$.

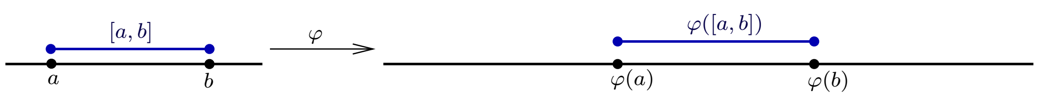


En fait, cet intervalle image contient :

$$[c,d] \supset \big[\varphi(a),\,\varphi(b)\big],$$

sachant qu'il faut plutôt écrire $[\varphi(b),\varphi(a)]$ lorsque $\varphi(b)<\varphi(a)$, mais, et c'est important de le faire remarquer géométriquement au moyen d'une figure intuitive éclairante, *une telle inclusion peut fort bien être stricte*.

Toutefois, dans les applications, il se trouve que la plupart du temps, φ est monotone. Dans ce cas, l'intuition simplette est correcte.



Théorème 7.2. [Changement de variable dans les intégrales simples] *Soit une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$:

$$\varphi\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},$$

définie sur un intervalle compact $[a,b]\Subset\mathbb{R}$*, d'où :*

$$\varphi\big([a,b]\big) =: [c,d] \supset \big[\varphi(a),\,\varphi(b)\big].$$

Alors pour toute fonction continue :

$$f\colon\quad [c,d] \longrightarrow \mathbb{C},$$

on a :

$$\int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\,\varphi'(x)\,dx \;=\; \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt.$$

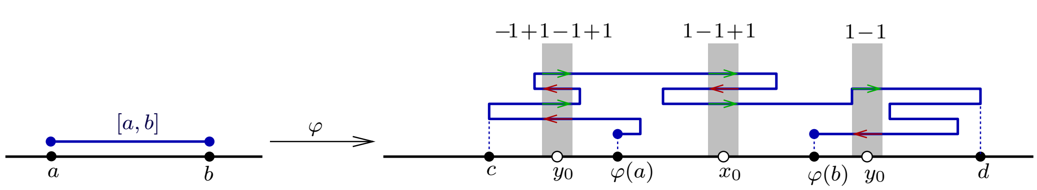
Rappelons que dans les vrais calculs, la recette classique, c'est d'écrire :

$$t=\varphi(x),$$

de différentier :

$$dt=\varphi'(x)\,dx,$$

et de remplacer.



Question. *Mais pourquoi l'intégrale à droite* $\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)}$ *porte-t-elle seulement sur l'intervalle* $[\varphi(a), \varphi(b)]$, *et non pas sur tout l'intervalle* $[c, d]$ *?*

Parce que au-dessus d'un point quelconque :

$$y_0 \in [c, d] \big\backslash \big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

la somme géométrique des contributions s'annule toujours, tandis qu'au-dessus d'un point :

$$x_0 \in \big[\varphi(a), \varphi(b)\big],$$

elle vaut toujours $+1$, ce qui est illustré par le diagramme. Toutefois, cette vision géométrique sera totalement absente des arguments qui suivent.

Démonstration. Observons pour commencer que la fonction :

$$f \circ \varphi \cdot \varphi'$$

est continue sur $[a, b]$, donc bornée Riemann-intégrable.

Introduisons alors deux fonctions-intégrales :

$$\begin{aligned} F(u) &:= \int_{\varphi(a)}^{u} f(t)\, dt, \\ G(v) &:= \int_{a}^{v} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx. \end{aligned}$$

Grâce au Corollaire 6.6 d'après lequel dériver une intégrale redonne la fonction intégrée, on a :

$$\begin{aligned} F' &= f, \\ G' &= f \circ \varphi \cdot \varphi'. \end{aligned}$$

Or lorsqu'on dérive par ailleurs en appliquant une formule connue la fonction composée :

$$\begin{aligned} \big(F \circ \varphi\big)' &= F' \circ \varphi \cdot \varphi' \\ &= f \circ \varphi \cdot \varphi' \\ &= G', \end{aligned}$$

on retrouve la dérivée de la deuxième fonction, et comme ces deux fonctions qui ont donc partout la même dérivée s'annulent ensemble au point a :

$$\begin{aligned} F \circ \varphi(a) &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(a)} \,=\, 0, \\ G(a) &= \int_{a}^{a} \,=\, 0, \end{aligned}$$

on obtient leur égalité partout :

$$F \circ \varphi(x) \equiv G(x),$$

ce qui, au point final $x = b$:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \,=\, F \circ \varphi(b) \,=\, G(b) \,=\, \int_{a}^{b} f\big(\varphi(x)\big) \cdot \varphi'(x)\, dx$$

apporte effectivement sur un plateau doré la formule de changement de variable annoncée, et ce, sans aucune intuition géométrique scintillante, hélas ! $\square$

Corollaire 7.3. *Soit* $c \in \mathbb{R}$*. Pour toute fonction continue* $f\colon [a+c,\, b+c] \longrightarrow \mathbb{C}$*, on a :*

$$\int_a^b f(x+c)\,dx \;=\; \int_{a+c}^{b+c} f(t)\,dt. \qquad \square$$

Corollaire 7.4. *Soit* $c \in \mathbb{R}^*$ *non nul. Pour toute fonction continue* $f\colon [ac, bc] \longrightarrow \mathbb{C}$*, on a :*

$$\int_a^b f(cx)\,dx \;=\; \frac{1}{c}\int_{a\,c}^{b\,c} f(t)\,dt. \qquad \square$$

Dans ce deuxième corollaire extrêmement élémentaire, il faut bien prendre garde néanmoins que lorsque $c<0$ est négatif, d'où :

$$ac \;>\; bc,$$

un redressement des bornes d'intégration $\int_{ac}^{bc} = -\int_{bc}^{ac}$ est en général nécessaire lorsqu'on cherche à réaliser des calculs concrets.

8. Approximation des fonctions Riemann-intégrables

Théorème 8.1. *Pour toute fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact de* $\mathbb{R}$:

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

il existe une suite de fonctions continues :

$$\big(f_n\big)_{n\geqslant 1} \;\in\; \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

avec :

$$\sup_{[a,b]}\big|f_n\big| \;\leqslant\; \sup_{[a,b]}\big|f\big| \qquad\qquad (n\in\mathbb{N}),$$

qui approxime f *en moyenne au sens intégral où :*

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx.$$

De manière équivalente, on peut énoncer et démontrer que pour tout $\varepsilon>0$, il existe une fonction continue $f_\varepsilon\colon [a,b]\longrightarrow\mathbb{C}$ telle que :

$$\int_a^b \big|f_\varepsilon(x)-f(x)\big|\,dx \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Démonstration. En traitant séparément la partie réelle et la partie imaginaire de f, on peut bien entendu supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Par hypothèse de Riemann-intégrabilité, pour tout $\varepsilon>0$, il existe une subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure associées satisfassent :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

L'idée de la démonstration est alors simple et naturelle.

Étape 1 : Approximer dans un premier temps f par une fonction en escalier f^{esc}.

Étape 2 : « *Écorner les gratte-ciel et installer des toboggans vertigineux* » (regarder à l'avance les figures qui suivent), à savoir aplatir les angles de cette fonction en escalier f^{esc} pour la rendre continue en modifiant très peu les intégrales correspondantes.

Comme nous le savons déjà, deux fonctions en escalier sont naturellement associées aux deux sommes de Darboux $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, mais nous n'aurons besoin que d'une seule, par exemple la *fonction en escalier inférieure :*

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}},$$

qui est définie, rappelons-le, par :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) = \begin{cases} \inf\limits_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f & \text{lorsque } x \in \,]x_{\kappa-1}, \, x_\kappa[\, \text{ pour un } \kappa = 1, \dots, \nu; \\ f(x) & \text{lorsque } x = a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b. \end{cases}$$

Par construction :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}} \leqslant f,$$

d'où par intégration :

$$\Sigma_\Delta(f) = \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \leqslant \underbrace{\int_a^b f(x)\, dx}_{\text{en fait aussi} \leqslant \Sigma^\Delta(f)},$$

et donc puisque $\Sigma^\Delta - \Sigma_\Delta \leqslant \varepsilon$, nous obtenons que :

$$0 \leqslant \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x)\, dx \leqslant \varepsilon,$$

et mieux encore, puisque l'on vient de voir que $f_\Delta^{\mathsf{esc}} \leqslant f$, c'est pour la *valeur absolue* de la différence qu'on a la majoration :

$$\int_a^b \big| f(x) - f_\Delta^{\mathsf{esc}}(x) \big|\, dx \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, puisque nous désirons une suite de fonctions approximantes continues $(f_n)_{n \geqslant 1}$, prenons :

$$\varepsilon := \frac{1}{2\,n},$$

et notons pour abréger :

$$f_\Delta^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_\varepsilon}^{\mathsf{esc}} = f_{\Delta_{\frac{1}{2n}}}^{\mathsf{esc}} =: g_n^{\mathsf{esc}}.$$

Avec cette suite de fonctions en escalier $(g_n^{\mathsf{esc}})_{n \geqslant 1}$ satisfaisant :

$$\int_a^b \big| f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x) \big|\, dx \leqslant \frac{1}{2\,n},$$

nous avons donc réalisé l'Étape 1, mais ces fonctions g_n^{esc} ne sont pas continues !

Heureusement, l'Étape 2 est réalisée par un résultat fondamental et naturel.

Théorème 8.2. [Approximation intégrale des fonctions en escalier par des fonctions continues] *Sur un intervalle compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, étant donné une fonction en escalier quelconque fixée :*

$$g^{\mathsf{esc}} \colon \quad [a, b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

pour tout $\varepsilon > 0$, *il existe une fonction* continue :

$$g_\varepsilon \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big)$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

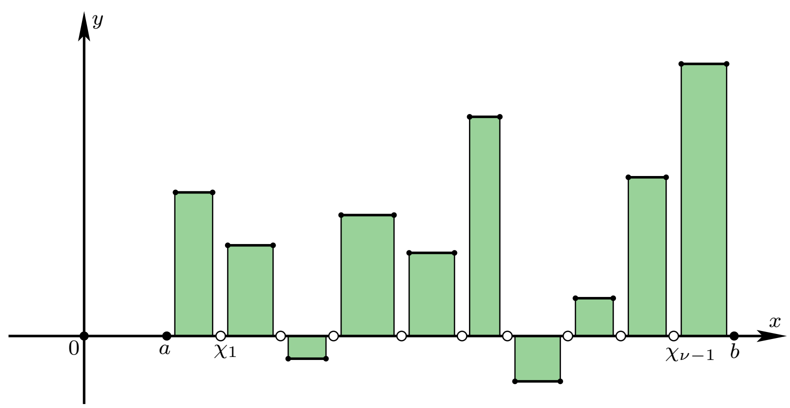
Démonstration. Comme dans la Définition 4.6 et dans le Théorème 4.7, à une telle fonction en escalier g^{esc} est attachée un certain découpage :

$$\square = \big\{a = \chi_0 < \chi_1 < \chi_2 < \cdots < \chi_{\nu-2} < \chi_{\nu-1} < \chi_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ sur les intervalles ouverts $]\chi_{\kappa-1},\, \chi_\kappa[$ de laquelle g^{esc} est constante :

$$g^{\mathsf{esc}}(x) = c_\kappa \qquad\qquad \forall\, \chi_{\kappa-1} < x < \chi_\kappa \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

avec $c_\kappa \in \mathbb{C}$.



Or rappelons que dans la démonstration du Théorème 4.7, afin d'établir que g^{esc} est Riemann-intégrable d'intégrale égale à :

$$\int_a^b g^{\mathsf{esc}}(x)\,dx = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(\chi_\kappa - \chi_{\kappa-1}\big)\cdot c_\kappa,$$

nous avons enrichi la subdivision $\square$ de g^{esc} en ajoutant de part et d'autre de chaque point χ_κ les deux points :

$$\chi_\kappa - \delta \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \chi_\kappa + \delta$$

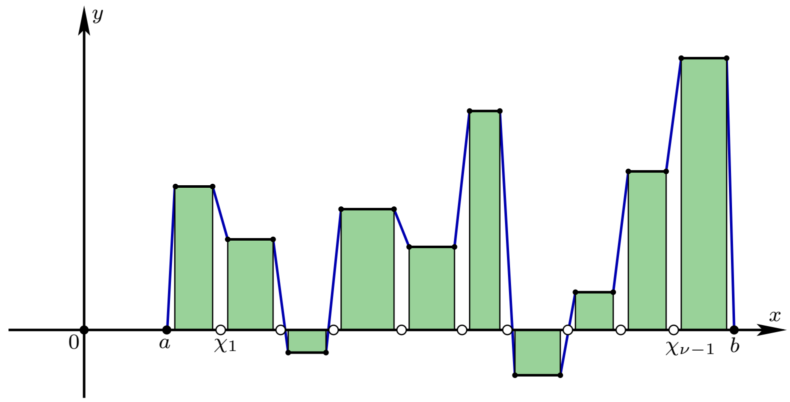
situés à une distance constante infime $\delta > 0$, ce qui nous donnait la subdivision :

$$\Delta := \Big\{a,\ a+\delta,\ \chi_1 - \delta,\ \chi_1,\ \chi_1+\delta,\ \ldots\ldots,\ \chi_{\nu-1}-\delta,\ \chi_{\nu-1},\ \chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta,\ b\Big\}.$$

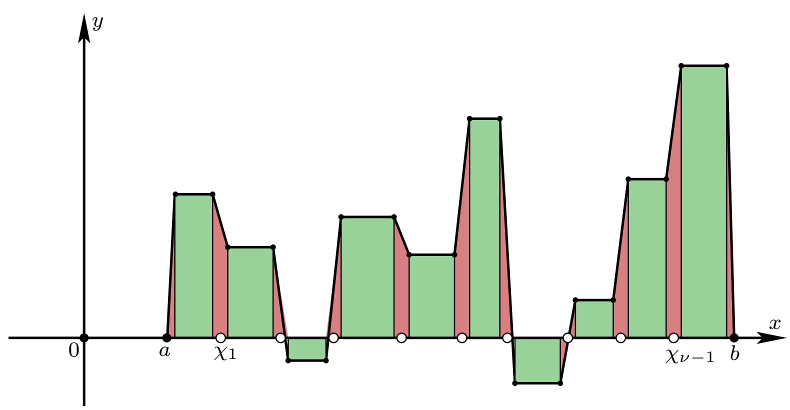
Sur les figures destinées à présenter les idées, on voit qu'il s'agit tout d'abord de restreindre la fonction en escalier g^{esc} à être définie seulement sur les ν intervalles fermés :

$$\big[a+\delta,\ \chi_1-\delta\big] \bigcup \big[\chi_1+\delta,\ \chi_2-\delta\big] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \big[\chi_{\nu-1}+\delta,\ b-\delta\big],$$

ce qui fait apparaître des « *fossés très étroits entre les gratte-ciel* » de longueur $2\,\delta$, voire de longueur seulement δ aux extrémités a et b.



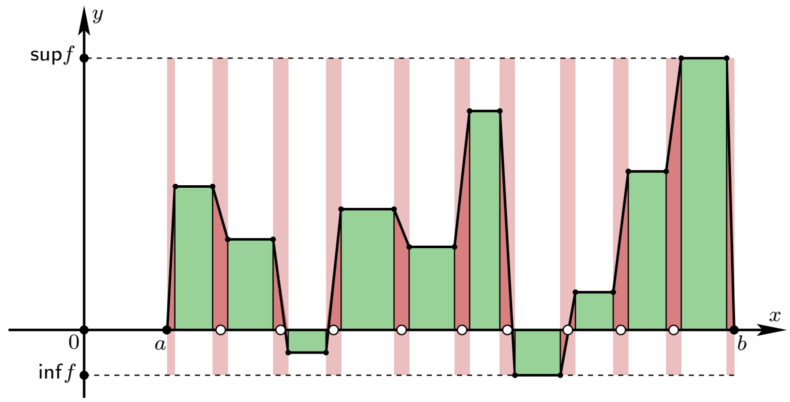
Mais puisque notre but est de trouver une fonction continue, décidons tout simplement de combler les fossés au moyen de fonctions affines qui joignent les coins supérieurs de nos gratte-ciel, comme de dangereux toboggans plongeant presque verticalement dans le vide, fils d'araignée virtuels dont seuls des funambules ne s'effrairaient pas. Nous obtenons ainsi le graphe d'une fonction *continue*, certes parfois très descendante et très ascendante — mais *continue*, Monsieur l'Inspecteur !



Alors la somme des erreurs commises, visible sous forme de la somme des aires d'un certain nombre de trapèzes très effilés va rester bornée par :

$$\underbrace{(\nu+1)}_{\text{nombre de rues}} \times \underbrace{2\,\delta}_{\text{largeur maximale des rues}} \times \underbrace{\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big)}_{\text{hauteur maximale des caves aux toits}},$$

puisque les trapèzes en question sont toujours contenus dans des rectangles tout aussi allongés verticalement.



Mais comme $\delta > 0$ peut être choisi arbitrairement petit, cette somme d'erreurs peut devenir inférieure ou égale à un certain $\varepsilon > 0$ quelconque donné à l'avance, ce qui termine essentiellement la démonstration.

Toutefois, certes, ces fantômes drapés nous parlent le langage fort compréhensible des images, l'expression des fonctions affines qui interpolent entre les gratte-ciel importe relativement peu, mais détaillons quand même les arguments dans un langage analytique, afin de terminer rigoureusement la démonstration, puisque, en tant que mathématiciens, nous ne pouvons nous contenter de converser seulement avec les esprits, voire avec l'Esprit de Géométrie.

Fixons donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons comme suggéré :

$$0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,\nu\,(\sup g^{\mathrm{esc}} - \inf g^{\mathrm{esc}})};$$

avec ν au lieu de $(\nu+1)$ au dénominateur (nous verrons pourquoi), et notons que sans perte de généralité, nous pouvons supposer à l'avance que :

$$\sup_{[a,b]} g^{\mathrm{esc}} > \inf_{[a,b]} g^{\mathrm{esc}},$$

car si au contraire ce 'sup' coïncidait avec cet 'inf', la fonction g^{esc} serait *constante*, donc continue, auquel cas le théorème serait trivial.

Comme l'ont montré nos diagrammes, la fonction continue recherchée g_ε sera alors égale à g^{esc} sur chacun des intervalles :

$$\big[\chi_{\kappa-1} + \delta,\ \chi_\kappa - \delta\big] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)},$$

et elle *interpolera de manière affine* cette fonction entre deux de ces intervalles consécutifs de longueur $2\,\delta$:

$$g_\varepsilon(x) = \begin{cases} c_\kappa & \forall\, x \in [\chi_{\kappa-1} + \delta,\ \chi_\kappa - \delta] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)}, \\ c_\kappa + \dfrac{c_{\kappa+1} - c_\kappa}{2\,\delta}\,\big(x - \chi_\kappa + \delta\big) & \forall\, x \in [\chi_\kappa - \delta,\ \chi_\kappa + \delta] \qquad {\scriptstyle (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu-1)}, \end{cases}$$

tandis que l'interpolation affine sur les deux intervalles extrémités de longueur seulement δ :

$$[a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad [b-\delta,\ b]$$

sera pour simplifier constante :

$$g_\varepsilon(x) = c_1 \quad \forall\, x \in [a,\ a+\delta] \qquad \text{et} \qquad g_\varepsilon(x) = c_\nu \quad \forall\, x \in [b-\delta,\ b].$$

Lemme 8.3. *Cette fonction continue g_ε interpolante de g^{esc} reste encadrée par :*

$$\inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} \leqslant \min(c_1,\dots,c_\nu) \leqslant g_\varepsilon \leqslant \max(c_1,\dots,c_\nu) \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Démonstration. En effet, pour tout κ avec $1 \leqslant \kappa \leqslant \nu - 1$, deux cas sont à distinguer :

$$c_{\kappa+1} \geqslant c_\kappa \qquad \text{ou} \qquad c_{\kappa+1} \leqslant c_\kappa.$$

Dans le premier cas :

$$\big(\chi_\kappa - \delta \leqslant x \leqslant \chi_\kappa + \delta\big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa + 0}_{=c_\kappa} \leqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,(x-\chi_\kappa+\delta)}_{g_\varepsilon(x)} \leqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{=c_{\kappa+1}}\bigg),$$

tandis que dans le second cas, à cause du signe négatif de $c_{\kappa+1} - c_\kappa \leqslant 0$, les inégalités après l'implication changent simplement de sens :

$$\big(\chi_\kappa - \delta \leqslant x \leqslant \chi_\kappa + \delta\big) \implies \bigg(\underbrace{c_\kappa + 0}_{=c_\kappa} \geqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,(x-\chi_\kappa+\delta)}_{g_\varepsilon(x)} \geqslant \underbrace{c_\kappa + \frac{c_{\kappa+1}-c_\kappa}{2\,\delta}\,2\,\delta}_{=c_{\kappa+1}}\bigg).$$

Enfin, aux deux extrémités de l'intervalle, il n'y a rien à démontrer puisqu'on a déclaré g_ε constante égale à c_1 et à c_ν. □

Comme deux encadrements identiques sont satisfaits simultanément par g^{esc} et par g_ε :

$$\begin{aligned}\inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant g^{\mathsf{esc}} \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}},\\ \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} &\leqslant \ g_\varepsilon \ \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}},\end{aligned}$$

on déduit par soustraction que :

$$\big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| \leqslant \sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}.$$

Nous affirmons alors que :

$$\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}}(x) - g_\varepsilon(x)\big|\,dx \leqslant \varepsilon.$$

En effet, puisque g^{esc} est égale à g_ε excepté sur les petits intervalles de jonction, cette intégrale est égale à la somme des $(\nu+1)$ intégrales suivantes :

$$\int_a^b = \int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b,$$

et donc grâce à ce qui précède, on peut maintenant aisément majorer :

$$\begin{aligned}\int_a^b \big|g^{\mathsf{esc}} - g_\varepsilon\big| &= \bigg(\int_a^{a+\delta} + \int_{\chi_1-\delta}^{\chi_1+\delta} + \cdots + \int_{\chi_{\nu-1}-\delta}^{\chi_{\nu-1}+\delta} + \int_{b-\delta}^b\bigg)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big)\\ &\leqslant \Big(\delta + \underbrace{2\,\delta + \cdots + 2\,\delta}_{(\nu-1)\text{ fois}} + \delta\Big)\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big)\\ &= 2\,\nu\,\delta\,\Big(\sup_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}} - \inf_{[a,b]} g^{\mathsf{esc}}\Big)\\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

quantité qui est effectivement inférieure ou égale à ε, grâce au choix initial annoncé pour δ.

Ceci achève cette démonstration, volontairement conduite de manière à faire transparaître une *symbiose synthétique* entre la pensée géométrique inventive et l'exigence de réalisation formelle. □

Fin de la démonstration du Théorème 8.1. Repartons donc des fonctions en escalier g_n^{esc} abandonnées en chemin. Grâce au Théorème d'approximation 8.2 démontré à l'instant que l'on applique avec $\varepsilon := \frac{1}{2\,n}$, il existe pour tout $n \geqslant 1$ une fonction *continue* que nous noterons :

$$f_n \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{C}\big),$$

telle que :

$$\int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \leqslant \frac{1}{2\,n}.$$

Alors une simple inégalité triangulaire dans les intégrales :

$$\begin{aligned}
\int_a^b \big|f(x) - f_n(x)\big|\,dx &= \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x) + g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \int_a^b \big|f(x) - g_n^{\mathsf{esc}}(x)\big|\,dx + \int_a^b \big|g_n^{\mathsf{esc}}(x) - f_n(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{2\,n} + \frac{1}{2\,n}}_{\text{tend vers } 0},
\end{aligned}$$

fournit sans délai la conclusion finale. □

9. Sommes de Riemann

Les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(f)$ d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ relativement à une subdivision font intervenir les infima et les suprema de f sur les petits intervalles concernés, ce qui permet d'encadrer et d'approximer la valeur finale recherchée de l'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$. De cette façon, on fixe clairement les idées sur chaque petit intervalle.

Toutefois, ce n'est pas de cette manière-là que Riemann a introduit en 1854 l'intégrale qui porte maintenant son nom. Riemann raisonnait au contraire presque « *en probabiliste* », car il choisissait *au hasard* un point dans chaque intervalle, point en lequel la fonction n'a aucune raison d'atteindre son minimum ou son maximum.

Définition 9.1. Étant donné une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

d'un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, on appelle *somme de Riemann* d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ toute somme :

$$R_\Delta(f,\xi) := \sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_{k-1}),$$

dans laquelle les points :

$$\xi_{k-1} \in \big[x_{k-1},\, x_k\big] \qquad\qquad (k = 1 \cdots n),$$

sont choisis librement.

Bien entendu, puisque sur chaque petit intervalle on a l'encadrement trivial :

$$\inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \ \leqslant\ f(\xi_k) \ \leqslant\ \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x),$$

toute somme de Riemann est toujours encadrée par les sommes de Darboux inférieure et supérieure :

$$\Sigma_\Delta(f) \ \leqslant\ R_\Delta(f,\xi) \ \leqslant\ \Sigma^\Delta(f).$$

Le « *miracle* », maintenant, c'est que l'approche « *au hasard* » de Riemann va s'avérer être équivalente à celle « *bien encadrée* » de Darboux que nous avons développée jusqu'à présent.

Définition 9.2. On appelle *pas* d'une telle subdivision Δ quelconque la quantité :

$$\mathsf{pas}(\Delta) := \max_{1\leqslant k\leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big).$$

En ces termes, on a en effet l'équivalence fondamentale suivante.

Théorème 9.3. [Équivalence entre deux définitions de la Riemann-intégrabilité] *Pour toute fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est Riemann-intégrable au sens de Darboux, à savoir :*

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \ =\ \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f),$$

le supremum des sommes de Darboux inférieures et l'infimum des sommes de Darboux supérieures étant pris sur les subdivisions Δ de $[a,b]$;

(ii) *f est Riemann-intégrable au sens original de Riemann, à savoir les sommes de Riemann de f :*

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} R_\Delta(f,\xi)$$

possèdent une limite bien définie lorsque le pas des subdivisions Δ tend vers zéro, indépendamment du choix des points $\xi_\bullet$ *appartenant aux intervalles de Δ.*

De plus, lorsque l'une ou l'autre de ces deux conditions équivalentes est satisfaite, les deux nombres en question coïncident, *et ils constituent par définition l'*intégrale de Riemann *de f :*

$$\int_a^b f(x)\,dx \overset{\mathsf{def}}{:=} \sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \ =\ \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f)$$
$$= \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} R_\Delta(f,\xi).$$

Il suffit bien entendu d'établir cette équivalence pour les fonctions à valeurs réelles.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Notons en abrégé :

$$\sup_\Delta \Sigma_\Delta(f) \ =\ \inf_\Delta \Sigma^\Delta(f) \ =:\ I.$$

Puisque nous connaissons déjà l'encadrement :

$$\Sigma_\Delta(f) \ \leqslant\ R_\Delta(f,\xi) \ \leqslant\ \Sigma^\Delta(f),$$

il suffit de montrer que ce supremum et cet infimum sont tous deux des *limites*, à savoir il suffit de démontrer la :

Proposition 9.4. *Sous l'hypothèse* **(i)***, on a en fait :*

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma_\Delta(f) = \sup_{\Delta} \Sigma_\Delta(f) = I,$$

et de même aussi :

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} \Sigma^\Delta(f) = \inf_{\Delta} \Sigma^\Delta(f) = I.$$

En effet, l'encadrement en question donnera alors instantanément :

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f, \xi) = I.$$

Pour ce qui est de cette Proposition 9.4, contentons-nous de la première limite concernant $\Sigma_\Delta(f)$, le traitement de celle afférente à $\Sigma^\Delta(f)$ étant entièrement similaire.

Par l'hypothèse **(i)**, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une subdivision $\Delta = \Delta_\varepsilon$ de l'intervalle $[a, b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

telle que :

$$0 \leqslant I - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon.$$

Avec :

$$M_{|f|} := \max_{[a,b]} |f|,$$

introduisons :

$$\delta := \min\left(\frac{\varepsilon}{4\, n\, M_{|f|}},\ \frac{1}{2} \min_{1\leqslant k\leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\right).$$

La première limite de la Proposition sera alors vérifiée grâce à une :

Assertion 9.5. *Alors pour toute autre subdivision quelconque de* $[a, b]$ *:*

$$\square := \big\{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_{m-1} < y_m = b\big\},$$

ayant un pas assez petit satisfaisant :

$$\mathrm{pas}(\square) \leqslant \delta,$$

la somme de Darboux inférieure associée satisfait :

$$0 \leqslant I - \Sigma_\square(f) \leqslant 2\,\varepsilon,$$

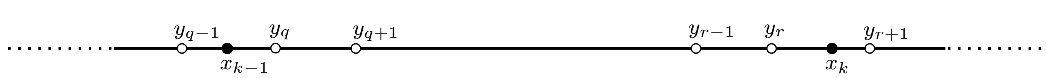
d'où :

$$\lim_{\mathrm{pas}(\square)\to 0} \Sigma_\square(f) = I.$$

Démonstration. Comme par arrangement à l'avance on a :

$$\mathrm{pas}(\square) \leqslant \delta \leqslant \frac{1}{2} \min_{1\leqslant k\leqslant n} \big(x_k - x_{k-1}\big),$$

chaque intervalle $[x_{x-1},\, x_k]$ de la subdivision Δ contient toujours *au moins deux points* de la subdivision $\square$. Fixons donc un tel $[x_{k-1},\, x_k]$ quelconque.



Soient alors les deux indices q et r dans l'ensemble $\{0, 1, \dots, m-1, m\}$ des indices de $\square$ avec $0 \leqslant q < r \leqslant m$ qui satisfont :

$$y_{q-1} \notin [x_{k-1}, x_k], \qquad y_q, y_{q+1}, \dots, y_{r-1}, y_r \in [x_{k-1}, x_k], \qquad y_{r+1} \notin [x_{k-1}, x_k].$$

Dans la somme de Darboux inférieure qui nous intéresse :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{l=1}^{m} \big(y_l - y_{l-1}\big) \inf_{y_{l-1} \leqslant x \leqslant y_l} f(x),$$

apparaît la sous-somme qui correspond à ce qui est illustré par le diagramme, à savoir :

$$\begin{aligned} &\big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{y_{q-1} \leqslant x \leqslant y_q} f(x) + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{y_q \leqslant x \leqslant y_{q+1}} f(x) + \cdots + \\ &+ \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{y_{r-1} \leqslant x \leqslant y_r} f(x) + \big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{y_r \leqslant x \leqslant y_{r+1}} f(x). \end{aligned}$$

Mais comme les deux segments extrêmes débordent à gauche au-delà de x_{k-1} et à droite au-delà de x_k, il est avisé de décomposer les deux termes correspondants chacun en deux morceaux :

$$\begin{aligned} \big(y_q - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f &= \underline{\big(x_{k-1} - y_{q-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f} + \big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f, \\ \big(y_{r+1} - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f &= \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f + \underline{\big(y_{r+1} - x_k\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f} \end{aligned}$$

et d'éliminer les morceaux hors de $[x_{k-1}, x_k]$, ce qui conduit à introduire :

$$\begin{aligned} \Sigma_\square^k(f) \ := \ &\big(y_q - x_{k-1}\big) \inf_{[y_{q-1}, y_q]} f + \big(y_{q+1} - y_q\big) \inf_{[y_q, y_{q+1}]} f + \cdots + \\ &+ \cdots + \big(y_r - y_{r-1}\big) \inf_{[y_{r-1}, y_r]} f + \big(x_k - y_r\big) \inf_{[y_r, y_{r+1}]} f. \end{aligned}$$

Avec ces notations et de légères adaptations lorsque $x_{k-1} = a$, *i.e.* pour $k = 1$, et lorsque $x_k = b$, *i.e.* pour $k = n$, il est alors clair que :

$$\Sigma_\square(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_\square^k(f).$$

Et maintenant, nous pouvons minorer patiemment et astucieusement :

$$\begin{aligned} \Sigma_\square^k(f) &\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[y_{q+1} - y_q + \cdots + y_r - y_{r-1}\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &= -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[y_r - y_q\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &= -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} + \big[-(x_k - y_r) + (x_k - x_{k-1}) - (y_q - x_{k-1})\big] \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &\geqslant -\big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} + \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - \big(y_q - x_{k-1}\big) M_{|f|} - \big(x_k - y_r\big) M_{|f|} \\ &\geqslant \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square), \end{aligned}$$

et une sommation finale sur k nous donne :

$$\begin{aligned} \Sigma_\square(f) = \sum_{k=1}^{n} \Sigma_\square^k(f) \ &\geqslant \ \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\ &= \ \Sigma_\Delta(f) - 4\, n\, M_{|f|}\, \mathsf{pas}(\square) \\ &\geqslant \ \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon \\ &\geqslant \ I - 2\,\varepsilon. \end{aligned}$$

Mais comme de toute façon :

$$I = \sup_{\square} \Sigma_{\square}(f),$$

nous concluons bien que :

$$I - 2\,\varepsilon \;\leqslant\; \Sigma_{\square}(f) \;\leqslant\; I,$$

ce qui termine l'Assertion, la Proposition et la première implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** du Théorème.

Traitons à présent à la deuxième implication **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. Notons en abrégé :

$$\lim_{\mathrm{pas}(\Delta)\to 0} R_\Delta(f,\xi) =: J$$

cette limite, qui existe. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et soit une subdivision Δ de $[a,b]$ dont le pas est assez petit pour que :

$$\Big| R_\Delta(f,\xi) - J \Big| \;\leqslant\; \varepsilon,$$

c'est-à-dire telle que :

$$\bigg| \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_k) - J \bigg| \;\leqslant\; \varepsilon,$$

et ce, *quel que soit* le choix des ξ_k. Pour se rapprocher des sommes de Darboux inférieure et supérieure, l'astuce va donc consister à bien choisir chaque ξ_k de deux manières différentes afin d'approximer l'infimum et le supremum de f sur $[x_{k-1},\, x_k]$.

En effet, il est clair que pour tout $k = 1, \dots, n$, on peut trouver deux points ξ_k^- et ξ_k^+ appartenant à $[x_{k-1},\, x_k]$ tels que :

$$\begin{aligned}
0 \;&\leqslant\; f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{b-a},\\
0 \;&\leqslant\; \sup_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) - f(\xi_k^+) \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{b-a}.
\end{aligned}$$

Alors on peut majorer la différence (positive) :

$$\begin{aligned}
\big(0 \leqslant\big) \qquad R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \Big[f(\xi_k^-) - \inf_{x_{k-1}\leqslant x\leqslant x_k} f(x) \Big]\\
&\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, \frac{\varepsilon}{b-a}\\
&=\; \frac{\varepsilon}{b-a}\, \big[x_1 - a + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + b - x_{n-1}\big]\\
&=\; \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui aboutit à :

$$0 \;\leqslant\; R_\Delta(f,\xi^-) - \Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

En procédant d'une manière très similaire, on obtient de même :

$$0 \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f) - R_\Delta(f,\xi^+) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Mais si l'on se rappelle que l'hypothèse peut être appliquée librement à $\xi = \xi^-$ et à $\xi = \xi^+$, on a aussi gratuitement deux jeux supplémentaires d'inégalités :

$$\begin{aligned}
-\,\varepsilon \;&\leqslant\; R_\Delta(f,\xi^-) - J \;\leqslant\; \varepsilon,\\
-\,\varepsilon \;&\leqslant\; R_\Delta(f,\xi^+) - J \;\leqslant\; \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nous laissons alors au lecteur le soin de se convaincre que ces quatre inégalités conduisent (exercice) à :

$$J - 2\,\varepsilon \;\leqslant\; \Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f) \;\leqslant\; J + 2\,\varepsilon,$$

d'où découle :

$$0 \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \;\leqslant 4\,\varepsilon,$$

ce qui démontre bien que f est Riemann-intégrable au sens de la Définition 2.3 que nous avons adoptée constamment dans ce chapitre.

Enfin, pour parachever les arguments, les deux implications **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** et **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)** que nous venons de détailler montrent en filigrane (exercice mental) que $I = J$ dans les deux cas. □

En fait, on a une convergence pour des sommes un peu plus générales que les sommes de Riemann.

Corollaire 9.6. *Si $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ bornée est Riemann-intégrable, alors pour tous choix de réels relatifs à des subdivisions $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ encadrés par :*

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; \varphi_{k-1} \;\leqslant\; \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \qquad\qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

qui ne sont pas forcément de la forme $\varphi_{k-1} = f(\xi_{k-1})$ pour $\xi_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$, les sommes de Riemann généralisées :

$$S_\Delta(f,\varphi) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\,\varphi_{k-1},$$

tendent vers :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} S_\Delta(f,\varphi) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. La Proposition 9.4 a déjà fait voir que :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} \Sigma_\Delta(f) \;=\; \int_a^b f(x)\,dx \;=\; \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} \Sigma^\Delta(f),$$

d'où :

$$0 \;=\; \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} \Big(\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f)\Big),$$

et en sommant les inégalités :

$$\big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; \big(x_k - x_{k-1}\big)\,\varphi_{k-1} \;\leqslant\; \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

on obtient l'encadrement implacable :

$$\Sigma_\Delta(f) \;\leqslant\; S_\Delta(f,\varphi) \;\leqslant\; \Sigma^\Delta(f),$$

qui écrase la conclusion comme une presse industrielle . □

Dans la vraie vie des mathématiques, les sommes de Riemann les plus importantes et les plus utiles sont celles qui sont *à pas constant équidistribué :*

$$x_k - x_{k-1} = \frac{b-a}{n},$$

et dans lesquelles on choisit ou bien $\xi_k = x_{k-1}$ ou bien $\xi_k = x_k$.

Théorème 9.7. *Pour toute fonction Riemann-intégrable* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, on a la convergence :*

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\bigg(a+(k-1)\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx,$$

et aussi :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\bigg(a+k\,\frac{b-a}{n}\bigg) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Par exemple, avec la fonction $f(x) := \frac{1}{1+x}$ qui est continue sur l'intervalle $[0,1]$, on détermine aisément une limite inconnue en reconnaissant une somme de Riemann :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \log 2.$$

10. Première formule et deuxième formule de la moyenne

Commençons par un énoncé élémentaire.

Théorème 10.1. [Première formule de la moyenne] *Sur un intervalle* $[a,b]$ *avec* $-\infty < a < b < \infty$*, soient deux fonctions bornées* $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *Riemann-intégrables avec de plus :*

$$f \,\geqslant\, 0.$$

Alors il existe un réel μ *avec :*

$$\inf_{[a,b]} g \,\leqslant\, \mu \,\leqslant\, \sup_{[a,b]} g,$$

tel que :

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, \mu \int_a^b f(x)\,dx.$$

Lorsque, de plus, g *est continue sur* $[a,b]$*, il existe un point intermédiaire* $a \leqslant c \leqslant b$ *tel que* $\mu = g(c)$*, d'où :*

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,=\, g(c)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ces énoncés sont tout aussi valables lorsque $f \leqslant 0$ est négative sur $[a,b]$, dont une version simplifiée apparaît aussi dans l'Exercice 42.

Démonstration. En partant de l'inégalité triviale :

$$\inf_{[a,b]} g \,\leqslant\, g(x) \,\leqslant\, \sup_{[a,b]} g \qquad\qquad (\forall\, x \in [a,b]),$$

que l'on multiplie par $f(x) \geqslant 0$ sans changer le sens des inégalités, et que l'on intègre, on obtient :

$$\inf_{[a,b]} g \int_a^b f(x)\,dx \,\leqslant\, \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx \,\leqslant\, \sup_{[a,b]} g \int_a^b f(x)\,dx,$$

d'où découle l'existence d'un facteur μ.

Lorsque g est continue sur $[a,b]$, le théorème des valeurs intermédiaires fournit un $c \in [a,b]$ tel que $g(c) = \mu$. □

Passons ensuite à un théorème dû au mathématicien français Ossian Bonnet.

Théorème 10.2. [Deuxième formule de la moyenne] *Sur un intervalle* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *avec* $-\infty < a < b < \infty$*, étant donné deux fonctions :*

- $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée Riemann-intégrable,*
- $g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ monotone *(donc Riemann-intégrable),*

il existe toujours un point intermédiaire $a \leqslant c \leqslant b$ *tel que :*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;=\; g_+(a) \int_a^c f(x)\, dx + g_-(b) \int_c^b f(x)\, dx.$$

L'intérêt majeur de cette deuxième formule de la moyenne est que la fonction monotone passe à l'extérieur de l'intégrale !

Démonstration. Quitte à modifier les valeurs de g en a et en b, ce qui ne change pas les valeurs des intégrales considérées, on peut supposer que $g(a) = g_+(a)$ et que $g_-(b) = g(b)$, c'est-à-dire, on peut supposer que g est continue à gauche en a, et continue à droite en b.

Nous traiterons seulement le cas où g est décroissante, car le cas où g est croissante s'en déduit en transformant g en $-g$ sans changer la structure de la formule.

Enfin, en soustrayant à la formule visée :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \overset{?}{=} g(a) \int_a^c f(x)\, dx + g(b) \int_c^b f(x)\, dx,$$

la quantité $g(b) \int_a^b f(x)\, dx$:

$$\int_a^b f(x) \big(g(x) - g(b)\big)\, dx \;=\; \big(g(a) - g(b)\big) \int_a^c f(x)\, dx + 0,$$

on se ramène à établir l'énoncé suivant, qui conclura la démonstration du théorème. □

Proposition 10.3. *Toujours avec* $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *bornée Riemann-intégrable, et avec* $g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *monotone décroissante, positive* $g \geqslant 0$*, continue à droite en* a *et à gauche en* b*, et satisfaisant de plus :*

$$g(b) \;=\; 0,$$

il existe un point intermédiaire $a \leqslant c \leqslant b$ *tel que :*

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;=\; g(a) \int_a^c f(x)\, dx.$$

Démonstration. Les arguments vont faire voir que l'énoncé est vrai en supposant seulement que $g(b)$ est $\geqslant 0$ — d'où toujours $g \geqslant 0$ sur $[a, b]$ puisque g décroît —, et pas nécessairement égal à 0.

Pour démontrer cette proposition, nous aurons besoin d'un lemme relatif à l'intégration — au sens de Riemann — d'un produit de fonctions. Le Corollaire 9.6 a déjà fait voir que dans les sommes de Riemann, on peut s'autoriser à prendre des valeurs qui ne sont pas forcément celles de la fonction sur les intervalles de subdivision. L'énoncé ci-dessous, valable pour un produit de fonctions, met en lumière une petite flexibilité supplémentaire.

Lemme 10.4. *Étant donné deux fonctions bornées Riemann-intégrables $f, g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, pour tous choix de réels relatifs à des subdivisions $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ encadrés par :*

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; \varphi_{k-1} \;\leqslant\; \sup_{[x_{k-1},x_k]} f \qquad\qquad (1 \leqslant k \leqslant n),$$

qui ne sont pas forcément de la forme $\varphi_{k-1} = f(\xi_{k-1})$ avec $\xi_{k-1} \in [x_{k-1}, x_k]$, et pour tous choix de réels $x_{k-1} \leqslant \xi_{k-1} \leqslant x_k$, les sommes de Riemann hybrides :

$$S_\Delta(f,g,\varphi,\xi) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, \varphi_{k-1}\, g(\xi_{k-1})$$

tendent vers :

$$\lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} S_\Delta(f,g,\varphi,\xi) \;=\; \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx.$$

Démonstration. Quitte à remplacer g par $g - \inf_{[a,b]} g$, on peut supposer, puisque la formule à démontrer est invariante par translation, que $g \geqslant 0$. Or nous savons déjà que les sommes de Riemann authentiques satisfont :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;=\; \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\,\to\,0} \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_{k-1})\, g(\xi_{k-1}),$$

et si nous soustrayons cela à la limite à estimer, des majorations naturelles qui utilisent la positivité de g :

$$\begin{aligned}
\bigg|\sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \big[\varphi_{k-1} - f(\xi_{k-1})\big]\, \underbrace{g(\xi_{k-1})}_{\geqslant\, 0}\bigg| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\Big)\, g(\xi_{k-1}) \\
&\leqslant \sup_{[a,b]} g \cdot \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) \Big(\sup_{[x_{k-1},x_k]} f - \inf_{[x_{k-1},x_k]} f\Big) \\
&= \sup_{[a,b]} g \cdot \Big(\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f)\Big) \underset{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

conduisent à réaliser aisément que cette différence tend vers 0 avec le pas de Δ. $\square$

Nous pouvons maintenant engager la preuve du deuxième théorème de la moyenne. Grâce à ce lemme appliqué pour fixer les idées à $\xi_{k-1} := x_{k-1}$, on a :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \;=\; \lim_{\mathsf{pas}(\Delta)\to 0} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, \varphi_{k-1}\, g(x_{k-1})}_{=\, S_\Delta(f,g,\varphi,\xi)},$$

toujours avec des choix quelconques de réels :

$$\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \;\leqslant\; \varphi_{k-1} \;\leqslant\; \sup_{[x_{k-1},x_k]} f.$$

L'idée principale consiste à choisir ces φ_{k-1} comme étant les valeurs moyennes de f sur les intervalles de la subdivision :

$$\varphi_{k-1} \;:=\; \frac{1}{x_k - x_{k-1}} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\, dx.$$

Alors en termes de l'intégrale indéfinie :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt,$$

dont on abrège les valeurs aux points de la subdivision par :

$$F_k := F(x_k) \qquad\qquad {\scriptstyle (0 \leqslant k \leqslant n)},$$

d'où :

$$(x_k - x_{k-1})\,\varphi_{k-1} = F_k - F_{k-1},$$

ce qui ré-exprime dans ce langage la somme à considérer :

$$S_\Delta(f, g, \varphi, \xi) = \sum_{k=1}^{n} \big(F_k - F_{k-1}\big)\, g(x_{k-1}),$$

nous pouvons maintenant effectuer la transformation (élémentaire) suivante :

$$\begin{aligned} S_\Delta(f, g, \varphi, \xi) &= \big(F_1 - F_0\big)\, g(x_0) + \big(F_2 - F_1\big)\, g(x_1) + \cdots + \\ &\quad + \big(F_{n-1} - F_n\big)\, g(x_{n-2}) + \big(F_n - F_{n-1}\big)\, g(x_{n-1}) \\ &= -\, g(x_0)\, \underline{F_0}_{\circ} + \big(\underbrace{g(x_0) - g(x_1)}_{\geqslant 0}\big)\, F_1 + \big(\underbrace{g(x_1) - g(x_2)}_{\geqslant 0}\big)\, F_2 + \cdots + \\ &\quad + \big(\underbrace{g(x_{n-2}) - g(x_{n-1})}_{\geqslant 0}\big)\, F_{n-1} + \underbrace{g(x_{n-1})}_{\geqslant 0}\, F_n, \end{aligned}$$

le premier terme s'annulant car $F_0 = \int_a^a f$, les différences entre valeurs de g étant toutes $\geqslant 0$ puisque g est par hypothèse décroissante.

Or $x \longmapsto F(x)$ est continue sur $[a, b]$, et en multipliant les encadrements :

$$\min_{[a,b]} F \leqslant F_k \leqslant \max_{[a,b]} F \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, 0 \leqslant k \leqslant n)},$$

par $g(x_{k-1}) - g(x_k) \geqslant 0$ et par $g(x_{n-1}) \geqslant 0$, ce qui ne change pas le sens des inégalités, puis en sommant, nous obtenons :

$$\min_{[a,b]} F \cdot \bigg(\sum_{k=1}^{n-1} \big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) + g(x_{n-1})\bigg) \leqslant S_\Delta(f, g, \varphi, \xi) \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot \bigg(\sum_{k=1}^{n-1} \big(g(x_{k-1}) - g(x_k)\big) + g(x_{n-1})\bigg),$$

les sommes entre parenthèse devenant agréablement téléscopiques :

$$\min_{[a,b]} F \cdot g(x_0) \leqslant S_\Delta(f, g, \varphi, \xi) \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot g(x_0),$$

ce qui, en laissant le pas de Δ tendre vers 0, donne :

$$\min_{[a,b]} F \cdot g(a) \leqslant \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx \leqslant \max_{[a,b]} F \cdot g(a),$$

Enfin, F étant continue sur $[a, b]$, il existe un $c \in [a, b]$ réalisant :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = g(a)\, F(c) = g(a) \int_a^c f(x)\, dx,$$

ce qui est la deuxième formule de la moyenne visée dans le cadre spécial de la proposition. □

11. Interversion entre limite et intégrale

Un premier théorème, ultra-connu, donne une condition suffisante pour qu'on puisse intervertir limite et intégration.

Théorème 11.1. *Si une suite de fonctions Riemann-intégrables :*

$$f_n\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \qquad\qquad {\scriptstyle (n\geqslant 1)}$$

définies sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ *converge* uniformément *vers une certaine fonction :*

$$f\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{C},$$

alors cette fonction-limite est elle aussi Riemann-intégrable, et on a de plus :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.$$

Démonstration. L'Exercice 14, laissé au lecteur (voir aussi le chapitre d'exercices corrigés), établit la Riemann-intégrabilité de la fonction-limite (uniforme) f.

Une fois ce résultat admis, les arguments sont naturels.

En effet, on a par hypothèse que les f_n convergent uniformément vers f :

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,n_\varepsilon\geqslant 1 \quad \forall\,n\geqslant n_\varepsilon \quad \forall\,x\in[a,b] \quad \big|f_n(x)-f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ une simple majoration conclut :

$$\begin{aligned}
\bigg|\int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx\bigg| &= \bigg|\int_a^b \big(f_n(x)-f(x)\big)\,dx\bigg| \\
&\leqslant \int_a^b \big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \\
&\leqslant (b-a)\,\frac{\varepsilon}{b-a)} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

□

Un résultat classique dû à Dini et à Polyà (voir l'Exercice 51) montre qu'une suite de fonctions toutes décroissantes qui converge simplement vers une fonction continue converge en fait uniformément. Le théorème suivant qui s'en inspire découle alors du théorème précédent, mais il est intéressant et instructif d'en donner une démonstration indépendante.

Théorème 11.2. [Convergence monotone en théorie de Riemann] *Sur un intervalle compact* $[a,b] \Subset \mathbb{R}$*, soit une suite de fonctions :*

$$f_n\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad {\scriptstyle (n\geqslant 1)},$$

qui sont toutes décroissantes :

$$\Big(a\leqslant x'\leqslant x''\leqslant b\Big) \quad\Longrightarrow\quad \Big(f_n(a)\geqslant f_n(x')\geqslant f_n(x'')\geqslant f_n(b)\Big),$$

donc bornées et Riemann-intégrables. On suppose qu'en tous les points $x \in [a,b]$*, les limites :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x)$$

existent (convergence ponctuelle), donc définissent une certaine fonction :

$$f\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors cette fonction-limite est elle aussi décroissante, donc bornée Riemann-intégrable sur $[a,b]$, et surtout*, on a :*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\,dx.$$

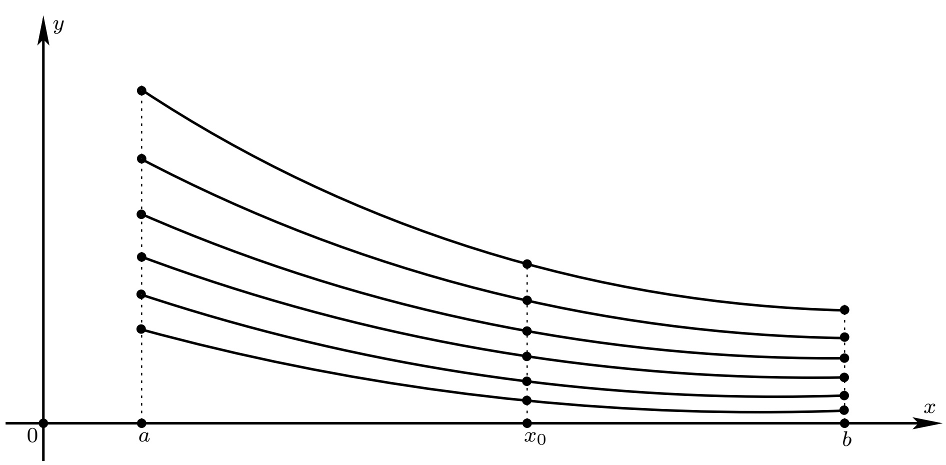
Ce résultat est vrai aussi pour des suites de fonctions qui sont toutes croissantes.

Démonstration. Tout d'abord, la décroissance de la fonction-limite :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f(x') \geqslant f(x'')\Big)$$

provient d'un simple passage à la limite dans les inégalités de décroissance des fonctions f_n :

$$\Big(x' \leqslant x''\Big) \implies \Big(f_n(x') \geqslant f_n(x'')\Big) \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

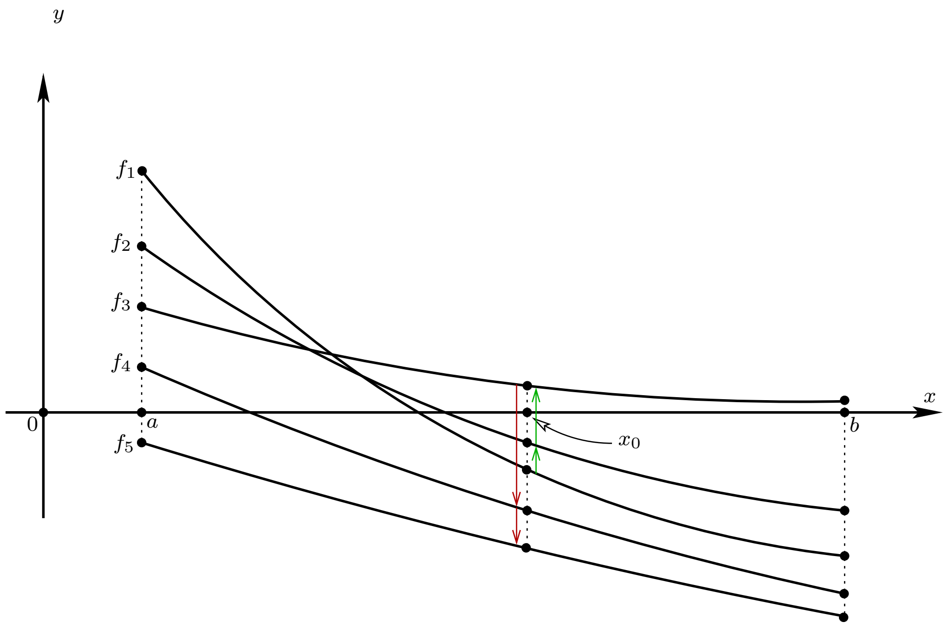


La figure qu'on a spontanément en tête pour se représenter mentalement une telle suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de fonctions décroissantes est inexacte par excès de simplicité.

Certes, chaque fonction f_n est décroissante sur $[a,b]$, mais cela ne veut pas forcément dire qu'en un point fixé $x_0 \in [a,b]$, la suite de nombres réels :

$$\big(f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 1}$$

soit elle-même décroissante ! Bien qu'une telle affirmation semble contre-intuitive, la figure suivante illustre ce qui peut tout à fait se produire.



En un point $x_0 \in [a,b]$, la suite $\big(f_n(x_0)\big)_{n\geqslant 1}$ peut donc effectivement commencer par croître, puis décroître, *etc.*

Gaston Bachelard disait qu'il faut constamment confronter, éduquer, transformer, métamorphoser, transcender, sublimer, son intuition mathématique. Or les figures, de part leur caractère souvent incomplet et maladroit, exposent salutairement à des questionnements impromptus.

En tout cas, puisque la fonction-limite f est décroissante, elle est Riemann-intégrable. Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \,\leqslant\, \int_a^b f(x)\,dx \,\leqslant\, \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

Les points d'une telle subdivision Δ_ε sont en nombre fini, égal à $(\nu+1)$. Or par hypothèse, la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge *ponctuellement* vers f. En particulier, elle converge en *tous* les points de la subdivision :

$$\begin{aligned} f_n(a) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(a), \\ f_n(x_1) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_1), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(x_{\nu-1}) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x_{\nu-1}), \\ f_n(b) &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(b). \end{aligned}$$

Autrement dit, avec ce même $\varepsilon > 0$:

$$
\begin{aligned}
\exists\, n_\varepsilon^0 \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^0 \implies \big|f_n(a) - f(a)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^1 \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^1 \implies \big|f_n(x_1) - f(x_1)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\exists\, n_\varepsilon^{\nu-1} \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^{\nu-1} \implies \big|f_n(x_{\nu-1}) - f(x_{\nu-1})\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big),\\
\exists\, n_\varepsilon^\nu \geqslant 1 &\quad \Big(n \geqslant n_\varepsilon^\nu \implies \big|f_n(b) - f(b)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\Big).
\end{aligned}
$$

Donc si nous prenons le *maximum* de tous ces entiers-seuils :

$$
n_\varepsilon := \max\big(n_\varepsilon^0,\, n_\varepsilon^1,\, \dots,\, n_\varepsilon^{\nu-1},\, n_\varepsilon^\nu\big),
$$

alors pour $n \geqslant n_\varepsilon$ nous sommes certains de contrôler par encadrement :

$$
f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a},
$$

pour tous les indices $0 \leqslant \kappa \leqslant \nu$.

Et maintenant, le miracle argumentatif va être que la *monotonie* — ici la *décroissance* —, des fonctions f_n et f assurera que ce simple contrôle en le nombre fini des points de la subdivision Δ se propagera sur les intervalles de Δ.

En effet, si, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, nous estimons la somme de Darboux supérieure de f_n, alors la décroissance de f_n et les inégalités finies de contrôle obtenues à l'instant :

$$
\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x)\\
\text{[f_n est décroissante !]}\qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_{\kappa-1})\\
\text{[Contrôle aux points $x_{\kappa-1}$]}\qquad &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\Big)\\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_{\kappa-1}) + \frac{\varepsilon}{b-a}\,\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big)\\
\text{[f aussi est décroissante !]}\qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \sup_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) + \varepsilon\\
\text{[Reconnaître Darboux]}\qquad &= \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon,
\end{aligned}
$$

produisent une majoration en termes de la somme de Darboux supérieure de la fonction-limite f.

Quant à une minoration de la somme de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(f_n)$, elle se déroule de manière similaire :

$$
\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f_n) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f_n(x) \\
\text{[}f_n\text{ est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f_n(x_\kappa) \\
\text{[Contrôle aux points } x_{\kappa-1}\text{]} \qquad &\geqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \Big(f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\Big) \\
&= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big)\, f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a}\big(x_1 - a + \cdots + b - x_{\nu-1}\big) \\
\text{[}f\text{ aussi est décroissante !]} \qquad &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \inf_{x_{\kappa-1}\leqslant x\leqslant x_\kappa} f(x) - \varepsilon \\
\text{[Reconnaître Darboux]} \qquad &= \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Nous avons donc obtenu une majoration et une minoration :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) - \varepsilon,
$$

qu'il vaut mieux récrire comme :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon,
$$

afin de synthétiser ces deux résultats avec l'inégalité de départ qui exprimait la Riemann-intégrabilité de f :

$$
\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon,
$$

ce qui nous donne les inégalités agréables suivantes :

$$
\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon.
$$

En effet, ces inégalités sont fort agréables parce que si nous nous souvenons que les sommes de Darboux supérieure et inférieure sont toujours au-dessus et en-dessous de la valeur d'une intégrale :

$$
\int_a^b f_n(x)\,dx \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) \qquad \text{et} \qquad \Sigma_\Delta(f_n) \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx,
$$

nous obtenons instantanément un encadrement :

$$
\int_a^b f_n(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + 2\,\varepsilon,
$$

d'où découle, et ce, toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$:

$$
\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant 2\,\varepsilon,
$$

ce qui montre bien la convergence désirée $\int f_n \longrightarrow \int f$. □

12. Caractérisation des fonctions Riemann-intégrables

Nous avons observé que toutes les fonctions continues, voire continues par morceaux, sont Riemann-intégrables. Le but de cette section est de réaliser une étude plus aboutie des discontinuités des fonctions Riemann-intégrables, ce qui anticipera avantageusement certains concepts de la Théorie de l'intégrale de Lebesgue.

Définition 12.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit être *de mesure* 0 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille *finie* ou *infinie dénombrable* :

$$\big\{I_k\big\}_{k\geqslant 1}$$

d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ telle que :

(i) $E \subset \bigcup_{k\geqslant 1} I_k$;

(ii) $\sum_{k\geqslant 1} |I_k| \leqslant \varepsilon$, où $|I_k|$ désigne la longueur de l'intervalle I_k.

La première condition demande que la réunion des intervalles recouvre E, et la deuxième condition exprime que cette réunion peut être rendue de longueur totale arbitrairement petite. Dans cette définition, il importe au plus haut point que la famille des I_k soit de cardinal au plus dénombrable.

Lemme 12.2. *Lorsqu'un tel ensemble E de mesure nulle est de plus* compact*, il est en fait possible de le recouvrir par un nombre* fini *d'intervalles ouverts I_k tels que $\sum_{k\geqslant 1} \big|I_k\big| \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Appliquer simplement le Théorème 3.5 de Heine-Borel pour extraire un recouvrement fini. □

Lemme 12.3. *Si $F \subset E \subset \mathbb{R}$ sont deux sous-ensembles, et si E est de mesure 0, alors F est aussi de mesure 0.*

Démonstration. Tout recouvrement de E par des intervalles ouverts, avec somme de longueurs très petite, recouvre aussi F. □

Lemme 12.4. *Tout sous-ensemble* fini :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N\big\} \subset \mathbb{R}$$

est de mesure nulle.

Démonstration. En effet, pour tout $\delta > 0$, la réunion des N intervalles ouverts :

$$I_k := \big]x_k - \delta,\ x_k + \delta\big[\ \ni\ x_k \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,N)}$$

recouvre manifestement E, et la somme de toutes leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \ \leqslant\ \varepsilon$$

sera inférieure à un $\varepsilon > 0$ quelconque pourvu seulement que $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2\,N}$. □

Lemme 12.5. *Tout sous-ensemble* infini dénombrable :

$$E = \big\{x_1, x_2, \dots, x_N, x_{N+1}, \dots\dots\big\} \subset \mathbb{R}$$

est aussi de mesure nulle

Démonstration. Au premier abord, cet énoncé semble exagérément optimiste, puisque si l'on s'en réfère à l'argument qui précède, à savoir si l'on recouvre les points de E par des intervalles ouverts de longueur $2\,\delta$, lorsque $N \to \infty$, la somme de leurs longueurs :

$$2\,\delta\,N \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ne pourra jamais être rendue arbitrairement petite !

Toutefois, rien n'interdit de *rapetisser de plus en plus* la longueur des intervalles qui contiennent les points $x_1, x_2, x_3, \dots$, et en effet, si l'on prend :

$$I_k := \big]x_k - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{\varepsilon}{2^k},\ x_k + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{\varepsilon}{2^k}\big[\ \ni x_k \qquad\qquad {\scriptstyle (k=1\cdots\infty)},$$

alors la somme des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^k} &= 2\,\varepsilon\bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots\bigg)\\ &= 2\,\varepsilon\,\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\\ &= 2\,\varepsilon\end{aligned}$$

sera effectivement arbitrairement petite. □

Lemme 12.6. *Toute réunion* finie *ou* infinie dénombrable *d'ensembles de mesure nulle est encore de mesure* 0*.*

Démonstration. L'idée est essentiellement la même que dans le lemme qui précède. Notons :

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ \dots,\ E_i,\ E_{i+1},\ \dots\dots$$

ces ensembles et notons :

$$E := \bigcup_{i\geqslant 1} E_i$$

leur réunion finie ou dénombrable.

Par hypothèse, chaque E_i est de mesure nulle. Pour chaque indice i, appliquons alors la définition non pas avec ε, mais avec $\frac{\varepsilon}{2^i}$, ce qui nous fournit des intervalles :

$$I_{i,1},\ I_{i,2},\ \dots,\ I_{i,k},\ \dots\dots$$

dont la réunion recouvre E_i :

$$E_i \subset \bigcup_{k\geqslant 1} I_{i,k},$$

et dont la somme totale des longueurs est donc majorée par :

$$\sum_{k\geqslant 1}\big|I_{i,k}\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Mais alors il est clair que la double réunion recouvre l'ensemble :

$$E \subset \bigcup_{i\geqslant 1}\bigcup_{k\geqslant 1} I_{i,k},$$

et un calcul simple montre que la somme totale des longueurs correspondantes :

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant 1}\sum_{k\geqslant 1}\big|I_{i,k}\big| &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^i}\\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

est effectivement arbitrairement petite. □

Nous pouvons maintenant énoncer la caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables en termes de leurs discontinuités, caractérisation qui mettra en lumière les limitations de cette théorie.

Théorème 12.7. [Caractérisation fondamentale des fonctions Riemann-intégrables] *Une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble des points où elle n'est* pas *continue est de mesure* 0*.*

Autrement dit, on a Riemann-intégrabilité lorsque et seulement lorsque l'ensemble des points de discontinuité est de mesure nulle.

Mais au fait, qu'appelle-t-on un *point de discontinuité* d'une fonction f ? Avant d'entamer la démonstration de ce théorème, il convient de développer quelques préliminaires conceptuels.

Par définition, une fonction :

$$f\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est *continue* en un point $c \in [a,b]$ si :

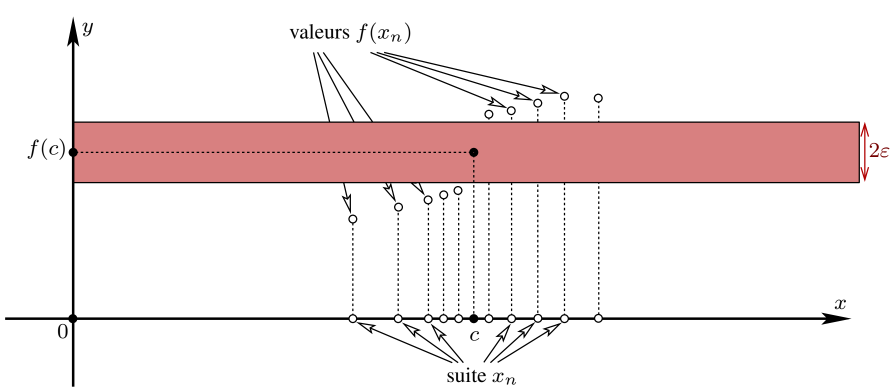
$$\forall\,\varepsilon>0\quad \exists\,\delta>0\quad \forall\,x\quad |x-c| \implies \big|f(x)-f(c)\big|\leqslant\varepsilon.$$

Si maintenant, nous nous rappelons que la négation d'une formule logique du premier ordre intervertit les symboles $\forall$ et $\exists$, la *non*-continuité de la fonction f en un point $c \in [a,b]$ s'exprimera comme :

$$\exists\,\varepsilon>0\quad \forall\,\delta>0\quad \exists\,x\quad |x-c|\leqslant\delta\quad \text{tel que}\quad \big|f(x)-f(c)\big|>\varepsilon.$$

Pour des raisons personnelles qui n'ont pas de fondement rationnel, l'auteur de ces lignes préfère les inégalités larges et nous écrirons plutôt $\geqslant \varepsilon$ à la fin, ce qui de toute façon, est *a fortiori* satisfait ici :

$$\exists\,\varepsilon>0\quad \forall\,\delta>0\quad \exists\,x\quad |x-c|\leqslant\delta\quad \text{tel que}\quad \big|f(x)-f(c)\big|\geqslant\varepsilon.$$



Assertion 12.8. *Une fonction* $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ *est* non-*continue en un point* $c \in [a,b]$ *si et seulement si il existe* $\varepsilon > 0$ *et il existe une suite de points :*

$$\big(x_n\big)_{n\geqslant 1} \in [a,b]$$

qui tendent vers :

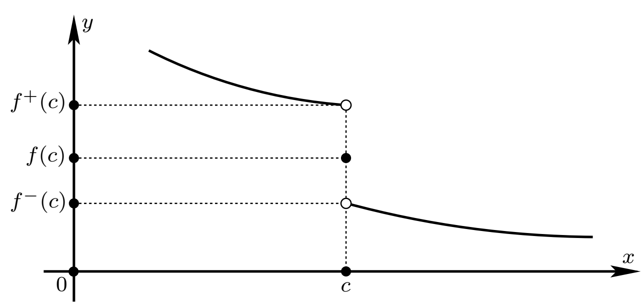
$$c = \lim_{n\to\infty} x_n$$

tels que :

$$\big|f(x_n) - f(c)\big| \geqslant \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Démonstration. Il s'agit de prendre une suite de nombres strictement positifs $\delta_n \to 0$ tendant vers 0, les détails de cet énoncé censé être connu étant laissés en exercice. □

Intuitivement, donc, le graphe d'une fonction réelle f au voisinage d'un point de discontinuité saute, s'écarte, oscille. Mais comment conceptualiser cela plus avant ?



Définition 12.9. Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est dite admettre une *discontinuité de première espèce* en un point :

$$c \in [a,b],$$

lorsque les deux limites suivantes à gauche et à droite :

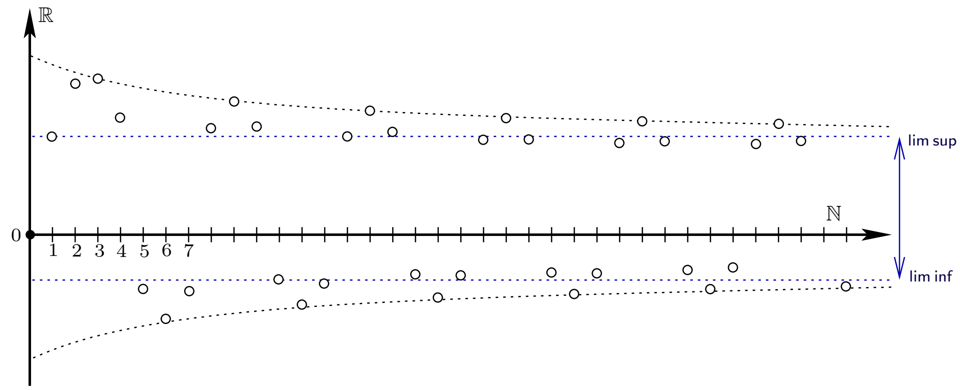
$$\lim_{\substack{x \to c\\ <}} f(x) =: f^-(c) \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{\substack{x \to c\\ >}} f(x) =: f^+(c) \in \mathbb{R}$$

existent et sont finies — pour $c = a$ ou $c = b$, l'une des deux limites n'est bien sûr pas à considérer.

Toutefois, ces discontinuités de première espèce qui sont bien connues sont un peu trop simples. Comment, alors, mieux s'imaginer la *vibration* d'une discontinuité ?

Un concept plus avancé, le concept d'*oscillation*, va *quantifier* la non-continuité d'une fonction en un point, en disant *de combien* une fonction est discontinue. Commençons par un élément d'inspiration.



Définition 12.10. L'*oscillation à l'infini* d'une suite de nombres réels :

$$\big(a_n\big)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}$$

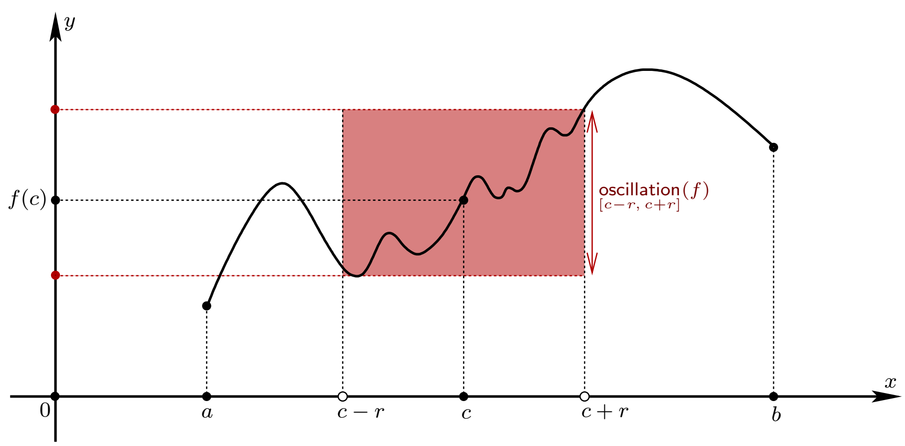
est la quantité :

$$\mathsf{oscillation}\big((a_n)_{n\geqslant 1}\big) := \limsup_{n\to\infty} a_n - \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Si nous revenons donc à une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, pour capturer ce que l'on pourra se représenter comme étant son *oscillation microscopique* autour d'un point $c \in [a,b]$, il conviendra de regarder des intervalles centrés au point c :

$$\big[c-r,\, c+r\big]$$

de longueur $2\,r > 0$ petite et de regarder l'écartement maximal entre les valeurs de f sur cet intervalle.



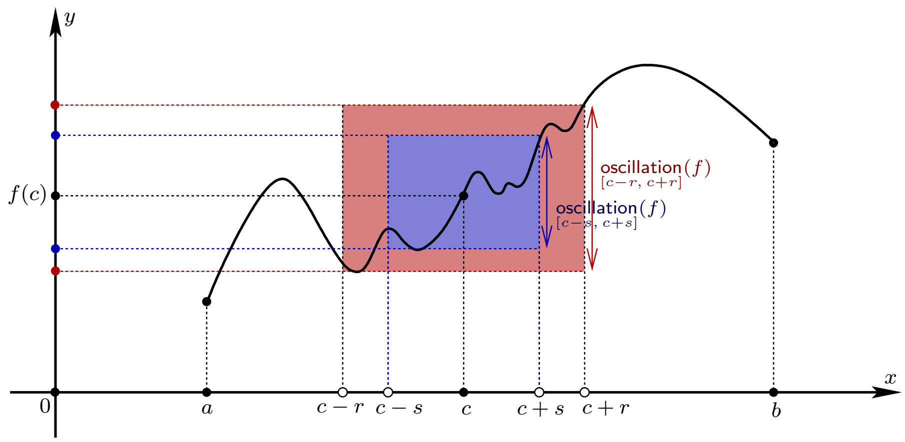
Définition 12.11. Sur un tel intervalle $[c-r,\, c+r]$, on introduit :

$$\underset{[c-r,\,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f) := \sup_{x,y\in[c-r,c+r]} \big|f(x)-f(y)\big|.$$

Comme tout supremum décroît lorsqu'on réduit l'ensemble sur lequel on le prend, la fonction :

$$r \longmapsto \underset{[c-r,\,c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f)$$

est *décroissante*. Elle admet donc certainement une limite lorsque $r \underset{>}{\longrightarrow} 0$.



Définition 12.12. En un point $c \in [a, b]$, l'*oscillation* d'une fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$ est cette limite des oscillations macroscopiques sur des intervalles centrés en c qui rétrécissent indéfiniment :

$$\mathsf{oscillation}\,(f, c) \;:=\; \lim_{\substack{r \to 0 \\ >}} \underset{[c-r,\, c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f).$$

On se convainc alors aisément (exercice) de la véracité de l'énoncé suivant.

Assertion 12.13. *Une fonction $f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est* continue *en un point $c \in [a, b]$ si et seulement si :*

$$0 = \mathsf{oscillation}(f, c). \qquad \square$$

De plus, si, pour $\varepsilon > 0$ quelconque, on introduit les ensembles :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \;:=\; \big\{c \in [a, b]\colon\; \text{l'oscillation de } f \text{ en } c \text{ est } \geqslant\, \varepsilon\big\},$$

alors une conséquence directe de cette dernière assertion est que :

$$\begin{aligned}\mathsf{Disc}(f) &:= \big\{c \in [a, b]\colon\; f \text{ n'est pas continue en } c\big\} \\ &= \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathsf{Osc}_\varepsilon(f).\end{aligned}$$

Lemme 12.14. *Pour $\varepsilon > 0$ fixé quelconque, le sous-ensemble :*

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \;\subset\; [a, b]$$

est fermé*, donc* compact.

Démonstration. En raisonnant par l'absurde, supposons qu'il existe une suite de points dans ce sous-ensemble :

$$\big(c_n\big)_{n \geqslant 1} \;\in\; \mathsf{Osc}_\varepsilon(f)$$

qui tend vers un point $c \in [a, b]$ qui ne lui appartient *plus :*

$$c_n \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} c \;\notin\; \mathsf{Osc}_\varepsilon(f).$$

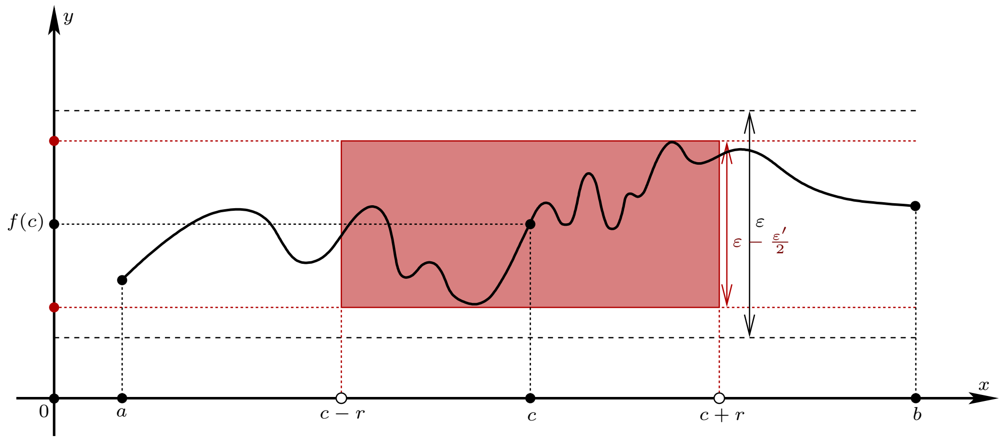
Ceci veut dire qu'en ce point, l'oscillation de f est strictement inférieure :

$$\mathsf{oscillation}(f, c) \;<\; \varepsilon,$$

ce qu'on peut ré-exprimer en disant qu'elle est égale à :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \mathsf{oscillation}(f, c),$$

pour un certain $\varepsilon' > 0$ strictement positif.



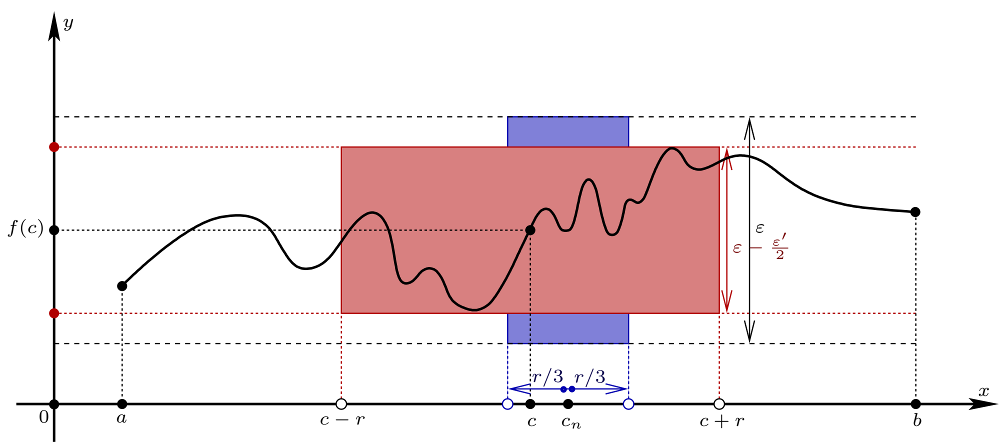
Or par définition, cette oscillation est une limite décroissante :

$$\varepsilon - \varepsilon' = \lim_{r \to 0} \operatorname*{oscillation}_{[c-r, c+r]}(f),$$

donc il existe un $r > 0$ assez petit pour que :

$$\operatorname*{oscillation}_{[c-r, c+r]}(f) \leqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2} < \varepsilon,$$

soit toujours strictement inférieure à ε.



Ensuite, comme $c_n \to c$ tend vers c, prenons un entier $n \gg 1$ assez grand pour que :

$$\left|c_n - c\right| \leqslant \frac{r}{3}.$$

En de tels points :

$$c_n \in \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

l'oscillation sur un intervalle est bien entendu supérieure l'oscillation ponctuelle :

$$\begin{aligned}\operatorname*{oscillation}_{[c_n - r/3,\, c_n + r/3]}(f) &\geqslant \operatorname{oscillation}(f, c_n) \\ &\geqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Mais alors, puisqu'on a arrangé les choses de manière à avoir l'inclusion :

$$\left[c_n - \tfrac{r}{3},\ c_n + \tfrac{r}{3}\right] \subset \left[c - r,\ c + r\right],$$

on déduit un jeu d'inégalités :

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant \underset{[c_n-r/3,\, c_n+r/3]}{\mathsf{oscillation}}(f)\\ &= \sup_{x,y\in[c_n-r/3,\, c_n+r/3]} \big|f(x)-f(y)\big|\\ &\leqslant \sup_{x,y\in[c-r,\, c+r]} \big|f(x)-f(y)\big|\\ &= \underset{[c-r,\, c+r]}{\mathsf{oscillation}}(f)\\ &\leqslant \varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2},\end{aligned}$$

qui apporte une contradiction terminant l'argumentation. Géométriquement, la courbe qui est enfermée dans une boîte de hauteur $\varepsilon - \frac{\varepsilon'}{2}$ ne peut plus dépasser jusqu'à une hauteur ε autour de c_n. □

Démonstration du Théorème 12.7. Montrons la première implication :

$$\Big(f \text{ est Riemann-intégrable}\Big) \implies \Big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\Big).$$

Nous savons que l'ensemble des points de discontinuité de f :

$$\mathsf{Disc}(f) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)$$

est la réunion *dénombrable* des ensembles où l'oscillation de f est $\geqslant 1/n$. Grâce au Lemme 12.6 d'après lequel la nullité de la mesure est stable par réunion dénombrable, il suffit de montrer pour tout $n \geqslant 1$ que :

$$0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big).$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme f est par hypothèse Riemann-intégrable, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \frac{\varepsilon}{n}.$$

Soit un point quelconque :

$$x \in \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Il se peut que x soit l'un des points $a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b$ de la subdivision Δ, mais comme ces points sont en nombre *fini*, donc de mesure nulle, il suffit même de montrer :

Assertion 12.15. *Pour tout $n \geqslant 1$, on a :*

$$0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f)\big\backslash\{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}\big).$$

Démonstration. L'intérêt, c'est que maintenant dans l'intervalle $[a, b]$ excisé de ces points, on n'a plus affaire qu'à des intervalles *ouverts :*

$$\mathring{I}_\kappa :=]x_{\kappa-1},\, x_\kappa[\qquad\qquad (1 \leqslant \kappa \leqslant \nu),$$

lesquels conviendront mieux dans les arguments techniques. En effet, soit un point quelconque :

$$x \in \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f) \big\backslash \{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\},$$

donc appartenant à un certain tel intervalle ouvert :

$$x \in \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f).$$

Alors par définition de l'oscillation de f en x :

$$\begin{aligned}\sup_{[x_{\kappa-1},\, x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1},\, x_\kappa]} f &\geqslant \mathsf{oscillation}(f, x) \\ &\geqslant \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

En revenant à la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure, on peut donc minorer :

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{n} &\geqslant \Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big|I_\kappa\big| \Big(\sup_{I_\kappa} f - \inf_{I_\kappa} f\Big) \\ &\geqslant \sum_{\{\kappa :\ \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\}} \big|I_\kappa\big| \cdot \frac{1}{n},\end{aligned}$$

ce qui, après division par $\frac{1}{n}$ donne la majoration :

$$\sum_{\{\kappa :\ \mathring{I}_\kappa \cap \mathsf{Osc}_{1/n}(f) \neq \emptyset\}} \big|I_\kappa\big| \leqslant \varepsilon,$$

et montre bien, finalement, qu'on a recouvert l'ensemble $\mathsf{Osc}_{\frac{1}{n}}(f) \big\backslash \{a, x_1, \dots, x_{\nu-1}, b\}$ par une réunion d'intervalles ouverts de mesure arbitrairement petite. $\square$

Montrons maintenant la deuxième implication :

$$\Big(f \text{ est Riemann-intégrable}\Big) \iff \Big(0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Disc}(f)\big)\Big).$$

Soit donc f une fonction dont les discontinuités sont de mesure nulle. Comme nous savons que l'ensemble de ces discontinuités est la réunion des points où l'oscillation est strictement positive :

$$\mathsf{Disc}(f) = \bigcup_{\varepsilon > 0} \mathsf{Osc}_\varepsilon(f),$$

fixons donc un tel $\varepsilon > 0$, et supposons-le arbitrairement petit. Par hypothèse et par le Lemme 12.3 :

$$0 = \mathsf{Mesure}\big(\mathsf{Osc}_\varepsilon(f)\big),$$

et comme ce sous-ensemble :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \subset [a, b]$$

est fermé grâce au Lemme 12.14, donc compact, le Lemme 12.2 assure qu'il existe un nombre *fini* $N \geqslant 1$ d'intervalles *ouverts* $I_k \subset \mathbb{R}$ le recouvrant :

$$\mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \subset I_1 \cup \cdots \cup I_N,$$

et de longueur totale :

$$|I_1| + \cdots + |I_N| \leqslant \varepsilon,$$

avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Maintenant, ces I_k étant ouverts, le complémentaire :

$$[a,b] \big\backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

est fermé, borné, donc compact, et en l'un quelconque de ses points :

$$\begin{aligned} z &\in [a,b] \big\backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big) \\ &\subset [a,b] \big\backslash \mathsf{Osc}_\varepsilon(f) \\ &= [a,b] \big\backslash \big\{c \in [a,b] \colon \ \mathsf{oscillation}(f,c) \geqslant \varepsilon\big\} \end{aligned}$$

on a manifestement :

$$\mathsf{oscillation}(f,z) < \varepsilon.$$

Par conséquent, autour de tout tel point z, il existe un certain intervalle ouvert $J_z \ni z$ assez petit pour que l'oscillation associée de f sur la fermeture $\overline{J}_z$ satisfasse :

$$\sup_{x,y \in \overline{J}_z} \big|f(x) - f(y)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Le Théorème 3.5 de Heine-Borel assure alors que du recouvrement ouvert infini :

$$\bigcup_z J_z \supset [a,b] \big\backslash \big(I_1 \cup \cdots \cup I_N\big)$$

on peut extraire un recouvrement *fini*, que l'on notera :

$$J_1 \cup \cdots \cup J_M,$$

et donc au total les $I_\bullet$ et les $J_\bullet$ recouvrent tout l'intervalle de définition de f :

$$I_1 \cup \cdots \cup I_N \bigcup J_1 \cup \cdots \cup J_M \supset [a,b].$$

Maintenant, si nous prenons tous les points-extrémités de ces $(N+M)$ intervalles $I_\bullet$ et $J_\bullet$ qui appartiennent à $[a,b]$, nous obtenons une certaine subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}.$$

Assertion 12.16. *Alors les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f associées à cette subdivision satisfont :*

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \varepsilon \bigg(2 \sup_{[a,b]} |f| + b - a\bigg).$$

Démonstration. En effet, remémorons-nous que cette différence s'explicite comme :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) = \sum_{\kappa=1}^{\nu} \big(x_\kappa - x_{\kappa-1}\big) \bigg(\sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f\bigg).$$

Alors si dans cette somme de ν termes, nous distinguons deux cas — pas forcément exclusifs (exercice mental) — :

Cas 1 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset I_\bullet$,

Cas 2 : $[x_{\kappa-1},\, x_\kappa] \subset J_\bullet$, nous pouvons la majorer comme suit :

$$\begin{aligned}
&\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \\
&\leqslant \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1}, x_\kappa] \subset I_\bullet\}} (x_\kappa - x_{\kappa-1}) \underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f \Big)}_{\leqslant \sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f} + \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1}, x_\kappa] \subset J_\bullet\}} (x_\kappa - x_{\kappa-1}) \underbrace{\Big(\sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f - \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f \Big)}_{\leqslant \varepsilon, \text{ car } [x_{\kappa-1}, x_\kappa] \text{ est un } J_\bullet} \\
&\leqslant \Big(\sup_{[a,b]} f - \inf_{[a,b]} f \Big) \sum_{\{\kappa\colon [x_{\kappa-1}, x_\kappa] \subset I_\bullet\}} (x_\kappa - x_{\kappa-1}) + \varepsilon \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_\kappa - x_{\kappa-1}) \\
&\leqslant \Big(2 \sup_{[a,b]} |f| \Big) \big(\underbrace{|I_1| + \cdots + |I_N|}_{\leqslant \varepsilon} \big) + \varepsilon\,(b-a) \\
&\leqslant \varepsilon \Big(2 \sup_{[a,b]} |f| + b - a \Big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, cette dernière assertion montre bien que f est Riemann-intégrable, terminant donc le traitement de la deuxième implication.

La démonstration très détaillée de l'équivalence entre Riemann-intégrabilité et nullité de la mesure de l'ensemble des points de discontinuité est donc achevée. □

13. Intégrales généralisées de Riemann : bref aperçu

Sur des intervalles non compacts de $\mathbb{R}$, pour des fonctions non bornées, il est tout à fait légitime de se demander si l'on peut donner un sens à l'intégrale de Riemann, par exemple afin de déterminer les valeurs de :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \qquad \int_1^\infty \frac{x}{1+x^3}\,dx, \qquad \int_0^\infty e^{-x}\,dx, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx, \qquad \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt.$$

La théorie concernée, qui offre d'innombrables exercices agréables de calcul dont les professeurs aiment à voir les étudiant se délecter avant d'apprendre à connaître la théorie supérieure de l'intégrale de Lebesgue, est suffisamment développée dans d'autres textes pour que nous nous contentions ici d'un très bref aperçu. En effet, la théorie de l'intégrale de Riemann pour les fonctions bornées f sur des intervalles compacts $[a,b] \subset \mathbb{R}$ que nous venons de développer en détail a déjà suffisamment bien préparé la piste de décollage vers d'autres cieux merveilleux.

En composant avec des applications du type $x \longmapsto \frac{1}{x-c}$, toute intégrale sur un intervalle ouvert $]a,b[$ se ramène à deux intégrales sur $]-\infty, 0]$ et sur $[0,\infty[$. Par symétrie, on peut travailler sur $[0,\infty[$.

Définition 13.1. Une fonction $f\colon [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *localement Riemann-intégrable* si sa restriction $f\big|_{[x_1,x_2]}$ à tout intervalle compact $[x_1,x_2] \subset [0,\infty[$ est bornée et Riemann-intégrable.

Les 5 exemples ci-dessus le sont !

Définition 13.2. Si :

$$\lim_{\mathrm{X}\to\infty} \int_0^{\mathrm{X}} f(x)\,dx$$

existe, on dit que l'intégrale de Riemann généralisée de f *converge sur* $[0, \infty[$, et on note cette limite :

$$\int_0^\infty f(x)\, dx.$$

Grâce à des primitives évidentes, le résultat suivant est bien connu.

Lemme 13.3. [Critère de Riemann] *Soit un nombre réel $\alpha \in \mathbb{R}$.*

- $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si $\alpha < 1$, et vaut alors $\frac{1}{1-\alpha}$.*
- $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$ *converge si et seulement si $\alpha > 1$, et vaut alors $\frac{1}{\alpha-1}$.* □

En outre, le critère classique de Cauchy pour l'existence de limites aux suites de nombres réels donne une condition nécessaire et suffisante pour que $\int_0^\infty f(x)\, dx$ converge.

Théorème 13.4. *Pour une fonction localement Riemann-intégrable f sur $[0, \infty[$, on a équivalence entre :*

(i) $\lim\limits_{\mathrm{X} \to \infty} \int_0^{\mathrm{X}} f(x)\, dx$ *existe ;*

(ii) $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \mathrm{X} = \mathrm{X}(\varepsilon) \gg 1$, $\forall\, x_2 \geqslant x_1 \geqslant \mathrm{X}$ *:*

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Évidemment, il faut bien prendre garde au fait qu'il s'agit de l'intégrale de la fonction f, et non de sa valeur absolue $|f|$, ici. En fait, la majoration si souvent utile :

$$\left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx \right| \leqslant \int_{x_1}^{x_2} \big| f(x) \big|\, dx$$

offre le :

Corollaire 13.5. *Pour une fonction localement Riemann-intégrable $f \colon [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_0^\infty \big| f(x) \big|\, dx \ \text{ converge} \qquad \Longrightarrow \qquad \int_0^\infty f(x)\, dx \ \text{ converge}. \qquad \square$$

Bien entendu, la réciproque est fausse, comme va le montrer l'exemple quelque peu subtil de la fonction $t \longmapsto \frac{\sin t}{t}$ sur $[0, \infty[$.

Assertion 13.6. *L'intégrale $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ converge.*

Preuve. Comme on a continuité $1 = \lim\limits_{t \to 0} \frac{\sin t}{t}$ en 0, c'est seulement à l'infini qu'une question se pose.

Soit $\mathrm{X} \gg 1$ grand, et soient $x_2 \geqslant x_1 \geqslant \mathrm{X}$. Il existe deux entiers uniques $k_1 \leqslant k_2$ tels que :

$$k_1\, \pi \leqslant x_1 < (k_1 + 1)\, \pi \qquad \text{et} \qquad k_2\, \pi \leqslant x_2 < (k_2 + 1)\, \pi.$$

Avec Chasles :

$$\int_{x_1}^{x_2} = \int_{x_1}^{k_1 \pi} + \bigg(\int_{k_1 \pi}^{(k_1+1)\pi} + \cdots + \int_{(k_2-1)\pi}^{k_2 \pi} \bigg) + \int_{k_2 \pi}^{x_2},$$

estimons :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\int_{x_1}^{x_2}\frac{\sin t}{t}\,dt\bigg| &\leqslant \int_{k_1\pi}^{x_1}\frac{|\sin t|}{t}\,dt+\bigg|\sum_{k=k_1}^{k_2-1}\int_0^\pi\frac{\sin(k\pi+u)}{k\pi+u}\,du\bigg|+\int_{k_2\pi}^{x_2}\frac{|\sin t|}{t}\,dt\\
&\leqslant \frac{x_1-k_1\pi}{x_1}+\bigg|\sum_{k=k_1}^{k_2-1}(-1)^k\underbrace{\int_0^\pi\frac{\sin u}{k\pi+u}\,du}_{=:\,a_k}\bigg|+\frac{x_2-k_2\pi}{k_2\pi}\\
&\leqslant \frac{\pi}{x_1}+\bigg|\sum_{k=k_1}^{k_2-1}(-1)^k\,a_k\bigg|+\frac{\pi}{k_2\pi},
\end{aligned}
$$

observons que les deux extrêmes tendent vers 0 quand $\mathrm{X}\longrightarrow\infty$, puisque $x_1\geqslant\mathrm{X}$ et $k_2\geqslant k_1>\frac{x_1-\pi}{\pi}$, tandis que la décroissance (exercice) :

$$
a_k\;\geqslant\;a_{k+1}\;\;\big(\geqslant 0\big)
$$

garantit que la série *alternée* $\sum(-1)^k\,a_k$ converge, donc ses sommes partielles $\sum_{k_1\leqslant k\leqslant k_2-1}$ tendent vers 0 lorsque $\mathrm{X}\longrightarrow\infty$, puisque $k_1\longrightarrow\infty$ aussi. □

Assertion 13.7. *La fonction $f(t):=\frac{\sin t}{t}$ continue et bornée sur $[0,\infty[$ a une valeur absolue* non intégrable *au sens généralisé de Riemann :*

$$
\infty\;=\;\int_0^\infty\frac{|\sin t|}{t}\,dt.
$$

Preuve. Avec $n\geqslant 1$ entier, et $0\leqslant k\leqslant n-1$ entier, en posant $t=k\pi+u$ où $u\in\,]0,\pi[$, d'où $\sin t=(-1)^k\sin u$ comme nous venons de l'utiliser plus haut sans le dire — honte à nous ! —, minorons :

$$
\begin{aligned}
\int_0^{n\pi}\frac{|\sin t|}{t}\,dt &= \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi\frac{\sin u}{k\pi+u}\,du\\
&\geqslant \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k\pi+\pi}\int_0^\pi\sin u\,du\\
&= \frac{1}{\pi}\bigg(\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{n}\bigg)\,2\;\;\xrightarrow[n\,\longrightarrow\,\infty]{}
\end{aligned}
$$

ce qui montre la non-convergence — mais il est alors naturel d'attribuer la valeur ∞ à cette intégrale ! □

Dans la théorie de Borel-Lebesgue qui sera développée ultérieurement, l'intégrabilité concernera presque toujours les valeurs absolues des fonctions, et alors, bien que cette théorie nouvelle embrassera un univers mathématique beaucoup plus vaste que celui des fonctions qui sont Riemann-intégrables sur des intervalles compacts, elle ne pourra pas inclure dans ses premiers développements les fonctions telles que $f(t)=\frac{\sin t}{t}$ sur $[0,\infty[$, avec $\int_0^\infty|f(t)|\,dt=\infty$, qui sont pourtant Riemann-intégrables en un sens généralisé.

Tels sont les paradoxes de la sophistication technologique incapable d'intégrer tous les secrets de grand-mère !

14. Fonctions non Riemann-intégrables

Exemple 14.1. [Fonction de Dirichlet non Riemann-intégrable] La fonction indicatrice des nombres rationnels sur l'intervalle $[0,1]$:

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} \;=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \; x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \; \text{ est un nombre rationnel,} \\ 0 & \text{lorsque } \; x \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \cap [0,1] \; \text{ est un nombre } \textit{ir}\text{rationnel,} \end{cases}$$

est manifestement bornée.

Nous affirmons qu'elle n'est pas Riemann-intégrable.

En effet, pour toute subdivision de l'intervalle $[a,b]$:

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

grâce à la densité des nombres rationnels et à la densité des nombres irrationnels, pour tout $k = 1, \dots, n$, il existera toujours simultanément :

- au moins un nombre rationnel $\frac{p_k}{q_k} \in [x_{k-1}, x_k] \cap \mathbb{Q}$,
- au moins un nombre irrationnel $\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k] \cap \big(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}\big)$,

d'où nous déduisons :

$$\begin{aligned} 1 &= \sup_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big), \\ 0 &= \inf_{I_k} \big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big), \end{aligned}$$

et par conséquent :

$$\begin{aligned} \Sigma^{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 1 = 1, \\ \Sigma_{\Delta}\big(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}\big) &= \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{x_1}) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

et donc puisque cela est vrai pour *toute* subdivision Δ, il n'y a absolument aucune chance de rendre l'erreur $\Sigma^{\Delta} - \Sigma_{\Delta}$ inférieure à un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit donné à l'avance.

Dans peu de temps, nous verrons que la théorie supérieure de l'intégrale de Lebesgue démontre que cette fonction 'Riemann-pathologique' $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ est en fait intégrable au sens de Lebesgue et qu'elle satisfait :

$$0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}, \qquad \textit{et} \qquad 1 = \int_0^1 \mathbf{1}_{(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})\cap[0,1]},$$

ce qui est en cohérence avec le fait qu'il y a infiniment plus de nombres irrationnels que de nombres rationnels.

Notation 14.2. On note :

$$\mathscr{R}[a,b] := \Big\{f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C} \colon \; f \text{ est Riemann-intégrable}\Big\}.$$

Cet ensemble est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition 14.3. Sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E de dimension finie ou infinie, on appelle *semi-norme* une application :

$$N\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

qui satisfait :

(i) [Homogénéité] pour tous $\lambda \in \mathbb{C}$ et $f \in E$:

$$N(\lambda\, f) = |\lambda|\, N(f);$$

(ii) [Inégalité triangulaire] pour tous $f, g \in E$:

$$N(f+g) \leqslant N(f) + N(g).$$

Dans cette définition, la troisième condition très forte nécessaire pour avoir une vraie norme :

$$N(f) = 0 \Longrightarrow f = 0,$$

n'est *pas* demandée.

Proposition 14.4. *L'application :*

$$\begin{aligned} \mathscr{R}[a,b] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ f &\longmapsto \int_a^b \big|f(x)\big|\,dx \end{aligned}$$

est une semi-norme.

Démonstration. La propriété **(i)** étant facile, pour vérifier **(ii)**, il suffit d'appliquer point par point l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{C}$:

$$\big|f(x) + g(x)\big| \leqslant |f(x)| + |g(x)|,$$

et d'intégrer. □

Cette semi-norme intégrale de la valeur absolue d'une fonction n'est *pas* une norme — penser à une fonction en escalier nulle sur ses intervalles de définition et non nulle en leurs extrémités. *La théorie supérieure de Lebesgue montrera comment étendre le concept d'intégrale et comment mieux envisager les fonctions à une certaine équivalence près, afin que l'intégrale de la valeur absolue d'une fonction devienne une vraie norme.*

15. Exercices

Exercice 1. Montrer que la fonction $f\colon\ ]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \longmapsto \frac{1}{x(1-x)}$ est continue, mais qu'elle n'est pas uniformément continue.

Exercice 2. Soient deux réels a et b avec $-\infty < a \leqslant b < \infty$, et soit l'intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$. On suppose comme dans le Théorème 3.5 que $[a,b] \subset \bigcup_{j\in J} I_j$ est recouvert par une réunion quelconque d'intervalles ouverts non vides $I_j \subset \mathbb{R}$, et on introduit l'ensemble :

$$\mathscr{C} := \big\{c \in [a,b] \colon \text{ l'intervalle } [a,c] \text{ admet un sous-recouvrement } \textit{fini} \text{ extrait de } \cup_{j\in J}\, I_j\big\}.$$

(a) Montrer que $a \in \mathscr{C}$.

(b) Pour $c \in \mathscr{C}$, montrer que tout c' avec $a \leqslant c' \leqslant c$ appartient aussi à $\mathscr{C}$.

(c) En déduire qu'il existe $b^* \in [a,b]$ tel que $\mathscr{C} = [a, b^*[$, ou tel que $\mathscr{C} = [a, b^*]$.

(d) Montrer qu'en fait, $b^* \in \mathscr{C}$.

(e) Montrer enfin que $b^* = b$ et conclure.

Exercice 3. Démontrer le Théorème 3.7. Indication: S'inspirer du chapitre suivant.

Exercice 4. Montrer qu'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $-\infty < a < b < \infty$, est Riemann-intégrable si et seulement si son opposée $-f$ l'est.

Exercice 5. Montrer que la Définition 2.3 de Riemann-intégrabilité d'une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ en termes de sommes de Darboux inférieure et supérieure dans lesquelles les $\inf$ et les $\sup$ sont pris sur des intervalles *fermés* $[x_{k-1}, x_k]$ est équivalente à celle où l'on prendrait les $\inf$ et les $\sup$ sur des intervalles *ouverts* $]x_{k-1}, x_k[$, à savoir plus précisément, montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a,b]$ telle que :

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \Sigma^{\Delta}_{\sim} - \Sigma^{\sim}_{\Delta} \leqslant \varepsilon,$$

où :

$$\Sigma^{\sim}_{\Delta} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \inf_{x_{k-1} < x < x_k} f(x),$$

$$\Sigma^{\Delta}_{\sim} := \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big) \sup_{x_{k-1} < x < x_k} f(x).$$

Exercice 6. Sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a,b]$ telle que $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 7. Montrer qu'une fonction bornée définie sur un intervalle compact est Riemann-intégrable si et seulement si elle est approchable en dessous et au-dessus par deux fonctions en escalier dont les valeurs intégrales peuvent être rendues arbitrairement proches, comme cela est stipulé dans la Proposition 4.8.

Exercice 8. Établir rigoureusement les propriétés **(ii)**, **(iii)**, **(iv)** du Théorème 5.1.

Exercice 9. Soit une fonction bornée $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $|f|$ est Riemann-intégrable, f l'est-elle ?

Exercice 10. Comparer $\int_0^2 f(x)\,g(x)\,dx$ et le produit $\int_0^2 f(x)\,dx \times \int_0^2 g(x)\,dx$ lorsque $f = \mathbf{1}_{[0,1]}$ et $g = \mathbf{1}_{]1,2]}$.

Exercice 11. Démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz du Théorème 5.14 satisfaite par les paires de fonctions Riemann-intégrables en raisonnant avec des sommes de Darboux et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz discrète :

$$\Big(\lambda_1\mu_1 + \cdots + \lambda_{\rm N}\mu_{\rm N}\Big)^2 \leqslant \Big(\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_{\rm N}^2\Big)\Big(\mu_1^2 + \cdots + \mu_{\rm N}^2\Big).$$

Exercice 12. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit un point $x_0 \in\,]a,b[$. Montrer que si f admet une limite *à gauche* en x_0, à savoir si :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) =: f^-(x_0)$$

existe, alors la fonction F définie par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$$

est dérivable *à gauche* en x_0 avec une valeur de sa dérivée à gauche $F'^-(x_0)$ justement égale à :

$$f^-(x_0) = F'^-(x_0) \overset{\text{def}}{=} \lim_{\substack{h \to 0 \\ <}} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h}.$$

Traiter aussi le cas des limites à droite.

Exercice 13. Sans supposer f continue comme dans les Corollaires 7.3, 7.4, et en raisonnant avec des sommes de Darboux, montrer que si f est Riemann-intégrable sur les intervalles appropriés, les deux formules élémentaires :

$$\int_a^b f(x+c)\,dx \;=\; \int_{a+c}^{b+c} f(y)\,dy \qquad (c\in\mathbb{R})$$

$$c\int_a^b f(cx)\,dx \;=\; \int_{ac}^{bc} f(y)\,dy \qquad (c\in\mathbb{R}^*)$$

sont encore valables.

Exercice 14. Le but est de démontrer que toute fonction qui est limite uniforme de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

Sur un sous-ensemble quelconque $E\subset\mathbb{R}$, on suppose donnée une suite de fonctions *bornées* $f_n\colon E\longrightarrow\mathbb{R}$, $n\geqslant 1$, qui converge uniformément vers une certaine fonction $f\colon E\longrightarrow\mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon>0 \quad \exists\,n_\varepsilon\in\mathbb{N} \quad \forall\,n\geqslant n_\varepsilon \quad \forall\,x\in E \quad \big|f_n(x)-f(x)\big|\leqslant\varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Montrer que pour tout $n\geqslant n_\varepsilon$:

$$\Big|\inf_E f_n-\inf_E f\Big|\;\leqslant\;\varepsilon \qquad\text{et}\qquad \Big|\sup_E f_n-\sup_E f\Big|\;\leqslant\;\varepsilon,$$

et en déduire que :

$$\inf_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_E f \qquad\text{et}\qquad \sup_E f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_E f.$$

On suppose dorénavant que $E=[a,b]$ avec $-\infty<a<b<\infty$ et on ajuste n_ε pour que :

$$n\geqslant n_\varepsilon \;\Longrightarrow\; \bigg(\forall\,x\in[a,b] \quad \big|f_n(x)-f(x)\big|\leqslant\frac{\varepsilon}{b-a}\bigg).$$

(c) Si Δ est une subdivision quelconque de $[a,b]$, montrer que pour tout $n\geqslant n_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n)-\varepsilon\;\leqslant\;\Sigma_\Delta(f)\;\leqslant\;\Sigma^\Delta(f)\;\leqslant\;\Sigma^\Delta(f_n)+\varepsilon.$$

(d) Montrer que f est Riemann-intégrable.

(e) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Montrer que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

(f) Montrer que la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_K$$

de l'ensemble :

$$K:=\big\{1,\ \tfrac{1}{2},\ \tfrac{1}{2^2},\ \tfrac{1}{2^3},\ \tfrac{1}{2^4},\ \tfrac{1}{2^5},\ \dots\big\}$$

est Riemann-intégrable mais n'est pas réglée.

Exercice 15. **(a)** Montrer qu'une fonction réglée $f\colon[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ admet toujours des limites à droite et à gauche en tout point $x_0\in[a,b]$.

(b) Montrer que la fonction $f\colon[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x)=\sin(1/x)$ pour $0<x\leqslant 1$ est Riemann-intégrable mais n'est pas réglée.

Exercice 16. Soit $f\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique :

$$f(\theta+2k\pi)=f(\theta) \qquad (\forall\,\theta\in\mathbb{R},\ \forall\,k\in\mathbb{Z}),$$

bornée :

$$M_{|f|}:=\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}|f(\theta)|\;<\;\infty,$$

et Riemann-intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions continues *et* 2π-périodiques :

$$f_n\colon\quad\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{C},$$

avec :

$$\sup_{\theta\in[-\pi,\pi]}|f_n(\theta)|\;\leqslant\;M_{|f|},$$

telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \big|f_n(\theta) - f(\theta)\big|\, d\theta.$$

Exercice 17. Soit une fonction réelle $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité $c \in [a,b]$ de f qui sont de *première espèce* au sens où f admet des limites à gauche et à droite en c, est un sous-ensemble de $[a,b]$ de cardinal au plus dénombrable.

Exercice 18. Montrer que l'oscillation à l'infini de la suite $n \longmapsto \cos n$ vaut 2.

Exercice 19. **(a)** Montrer que la fonction $x \longmapsto 1/x$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \longmapsto 0$ a une oscillation égale à ∞ en $x=0$, et une oscillation nulle ailleurs.

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sin(1/x)$ de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ prolongée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $0 \longmapsto 0$ a une oscillation égale à 2 en $x=0$, et une oscillation nulle ailleurs.

Exercice 20. **(a)** Montrer que la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \text{ est irrationnel,} \\ 1 & \text{lorsque } x = 0, \\ \dfrac{1}{q} & \text{lorsque } x = \dfrac{p}{q} \text{ est une fraction irréductible,} \end{cases}$$

est Riemann-intégrable. Indication: Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, construire une subdivision Δ de $[0,1]$ telle que $\Sigma^{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$. Une autre démonstration consiste à établir que f est limite uniforme de fonctions en escalier, et à appliquer l'Exercice 14.

(b) Utiliser cette fonction et la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par composition.

(c) Utiliser de même la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$ des rationnels de $[0,1]$ pour montrer que la Riemann-intégrabilité n'est pas stable par limite simple.

(d) Montrer directement que l'ensemble des points de discontinuité de f est de mesure 0.

Exercice 21. Le but est de donner une preuve alternative du Théorème 5.8. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable définie sur un intervalle borné compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit φ une fonction définie sur un segment contenant $f([a,b])$.

(a) Lorsque φ est 1-lipschitzienne, montrer que $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que toute fonction continue sur un segment borné de $\mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions 1-lipschitziennes. Indication: Approximer φ par des fonctions affines par morceaux.

(c) En déduire que si φ est continue, alors $\varphi \circ f$ est Riemann-intégrable.

Exercice 22. Sur l'intervalle $[0,1]$, pour $n \geqslant 1$ entier, soit la subdivision Δ dont les points sont $x_k := \frac{k}{n}$ pour $k = 0, 1, \dots, n$. Calculer les sommes de Darboux inférieure $\Sigma_{\Delta}(f)$ et supérieure $\Sigma^{\Delta}(f)$ pour la fonction $f(x) := x^2$. En déduire que $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$. Indication: Utiliser la formule $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 23. Sur l'intervalle $[1,2] \subset \mathbb{R}$, on considère la fonction $f\colon x \mapsto \frac{1}{x^2}$. Pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque, on note Δ_n la subdivision de $[1,2]$ équidistribuée en n intervalles tous de longueur $\frac{1}{n}$.

(a) Montrer que la somme de Darboux supérieure $\Sigma^{\Delta_n}(f)$ de f s'exprime comme :

$$\Sigma^{\Delta_n}(f) \,=\, n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)^2}.$$

(b) Établir les deux inégalités suivantes :

$$n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j)(n+j+1)} \,<\, \Sigma^{\Delta_n}(f) \,<\, n \sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{(n+j-1)(n+j)}.$$

(c) Montrer que :

$$\frac{1}{2} \,<\, \Sigma^{\Delta_n}(f) \,<\, \frac{n(n-2)}{n(2\,n-1)}.$$

Indication: Utiliser l'identité élémentaire :

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

(d) En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \Sigma^{\Delta_n}(f) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 24. Démontrer les trois résultats suivants :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \log 2; \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{(n+k)^2} = \frac{1}{2}; \tag{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=n}^{2\,n-1} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2}. \tag{c}$$

Exercice 25. Démontrer les trois résultats suivants :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2\,kn}} = \sqrt{3}-1; \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{2\,n} \frac{k}{k^2+n^2} = \frac{1}{2}\log 5; \tag{b}$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{n-k}{n^3+n^2\,k}} = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\pi}{2}-1. \tag{c}$$

Exercice 26. En utilisant les sommes de Riemann, calculer les limites des suites suivantes :

$$a_n := \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{1}{2\,n+3\,k}, \qquad b_n := \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \cos^2\!\left(\frac{k\,\pi}{n}\right), \qquad c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{n^2-k^2}}{n^2},$$

$$d_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \frac{\pi}{k}, \qquad e_n := \sum_{k=n}^{2\,n} \sin\!\left(\frac{\pi}{k}\right), \qquad f_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^3+k^3},$$

$$g_n := n^2 \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\frac{4\,k}{n^2}}}.$$

Exercice 27. Calculer les trois limites suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{\log\left(\frac{k}{n}\right)}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos\left(\frac{k\pi}{2}\,n\right)}{n}.$$

Exercice 28. Évaluer les limites des deux sommes de Riemann suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 \sin\left(\frac{k\,\pi}{n}\right); \tag{a}$$

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)^{1/n}. \tag{b}$$

Exercice 29. En utilisant les sommes de Riemann, calculer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \sin\!\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right).$$

Exercice 30. Peut-on définir $\int_0^\infty \cos x\,dx$ et $\int_{-1}^1 \frac{dt}{t}$ comme intégrales généralisées de Riemann ?

Exercice 31. Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_{-1/\pi}^{0} \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$ converge.

Exercice 32. Soient deux fonctions localement Riemann-intégrables $f, g \colon [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

- f est positive et décroissante sur $[0, \infty[$, avec $0 = \lim\limits_{x \to \infty} f(x)$;
- il existe une constante $0 \leqslant \mathrm{C} < \infty$ telle que :

$$\left| \int_0^{\mathrm{X}} g(x)\, dx \right| \leqslant \mathrm{C} \qquad\qquad (\forall\, \mathrm{X} \geqslant 0).$$

Démontrer alors que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_0^{\infty} f(x) g(x)\, dx$ converge.

Exercice 33. Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_1^{\infty} \frac{\sin(t^2 \cos t^2)}{t^2}\, dt$ converge absolument.

Exercice 34. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^{\alpha}\, (1-t)^{\beta}\, dt$ converge au sens généralisé de Riemann si et seulement si $\alpha > -1$ et $\beta > -1$.

Exercice 35. Montrer que l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{(\cos t)^{\alpha}}$ converge au sens généralisé de Riemann si et seulement si $\alpha < 1$.

Exercice 36. Soient les deux fonctions $f, g \colon [1, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définies par :

$$f(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \frac{\sin x}{\sqrt{x}} + \frac{\sin^2 x}{x}.$$

(a) Vérifier que $f(x) \sim g(x)$ lorsque $x \longrightarrow \infty$, que $f(x)$ change de signe une infinité de fois lorsque $x \longrightarrow \infty$, et que $g(x)$ est de même signe que $f(x)$ pour tout $x \geqslant \mathrm{X}$ avec $\mathrm{X} \gg 1$ assez grand.

(b) Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ converge.

(c) Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée $\int_1^{\infty} g(x)\, dx$ ne converge *pas*.

(d) Interpréter !

Exercice 37. Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue positive $f \in \mathscr{C}^0\big([a, b], \mathbb{R}_+\big)$. Montrer que l'on a :

$$\lim_{n \to \infty} \left(\int_a^b \big[f(x)\big]^n\, dx \right)^{1/n} = \max_{x \in [a,b]} f(x).$$

Exercice 38. Sur l'intervalle unité $[0, 1]$, soit une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Déterminer :

$$\lim_{n \to \infty} n \int_0^1 x^n\, f(x)\, dx.$$

Exercice 39. Pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 1$, calculer :

$$\int_0^{2\pi} \log\left(1 - 2\, x \cos\theta + x^2\right) d\theta.$$

Indication: Utiliser les sommes de Riemann après avoir remarqué que $1 - 2x\cos\theta + x^2 = \left|1 - x\, e^{i\,\theta}\right|^2$.

Exercice 40. Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction continue, où $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Montrer qu'il existe une subdivision $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ de $[a, b]$ telle que :

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt = \frac{1}{n} \int_a^b f(t)\, dt,$$

pour tout $k = 1, \ldots, n$.

(b) Retrouver la valeur de :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Exercice 41. Soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, où $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ est un segment compact. Pour $n \geqslant 1$ quelconque, montrer que la fonction :

$$F_n(x) := \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\, f(t)\, dt$$

est une *primitive* n*-ème* de f au sens où $\frac{d^n F_n}{dx^n} = f$.

Exercice 42. **[Deuxième formule de la moyenne dans un cas simple]** Sur un intervalle $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soient une fonction bornée Riemann-intégrable $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit une fonction $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe $\mathscr{C}^1$ décroissante :

$$g' \leqslant 0.$$

On se propose d'établir qu'il existe $a \leqslant c \leqslant b$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\, dx = g(a) \int_a^c f(x)\, dx + g(b) \int_c^b f(x)\, dx.$$

(a) Introduire la fonction de $x \in [a,b]$ définie par :

$$F(x) := \int_a^x f(t)\, dt,$$

et montrer que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(b)\, g(b) - \int_a^b F(x)\, g'(x)\, dx.$$

(b) En utilisant la première formule de la moyenne du Théorème 10.1, obtenir un réel intermédiaire $a \leqslant c \leqslant b$ tel que :

$$\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx = F(b)\, g(b) - F(c)\, \big[g(b) - g(a)\big].$$

(c) Conclure, et traiter aussi le cas où $g' \geqslant 0$.

Exercice 43. Soient $f, g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions bornées définies sur un segment compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ qui coïncident sauf en un nombre fini de points :

$$f(x) = g(x), \qquad\qquad (\forall\, x \in [a,b] \backslash \{c_1, \dots, c_N\}).$$

Montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si g l'est, et lorsqu'il en est ainsi, montrer l'égalité :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx.$$

Exercice 44. Sur un intervalle fermé $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction continue $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \sup_{x \in [a,b]} f(x).$$

Montrer que f est en fait une fonction constante.

Exercice 45. Sur l'intervalle unité fermé $[0,1] \subset \mathbb{R}$, soit une fonction continue $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\frac{1}{2} = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

Montrer qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 46. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

(a) Si $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction en escalier, montrer que la fonction produit $f\, g$ est Riemann-intégrable sur $[0,1]$.

(b) Si, pour *toute* fonction en escalier $g\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$0 = \int_0^1 f(x)\, g(x)\, dx,$$

montrer qu'en fait, la fonction f est nécessairement identiquement nulle.

Exercice 47. Soient trois nombres réels a, b, c avec $a \leqslant c < b$. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $g_n \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$g_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } x \in [c, c + 1/n], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Si $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx = f(c).$$

(b) Si $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante, montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\, g_n(x)\, dx = \lim_{\substack{x\to c \\ >}} f(x).$$

Exercice 48. Soit $(q_k)_{k=1}^{\infty}$ une énumération des nombres rationnels de $\mathbb{Q} \cap [0, 1[$, et soit $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels strictement positifs de somme :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = 1.$$

On définit la fonction $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $f(0) := 0$, et, en posant :

$$Q(x) := \big\{ k \geqslant 1 \colon\ q_k \in [0, x[\, \big\},$$

pour $x > 0$ par :

$$f(x) := \sum_{k \in Q(x)} a_k.$$

(a) Vérifier que $f(1) = 1$, et montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Montrer que f est discontinue en tout point rationnel de $[0, 1[$, mais qu'elle est continue en tout point irrationnel.

Exercice 49. **(a)** Soit $f \colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{\sin x}\right) & \text{lorsque } x \neq 0, \pi, 2\pi, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0, \pi, 2\pi. \end{cases}$$

Montrer que f est Riemann-intégrable.

(b) Soit $g \colon [0, 1/\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$g(x) := \begin{cases} \mathrm{signe}\big(\sin(1/x)\big) & \text{lorsque } x \neq 1/k\pi,\ \ k \in \mathbb{N}^*, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0 \text{ ou } x = 1/k\pi,\ \ k \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Montrer que g est Riemann-intégrable.

Exercice 50. **[Premier théorème de Dini]** Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions *continues* à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui *décroît* en tout point :

$$f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x) \qquad (\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, n \geqslant 1).$$

On suppose que ces f_n convergent simplement vers une certaine fonction-limite :

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \in \mathbb{R} \qquad (\forall\, x \in [a,b]),$$

à valeurs finies qui est *continue*, et l'objectif est de démontrer que la convergence est en fait uniforme.

(a) En remplaçant $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ par $\big(f_n - f\big)_{n=1}^{\infty}$, montrer que l'on peut supposer que $f_n \geqslant 0$ sur $[a, b]$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Pour $\varepsilon > 0$, montrer que les ensembles :

$$V_n(\varepsilon) := \big\{ x \in [a, b] \colon\ f_n(x) < \varepsilon \big\},$$

sont ouverts et *emboîtés*, au sens où $V_n(\varepsilon) \subset V_{n+1}(\varepsilon)$ pour tout $n \geqslant 1$.

(c) Montrer que :

$$[a,b] \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n(\varepsilon).$$

(d) Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que $V_{\mathrm{N}}(\varepsilon) = [a,b]$.

(e) Conclure, et traiter aussi le cas d'une suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ qui *croît* en tout point.

Exercice 51. **[Deuxième théorème de Dini]** Sur un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ non nécessairement continues qui sont toutes décroissantes sur $[a,b]$:

$$a \,\leqslant\, x' \,\leqslant\, x'' \,\leqslant\, b \;\;\Longrightarrow\;\; f_n(x') \,\geqslant\, f_n(x'') \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1)}.$$

On suppose que ces f_n convergent simplement vers une certaine fonction-limite :

$$f(x) \,:=\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) \,\in\, \mathbb{R} \qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in [a,b])},$$

à valeurs finies qui est *continue*, et l'objectif est de démontrer que la convergence est en fait uniforme.

(a) Montrer que f est décroissante sur $[a,b]$.

(b) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe une décomposition de l'intervalle :

$$\Delta \,:=\, \Delta(\varepsilon) \,:=\, \big\{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_{\nu-1} < c_\nu = b\big\}$$

telle que :

$$0 \,\leqslant\, f(c_{\kappa-1}) - f(c_\kappa) \,\leqslant\, \varepsilon \qquad {\scriptstyle (\forall\, 1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)}.$$

(c) Montrer pour $x \in [a,b]$ que si $c_{\kappa-1} \leqslant x \leqslant c_\kappa$ pour un certain κ, on a :

$$f_n(c_\kappa) - f(c_\kappa) - \varepsilon \,\leqslant\, f_n(x) - f(x) \,\leqslant\, f_n(c_{\kappa-1}) - f(c_{\kappa-1}) + \varepsilon.$$

(d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \,\geqslant\, \mathrm{N}(\varepsilon) \;\;\Longrightarrow\;\; \big|f_n(c_\kappa) - f(c_\kappa)\big| \,\leqslant\, \varepsilon \qquad {\scriptstyle (\forall\, 1 \leqslant \kappa \leqslant \nu)}.$$

(e) Conclure, et traiter aussi le cas d'une suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ qui sont toutes croissantes sur $[a,b]$.

Exercice 52. Soit $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ un segment compact, soit $f_n \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une suite de fonctions dérivables dont les dérivées $f_n' \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ sont toutes Riemann-intégrables. On suppose que $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ converge simplement, et que $f_n' \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ converge uniformément, où $g \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue. Montrer que f est continûment différentiable sur $[a,b]$ et que $f' = g$.

Exercice 53. **(a)** Étant donné un segment compact $[c,d] \Subset \mathbb{R}$ et une fonction bornée quelconque $g \colon [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$, montrer que :

$$\sup_{x,\,y\,\in[c,d]} \big|g(x) - g(y)\big| \,=\, \sup_{[c,d]} g - \inf_{[c,d]} g.$$

Cette quantité commune est appelée l'*oscillation* de g sur $[c,d]$ et est notée :

$$\underset{[c,d]}{\mathrm{osc}}\, g.$$

(b) Soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée sur un intervalle $[a,b] \Subset \mathbb{R}$ muni d'une subdivision :

$$\Delta = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}.$$

Pour $k = 1, \dots, n$, on note $I_k := [x_{k-1}, x_k]$, et on rappelle que :

$$\mathrm{pas}(\Delta) := \max_{1 \leqslant k \leqslant n} \big|I_k\big|.$$

Étant donné un nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit quelconque, soient :

$$A_\varepsilon := \Big\{k \in \{1, \dots, n\} \colon\, \underset{I_k}{\mathrm{osc}}\, f := \sup_{I_k} f - \inf_{I_k} f \,\geqslant\, \varepsilon\Big\},$$

$$B_\varepsilon := \Big\{k \in \{1, \dots, n\} \colon\, \underset{I_k}{\mathrm{osc}}\, f \,<\, \varepsilon\Big\},$$

de telle sorte que :

$$A_\varepsilon \cup B_\varepsilon = \{1, \dots, n\} \qquad \text{et} \qquad A_\varepsilon \cap B_\varepsilon = \emptyset.$$

Soit enfin la somme des longueurs des intervalles sur lesquels l'oscillation de f est 'au moins ε-grande' :

$$s_\varepsilon(\Delta) := \sum_{k \in A_\varepsilon} \big|I_k\big|.$$

Montrer alors le Théorème originalement dû à Riemann d'après lequel la fonction f est Riemann-intégrable *si et seulement si*, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, cette somme $s_\varepsilon(\Delta) \longrightarrow 0$ tend vers zéro lorsque $\mathsf{pas}(\Delta) \longrightarrow 0$.

Exercice 54. On peut construire des fonctions Riemann-intégrables sur $[0,1]$ qui sont discontinues en un ensemble dense de points comme suit.

(a) Soit la fonction f définie par $f(x) := 0$ lorsque $x < 0$ et $f(x) := 1$ lorsque $x \geqslant 0$. On choisit une suite dénombrable quelconque $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ de points de $[0,1]$ qui est dense. Montrer que la fonction :

$$F(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\, f\big(x - r_n\big)$$

est Riemann-intégrable, et que tous les r_n en sont des points de discontinuité. Indication: Cette fonction F est bornée et monotone.

(b) Soit maintenant la fonction $g(x) := \sin \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$ avec $g(0) := 0$. Toujours avec $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ dense dans $[0,1]$, montrer que la fonction :

$$G(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}\, g\big(x - r_n\big)$$

est Riemann-intégrable, que tous les r_n en sont des points de discontinuité, mais qu'elle n'est monotone sur aucun sous-intervalle ouvert non vide de $[0,1]$. Indication: Utiliser le fait que $\frac{1}{3^k} > \sum_{n \geqslant k+1} \frac{1}{3^n}$ pour tout $k \geqslant 1$.

(c) L'exemple original présenté par Riemann dans son mémoire d'habilitation de 1854 était la fonction :

$$R(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

où $(x) := x$ lorsque $x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ et où (x) est prolongée à $\mathbb{R}$ par 1-périodicité : $(x+1) = (x)$. On peut montrer que R est *discontinue* en tous les points de la forme $\frac{m}{2n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ impair, avec $n \in \mathbb{N}^*$, et avec m et n premiers entre eux, et qu'elle est *continue* en tous les autres points de $\mathbb{R}$.

Théorème de Borel-Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Ensembles compacts et ensembles précompacts

Définition 1.1. Un *espace métrique* (E, d) est un ensemble E muni d'une *fonction distance :*

$$\begin{aligned} d\colon \quad E \times E &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\longmapsto d(x, y), \end{aligned}$$

sujette à satisfaire les trois axiomes suivants :

(i) Symétrie : $d(x, y) = d(y, x) \geqslant 0$ pour tous $x, y \in E$;

(ii) Vraie distance : $d(x, y) = 0$ seulement lorsque $x = y$;

(iii) Inégalité triangulaire : Pour tous $x, y, z \in E$:

$$d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z).$$

Dans un espace métrique, les ouverts-modèles sont les *boules ouvertes :*

$$B(x, r) := \big\{ y \in E \colon\ d(x, y) < r \big\},$$

de rayons variés $r > 0$ centrées en des points quelconques $x \in E$.

Généralement, un sous-ensemble

$$\mathscr{O} \subset E,$$

est un *ouvert* si en chacun de ses points, on peut centrer une boule ouverte de rayon assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans $\mathscr{O}$.

Définition 1.2. Un espace métrique (E, d) est dit *compact* s'il satisfait la propriété, dite *de Bolzano-Weierstrass*, d'après laquelle, si on se donne une suite quelconque :

$$\big(x_n \big)_{n=1}^{\infty}$$

de points $x_n \in E$, on peut toujours *extraire* au moins une sous-suite :

$$\big(x_{n_k} \big)_{k=1}^{\infty} \qquad\qquad \text{avec } 1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots,$$

qui admet une limite :

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} =: x_\infty \in E$$

appartenant encore à E.

Par exemple, on démontre que tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est compact. En dimension quelconque $d \geqslant 1$, on démontre aussi que tout sous-ensemble fermé borné $K \subset \mathbb{R}^d$ est compact, et réciproquement d'ailleurs, que les compacts de $\mathbb{R}^d$ ne sont autres que les sous-ensembles fermés et bornés.

Définition 1.3. Un espace métrique (E,d) est dit *précompact* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \geqslant 1$ et des points :

$$x_1, \dots, x_N \in E,$$

tels que E est recouvert par les N boules ouvertes de rayon ε centrées en ces points :

$$E = B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_N, \varepsilon).$$

Or la langue française nous dit que tout ce qui est « *pré-* » — par exemple un préliminaire qui précède prématurément le présage des préposés concernant l'examen préparatoire — se situe avant la chose. Alors pour garantir que notre belle langue française ne se sente pas froissée, on a heureusement une :

Proposition 1.4. *Tout espace métrique compact* (E,d) *est précompact.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que E n'est recouvert par *aucune* famille finie de boules ouvertes de rayon ε.

Partant donc d'un point quelconque $x_1 \in E$, il existe un point $x_2 \in E$ hors de la boule $B(x_1, \varepsilon)$, et ainsi de suite indéfiniment :

$$\begin{aligned}
&\exists\, x_2 \in E \big\backslash B(x_1,\varepsilon),\\
&\exists\, x_3 \in E \big\backslash \big[B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon)\big],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\exists\, x_{n+1} \in E \big\backslash \big[B(x_1,\varepsilon) \cup B(x_2,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n,\varepsilon)\big],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Mais comme E est compact, de cette suite infinie $\big(x_n\big)_{n=1}^{\infty}$, on doit pouvoir extraire au moins une certaine sous-suite :

$$\big(x_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui converge vers un certain point $x_\infty \in E$:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = x_\infty.$$

En particulier, cette sous-suite doit être de Cauchy puisqu'elle converge :

$$\exists\, K = K_\varepsilon \gg 1 \quad \Big(k \geqslant K \implies d\big(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\Big).$$

Mais comme pour tous les entiers compris entre n_k et $n_{k+1} > n_k$, à savoir les entiers :

$$n_k + 1,\ n_k + 2,\ \cdots,\ n_{k+1} - 1,\ n_{k+1},$$

on a su choisir choisir :

$$\begin{aligned}
&x_{n_k+1} \notin B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_k},\varepsilon),\\
&x_{n_k+2} \notin B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_k},\varepsilon) \cup B(x_{n_k+1},\varepsilon),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&x_{n_{k+1}} \notin B(x_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup \underline{B(x_{n_k},\varepsilon)} \cup B(x_{n_k+1},\varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_{n_{k+1}-1},\varepsilon),
\end{aligned}$$

il vient que la distance entre x_{n_k} et $x_{n_{k+1}}$, *lequel n'appartient pas à* $B(x_{n_k}, \varepsilon)$, restait *de facto* toujours supérieure à ε :

$$d\big(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}\big) \,\geqslant\, \varepsilon,$$

ce qui est la contradiction recherchée. □

Proposition 1.5. *Dans un espace métrique compact* (E, d)*, soit une famille d'ouverts :*

$$\big(\mathscr{O}_i\big)_{i \in I}$$

paramétrée par un ensemble quelconque d'indices I*, qui le recouvrent complètement :*

$$E \,=\, \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i.$$

Alors il existe un rayon strictement positif $r > 0$ *assez petit pour que toute boule ouverte de rayon* r *soit contenue dans au moins un ouvert de la famille :*

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, i = i_x \in I \quad B(x, r) \,\subset\, \mathscr{O}_i.$$

Démonstration. Raisonnons encore par l'absurde, et supposons au contraire que pour tout rayon arbitrairement petit $r > 0$ de la forme :

$$r = \frac{1}{n},$$

avec $n \geqslant 1$ entier, il existe un certain mauvais point :

$$x_n \,\in\, E,$$

autour duquel la boule de rayon $\frac{1}{n}$ n'est contenue dans *aucun* ouvert de la famille :

$$B\big(x_n, \tfrac{1}{n}\big) \,\not\subset\, \mathscr{O}_i, \tag{1.6}$$

quel que soit $i \in I$.

Bien entendu, la compacité de E nous permet alors d'extraire de ces x_n une certaine sous-suite :

$$\big(x_{n_k}\big)_{n=1}^{\infty}$$

convergente :

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} =: x_\infty \in E.$$

Mais alors, puisque E est recouvert par les ouverts $\mathscr{O}_i$, ce point-limite appartient à au moins l'un d'entre eux :

$$\exists\, i_\infty \in I, \qquad \text{tel que} \qquad x_\infty \,\in\, \mathscr{O}_{i_\infty}.$$

Or par ouverture de $\mathscr{O}_{i_\infty}$, il existe $\delta > 0$ assez petit pour que :

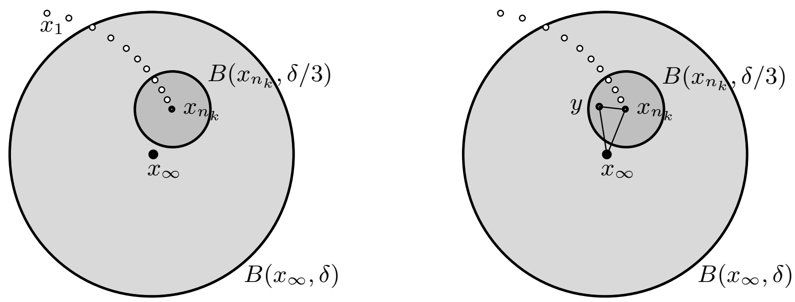
$$B(x_\infty, \delta) \,\subset\, \mathscr{O}_{i_\infty}.$$

Maintenant, nous pouvons choisir un entier $K \gg 1$ assez grand pour avoir simultanément :

$$k \geqslant K \implies \begin{cases} \dfrac{1}{n_k} \,\leqslant\, \dfrac{\delta}{3}, \\[2ex] d\big(x_{n_k},\, x_\infty\big) \,\leqslant\, \dfrac{\delta}{3}. \end{cases}$$

Pour de tels indices $k \geqslant K$, l'inégalité triangulaire :

$$d\big(y, x_\infty\big) \,\leqslant\, d\big(y, x_{n_k}\big) + d(x_{n_k}, x_\infty)$$



permet alors de vérifier — exercice mentalo-visuel — que :

$$\begin{aligned} B\big(x_{n_k},\, \tfrac{1}{n_k}\big) \;&\subset\; B\big(x_{n_k},\, \tfrac{\delta}{3}\big) \\ &\subset\; B(x_\infty,\, \delta) \\ &\subset\; \mathscr{O}_{i_\infty}, \end{aligned}$$

ce qui contredit manifestement le choix des x_n fait par (1.6) ci-dessus ! □

Nous pouvons maintenant énoncer un théorème tellement fondamental qu'il est utilisé des milliers de fois dans tous les exercices d'Analyse en L1, en L2, en L3, en M1, en M2, sur la Lune, et sur Mars !

Théorème 1.7. [Borel-Lebesgue] *De tout recouvrement d'un espace métrique compact* (E, d) :

$$E \;=\; \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i,$$

par une famille quelconque *d'ouverts non vides :*

$$\mathscr{O}_i \subset E,$$

indexée par un ensemble I *de cardinal éventuellement arbitrairement grand, on peut* extraire *un sous-recouvrement* fini*, à savoir il existe un nombre fini* $n \geqslant 1$ *d'indices :*

$$i_1, \dots, i_n \;\in\; I$$

tels que, en fait :

$$E \;=\; \underbrace{\mathscr{O}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i_n}}_{\text{un nombre fini d'ouverts suffit en fait pour recouvrir}}.$$

Démonstration. Soit donc $\big(\mathscr{O}_i\big)_{i \in I}$ un tel recouvrement ouvert de E.

La Proposition 1.5 fournit un rayon $r > 0$ tel que toute boule ouverte $B(x, r)$ de rayon r et de centre quelconque $x \in E$ est contenue dans au moins un ouvert $\mathscr{O}_i$:

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, i(x) \in I \quad \text{tel que} \quad B(x, r) \;\subset\; \mathscr{O}_{i(x)}.$$

Mais de surcroît, avec ce même rayon $r > 0$, la précompacité de E assure d'après la Proposition 1.4 que parmi l'infinité de boules :

$$\big(B(x, r)\big)_{x \in E},$$

un nombre fini suffit en fait pour recouvrir E, à savoir il existe un nombre fini $n \geqslant 1$ de points $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que :

$$E \;=\; B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r).$$

Alors il devient tout à fait clair que :

$$\begin{aligned} E \,&=\, B(x_1, r) \cup \cdots \cup B(x_n, r) \\ &\subset\, \mathscr{O}_{i(x_1)} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i(x_n)}, \end{aligned}$$

est effectivement recouvert par une sous-famille finie d'ouverts ! □

En exercice, nous proposons d'établir la réciproque, classique, de ce théorème.

2. Paradoxes historico-épistémologiques

3. Exercices

Exercice 1. On dit qu'un espace métrique (E, d) *satisfait la propriété de Borel-Lebesgue* lorsque, de tout recouvrement :

$$E = \bigcup_{i \in I} \mathscr{O}_i$$

par des ouverts $\mathscr{O}_i \subset E$, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert *fini :*

$$E = \mathscr{O}_{i_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{i_n}.$$

Montrer qu'un tel espace est toujours nécessairement compact. Indication: Montrer d'abord qu'une intersection dénombrable de sous-ensembles fermés non vides $F_n \supset F_{n+1}$ emboîtés les uns dans les autres de manière décroissante est au final non vide :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \,\neq\, \emptyset.$$

Partant d'une suite quelconque $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de points $x_k \in E$, introduire ensuite les fermés :

$$F_n := \overline{\big\{x_k \in E \colon\, k \geqslant n\big\}} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

et montrer que tout point :

$$x_\infty \,\in\, \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$$

est limite d'une certaine sous-suite $(x_{k_l})_{l=1}^{\infty}$.

Exercice 2. EE

Intégrale de Kurzweil-Henstock : rudiments

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Problème fondamental de l'intégration

Sur un intervalle compact :

$$[a,b] \Subset \mathbb{R},$$

soit une fonction réelle :

$$F\colon \quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

qu'on suppose seulement et uniquement *dérivable en tout point :*

$$\forall\, x \in [a,b] \qquad \exists\, F'(x) := \lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h},$$

sans autre hypothèse particulière, et notamment, sans s'imaginer que la fonction dérivée $F'(x)$ est continue sur $[a,b]$, ni même bornée, d'ailleurs.

Intuitivement et moralement, on s'imagine naturellement que *l'intégration doit être l'opération exactement inverse de la dérivation*.

Par conséquent, toute théorie de l'intégration digne de ce nom se doit de pouvoir affirmer que :

$$\int_a^b F'(x)\,dx \;=\; F(b)-F(a).$$

Bien entendu, une telle égalité naturelle est vraie lorsque F' est une fonction bornée Riemann-intégrable — grâce à la théorie qui vient d'être traitée exhaustivement dans le chapitre précédent ! — *mais la dérivée F' d'une fonction dérivable quelconque n'a aucune raison d'être continue, bornée, voire Riemann-intégrable*.

Exemple 1.1. Soit la fonction $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \; x=0, \\ x^2 \cos\big(\frac{1}{x^2}\big) & \text{lorsque } \; 0<x\leqslant 1. \end{cases}$$

Clairement, F est dérivable en tout point x tel que $0<x\leqslant 1$. Mais elle est aussi dérivable en $x=0$ de dérivée nulle :

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{F(h)-F(0)}{h} \;&=\; \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{h^2 \cos\big(\frac{1}{h^2}\big)}{h} \\ &=\; \lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} h \cos\big(\tfrac{1}{h^2}\big) \\ &=\; 0, \end{aligned}$$

puisque la fonction cosinus est majorée par 1 en valeur absolue. En somme, la fonction dérivée vaut :

$$F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ 2x \cos\big(\frac{1}{x^2}\big) - \frac{2}{x} \sin\big(\frac{1}{x^2}\big) & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

mais on voit alors par cette expression que F' est sauvagement non continue en $x = 0$, puisque :

$$\underbrace{2x \cos\big(\tfrac{1}{x^2}\big)}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{quand } x \to 0}} - \underbrace{\tfrac{2}{x} \sin\big(\tfrac{1}{x^2}\big)}_{\substack{\text{oscille} \\ \text{sauvagement} \\ \text{entre } -\infty \text{ et } +\infty}}.$$

Pour une telle fonction pathologique qui est la dérivée d'une vraie fonction fringante et en bonne santé, on aimerait quand même bien pouvoir écrire et reconstituer :

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_0^1}_{\substack{\text{quelle} \\ \text{intégrale} \\ \text{iventer ?}}} F'(x)\, dx \ &= \ F(1) - F(0) \\ &= \ \cos(1). \end{aligned}$$

Surgit donc le problème de savoir si on peut inventer une théorie plus puissante que celle de Riemann dans laquelle la véracité de cette formule $\int F' = F$ serait pleinement justifiée. Un tel objectif est plus ambitieux que de se poser seulement la question de déterminer, avec une théorie établie comme celle de Riemann, pour quelle classe de fonctions la formule $\int F' = F$ sera valide.

La théorie de l'intégrale de Lebesgue — point d'orgue de ce cours — étendra considérablement la véracité de cette formule, mais sans couvrir vraiment toutes les fonctions dérivées F' d'une fonction F. Toutefois, la théorie de Lebesgue résoudra de multiples autres questions, ce qui garantit la centralité de son intérêt mathématique, et explique pourquoi elle est enseignée partout dans le monde terrestre sublunaire.

À vrai dire, c'est une autre théorie, dite de Kurzweil-Henstock, qui, en raffinant quelque peu celle de Riemann, va répondre pleinement à la question de savoir comment rendre universellement vraie la formule en question :

$$\int_a^b F'(x)\, dx = F(b) - F(a).$$

Il y a là un fait philosophique général : tandis que la théorie de Lebesgue embrasse simultanément plusieurs questions d'invention conceptuelle — notamment la question d'attribuer une mesure aux sous-ensembles de $\mathbb{R}$ —, celle de Kurzweil-Henstock se concentre à l'origine sur une question unique, et donc — fait philosophique concernant les mathématiques — les deux théories s'avèrent n'être pas complètement équivalentes, et des divergences essentiellement mineures se manifestent inévitablement.

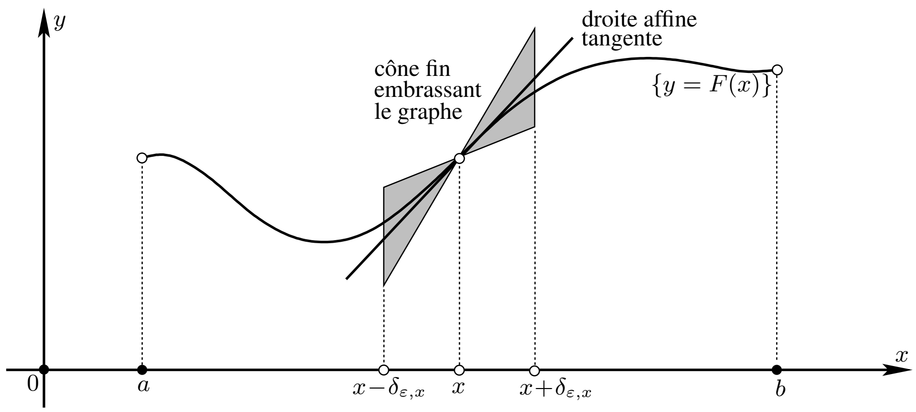
Maintenant, pour une fonction F, que veut dire au juste « *être dérivable* » ? Et surtout, par quel concept nouveau d'intégration pourrait-on « *récupérer* » la fonction en intégrant sa dérivée ?

Dire qu'en un point quelconque $x \in [a, b]$, la limite :

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} =: F'(x),$$

existe, c'est dire précisément avec des quantificateurs que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_{\varepsilon,x} > 0 \quad \bigg(\forall\, h \quad |h| \leqslant \delta_{\varepsilon,x} \implies \bigg|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - F'(x)\bigg| \leqslant \varepsilon\bigg).$$



Géométriquement, donc, au-dessus du très petit intervalle :

$$\big[x - \delta_{\varepsilon,x},\ x + \delta_{\varepsilon,x}\big],$$

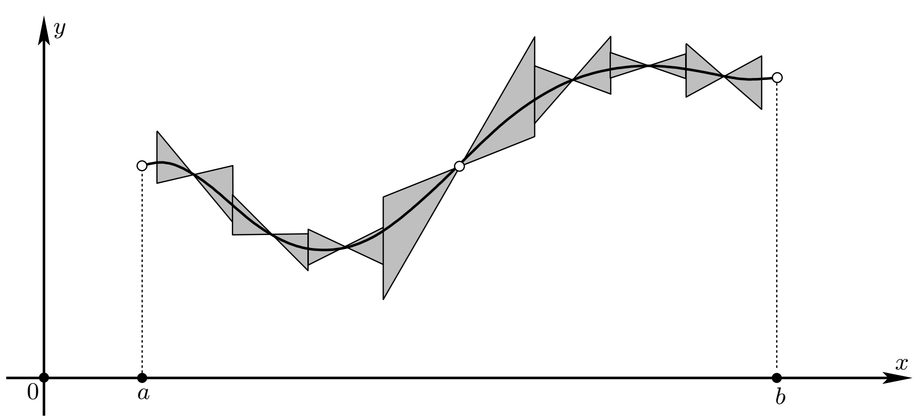
le graphe de F est contenu dans un cône fin resserré de manière très étroite autour de la tangente en $(x, F(x))$ à la courbe droite d'équation :

$$Y - f(x) = F'(x)\big(X - x\big),$$

à savoir (exercice) le cône défini par les inéquations :

$$\begin{aligned} \big|X - x\big| &\leqslant \delta_{\varepsilon,x}, \\ \bigg|\frac{Y - F(x)}{X - x} - F'(x)\bigg| &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Intégrer la fonction dérivée $F'(x)$ et retrouver $F(b) - F(a)$ revient donc géométriquement à suivre pas à pas une canalisation par des cônes.



Pourvu que les cônes approximent suffisamment bien les morceaux du graphe, on espère intuitivement qu'en partant de $F(a)$ à gauche, la canalisation avec erreurs contrôlées redonnera $F(b)$ à $\pm\varepsilon$ près.

Plus précisément, on espère qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ et une subdivision :

$$\big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle qu'en sommant les erreurs :

$$\big|F(x_k + h_k) - F(x_k) - h_k\, F'(x_k)\big| \leqslant \varepsilon\, |h_k|,$$

et en effectuant une somme téléscopique agréable, on obtienne au final :

$$\big|F(b) - F(a)\big| \leqslant \varepsilon \underbrace{\sum_k |h_k|}_{\approx\, b-a},$$

ce qui montrerait que la valeur $F(b)$ peut être rendue arbitrairement proche de $F(a)$.

Mais afin de réaliser cela, il faut s'arranger pour que la taille des intervalles sur lesquels on dispose de telles inégalités soit assez grande pour contenir les deux points voisins immédiats de la subdivision.

Non seulement cela va être effectivement possible, mais encore cela va nous faire découvrir des subdivisions plus générales et plus adaptées que celles que nous avons vues dans la théorie de Riemann.

2. Partitions finies pointées, et jauges

Il est temps maintenant de présenter les concepts fondamentaux de la théorie de Kurzweil-Henstock.

Étant donné un intervalle quelconque $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec :

$$-\infty < a < b < \infty,$$

on va considérer des subdivisions quelconques dont les segments sont munis d'un point de référence.

Définition 2.1. Une famille finie de sous-intervalles fermés :

$$I_1, \dots, I_n \subset [a, b]$$

est une *partition finie* de $[a, b]$ si :

$$[a, b] = \bigcup_{1 \leqslant k \leqslant n} I_k,$$

et si les intersections de segments deux à deux sont soit vides soit réduites à un point :

$$\mathsf{Card}\,\big(I_{k_1} \cap I_{k_2}\big) = 0 \ \text{ ou } \ 1 \qquad\qquad (1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant n).$$

Autrement dit, après réordonnancement, les intervalles $I_1, \dots, I_n$ remplissent $[a, b]$ lorsqu'on les met bout à bout l'un à la suite de l'autre.

Définition 2.2. Une *partition finie pointée* de $[a, b]$ est une partition finie $I_1, \dots, I_n$ dont chaque intervalle :

$$I_k \ni \xi_k$$

est muni d'un point distingué ξ_k qui lui appartient.

Bien entendu, à toute partition finie pointée est associée la *somme de Riemann-Kurzweil-Henstock :*

$$\sum_{k=1}^{n} \big|I_k\big|\, f(\xi_k),$$

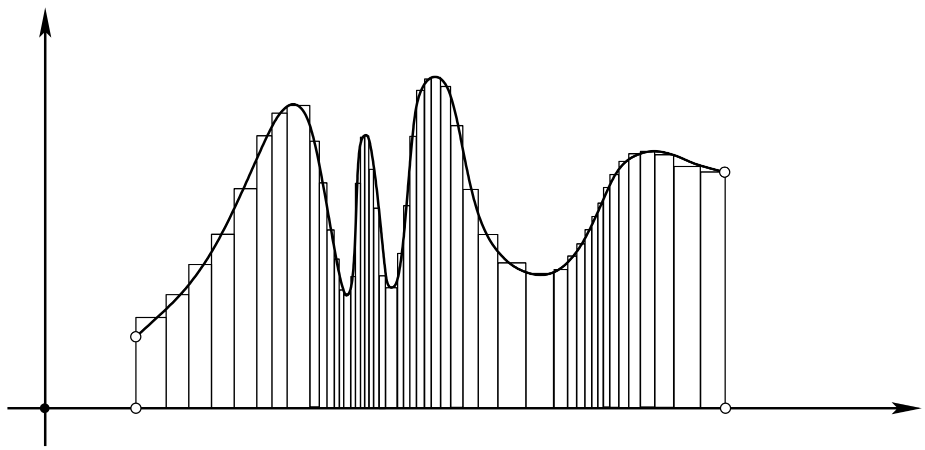
qui n'est d'ailleurs rien d'autre que ce que nous avons appelé *somme de Riemann* dans le chapitre précédent.

Contrairement à ce que nous avons requis dans la théorie de Riemann, nous demanderons en général non seulement que le pas des subdivisions :

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n} |I_k| \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0$$

tende vers zéro, mais aussi, *nous adapterons librement la finesse des subdivisions à chaque fonction que nous souhaitons intégrer en concentrant plus de points là où cela est nécessaire*.

On s'imaginera donc que dans certaines zones de l'intervalle $[a, b]$, le pas se resserrera plus vite vers zéro que dans d'autres zones.



Pour conceptualiser une notion de finesse variable des subdivisions, introduisons alors le concept de *jauge*, qui est une application réelle à valeurs strictement positives servant à exercer un contrôle sur les intervalles d'une partition finie pointée.

Définition 2.3. Une application quelconque :

$$\delta\colon \quad [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$$

est appelée une *jauge* sur $[a, b]$.

La valeur d'une jauge en un point quelconque $x \in [a, b]$ est donc finie et strictement positive :

$$0 < \delta(x) < \infty,$$

ce qui est important.

Définition 2.4. Étant donné une jauge $\delta\colon [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$, on dit qu'une partition finie pointée $\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est δ-*fine* si ses intervalles sont embrassés par δ au sens où :

$$\xi_k \in I_k \subset \big[\xi_k - \delta(\xi_k),\ \xi_k + \delta(\xi_k)\big].$$

3. Intégrale de Kurzweil-Henstock des fonctions dérivées d'une fonction

Un premier lemme réalise de manière élémentaire la construction de partitions subordonnées à une jauge, pièce du puzzle que nous avons vue plus haut comme étant nécessaire.

Lemme 3.1. [Cousin] *Étant donné une jauge quelconque $\delta\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe toujours (au moins) une partition finie pointée de $[a, b]$ qui est δ-fine.*

Démonstration. Raisonnons par contradiction, à savoir supposons par l'absurde que l'intervalle $[a,b]$ n'admette pas de partition finie pointée δ-fine.

Effectuons alors une *dichotomie* de $[a,b]$ (littéralement en Grec « *couper en deux* ») :

$$[a,b] = \big[a,\ \tfrac{a+b}{2}\big] \bigcup \big[\tfrac{a+b}{2},\ b\big],$$

et observons que pour une raison purement logique, si chacun de ces deux sous-intervalles admettait une partition finie pointée δ-fine, alors la réunion simple de ces deux dernières constituerait une partition finie δ-fine sur $[a,b]$; par conséquent, au moins l'un de ces deux sous-intervalles n'admet pas de partition pointée δ-fine ; notons alors $[a_1,b_1]$ un tel sous-intervalle de longueur $\frac{b-a}{2}$.

Par récurrence, pour tout entier $k \geqslant 2$, on trouve alors un sous-intervalle :

$$[a_k,\ b_k] \subset [a,b]$$

de longueur :

$$\frac{b-a}{2^k}$$

contenu dans le précédent $[a_k,b_k] \subset [a_{k_1},b_{k-1}]$ qui n'admet toujours pas de partition finie pointée δ-fine. Prenons alors gaillardement l'intersection infinie de tous ces intervalles emboîtés :

$$\bigcap_{k\geqslant 1} [a_k,b_k] =: x_\infty,$$

laquelle consiste, d'après un théorème censé être connu au niveau où nous en sommes, en un unique point $x_\infty \in [a,b]$.

Mais alors puisqu'en ce point on a :

$$\delta(x_\infty) > 0,$$

il suffit en fait de choisir $k \gg 1$ assez grand au sens où :

$$\delta(x_\infty) \geqslant \frac{b-a}{2^k},$$

pour assurer que :

$$x_\infty \in [a_k,b_k] \subset \big[x_\infty - \delta(x_\infty),\ x_\infty + \delta(x_\infty)\big],$$

ce qui apporte manifestement une contradiction conclusive en montrant que $[a_k,b_k]$ admet une partition pointée δ-fine réduite au seul intervalle $[a_k,b_k]$! □

Nous pouvons maintenant introduire la définition principale.

Définition 3.2. [Intégrabilité au sens de Kurzweil-Henstock] Une fonction réelle :

$$f\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dite *intégrable au sens de Kurzweil-Henstock* d'intégrale le nombre réel noté :

$$\int_a^b f,$$

si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge :

$$\delta_\varepsilon\colon\quad [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que pour toute partition finie pointée de $[a,b]$:

$$\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n},$$

qui est δ_ε-fine :

$$\xi_k \,\in\, I_k \,\subset\, \big[\xi_k - \delta_\varepsilon(\xi_k),\, \xi_k + \delta_\varepsilon(\xi_k)\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock associée satisfait :

$$\bigg|\sum_{k=1}^n \big|I_k\big|\, f(\xi_k) - \int_a^b f\bigg| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

L'*intégrabilité au sens de Riemann* correspond alors au choix le plus simple d'une jauge constante, car en effet, on vérifie (exercice) la reformulation suivante.

Théorème 3.3. *Une fonction réelle $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable d'intégrale le nombre réel $\int_a^b f(x)\,dx$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une jauge* constante $[a,b] \longrightarrow \{\delta_\varepsilon\}$ *avec $\delta_\varepsilon > 0$ telle que pour toute subdivision :*

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

de points centraux :

$$\xi_k := \tfrac{x_k + x_{k-1}}{2} \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

satisfaisant :

$$[x_{k-1}, x_k] \subset \big[\xi_k - \delta_\varepsilon,\ \xi_k + \delta_\varepsilon\big]$$

on a :

$$\bigg|\sum_{k=1}^n \big(x_k - x_{k-1}\big)\, f(\xi_k) - \int_a^b f(x)\,dx\bigg| \,\leqslant\, \varepsilon. \qquad \square$$

Mais notre objectif principal était de démontrer un résultat annoncé plusieurs fois, résultat par lequel s'achèvera ce très bref chapitre.

Théorème 3.4. *La dérivée F' d'une fonction $F\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable en tout point $x \in [a,b]$ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock et elle satisfait :*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

Démonstration. À un nombre réel arbitrairement petit $\varepsilon > 0$, il est à présent intuitivement clair qu'on doit associer la jauge :

$$\delta_\varepsilon(x) := \delta_{\varepsilon,x},$$

qui exprime précisément la *dérivabilité* de F en tout point $x \in [a,b]$:

$$\text{(3.5)} \qquad \forall\, h \quad |h| \leqslant \delta_\varepsilon(x) \implies \big|F(x+h) - F(x) - h\,F'(x)\big| \,\leqslant\, |h|\,\varepsilon.$$

Comme dans la Définition 3.2, soit une partition finie pointée quelconque :

$$\big(I_k \ni \xi_k\big)_{1\leqslant k\leqslant n}$$

qui est δ_ε-fine. Grâce au Lemme 3.1 de Cousin, il en existe au moins une.

Précisément, si les intervalles I_k sont ordonnées pour apparaître bout à bout dans un ordre croissant, et si on donne un nom à leurs extrémités :

$$I_k =: \big[x_{k-1}, x_k\big] \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,=\,1\,\cdots\,n)},$$

avec donc :

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

alors on a :

$$\xi_k \in \big[x_{k-1}, x_k\big].$$

Maintenant, il s'agit de faire voir que la différence entre $F(b) - F(a)$ et la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock pour F' peut être rendue arbitrairement petite, ce que nous effectuons sans sourciller à coup de somme téléscopique et d'inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}
\bigg|F(b) - F(a) - \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\bigg| &= \bigg|\sum_{k=1}^{n} \big\{F(x_k) - F(x_{k-1})\big\} - \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big|F(x_k) - F(x_{k-1}) - \big(x_k - x_{k-1}\big)\, F'(\xi_k)\Big| \\
\text{[Insérer } \xi_k\text{]} \qquad &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big|F(x_k) - F(\xi_k) - (x_k - \xi_k)\, F'(\xi_k)\Big| + \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n} \Big|F(\xi_k) - F(x_{k-1}) - (\xi_k - x_{k-1})\, F'(\xi_k)\Big| \\
\text{[Utiliser la dérivabilité (3.5)]} \qquad &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \Big\{\big(x_k - \xi_k\big)\, \varepsilon + \big(\xi_k - x_{k-1}\big)\, \varepsilon\Big\} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \big(x_k - x_{k-1}\big)\, \varepsilon \\
&= \varepsilon\, (b - a),
\end{aligned}$$

et nous obtenons à la fin un majorant qui tend vers 0 lorsque $\varepsilon \to 0$, ce qui conclut en beauté notre court périple dans la « contrée KH ». □

Mentionnons que la « Théorie KH » dont nous venons de donner un succinct aperçu peut être développée bien au-delà, *cf.* [1].

Mais cédons sans attendre à l'appel des belles sirènes de la « Théorie L », et changeons maintenant de chapitre.

4. Exercices

Exercice 1. Comme dans l'Exemple 1.1 soit la fonction $F\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ x^2 \cos\big(\frac{1}{x^2}\big) & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Pourquoi F' est elle Kurzweil-Henstock-intégrable ? Montrer en revanche que $|F'|$ ne l'est pas.

Exercice 2. **(a)** Soit $K \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble fermé borné, donc compact, et soit $\delta\colon K \longrightarrow]0, \infty[$ une jauge sur K. Montrer qu'il existe une famille finie d'intervalles presque disjoints fermés $I_1, \dots, I_N$ dont la réunion recouvre K et tels que pour tout $k = 1, \dots, N$, il existe $x_k \in I_k \cap K$ avec $I_k \subset \big[x_k - \delta(x_k),\, x_k + \delta(x_k)\big]$.

(b) Soit généralement $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble quelconque, et soit $\delta\colon E \longrightarrow]0, \infty[$ une jauge sur E. Montrer qu'il existe une famille dénombrable d'intervalles presque disjoints fermés $I_1, \dots, I_k, \dots$ dont la réunion complète recouvre K et tels que pour tout $k \geqslant 1$, il existe $x_k \in I_k \cap K$ avec $I_k \subset \big[x_k - \delta(x_k),\, x_k + \delta(x_k)\big]$.

Exercice 3. Montrer que la fonction $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{lorsque } 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$$

est Kurzweil-Henstock-intégrable, d'intégrale égale à 2.

Exercice 4. Sur un intervalle compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, soient deux fonctions Kurzweil-Henstock-intégrables $f, g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, et soit un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $c\, f$ et $f+g$ sont Kurzweil-Henstock-intégrables, avec :

$$\int_a^b \lambda\, f = \lambda \int_a^b f \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Exercice 5. Soit $f \colon [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$f(x) := \begin{cases} \log x & \text{lorsque } \ 0 < x \leqslant 1; \\ 0 & \text{pour } \ x = 0. \end{cases}$$

Étant donné un nombre réel $p > 1$ fixé, pour $N \geqslant 1$ entier quelconque, on introduit la partition finie pointée :

$$\bigg(\bigg[\frac{p^j}{p^N}, \ \frac{p^j+1}{p^N} \bigg] \ni \xi_j := \frac{p^j}{p^N} \bigg)_{0 \leqslant j \leqslant N}.$$

(a) Montrer que la somme de Riemann-Kurzweil-Henstock associée s'exprime explicitement comme :

$$S_{p,N}(f) := -\,(p-1)\log(p) \sum_{j=1}^{N-1} \frac{j}{p^j}.$$

(b) Montrer que :

$$\sum_{j=1}^{N-1} j\, X^j \ = \ X\, \frac{1 + (N-1)\, X^N - N\, X^{N-1}}{(1-X)^2}.$$

(c) En déduire une formule close pour $S_{p,N}(f)$.

(d) On ajuste maintenant le réel $p > 0$ et l'entier $N \geqslant 2$ de manière à ce que :

$$p^N \ = \ N^2.$$

Montrer alors que :

$$\lim_{N \to \infty} S_{p,N}(f) = -\,1.$$

Indication: Utiliser le fait que $\lim\limits_{\substack{p \to 1 \\ >}} \frac{\log(p)}{p-1} = 1$.

(e) Montrer que la fonction f est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock, d'intégrale égale à $\int_0^1 f = -\,1$.

Exercice 6. **(a)** Montrer qu'une fonction $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'un sous-ensemble dénombrable $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$ est intégrable au sens de Kurzweil-Henstock, d'intégrale $\int_0^1 f = 0$ nulle. Indication: Avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisir une fonction de jauge $\delta \colon [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$ satisfaisant :

$$\delta(x_k) \ \leqslant \ \varepsilon\, \frac{1}{2^k}\, \frac{1}{1 + |f(x_k)|} \qquad\qquad (k \in \mathbb{N}).$$

(b) Montrer que si deux fonctions $g, h \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ diffèrent uniquement sur une partie dénombrable $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ de $[a, b]$, alors f est Kurzweil-Henstock intégrable si et seulement si g l'est, et dans ce cas, montrer que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

(c) Soit la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$, définie par :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{lorsque } \ x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Montrer qu'elle est Kurzweil-Henstock intégrable. Mais est-elle aussi Riemann-intégrable ?

Exercice 7. EE

RÉFÉRENCES

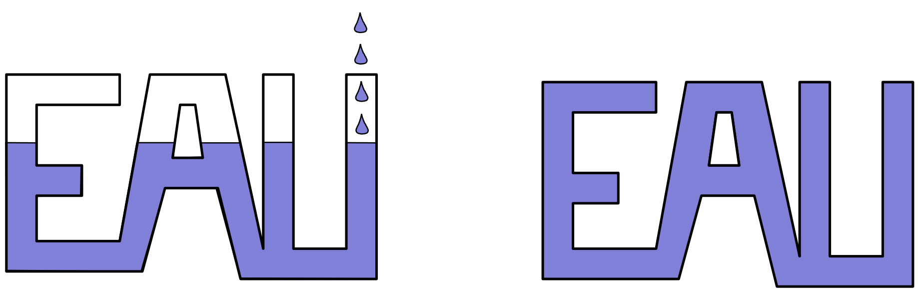
[1] KESSELMARK, C. ; MOONENS, L. : *Les théorèmes fondamentaux du calcul intégral : énoncés généraux et (in)compatibilités*, Gazette des mathématiciens, **141**, juillet 2014, 49–67.

Mesure de Jordan dans $\mathbb{R}^d$

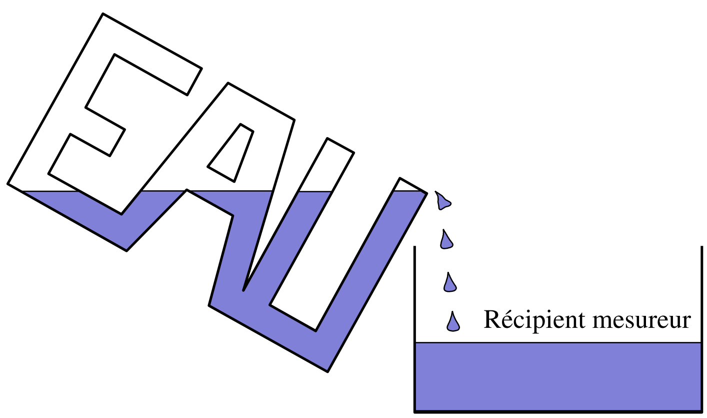
François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Prologue Physique ironique

Comment calculer les aires des surfaces et comment calculer les volumes des solides ?



Telle est la question cruelle que le physicien, goguenard comme le renard des laboratoires, lance au mathématicien avec un regard des plus narquois qui soit.



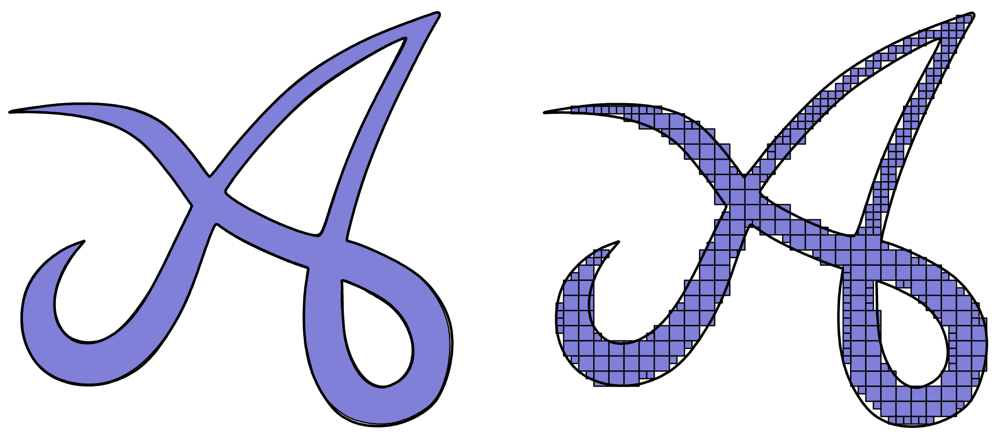
Comment ? lance-t-il insolemment ! Vous les mathématiciens, êtres aussi stupides qu'une rangée d'asperges transies sur le sol gelé de la Vallée du Rhône lors d'une tempête polaire imprévue au mois d'Avril, dans vos théories rigides et archaïques comme l'Antarctique, vous n'avez toujours pas intégré la bonne vieille méthode des égyptiens qui consiste simplement à remplir les surfaces et les volumes d'un fluide incompressible tel que l'eau du Nil pour en déterminer sans effort la surface ou le volume ?

Passez votre chemin, insignifiants suppôts de Platon ! la Physique fera toujours beaucoup mieux en la matière que toutes vos piètres Mathématiques !

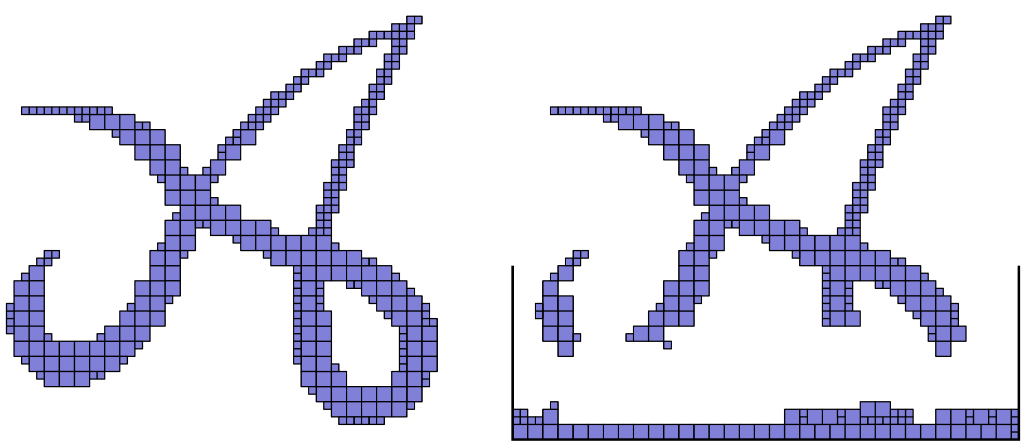
2. Redressement des Mathématiques

> Lorsqu'un mathématicien a prévu plus ou moins nettement une proposition, au lieu d'avoir recours à l'expérience, comme le ferait un physicien, il cherche une démonstration logique ; la vérification logique remplace pour lui la vérification expérimentale. En somme, il ne cherche pas à découvrir du nouveau, il essaie de prendre conscience des richesses qu'il possède déjà inconsciemment, qui sont enfermées dans les définitions et les axiomes. D'où l'importance capitale de ces définitions et axiomes qui, certes, ne sont assujetis logiquement qu'à la condition d'être compatibles, mais qui ne conduiraient qu'à une science purement formelle, vide de sens, s'ils étaient sans rapport avec la réalité. Henri LEBESGUE

Pour les mathématiciens qui n'ont pas à leur disposition les fluides magiques de la Physique, l'idée d'origine et pour ainsi dire *préhistorique*, lorsqu'on cherche à calculer le volume d-dimensionnel d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$, consiste à approximer cet ensemble par une réunion d'autres sous-ensembles dont la géométrie est simple, et dont le volume est connu, par exemple des carrés, des rectangles, des cubes, ou des parallellépipèdes.



Et les physiciens ont beau objecter avec force raison qu'il ne sert à rien de remplir les volumes de petits cubes pour les approximer de mieux en mieux, nous mathématiciens dont les forces sont si faibles que nous en sommes réduits à écrire au tableau avec de la craie à 2 centimes le bâtonnet, nous ne pouvons nous empêcher de développer des théories austères que nous souhaitons être entièrement fruit de notre cerveau.



Et Toc ! Non mais des fois ! Les physiciens, eux, ils se cantonnent au concret prosaïque — aucune capacité à idéaliser !

3. Préliminaires

Dans l'approche que nous développons ici dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, nous utiliserons donc des rectangles et des cubes d-dimensionnels, comme briques de construction de la mesure. En fait ces 'briques' sont des segments dans $\mathbb{R}^1$, de vrais rectangles euclidiens dans $\mathbb{R}^2$, et dans un $\mathbb{R}^{d \geqslant 1}$ général, ce sont des produits d'intervalles, que nous appellerons sans plus de façons *rectangles* quelle que soit la dimension, parce que ce qui se voit le plus dans ces briques, c'est que leurs côtés sont parallèles aux axes de coordonnées rectangulaires. Qui plus est, en dimension quelconque $d \geqslant 1$, de tels rectangles sont faciles à manipuler, et leur volume est le produit des longueurs de leurs côtés.

Nous parlerons généralement de *volume* dans $\mathbb{R}^d$, même si en dimensions $d = 1$, $d = 2$, et même $d \geqslant 4$, il vaudrait mieux parler de longueur, de surface, voire d'hypervolume, respectivement.

4. Sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$: topologie

Nous utilisons ici des notations très standard. Soit $d \geqslant 1$ un entier, censé être la *dimension ambiante*. Un *point* $x \in \mathbb{R}^d$ consiste en un d-uplet de nombres réels :

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \qquad \text{avec } \; x_i \in \mathbb{R} \; \text{ pour } \; i = 1, \dots, d.$$

Pour $c \in \mathbb{R}$, on note :

$$c\,x = \big(c\,x_1, \dots, c\,x_d\big).$$

Définition 4.1. La *norme* (euclidienne) de x, notée $|x|$, est la quantité positive :

$$|x| := \big(x_1^2 + \cdots + x_d^2\big)^{1/2}.$$

Elle satisfait bien entendu les trois axiomes d'une norme :

- $|c\,x| = |c|\,|x|$;
- $|x + y| \leqslant |x| + |y|$;
- $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

À toute norme est associée une distance, qui, dans le cas euclidien standard, n'est autre que la *distance euclidienne :*

$$\mathsf{dist}(x, y) := |x - y|.$$

Définition 4.2. Le *complémentaire* E^c d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ collecte tous les points qui ne lui appartiennent pas :

$$E^c := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; x \notin E\big\}.$$

Plus généralement, si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles quelconques, le *complémentaire de* F *dans* E est défini par :

$$E \backslash F := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \; x \in E \text{ mais } x \notin F\big\}.$$

Alors avec ces notations :

$$E^c = \mathbb{R}^d \backslash E.$$

Définition 4.3. La *différence symétrique* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, notée $E \Delta F$, est l'ensemble des points qui n'appartiennent qu'à l'un d'entre eux :

$$E \Delta F := (E \backslash F) \cup (F \backslash E).$$

Définition 4.4. La *distance* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ est la quantité :

$$\mathsf{dist}(E, F) := \inf_{x \in E,\, y \in F} |x - y|.$$

Maintenant, effectuons de brefs rappels sur les notions topologiques fondamentales d'ensemble ouvert, d'ensemble fermé, d'ensemble borné, d'ensemble compact.

La *boule ouverte* de rayon $r > 0$ centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble :

$$B_r(x) := \big\{ y \in \mathbb{R}^d \colon\ |y - x| < r \big\}.$$

La *boule fermée* de rayon $r \geqslant 0$ centrée en un point $x \in \mathbb{R}^d$ est l'ensemble :

$$\overline{B}_r(x) := \big\{ y \in \mathbb{R}^d \colon\ |y - x| \leqslant r \big\}.$$

Elle se réduit au singleton $\{x\}$ lorsque $r = 0$.

Définition 4.5. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *ouvert* lorsqu'en chacun de ses points $x \in E$, on peut centrer une boule ouverte $B_{r_x}(x)$ de rayon $r_x > 0$ assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans E :

$$\forall\, x \in E \quad \exists\, r_x > 0 \quad B_{r_x}(x) \subset E.$$

Définition 4.6. Un sous-ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ est dit *fermé* lorsque son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash F$ est ouvert.

On a alors une propriété fondamentale des ensembles ouverts et fermés, qui est d'ailleurs prise comme *définition* dans les sphères plus élevées de la Topologie Générale abstraite. La vérification est laissée en exercice.

Proposition 4.7. *Toute réunion absolument quelconque d'ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^d$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Toute intersection* finie *d'ouverts dans $\mathbb{R}^d$ est encore un ouvert de $\mathbb{R}^d$.* □

Rappelons que la restriction de finitude sur les intersections est inévitable, puisque par exemple dans $\mathbb{R}$, l'intersection *infinie* d'intervalles ouverts :

$$\bigcap_{n \geqslant 1} \big] -\tfrac{1}{n},\ \tfrac{1}{n} \big[= \{0\}$$

n'est *pas* un ouvert.

De manière équivalente, en passant aux complémentaires, on a :

Proposition 4.8. *Toute intersection absolument quelconque d'ensembles fermés dans $\mathbb{R}^d$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^d$. Toute réunion* finie *de fermés dans $\mathbb{R}^d$ est encore un fermé de $\mathbb{R}^d$.*

Définition 4.9. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *borné* lorsqu'il est contenu dans une boule centrée à l'origine de rayon assez grand :

$$\exists\, R > 0 \quad B_R(0) \supset E.$$

Ici, le fait que la boule soit ouverte et centrée à l'origine importe peu, puisque (exercice) :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^d \quad \forall\, r > 0 \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d \quad \exists\, s > 0 \quad \overline{B}_r(x) \subset B_s(y).$$

Définition 4.10. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est *compact* lorsqu'il est à la fois fermé et borné.

Rappelons que les sous-ensembles compacts jouissent toujours de la propriété recouvrement fini.

Théorème 4.11. [Heine-Borel] *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble compact recouvert par une réunion absolument quelconque :*

$$E \subset \bigcup_{\alpha} \mathscr{O}_\alpha,$$

de sous-ensembles ouverts $\mathscr{O}_\alpha \subset \mathbb{R}^d$. *Alors en fait, il existe toujours une sous-famille* finie $\mathscr{O}_{\alpha_1}$, $\mathscr{O}_{\alpha_2}$, ..., $\mathscr{O}_{\alpha_N}$ *de tels ouverts qui recouvrent déjà E :*

$$E \subset \mathscr{O}_{\alpha_1} \cup \cdots \cup \mathscr{O}_{\alpha_N}.$$ □

En d'autres termes, de *tout* recouvrement ouvert d'un compact, on peut extraire un sous-recouvrement ouvert *fini*.

Définition 4.12. Un point $x \in E$ d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est un *point intérieur* à E lorsqu'on y peut centrer une boule ouverte $B_r(x)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour qu'elle soit entièrement contenue dans E :

$$\exists\, r > 0 \qquad B_r(x) \subset E.$$

L'ensemble des points qui sont intérieurs à E est alors appelé l'*intérieur* de E, il est noté :

$$\mathsf{Int}\, E,$$

et c'est manifestement un sous-ensemble de E, égal à E si et seulement si E lui-même est ouvert.

Définition 4.13. Un point $x \in \mathbb{R}^d$ est un *point adhérent* à un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ lorsque, pour tout $r > 0$, la boule ouverte $B_r(x)$ contient des points de E.

Autrement dit, il y a des points de E qui sont arbitrairement proches de x, et bien sûr, tout point de E est adhérent à E.

Définition 4.14. L'adhérence, notée $\overline{E}$, d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ consiste en la réunion de E avec tous les points de $\mathbb{R}^d$ qui sont adhérents à E.

Noter (exercice) que $\overline{E}$ est toujours un sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^d$. De plus, un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est fermé si et seulement si $\overline{E} = E$ (exercice).

Définition 4.15. Le *bord*, noté ∂E, d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\partial E := \overline{E} \big\backslash \mathsf{Int}\, E$$

consiste en tous les points adhérents à E qui ne sont pas points intérieurs.

Définition 4.16. Un *point isolé* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est un point $x \in E$ en lequel on peut centrer une boule ouverte $B_r(x)$ de rayon $r > 0$ assez petit pour qu'elle ne rencontre plus d'autres points de E :

$$B_r(x) \cap E = \{x\}.$$

Définition 4.17. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *parfait* lorsqu'aucun de ses points n'est isolé.

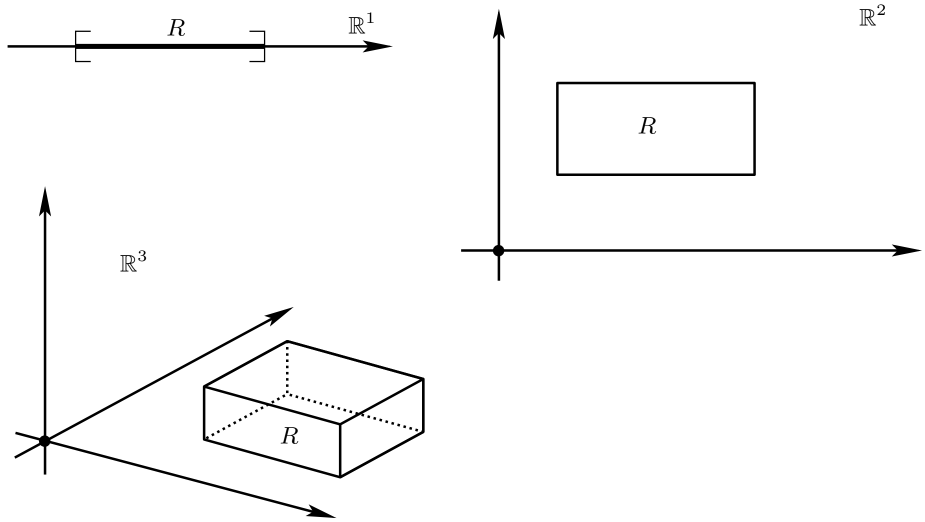
5. Rectangles et cubes dans $\mathbb{R}^d$

Définition 5.1. Un *rectangle fermé* $R \subset \mathbb{R}^d$ est le produit de d intervalles fermés bornés de $\mathbb{R}$:

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

avec :

$$-\infty < a_j \leqslant b_j < \infty \qquad (j = 1 \cdots d).$$



En d'autres termes :

$$R = \big\{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d \colon\ a_j \leqslant x_j \leqslant b_j \ \text{ pour tout } \ j = 1, \ldots, d\big\}.$$

Observons que dans notre définition, les rectangles ont leurs côtés *parallèles* aux axes de coordonnées. Dans $\mathbb{R}^1$, les rectangles sont précisément les intervalles fermés bornés, tandis que dans $\mathbb{R}^2$, ce sont les rectangles (fermés) usuels de la géométrie euclidienne. Dans $\mathbb{R}^3$, ce sont les parallélépipèdes fermés.

Définition 5.2. Un *rectangle ouvert* $R \subset \mathbb{R}^d$ est le produit de d intervalles ouverts bornés de $\mathbb{R}$:

$$R =]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_d, b_d[\,.$$

On vérifie (exercice) que l'intérieur, au sens de la Définition 4.12, d'un rectangle fermé :

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d],$$

avec $-\infty < a_j < b_j < \infty$ pour tout $j = 1, \ldots, d$, n'est autre que le rectangle ouvert :

$$]a_1, b_1[\, \times \cdots \times \,]a_d, b_d[\,,$$

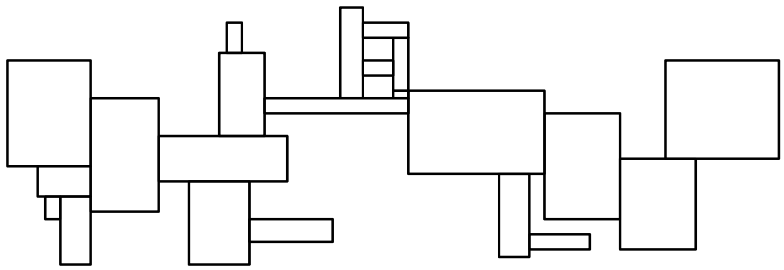
tandis que si une seule inégalité $a_j = b_j$ a lieu, l'interieur en question est réduit à l'ensemble vide.

Les *longueurs* (euclidiennes) des côtés d'un rectangle ouvert ou fermé $R \subset \mathbb{R}^d$ sont les nombres réels $b_j - a_j$ pour $j = 1, \ldots, d$.

Définition 5.3. Le *volume* (euclidien) d'un rectangle ouvert ou fermé $R \subset \mathbb{R}^d$ est le nombre réel :

$$|R| := (b_1 - a_1) \cdots (b_d - a_d).$$

Bien entendu, lorsque $d = 1$, le 'volume' est une longueur, et lorsque $d = 2$, c'est une aire. Notons encore que si une seule inégalité $a_j = b_j$ a lieu, le volume est nul. Notons aussi que le volume est le même, que le rectangle soit ouvert ou fermé. En particulier, les *faces* (exercice : définir cette notion) comptent pour zéro dans le volume.



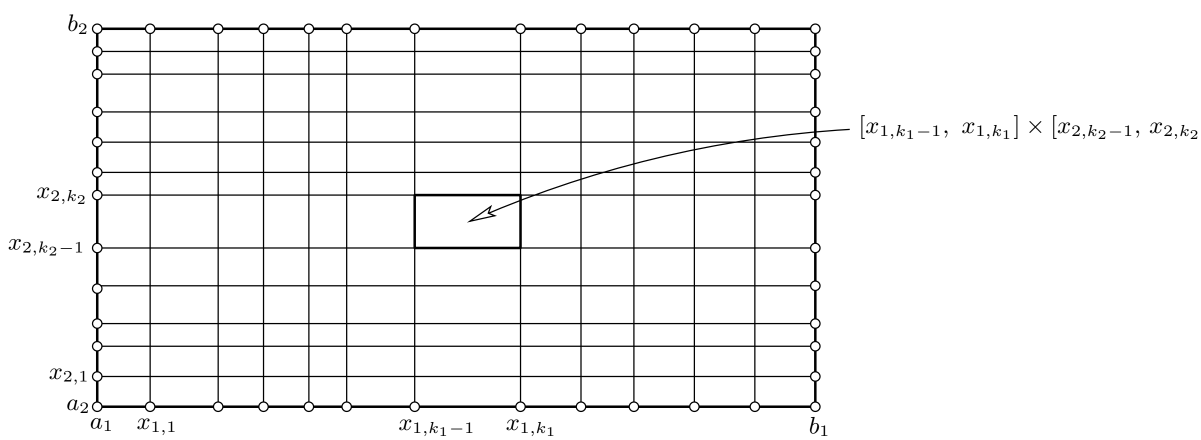
Définition 5.4. Une réunion finie de rectangles ouverts ou fermés dans $\mathbb{R}^d$ est dite *presque disjointe* si les intérieurs des rectangles qui la constitue sont deux à deux d'intersection *vide*.

Enfin, certains rectangles méritent une attention spéciale.

Définition 5.5. Un cube ouvert ou fermé est un rectangle ouvert ou fermé, respectivement, dont les côtés sont tous de longueur égale :

$$b_1 - a_1 = \cdots = b_d - a_d.$$

Si donc ℓ est cette longueur commune, le volume du cube vaut ℓ^d.



Lemme 5.6. *Si on se donne un rectangle fermé de $\mathbb{R}^d$ d'intérieur non vide :*

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \qquad (a_1 < b_1 \cdots a_d < b_d),$$

et si chacun de ses d intervalles constituants est subdivisé en $n_1 \geqslant 1, \ldots, n_d \geqslant 1$ segments :

$$a_1 = x_{1,0} < x_{1,1} < \cdots < x_{1,n_1-1} < x_{1,n_1} = b_1,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_d = x_{d,0} < x_{d,1} < \cdots < x_{d,n_d-1} < x_{d,n_d} = b_d,$$

alors R se décompose comme réunion de $n_1 \cdots n_d$ rectangles fermés $R_{k_1,\ldots,k_d}$ presque disjoints :

$$R = \bigcup_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \underbrace{\big[x_{1,k_1-1},\ x_{1,k_1}\big] \times \cdots \times \big[x_{d,k_d-1},\ x_{d,k_d}\big]}_{=:\, R_{k_1,\ldots,k_d}},$$

et le volume de R est la somme des volumes de ces $n_1 \times \cdots \times n_d$ sous-rectangles :

$$|R| = \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \big|R_{k_1,\dots,k_d}\big|.$$

Le même énoncé vaut également pour tout rectangle ouvert non vide.

Démonstration. La figure bidimensionnelle illustre clairement comment la décomposition de R s'effectue par un pavage dont les côtés sont parallèles aux axes de coordonnées.

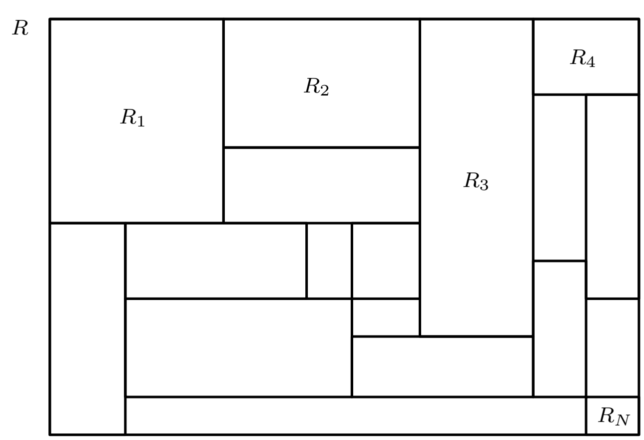
Ensuite, on a par hypothèse :

$$\begin{aligned} b_1 - a_1 &= \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_d - a_d &= \sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big), \end{aligned}$$

et alors le simple développement algébrique d'un produit de d facteurs :

$$\begin{aligned} |R| &= \big(b_1 - a_1\big) \cdots \big(b_d - a_d\big) \\ &= \bigg(\sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big)\bigg) \cdots \bigg(\sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big)\bigg) \\ &= \sum_{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1} \cdots \sum_{1 \leqslant k_d \leqslant n_d} \big(x_{1,k_1} - x_{1,k_1-1}\big) \cdots \big(x_{d,k_d} - x_{d,k_d-1}\big) \\ &= \sum_{\substack{1 \leqslant k_1 \leqslant n_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ 1 \leqslant k_d \leqslant n_d}} \big|R_{k_1,\dots,k_d}\big| \end{aligned}$$

explique l'assertion concernant les volumes. □



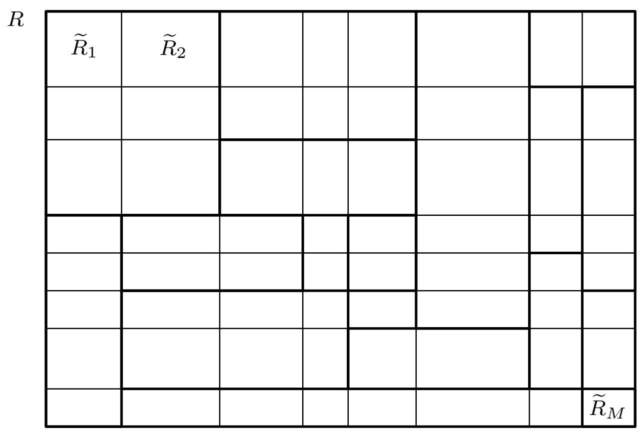
Ce lemme se généralise substantiellement à la situation de type *puzzle* où le rectangle fermé R est réunion finie quelconque de sous-rectangles fermés presque disjoints, pas forcément issus de subdivisions des intervalles qui constituent son produit.

Lemme 5.7. *Si un rectangle ouvert ou fermé R est* égal *à la réunion presque disjointe d'un nombre fini d'autres rectangles ouverts ou fermés :*

$$R = \bigcup_{k=1}^{N} R_k,$$

alors son volume est la somme simple des volumes de ses composantes :

$$|R| = \sum_{k=1}^{N} |R_k|.$$



Démonstration. Comment se ramener au lemme précédent ?

L'idée *jaillit* du diagramme : on considère la grille formée par prolongement infini des côtés de tous les rectangles $R_1, \dots, R_N$. Cette construction fournit un nombre $M \geqslant N$ plus grand mais encore fini de sous-rectangles de R :

$$\widetilde{R}_1, \dots, \widetilde{R}_M \subset R,$$

tels que chaque R_k est réunion de certains $\widetilde{R}_j$, ce qu'on notera :

$$R_k = \bigcup_{j \in J_k} \widetilde{R}_j \qquad (k = 1 \cdots N),$$

ces réunions portant sur les éléments J_k d'une certaine partition de l'ensemble total des indices-tildes :

$$J_1 \cup \cdots \cup J_N = \{1, 2, 3, \dots, M\} \qquad (J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset, k_1 \neq k_2).$$

Ensuite, on se convainc en inspectant visuellement les deux diagrammes que :

• R est une réunion des $\widetilde{R}_l$ qui est issue d'une certaine subdivision de ses d intervalles constituants, et donc le lemme qui précède s'applique immédiatement pour donner :

$$|R| = \sum_{l=1}^{M} \big|\widetilde{R}_l\big|;$$

• qui plus est (second exercice visuel), chaque rectangle R_k est une réunion des $\widetilde{R}_j$ pour $j \in J_k$ qui est elle aussi issue d'une subdivision de ses d intervalles constituants, et donc à nouveau, le lemme qui précède s'applique immédiatement pour donner :

$$\big|R_k\big| = \sum_{j\in J_k} \big|\widetilde{R}_j\big| \qquad\qquad (k=1\cdots N).$$

Un calcul absolument élémentaire de décomposition$\big/$regroupement de sommes :

$$\begin{aligned}|R| &= \sum_{l=1}^{M} \big|\widetilde{R}_l\big| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \sum_{j\in J_k} \big|\widetilde{R}_j\big| \\ &= \sum_{k=1}^{N} \big|R_k\big|,\end{aligned}$$

termine alors élégamment la démonstration de ce lemme certes intuitivement trivial, mais qui a requis du travail rédactionnel. □

Une adaptation de ces arguments apporte l'extension suivante, tout aussi triviale intuitivement.

Lemme 5.8. *Si un rectangle ouvert ou fermé R est* contenu *dans une réunion finie quelconque d'autres rectangles R_k :*

$$R \subset \bigcup_{k=1}^{N} R_k,$$

pas forcément presque disjoints, alors on a toujours :

$$|R| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \big|R_k\big|.$$

Démonstration. Après avoir formé la grille infinie de tous les côtés des $(N+1)$ rectangles R, R_1, ..., R_N, on réalise la réunion totale :

$$R \cup R_1 \cup \cdots \cup R_N = \bigcup_{l=1}^{M} \widetilde{R}_l$$

comme puzzle constitué de rectangles aux côtés tous parallèles aux axes de coordonnées. On se ramène alors (exercice) à des applications multiples du lemme précédent. □

6. Mesurabilité des ensembles élémentaires

À partir de maintenant, et jusqu'à la fin de ce chapitre, un certain nombre d'énoncés seront laissés en exercice parce que la théorie de la mesure due Jordan, que nous souhaitons réviser ici par souci de complétude, est d'une portée assez restreinte par rapport à celle de Borel-Lebesgue, que nous développerons à l'inverse dans les moindres détails.

Définition 6.1. Un *rectangle général* $R \subset \mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles de $\mathbb{R}$ de l'une des quatre formes possibles :

$$\begin{aligned}&[a_j, b_j],\\&[a_j, b_j[,\\&]a_j, b_j],\\&]a_j, b_j[,\end{aligned}$$

avec $-\infty < a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$ pour $j = 1, \dots, d$.

Comme dans le cas des rectangles ouverts ou fermés, le *volume* d'un rectangle général R est alors le produit :

$$|R| := \big(b_1 - a_1\big) \cdots \big(b_d - a_d\big).$$

Définition 6.2. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *élémentaire* lorsqu'il est réunion d'un nombre *fini* de rectangles généraux

L'intérêt des ensembles élémentaires dont les briques sont des rectangles plus généraux que les rectangles ouverts ou fermés, c'est que leur classe est stable par les opérations ensemblistes finies.

Lemme 6.3. [Exercice] *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux ensembles élémentaires, alors :*

$$\begin{aligned}&E \cup F,\\&E \backslash F,\\&E \Delta F := (E \backslash F) \cup (F \backslash E)\end{aligned}$$

sont aussi des ensembles élémentaires. □

Lemme 6.4. *Tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$ peut être réalisé comme réunion finie de rectangles généraux* disjoints.

Démonstration. Dans le cas de la dimension $d = 1$, l'ensemble E est réunion d'une collection finie d'intervalles $I_1, \dots, I_N \subset \mathbb{R}$, tous de l'une des quatre formes $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$. Ordonnons alors les extrémités de ces intervalles par ordre croissant, sans répétition. Si nous extrayons les intervalles ouverts entre ces extrémités qui appartiennent à E, et que nous sélectionnons seulement les extrémités d'intervalles qui appartiennent à E, nous obtenons une décomposition disjointe en rectangles généraux.

Le cas de la dimension $d \geqslant 2$ est laissé en exercice (tracer d'abord des figures exploratoires en dimension $d = 2$). □

Il importe de faire remarquer qu'il existe toujours une *infinité* de décompositions en réunions finies de rectangles généraux disjoints, ne serait-ce parce qu'un seul intervalle est indéfiniment décomposable :

$$[0, 1] = [0, x[\cup \{x\} \cup]x, 1] \qquad {\scriptstyle (0 \leqslant x \leqslant 1)}.$$

Toutefois, à tout ensemble élémentaire, on peut quand même attribuer une mesure d'une manière naturelle.

Proposition 6.5. [Mesurabilité des ensembles élémentaires] *Si un ensemble élémentaire E est représenté comme réunion finie* disjointe :

$$E = R_1 \cup \cdots \cup R_N \qquad {\scriptstyle (R_{k_1} \cap R_{k_2} = \emptyset,\ k_1 \neq k_2)},$$

de rectangles généraux, alors la quantité :

$$\mathsf{mesure}(E) := |R_1| + \cdots + |R_N|$$

est indépendante d'une telle partition.

Démonstration. Ici apparaît une idée nouvelle : introduire des *discrétisations* de plus en plus fines. En renormalisant le sous-ensemble $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ des points à coordonnées entières par un facteur rationnel $\frac{1}{n}$ de plus en plus petit :

$$\tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d \,\subset\, \mathbb{R}^d,$$

on crée en effet un réseau de points équidistribués dans $\mathbb{R}^d$ qui est de plus en plus dense lorsque l'entier $n \geqslant 1$ croît.

En dimension $d = 1$, on se convainc alors aisément (exercice) que si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle quelconque ayant l'une des quatre formes possibles $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, alors sa longueur $|I| = b - a$ peut être retrouvée en comptant les points-atomes de ces réseaux à l'échelle $\frac{1}{n}$ qui lui appartiennent, à savoir :

$$|I| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(I \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}\big).$$

Une fois que la dimension $d = 1$ a été comprise, il suffit de prendre des produits cartésiens pour en déduire (exercice) le résultat analogue en dimension arbitraire $d \geqslant 1$:

$$|R| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

valable pour un rectangle général $R \subset \mathbb{R}^d$.

Si donc $R_1, \dots, R_N$ sont des rectangles généraux *disjoints* dont la réunion est égale à E, on en déduit aisément que :

$$\begin{aligned}
|R_1| + \cdots + |R_N| \,&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R_1 \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big) + \cdots + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(R_N \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big) \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\Big(\big[R_1 \cup \cdots \cup R_N\big] \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\Big) \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^d}\,\mathsf{Card}\,\big(E \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big).
\end{aligned}$$

Mais alors, pour toute autre partition quelconque de E par des rectangles généraux $R'_{l'}$ eux aussi disjoints :

$$E = R'_1 \cup \cdots \cup R'_{N'} \qquad\qquad (R'_{l'_1} \cap R'_{l'_2} = \emptyset,\ l'_1 \neq l'_2),$$

le même résultat est instantanément valable :

$$|R'_1| + \cdots + |R'_{N'}| \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(E \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

et comme ce dernier cardinal ne concerne que l'ensemble considéré E, une simple fusion entre égalités apporte :

$$|R_1| + \cdots + |R_N| \,=\, |R'_1| + \cdots + |R'_{N'}|$$

ce qui est l'indépendance annoncée relativement à toute décomposition de E. □

Ayant atteint ce point, on pourrait être tenté de définir la *mesure* d'un sous-ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^d$ par la même formule :

$$\mathsf{mesure}(A) \overset{\mathsf{def?}}{:=} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \mathsf{Card}\,\big(A \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

puisque cela fonctionne bien avec les ensembles élémentaires. Cependant, une telle définition n'est pas satisfaisante pour plusieurs raisons.

En effet, on peut tout d'abord concocter des exemples pour lesquels une telle limite n'existe pas. Mais même dans les cas où la limite existe, un tel concept n'obéirait pas la propriété indispensable d'invariance par translation. Par exemple, en dimension $d = 1$, une telle définition donnerait une mesure égale à 1 à l'ensemble :

$$\mathbb{Q} \cap [0, 1],$$

tandis qu'elle donnerait (exercice) une mesure égale à 0 à son tanslaté irrationnel :

$$\sqrt{2} + \mathbb{Q} \cap [0, 1].$$

Cependant, nous allons définir dans peu de temps les sous-ensembles *Jordan-mesurables* $A \subset \mathbb{R}^d$, sous-ensembles auxquels nous pourrons attribuer — en procédant différemment — une mesure :

$$\mathsf{mesure}(A) \in [0, \infty[\,,$$

et nous verrons (Exercice 5) que pour ces sous-ensembles, *mais seulement pour ces sous-ensembles*, la formule en question :

$$\mathsf{mesure}(A) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\, \mathsf{Card}\,\big(A \cap \tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

est effectivement valide. De plus, les ensembles Jordan-mesurables conserveront leur mesure par une translation quelconque. Nous verrons alors aussi que le sous-ensemble $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$ n'est *pas* mesurable au sens de Jordan, ce qui expliquera le paradoxe exhibé ci-dessus. En fait, seule la théorie supérieure de Borel-Lebesgue sera capable d'attribuer une mesure à $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, et ce sera une mesure égale à 0, exactement comme nous l'avons déjà vu à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

7. Propriétés élémentaires de la mesure de Jordan

D'après les définitions, il est clair que pour tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$, la quantité $\mathsf{mesure}(E)$ est un nombre réel $\in [0, \infty[$, avec bien entendu :

$$0 = \mathsf{mesure}(\emptyset).$$

Ensuite, si $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles élémentaires *disjoints*, alors :

$$\mathsf{mesure}(E \cup F) = \mathsf{mesure}(E) + \mathsf{mesure}(F).$$

Plus généralement, une récurrence facile montre que si $E_1, \dots, E_N$ sont des sous-ensembles élémentaires de $\mathbb{R}^d$ *disjoints deux à deux*, alors on a la *propriété d'additivité finie disjointe :*

$$\mathsf{mesure}(E_1 \cup \cdots \cup E_N) = \mathsf{mesure}(E_1) + \cdots + \mathsf{mesure}(E_N).$$

Sans même qu'il soit besoin de le mentionner, on aura implicitement compris que la mesure ainsi définie coïncide avec le volume sur les rectangles généraux $R \subset \mathbb{R}^d$:

$$\mathsf{mesure}(R) = |R|.$$

On démontre aussi sans difficulté que si $E \subset F$ sont deux sous-ensembles élémentaires emboîtés, alors :

$$\mathsf{mesure}(E) \leqslant \mathsf{mesure}(F).$$

On en déduit (exercice) que pour deux ensembles élémentaires quelconques $E, F \subset \mathbb{R}^d$, on a toujours :

$$\mathsf{mesure}\big(E \cup F\big) \leqslant \mathsf{mesure}(E) + \mathsf{mesure}(F),$$

et plus généralement par récurrence, que :

$$\mathsf{mesure}\big(E_1 \cup \cdots \cup E_N\big) \leqslant \mathsf{mesure}(E_1) + \cdots + \mathsf{mesure}(E_N),$$

lorsque $E_1, \dots, E_N \subset \mathbb{R}^d$ sont élémentaires (à nouveau pas forcément disjoints).

Enfin, puisque le volume des rectangles généraux est par définition invariant par translation, on voit que la mesure de Jordan jouit de la propriété d'*invariance par translation :*

$$\mathsf{mesure}\big(\tau + e\big) = \mathsf{mesure}(E),$$

pour tout vecteur de translation $\tau \in \mathbb{R}^d$ et tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$.

Soit maintenant un sous-ensemble *borné quelconque :*

$$A \subset \mathbb{R}^d.$$

Par restriction théorique, on ne considèrera pas ici les sous-ensembles non bornés.

Définition 7.1. [Mesures de Jordan intérieure et extérieure] La *mesure de Jordan intérieure* de A est le nombre réel positif :

$$m_*^J(A) := \sup_{\substack{E \subset A \\ E \text{ élémentaire}}} \mathsf{mesure}(E),$$

tandis que la mesure de Jordan extérieure de A est le nombre réel positif :

$$m_J^*(A) := \inf_{\substack{E \supset A \\ E \text{ élémentaire}}} \mathsf{mesure}(E).$$

On se convainc (exercice) que l'on a toujours :

$$m_*^J(A) \leqslant m_J^*(A).$$

Voici enfin la définition conceptuelle principale de ce chapitre.

Définition 7.2. [Mesures de Jordan] Un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^d$ est dit *mesurable au sens de Jordan* lorsque ses mesures de Jordan intérieure et extérieure coïncident, à savoir lorsque :

$$m_J^*(A) = m_*^J(A),$$

et dans ce cas, on appelle *mesure de Jordan* de A ce nombre commun :

$$m_J(A) := m_J^*(A) = m_*^J(A),$$

qui est toujours positif :

$$m_J(A) \in [0, \infty[.$$

En particulier :

Lemme 7.3. *Les ensembles élémentaires $E \subset \mathbb{R}^d$ sont Jordan-mesurables de mesure de Jordan égale à :*

$$m_J(E) = \mathsf{mesure}(E). \qquad \square$$

D'une certaine façon, les ensembles mesurables au sens de Jordan sont ceux qui sont « *presque élémentaires* », si l'on s'imagine qu'ils sont bien approximés à l'intérieur et à l'extérieur par des ensembles élémentaires. Plus précisément, on a la caractérisation suivante.

Proposition 7.4. [Exercice : caractérisation de la Jordan-mesurabilité] *Soit $A \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble borné. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *A est Jordan-mesurable ;*

(ii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux ensembles élémentaires :*

$$E' \subset A \subset E''$$

tels que :

$$\text{mesure}\big(E'' \backslash E'\big) \leqslant \varepsilon;$$

(iii) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble élémentaire E tel que :*

$$m_J^*\big(E \,\Delta\, A\big) \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Proposition 7.5. [Exercice : propriétés élémentaires de la Jordan-mesurabilité] *Si $A \subset \mathbb{R}^d$ et $B \subset \mathbb{R}^d$ sont deux sous-ensembles Jordan-mesurables (en particulier bornés), alors les cinq propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Stabilité booléenne : *Les quatre ensembles :*

$$\begin{aligned} &A \cup B, \\ &A \cap B, \\ &A \backslash B, \\ &A \,\Delta\, B, \end{aligned}$$

sont eux aussi Jordan-mesurables ;

(ii) Additivité finie : *Lorsque $A \cap B = \emptyset$ sont disjoints :*

$$m_J(A \cup B) = m_J(A) + m_J(B);$$

(iii) Monotonie : *Lorsque $A \subset B$, on a :*

$$m_J(A) \leqslant m_J(B);$$

(iv) Subadditivité finie : *On a toujours :*

$$m_J(A \cup B) \leqslant m_J(A) + m_J(B);$$

(v) Invariance par translation : *Pour tout $\tau \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$m_J(\tau + A) = m_J(A).$$

De nombreuses autres propriétés fondamentales apparaissent dans la liste des exercices placés à la fin de ce chapitre.

8. Vers la mesure de Borel et de Lebesgue

Même si on se restreint à la considération de sous-ensembles bornés $A \subset \mathbb{R}^d$, la plupart d'entre eux ne sont *pas* Jordan-mesurables. En effet, la théorie de Jordan échoue sur un écueil capital, en tant qu'elle est *incapable d'embrasser les réunions dénombrables, ainsi que les intersections dénombrables*, d'ensembles déjà connus comme étant mesurables (Exercice 11). Autrement dit, la théorie de Jordan se limite consubstantiellement au fini.

En effet, une explicitation complète de la notion de mesure extérieure $m_J^*(A)$ au sens de Jordan d'un sous-ensemble borné $A \subset \mathbb{R}^d$ s'exprime comme :

$$m_J^*(A) := \inf_{\substack{R_1 \cup \cdots \cup R_N \supset A \\ R_1, \dots, R_N \\ \text{rectangles}}} |R_1| + \cdots + |R_N|,$$

ces recouvrements de A étant effectivement limités à être *toujours de cardinal fini*.

Pour des raisons qui tenaient à des nécessités mathématiques internes et profondes, Borel et Lebesgue ont été amenés à *étendre* un telle définition en admettant des réunion *infinies dénombrables* de rectangles couvrants. Nous en dirons plus dans un chapitre systématique qui suivra, mais esquissons ici ces idées qui furent nouvelles à leur époque.

Définition 8.1. La *mesure extérieure* au sens de Borel et de Lebesgue d'un sous-ensemble quelconque $A \subset \mathbb{R}^d$ — pas forcément borné — est le nombre réel positif appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$m_L^*(A) := \inf_{\substack{\cup_{k=1}^\infty R_k \supset A \\ R_1, \dots, R_k, \dots \\ \text{rectangles}}} \sum_{k=1}^{\infty} \big|R_k\big|,$$

à savoir l'infimum de la somme *infinie* des volumes d'un nombre *infini dénombrable* de rectangles dont la réunion *dénombrable* recouvre A.

Bien entendu, on a toujours (exercice mental) :

$$m_L^*(A) \leqslant m_J^*(A),$$

puisque (solution de l'exercice) toute réunion finie de rectangles peut être considérée comme une réunion infinie à laquelle on ajoute trivialement des rectangles égaux à $\emptyset$.

Mais $m_L^*(A)$ peut s'avérer être nettement inférieur à $m_J^*(A)$, et c'est tout ce qui fera la supériorité de la théorie de la mesure de Borel et de Lebesgue sur celle de Jordan.

Par exemple, rappelons-nous qu'à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann, nous avons défini les ensembles de mesure 0 contenus dans $\mathbb{R}$, exactement en employant des recouvrements infinis dénombrables. À cette occasion, nous avons établi que *tout sous-ensemble de cardinal dénombrable :*

$$\big\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots\big\} \subset \mathbb{R}$$

est de mesure (de Lebesgue) 0, et en fait aussi, de mesure extérieure de Lebesgue 0, même s'il n'est pas borné. Au contraire, la mesure extérieure de Jordan attribue par exemple la mesure maximale 1 au sous-ensemble dénombrable :

$$\mathbb{Q} \cap [0,1] \subset \mathbb{R},$$

affirmation que nous offrons comme exercice impératif à notre fidèle étudiant-lecteur.

Comme on le constatera plus tard, la mesure de Lebesgue prolonge celle de Jordan, au sens où tout ensemble Jordan-mesurable sera automatiquement Lebesgue-mesurable aussi, ses deux mesures étant égales.

Fondamentalement, la mesure de Lebesgue satisfera toutes les propriétés intuitivement claires qu'une mesure doit satisfaire, lorsqu'on étend les considérations aux opérations dénombrables, et non pas seulement finies. En fait, presque tous les ensembles que l'on rencontre en Analyse font intervenir l'infini dénombrable et ils sont mesurables. Il existe seulement quelques sous-ensembles pathologiques non mesurables qu'on exhibe comme des bêtes de foires dans les cours de L3, mais qu'on se garde bien d'étudier réellement.

Ensuite, une fois que la mesure de Lebesgue aura été acquise, nous pourrons développer une puissante théorie de l'intégration qui est un joyau de la pensée mathématique théorique.

« J'obvie un joyau jovial ».

> L'allemand Riemann, le mathématicien doué du génie le plus imaginatif et le plus puissant du dix-neuvième siècle (sous la réserve des titres de Poincaré), recréa l'instrument par une innovation hardie, opérant une révolution des idées. Mais avec les années, la fécondité de l'intégrale riemannienne se trouvait exploitée jusqu'à l'épuisement, et les limites de son pouvoir atteintes partout. Sur les terres neuves de l'Analyse mathématique, les expéditions conquérantes marquaient le pas. Lebesgue fut le thaumaturge [= magicien] dénouant les liens où tant de compagnons d'avant-garde étaient comme par enchantement retenus. Arnaud DENJOY

9. Exercices

Exercice 1. [Unicité de la mesure de Jordan, 1] En dimension arbitraire $d \geqslant 1$, soit une application :

$$m' \colon \quad \mathscr{E}(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

définie sur la collection $\mathscr{E}(\mathbb{R}^d)$ des sous-ensembles élémentaires de $\mathbb{R}^d$ qui satisfait la propriété d'additivité finie disjointe ainsi que l'invariance par translation. Montrer qu'il existe une constante $c \in \mathbb{R}_+$ telle que :

$$m'(E) = c\, \mathsf{mesure}(E),$$

pour tout sous-ensemble élémentaire $E \subset \mathbb{R}^d$, où $\mathsf{mesure}(\cdot)$ désigne la mesure de Jordan. Indication: Introduire $c := m'\big([0,1]^d\big)$ et calculer $m'\big(\big[0, \frac{1}{n}\big]^d\big)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 2. [Interprétation géométrique de l'intégrale de Riemann] Soit un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, et soit $f \colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle bornée.

(a) Montrer que f est Riemann-intégrable si et seulement si les deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\Gamma^+(f) &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon\; 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},\\ \Gamma^-(f) &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \colon\; f(x) \leqslant y \leqslant 0\big\},\end{aligned}$$

sont Jordan-mesurables dans $\mathbb{R}^2$.

(b) Dans ce cas, montrer alors que :

$$\int_a^b f(x)\,dx \;=\; m_{J,\mathbb{R}^2}\big(\Gamma^+(f)\big) - m_{J,\mathbb{R}^2}\big(\Gamma^-(f)\big).$$

Exercice 3. [Jordan-mesurabilité des hypographes] Soit $R \subset \mathbb{R}^d$ un rectangle fermé et soit une fonction continue $f \colon R \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Montrer que le graphe de f :

$$\big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon\; x \in R\big\}$$

est Jordan-mesurable dans $\mathbb{R}^{d+1}$, de mesure de Jordan égale à 0. Indication: Utiliser le fait que f est uniformément continue.

(b) Montrer que l'hypographe positif de f :

$$\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}\colon\ x\in R,\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\big\}$$

est aussi Jordan-mesurable dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 4. Soient trois points A, B, C appartenant à $\mathbb{R}^2$.
(a) Montrer que le triangle fermé plein de sommets A, B, C est Jordan-mesurable.
(b) Montrer que la mesure de Jordan d'un tel triangle quelconque vaut $\frac{1}{2}\big|(B-A)\wedge(C-A)\big|$.

Exercice 5. [Comptages discrets] Montrer que la formule :

$$\mathsf{mesure}(A)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\,\mathsf{Card}\,\big(A\cap\tfrac{1}{n}\,\mathbb{Z}^d\big),$$

est valable pour tout sous-ensemble borné $A\subset\mathbb{R}^d$ Jordan-mesurable.

Exercice 6. Si $A\subset\mathbb{R}^d$ est un ensemble borné Jordan-mesurable, et si $m_J(A)=0$, montrer que tout sous-ensemble $A'\subset A$ est aussi Jordan-mesurable avec de même $m_J(A')=0$.

Exercice 7. [Grilles dyadiques] Un rectangle fermé est appelé un *cube dyadique* s'il est de la forme :

$$\big[\tfrac{k_1}{2^n},\ \tfrac{k_1+1}{2^n}\big]\times\cdots\times\big[\tfrac{k_d}{2^n},\ \tfrac{k_d+1}{2^n}\big],$$

où $n\in\mathbb{N}$ et $k_1,\dots,k_d\in\mathbb{Z}$ sont des entiers.

Étant donné un sous-ensemble borné quelconque $A\subset\mathbb{R}^d$, pour chaque entier $n\in\mathbb{N}$ fixé, on note $\mathscr{E}_*\big(A,\frac{1}{2^n}\big)$ le nombre de tels cubes dyadiques de côté $\frac{1}{2^n}$ qui sont entièrement contenus dans A.

On note aussi $\mathscr{E}^*\big(A,\frac{1}{2^n}\big)$ le nombre de tels cubes dyadiques de côté $\frac{1}{2^n}$ qui intersectent A.

Montrer alors que A est Jordan-mesurable si et seulement si :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}_*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}^*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big),$$

et si tel est le cas, montrer que la mesure de Jordan de A coïncide avec ces deux quantités égales :

$$m_J(A)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}_*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big)\ =\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{dn}}\,\mathscr{E}^*\big(A,\tfrac{1}{2^n}\big).$$

Exercice 8. [Unicité de la mesure de Jordan, 2] En dimension arbitraire $d\geqslant 1$, soit une application :

$$m'\colon\quad\mathscr{J}(\mathbb{R}^d)\longrightarrow\mathbb{R}_+,$$

définie sur la collection $\mathscr{J}(\mathbb{R}^d)$ des sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}^d$ Jordan-mesurables, qui satisfait la propriété d'additivité finie disjointe ainsi que l'invariance par translation. Montrer qu'il existe une constante $c\in\mathbb{R}_+$ telle que :

$$m'(A)=c\,m_J(A),$$

pour tout sous-ensemble borné Jordan-mesurable $A\subset\mathbb{R}^d$, où $\mathsf{mesure}(\cdot)$ désigne la mesure de Jordan. En particulier, si on impose $m'\big([0,1]^d\big)=1$, alors $m'=m_J$.

Exercice 9. Soient deux entiers quelconques $d_1\geqslant 1$ et $d_2\geqslant 1$.
(a) Si $E_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles élémentaires, montrer que leur produit $E_1\times E_2\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ est encore élémentaire, et montrer que :

$$\mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}\big(E_1\times E_2\big)\ =\ \mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_1}}\big(E_1\big)\cdot\mathsf{mesure}_{\mathbb{R}^{d_2}}\big(E_2\big).$$

(b) Si $A_1\subset\mathbb{R}^{d_1}$ et $A_2\subset\mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles bornés Jordan-mesurables, montrer que leur produit $A_1\times A_2\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ est encore Jordan-mesurable, avec :

$$m_{J,\mathbb{R}^{d_1+d_2}}\big(A_1\times A_2\big)\ =\ m_{J,\mathbb{R}^{d_1}}\big(A_1\big)\cdot m_{J,\mathbb{R}^{d_2}}\big(A_2\big).$$

Exercice 10. [Caractérisation de type Carathéodory] Soit $A\subset\mathbb{R}^d$ un sous-ensemble borné Jordan-mesurable. Montrer que pour tout ensemble élémentaire $E\subset\mathbb{R}^d$, on a :

$$m_J^*(A)\ =\ m_J^*\big(A\cap E\big)+m_J^*\big(A\backslash E\big).$$

Exercice 11. Montrer par des exemples que la réunion dénombrable $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$, et l'intersection dénombrable $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$, de sous-ensembles bornés $A_n\subset\mathbb{R}$ Jordan-mesurables, ne sont en général *pas* Jordan-mesurables, même quand elles restent bornées.

Exercice 12. EE

Insuffisances de l'intégrale de Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan Nécessité métaphysique de la Théorie de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont pas de dérivée. Charles HERMITE.

1. Changement conceptuel révolutionnaire dans l'Analyse

Au début des années 1870, un changement conceptuel révolutionnaire commença à percer dans l'Analyse mathématique, changement qui conduisit ultérieurement à une évolution spectaculaire de notre compréhension de notions aussi élémentaires que celle de *fonction*, de *continuité*, de *différentiabilité*, d'*intégrabilité*.

Précédemment, les fonctions utiles en Analyse étaient essentiellement données par des formules ou des expressions développables en série entière, éventuellement en un nombre fini de morceaux, et donc ces fonctions étaient par nature continues, ou presque, avec de plus une infinité de dérivées sauf peut-être en un nombre fini de points. Aussi ces fonctions étaient-elles manifestement intégrables par toute méthode d'intégration connue.

Mais à partir de la fin du XIX$^{\text{ème}}$ siècle, ces idées ont commencé à éprouver leurs limites au contact d'exemples impromptus variés et de problèmes nouveaux qui apparaissaient en Analyse, questions qui ne pouvaient plus être ignorées, et qui requéraient l'élaboration de nouveaux concepts pour être abordées, voire résolues.

En parallèle à ces nouvelles découvertes, des besoins théoriques de type géométrique sont apparus, notamment l'exigence de comprendre plus en profondeur la nature des courbes, leur rectifiabilité, leur extension. Mais surtout, les débuts de la théorie abstraite des ensembles ont été initiés par l'étude des sous-ensembles de la droite réelle ou du plan, et par la question de savoir quelle '*mesure*' assigner à de tels sous-ensembles.

Ceci ne veut pas dire que ne s'exprimait pas une résistance parfois considérable à l'émergence de tels nouveaux points de vue exigés par le sujet. Paradoxalement, quelques uns des mathématiciens les plus éminents de l'époque, ceux dont on aurait pu attendre une haute appréciation de ces directions nouvelles de recherche, se sont avérés être les plus réticents et les plus sceptiques.

Alors le fait que ces idées précurseurs ont finalement résisté aux controverses tient principalement à ce qu'elles s'arrimaient à des questions profondes ouvrant sur la création d'« *extra-êtres mathématiques* » absolument dignes d'étude.

Seule l'insistance d'un questionnement mathématique récurrent a le pouvoir de déceler l'existence d'objet nouveaux qui pourront se fondre ultérieurement dans une harmonie théorique supérieure.

2. Séries de Fourier : complétion

Toutes les fois qu'une fonction bornée :

$$f\colon\quad [-\pi,\,\pi]\longrightarrow\mathbb{C}$$

est Riemann-intégrable, on peut lui associer sa *série de Fourier :*

$$f\,\sim\,\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{f}(n)\,e^{in\theta},$$

dont les coefficients sont donnés par l'intégrale *de Riemann :*

$$\widehat{f}(n):=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,e^{-int}\,\frac{dt}{2\pi},$$

le signe $\sim$ étant là pour signifier que la fonction f n'est en fait pas toujours égale à sa série de Fourier. Au passage, donc, il y a une question très difficile que nous ne regarderons pas pour l'instant : *quelles fonctions sont égales à leur série de Fourier ?*

En utilisant exclusivement l'intégrale élémentaire de Riemann, on peut alors assez aisément démontrer la célèbre *identité de Parseval* que nous admettrons ici :

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big|\widehat{f}(n)\big|^2\,&=\,\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi}\\&<\,\infty,\end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant *finie*, puisque $|f|^2=f\overline{f}$ est aussi bornée Riemann-intégrable. Nous affirmons alors que *cette relation entre les fonctions et leurs coefficients de Fourier n'est pas complètement réciproque lorsqu'on se limite aux fonctions Riemann-intégrables*. Et donc, la théorie de l'intégration de Riemann est insuffisante.

En effet, dans cette égalité entre une somme et une intégrale, observons que la suite (doublement infinie) des coefficients de Fourier de f :

$$\big(\widehat{f}(n)\big)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}$$

appartient à un espace noté classiquement :

$$\ell^2(\mathbb{Z})=\bigg\{z=(z_n)_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}\colon\ z_n\in\mathbb{C},\ \sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}|z_n|^2<\infty\bigg\}.$$

Or on démontre que cet espace $\ell^2(\mathbb{Z})$ est un espace $\mathbb{C}$-vectoriel qui est *complet* pour la norme naturelle :

$$||z||:=\bigg(\sum_{-\infty\leqslant n\leqslant\infty}|z_n|^2\bigg)^{1/2}.$$

Alors il se trouve que si on prend un élément quelconque $z=(z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace, on peut lui associer formellement la 'fonction' :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}z_n\,e^{in\theta},$$

qui n'est peut-être pas bien définie, mais en tout cas, *la question se pose de déterminer quel type de fonction on obtiendrait ainsi*.

En fait, il est assez facile de construire des éléments $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de cet espace vectoriel normé complet $\ell^2(\mathbb{Z})$ tels que la fonction associée $\sum z_n\, e^{in\theta}$ existe bel et bien *mais n'est pas Riemann-intégrable !*

On peut même établir que l'espace des fonctions Riemann-intégrables n'*est pas complet !*

En résumé, on est conduit à (au moins) deux questions :

Question. *Quelles pourraient être les 'fonctions' éventuelles f qui apparaîtraient lorsqu'on complète l'espace des fonctions Riemann-intégrables ?*

Autrement dit, étant donné une suite doublement infinie arbitraire $z = (z_n)_{n\in\mathbb{Z}}$, avec $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2 < \infty$, quelles seraient les fonctions du type $\sum_{n\in\mathbb{Z}} z_n\, e^{in\theta}$? La réponse sera donnée par la théorie de Lebesgue, ce seront exactement les fonctions appartenant à un certain espace noté :

$$L^2\big([-\pi,\,\pi]\big) := \bigg\{ f\colon [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{C}\colon \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}}_{\substack{\text{même symbole}\\ \text{pour une intégrale différente}}} |f(t)|^2\, \frac{dt}{2\pi} \,<\, \infty \bigg\},$$

des fonctions dites *de carré intégrable*, *l'intégration s'effectuant au sens de Lebesgue*, plus général que celui de Riemann.

Question. *Comment intègre-t-on de telles fonctions, de manière à vérifier l'identité de Parseval en toute généralité ?*

Réponse : en utilisant l'intégrale de Lebesgue !

3. Limites de fonctions continues

Soit une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$:

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Supposons que pour tout $x \in [0,1]$, la limite ponctuelle :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

existe, et interrogeons-nous sur la nature de la fonction-limite f.

Lorsque la convergence est uniforme, les conclusions sont faciles, puisque f est alors partout continue. Mais dès qu'on supprime l'hypothèse de convergence uniforme, les choses changent radicalement, et les phénomènes qui apparaissent peuvent devenir très subtils.

Un exemple d'un tel phénomène, que nous détaillerons au chapitre suivant, est donné par une suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ qui converge simplement vers une fonction f en satisfaisant les conditions suivantes :

(i) $0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [0,1]$;

(ii) en tout point x fixé, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n\geqslant 1}$ est monotone décroissante lorsque $n \to \infty$;

(iii) la fonction-limite est extrêmement discontinue, et en particulier, elle n'est *pas* Riemann-intégrable.

Mais alors, en vertu des deux conditions **(i)** et **(ii)**, la suite réelle :

$$\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_{n\geqslant 1}$$

est positive monotone décroissante, *donc elle admet une limite* $\in \mathbb{R}_+$. Alors il est tout à fait naturel de se poser la :

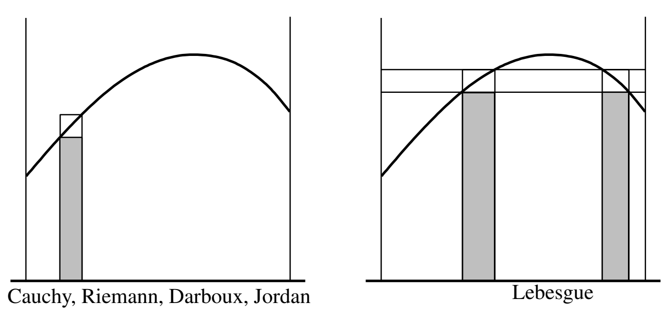
Question. *Quelle méthode d'intégration pourrait être développée afin qu'avec une nouvelle théorie — en admettant le même symbole $\int$ qui aurait une signification plus étendue que dans la théorie de Riemann — on puisse intégrer f et obtenir :*

$$\underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{\text{à inventer}} = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

Encore une fois, la réponse est : avec la théorie de l'intégrale de Lebesgue !

4. Trancher selon l'axe des ordonnées

Supposons qu'on veuille, connaissant chaque jour à 1 cm près l'étiage d'un cours d'eau dont le flux varie assez lentement, déterminer son niveau moyen dans une année non bissextile. Un premier procédé consistera à ajouter les étiages de tous les jours de l'année et à diviser la somme obtenue par 365. Un second procédé sera de compter pour chaque étiage évalué en centimètres le nombre de jours où le fleuve a atteint cette hauteur, puis de faire le produit de ce nombre par l'étiage correspondant, d'ajouter enfin tous les résultats obtenus pour les divers échelons centimétriques. Le résultat divisé par 365 donne la moyenne cherchée.

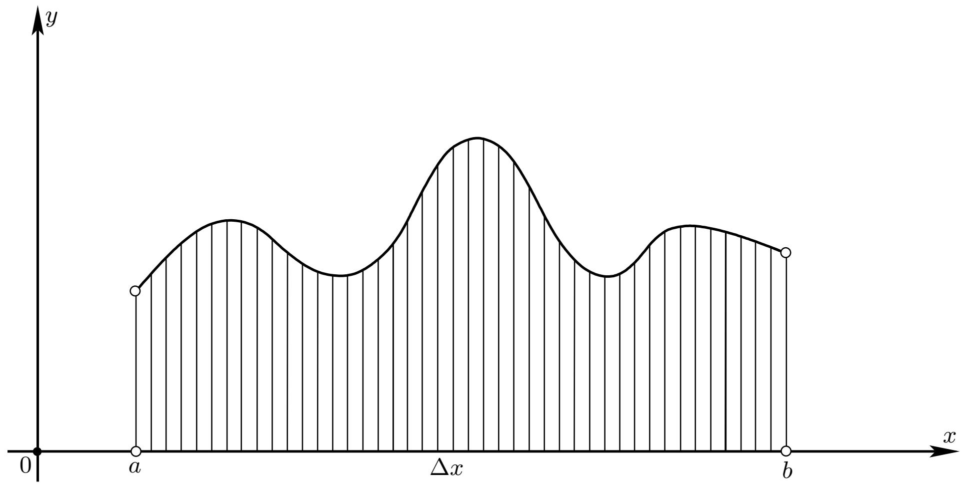


La première méthode rappelle l'opération de Riemann, la deuxième celle de Lebesgue.
Arnaud DENJOY.

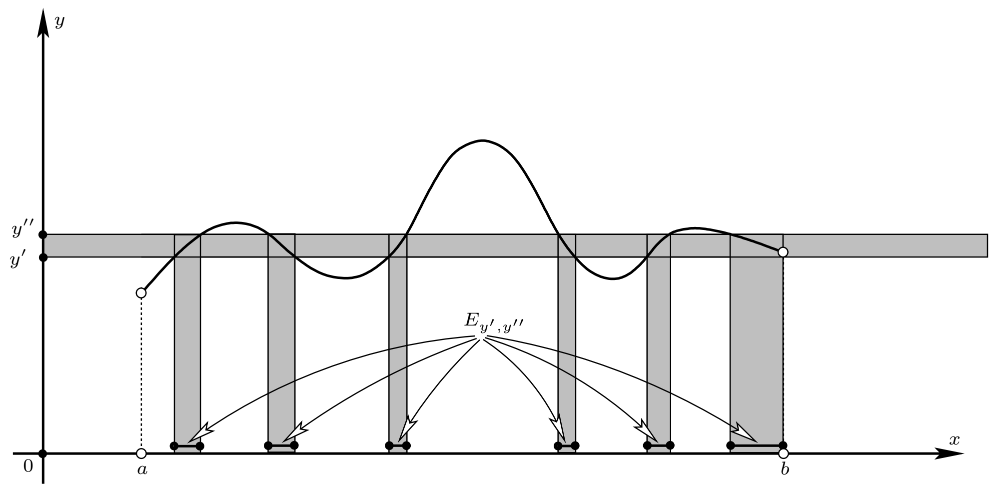
Géométriquement, l'idée fondamentale de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est très simple : elle consiste en un *renversement de la perspective de découpage*.

Étant donné par exemple pour simplifier une fonction continue positive $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie sur un intervalle fermé borné $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, rappelons que son intégrale est l'aire de son hypographe :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mathsf{Aire}\Big(\big\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\colon\ 0\leqslant y\leqslant f(x)\big\}\Big).$$



Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan emploient la méthode la plus directement intuitive, qui consiste à découper cette aire en *tranches fines verticales*.



À l'inverse, Lebesgue découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ en *tranches fines horizontales*.

Par exemple, étant donné deux réels y' et y'' assez proches l'un de l'autre et satisfaisant :

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant y' < y'' \leqslant \sup_{[a,b]} f,$$

la bande horizontale fine :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon\; y' \leqslant y \leqslant y''\big\}$$

découpe le graphe $\{y = f(x)\}$ de f comme illustré sur le diagramme. Ensuite, en relation avec l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, un tel découpage fait naturellement apparaître le sous-ensemble suivant de l'axe des x :

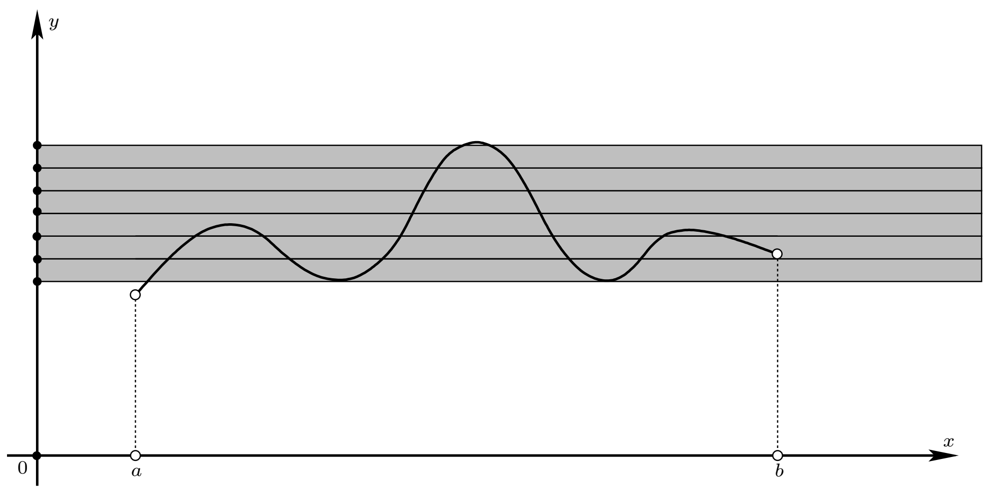
$$E_{y',y''} := \big\{x \in [a,b] \colon\; y' \leqslant f(x) \leqslant y''\big\},$$

qui consiste en six segments sur la figure. Alors dans la situation favorable où f est continue, lorsqu'on calcule l'aire de l'hypographe $\{0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, à toute tranche fine horizontale $\mathbb{R} \times [y', y'']$ est associée une aire approximativement égale à :

$$\underbrace{\frac{y'+y''}{2}}_{\substack{\text{hauteur}\\ \text{commune}\\ \text{approximative}}} \cdot \underbrace{\mathsf{mesure}\big(E_{y',y''}\big)}_{\substack{\text{longueur}\\ \text{totale}\\ \text{de la base}}},$$

pourvu que l'on puisse « *mesurer* » la longueur de tels sous-ensembles $E_{y',y''} \subset [a, b]$.

Effectuer comme Lebesgue des découpages fins horizontaux fait naturellement naître un nouveau problème, le Problème de la mesure*, détaillé dans la section suivante.*



En résumé, Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan conceptualisent l'intégration comme un passage à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_k f(x_k)\,\underbrace{\big(x_k - x_{k-1}\big)}_{\substack{\text{subdivision}\\ \text{de l'axe}\\ \text{horizontal}}}.$$

Lebesgue, quant à lui, passe à la limite dans les formules d'approximation :

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_l \underbrace{y_l}_{\substack{\text{subdivision}\\ \text{de l'axe}\\ \text{vertical}}} \cdot \mathsf{mesure}\big\{x \in [a,b] \colon\ y_{l-1} \leqslant f(x) \leqslant y_l\big\},$$

mais il doit auparavant développer une vaste et nouvelle *Théorie de la Mesure*.

5. Le problème de la mesure

Afin d'essayer de résoudre toutes ces questions, le problème fondamental sur lequel Lebesgue lui-même a débouché est donc celui d'assigner une mesure aux ensembles de points. Pour le formuler de manière imprécise en dimension $d = 2$, étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^2$, ce problème demande comment définir son aire 2-dimensionnelle $m_2(E)$, et ce, en généralisant la notion standard de surface pour les figures géométriques élémentaires.

Essayons plutôt d'abord de considérer ce problème en dimension $d = 1$, à savoir tentons de formuler la question de construire une mesure 1-dimensionnelle $m = m_1$ qui généralisait considérablement la notion de longueur d'un segment dans $\mathbb{R}$.

Disons alors que nous recherchons une fonction positive m définie sur la famille des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — fonction que nous autorisons donc à prendre la valeur ∞ au cas où les longueurs soient infinies —, et qui satisfasse les conditions naturelles suivantes :

(i) $m(E) = b - a$ lorsque $E = [a, b]$ est un intervalle compact, $-\infty < a < b < \infty$, de longueur euclidienne $b - a$;

(ii) $m(E) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n)$, toutes les fois que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ où les ensembles E_n sont disjoints deux à deux.

Cette deuxième condition **(ii)** s'appelle *addititivé dénombrable* de la mesure m. Elle implique en particulier l'additivité finie :

(i') $m\big(E_1 \cup \cdots \cup E_N\big) = m(E_1) + \cdots + m(E_N)$ lorsque $E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset$ pour $j_1 \neq j_2$.

Toutefois — et c'est là un point crucial —, la condition d'additivité par réunion *infinie* dénombrable disjointe sera un point-force majeur de la théorie de la mesure développée par Borel et Lebesgue. En fait, la condition restreinte **(i')** d'additivité disjointe *finie* est celle qui a été choisie par une théorie de la mesure plus ancienne attribuée à Jordan, mais il s'avère comme nous allons le voir que cette dernière est définitivement limitée et inadéquate.

Aux axiomes **(i)** et **(ii)**, on ajoute la demande parfaitement naturelle que la mesure soit aussi invariante par translation :

(iii) $m(E + h) = m(E)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$.

Un résultat fondamental de la théorie montre alors qu'il existe une unique telle mesure m, appelée *mesure de Lebesgue* sur $\mathbb{R}$, et lorsqu'on se limite à la classe des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}$ qui sont mesurables de cette manière-là, on obtient une classe déjà extrêmement étendue — bien qu'elle ne contienne pas *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}$ —, classe qui contient tous les ouverts, tous les fermés, qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, par passage au complémentaire, ces opérations pouvant de plus être répétées une infinité (dénombrable) de fois.

Ce sera donc par la construction mathématique complète de cette *mesure de Lebesgue* que nous débuterons notre étude de la théorie. Ensuite, grâce à de telles fondations fermes et solides, nous pourrons développer la théorie de l'intégration, laquelle, par toute sa splendeur abstraite éclatante — comme un soleil resplendissant réservé aux prisonniers qui seront parvenus à s'extirper de la caverne de Platon —, résoudra d'un seul trait tous les problèmes que nous venons de mentionner.

6. Une chronologie succincte

Concluons ce chapitre de transition motivationnelle en listant quelques événements marquants qui ont marqué les premiers moments historiques du développement de l'Analyse infinie.

1872 – Weierstrass construit une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point.

1881 – Jordan introduit les fonctions dites *à variation bornée*, et plus tard en 1887, il montre qu'elles sont naturellement reliées à la rectifiabilité des courbes.

1883 – Cantor introduit l'ensemble ternaire qui porte son nom, source de nombreux contre-exemples pathologiques mais intéressants (*cf.* le chapitre qui suit).

1890 – Peano construit une courbe continue qui parcourt tous les points d'un carré.

1898 – Borel introduit les ensembles mesurables.

1902 – Lebesgue développe la théorie de la mesure et la théorie de l'intégration.

1905 – Vitali construit un ensemble non-mesurable en utilisant l'Axiome du choix.

1906 – Fatou applique la théorie de Lebesgue à l'Analyse Complexe.

7. Exercices

Exercice 1. Construire une suite de fonctions Riemann-intégrables $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ sur $[-\pi, \pi]$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left|f_n(\theta)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi},$$

mais dont les limites ponctuelles :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\theta)$$

n'existent en *aucun* point $\theta \in [-\pi, \pi]$. Indication: Trouver une suite d'intervalles $I_n \subset [-\pi, \pi]$ dont la longueur tend vers 0 telle que chaque point $\theta \in [-\pi, \pi]$ appartient à un nombre infini de I_n sans appartenir à tous, et prendre $f_n := \mathbf{1}_{I_n}$.

Exercice 2. Sur $[0, 2\pi]$, soit la fonction définie par :

$$f(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{en } \theta = 0, \\ \log \dfrac{1}{\theta} & \text{lorsque } 0 < \theta \leqslant 2\pi, \end{cases}$$

et soit la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions définies par :

$$f_n(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } 0 \leqslant \theta < \frac{1}{n}, \\ f(\theta) & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leqslant \theta \leqslant 2\pi. \end{cases}$$

(a) Vérifier que f n'est pas Riemann-intégrable, tandis que les f_n le sont.

(b) Montrer que $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $\mathscr{R}[0, 2\pi]$ des fonctions Riemann-intégrables g sur $[0, 2\pi]$ muni de la semi-norme $\int_0^{2\pi} \left|g(\theta)\right| \frac{d\theta}{2\pi}$.

(c) Interpréter le résultat.

Exercice 3. Soit à nouveau $\mathscr{R}[0, 2\pi]$ l'espace des fonctions Riemann-intégrables g sur $[0, 2\pi]$, mais cette fois-ci muni d'une autre semi-norme :

$$\|g\|_2 := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left|g(\theta)\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Montrer qu'il existe des fonctions Riemann-intégrables non identiquement nulles telles que $\|g\|_2 = 0$.

(b) Cependant, si $g \in \mathscr{R}[0, 2\pi]$ satisfait $\|g\|_2 = 0$, montrer que $g(\theta_0) = 0$ en tout point $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ en lequel g est continue.

(c) Réciproquement, montrer que si $g \in \mathscr{R}[0, 2\pi]$ s'annule en tous ses points de continuité, alors $\|g\|_2 = 0$.

Ensemble(s) de Cantor
Alias
Poussière(s) de Cantor

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Construction triadique

> Le brassage incessant de particules d'origines très diverses aboutit à une dispersion et à un mélange tels que *une poussière est un véritable complexe de toutes sortes de corps.* Les poussières constituées d'une seule catégorie d'éléments ne se rencontrent que dans des circonstances spéciales. Le plus souvent, les poussières sont composées, en proportions très variables, de particules inertes, et de particules vivantes.
> A. ASSAILLY.

L'*ensemble triadique de Cantor* joue un rôle prééminent à la fois dans la théorie abstraite des ensembles et dans l'Analyse en général, parce qu'il constitue une source presque inépuisable de contre-exemples troublants au premier abord, mais en fait très éclairants.

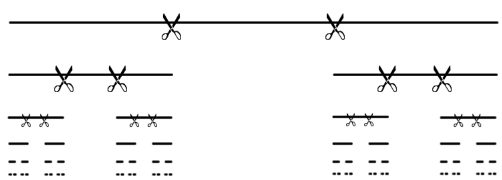
Comment est-il construit ?

Partons de l'intervalle unité dans $\mathbb{R}$:

$$C_0 := [0, 1].$$

Découpons-le en trois segments d'égale longueur $\frac{1}{3}$, supprimons le morceau central, et conservons seulement les deux morceaux gauche et droite, ce qui nous donne 2^1 intervalles de longueur $\frac{1}{3}$:

$$C_1 := \left[\frac{0}{3}, \frac{1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{3}\right].$$



Coupons ensuite à nouveau chacun de ces deux segments $[0, 1/3]$, $[2/3, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^2 intervalles de longueur $\frac{1}{3^2}$:

$$C_2 := \left[\frac{0}{9}, \frac{1}{9}\right] \bigcup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \bigcup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \bigcup \left[\frac{8}{9}, \frac{9}{9}\right].$$

Coupons ensuite à nouveau chacun de ces quatre segments $[0, 1/9]$, $[2/9, 1/3]$, $[2/3, 7/9]$, $[8/9, 1]$ en trois segments égaux et supprimons le morceau central, ce qui nous donne 2^3 intervalles de longueur $\frac{1}{3^3}$:

$$C_3 := \left[\frac{0}{27}, \frac{1}{27}\right] \bigcup \left[\frac{2}{27}, \frac{3}{27}\right] \bigcup \left[\frac{6}{27}, \frac{7}{27}\right] \bigcup \left[\frac{8}{27}, \frac{9}{27}\right] \bigcup \left[\frac{18}{27}, \frac{19}{27}\right] \bigcup \left[\frac{20}{27}, \frac{21}{27}\right] \bigcup \left[\frac{24}{27}, \frac{25}{27}\right] \bigcup \left[\frac{26}{27}, \frac{27}{27}\right].$$

Itérons ces découpages, et obtenons pour tout entier $n \geqslant 0$ un certain sous-ensemble $C_n \subset [0, 1]$ constitué de 2^n intervalles fermés tous de même longueur $\frac{1}{3^n}$:

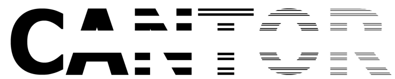
$$C_n := \left[\frac{0}{3^n}, \frac{1}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3^n}, \frac{3}{3^n}\right] \bigcup \cdots\cdots \bigcup \left[\frac{3^n-3}{3^n}, \frac{3^n-2}{3^n}\right] \bigcup \left[\frac{3^n-1}{3^n}, \frac{3^n}{3^n}\right].$$

Nous allons montrer dans un instant comment écrire les intervalles qui composent C_n. En tout cas, on a par construction :

$$C_{n+1} \subset C_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Définition 1.1. L'*ensemble triadique de Cantor* est l'intersection infinie de tous ces C_n :

$$C := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$



Dans un langage imagé, on appelle parfois C la *poussière de Cantor*.

Lemme 1.2. *Ce sous-ensemble $C \subset [0,1]$ est non vide, fermé, borné, donc compact.*

Démonstration. Visiblement, les deux extrémités 0 et 1 de C_0 appartiennent à tous les C_n, donc $0 \in C$ et $1 \in C$, ce qui donne $C \neq \emptyset$.

Mais plus généralement en fait, on se convainc en y réfléchissant que les $2 \cdot 2^n$ extrémités des 2^n intervalles qui composent C_n restent constamment dans $C_{n+1}, C_{n+2}, C_{n+3}, \dots$, et donc C contient ces $2 \cdot 2^n$ extrémités de C_n, et ce pour tout $n = 0, 1, 2, \dots$, ce qui montre encore mieux que C est (vraiment) non vide.

Enfin, chaque C_n étant fermé, puisqu'une intersection quelconque de fermés est encore fermée, on a bien que $C = \cap_n C_n$ est fermé, et C est d'ailleurs aussi trivialement borné, car contenu dans $[0,1]$. □

Proposition 1.3. *Pour tout $n \geqslant 1$, l'ensemble C_n est la réunion des 2^n intervalles fermés de la forme :*

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

où les $Q_{a_1,\dots,a_n} \in \mathbb{N}$ sont tous les 2^n entiers que l'on peut écrire en base 3 sous la forme :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + a_2 \cdot 3^{n-2} + \cdots + a_{n-1}\, 3 + a_n \cdot 3^0,$$

avec des entrées égales à 0 ou à 2, mais jamais égales à 1 :

$$a_1 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_2 = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad \cdots\cdots \qquad a_{n-1} = \begin{cases} 0, \\ 2, \end{cases} \qquad a_n = \begin{cases} 0, \\ 2. \end{cases}$$

Comme pour l'écriture décimale des nombres entiers, on peut si on le souhaite abréger l'écriture de ces $Q_{a_1,\dots,a_n}$ en base 3 simplement comme :

$$a_1\, a_2\, \cdots\, a_{n-1}\, a_n,$$

mais nous ne servirons pas de cela pour l'instant.

Démonstration. Tout d'abord concernant C_1, les quatre extrémités de ses deux intervalles sont bien de la forme annoncée :

$$C_1 = \left[\frac{0}{3},\ \frac{0+1}{3}\right] \bigcup \left[\frac{2}{3},\ \frac{2+1}{3}\right].$$

Supposons maintenant le lemme vrai à un certain niveau $n \geqslant 1$, et démontrons-le au cran $n+1$. Par construction, on doit enlever le tiers central de chaque segment quelconque :

$$\left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\, \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right],$$

qui compose C_n, et pour ce faire, il est avisé de ré-écrire un tel segment général sous la forme :

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}},\, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right],$$

puisqu'alors la suppression du tiers central se fait voir aisément,

$$\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^{n+1}},\, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}}\right] \bigcup \underbrace{\left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^{n+1}},\, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}}\right]}_{\text{supprimer}} \bigcup \left[\frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+2}{3^{n+1}},\, \frac{3\,Q_{a_1,\dots,a_n}+3}{3^{n+1}}\right].$$

Mais alors les entiers $Q_{a_1,\dots,a_n,a_{n+1}}$ des deux extrémités *gauches* des deux intervalles restants :

$$\begin{aligned} 3\,Q_{a_1,\dots,a_n} &= a_1 \cdot 3^n + a_2 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^3 + a_n \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, \\ 3\,Q_{a_1,\dots,a_n} + 2 &= a_1 \cdot 3^n + a_2 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot 3^3 + a_n \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, \end{aligned}$$

sont bien, pour le niveau $n+1$, de la forme générale annoncée, avec effectivement a_{n+1} égal à 0 ou à 2. □

Lemme 1.4. *La somme des longueurs des 2^n segments de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent le sous-ensemble $C_n \supset C$ contenant l'ensemble de Cantor C tend vers 0 :*

$$\frac{2^n}{3^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

et l'ensemble-limite $C = \cap_n C_n$ est de mesure nulle, au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

De plus, l'intérieur de $C = \cap_n C_n$ est vide :

$$\mathsf{Int}\, C = \emptyset.$$

Démonstration. L'assertion sur la mesure est laissée en exercice de compréhension conceptuelle.

Par contradiction, si $\mathsf{Int}\, C$ était non vide, il contiendrait un certain intervalle ouvert $]c, d[\, \subset [0,1]$ avec $0 \leqslant c < d \leqslant 1$:

$$]c,\, d[\ \subset\ \mathsf{Int}\, C,$$

lequel serait donc de longueur *strictement positive :*

$$d - c > 0.$$

Sachant que :

$$\mathsf{Int}\, C\ \subset\ C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

un tel intervalle $]c, d[$ devrait alors être contenu dans tous les C_n :

$$]c,\, d[\ \subset\ C_n \qquad\qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Mais comme C_n est réunion d'intervalles fermés disjoints d'égale longueur $\frac{1}{3^n} \longrightarrow 0$ qui tend vers zéro, cela est absurde ! □

Rappelons maintenant plus en détail que tout entier $n \in \mathbb{N}$ admet une représentation-écriture dans une base $\beta \geqslant 2$ quelconque, par exemple la base décimale $\beta = 10$, ce qui dans le cas de la base $\beta = 3$ s'exprime par l'énoncé suivant.

Lemme 1.5. *Pour tout entier $Q \in \mathbb{N}$, il existe un unique $n \in \mathbb{N}$ et il existe des éléments uniques :*

$$a_1, \dots, a_n \in \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

qui représentent :

$$Q = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot 3^1 + a_1 \cdot 3^0. \qquad \square$$

Plutôt que de démontrer cet énoncé élémentaire, illustrons-le :

$$\begin{array}{llll} 0 = 0 \cdot 3^0, & 3 = 1 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 6 = 2 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, & 9 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 0 \cdot 3^0, \\ 1 = 1 \cdot 3^0, & 4 = 1 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 7 = 2 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, & 10 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 1 \cdot 3^0, \\ 2 = 2 \cdot 3^0, & 5 = 1 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 8 = 2 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0, & 11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0. \end{array}$$

De même, rappelons que tout nombre réel $c \in [0, 1]$ compris entre 0 et 1 admet un développement décimal éventuellement infini :

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{10^i},$$

qu'on abrège habituellement en :

$$c = 0, c_1 c_2 \cdots c_n \cdots ,$$

avec $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. De tels développements ne sont en général *pas* uniques, puisqu'il faut accepter toutes les *égalités-ambiguïtés* du type « retenues en cascade infinie du nombre 1 » :

$$0,\, c_1 c_2 \cdots \overset{1}{c_n} \overset{1111111111}{9999999999} \cdots \;=\; 0, c_1 c_2 \cdots (c_n + 1)0000000000 \cdots ,$$

lorsque $0 \leqslant c_n \leqslant 8$.

Théorème 1.6. *Tout élément $x \in C$ de l'ensemble triadique de Cantor C s'écrit de manière* unique *sous la forme d'un « développement infini en base 3 ne contenant jamais 1 », à savoir sous la forme dite* triadique *:*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad a_i \in \big\{0,\, 2\big\},$$

avec des entiers a_i contraints à n'être égaux qu'à 0 ou à 2, mais jamais à 1.

Réciproquement, tout tel nombre réel x appartient à C.

Il importe de faire observer ici que le développement triadique d'un nombre *quelconque* $c \in [0, 1]$:

$$c = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{3^i}, \qquad c_i \in \big\{0,\, 1,\, 2\big\},$$

incorpore en général des 1 !

De plus, comme le rôle que joue le nombre 9 en base 10 est joué par le nombre 2 en base 3, il se trouve pour un élément quelconque de l'ensemble de Cantor :

$$x = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots \in C,$$

qu'il ne peut y avoir aucune égalité-ambiguïté du type :

$$0,\, a_1a_2\cdots \overset{1}{a_n}\overset{1111111111}{2222222222}\cdots \;=\; 0, a_1a_2\cdots(a_n+1)0000000000\cdots\,,$$

où $a_n \neq 2$, puisqu'alors $a_n = 0$, d'où $a_n + 1 = 1$, et une telle deuxième écriture *est exclue de :*

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad \text{avec } a_i \in \big\{0,\, 2\big\}.$$

Démonstration. Montrons pour commencer l'*unicité* de l'écriture. Par contradiction, supposons donc que $x \in C$ admette deux écritures différentes :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \qquad \text{et} \qquad x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \qquad \text{avec } a_i,\, b_i \in \big\{0,\, 2\big\}.$$

Si on note n le plus petit entier i tel que $a_i \neq b_i$, on peut supposer (exercice mental) que $a_n = 0$ et $b_n = 2$. Mais alors on peut soumettre à une *majoration* la première écriture de x en termes des a_i :

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{0}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{3}} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{1}{3^n},
\end{aligned}$$

tandis que la deuxième écriture de x en termes des b_i peut être soumise à une *minoration :*

$$\begin{aligned}
x &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{b_i}{3^i} + \frac{2}{3^n} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{b_i}{3^i} \\
{\scriptstyle [a_1 = b_1, \ldots, a_{n-1} = b_{n-1}]} \qquad &\geqslant \sum_{i=1}^{n-1} \frac{a_i}{3^i} + \frac{2}{3^n},
\end{aligned}$$

et ces deux inégalités mises ensemble sont absurdes (vérification visuelle).

Montrons ensuite que tous les nombres de la forme :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

appartiennent bel et bien à C. En effet, si, pour tout entier $n \geqslant 1$ fixé, on découpe :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{3^i} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n} \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i\, 3^n}{3^i}}_{=:\, Q_{a_1,\dots,a_n}} + \underbrace{\sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}}_{\mathsf{reste}}, \end{aligned}$$

et si on introduit le nombre entier :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} := a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0,$$

alors puisque le terme-reste est majoré par :

$$\begin{aligned} \mathsf{reste} &\leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^i} \\ &= \frac{1}{3^n}, \end{aligned}$$

il est manifestement clair que l'on a bien :

$$\begin{aligned} x &= \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n} + \mathsf{reste} \\ &\in \left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right]. \end{aligned}$$

Montrons pour terminer qu'un élément quelconque $x \in C$ s'écrit effectivement sous la forme annoncée. Par hypothèse, donc :

$$x \in C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n,$$

ce qui veut dire en particulier que, pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire fixé, on a :

$$x \in C_{n+1} \subset C_n.$$

Par conséquent, x appartient à l'un des deux intervalles de C_{n+1} qui est contenu dans un des intervalles de C_n, à savoir il existe :

$$Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}} = b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0, \qquad b_1,\dots,b_n,b_{n+1} \in \{0,\, 2\},$$

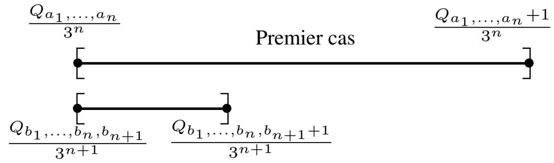
et il existe :

$$Q_{a_1,\dots,a_n} = a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0, \qquad a_1,\dots,a_n \in \{0,\, 2\},$$

tels que :

$$x \in \left[\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}},\ \frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}+1}{3^{n+1}+1}\right] \subset \left[\frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},\ \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}+1}{3^n}\right].$$

Mais par construction, le b-intervalle est l'un des deux tiers gauche et droite de l'a-intervalle, et donc deux cas peuvent se produire.



Premier cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec l'extrémité gauche de l'a-intervalle :

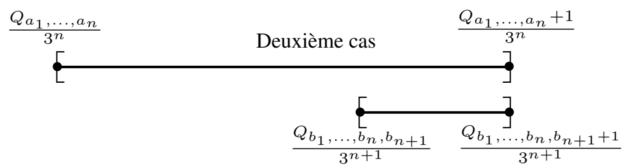
$$\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \dots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 0.$$



Deuxième cas : l'extrémité gauche du b-intervalle coïncide avec le point situé au $2/3$ de l'a-intervalle :

$$\frac{Q_{b_1,\dots,b_n,b_{n+1}}}{3^{n+1}} = \frac{Q_{a_1,\dots,a_n}}{3^n} + \frac{2}{3}\,\frac{1}{3^n},$$

c'est-à-dire :

$$\frac{b_1 \cdot 3^n + \cdots + b_n \cdot 3^1 + b_{n+1} \cdot 3^0}{3^{n+1}} = \frac{a_1 \cdot 3^{n-1} + \cdots + a_n \cdot 3^0}{3^n} + \frac{2}{3^{n+1}},$$

ce qui implique (exercice mental) :

$$b_1 = a_1, \ \dots, \ b_n = a_n, \ b_{n+1} = 2.$$

Dans les deux cas, les n premières b-entrées demeurent égales aux a-entrées, et la $n+1$-ème b_{n+1} est égale soit à 0, soit à 2. Ceci montre qu'à $x \in C$ est associée une unique série infinie :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad \text{avec } a_i \in \{0, 2\},$$

et comme une telle série est convergente (exercice), c'est que x est égal à elle. □

Dans l'Exercice 3, on démontre que l'ensemble de Cantor, ainsi que ses généralisations, est totalement discontinu. L'énoncé suivant confirme que C est bel est bien non vide, et même très « gros », du point de vue de la théorie des ensembles.

Proposition 1.7. *L'ensemble triadique de Cantor* $C \subset [0, 1]$ *est non-dénombrable, de cardinal égal à celui de* $[0, 1]$.

Démonstration. La théorie élémentaire des cardinaux étant supposée connue, l'application qui à un élément quelconque de C :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}$$

associe le nombre de $[0,1]$ dont l'écriture dyadique (en base deux) est :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{a}_i}{2^i} \qquad\qquad \text{avec } \widetilde{a}_i := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } a_i = 0, \\ 1 & \text{lorsque } a_i = 2, \end{cases}$$

est *surjective*. Donc C se surjecte sur $[0,1]$, et comme $[0,1]$ est équipotent à $\mathbb{R}$ (exercice de révision), *i.e.* de même cardinal, ceci démontre bien que C est non dénombrable. $\square$

En résumé, donc, tout le paradoxe dans la nature de l'ensemble de Cantor $C \subset [0,1]$, c'est qu'il est :

□ à la fois « *négligeable* » comme de la poussière éparse, au sens où il ne contient aucun intervalle, il est totalement discontinu, il est de mesure nulle ;

□ à la fois « *substantiel* » du point de vue de la théorie des ensembles, car il contient « autant de points » que l'intervalle $[0,1]$.

C'est grâce à ces deux propriétés contrastées qu'on peut se servir de C ou de ses avatars pour élaborer des (contre-)exemples mathématiques déterminants qui jouent le rôle de carrefours dialectiques cruciaux pour toute l'orientation *en profondeur* de la théorie de la mesure due à Borel et à Lebesgue, théorie que nous allons bientôt (re)développer ensemble dans le chapitre qui suit.

2. Insuffisance de la théorie de l'intégrale de Riemann : Preuve par un exemple

Modifions maintenant la construction de l'ensemble triadique de Cantor $C \subset [0,1]$ afin que la somme des longueurs des 2^n intervalles résiduels de longueur $\frac{1}{3^n}$ qui constituent C_n, à savoir la quantité $\frac{2^n}{3^n} \longrightarrow 0$, ne tende *plus* vers zéro, fait qui impliquait en particulier que C était de mesure nulle, au sens de la définition utilisée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Autrement dit, cherchons à construire un certain nouveau sous-ensemble de type « poussière » :

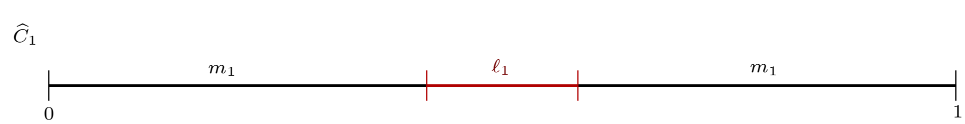
$$\widehat{C} \subset [0,1],$$

mais qui ne sera plus de mesure nulle. Utilisons ensuite un tel sous-ensemble pathologique $\widehat{C} \subset [0,1]$ pour construire une fonction bornée :

$$\widehat{f}\colon \quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

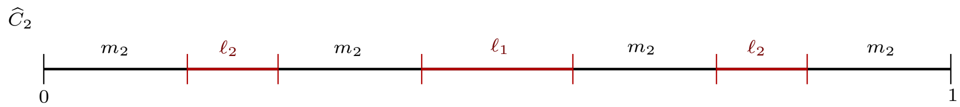
dont les points de discontinuité sont exactement les points de $\widehat{C}$, ce qui offrira un exemple de fonction qui n'est pas Riemann-intégrable, puisque nous savons qu'une fonction est Riemann-intégrable si et seulement si l'ensemble de ses points de discontinuité est de mesure nulle.

L'idée de la nouvelle recette est simple : perforer pas à pas les intervalles, en ajustant la taille des trous pour que la somme totale des longueurs des intervalles supprimés ne tende *pas* vers 1.



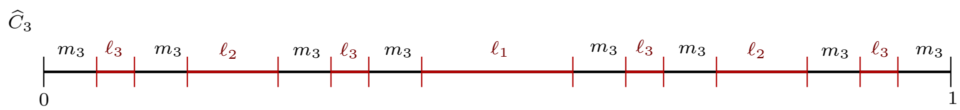
Autrement dit, et plus précisément, partons de l'intervalle $[0,1]$, perforons un sous-intervalle ouvert situé centralement de longueur $0 < \ell_1 < 1$, et notons m_1 l'égale longueur des deux intervalles fermés restants :

$$1 = 2^0\,\ell_1 + 2^1\,m_1.$$



Ensuite, perforons chacun de ces deux intervalles restants en deux intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_2 < \frac{1}{2}\,m_1$ situés centralement avec :

$$\begin{aligned} m_1 &= \ell_2 + 2\,m_2, \\ 1 &= \ell_1 + 2\,\ell_2 + 2^2\,m_2. \end{aligned}$$



Itérons ce processus, et pour chaque entier $n \geqslant 1$ en supposant $\widehat{C}_n$ construit, supprimons 2^n intervalles ouverts de longueur $0 < \ell_{n+1} < \frac{1}{2}\,m_n$ situés centralement dans chacun des 2^n intervalles fermés restants d'égale longueur m_n :

$$\begin{aligned} m_n &= \ell_{n+1} + 2\,m_{n+1}, \\ 1 &= \ell_1 + 2^1\,\ell_2 + \cdots + 2^n\,\ell_{n+1} + 2^{n+1}\,m_{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne un certain sous-ensemble :

$$\widehat{C}_{n+1} \subset \widehat{C}_n \subset [0,1].$$

Définissons enfin l'ensemble de Cantor généralisé :

$$\widehat{C} := \bigcap_{n=1}^{\infty} \widehat{C}_n,$$

qui est non vide, fermé, borné, donc compact.

Afin d'obtenir ainsi un ensemble $\widehat{C}$ qui soit de mesure positive, ajustons le choix des 2^{n-1} longueurs enlevées $\ell_n > 0$ à chaque étape de telle sorte que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n < 1.$$

Sous cette hypothèse, on démontre effectivement dans l'Exercice 4 que $\widehat{C} \subset [0,1]$ n'est *pas* un sous-ensemble de mesure 0.

Théorème 2.1. *Il existe une suite de fonctions continues :*

$$f_n\colon\quad [0,1] \longrightarrow \mathbb{R} \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

avec :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant 1 \qquad\qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

telle qu'en tout point fixé $x \in [0,1]$, la suite réelle $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ est monotone décroissante, de telle sorte que la fonction-limite simple :

$$\widehat{f}(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existe et est bien définie, mais est extrêmement discontinue, et plus précisément, est non-continue en tout *point $x \in \widehat{C}$.*

En particulier, donc, cette fonction-limite $\widehat{f}$ n'est pas Riemann-intégrable, puisque l'ensemble de ses points de discontinuité, qui contient $\widehat{C}$, n'est *pas* de mesure 0.

Toutefois, par simple intégration des inégalités fonctionnelles :

$$0 \leqslant f_{n+1} \leqslant f_n,$$

on déduit les inégalités numériques :

$$0 \leqslant \int_0^1 f_{n+1}(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,dx,$$

qui montrent que la suite de nombre réels positifs :

$$\bigg(\int_0^1 f_n(x)\,dx\bigg)_{n=1}^{\infty}$$

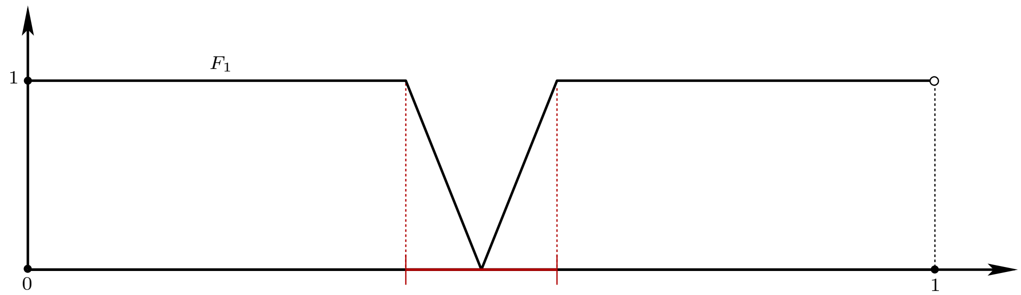
admet forcément une limite, puisqu'elle est décroissante. Alors toute l'insatisfaction théorique que l'on doit ressentir vis-à-vis de la théorie de l'intégration au sens de Riemann provient du fait que l'on est incapable d'intervertir $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ limite et intégrale :

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx}_{\text{nombre qui existe tout à fait}} \overset{??}{=} \overbrace{\int_0^1}^{\substack{\text{concept}\\ \text{d'intégrale}\\ \text{insuffisant}}} \underbrace{\widehat{f}(x)}_{\substack{\text{fonction}\\ \text{qui existe}\\ \text{tout à fait}}}\,dx,$$

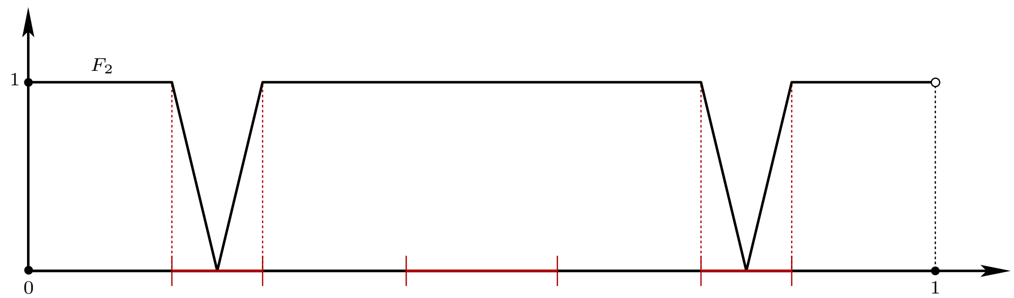
simplement parce que le concept d'intégrale riemannienne est trop faible pour intégrer les fonctions telles que cette fonction-limite un peu pathologique $\widehat{f}$. Or dans la belle théorie de Lebesgue, les fonctions telles que $\widehat{f}$ apparaîtront naturellement comme mesurables puis intégrables, et l'interversion $\lim \int f_n = \int \lim f_n$ qu'on adore reviendra vers nous auréolée de toute sa splendeur commutative.

Démonstration. Les arguments seront partiellement laissés en exercice au lecteur. Soit donc $\widehat{C}$ l'ensemble de Cantor généralisé construit il y a quelques instants, lequel est donc de mesure positive :

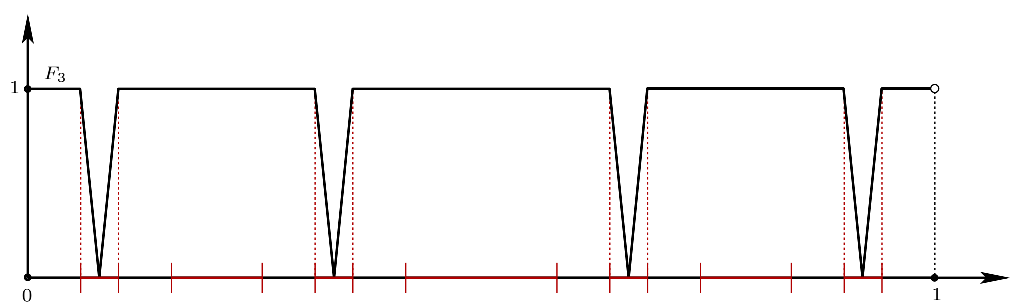
$$m(\widehat{C}) > 0.$$



Soit $F_1 \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_1 = 1$ dans le complémentaire du premier intervalle supprimé, et telle que $F_1 = 0$ au centre de cet intervalle.



De manière similaire, soit $F_2 \colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ la fonction continue affine par morceaux telle que $F_2 = 1$ dans le complémentaire des deux intervalles supprimés à la deuxième étape, et telle que $F_2 = 0$ aux deux points qui sont centres des ces deux intervalles.



Pour tout entier $n \geqslant 3$, définissons par récurrence une fonction F_n continue affine par morceaux qui généralise F_1 et F_2.

Introduisons alors la suite de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ définie comme produit des n premières fonctions F_k :

$$f_n := F_1 \cdot F_2 \cdots F_n \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

On se convains alors (exercice) de la véracité des faits suivants :

(a) Pour tout $x \in [0,1]$ fixé, la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une certaine limite qu'on notera $\widehat{f}(x) \in [0,1]$.

(a) Cette fonction-limite $\widehat{f}$ est discontinue en tout point $x \in \widehat{C}$. Indication: Observer que $\widehat{f}(x) = 1$ lorsque $x \in \widehat{C}$ et trouver une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, mais qui satisfait $\widehat{f}(x_n) = 0$. $\square$

3. Exercices

Exercice 1. Vérifier rigoureusement que l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ est de mesure 0 au sens de la définition donnée à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble triadique standard de Cantor est *parfait*, à savoir qu'aucun de ses points n'est isolé.

Exercice 3. [Ensembles de Cantor de dissection constante] Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. Le cas $\xi = \frac{1}{3}$ va correspondre à l'ensemble triadique standard de Cantor.

À l'étape 1 de la construction, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement à distance égale de 0 et de 1. À l'étape 2, on supprime de même de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur relative ξ, à savoir de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. On note C_ξ l'intersection infinie des ensembles ainsi construits.

(a) Montrer que le complémentaire de C_ξ dans $[0,1]$ est réunion d'une infinité dénombrable d'intervalles ouverts dont la somme totale des longueurs vaut 1.

(b) Montrer que C_ξ est *totalement discontinu*, à savoir que la composante connexe de chacun de ses points $x \in C_\xi$ est réduite au singleton $\{x\}$.

Exercice 4. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1.$$

(a) Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \;<\; 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ n'est *pas* de mesure nulle. *Nota Bene :* avec les outils de la *Théorie de la mesure* qui seront développés au chapitre suivant, on peut établir que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure positive égale à :

$$\begin{aligned} m\big(\widehat{C}\big) &= 1 - \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k-1}\,\ell_k \\ &> 0. \end{aligned}$$

(b) Montrer que pour tout $x \in \widehat{C}$, il existe une suite de points $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ qui tend vers x telle que :

$$x_n \notin \widehat{C}_n,$$

et avec de plus $x_n \in I_n$, où I_n est un sous-intervalle du complémentaire $[0,1]\backslash\widehat{C}$ dont la longueur $|I_n| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ tend vers zéro.

(c) Montrer que cet ensemble $\widehat{C}$ est parfait, et qu'il ne contient aucun intervalle ouvert.

(d) Montrer que $\widehat{C}$ est non-dénombrable.

Exercice 5. Établir rigoureusement les assertions sur lesquelles repose la démonstration du Théorème 2.1.

Exercice 6. [Fonction de Cantor-Lebesgue] Sur l'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0,1]$ dont les éléments s'écrivent sous forme triadique :

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \qquad\qquad \text{avec } \ a_i \in \big\{0,\, 2\big\},$$

soit la fonction définie par :

$$F(x) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{b_i}{2^i}, \qquad\qquad \text{où } \ b_i := \frac{a_i}{2}.$$

(a) Montrer que F est bien définie, satisfait $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$, et qu'elle est continue $C \longrightarrow [0,1]$, lorsque C est muni de la topologie induite par son plongement $C \hookrightarrow \mathbb{R}$.

(b) Montrer rigoureusement que $F\colon C \longrightarrow [0,1]$ est surjective, à savoir que pour tout $y \in [0,1]$, il existe $x \in C$ tel que $F(x) = y$.

(c) Montrer qu'un intervalle ouvert $]a,b[$ qui est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C$ est une composante connexe du complémentaire $[0,1]\backslash C_n$ d'un certain C_n. Montrer ensuite que $a, b \in C$ et que $F(a) = F(b)$.

(d) On note encore F le prolongement de F à tout l'intervalle $[0,1]$ qui est constant sur tous les intervalles $]a,b[$ de cette nature, défini par $F(x) := F(a) = F(b)$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que ce prolongement constitue une fonction continue $[0,1] \longrightarrow [0,1]$.

(e) Montrer que F est dérivable en tout point $x \in [0,1]\backslash C$.

(f) Montrer que F n'est dérivable en aucun point de C.

Exercice 7. EE

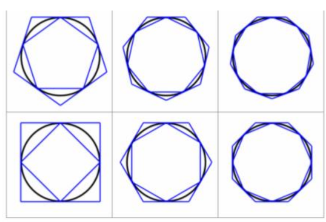
Théorie de la mesure de Borel et Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

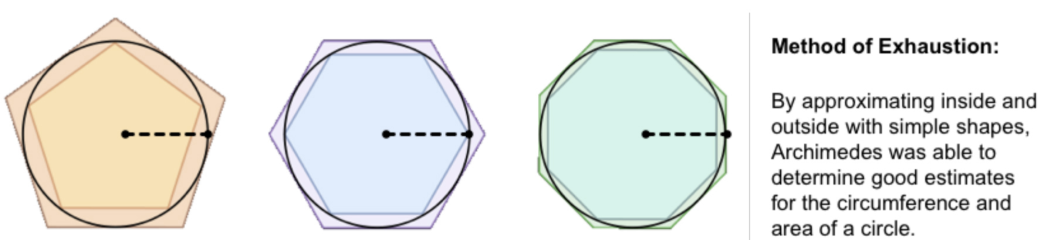
> Nous appellerons *mesurables* les ensembles dont nous pouvons définir la mesure de la manière qui a été indiquée en développant les idées qui précèdent. Mais nous affirmons cela sans prétendre qu'il soit possible d'assigner une mesure à *tous* les ensembles absolument quelconques. Émile BOREL, 1898.

1. Mesure des grandeurs : Paradoxes de l'atomisme ensembliste

Un des concepts les plus fondamentaux de la géométrie euclidienne, est celui de la *mesure des grandeurs*, et notamment, celui de longueur, d'aire, ou de volume d'un corps solide $E \subset \mathbb{R}^{1,2,3}$.



Dans l'approche antique qui remonte au moins à Archimède et à Eudoxe, on partitionne le corps à mesurer en un nombre fini de composantes que l'on réassemble afin de former un corps plus simple ayant une mesure calculable. La célèbre *méthode d'exhaustion* approxime le corps étudié par deux familles de corps inscrits et exinscrits, afin de trouver une borne inférieure et une borne supérieure de son contenu métrique, les deux familles dépendant aussi d'un paramètre qui tend vers l'infini à mesure qu'elles enserrent géométriquement de plus en plus le corps étudié.



Avec l'apparition de la *Géométrie analytique* et de la *Théorie des ensembles*, le problème de savoir comment déterminer le volume des corps quelconques et pas seulement ceux qu'affectionnaient les géomètres de l'Antiquité, en dimension arbitraire dans $\mathbb{R}^d$ avec

$d \geqslant 1$, se pose naturellement, et inévitablement. Par ailleurs, nous avons vu dans un chapitre qui précède que l'idée de trancher horizontalement (Lebesgue) les hypographes $\big\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \colon 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}$ des fonctions $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, au lieu de les trancher verticalement (Cauchy, Riemann, Darboux, Jordan) conduit à se demander quelle est la *largeur totale*, ou *mesure*, de certains sous-ensembles a priori quelconques $E_{y',y''} \subset \mathbb{R}_x$ de l'axe des abscisses.

Or l'intuition physique de l'atomisme antique qui consiste à prétendre que :

$$\mathsf{Mesurer} \overset{??}{\equiv} \mathsf{Compter},$$

cette intuition simpliste échoue en Analyse, à cause de la *Théorie des ensembles*, car mesurer l'extension d'un corps en comptant simplement le nombre d'atomes qui le constituent conduit à des paradoxes et à des inconsistances.

En effet, si l'on s'en référait à l'atomisme mathématique, un corps solide typique serait formé d'un nombre infini non dénombrable de points, qu'on pourrait voir comme ses atomes, chacun d'entre eux étant de mesure nulle. Mais puisque le produit $\infty \cdot 0$ est en général indéterminé, il se peut fort bien que plusieurs manières de compter les atomes dans un même corps conduisent à des résultats étrangement différents.

Par exemple, les deux intervalles $[0,1]$ et $[0,2]$ dans $\mathbb{R}$ sont en correspondance bijective par l'application $x \longmapsto 2\,x$, alors qu'il est immédiatement clair que la longueur du second est double de celle du premier. Autrement dit, la bijection $x \longmapsto 2\,x$ désassemble les atomes de $[0,1]$ et les réassemble en l'intervalle de longueur double $[0,2]$.

Bien sûr, on pourrait objecter ici que l'on désassemble et réassemble un nombre infini d'atomes en les *dilatant* d'un facteur 2, ce qui ne respecte en rien leur longueur. Mais il existe un phénomène réellement troublant de la *Théorie des ensembles* dans lequel le désassemblage d'atomes et leur réassemblage n'utilise *que* des applications euclidiennes de l'espace ordinaire $\mathbb{R}^3$ qui laissent invariant le volume des corps et des atomes.

Rappelons à cet effet que le groupe des déplacements euclidiens de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) := \mathbb{R}^3 \ltimes \mathsf{SO}_3(\mathbb{R}),$$

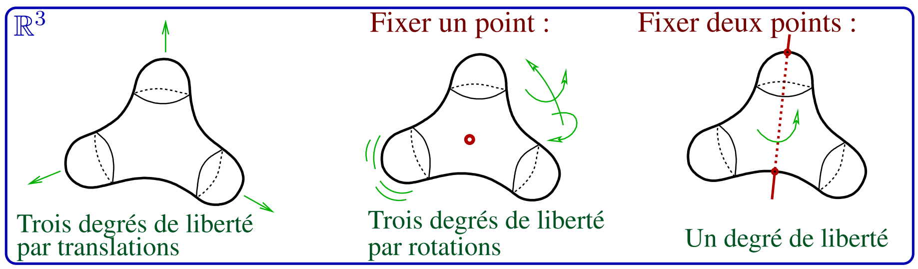
est le produit, dit *semi-direct*, du groupe évident des translations de $\mathbb{R}^3$:

$$(x,y,z) \longmapsto \big(x+a,\, y+b,\, z+b\big),$$

qui est naturellement commutatif et isomorphe à $\mathbb{R}^3$, avec le groupe, dit *spécial orthogonal*, des matrices symétriques définies positives de taille 3×3 qui conservent le produit scalaire et de déterminant 1 :

$$\mathsf{SO}_3(\mathbb{R}) := \big\{g \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R}) \colon\ g\,{}^t g = \mathsf{Id},\ \mathsf{det}(g) = 1\big\}\,.$$

Ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ est tout simplement celui des mouvements des corps solides ordinaires dans notre espace physique favori, par exemple notre brosse à dents (la pauvre, elle est secouée !), ou notre stylo (lui au moins, il reste au sec !). Ce qui compte dans ce groupe des mouvements, c'est que *le volume des corps, et les distances entre chaque paire de points, restent invariants lors des mouvements*.



Géométriquement, une fois que les trois degrés de libertés offerts par les translations sont épuisés, au moins un point d'un corps solide de référence devient fixe, et il reste encore *trois* degrés de libertés pour des mouvements qui laissent fixe ledit point :

□ *deux* degrés de liberté pour rotationner les autres points du corps sur des sphères de dimension 2 centrées en le point fixé ;

□ un dernier, et *un seul*, degré de liberté une fois qu'un deuxième point a été fixé, ce degré de liberté correspondant à des rotations cylindriques autour de l'unique axe passant par ces deux points.

La dimension totale du groupe des déplacements euclidiens est donc égale à :

$$\dim \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) = 3 + 2 + 1 = 6,$$

il est donc plus riche que le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ des déplacements euclidiens dans le plan :

$$\mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^2\big) = \underbrace{\mathbb{R}^2}_{\text{translations}} \times \underbrace{\mathsf{SO}_2(\mathbb{R})}_{\substack{\text{rotation}\\ \text{planaires}}},$$

lequel n'est que de dimension $2 + 1 = 3$. De plus, en dimension 2, ce groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^2)$ est *commutatif*, alors qu'en dimension 3, le groupe $\mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ ne l'est pas.

C'est la non-commutativité de $\mathsf{SO}_3(\mathbb{R})$ qui rend possible le théorème très troublant qui va suivre, théorème non valable en dimension 2.

Le *paradoxe de Banach-Tarski* affirme qu'il est possible de découper une boule fermée de l'espace usuel $\mathbb{R}^3$ en un nombre fini de morceaux, et de réassembler ensuite ces morceaux pour former deux boules fermées identiques à la première — phénomène extrêmement troublant ! Et nous allons voir que ce phénomène troublant force à accepter qu'il soit impossible d'attribuer un volume à *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$.

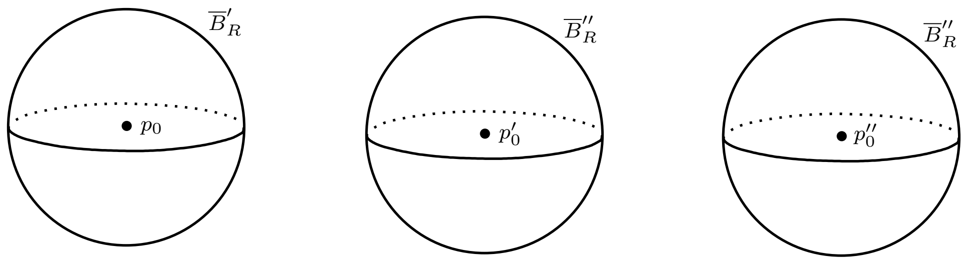
Plus précisément, dans $\mathbb{R}^3$ muni de coordonnées (x, y, z), soient les trois points :

$$p_0 := (0, 0, 0), \qquad p_0' := (3\,R, 0, 0), \qquad p_0'' := (6\,R, 0, 0),$$

et soient les trois boules fermées disjointes de même rayon $R > 0$:

$$\overline{B}_R := \overline{B}(p_0, R), \qquad \overline{B}'_R := \overline{B}(p_0', R), \qquad \overline{B}'_R := \overline{B}(p_0', R),$$

situées l'une après l'autre à distance R.



Par une formule qui remonte aux mathématiques antiques, leur volume commun vaut :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) \,=\, \mathsf{Volume}\big(\overline{B}'_R\big) \,=\, \mathsf{Volume}\big(\overline{B}''_R\big) \,=\, \frac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

Théorème 1.1. [Paradoxe de Banach-Tarski] *Il existe une décomposition finie de la première boule fermée :*

$$\overline{B}_R = \bigcup_{k=1}^{n} F_k \,\cup\, \bigcup_{l=1}^{m} G_l,$$

en sous-ensembles $F_k \subset \overline{B}_R$ et $G_l \subset \overline{B}_R$ tous disjoints deux à deux :

$$\begin{aligned} F_k \cap G_l &= \emptyset && (1 \leqslant k \leqslant n;\ 1 \leqslant l \leqslant m), \\ F_{k_1} \cap F_{k_2} &= \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ G_{l_1} \cap G_{l_2} &= \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m), \end{aligned}$$

et il existe des déplacements euclidiens :

$$\begin{aligned} T_k &\in \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant k \leqslant n), \\ S_l &\in \mathsf{Eucl}\big(\mathbb{R}^3\big) && (1 \leqslant l \leqslant m), \end{aligned}$$

au moyen desquels la première famille reconstitue par transport une première autre boule fermée $\overline{B}'_R$ de même rayon $R > 0$, et simultanément aussi, la seconde famille reconstitue par transport une seconde autre boule fermée $\overline{B}''_R$ de même rayon $R > 0$:

$$\begin{aligned} \overline{B}'_R &= \bigcup_{k=1}^{n} T_k\big(F_k\big), \\ \overline{B}''_R &= \bigcup_{l=1}^{m} S_l\big(G_l\big), \end{aligned}$$

ces morceaux de puzzle transportés restant totalement disjoints deux à deux à l'arrivée :

$$\begin{aligned} T_{k_1}\big(F_{k_1}\big) \,\cap\, T_{k_2}\big(F_{k_1}\big) &= \emptyset && (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant n), \\ S_{l_1}\big(G_{l_1}\big) \,\cap\, S_{l_2}\big(G_{l_2}\big) &= \emptyset && (1 \leqslant l_1 < l_2 \leqslant m). \end{aligned}$$

Ce n'est pas le sujet du tableau ni la technique du peintre qui fait la difficulté du puzzle, mais la subtilité de la découpe. Georges Perec

La démonstration utilise le célèbre :

Axiome du choix. *Soit E un ensemble quelconque, et soit $E_\alpha \subset E$ une famille de sous-ensembles indexée par des indices $\alpha \in A$ appartenant à un ensemble A quelconque, pas forcément dénombrable. Alors (Axiome), il existe une* fonction de choix :

$$\alpha \longmapsto x_\alpha$$

qui spécifie un élément $x_\alpha \in E_\alpha$ *de chacun de ces sous-ensembles.*

Zappons allègrement toute description de la démonstration, puisque nous n'y connaissons rien !

Ici, le paradoxe spectaculaire, c'est qu'avec seulement un puzzle fini, on peut *doubler* la mise tout en respectant le principe de conservation de la matière. En effet, il est tout à fait naturel d'admettre que le volume est préservé par des déplacements euclidiens tels que les T_k et les S_l. Mais ici, *les sous-ensembles* F_k *et* G_l *sont taillés dans la boule d'une manière suffisamment vicieuse pour que le puzzle s'auto-clone*.

L'art du puzzle commence avec les puzzles de bois découpés à la main lorsque celui qui les fabrique entreprend de se poser toutes les questions que le joueur devra résoudre lorsque, au lieu de laisser le hasard brouiller les pistes, il entend lui substituer la ruse, le piège, l'illusion. Georges PEREC

Ce qui compte pour nous ici, c'est que ce théorème nous force à admettre qu'on ne peut pas inventer une théorie de la mesure qui permette de mesurer *tous* les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^3$, à savoir qui nous permette de leur attribuer un *volume*.

Supposons en effet par contradiction qu'on puisse trouver une manière d'attribuer à tout $E \subset \mathbb{R}^3$ une mesure :

$$\mathsf{Volume}(E) \in \mathbb{R}_+.$$

Évidemment, il faudrait que notre théorie fantasmée retrouve le bon vieux résultat d'Archimède :

$$\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) = \frac{4}{3}\,\pi\,R^3.$$

Évidemment, il faudrait aussi que notre théorie-mirage respecte deux axiomes absolument naturels.

Axiome 1 : *Toutes les fois que deux sous-ensembles* $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^3$ *sont disjoints* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$*, on doit avoir :*

$$\mathsf{Volume}\big(E_1 \cup E_2\big) = \mathsf{Volume}\big(E_1\big) + \mathsf{Volume}\big(E_2\big).$$

Axiome 2 : *Tout déplacement euclidien* $T \in \mathsf{Eucl}(\mathbb{R}^3)$ *laisse invariants les volumes :*

$$\mathsf{Volume}\big(T(E)\big) = \mathsf{Volume}(E).$$

Si nous revenons alors au Théorème de Banach-Tarski, et que nous appliquons ces axiomes, nous dérivons l'égalité :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Volume}\big(\overline{B}_R\big) &= \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{k=1}^{n} F_k \;\cup\; \bigcup_{l=1}^{m} G_l\bigg) \\
\text{[Axiome 1]} \qquad &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Volume}\big(F_k\big) + \sum_{l=1}^{m} \mathsf{Volume}\big(G_l\big) \\
\text{[Axiome 2]} \qquad &= \sum_{k=1}^{n} \mathsf{Volume}\big(T_k(F_k)\big) + \sum_{l=1}^{m} \mathsf{Volume}\big(S_l(G_l)\big) \\
\text{[Axiome 1]} \qquad &= \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{k=1}^{n} T_k\big(F_k\big)\bigg) + \mathsf{Volume}\bigg(\bigcup_{l=1}^{m} S_l\big(G_l\big)\bigg) \\
&= \mathsf{Volume}\big(\overline{B}'_R\big) + \mathsf{Volume}\big(\overline{B}''_R\big),
\end{aligned}$$

ce qui revient à dire que :

$$\frac{4}{3}\,\pi\,R^3 \;=\; \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 + \frac{4}{3}\,\pi\,R^3,$$

absurdité qui choque au plus haut point, l'équation $1 = 1 + 1$ étant la pire qu'on puisse obtenir en mathématiques !

Conséquence dialectique incontournable. *Il faut accepter qu'aucune théorie puisse mesurer le volume de* tous *les sous-ensembles de* $\mathbb{R}^d$.

Il faut donc *abandonner* l'objectif illusoire de mesurer tous les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$. À la place, il va falloir accepter de résoudre le problème d'attribuer une mesure ou un volume *seulement* à une certaine classe de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$, qu'on appellera les sous-ensembles *mesurables*.

Le *Problème de la mesure* se divisera alors en plusieurs sous-problèmes :

- Que signifie, pour un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, d'être *mesurable* ?
- Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, comment définir le nombre réel positif $\mathsf{mesure}(E) \in \mathbb{R}_+$?
- Quelles propriétés belles et naturelles ou axiomes beaux et naturels la théorie doit-elle satisfaire ?

Bien entendu, ces questions sont formulées d'une manière essentiellement *ouverte*, et donc, il n'existe pas une manière unique d'y répondre. En particulier, on peut étendre la classe des ensembles mesurables au prix de perdre une ou plusieurs belles propriétés naturelles, par exemple l'additivité finie ou infinie dénombrable, ou encore l'invariance par translation, propriétés dont néanmoins nous disposerons entièrement dans la belle théorie de Lebesgue.

Dans l'état actuel de l'art des cours de L3 en France et dans le monde, nous pouvons proposer deux réponses standard à ces questions.

La première réponse, c'est le concept de *mesure de Jordan* d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$. Nous savons déjà que ce concept est intimement relié à l'intégrabilité au sens de Riemann, car l'hypographe (orienté) d'une fonction bornée est Jordan-mesurable si et et seulement si ladite fonction est Riemann-intégrable. Cette théorie de Riemann-Jordan est suffisamment élémentaire pour être enseignée dans les cours de L2 à l'université ou en mathernelle supérieure, et elle est suffisante lorsqu'il s'agit de mesurer la plupart des ensembles ordinaires de la géométrie classique.

Cependant, quand on se tourne vers les ensembles du type de ceux qui apparaissent réellement dans l'Analyse moderne, et en particulier, quand on se tourne vers les ensembles qui apparaissent comme *limites* d'autres ensembles (en des sens divers et variés), on constate que le concept de Jordan-mesurabilité devient inadéquat et trop faible, et donc, qu'il doit être étendu et renforcé théoriquement.

C'est ainsi que nous parvenons naturellement à la *deuxième* réponse générale connue aux questions ouvertes qui précèdent : la *Théorie de la Mesure de Borel et de Lebesgue*, laquelle peut être vue comme une *complétion de la théorie de Cauchy-Riemann-Darboux-Jordan*. En effet, dans la théorie de Lebesgue, on conserve toutes les propriétés naturelles dont jouit la mesure de Jordan, mais on admet crucialement la propriété additionnelle que la théorie reste stable par passages infinis à la limite. Notamment, nous allons découvrir ensemble certains théorèmes de convergence, tels que le *Théorème de convergence monotone*, ou le très célèbre *Théorème de la convergence dominée*, qui n'étaient pas vrais dans la théorie plus faible, mais qui s'avèreront illuminants de simplicité « biblique ».

2. Brève description du contenu de ce chapitre

En dimension quelconque $d \geqslant 1$, ce chapitre est consacré à la construction de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, et à l'étude de la classe des ensembles mesurables qui en résulte. Après quelques préliminaires élémentaires, nous donnons la première définition importante, celle de *mesure extérieure* d'un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$. Grâce à cette notion, nous pouvons alors définir les ensembles qui sont *mesurables* (au sens de Lebesgue), et nous nous restreignons alors à ne considérer que les ensembles mesurables, car ceux qui ne sont pas mesurables sont assez rares, plutôt pathologiques d'ailleurs, et en fait peu étudiés en Analyse.

Ensuite, nous établissons un résultat absolument fondamental : la collection des sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ est stable par passage au complémentaire, et par réunions dénombrables. De plus, la mesure est additive par réunions disjointes dénombrables.

Au-delà, le concept de *fonction mesurable* est un avatar naturel de l'idée d'ensemble mesurable, de manière similaire au fait que le concept de fonction continue est en relation naturelle avec les ensembles ouverts, ou fermés. Mais le concept de fonction mesurable est plus étendu, car la classe des fonctions mesurables est stable par passage aux suites qui convergent simplement, pas nécessairement uniformément.

Enfin, nous proposons deux théorèmes simples qui mettent en lumière l'importance des cubes et des rectangles pour la géométrie des ensembles ouverts quelconques : dans $\mathbb{R}$, tout ouvert est réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints, tandis qu'en dimension supérieure dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$, tout ouvert est « *presque* » réunion disjointe de cubes fermés, au sens où seulement leurs bords peuvent s'intersecter. Ces deux théorèmes motiveront la définition du concept crucial de *mesure extérieure*, qui sera étudié en détail.

3. Exhaustion des ouverts de $\mathbb{R}^d$

Commençons par décrire la structure des ensembles ouverts en termes d'intervalles, de carrés, de cubes. Le cas de la dimension 1 présente une simplicité particulière.

Théorème 3.1. *Tout sous-ensemble ouvert :*

$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$$

s'écrit de manière unique *comme réunion* dénombrable *d'intervalles ouverts* disjoints.

Démonstration. Pour tout point $x \in \mathscr{O}$, introduisons le plus grand intervalle ouvert $x \in I_x \subset \mathscr{O}$ contenant x et contenu dans l'ouvert. Plus précisément, puisque $\mathscr{O}$ est ouvert, on est sûr que x est contenu dans un certain petit intervalle ouvert assez petit pour être contenu dans $\mathscr{O}$, et donc, si on introduit les deux nombres réels :

$$a_x := \inf \big\{a < x\colon\ ]a, x[\ \subset \mathscr{O}\big\} \qquad \text{et} \qquad b_x := \sup \big\{b > x\colon\ ]x, b[\ \subset \mathscr{O}\big\},$$

on est sûr que $a_x < x < b_x$, sachant qu'il est éventuellement possible que $a_x = -\infty$, ou que $b_x = \infty$.

Si donc nous abrégeons :

$$I_x := \,]a_x, b_x[,$$

alors par construction $\{x\} \subset I_x \subset \mathscr{O}_x$, et par conséquent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} \{x\} = \bigcup_{x \in \mathscr{O}} I_x.$$

Maintenant, que se passe-t-il lorsque deux tels intervalles I_{x_1} et I_{x_2} s'intersectent ? Clairement, leur réunion $I_{x_1} \cup I_{x_2}$, qui est alors aussi un intervalle ouvert, est contenue dans $\mathscr{O}$, et elle contient à la fois le point x_1 et le point x_2. Mais puisque par définition I_{x_1} et I_{x_2} sont maximaux, on doit avoir simultanément :

$$\big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_1} \qquad \text{et} \qquad \big(I_{x_1} \cup I_{x_2}\big) \subset I_{x_2},$$

et ceci ne peut avoir lieu qu'avec $I_{x_1} = I_{x_2}$. En définitive, dans la collection de tous ces intervalles canoniques :

$$\big\{I_x \colon\, x \in \mathscr{O}\big\},$$

deux quelconques d'entre eux doivent toujours être disjoints.

Il reste seulement à faire comprendre pourquoi il apparaît un nombre fini ou infini dénombrable de tels intervalles canoniques I_x. Or chaque intervalle I_x contient au moins un (en fait plusieurs) nombre(s) rationnel(s). Comme deux intervalles différents sont disjoints, les nombres rationnels qu'ils contiennent sont distincts. Or $\mathbb{Q}$ est dénombrable, donc la collection des I_x est elle aussi dénombrable. □

Naturellement, si un ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est représenté comme réunion dénombrable disjointe d'intervalles ouverts I_j :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j,$$

la mesure de $\mathscr{O}$ devra très vraisemblablement être égale à :

$$m(\mathscr{O}) := \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|.$$

Comme cette représentation est unique, nous pourrions parfaitement prendre ceci comme définition de la mesure. Nous observerions alors que toutes les fois que deux ouverts $\mathscr{O}_1 \subset \mathbb{R}$ et $\mathscr{O}_2 \subset \mathbb{R}$ sont disjoints, la mesure de leur réunion serait la somme de leurs mesures.

Toutefois, bien que cette toute première approche suffise pour parler de la mesure des ouverts, il n'est pas immédiatement clair qu'elle permette d'embrasser des ensembles « plus complexes » que les ouverts.

Qui plus est, quand on passe aux dimensions supérieures $d \geqslant 2$, on rencontre des complications même lorsqu'il s'agit de définir la mesure des ensembles ouverts $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$, car d'après l'Exercice 9, l'analogue direct du Théorème qui précède n'est *pas* valable en dimension $d \geqslant 2$!

Heureusement, en acceptant l'infini dénombrable, nous disposons d'un résultat-substitut qui sera suffisamment bon pour l'érection de la théorie.

Théorème 3.2. *Tout sous-ensemble ouvert :*

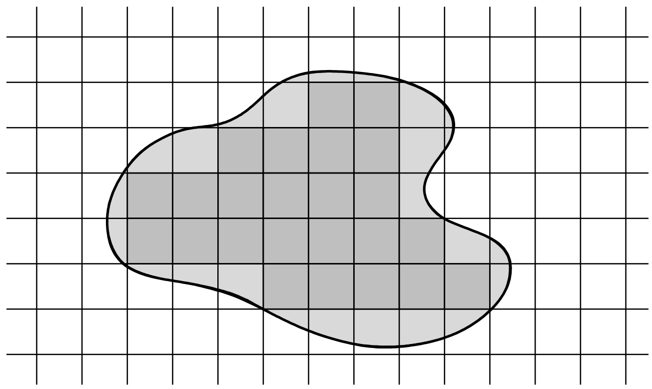
$$\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d \qquad {\scriptstyle (d \geqslant 1)}$$

peut être représenté — d'une manière qui n'est en général pas unique en dimension $d \geqslant 2$ — comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints.

Démonstration. Ainsi, nous devons construire une collection dénombrable $\mathscr{Q}$ de cubes fermés $Q \subset \mathscr{O}$ dont les intérieurs $\mathsf{Int}\, Q$ sont deux à deux disjoints et qui remplissent :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q.$$

À la première étape, nous formons la grille de $\mathbb{R}^d$ constituée de tous les cubes fermés de côtés constants égaux à 1 et dont les sommets se trouvent aux points entiers du réseau $\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$.



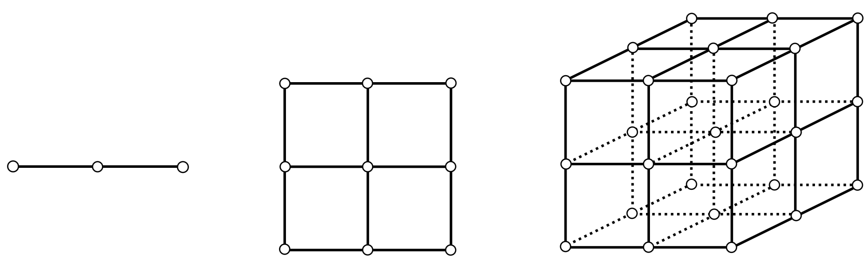
Nous acceptons, ou nous plaçons en attente, ou nous rejetons, les cubes fermés Q de cette grille initiale en appliquant la règle suivante :

• lorsque Q est entièrement contenu dans $\mathscr{O}$, nous l'acceptons ;

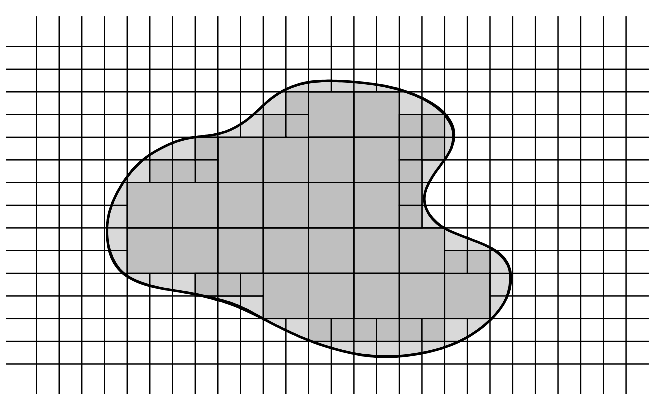
• lorsque Q intersecte à la fois l'ouvert $\mathscr{O}$ et son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le plaçons en attente ;

• lorsque Q est entièrement contenu dans le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}$, nous le rejetons.

À la seconde étape, nous bissectons le réseau en remplaçant $\mathbb{Z}^d$ par $\big(\frac{1}{2}\mathbb{Z}\big)^d$.



Cette opération fragmente chaque cube initial en 2^d cubes fermés presque disjoints.



Ensuite, nous répétons la même règle d'acceptation, de mise en attente, ou de rejet des nouveaux cubes de longueur moitié qui ne sont pas contenus dans ceux qui ont déjà été acceptés.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, nous considérons le réseau $\left(\frac{1}{2^k}\mathbb{Z}\right)^d$ obtenu par divisions dyadiques successives, et nous itérons la procédure.

Au final, nous obtenons une collection infinie dénombrable de cubes fermés qui sont mutuellement presque disjoints.

Nous afirmons alors que la réunion de tous ces cubes remplit $\mathscr{O}$.

En effet, étant donné un point quelconque $x \in \mathscr{O}$, puisqu'une boule ouverte assez petite centrée en x reste contenue dans l'ouvert $\mathscr{O}$, on peut trouver un cube fermé de côté $\frac{1}{2^k}$ qui est entièrement contenu dans une telle boule, donc dans $\mathscr{O}$. Par construction, ou bien un tel cube doit être accepté à la k-ème étape, ou (mieux encore), il est contenu dans un cube de côté $\frac{1}{2^j} > \frac{1}{2^k}$ qui a été accepté à une j-ème étape antérieure. □

À nouveau, lorsqu'on peut exhauster $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$ avec des cubes ou des rectangles R_j qui sont presque disjoints, il est tout à fait raisonnable d'assigner à $\mathscr{O}$ la mesure :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|.$$

Oui, cela est naturel, car le volume des bords des rectangles est manifestement nul, et l'intersection entre les rectangles ne consiste qu'en certaines parties de tels bords.

Toutefois, nous devons observer qu'une difficulté logique demeure : les décompositions en rectangles n'ont en général rien d'unique, et donc il n'est pas immédiatement clair que la somme $\sum_{j=1}^{\infty} |R_j|$ est indépendante des décompositions !

Aussi dans $\mathbb{R}^d$ en dimension $d \geqslant 2$, la notion d'aire, de volume, d'hypervolume, est-elle plus subtile qu'il n'y paraît, même seulement pour ce qui concerne les sous-ensembles ouverts.

En fait, la théorie générale que nous allons développer dans ce chapitre va effectivement nous offrir un concept du volume qui est cohérent avec les décompositions d'ouverts en réunions dénombrables de rectangles, heureusement !

4. Concept de mesure extérieure

La notion de mesure extérieure est le premier concept important dont on a besoin pour développer une *Théorie de la mesure*. Nous commençons par une définition, suivie d'une liste de propriétés fondamentales. Pour donner l'idée en mots, la *mesure extérieure* $m^*(\cdot)$ assigne à *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ une première notion de taille supérieure minimale, laquelle sera notée :

$$m^*(E).$$

De nombreux exemples nous convaincrons que cette notion coïncide avec ce que balbutiait notre intuition jusqu'à présent.

Mais attention ! *Mesure extérieure* n'est pas *Mesure !* Car la mesure extérieure va échouer à satisfaire la propriété très désirable d'additivité lorsqu'on prend des réunions finies d'ensembles disjoints. Ce ne sera que dans la section suivante que nous pourrons remédier à ce problème central, lorsque nous discuterons en détail d'un autre concept-clé de la théorie, celui d'*ensemble mesurable*.

Comme son nom l'indique, la *mesure extérieure* tente de décrire le volume d'un ensemble E en l'approximant depuis l'extérieur. Plus précisément, E est recouvert par des cubes de plus en plus fins, avec de moins en moins d'intersections entre eux, et on imagine que le « *volume extérieur* » de E devrait devenir de plus en plus proche de la somme des volumes des cubes couvrants.

Définition 4.1. [Borel, Lebesgue] Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, la *mesure extérieure* de E est le nombre réel :

$$m^*(E) \,=\, \mathsf{inf} \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur tous les recouvrements *infinis dénombrables* :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

par des cubes fermés Q_j, pas forcément disjoints. En fait, ce nombre positif $m^*(E)$ n'est pas toujours fini, il peut être infini, et c'est pourquoi on admet en général qu'il appartienne à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$0 \,\leqslant\, m^*(E) \,\leqslant\, \infty.$$

Tout d'abord, contrairement au concept de *mesure extérieure de Jordan* m_J^* qui se limitait à des recouvrement *finis* $E \subset \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$, il importe au plus haut point de faire observer ici que la définition admet des recouvrements *infinis dénombrables*. La différence entre les deux théories a déjà été signalée dans un chapitre qui précède, mais il ne sera pas inutile de revoir les contrastes flagrants dans l'Exercice 11.

Par ailleurs, on peut modifier la définition en remplaçant les cubes couvrants par des rectangles couvrants, voire même par des boules couvrantes. Le cas des rectangles s'avère donner une théorie en tout point équivalente (Exercice 12). Le cas des boules aussi, mais l'équivalence est plus subtile.

C'est donc avec cette première définition que la théorie amorce son décollage.

Lemme 4.2. [Monotonie] *Si* $E_1 \subset E_2$, *alors* $m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)$.

Démonstration. Tout recouvrement de E_2 est un recouvrement de E_1, donc quand on prend l'infimum sur les recouvrements de E_1, comme il y a *a priori* plus de recouvrements que ceux qui proviennent de E_2, l'infimum est en général inférieur. □

Nous commençons l'étude en fournissant de nombreux exemples d'ensembles dont la mesure extérieure peut être aisément calculée, et nous vérifions que les résultats obtenus correspondent à notre intuition de la longueur, de l'aire, du volume.

Lemme 4.3. *La mesure extérieure d'un point vaut* 0.

Démonstration. En effet, un point est un cube fermé de côté 0, qui se recouvre lui-même, et qui est de volume 0. □

Bien entendu aussi, la mesure extérieure de l'ensemble vide $\emptyset$ vaut aussi 0.

Lemme 4.4. *La mesure extérieure* $m^*(Q)$ *d'un cube* fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est égale à son volume* $|Q|$.

Démonstration. En effet, puisque Q se recouvre lui-même, on doit avoir :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, considérons un recouvrement dénombrable arbitraire :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés Q_j. Il suffit de montrer que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

puisqu'alors en prenant l'infimum comme le stipule la Définition 4.1, on obtiendra bien l'inégalité inverse :

$$|Q| \leqslant m^*(Q).$$

Fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et choisissons, pour tout $j \geqslant 1$, un cube ouvert :

$$S_j \supset Q_j,$$

suffisamment resserré autour de Q_j pour que :

$$\big|S_j\big| \leqslant (1+\varepsilon)\,\big|Q_j\big|,$$

ce qui est possible (exercice). Mais alors Q est recouvert par la réunion infinie dénombrable des *ouverts* S_j, réunion dont on peut extraire une famille couvrante finie, grâce au Lemme de Heine-Borel-Lebesgue, ce qui, après une renumérotation éventuelle des indices, nous donne :

$$Q \subset \bigcup_{j=1}^{J} S_j.$$

Alors un lemme élémentaire du chapitre sur la mesure de Jordan assure que :

$$|Q| \leqslant \sum_{j=1}^{J} \big|S_j\big|,$$

inégalité que nous pouvons instantanément enchaîner :

$$\begin{aligned}
\big|Q\big| &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{N} \big|Q_j\big| \\
&\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|.
\end{aligned}$$

Mais puisque $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, nous atteignons l'inégalité désirée. □

Lemme 4.5. *La mesure extérieure* $m^*(Q)$ *d'un cube* ouvert $Q \subset \mathbb{R}^d$ *est aussi égale à son volume* $|Q|$.

Démonstration. Puisque $Q \subset \overline{Q}$ est couvert par son adhérence, et puisque :

$$\big|\overline{Q}\big| = |Q|,$$

on voit immédiatement que :

$$m^*(Q) \leqslant |Q|.$$

Pour ce qui est de l'inégalité inverse, si $Q_0 \subset Q$ est un cube fermé contenu dans Q, le lemme qui précède a déjà fait voir que :

$$\big|Q_0\big| = m^*(Q_0),$$

tandis que le Lemme 4.2 de monotonie donne :

$$m^*(Q_0) \leqslant m^*(Q),$$

c'est-à-dire :

$$\big|Q_0\big| \leqslant m^*(Q).$$

Mais comme on peut choisir Q_0 remplissant de plus en plus Q avec un volume qui tend vers celui de Q, on obtient bien l'inégalité inverse :

$$|Q| \leqslant m^*(Q).$$

voulue. □

Lemme 4.6. *La mesure extérieure $m^*(R)$ d'un rectangle $R \subset \mathbb{R}^d$, ouvert ou fermé, est tout aussi égale à son volume $|R|$.*

Démonstration. Traitons seulement le cas d'un rectangle fermé. En augmentant très légèrement la taille d'une famille dénombrable de cubes fermés qui recouvrent R pour en faire des cubes ouverts, et en extrayant un recouvrement fini comme dans le Lemme 4.4, on démontre tout d'abord (exercice de vérification) que :

$$|R| \leqslant m^*(R).$$

Ensuite, pour ce qui est de l'inégalité inverse, avec $k \geqslant 1$ entier, formons la grille $\left(\frac{1}{k}\,\mathbb{Z}\right)^d \subset \mathbb{R}^d$ constituée de cubes fermés presque disjoints de côtés tous égaux à $\frac{1}{k}$. Si donc nous introduisons alors les deux ensembles :

$$\mathscr{Q} := \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ entièrement contenus dans } R\Big\},$$

$$\mathscr{Q}' := \Big\{\text{cubes fermés de côté } \tfrac{1}{k} \text{ rencontrant } R \text{ et } \mathbb{R}^d \backslash R\Big\},$$

il est logiquement clair que :

$$R \subset \bigcup_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} Q.$$

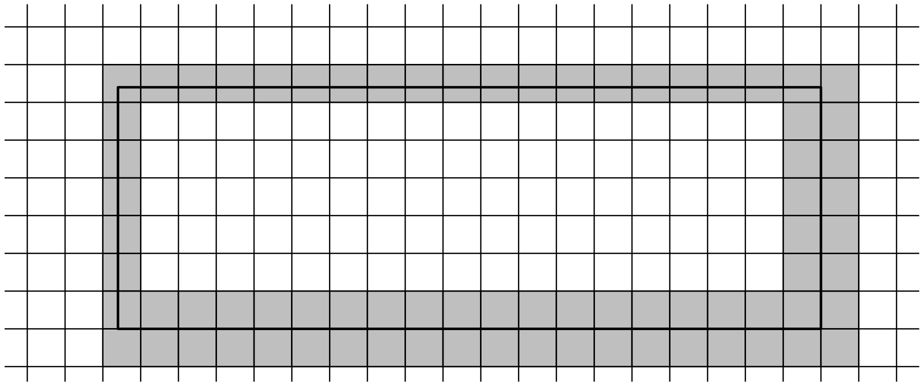
Mais comme :

$$\bigcup_{Q \in \mathscr{Q}} Q \subset R,$$

un argument simple (exercice) montre que :

$$\sum_{Q \in \mathscr{Q}} |Q| \leqslant |R|.$$

Assertion 4.7. *Il existe une constante $C_{R,d} > 0$ qui dépend du rectangle et de la dimension $d \geqslant 1$ telle que le nombre de cubes fermés de côté $\frac{1}{k}$ rencontrant R et $\mathbb{R}^d \backslash R$ est borné par $C_{d,R} \cdot k^{d-1}$.*



Autrement dit, le nombre de cubes rencontrant le rectangle et son complémentaire croît à la même puissance $(\cdot)^{d-1}$ que le *périmètre* du rectangle.

Démonstration. En effet, on vérifie (exercice) que ces cubes sont tous contenus dans l'ensemble de type anneau :

$$\Big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ \mathsf{dist}(x, Q) \leqslant \tfrac{1}{k}\Big\} \Big\backslash \Big\{x \in Q\colon\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash Q) \geqslant \tfrac{1}{k}\Big\},$$

et que cet ensemble, qui n'est autre qu'un épaississement du bord du rectangle de dimension $d-1$, est effectivement recouvert par un nombre de cubes $\leqslant C_{d,R} \cdot k^{d-1}$. □

Comme chaque cube de côté $\frac{1}{k}$ est de volume $\frac{1}{k^d}$, on déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{Q \in \mathscr{Q}'} |Q| \,&=\, \frac{1}{k^d}\,\mathrm{O}\big(k^{d-1}\big)\\ &=\, \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big)\end{aligned}$$

Donc au total :

$$\sum_{Q \in (\mathscr{Q} \cup \mathscr{Q}')} |Q| \,\leqslant\, |R| + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{k}\big),$$

et en laissant $k \to \infty$, on obtient bien l'inégalité inverse $m^*(R) \leqslant |R|$. □

Lemme 4.8. *La mesure extérieure de $\mathbb{R}^d$ est infinie :*

$$m^*(\mathbb{R}^d) = \infty.$$

Démonstration. En effet, tout recouvrement de $\mathbb{R}^d$ doit constituer aussi un recouvrement des cubes $[-R,\, R]^d$ pour $R > 0$ arbitrairement grand, et alors par monotonie de $m^*(\cdot)$:

$$\begin{aligned}m^*(\mathbb{R}^d) \,&\geqslant\, m^*\big([-R,\, R]\big)\\ &=\, \big(2\,R\big)^d \underset{R \to \infty}{\longrightarrow} \infty,\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Lemme 4.9. *L'ensemble triadique standard de Cantor $C \subset [0, 1]$ a pour mesure extérieure* 0.

Démonstration. En effet, par construction $C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k$ où chaque C_k est réunion de 2^k intervalles fermés d'égale longueur $\frac{1}{3^k}$ que l'on peut prendre comme recouvrement, d'où :

$$m^*(C) \,\leqslant\, \left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui conclut. □

5. Propriétés de la mesure extérieure

Les exemples qui précèdent ont quelque peu étayé l'intuition primitive que l'on a pu se former intérieurement concernant la mesure extérieure. Ici, nous engageons une étude des propriétés générales de la mesure extérieure dont nous aurons besoin dans ce qui suit.

Tout d'abord, reformulons précisément ce que dit la Définition 4.1 : *pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe un recouvrement dénombrable :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés Q_j *dont la somme des volumes est à peine supérieure à* $m^*(E)$ *:*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \underbrace{m^*(Q_j)}_{=|Q_j|} \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Proposition 5.1. [Sous-additivité dénombrable] *Si un ensemble* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ *est réunion dénombrable quelconque d'ensembles* $E_j \subset \mathbb{R}^d$*, alors :*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(E_j\big).$$

Plus spécialement, lorsque la réunion $E = \bigcup_{j=1}^{J} E_j$ *est finie, on a de même :*

$$m^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{J} m^*\big(E_j\big).$$

Démonstration. Bien entendu, on peut supposer que pour tout $j \geqslant 1$:

$$m^*\big(E_j\big) < \infty,$$

sinon l'inégalité à démontrer est trivialement satisfaite. Par définition, pour tout $j \geqslant 1$ et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme :

$$\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j},$$

il existe un recouvrement de E_j :

$$E_j \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k},$$

par des cubes fermés $Q_{j,1}, Q_{j,2}, \dots$ dont la somme totale des volumes satisfait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_{j,k}\big| \leqslant m^*\big(E_j\big) + \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors E est contenu dans la réunion double :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k},$$

et l'on peut alors majorer :

$$\begin{aligned} m^*(E) &\leqslant m^*\Big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{j,k}\Big) \\ \text{[Ces cubes se recouvrent eux-mêmes !]} \qquad &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_{j,k}\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty}\Big(m^*(E_j)+\frac{\varepsilon}{2^j}\Big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(E_j\big)+\varepsilon. \end{aligned}$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit est libre, cette inégalité conclut. Le cas d'une réunion finie, plus simple, s'ensuit. □

Proposition 5.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, alors :*

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O}\supset E \\ \mathscr{O}\text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}),$$

où l'infimum est pris sur tous les ensembles ouverts $\mathscr{O}$ qui contiennent E.

Démonstration. La propriété de monotonie de la mesure extérieure appliquée à toutes les inclusions $E \subset \mathscr{O}$ donne :

$$m^*(E) \leqslant \inf_{\substack{\mathscr{O}\supset E \\ \mathscr{O}\text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).$$

Pour ce qui est de l'inclusion inverse, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, choisissons des cubes fermés Q_j tels que :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

et tels que :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant m^*(E)+\frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $j \geqslant 1$, soit aussi $Q_j^0 \supset Q_j$ un cube ouvert contenant Q_j tel que :

$$\big|Q_j^0\big| \leqslant \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}.$$

Alors la réunion infinie :

$$\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j^0$$

constitue un ouvert qui contient E, et grâce à la Proposition 5.1 de sous-additivité dénombrable qui précède, on peut estimer sa mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*(\mathscr{O}) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(Q_j^0\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j^0\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \left(\big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme le choix de $\varepsilon > 0$ est libre, on obtient bien l'inégalité inverse $\inf\, m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E)$. □

Dans ses hypothèses, l'énoncé suivant impose une restriction qui n'est pas anodine.

Proposition 5.3. *Étant donné deux sous-ensembles $E_1 \subset \mathbb{R}^d$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^d$ situés à distance* strictement positive *l'un de l'autre :*

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) \,>\, 0,$$

la mesure extérieure de leur réunion $E := E_1 \cup E_2$ est la somme de leurs mesures extérieures :

$$m^*(E) \,=\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

En effet, on peut trouver des exemples d'ensembles disjoints E_1 et E_2 n'étant pas à distance strictement positive l'un de l'autre mais qui violent cette égalité naturelle. Heureusement, nous verrons dans peu de temps que cette égalité naturelle sera satisfaite, sans l'hypothèse $\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) > 0$, par les sous-ensembles disjoints $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$ qui seront catégorisés comme *mesurables*.

Démonstration. En tout cas, comme la Proposition 5.1 de sous-additivité finie donne d'abord sans effort :

$$m^*(E) \,\leqslant\, m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big),$$

il s'agit essentiellement de raisonner pour établir l'inégalité inverse.

À cette fin, prenons d'abord $\delta > 0$ tel que :

$$\mathsf{dist}\big(E_1, E_2\big) \geqslant \delta > 0.$$

Ensuite, choisissons un recouvrement de E :

$$E \,\subset\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$$

par des cubes fermés qui satisfait :

$$\sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \,\leqslant\, m^*(E) + \varepsilon.$$

Quitte à subdiviser un certain nombre de fois chacun des cubes Q_j, on peut supposer que leurs diamètres sont tous inférieurs à $\delta/3$. Une fois cette opération effectuée, on est certain que *chaque Q_j ne peut intersecter qu'un seul des deux sous-ensembles E_1 et E_2 à la fois*.

Si donc nous décidons d'attribuer les noms J_1 et J_2 aux indices $j \geqslant 1$ pour lesquels Q_j intersecte E_1 et E_2, respectivement et exclusivement, alors $J_1 \cap J_2 = \emptyset$ est vide, ce qui montre que nous avons séparé les recouvrements :

$$E_1 \subset \bigcup_{j \in J_1} Q_j,$$
$$E_2 \subset \bigcup_{j \in J_2} Q_j.$$

Par conséquent, la monotonie de $m^*(\cdot)$ donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big) &\leqslant \sum_{j \in J_1} \big|Q_j\big| + \sum_{j \in J_2} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| \\ &\leqslant m^*(E) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ peut être rendu négligeable, c'est bien l'inégalité inverse voulue que nous atteignons ainsi. □

Proposition 5.4. *Si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est réunion dénombrable de cubes fermés Q_j presque disjoints :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

alors sa mesure extérieure est égale à la somme exacte de leurs volumes :

$$m^*(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big|,$$

Démonstration. Pour tout $j \geqslant 1$, soit $Q_j' \subset Q_j$ un cube fermé strictement contenu dans l'intérieur de Q_j et qui remplit presque Q_j au sens où :

$$\big|Q_j\big| \leqslant \big|Q_j'\big| + \frac{\varepsilon}{2^j},$$

où comme à l'accoutumée, $\varepsilon > 0$ est petit, fixé pour l'instant, mais destiné à redevenir libre à la fin des arguments. Alors pour tout entier quelconque $J \geqslant 1$ fixé lui aussi, les J cubes fermés :

$$Q_1',\ Q_2',\ \dots,\ Q_J',$$

sont manifestement disjoints deux à deux, donc à distance finie l'un de l'autre, ce qui permet d'appliquer plusieurs fois la proposition qui précède pour obtenir :

$$\begin{aligned} m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j'\bigg) &= \sum_{j=1}^{J} \big|Q_j'\big| \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \bigg(\big|Q_j\big| - \frac{\varepsilon}{2^j}\bigg). \end{aligned}$$

Mais comme on a par construction :

$$E \supset \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j,$$

nous déduisons par monotonie de $m^*(\cdot)$ que pour tout entier $J \geqslant 1$ fixé :

$$\begin{aligned} m^*(E) &\geqslant \sum_{j=1}^{J} \left(|Q_j| - \frac{\varepsilon}{2^j}\right). \\ &\geqslant \sum_{j=1}^{J} |Q_j| - \varepsilon. \end{aligned}$$

Maintenant, restituons à l'entier J sa liberté, et faisons-le tendre vers l'infini pour obtenir, après inversion de l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Mais comme $\varepsilon > 0$ s'apprêtait à s'évader (s'évanouir) lui aussi, nous obtenons au final :

$$\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j| \leqslant m^*(E).$$

Enfin, qu'en est-il de l'inégalité inverse ? Par sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$, elle découle trivialement de l'inclusion $E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$, ce qui conclut élégamment ce joyeux périple de croisiériste dans la contrée magique des mathématiques libres ! □

Cette dernière propriété générale dit donc que lorsqu'un ensemble peut être décomposé comme réunion dénombrable presque disjointe de cubes fermés, sa mesure extérieure vaut tout simplement la somme (infinie) des volumes des cubes en question. En particulier, si nous nous souvenons que le Théorème 3.2 représentait tout ouvert comme réunion presque disjointe de cubes fermés, nous voyons que la mesure extérieure d'un ouvert correspond bien à ce que nous avions deviné intuitivement. Qui plus est, la proposition que nous venons de démontrer assure (exercice mental) que pour toute représentation d'un ouvert $\mathscr{O} = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints, la somme infinie $\sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|$ de leurs volumes est un nombre fixe, parfaitement indépendant de la décomposition de l'ouvert — puisque, solution de l'exercice, cette quantité est égale à $m^*(\mathscr{O})$!

Au stade intermédiaire que nous venons d'atteindre, il est donc naturel d'attendre et d'espérer que la Théorie de la mesure va déclarer que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, de mesure égale à sa mesure extérieure $m^*(\mathscr{O})$.

On peut faire voir que le volume des sous-ensembles géométriques classiques de $\mathbb{R}^d$ que l'on calcule par des méthodes d'intégration élémentaire, parfois « à la physicienne » en dimensions $d = 1, 2, 3$, coïncide avec leur mesure extérieure, au sens de la théorie présente qui est en cours de développement. Par exemple, on peut vérifier que la mesure extérieure d'une boule (de pétanque !) ouverte ou fermée est égale à son volume — heureusement ! ! ! Toutefois, pour se convaincre réellement de la cohérence entre ces notions, il vaut mieux attendre d'avoir complètement développé tous les outils de la *Théorie de l'intégration*, ce dont le chapitre suivant se chargera.

Attention ! Redisons que malgré les deux propositions qui précèdent, lorsqu'un ensemble $E = E_1 \cup E_2$ avec $E_1 \cap E_2 = \emptyset$ est réunion disjointe de deux sous-ensembles $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^d$, on ne peut en général *pas* conclure que la mesure extérieure soit additive :

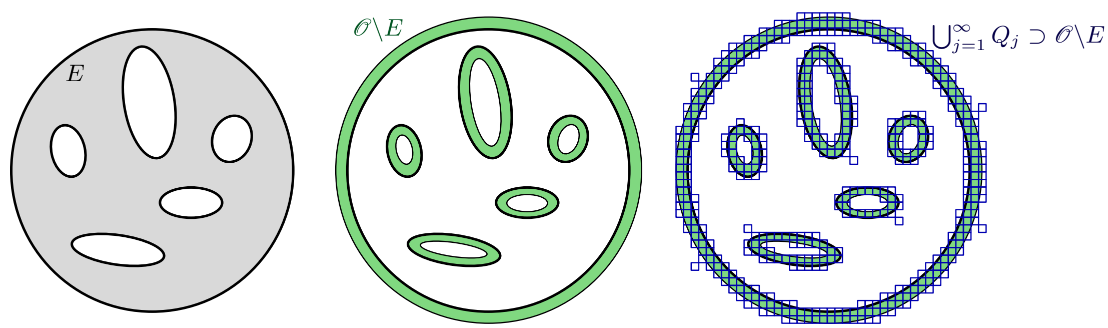
$$m^*\big(E_1 \cup E_2\big) \overset{\mathbf{??}}{=} m^*\big(E_1\big) + m^*\big(E_2\big).$$

Cette propriété extrêmement désirable est en effet mise en défaut par certains ensembles hautement irréguliers ou pathologiques, mais elle sera satisfaite par les sous-ensembles qui sont mesurables au sens que nous allons maintenant expliciter.

6. Ensembles mesurables et mesure de Lebesgue

La notion de mesurabilité isole une certaine collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ pour lesquels la mesure extérieure satisfait toutes les propriétés désirables, notamment l'additivité finie ou infinie dénombrable pour les réunions disjointes d'ensembles mesurables.

Il existe plusieurs manières théoriquement équivalentes de définir la notion de mesurabilité au sens de Borel, de Lebesgue, ou de Carathéodory. Vraisemblablement, celle qui est la plus intuitive, et donc la meilleure du point de vue de l'exigence de compréhension mathématique, est la suivante. Nous réalisons volontairement une figure un peu complexe : l'ensemble E est un disque percé de trous ressemblant quelque peu à des galaxies ; l'ouvert plus gros $\mathscr{O} \supset E$ déborde donc du disque et rentre légèrement dans les galaxies ; au milieu, seul $\mathscr{O} \backslash E$ est dessiné, pas $\mathscr{O}$. Enfin, la troisième figure montre $\mathscr{O} \backslash E$ recouvert par des cubes.



Définition 6.1. Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est dit *mesurable au sens de Lebesgue*, ou tout simplement *mesurable*, lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E$$

qui le contient en étant suffisamment resserré autour de lui pour que la mesure extérieure de l'anneau d'erreur $\mathscr{O} \backslash E$ satisfasse :

$$m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \leqslant \varepsilon.$$

Immédiatement après cette définition, nous obtenons (exercice mental) ce que nous avons anticipé :

Proposition 6.2. *Tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, $\mathscr{O} \supset \mathscr{O}$ et $m^*(\mathscr{O} \backslash \mathscr{O}) = m^*(\emptyset) = 0$! □

Mais ceci ne suffit pas encore pour réellement comprendre en quoi cette définition est adéquate. À cet effet, si nous écrivons :

$$\mathscr{O} = E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big),$$

les deux inclusions évidentes :

$$E \subset \mathscr{O} \subset E \cup \big(\mathscr{O} \backslash E\big)$$

associées au Lemme 4.2 de monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$ donnent :

$$m^*(E) \leqslant m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\text{ce dont on parle dans la définition}}.$$

Alors dans ce jeu d'inégalités, l'écart exprimé par la *première* inégalité :

$$m^*(E) \underbrace{\leqslant}_{\overset{\longleftarrow}{=}} m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big).$$

tend en fait vers une égalité, grâce à la Proposition 5.2 stipulant que pour *tout* sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$m^*(E) = \inf_{\substack{\mathscr{O} \supset E \\ \mathscr{O} \text{ ouvert}}} m^*(\mathscr{O}).$$

Toutefois, l'écart exprimé par la *deuxième* inégalité peut fort bien être uniformément strictement positif. *Donc en profondeur, la définition de mesurabilité d'un ensemble demande qu'on puisse l'approximer par des ouverts concrets qui soient suffisamment proches de lui pour que l'écart rémanent devienne arbitrairement petit en termes de la mesure extérieure :*

$$m^*(E) \approx m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(E) + \underbrace{m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big)}_{\text{peut aussi être rendu arbitrairement petit}}.$$

Définition 6.3. Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable, sa *mesure de Lebesgue*, ou simplement sa *mesure*, est le nombre réel positif éventuellement infini :

$$m(E) := m^*(E).$$

Notre objectif présent maintenant est de rassembler diverses propriétés générales des ensembles mesurables. En particulier, nous allons montrer que la collection des ensembles mesurables se comporte d'une manière parfaitement agréable et sympathique vis-à-vis de toutes les opérations standard de la *Théorie des ensembles :* les réunions finies ou dénombrables, les intersections finies ou dénombrables, les passages au complémentaires, les prises de différence symétrique.

Par exemple, si deux ensembles mesurables sont inclus l'un dans l'autre :

$$E_1 \subset E_2,$$

alors leurs mesures respectives safisfont l'inégalité naturelle :

$$m\big(E_1\big) \leqslant m\big(E_2\big)$$

simplement parce que $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, et parce que m^* satisfait bien :

$$m^*\big(E_1\big) \leqslant m^*\big(E_2\big)!$$

Proposition 6.4. *Tout ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure extérieure nulle $m^*(E) = 0$ est mesurable. En particulier, tout sous-ensemble $F \subset E$ d'un ensemble de mesure nulle est mesurable.*

Démonstration. Grâce à la Proposition 5.2, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que $m^*(\mathscr{O}) \leqslant \varepsilon$. Mais puisque :

$$\mathscr{O} \backslash E \subset \mathscr{O},$$

la monotonie de $m^*(\cdot)$ assure que l'on a aussi $m^*(\mathscr{O} \backslash E) \leqslant \varepsilon$, ce qui conclut. □

Comme conséquence de cette propriété, l'ensemble triadique standard de Cantor est mesurable de mesure nulle, puisque nous savons déjà que sa mesure extérieure vaut 0.

Théorème 6.5. *Toute réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurable $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable, et l'on a :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Observons que le cas des réunions finies est un cas particulier des réunions infinies dénombrables, en prenant les E_j constants égaux à E_1 à partir d'un certain rang.

Démonstration. Par hypothèse, pour tout entier $j \geqslant 1$, et tout $\varepsilon_j > 0$ de la forme $\varepsilon_j := \frac{\varepsilon}{2^j}$ avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_j \supset E_j$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Alors la réunion complète de tous ces ouverts :

$$\mathscr{O} := \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathscr{O}_j$$

est un ouvert contenant $E \subset \mathscr{O}$ qui satisfait de plus :

$$\mathscr{O} \backslash E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big),$$

puis grâce à la monotonie et à la sous-additivité de $m^*(\cdot)$, nous déduisons :

$$\begin{aligned} m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) &\leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m^*\big(\mathscr{O}_j \backslash E_j\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui conclut. L'inégalité sur les mesures provient simplement des définitions :

$$m(E) := m^*(E), \qquad\qquad m\big(E_j\big) := m^*\big(E_j\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (j \geqslant 1)}$$

et de la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure (Proposition 5.1). □

Théorème 6.6. *Tout sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable.*

Démonstration. Tout d'abord, nous affirmons qu'il suffit d'établir cela pour des fermés $F \subset \mathbb{R}^d$ qui sont de plus *bornés*, donc compacts. En effet, si $\overline{B}_k$ désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $k \geqslant 1$ quelconque, la réunion de ces $\overline{B}_k$ remplit l'espace $\mathbb{R}^d$, d'où :

$$F = \bigcup_{k=1}^{\infty} \underbrace{F \cap \overline{B}_k}_{\substack{\text{fermé} \\ \text{borné}}}.$$

Par conséquent, si l'on sait que les compacts $F \cap \overline{B}_k$ sont mesurables, le théorème qui précède donnera instantanément que F est aussi mesurable.

Supposons donc le fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ compact. Puisqu'il est contenu dans une boule fermée de rayon assez grand, on a $m^*(F) < \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. D'après la Proposition 5.2, on peut sélectionner un ouvert $\mathscr{O} \supset F$ tel que :

$$m^*(\mathscr{O}) \leqslant m^*(F) + \varepsilon.$$

Mais puisque F est fermé, la différence :

$$\mathscr{O} \backslash F = \mathscr{O} \cap \big(\mathbb{R}^d \backslash F\big)$$

est un ouvert, et le Théorème 3.2 nous permet de le représenter comme une réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints :

$$\mathscr{O} \backslash F = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Maintenant, pour un entier $J \geqslant 1$ fixé, la réunion finie :

$$K := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

est un compact. Comme ce compact est contenu dans $\mathscr{O} \backslash F$, il est d'intersection vide avec F :

$$K \cap F = \emptyset.$$

Proposition 6.7. *Si un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^d$ sont disjoints :*

$$F \cap K = \emptyset,$$

alors ils sont à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\sup_{x \in F,\, y \in K} |x - y| =: \mathsf{dist}\,(F, K) > 0.$$

Démonstration. Raisonnons par contradiction en supposant par l'absurde qu'il existe une suite $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $x_n \in F$ ainsi qu'une suite $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $y_n \in K$ telles que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N_\varepsilon \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N \implies |x_n - y_n| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Comme K est compact, après extraction d'une sous-suite, toujours notée de la même manière, on peut supposer que les y_n convergent vers un certain point $y_\infty \in K$. Avec le même $\varepsilon > 0$, quitte à augmenter N_ε, on a donc simultanément :

$$n \geqslant N_\varepsilon \implies |y_n - y_\infty| \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, une inégalité triangulaire à quatre couples montre que pour $n_1, n_2 \geqslant N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\big|x_{n_1} - x_{n_2}\big| &= \big|x_{n_1} - y_{n_1} + y_{n_1} - y_\infty + y_\infty - y_{n_2} + y_{n_2} - x_{n_2}\big| \\ &\leqslant |x_{n_1} - y_{n_1}| + |y_{n_1} - y_\infty| + |y_\infty - y_{n_2}| + |y_{n_2} - x_{n_2}| \\ &\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que la suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ est de Cauchy dans le fermé $F \subset \mathbb{R}^d$, donc converge vers un certain point $x_\infty \in F$.

Par continuité de la norme $|\cdot|$ sur $\mathbb{R}^d$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} |x_n - y_n| = |x_\infty - y_\infty|,$$

donc on a trouvé un point commun $x_\infty = y_\infty \in F \cap K$, ce qui contredit avec une insolence fort répréhensible l'hypothèse dist $(F, K) > 0$! $\square$

Ensuite, puisque $\mathscr{O} \supset K \cup F$, la monotonie de la mesure extérieure m^* et l'*additivité* de m^* sur les paires d'ensembles situés à distance strictement positive obtenue dans la Proposition 5.3 permettent d'obtenir une minoration cruciale :

$$\begin{aligned}m^*(\mathscr{O}) &\geqslant m^*(F \cup K) \\ &= m^*(F) + m^*(K) \\ &= m^*(F) + m^*\bigg(\bigcup_{j=1}^J Q_j\bigg) \\ \text{[Proposition 5.4]} \qquad &= m^*(F) + \sum_{j=1}^J m^*\big(Q_j\big),\end{aligned}$$

que nous pouvons renverser de manière équivalente en la majoration :

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^J m^*(Q_j) &\leqslant m^*(\mathscr{O}) - m^*(F) \\ &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Maintenant, puisque le choix de J était implicitement laissé à notre entière discrétion, nous pouvons pousser gaillardement J vers l'infini, ce qui nous donne :

$$\sum_{j=1}^\infty m^*(Q_j) \leqslant \varepsilon.$$

Enfin, la sous-additivité dénombrable de $m^*(\cdot)$ appliquée à l'inclusion — qui était en fait une égalité par remplissage — :

$$\mathscr{O}\backslash F \subset \bigcup_{j=1}^\infty Q_j$$

donne :

$$\begin{aligned}m^*\big(\mathscr{O}\backslash F\big) &\leqslant \sum_{j=1}^\infty m^*\big(Q_j\big) \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui achève cette démonstration rédigée sans enfreindre l'exigence — absolue ! — de déployer les amples ailes d'une rhétorique mathématique explicite. □

Théorème 6.8. *Le complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash E$ d'un ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.*

Démonstration. L'ensemble E étant mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Le complémentaire $\mathscr{O}_n^c = \mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O}_n$ est alors un fermé, donc mesurable grâce au théorème qui précède, et la persistance de la mesurabilité par réunions dénombrables assure que :

$$S := \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c$$

est encore mesurable.

Ensuite, comme pour tout entier n fixé on a :

$$\begin{aligned} \mathscr{O}_n^c \subset S &\iff S^c \subset \big(\mathscr{O}_n^c\big)^c \\ &\iff S^c \subset \mathscr{O}_n, \end{aligned}$$

on déduit :

$$S^c \backslash E \subset \mathscr{O}_n \backslash E \qquad \qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

Mais par définition du complémentaire :

$$\begin{aligned} S^c \backslash E &= \big(\mathbb{R}^d \backslash S\big) \backslash E \\ &= \mathbb{R}^d \backslash \big(S \cup E\big) \\ &= (\mathbb{R}^d \backslash E) \backslash S \\ &= E^c \backslash S, \end{aligned}$$

on obtient en fait :

$$E^c \backslash S \subset \mathscr{O}_n \backslash E \qquad \qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}.$$

En prenant la mesure extérieure :

$$\begin{aligned} m^*\big(E^c \backslash S\big) &\leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et ce, pour tout entier $n \geqslant 1$. Laissant donc $n \to \infty$, il vient :

$$m^*\big(E^c \backslash S\big) = 0,$$

ce qui démontre que $E^c \backslash S$ est mesurable en vertu de la Proposition 6.4.

Maintenant, puisque la réversion de chaque inclusion $E \subset \mathscr{O}_n$ s'écrit $\mathscr{O}_n^c \subset E^c$, on voit que :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n^c = S \subset E^c.$$

Enfin, puisque d'après le Théorème 6.5, la mesurabilité est préservée par réunions finies, on conclut que notre complémentaire favori, lequel s'écrit :

$$E^c = S \cup \big(E^c \backslash S\big)$$

est lui aussi mesurable. □

Corollaire 6.9. *Si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$, alors $E \backslash F$ est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, $E \backslash F = E \cap (\mathbb{R}^d \backslash F)$. □

Théorème 6.10. *Toute intersection finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcap_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles mesurables $E_j \subset \mathbb{R}^d$ est encore mesurable.

À nouveau, le cas fini est un cas particulier du cas infini.

Démonstration. C'est une application des deux Théorèmes 6.5 et 6.8 grâce à l'égalité ensembliste générale (exercice de révision) :

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} E_j = \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} (E_j)^c \right)^c,$$

argument fort astucieux n'est-il pas ? □

Grâce à ces théorèmes, nous pouvons revenir en arrière et analyser la définition de la mesurabilité d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, de manière à en révéler une condition équivalente.

Proposition 6.11. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, à savoir si :*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathscr{O} \supset E \text{ ouvert} \quad m^*(\mathscr{O} \backslash E) \leqslant \varepsilon,$$

alors :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists F \subset E \quad \text{fermé} \quad m^*(E \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Autrement dit, on aurait pu choisir de définir la mesurabilité des ensembles en partant de fermés contenus en eux qui les approximent de mieux en mieux au sens où la mesure extérieure de l'erreur commise peut être rendu arbitrairement petite.

Démonstration. Nous venons d'apprendre que le complémentaire $E^c = \mathbb{R}^d \backslash E$ est mesurable. Donc par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert :

$$\mathscr{O} \supset E^c,$$

tel que :

$$m(\mathscr{O} \backslash E^c) \leqslant \varepsilon.$$

Or le complémentaire de cet ouvert :

$$F := \mathscr{O}^c = \mathbb{R}^d \backslash \mathscr{O},$$

est un fermé contenu dans E en vertu de la réversion des inclusions par passage au complémentaire :

$$E^c \subset \mathscr{O} \iff \mathscr{O}^c \subset (E^c)^c = E,$$

et comme on a aussi :

$$\begin{aligned} E\backslash F &= E\backslash \mathscr{O}^c \\ &= E\backslash\big(\mathbb{R}^d\backslash \mathscr{O}\big) \\ &= \mathscr{O}\backslash\big(\mathbb{R}^d\backslash E\big) \\ &= \mathscr{O}\backslash E^c, \end{aligned}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} m\big(E\backslash F\big) &= m\big(\mathscr{O}\backslash E^c\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

tout en se remémorant que $m = m^*$ sur les ensembles mesurables. □

Pour commenter ces propriétés générales des ensembles mesurables, faisons observer que nous avons donc déjà abondamment montré que la mesurabilité est stable par passage aux réunions et aux intersections, non seulement finies, mais aussi, et là est le point crucial, *infinies dénombrables*. Le passage à l'infini sera en effet déterminant pour toutes les applications en Analyse. Toutefois, les opérations de réunions ou d'intersections *non* dénombrables resteront formellement interdites lorsqu'on travaille avec des ensembles mesurables !

Nous pouvons conclure ce cycle en énonçant et en démontrant une propriété fantastique qui avait été promise antérieurement.

Théorème 6.12. *La mesure d'une réunion finie ou infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$$

d'ensembles $E_j \subset \mathbb{R}^d$ disjoints deux à deux :

$$E_{j_1} \cap E_{j_2} = \emptyset \qquad\qquad (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant \infty),$$

est la somme exacte *des mesures de ses composantes :*

$$m(E) = \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big).$$

Démonstration. Supposons d'abord temporairement pour simplifier que chaque E_j est borné, car nous discuterons du cas général ensuite.

La Proposition 6.11 a récemment montré que, pour tout entier $j \geqslant 1$, il existe un sous-ensemble fermé $F_j \subset E_j$ satisfaisant :

$$m^*\big(E_j\backslash F_j\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^j}.$$

Fixons maintenant un entier quelconque $J \geqslant 1$. Comme les ensembles $F_1, \dots, F_J$ sont fermés, bornés, donc compacts et comme ils sont mutuellement disjoints, grâce à la Proposition 6.7, ils sont nécesssairement à distance strictement positive l'un de l'autre :

$$\mathsf{dist}\,\big(F_{j_1},\, F_{j_2}\big) > 0 \qquad\qquad (1 \leqslant j_1 < j_2 \leqslant J).$$

Puisque $F_1, \dots, F_J$ sont mesurables (car fermés), pour tout $\varepsilon > 0$, il existe des ouverts :

$$\mathscr{O}_1 \supset F_1,\ \dots\dots,\ \mathscr{O}_J \supset F_J,$$

tels que :

$$m^*(\mathscr{O}_1 \backslash F_1) \leqslant \frac{\varepsilon}{J}, \ \ldots\ldots\ldots, \ m^*(\mathscr{O}_J \backslash F_J) \leqslant \frac{\varepsilon}{J}.$$

Quitte à rétrécir si nécessaire ces ouverts $\mathscr{O}_1, \ldots, \mathscr{O}_J$, on peut supposer qu'ils sont disjoints deux à deux et même (exercice topologique) à distance strictement positive l'un de l'autre.

Alors l'ouvert réunion disjointe :

$$\mathscr{O} := \mathscr{O}_1 \cup \cdots \cup \mathscr{O}_J$$

contient le fermé :

$$F := F_1 \cup \cdots \cup F_J,$$

et l'on a :

$$\mathscr{O} \backslash F = \mathscr{O}_1 \backslash F_1 \cup \cdots \cup \mathscr{O}_J \backslash F_J,$$

donc on peut appliquer avantageusement la sous-additivité dénombrable :

$$\begin{aligned} m^*(\mathscr{O} \backslash F) &= m^*\Big((\mathscr{O}_1 \backslash F_1) \cup \cdots \cup (\mathscr{O}_J \backslash F_J)\Big) \\ &\leqslant m^*(\mathscr{O}_1 \backslash F_1) + \cdots + m^*(\mathscr{O}_J \backslash F_J) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{J} + \cdots + \frac{\varepsilon}{J} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui re-démontre en passant que le fermé $F = F_1 \cup \cdots \cup F_J$ est mesurable.

Mais surtout, comme $F_1, \ldots, F_J$ sont à distance strictement positive l'un de l'autre, on peut leur appliquer Proposition 5.3 (itérée au moyen d'une induction finie évidente) pour obtenir :

$$m(F_1 \cup \cdots \cup F_J) = m(F_1) + \cdots + m(F_J).$$

Ensuite, puisque l'on a l'inclusion entre ensembles mesurables :

$$E \supset F_1 \cup \cdots \cup F_J$$

il vient grâce au Théorème 6.5 :

$$\begin{aligned} m(E) &\geqslant m(F_1 \cup \cdots \cup F_J) \\ &= m(F_1) + \cdots + m(F_J) \\ &\geqslant m(E_1) - \frac{\varepsilon}{2^1} + \cdots + m(E_J) - \frac{\varepsilon}{2^J} \\ &\geqslant m(E_1) + \cdots + m(E_J) - \varepsilon. \end{aligned}$$

Laissant ici $J \longrightarrow \infty$ filer vers l'infini, comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, nous trouvons :

$$m(E) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j).$$

Or l'inégalité inverse :

$$m(E) \leqslant \sum_{j=1}^{\infty} m(E_j)$$

est toujours vraie, même lorsque les E_j ne sont pas mutuellement disjoints puisque $m = m^*$ sur les ensembles mesurables et puisque m^* est dénombrablement sous-additive. Ceci conclut la démonstration dans le cas où chaque E_j est borné.

Il reste donc à traiter le cas général, et nous allons maintenant voir comment le ramener à ce qui vient d'être dit. À cet effet, prenons une famille de cubes fermés $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ emboîtés les uns dans les autres $Q_k \subset Q_{k+1}$ qui remplissent :

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

par exemple les cubes $[-k,\ k]^d$. Considérons Q_1, puis les complémentaires successifs :

$$Q_k \big\backslash Q_{k-1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 2)},$$

et introduisons les ensembles mesurables *bornés :*

$$E_{j,k} := E_j \cap \big(Q_k \big\backslash Q_{k-1}\big).$$

Alors leur réunion complète [1] redonne l'ensemble E :

$$\begin{aligned}\bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k} &= \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_j \cap \big(Q_k \big\backslash Q_{k-1}\big) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \cap \Bigg(\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \big\backslash Q_{k-1}}_{=\mathbb{R}^d}\Bigg) \\ &= \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j \\ &= E,\end{aligned}$$

et ces $E_{j,k}$ sont disjoints deux à deux :

$$E_{j_1,k_1} \cap E_{j_2,k_2} = \emptyset \qquad\qquad {\scriptstyle ((j_1,k_1) \neq (j_2,k_2))}.$$

Ensuite, comme pour tout $j \geqslant 1$ fixé, la sous-famille $\big\{E_{j,k}\big\}_{k=1}^{\infty}$ est constituée d'ensembles mutuellement disjoints *et bornés* de réunion :

$$E_j = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k},$$

on peut appliquer *deux* fois ce que nous venons d'obtenir dans la première partie de la démonstration, une première fois pour obtenir :

$$m\big(E_j\big) = \sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big),$$

et une seconde fois à la réunion disjointe bornée :

$$E = \bigcup_{j=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k}$$

1. On convient que $Q_0 := \emptyset$.

pour obtenir aussi :

$$\begin{aligned} m(E) &= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_{j,k}\big) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} m\big(E_j\big), \end{aligned}$$

ce qui conclut agréablement cette démonstration détaillée. □

Ainsi, nous avons établi l'additivité dénombrable de la mesure de Lebesgue pour les ensembles mesurables disjoints. Ce résultat extrêmement important fournit les connexions nécessaires entre :

• notre notion primitive de volume donnée par la mesure extérieure ;

• l'idée plus avancée d'ensemble mesurable ;

• les opérations infinies dénombrables permises sur ces ensembles.

Énonçons maintenant deux corollaires naturels, auxquels nous attribuons le statut de vrais théorèmes.

Théorème 6.13. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière croissante les uns dans les autres :*

$$E_k \subset E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

alors :

$$m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big).$$

Démonstration. Considérons E_1 puis les complémentaires successifs :

$$E_k \big\backslash E_{k-1} \qquad\qquad (k \geqslant 2),$$

ce qui nous donne une famille d'ensembles *disjoints deux à deux* remplissant de manière alternative :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big).$$

Le Théorème 6.12 fondamental d'additivité dénombrable disjointe qui précède s'applique alors pour dire que la mesure du membre de droite est la somme infinie des mesures de ces nouvelles composantes disjointes :

$$\begin{aligned} m\bigg(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) &= m\big(E_1\big) + \sum_{k=2}^{\infty} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\ &= m\big(E_1\big) + \lim_{K \to \infty} \sum_{k=2}^{K} m\big(E_k \big\backslash E_{k-1}\big) \\ &= \lim_{K \to \infty} m\bigg(E_1 \cup \bigcup_{k=2}^{K} E_k \big\backslash E_{k-1}\bigg) \\ &= \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big), \end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. □

Théorème 6.14. *Si $E_1, E_2, \dots \subset \mathbb{R}^d$ sont une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :*

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

et si :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty,$$

pour un certain k_0, alors :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux : prendre par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$.

Démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après élimination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie.

Considérons de manière similaire les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au Théorème 6.12 *pénultième* (= avant dernier ci-dessus) d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) &= m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big)\Big] \\ &= m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a d'honnêtes nombre réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big),$$

ce qui complète ces arguments assez simples. □

Pour terminer ce périple distrayant dans le noble pays de la *Théorie de la mesure*, nous énonçons un dernier résultat qui réalise une intuition fondamentale concernant la relation qu'entretiennent les ensembles mesurables avec les ensembles mesurables *modèles* que sont les ouverts et les fermés. L'idée en effet, c'est qu'un ensemble mesurable *absolument quelconque et arbitraire* peut être approximé à volonté par des ensembles ouverts qui le contiennent, et par des ensembles fermés contenus en lui.

Autrement dit, les ensembles mesurables sont toujours ε-proches des ouverts et des fermés, qui sont modèles simples et universels.

Théorème 6.15. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable quelconque. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :*

$$m\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \leqslant \varepsilon.$$

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash F\big) \leqslant \varepsilon.$$

(iii) *Lorsque la mesure $m(E) < \infty$ est de plus finie, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble compact $K \subset E$ tel que :*

$$m\big(E\backslash K\big) \leqslant \varepsilon.$$

(iv) *Lorsque à nouveau $m(E) < \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une réunion finie :*

$$F := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\big(E\,\Delta\,F\big) \leqslant \varepsilon.$$

Rappelons que la *différence symétrique* entre deux sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ et $F \subset \mathbb{R}^d$, notée $E\Delta F$, est l'ensemble des points qui n'appartiennent qu'à l'un d'entre eux :

$$E\Delta F := (E\backslash F) \cup (F\backslash E).$$

Démonstration. La propriété **(i)** n'est autre que la définition de la mesurabilité !

Quant à la propriété **(ii)**, elle a déjà été vue dans la Proposition 6.11.

Ensuite concernant **(iii)**, prenons grâce à ce que nous venons de démontrer un fermé $F \subset E$ tel que :

$$m\big(E\backslash F\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit $\overline{B}_n$ la boule fermée de centre n centrée à l'origine. On introduit la suite d'ensembles compacts :

$$K_n := F \cap \overline{B}_n,$$

qui est croissante et qui remplit F :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = F.$$

La suite d'ensembles mesurables $E\backslash K_n$ est alors décroissante :

$$K_n \subset K_{n+1} \implies E\big\backslash K_n \supset E\big\backslash K_{n+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

d'intersection complète :

$$\begin{aligned}\bigcap_{n=1}^{\infty} \big(E\backslash K_n\big) &= E\Big\backslash \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \\ &= E\backslash F.\end{aligned}$$

Ensuite :

$$m(E\backslash F) \leqslant m(E) < \infty,$$

le Théorème 6.14 qui précède sur les suites décroissantes d'ensembles s'applique alors pour donner :

$$m(E\backslash F) = \lim_{n\to\infty} m\big(E\big\backslash K_n\big),$$

et donc il existe $N \gg 1$ assez grand pour que $n \geqslant N$ implique :

$$\begin{aligned} m\big(E\big\backslash K_n\big) &\leqslant m(E\backslash F) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \varepsilon. \end{aligned}$$

Enfin, venons-en à la dernière propriété **(iv)**. Comme E est mesurable, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert $\mathscr{O} \supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le Théorème 3.2 représente alors cet ouvert comme réunion dénombrable d'une famille $\big\{Q_j\big\}_{j=1}^{\infty}$ de cubes fermés presque disjoints satisfaisant donc :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j = \mathscr{O},$$

ainsi que :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| &= m(\mathscr{O}) \\ &= m(E) + m\big(\mathscr{O}\backslash E\big) \\ &\leqslant m(E) + \frac{\varepsilon}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Or comme par hypothèse $m(E) < \infty$, la série infinie positive à gauche doit converger, ce qui assure l'existence d'un entier $J = J_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{j=J+1}^{\infty} \big|Q_j\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous introduisons le fermé :

$$F := \bigcup_{j=1}^{J} Q_j,$$

nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned} m\big(E\,\Delta\,F\big) &= m\big(E\backslash F\big) + m\big(F\backslash E\big) \\ &\leqslant m\big(\mathscr{O}\backslash F\big) + m\big(F\backslash E\big) \\ &= m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \bigg\backslash \bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg) + m\bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q_j \bigg\backslash E\bigg) \\ &\leqslant m\bigg(\bigcup_{j=J+1}^{\infty} Q_j\bigg) + m\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j \bigg\backslash E\bigg) \\ &\leqslant \sum_{j=J+1}^{\infty} \big|Q_j\big| + \sum_{j=1}^{\infty} \big|Q_j\big| - m(E) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \end{aligned}$$

ce qui achève cette quatrième démonstration. □

Corollaire 6.16. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, il existe une suite décroissante $(\mathscr{O}_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles ouverts :*

$$E \subset \mathscr{O}_{k+1} \subset \mathscr{O}_k \qquad (k \geqslant 1),$$

tels que :

$$m(E) = \lim_{k \to \infty} m(\mathscr{O}_k),$$

et il existe aussi une suite croissante $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles fermés :

$$F_k \subset F_{k+1} \subset E \qquad (k \geqslant 1),$$

tels que :

$$m(E) = \lim_{k \to \infty} m(F_k). \qquad \square$$

Démonstration. Prendre $\varepsilon := \frac{1}{n}$ dans **(i)** et **(ii)** de la Proposition 6.15, et remodeler (exercice) les ouverts et les fermés trouvés de manière à avoir deux suites qui sont décroissante et croissante. $\square$

En résumé, les ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ sont par définition ceux que l'on peut approximer de l'extérieur par des ouverts $\mathscr{O} \supset E$ de telle sorte que la mesure extérieure de la couronne d'erreur soit arbitrairement petite (Définition 6.1) :

$$m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

et pour cette raison, la théorie révèle que les ensembles mesurables quelconques sont arbitrairement proches des ensembles ouverts.

7. Propriétés d'invariance de la mesure de Lebesgue

Une propriété cruciale de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ est son invariance par translations quelconques.

Théorème 7.1. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, et si $h \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de translation, alors l'ensemble translaté :*

$$E + h := \big\{x + h : \ x \in E\big\}$$

est lui aussi mesurable, de même mesure :

$$m\big(E + h\big) = m(E).$$

Démonstration. En partant de l'observation que cette invariance de la mesure par translation est trivialement satisfaite pour tout cube ouvert ou fermé $Q \subset \mathbb{R}^d$, on applique le principe intuitif général que nous venons d'énoncer à la fin de la section précèdente, à savoir plus rigoureusement, on se convainc mentalement que lorsqu'on passe à la mesure extérieure $m^*(\cdot)$, l'invariance par translation est conservée :

$$m^*(E + h) = m^*(E),$$

et ensuite, on vérifie scrupuleusement comme suit que $E + h$ est effectivement mesurable. Partant de $\mathscr{O} \supset E$ ouvert tel que :

$$m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \leqslant \varepsilon,$$

le translaté $\mathscr{O} + h$ est encore un ouvert contenant $E + h$ (exercice mental), et l'on a :

$$\begin{aligned} m^*\big((\mathscr{O} + h) \backslash (E + h)\big) &= m^*\big(\mathscr{O} \backslash E\big) \\ &\leqslant \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre la mesurabilité de $E + h$, et comme $m = m^*$ sur les ensembles mesurables, on a bien $m(E + h) = m(E)$. □

De la même manière, on peut établir l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue (voir certains exercices à la fin de ce chapitre).

Théorème 7.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un ensemble mesurable quelconque, alors pour $\delta > 0$ quelconque, l'ensemble δ-dilaté :*

$$\delta\, E := \big\{ \big(\delta\, x_1, \dots, \delta\, x_d\big) \in \mathbb{R}^d \colon\, (x_1, \dots, x_d) \,\in\, E \big\}$$

est mesurable, de mesure égale à :

$$m\big(\delta\, E\big) \,=\, \delta^d\, m(E).$$ □

De plus, la mesure de Lebesgue est invariante par réflexions, à savoir si :

$$-\,E := \big\{ -\, x \in \mathbb{R}^d \colon\, x \in E \big\},$$

alors :

$$m\big(-\,E\big) = m(E).$$

8. σ-algèbres et ensembles boréliens

Définition 8.1. Une *σ-algèbre dans* $\mathbb{R}^d$ est une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ qui est stable par réunions dénombrables, par intersections dénombrables, et par passages au complémentaire.

Évidemment, la σ-algèbre qui consiste en *tous* les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ a peu d'intérêt. Mais ce qui vient d'être démontré dans les sections précédentes a fait voir la :

Proposition 8.2. *La collection de tous les sous-ensembles mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$ forme une σ-algèbre.* □

Une autre σ-algèbre joue un rôle vital en Analyse, et particulièrement, en *Théorie des Probabilités*.

Définition 8.3. La σ-algèbre des *ensembles boréliens* dans $\mathbb{R}^d$, noté :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d},$$

est la plus petite σ-algèbre qui contient tous les ensembles ouverts. Les éléments de cette σ-algèbre sont appelés les *boréliens*.

Démonstration. Le bien-fondé de cette définition ne sera établi que lorsqu'on aura donné un sens à l'expression « *la plus petite σ-algèbre contenant les ouverts* », et fait voir aussi qu'un tel objet est unique.

En effet, « *la plus petite* » signifie que si $\mathscr{S}$ est une σ-algèbre quelconque qui contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^d$, alors nécessairement :

$$\mathscr{S} \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}.$$

Mais puisqu'on se convainc aisément (exercice) qu'une intersection *quelconque* — pas nécessairement dénombrable — de σ-algèbres reste encore une σ-algèbre, on peut simplement définir $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ comme l'intersection de *toutes* les σ-algèbres qui contiennent les ouverts. Ceci montre l'existence, et aussi l'unicité, de la σ-algèbre des boréliens. □

Ensuite, puisque les ouverts sont mesurables, on voit que la σ-algèbre des boréliens est contenue dans la σ-algèbre des ensembles mesurables :

$$\text{ensembles boréliens} \subset \text{ensembles mesurables.}$$

Question : *Cette inclusion est-elle une égalité ?*

Réponse : *Non !* Comme le montre l'Exercice 22, il existe en effet des ensembles Lebesgue-mesurables qui ne sont pas boréliens.

En fait, du point de vue de Borel, les ensembles mesurables au sens de Lebesgue apparaissent comme *complétion* de la σ-algèbre des boréliens, à savoir, en adjoignant tous les sous-ensembles des ensembles boréliens qui sont de mesure 0, comme nous allons le voir dans un instant.

En partant des ensembles ouverts ou fermés, qui sont les ensembles boréliens les plus simples, on pourrait essayer de lister tous les ensembles boréliens en ordre de complexité croissante. Juste après les ouverts et les fermés, viendraient les deux familles d'ensembles suivants.

Définition 8.4. Les intersections dénombrables d'ensembles ouverts de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des G_δ*-ensembles.*

Cette dénomination « G_δ » provient des termes allemands « GEBIETE » (domaine), et « DURSCHNITT » (intersection). Aux complémentaires des G_δ-ensembles, on donne habituellement un nom tout aussi ésotérique.

Définition 8.5. Les réunions dénombrables d'ensembles fermés de $\mathbb{R}^d$ sont appelés des F_σ*-ensembles.*

Ici, la dénomination « F_σ » provient du français « fermé », et la lettre σ en réfère au symbole grec Σ de sommation mathématique.

Évidemment, nous savons que les G_δ-ensembles et les F_σ-ensembles sont tous mesurables. Le fait est qu'à des ensembles de mesure nulle près, ce sont là tous les ensembles mesurables possibles, puisqu'on a le :

Théorème 8.6. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *E est mesurable ;*

(ii) *E est la différence :*

$$E = G \backslash N$$

entre un G_δ-ensemble $G \subset \mathbb{R}^d$ et un sous-ensemble $N \subset G_\delta$ de mesure nulle ;

(iii) *E est la réunion disjointe :*

$$E = F \cup N$$

d'un F_σ-ensemble $F \subset \mathbb{R}^d$ et d'un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^d$ de mesure nulle.

Démonstration. Clairement, un ensemble qui satisfait **(ii)** ou **(iii)** est mesurable avec :

$$m(E) = m(G) + 0 \qquad \text{et} \qquad m(E) = m(F) + 0.$$

Réciproquement, établissons **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Si E est mesurable, pour tout entier $n \geqslant 1$, on peut trouver un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \leqslant \frac{1}{n}.$$

Alors l'intersection complète :

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$$

est un G_δ-ensemble qui contient E. De plus, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$G \backslash E \subset \mathscr{O}_n \backslash E,$$

d'où :

$$\begin{aligned} m^*\big(G \backslash E\big) &\leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &= m\big(\mathscr{O}_n \backslash E\big) \\ &\leqslant \frac{1}{n}, \end{aligned}$$

et en faisant tendre $n \longrightarrow \infty$, on voit que l'ensemble :

$$N := G \backslash E$$

est de mesure extérieure nulle, donc mesurable par définition, de mesure nulle d'ailleurs !

Pour la dernière implication **(i)** $\Longrightarrow$ **(iii)**, il suffit d'appliquer le Théorème 6.15 **(ii)** avec $\varepsilon := \frac{1}{n}$, et de prendre la réunion des ensembles fermés associés. □

9. Construction d'un ensemble *non* mesurable

Comme nous l'avons déjà amplement signalé au début de ce chapitre, aucune théorie de la mesure ne peut espérer que tous les sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ soient mesurables. Dans cette section, nous donnons un exemple très classique et très élémentaire de sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (avec $d = 1$) qui n'est *pas* mesurable. Sa construction, due à Vitali en 1905, repose sur l'Axiome du choix, déjà énoncé p. 151. Sans difficulté, on peut en déduire un exemple d'ensemble non mesurable dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ quelconque.

Sur l'intervalle unité $[0, 1]$, soit la relation binaire :

$$x \sim y \quad \overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow} \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

On vérifie aisément (exercice) que cette relation binaire satisfait bien les trois propriétés requises :

- $x \sim x$ pour tout $x \in [0, 1]$;
- $x \sim y$ si et seulement si $y \sim x$;
- si $x \sim y$ et si $y \sim z$ alors $x \sim z$;

pour être une relation d'équivalence. Ainsi, y est équivalent à x s'il en diffère d'un nombre rationnel. D'après la théorie générale, deux classes d'équivalences ou bien coïncident, ou bien sont disjointes, et de plus, $[0, 1]$ est la réunion disjointe de toutes les classes d'équivalences $\mathscr{C}_\alpha$, ce que nous écrirons :

$$[0, 1] = \bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha,$$

les indices α parcourant un certain ensemble A.

Grâce à l'Axiome du choix, que nous admettons ici, on peut alors sélectionner pour tout $\alpha \in A$ un unique élément :

$$x_\alpha \in \mathscr{C}_\alpha.$$

Théorème 9.1. [Vitali 1905] *Le sous-ensemble de* $[0,1]$ *:*

$$\mathscr{N} := \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\alpha\}$$

n'est alors pas *Lebesgue-mesurable.*

Démonstration. Raisonnons par contradiction et supposons au contraire que $\mathscr{N}$ soit mesurable. Comme l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable, il existe une énumération :

$$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$$

de son sous-ensemble :

$$\mathbb{Q} \cap [-1,\, 1].$$

Introduisons alors tous les translatés :

$$\mathscr{N}_k := \mathscr{N} + r_k \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

qui sont tous contenus dans $[-1,2] = [0,1] + [-1,1]$.

Assertion 9.2. *Ces ensembles* $\mathscr{N}_k$ *sont disjoints deux à deux :*

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset \qquad\qquad (1 \leqslant k_1 < k_2 \leqslant \infty),$$

et leur réunion complète satisfait :

$$[0,1] \ \subset\ \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \ \subset\ [-1,\, 2].$$

Démonstration. Pour voir que ces ensembles sont disjoints, montrons donc que deux d'entre eux avec $k_1 < k_2$ sont toujours d'intersection vide :

$$\mathscr{N}_{k_1} \cap \mathscr{N}_{k_2} = \emptyset.$$

En effet, si au contraire il existait un nombre réel appartenant à cette intersection, ceci voudrait dire qu'il existe deux nombres rationnels r_{k_1} et r_{k_2} dans $[-1,1]$ ainsi que deux nombres x_{α_1} et x_{α_2} dans $\mathscr{N}$ tels que :

$$x_{\alpha_1} + r_{k_1} = x_{\alpha_2} + r_{k_2},$$

ce qui, après soustraction immédiate, équivaudrait à :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} = r_{k_2} - r_{k_1}.$$

Or le membre de droite serait alors un nombre rationnel *non nul*, puisque $k_1 < k_2$ et puisque l'énumération $k \longmapsto r_k$ est injective, et donc on en déduirait que :

$$x_{\alpha_1} - x_{\alpha_2} \ \in\ \mathbb{Q}\backslash\{0\},$$

ce qui voudrait dire qu'on a trouvé deux éléments *distincts* dans $\mathscr{N}$ et néanmoins équivalents :

$$x_{\alpha_1} \ \sim\ x_{\alpha_2},$$

ce qui contredirait de manière flagrante le fait que $\mathscr{N}$ contient exactement *un* représentant de chaque classe d'équivalence.

Ensuite concernant la première inclusion, si $x \in [0,1]$ est quelconque, puisque les classes d'équivalence $\bigcup_{\alpha \in A} \mathscr{C}_\alpha = [0,1]$ remplissent l'intervalle, on a $x \in \mathscr{C}_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A$, à savoir $x \sim x_\alpha$, et donc :

$$\underbrace{x - x_\alpha}_{\substack{\in [-1,1] \\ =[0,1]-[0,1]}} = r_k,$$

pour un unique rationnel $r_k \in [-1,1]$, ce qui veut précisément dire que $x \in \mathscr{N}_k$. □

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème de Vitali. Si $\mathscr{N}$ était Lebesgue-mesurable, la mesure de Lebesgue étant invariante par translations (Théorème 7.1), chaque translaté :

$$\mathscr{N}_k = \mathscr{N} + r_k$$

serait aussi Lebesgue-mesurable, de même mesure :

$$m\big(\mathscr{N}_k\big) = m\big(\mathscr{N}\big).$$

Grâce au Théorème 6.5 de préservation de la mesurabilité par réunions dénombrables, l'ensemble :

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k$$

serait alors lui aussi mesurable. Mais nous venons de démontrer qu'il est encadré par :

$$[0,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{N}_k \subset [-1,\,2],$$

et donc, par monotonie de la mesure, et aussi par le Théorème 6.12 d'additivité disjointe dénombrable :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}_k\big) \leqslant 3,$$

à savoir puisque tous les translatés $\mathscr{N}_k$ posséderaient la même mesure :

$$1 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\big(\mathscr{N}\big) \leqslant 3.$$

My sexy Daisy, is'nt there a terrific absurd here ? Oh yes, stupid Donald Duck ! This is the desired contradiction, since neither $m(\mathscr{N}) = 0$ *nor* $m(\mathscr{N}) > 0$ *is possible.* □

10. Fonctions étagées et fonctions mesurables

Grâce à la notion d'ensemble mesurable, nous pouvons maintenant étudier les objets qui sont au cœur de la théorie de l'intégration, à savoir les *fonctions mesurables*. Le point de départ est le suivant.

Définition 10.1. La *fonction indicatrice* d'un sous-ensemble (quelconque) $E \subset \mathbb{R}^d$ est la fonction $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\mathbf{1}_E(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \; x \in E, \\ 0 & \text{lorsque } \; x \in \mathbb{R}^d \backslash E. \end{cases}$$

Ensuite, on passe aux fonctions qui sont les briques élémentaires de la théorie de l'intégration de Riemann. Rappelons qu'un *rectangle général* $R \subset \mathbb{R}^d$ est un produit de d intervalles de $\mathbb{R}$ qui sont de l'une des quatre formes possibles :

$$[a_j, b_j], \qquad [a_j, b_j[, \qquad]a_j, b_j], \qquad]a_j, b_j[,$$

avec $-\infty < a_j \leqslant b_j \leqslant \infty$ pour $j = 1, \dots, d$.

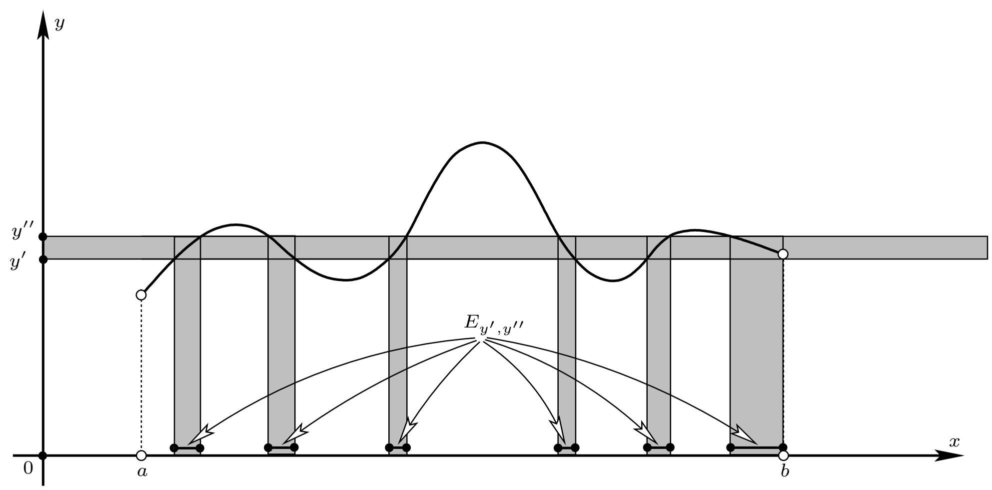
Définition 10.2. Une *fonction en escalier* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{R_k}$ de rectangles généraux (ouverts ou fermés) $R_k \subset \mathbb{R}^d$.

(La plupart du temps, en fait, on considère des rectangles fermés.)

Cependant, comme nous l'avons soigneusement fait observer par anticipation dans un des chapitres qui précèdent, la Théorie de l'intégration au sens de Lebesgue nécessite des ensembles qui sont plus généraux que les rectangles, ensembles qui apparaissent lorqu'on découpe en tranches fines horizontales l'hypographe d'une fonction $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à intégrer.



Or c'est justement toute la belle et riche théorie de la mesure que nous venons d'achever qui offre le concept tant espéré pour parler des ensembles du type que nous avions noté $E_{y',y''}$.

Ainsi le concept adéquat, nettement plus général que celui de fonction en escalier, est-il le suivant.

Définition 10.3. Une *fonction étagée* est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

à coefficients réels $a_k \in \mathbb{R}$, de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ d'ensembles Lebesgue-mesurables quelconques $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures :

$$m\big(E_k\big) < \infty$$

finies.

Ici, donc, l'*ascension en généralité* tient au fait que contrairement à de trop simples rectangles R_k, de tels ensembles mesurables E_k peuvent fort bien posséder une structure particulièrement complexe. Ces fonctions étagées vont alors jouer le rôle de fonctions-modèles dans l'univers général des fonctions mesurables que nous allons maintenant présenter et étudier.

Commençons en effet par étudier les fonctions :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

que nous autorisons à prendre les deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$. Autrement dit, en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction f prend ses valeurs dans l'ensemble *étendu* des nombres réels :

$$-\infty \leqslant f(x) \leqslant +\infty.$$

Lorsque f est une fonction réelle au sens classique, nous la noterons comme d'habitude :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}.$$

En fait, dans la théorie qui va suivre, et dans ses nombreuses applications, nous aurons affaire à des fonctions qui ne prennent la valeur $-\infty$ et la valeur $+\infty$ que sur des ensembles de mesure nulle, et de tels ensembles seront systématiquement considérés comme négligeables.

Plus généralement, nous allons étudier des fonctions définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ a priori quelconque :

$$\begin{aligned} f\colon &\quad E \longrightarrow \mathbb{R}, \\ f\colon &\quad E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}. \end{aligned}$$

Voici alors maintenant un concept très important, plus général encore que celui de fonction étagée.

Définition 10.4. Une fonction f définie sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty, a[\big) = \big\{x \in E\colon\ f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$.

Pour abréger, nous noterons souvent ces ensembles :

$$\big\{f < a\big\},$$

tout du moins lorsqu'aucune confusion possible ne sera à craindre. Observons alors que l'ensemble :

$$\big\{f = -\infty\big\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f < -n\big\}$$

est mesurable, comme intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

En fait, plusieurs options équivalentes existent pour définir ce concept de fonction mesurable, en changeant par exemple l'inégalité stricte en une inégalité faible.

Lemme 10.5. *Une fonction* $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est mesurable au sens de la définition qui précède si et seulement si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble :*

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \leqslant a\big\} \,=\, \big\{f \leqslant a\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Dans une direction, nous écrivons :

$$\big\{f \leqslant a\big\} \,=\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f < a + \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable.

Dans l'autre direction, nous écrivons :

$$\big\{f < a\big\} \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f \leqslant a - \tfrac{1}{n}\big\},$$

et nous nous souvenons qu'une réunion dénombrable d'ensembles mesurables reste mesurable. □

Sans vergogne, on peut aussi changer le sens des inégalités.

Lemme 10.6. *Une fonction* $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est mesurable si et seulement si, pour tout* $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble de sur-niveau :*

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant a\big\} \,=\, \big\{f \geqslant a\big\}$$

est mesurable, si et seulement si (aussi !), pour tout $a \in \mathbb{R}$*, l'ensemble :*

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) > a\big\} \,=\, \big\{f > a\big\}$$

est mesurable.

En particulier, on en déduit que :

$$f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f > n\big\}$$

est mesurable.

Démonstration. Pour la première affirmation, notons que :

$$\big\{f \geqslant a\big\} \,=\, \Big(\big\{f < a\big\}\Big)^c,$$

et souvenons-nous que la mesurabilité est préservée lors de tout passage au complémentaire. Pour la seconde affirmation, sachant que nous venons de démontrer la mesurabilité des ensembles de sous-niveau $\{f \leqslant a\}$, leurs complémentaires $\{f > a\}$ sont eux aussi mesurables. □

Corollaire 10.7. *Si* $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *est une fonction mesurable,* $\{f = a\}$ *est mesurable pour tout* $a \in \mathbb{R}$*.* □

Corollaire 10.8. *Une fonction* f *est mesurable si et seulement si son opposée* $-f$ *est mesurable.* □

En appliquant le même type de raisonnements, le lecteur se convaincra aisément de la véracité de l'énoncé suivant.

Lemme 10.9. *Une fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ à valeurs finies est mesurable si et seulement si, pour tout couple de nombres réels finis :*

$$-\infty < a < b < +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\big\{a < f < b\big\}$$

sont mesurables. Plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ par l'un des trois ensembles :

$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}. \qquad \square$$

En fait, il est davantage utile de connaître l'énoncé qui caractérise le plus généralement possible la mesurabilité.

Proposition 10.10. *Soit f une fonction définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$.*
(i) *Lorsque $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(\mathscr{O})$ est mesurable.*
(ii) *Lorsque $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, f est mesurable si et seulement si, pour tout fermé $F \subset \mathbb{R}$, l'image réciproque $f^{-1}(F)$ est mesurable.*
(iii) *Lorsque $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels, f est mesurable si et seulement si l'une des deux conditions* **(ii)** *ou* **(iii)** *est satisfaite, et si, de plus :*

$$f^{-1}(-\infty) \qquad \textit{et} \qquad f^{-1}(+\infty)$$

sont deux ensembles mesurables.

Démonstration. Utiliser (exercice) le fait qu'un sous-ensemble ouvert quelconque $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ peut être écrit comme réunion dénombrable de segments ouverts. $\square$

Lemme 10.11. *Si $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors elle est mesurable.*

Démonstration. En effet, l'image inverse de tout ouvert par une fonction continue est par définition même de la continuité un ouvert, donc la proposition qui précède s'applique. $\square$

Un commentaire intuitif s'impose ici : les deux notions de continuité et de mesurabilité concernent donc les images réciproques d'ouverts et d'ensembles mesurables.

Lemme 10.12. *Si $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction mesurable, et si $\Phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors la composée $\Phi \circ f$ est mesurable.*

Démonstration. En effet, Φ étant continue, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'image inverse :

$$\Phi^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big)$$

est un ouvert $\mathscr{O}_a$, et donc ensuite :

$$\big(\Phi \circ f\big)^{-1}\big(]-\infty,\, a[\big) \,=\, f^{-1}\big(\mathscr{O}_a\big)$$

est bien mesurable. $\square$

Attention ! Il est faux en général que la composée dans l'autre sens $f \circ \Phi$ d'une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec une fonction continue $\Phi\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ reste mesurable, l'Exercice 21 propose une recette cantor-éique épicée pour étudiant-cuisinier désireux de produire un contre-exemple.

La propriété la plus remarquable dont jouissent les fonctions mesurables, c'est que leur mesurabilité reste satisfaite après toutes les espèces possibles de passage à la limite. Voici une première illustration de ce principe.

Théorème 10.13. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors les quatre fonctions :*

$$\begin{aligned} x &\longmapsto \sup_{n\geqslant 1} f_n(x), \\ x &\longmapsto \inf_{n\geqslant 1} f_n(x), \\ x &\longmapsto \limsup_{n\to\infty} f_n(x), \\ x &\longmapsto \liminf_{n\to\infty} f_n(x), \end{aligned}$$

sont elles aussi mesurables.

Démonstration. Faire voir que la fonction $\sup_n f_n$ est mesurable revient à constater (exercice mental) que ses ensembles de sous-niveau pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque peuvent s'écrire :

$$\Big\{\sup_{n\geqslant 1} f_n \,<\, a\Big\} \,=\, \bigcap_{n=1}^{\infty} \big\{f_n < a\big\},$$

sous la forme d'une intersection dénombrable d'ensembles mesurables.

Pour la fonction $\inf_n f_n$, on écrit de manière similaire :

$$\Big\{\inf_{n\geqslant 1} f_n \,<\, a\Big\} \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} \big\{f_n < a\big\}.$$

Ensuite, de ces deux premiers résultats on déduit les deux affirmations suivantes concernant la limite supérieure et la limite inférieure, car d'après l'Exercice 1, on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} f_n(x) \,&=\, \inf_{k\geqslant 1}\Big(\sup_{n\geqslant k} f_n(x)\Big), \\ \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \,&=\, \sup_{k\geqslant 1}\Big(\inf_{n\geqslant k} f_n(x)\Big), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Chose encore plus spectaculaire, le théorème qui suit montre que la mesurabilité est préservée par limites ponctuelles simples ! Nous verrons que ce fait magique va considérablement simplifier les interversions entre limite et intégration :

$$\int \lim_{n\to\infty} \,=\, \lim_{n\to\infty} \int,$$

et que nous n'aurons plus à nous soucier de convergence uniforme comme cela était nécessaire en Théorie de l'intégration riemannienne.

Théorème 10.14. *Si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$ telle qu'en tout point $x \in E$, la limite :*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=:\, f(x)$$

existe, alors la fonction-limite simple f ainsi définie est elle aussi mesurable.

Démonstration. En effet, lorsque la limite existe, elle est égale à la fois à la limite inférieure et à la limite supérieure :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, \liminf_{n\to\infty} f_n(x) \,=\, \limsup_{n\to\infty} f_n(x),$$

et nous venons de voir que ces deux dernières fonctions sont mesurables. □

Proposition 10.15. *Si f et g sont deux fonctions mesurables définies sur un ensemble mesurable fixe $E \subset \mathbb{R}^d$, alors :*

(i) *pour tout entier $k \geqslant 1$, la fonction f^k est mesurable ;*

(ii) *$f+g$ et $f\,g$ sont mesurables lorsque f et g sont à valeurs finies.*

Démonstration. Utilisons la définition de la mesurabilité en termes d'ensembles de surniveau, ce qui est justifié par le Lemme 10.6.

Concernant **(i)**, il suffit de noter que pour k impair :

$$\big\{f > a\big\} = \big\{f > a^{1/k}\big\},$$

tandis que pour k pair et pour $a \geqslant 0$:

$$\big\{f^k > a\big\} \,=\, \big\{f > a^{1/k}\big\} \cup \big\{f < -\,a^{1/k}\big\}.$$

Concernant **(ii)**, la mesurabilité de $f+g$ provient de l'écriture adaptée (exercice mental) :

$$\big\{f+g > a\big\} \,=\, \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \big\{f > a-r\big\} \cap \big\{g > r\big\},$$

tandis que la mesurabilité de $f\,g$ provient, en tenant compte de ce qui a déjà été acquis, de l'identité babylonienne :

$$f\,g \,=\, \frac{1}{4}\,\big[(f+g)^2 - (f-g)^2\big],$$

ce qui conclut. □

Définition 10.16. Deux fonctions réelles f et g définies sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ sont dites *égales presque partout*, ce qu'on exprime aussi comme :

$$f(x) = g(x), \qquad\qquad \text{« pour presque tout } x \text{ »},$$

si l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \neq g(x)\big\}$$

est de mesure nulle.

On dira aussi couramment :

$$f = g \qquad\qquad \textit{presque partout},$$

ce qu'on abrégera par :

$$f = g \qquad\qquad \text{p.p.}$$

Plus généralement, une propriété, ou un énoncé, seront dits être satisfaits presque partout (*p.p.*) lorsqu'ils le sont hors d'un ensemble de mesure nulle.

Lemme 10.17. *Si une première fonction f est mesurable, et si une deuxième fonction g lui est égale presque partout, alors g est aussi mesurable.*

Démonstration. En effet, les deux ensembles de sous-niveau :

$$\{f < a\} \qquad \text{et} \qquad \{g < a\}$$

diffèrent seulement d'un ensemble de mesure nulle, donc l'un est mesurable si et seulement si l'autre l'est. □

En fait, toutes les propriétés vues jusqu'à présent peuvent être transformées en propriétés qui sont satisfaites presque partout. Par exemple, si $\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une collection de fonctions mesurables qui ne converge simplement *que* pour presque tout x :

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f \qquad \text{p.p.},$$

alors la fonction-limite f est mesurable, même si ses valeurs font défaut sur un certain ensemble de mesure nulle.

Ensuite, si deux fonctions f et g sont définies presque partout sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, alors $f+g$ et $f\,g$ n'ont de valeurs définies que sur l'intersection des deux domaines de f et de g. Mais puisque la réunion de deux ensembles de mesure nulle est encore de mesure nulle, c'est que $f+g$ et $f\,g$ sont à nouveau définies presque partout.

Résumons cette discussion comme suit.

Proposition 10.18. *Si une fonction f définie presque partout est mesurable, et si une autre fonction g définie presque partout est égale à f presque partout, alors g est mesurable.* □

11. Approximation des fonctions mesurables par des fonctions étagées

Les théorèmes que nous allons démontrer dans cette section sont tous d'une même nature, et ils vont renforcer nos premières intuitions concernant la structure des fonctions mesurables. Commençons par approximer des fonctions mesurables positives par des fonctions étagées.

Théorème 11.1. *Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable à valeurs finies positives. Alors il existe une suite :*

$$\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions étagées positives qui est croissante :

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. La première chose à faire est de tronquer f pour la rendre bornée. Pour $N \geqslant 1$ (grand) entier, soit donc le cube fermé :

$$Q_N := [-N,\, N]^d.$$

Définissons alors la fonction doublement tronquée :

$$F_N(x) := \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } x \in Q_N \text{ et } f(x) \leqslant N, \\ N & \text{lorsque } x \in Q_N \text{ et } f(x) > N, \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N. \end{cases}$$

En effet, on écrase f sur 0 hors du grand cube, et simultanément, on décapite ses valeurs trop élevées.

Il est alors clair (exercice mental) que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} F_N(x).$$

Ensuite, partitionnons l'intervalle d'arrivée $[0, N]$ de F_N comme suit. Pour $N \geqslant 1$ fixé, pour un autre grand entier $M \geqslant 1$ fixé, et pour tout entier :

$$1 \leqslant \ell \leqslant NM,$$

introduisons l'ensemble de type tranche fine :

$$E_{\ell,M} := \left\{ x \in Q_N \colon \frac{\ell - 1}{M} < F_N(x) \leqslant \frac{\ell}{M} \right\},$$

ainsi que l'ensemble de type base inférieure :

$$\begin{aligned} E_{0,N}^* &:= \big\{ x \in Q_N \colon F_N(x) = 0 \big\} \\ &= \big\{ x \in Q_N \colon f(x) = 0 \big\}. \end{aligned}$$

Puisque l'on a la réunion disjointe suivante d'intervalles dans l'espace d'arrivée $\mathbb{R}_+$:

$$\{0\} \cup \big]0, \tfrac{1}{M}\big] \cup \big]\tfrac{1}{M}, \tfrac{2}{M}\big] \cup \cdots \cup \big]\tfrac{NM-1}{M}, \tfrac{NM}{M}\big] = \big[0, N\big],$$

faisons observer en passant (exercice de lecture) que l'on a la réunion *disjointe :*

$$E_{0,N}^* \cup \bigcup_{\ell=1}^{NM} E_{\ell,M} = Q_N.$$

Alors nous pouvons former la famille de fonctions étagées auxiliaires :

$$F_{N,M}(x) := \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E_{0,N}^*}(x)} + \sum_{\ell=1}^{NM} \frac{\ell - 1}{M} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,M}}(x).$$

Ces fonctions $F_{N,M}$ sont bien des fonctions étagées !

Assertion 11.2. *En tout point $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$0 \leqslant F_N(x) - F_{N,M}(x) \leqslant \frac{1}{M}.$$

Démonstration. Lorsque $x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_N$, les deux fonctions $F_N(x) = 0$ et $F_{N,M}(x) = 0$ s'annulent.

Lorsque $x \in Q_N$, ce point x appartient à un et un seul des ensembles $E_{0,N}^*$ et $E_{\ell,M}$. Lorsque $x \in E_{\ell_x,M}$ pour un certain entier $1 \leqslant \ell_x \leqslant NM$, on a par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{M} < F_N(x) \leqslant \frac{\ell_x}{M},$$

tandis que :

$$F_{N,M}(x) = \frac{\ell_x - 1}{M} \cdot 1,$$

puisque x n'appartient à aucun autre $E_{\ell',M}$. Dans ce cas, on a bien l'inégalité assertée :

$$0 \leqslant F_N(x) - F_{N,M}(x) \leqslant \frac{\ell_x}{M} - \frac{\ell_x - 1}{M} = \frac{1}{M}.$$

Enfin, lorsque $x \in E^*_{0,N}$, il est clair que $F_N(x) = 0 = F_{N,M}(x)$, et l'inégalité assertée est trivialement satisfaite. □

Choisissons maintenant :

$$N := 2^k \qquad \text{et} \qquad M := 2^k,$$

où $k \geqslant 1$ est un entier qui tendra vers l'infini, et introduisons la suite de fonctions qui remplira le rôle attendu :

$$\varphi_k := F_{2^k,2^k}.$$

Assertion 11.3. *Cette suite de fonctions est croissante :*

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Par définition, les fonctions :

$$\varphi_k(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E^*_{0,2^k}}(x)} + \sum_{\ell=1}^{2^{2k}} \frac{\ell - 1}{2^k} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell,2^k}}(x),$$

$$\varphi_{k+1}(x) = \underline{0 \cdot \mathbf{1}_{E^*_{0,2^{k+1}}}(x)} + \sum_{\ell'=1}^{2^{2k+2}} \frac{\ell' - 1}{2^{k+1}} \cdot \mathbf{1}_{E_{\ell',2^{k+1}}}(x),$$

sont manifestement positives.

Tout d'abord, lorsque $x \in \mathbb{R}^d \backslash Q_{2^{k+1}}$, on a bien :

$$\varphi_k = 0 \leqslant 0 = \varphi_{k+1}.$$

Mais aussi, lorsque $x \in Q_{2^{k+1}} \backslash Q_{2^k}$:

$$\varphi_k = 0 \leqslant \varphi_{k+1}.$$

Ensuite, lorsque $x \in Q_{2^k}$, techniquement, les choses se gâtent, mais nous somme courageux et volontaires. Trois cas s'invitent à notre table :

$$f(x) = 0, \qquad\qquad 0 < f(x) < 2^k, \qquad\qquad 2^k \leqslant f(x).$$

Premier cas : $f(x) = 0$, d'où $x \in E^*_{0,2^k}$, puis $x \in E^*_{0,2^{k+1}} \cap Q_{2^k}$, et par conséquent :

$$0 = F_{2^k}(x) = F_{2^k,2^k}(x) = \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) = F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) = F_{2^{k+1}}(x) = 0.$$

Deuxième cas : $0 < f(x) < 2^k$, d'où $x \in E_{\ell_x,2^k}$ et $x \in E_{\ell'_x,2^{k+1}}$ pour deux certains entiers :

$$1 \leqslant \ell_x < 2^{2k} \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant \ell'_x < 2^{2k+2},$$

avec par définition :

$$\frac{\ell_x - 1}{2^k} < F_{2^k}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell_x}{2^k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} < F_{2^{k+1}}(x) = f(x) \leqslant \frac{\ell'_x}{2^{k+1}}.$$

Mais la famille des intervalles de longueur $\frac{1}{2^{k+1}}$ dans le réseau $\frac{1}{2^{k+1}}\mathbb{N}$ est emboîtée de longueur moitié dans le réseau $\frac{1}{2^k}\,\mathbb{N}$. Donc si la valeur $f(x)$ est comprise dans ces deux intervalles, exactement deux cas exclusifs l'un de l'autre peuvent se produire :

$$\frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \qquad \text{ou bien} \qquad \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}}.$$

À ce moment-là, la croissance devient claire :

$$\varphi_k(x) = \frac{\ell_x - 1}{2^k} \leqslant \frac{\ell_x - 1}{2^k} + \left\{ \begin{aligned} &\text{ou bien } \ 0 \\ &\text{ou bien } \ \frac{1}{2^{k+1}} \end{aligned} \right\} = \frac{\ell'_x - 1}{2^{k+1}} = \varphi_{k+1}(x).$$

Troisième cas : $f(x) \geqslant 2^k$, d'où $F_{2^k}(x) = 2^k$, puis $x \in E_{2^{2k},2^k}$ et enfin :

$$\varphi_k(x) \,=\, F_{2^k,2^k}(x) \,=\, \frac{2^{2k}-1}{2^k} \,=\, 2^k - \frac{1}{2^k}.$$

Mais grâce à l'Assertion 11.2, on a l'inégalité utile :

$$0 \,\leqslant\, F_{2^{k+1}}(x) \,-\, F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) \,\leqslant\, \frac{1}{2^{k+1}},$$

et comme $F_{2^{k+1}}(x)$ vaut ou bien $f(x) \geqslant 2^k$ ou bien 2^{k+1} (lorsque $f(x) \geqslant 2^{k+1}$), on a toujours :

$$F_{2^{k+1}}(x) \,\geqslant\, 2^k,$$

et l'inégalité utile :

$$F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \,\leqslant\, F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x)$$

devient :

$$\varphi_k(x) = 2^k - \frac{1}{2^k} \,\leqslant\, 2^k - \frac{1}{2^{k+1}} \,\leqslant\, F_{2^{k+1}}(x) - \frac{1}{2^{k+1}} \,\leqslant\, F_{2^{k+1},2^{k+1}}(x) \,=\, \varphi_{k+1}(x),$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Pour terminer, puisque l'on a par construction :

$$0 \,\leqslant\, F_{2^k}(x) - \varphi_k(x) \,\leqslant\, \frac{1}{2^k},$$

et puisque $F_{2^k}(x) \longrightarrow f(x)$, on a bien aussi $\varphi_k(x) \longrightarrow f(x)$ quand $k \to \infty$. □

On se convainc par la réflexion que le résultat précédent reste valable pour les fonctions :

$$f\colon \quad \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs. Pour aller encore plus loin, formulons un résultat général dans lequel nous éliminons l'hypothèse que f est positive, et dans lequel nous autorisons f à prendre aussi la valeur $-\infty$.

Théorème 11.4. *Soit une fonction mesurable à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Alors il existe une suite $\big(\varphi_k\big)_{k=1}^{\infty}$ *de fonctions finies :*

$$\varphi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

croissantes satisfaisant :

$$\big|\varphi_k(x)\big| \,\leqslant\, \big|\varphi_{k+1}(x)\big| \,\leqslant\, \big|f(x)\big| \qquad\qquad (k \geqslant 1;\ x \in \mathbb{R}^d)$$

qui converge ponctuellement vers f en tout point :

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \,=\, f(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Démonstration. Utilisons les deux fonctions auxiliaires classiques :

$$f^+(x) := \max\big(0,\, f(x)\big),$$
$$f^-(x) := -\min\big(f(x),\, 0\big),$$

en termes desquelles :

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Puisque f^+ et f^- sont toutes deux à valeurs positives, le théorème qui précède fournit deux suites de fonctions finies croissantes :

$$\big(\varphi_k^+\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui convergent ponctuellement en tout point vers f^+ et vers f^-, respectivement. Alors si on introduit la suite de fonctions :

$$\varphi_k(x) := \varphi_k^+(x) - \varphi_k^-(x),$$

on voit que cette suite $\varphi_k(x)$ converge vers f en tout point.

Enfin, on se convainc aisément en utilisant les propriétés de φ_k^+ et de φ_k^- (exercice) que la suite :

$$\big(|\varphi_k|\big)_{k=1}^{\infty} = \big(\varphi_k^+ + \varphi_k^-\big)_{k=1}^{\infty}$$

est effectivement croissante. □

Ensuite, on peut aller encore au-delà des fonctions étagées :

$$\sum_{l=1}^{L} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

et approximer les fonctions mesurables par les fonctions encore plus simples que sont les fonctions en escalier. Toutefois, la convergence n'aura pas lieu en tout point.

Proposition 11.5. *Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, la fonction étagée atomique et unitaire :*

$$\mathbf{1}_E$$

est approximable par des fonctions en escalier au sens suivant. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier ψ_ε définie sur $\mathbb{R}^d$ telle que :

$$\psi_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_E(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$.

Démonstration. Grâce au Théorème 6.15 **(iv)**, il existe une réunion finie :

$$\bigcup_{j=1}^{J} Q_j$$

de cubes fermés presque disjoints $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ telle que :

$$m\bigg(E \,\Delta \bigcup_{j=1}^{J} Q_j\bigg) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Choisissons ensuite, pour tous $j = 1, \dots, J$, des sous-cubes fermés :

$$Q'_j \subset \mathsf{Int}\, Q_j,$$

suffisamment gonflés pour que l'on ait encore :

$$m\bigg(\underbrace{E \,\Delta \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j}_{=:\,F_\varepsilon}\bigg) \leqslant \varepsilon.$$

Nous affirmons alors que le fermé F_ε ainsi défini fait l'affaire en complicité avec la fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon(x) := \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{Q'_j}(x).$$

En effet, pour vérifier qu'on a bien $\psi_\varepsilon(x) = \mathbf{1}_E(x)$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon$, observons qu'étant donné deux sous-ensembles quelconques $A, B \subset \mathbb{R}^d$, on a toujours la réunion disjointe générale en quatre sous-ensembles :

$$\mathbb{R}^d = \Big[\mathbb{R}^d \backslash \big(A \cup B\big)\Big] \cup \Big[\big(A \backslash B\big)\Big] \cup \Big[\big(B \backslash A\big)\Big] \cup \Big[A \cap B\Big],$$

qui s'applique ici pour donner :

$$\mathbb{R}^d = \bigg(\mathbb{R}^d \Big\backslash E \cup \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg) \cup \underbrace{\bigg(E \Big\backslash \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg) \cup \bigg(\bigcup_{j=1}^{J} Q'_j \Big\backslash E\bigg)}_{\text{Ensemble } F_\varepsilon \text{ où } \psi_\varepsilon \text{ n'est pas non-contrôlée}} \cup \bigg(E \cap \bigcup_{j=1}^{J} Q'_j\bigg),$$

ce qui nous conduit à inspecter seulement les deux cas non soulignés.

Premier cas : $x \in \mathbb{R}^d \backslash \big(E \cup Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_J\big)$, d'où la coïncidence triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 0 = \psi_\varepsilon(x).$$

Deuxième cas : $x \in E \cap \big(Q'_1 \cup \cdots \cup Q'_J\big)$ d'où, puisque x ne peut appartenir qu'à un seul des Q'_j, la coïncidence tout aussi triviale :

$$\mathbf{1}_E(x) = 1 = \psi_\varepsilon(x).$$

La démonstration est donc achevée. □

Théorème 11.6. *Sur $\mathbb{R}^d$, étant donné une fonction étagée φ quelconque :*

$$\varphi = \sum_{l=1}^{L} a_l \cdot \mathbf{1}_{E_l},$$

où les $E_l \subset \mathbb{R}^d$ sont des sous-ensembles mesurables, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble mesurable $F_\varepsilon \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

et il existe une fonction en escalier :

$$\psi_\varepsilon = \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot \mathbf{1}_{R_k},$$

où les $R_k \subset \mathbb{R}^d$ sont des cubes fermés, tels que :

$$\psi_\varepsilon(x) = \varphi(x) \qquad \text{(pour } x \in \mathbb{R}^d \backslash F_\varepsilon\text{)}.$$

Démonstration. En effet, φ est une combinaison linéaire de fonctions étagées atomiques $\mathbf{1}_{E_l}$ auxquelles s'applique la proposition qui précède, et puisque la combinaison linéaire est *finie*, le résultat découle aisément (exercice) de manipulations standard de quantités-ε. □

Des deux Théorèmes 11.4 et 11.6 découle enfin le résultat majeur suivant, lequel exprime que les fonctions mesurables sont bien représentées par des fonctions en escalier — dont la complexité, il est vrai, peut éventuellement être très élevée.

Théorème 11.7. *Étant donné une fonction mesurable quelconque :*

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

il existe toujours une suite de fonctions en escalier (finies) :

$$\psi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui convergent presque partout *vers f :*

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) \ = \ f(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Démonstration. Le Théorème 11.4 pénultième a déjà fournit une suite de fonctions étagées croissantes :

$$\varphi_k\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui convergent vers f en *tout* point de $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_k(x) \ = \ f(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Ensuite, grâce au Théorème 11.6 qui précède, appliqué indéfiniment à $\varepsilon := \frac{1}{2^k}$ pour tous les entiers $k \geqslant 1$, il existe une suite de fonctions en escalier $\psi_k\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x),$$

en tout point :

$$x \ \in \ \mathbb{R}^d \backslash F_k,$$

situé en-dehors d'un certain sous-ensemble mesurable $F_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_k\big) \ \leqslant \ \frac{1}{2^k}.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$F := \bigcap_{\ell=1}^{\infty} \underbrace{\bigg(\bigcup_{k\geqslant \ell} F_k\bigg)}_{=:\,G_\ell}.$$

Assertion 11.8. *Cet ensemble $F = \cap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell$ est de mesure nulle !*

Vérification. En effet la mesure de ces G_ℓ :

$$\begin{aligned} m\big(G_\ell\big) &= m\bigg(\bigcup_{k\geqslant \ell} F_k\bigg) \\ &\leqslant \sum_{k=\ell}^{\infty} m\big(F_k\big) \\ &\leqslant \sum_{k=\ell} \frac{1}{2^k} \\ &= \frac{1}{2^{\ell-1}} \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque $\ell \to \infty$, et le Théorème 6.14 sur les suites décroissantes d'ensembles mesurables donne alors bien :

$$\begin{aligned} m(F) &= m\bigg(\bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell\bigg) \\ &= \lim_{\ell\to\infty} m\big(G_\ell\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$ □

Soit maintenant un point hors de cet ensemble de mesure nulle :

$$x \notin F = \bigcap_{\ell=1}^{\infty} G_\ell.$$

Ceci veut dire qu'il existe un entier $\ell_x \geqslant 1$ tel que :

$$x \notin G_{\ell_x} = \bigcup_{k\geqslant \ell_x} F_k.$$

Ainsi pour tout $k \geqslant \ell_x$, le point x est-il hors de F_k, ce qui assure par construction que les fonctions en escalier ont les mêmes valeurs que les fonctions étagées :

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) \qquad\qquad (k \geqslant \ell_x;\ x \notin F).$$

Pour terminer, une simple inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \big|f(x) - \psi_k(x)\big| &\leqslant \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| + \underline{\big|\varphi_k(x) - \psi_k(x)\big|}_{\circ} \\ &= \big|f(x) - \varphi_k(x)\big| \\ &\underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

montre que l'on a bien la convergence :

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(x) = f(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d \setminus F),$$

en-dehors de cet ensemble de mesure nulle intuitivement négligeable. □

12. Les trois principes de Littlewood

Bien que les concepts d'ensemble mesurable et de fonction mesurable représentent de puissants outils, ils entretiennent des relations de proximité fondamentale avec les concepts plus anciens qu'il remplacent. Littlewood a résumé avec justesse ces connexions sous la forme de *trois principes spéculatifs* qui offrent un guide intuitif précieux à toutes les personnes en apprentissage de la théorie (et aussi aux professeurs qui aiment que la *pensée* s'exprime dans les cours de L3 !).

(i) Tout ensemble est *presque* une réunion finie d'intervalles.

(ii) Toute fonction est *presque* continue.

(iii) Toute suite convergente est *presque* uniformément convergente.

Les ensembles et les fonctions dont il s'agit ici sont bien entendu supposés mesurables. Le sens du mot « *presque* » doit être précisé dans chaque contexte, il n'y a pas de définition axiomatique formelle.

En fait, une version mathématique satisfaisante du premier principe **(i)** a déjà été démontrée comme étant la dernière partie du Théorème 6.15.

Ensuite, une formulation exacte du deuxième principe **(ii)** constitue un résultat particulièrement frappant lorsqu'on ne connaît que la théorie de l'intégration de Riemann.

Théorème 12.1. [Egorov] *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

on suppose donnée une suite quelconque de fonctions mesurables :

$$f_k\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R},$$

qui converge presque partout simplement *vers une certaine fonction-limite :*

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Alors en fait, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est uniforme :

$$f_k(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

À un ensemble $E \backslash E_\varepsilon$ de mesure arbitrairement petite près, donc, toute convergence simple est en fait uniforme — *magical, is'nt it ?*

Démonstration. Après élagage éventuel d'un sous-ensemble de mesure nulle contenu dans E, on peut supposer que la convergence simple :

$$f_k(x) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu en *tout* point $x \in E$.

Soient alors deux entier $n \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ quelconques. Introduisons la famille doublement indicée de sous-ensembles de E :

$$E_\ell^n := \big\{x \in E \colon \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},\ \forall\, k \geqslant \ell\big\}.$$

Fixons temporairement n, et observons la croissance :

$$E_\ell^n \subset E_{\ell+1}^n.$$

Assertion 12.2. *On a aussi la réunion complète :*

$$\bigcup_{\ell=1}^{\infty} E_\ell^n = E,$$

Vérification. En effet, en tout point $x \in E$, il existe par hypothèse un entier $K_{x,n}$ assez grand pour que :

$$k \geqslant K_{x,n} \Longrightarrow \big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \tfrac{1}{n},$$

ce qui veut précisément dire que :

$$x \in E_{K_{x,n}}^n.$$

□

Ensuite, le Théorème 6.13 s'applique à cette réunion complète pour donner :

$$\lim_{\ell \to \infty} m\big(E_\ell^n\big) = m(E),$$

et donc par conséquent, il existe un entier $\ell_n \geqslant 1$ assez grand pour que :

$$\ell \geqslant \ell_n \quad\Longrightarrow\quad m\big(E_\ell^n\big) \geqslant m(E) - \frac{1}{2^n}.$$

Avec ce qui vient d'être dit, on obtient de plus que :

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{1}{n}, \qquad\qquad \begin{aligned} &\forall\, k \geqslant \ell_n, \\ &\forall\, x \in E_{\ell_n}^n. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Introduisons enfin l'ensemble :

$$E'_\varepsilon := \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n.$$

Alors la mesure de son complémentaire est toute petite :

$$\begin{aligned} m\big(E \backslash E'_\varepsilon\big) &= m\bigg(E \Big\backslash \bigcap_{n \geqslant N} E_{\ell_n}^n\bigg) \\ &= m\bigg(\bigcup_{n \geqslant N} \big(E \backslash E_{\ell_n}^n\big)\bigg) \\ &\leqslant \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Maintenant, pour traiter de la convergence uniforme, soit $\delta > 0$ arbitrairement petit, et choisissons un entier $n \geqslant N$ avec :

$$\frac{1}{n} \leqslant \delta.$$

Par définition :

$$x \in E'_\varepsilon \implies x \in E^n_{\ell_n} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant N).$$

Alors ce qui précède montre qu'on a bien une inégalité :

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| \leqslant \delta, \qquad\qquad \begin{aligned}&\forall\, k \geqslant \ell_n,\\ &\forall\, x \in E'_\varepsilon,\end{aligned}$$

exprimant la convergence uniforme sur E'_ε.

En général E'_ε n'est pas forcément fermé, mais grâce au Théorème 6.15 **(ii)**, on peut remplacer E'_ε par un fermé $E_\varepsilon \subset E'_\varepsilon$ qui ne perd que très peu en mesure :

$$m\big(E'_\varepsilon \backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui maintient :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2},$$

et achève la démonstration courageuse de ce magnifique Théorème d'Egorov ! □

Le théorème suivant atteste la validité du second principe de Littlewood.

Théorème 12.3. [Lusin] *Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie :*

$$m(E) < \infty,$$

soit une fonction mesurable finie :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain sous-ensemble fermé :

$$E_\varepsilon \subset E,$$

de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

en restriction auquel la fonction f :

$$f\big|_{E_\varepsilon} \in \mathscr{C}^0$$

est en fait continue !

Attention ici ! Le théorème dit seulement que f est continue *en restriction au sous-ensemble* E_ε, il ne dit en aucun cas que f, comme fonction de E dans $\mathbb{R}$, soit continue aux points de E_ε.

Démonstration. Grâce au Théorème 11.7, il existe une suite de fonctions en escalier :

$$f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$$

qui converge presque partout vers la fonction f. Or une fonction en escalier est combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de rectangles, et puisque de telles fonctions n'ont de discontinuités qu'aux bords de ces rectangles, on se convainc aisément qu'il existe pour tout $n \geqslant 1$ un sous-ensemble $F_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m\big(F_n\big) \leqslant \frac{1}{2^n},$$

en dehors duquel cette fonction en escalier :

$$f_n\big|_{\mathbb{R}^d \setminus F_n} \in \mathscr{C}^0$$

est *continue*.

Ensuite, grâce au Théorème d'Egorov vu à l'instant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble fermé :

$$E_{\frac{\varepsilon}{3}} \subset E,$$

dont le complémentaire est tout petit en mesure :

$$m\big(E \big\backslash E_{\frac{\varepsilon}{3}}\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

en restriction auquel la convergence est *uniforme :*

$$f_n\big|_{E_{\frac{\varepsilon}{3}}} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f\big|_{E_{\frac{\varepsilon}{3}}}.$$

Ensuite, choisissons $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

et introduisons l'ensemble :

$$F_\varepsilon' := E_{\frac{\varepsilon}{3}} \bigg\backslash \bigcup_{n \geqslant N} F_n,$$

qui reste de mesure très proche de celle de E (exercice mental) :

$$m\big(F_\varepsilon'\big) \geqslant m(E) - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors en restriction à cet ensemble, pour tout $n \geqslant N$, les fonctions :

$$f_n\big|_{F_\varepsilon'} \in \mathscr{C}^0$$

sont par construction continues. Mais nous savons pertinemment par le cours de L2 que la fonction $f|_{F_\varepsilon'}$, qui est limite *uniforme* de ces fonctions continues $f_n|_{F_\varepsilon'}$, reste *continue* !

Pour terminer, si d'aventure nous n'avions pas la chance que F_ε' soit fermé, qu'à cela ne tienne ! le Théorème 6.15 **(ii)** nous permet à nouveau d'approximer F_ε' par un certain fermé $F_\varepsilon \subset F_\varepsilon'$ tout en contrôlant la mesure de la différence :

$$m\big(F_\varepsilon \big\backslash F_\varepsilon'\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui conclut. □

13. Exercices

Exercice 1. [Limites inférieure et supérieure d'une suite numérique] Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, on considère la suite associée :

$$b_n^- := \inf \big\{ b_m \colon \ m \geqslant n \big\}.$$

(a) Montrer que cette suite $(b_n^-)_{n\geqslant 1}$ est croissante.

(b) On définit alors (justifier) :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, +\infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geqslant 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant 1} = \liminf_{n\to\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant N}.$$

(c) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, montrer que l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup \big\{ b_m \colon \ m \geqslant n \big\}$$

est décroissante.

(d) Symétriquement, on définit :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n := \lim_{n\to\infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, +\infty]$. Montrer que la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers une certaine limite $b \in [-\infty, +\infty]$ si et seulement si :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

(e) Dans le cas général où aucune hypothèse n'est faite sur la convergence de la suite $(b_n)_{n\geqslant 1}$, réinterpréter ce qui précède en démontrant qu'il existe toujours une première sous-suite $\big(n_k\big)_{k\geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_k}\big)_{k\geqslant 1}$ converge vers :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n \ = \ \lim_{k\to\infty} b_{n_k},$$

et, de manière symétrique, qu'il existe aussi une deuxième sous-suite $\big(n_l\big)_{l\geqslant 1}$ telle que $\big(b_{n_l}\big)_{l\geqslant 1}$ converge vers :

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \ = \ \lim_{l\to\infty} b_{n_l}.$$

Exercice 2. Soient $(a_n)_{n=1}^\infty$ et $(b_n)_{n=1}^\infty$ deux suites de nombres réels majorées :

$$a_n \ \leqslant \ M \qquad \text{et} \qquad b_n \ \leqslant \ M \qquad\qquad (\exists\, M \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1).$$

(a) Montrer que :

$$\limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} \big(a_n + b_n\big) \ \leqslant \ \limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} a_n + \limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} b_n.$$

(b) Lorsque $(b_n)_{n=1}^\infty$ converge vers une certaine limite $b_\infty = \lim_{n\to\infty} b_n$, montrer que :

$$\limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} \big(a_n + b_n\big) \ = \ \limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} a_n + b_\infty.$$

(c) Soit la suite $c_n := (-1)^n + n \sin \frac{1}{n}$, avec $n \geqslant 1$. Déterminer :

$$\liminf_{n\,\longrightarrow\,\infty} c_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\,\longrightarrow\,\infty} c_n.$$

Exercice 3. Soit un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ et, pour $n \geqslant 1$ entier, soit l'ouvert :

$$\mathscr{O}_n := \big\{ x \in \mathbb{R}^d \colon \ \mathrm{dist}(x, E) \ < \ 1/n \big\}.$$

(a) Lorsque E est compact et mesurable, montrer que :

$$m(E) = \lim_{n\to\infty} m\big(\mathscr{O}_n\big).$$

(b) Lorsque E est fermé et non borné, montrer que cette conclusion peut devenir fausse.

(c) Lorsque E est ouvert et borné, montrer que cette conclusion peut aussi être mise en défaut.

Exercice 4. Soit B une boule ouverte dans $\mathbb{R}^d$ de rayon $R > 0$. En utilisant des translations et des dilatations, montrer que :

$$m(B) = c_d\, R^d,$$

pour la constante strictement positive qui est le volume de la boule unité :

$$c_d = m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x| < 1\}\big).$$

Exercice 5. Si $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d)$ est un d-uplet de nombres positifs $\delta_i > 0$, et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble, on définit $\delta\, E$ par :

$$\delta\, E \ :=\ \big\{(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d) \colon\ (x_1, \dots, x_d) \in E\big\}.$$

Montrer que $\delta\, E$ est mesurable toutes les fois que E et mesurable, et dans ce cas, montrer que :

$$m(\delta\, E) = \delta_1 \cdots \delta_d\, m(E).$$

Exercice 6. Soit $L \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ un endomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire. Montrer que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, $L(E)$ est aussi mesurable, en procédant comme suit.

(a) Montrer que si E est compact, $L(E)$ l'est aussi.

(b) Montrer que si E est un F_σ-ensemble, $L(E)$ l'est aussi.

(c) Montrer que la restriction $L|_E$ est 1-lipschitzienne, à savoir qu'il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\big|L(x'') - L(x')\big| \ \leqslant\ K \cdot |x'' - x'| \qquad\qquad (\forall\, x'\ \forall\, x'' \in E).$$

(d) Montrer que L envoie un cube quelconque fermé de longueur $\ell > 0$ dans un cube fermé de longueur $2\sqrt{d}\, K\, \ell$.

(e) Lorsque $m(E) = 0$, montrer que $m\big(L(E)\big) = 0$.

(f) Appliquer le Théorème 8.6 pour conclure.

Exercice 7. Trouver un exemple d'ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ tel que le bord de son adhérence :

$$m\big(\partial \overline{\mathscr{O}}\big) \ >\ 0$$

est de mesure de Lebesgue strictement positive. Indication: Dans $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, considérer l'ensemble qui est la réunion, pour $k = 1, 3, 5, 7, \dots$ impair des 2^{k-1} intervalles que l'on supprime pour construire l'ensemble C_k qui conduit à l'ensemble triadique de Cantor $C = \bigcap_{k=1}^\infty C_k$.

Exercice 8. Soit $A \subset [0, 1]$ le sous-ensemble des nombres dont le développement décimal infini ne contient pas le chiffre 4. Calculer la mesure $m(A)$.

Exercice 9. Le Théorème 3.2 énonce que tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion disjointe d'intervalles ouverts. Mais l'analogue en dimension $d \geqslant 2$ est en général faux.

(a) Montrer qu'un disque ouvert non vide dans $\mathbb{R}^2$ n'est *pas* réunion disjointe de rectangles ouverts. Indication: Examiner ce qu'il advient du bord de ces rectangles.

(b) Montrer qu'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 2$ est réunion disjointe de rectangles ouverts si et seulement si Ω lui-même est un rectangle ouvert.

Exercice 10. **(a)** Montrer qu'un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}^d$ est un G_δ-ensemble. Indication: Pour $n \geqslant 1$ entier, introduire $\mathscr{O}_n := \{x \in \mathbb{R}^d \colon\ \mathsf{dist}(x, F) < 1/n\}$.

(b) Montrer qu'un sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ est un F_σ-ensemble.

(c) Trouver un exemple de F_σ-ensemble qui n'est pas un G_δ-ensemble. Indication: Utiliser un ensemble dénombrable dense approprié.

(d) Trouver un exemple d'ensemble borélien qui n'est ni un G_δ-ensemble, ni un F_σ-ensemble.

Exercice 11. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$.

En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) \ =\ \mathsf{inf} \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0,1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que $m^*(E) = 0$.

Exercice 12. Au début de la *Théorie de la mesure*, on pourrait définir le concept de *mesure extérieure* en utilisant des recouvrements par des rectangles, au lieu d'employer des cubes. Plus précisément, étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, on introduit :

$$m_{\mathscr{R}}^*(E) \,:=\, \inf \sum_{j=1}^{\infty} \big|R_j\big|,$$

où l'infimum est maintenant pris sur toutes les recouvrements dénombrables :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} R_j$$

par des rectangles R_j. Montrer que cette approche donne effectivement lieu à la même *Théorie de la mesure* que celle développée dans le texte, et notamment, établir que :

$$m^*(E) = m_{\mathscr{R}}^*(E).$$

Exercice 13. Soit un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$. Si $\big(I_j\big)_{j \in J}$ est une famille d'intervalles ouverts non vides $I_j \subset \mathbb{R}$ tels que :

$$\sum_{j \in J} m\big(I_j\big) \,<\, b - a,$$

montrer que leur réunion n'est pas couvrante :

$$\bigcup_{j \in J} I_j \,\not\supset\, [a,b].$$

Exercice 14. **(a)** Montrer que toute fonction $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ qui est continue sauf en un nombre dénombrable de points est mesurable.

(b) Montrer que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des rationnels est mesurable.

(c) Montrer que toute fonction monotone (croissante ou décroissante) $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est mesurable.

(d) Établir la mesurabilité de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$x \,\longmapsto\, \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \; x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}, \\[4pt] \dfrac{1}{q} & \text{lorsque } \; x = \dfrac{p}{q} \; \text{ avec } \; (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \; \text{ premiers entre eux.} \end{cases}$$

Exercice 15. Montrer que toute fonction $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue à droite est mesurable. Indication: Pour $n \geqslant 1$ entier, introduire les fonctions :

$$f_n(x) \,:=\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} f\Big(\frac{k+1}{2^n}\Big)\, \mathbf{1}_{[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}[}(x).$$

Exercice 16. Soit $(f_t)_{t \in \mathbb{R}}$ une famille de fonctions mesurables $f_t \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ paramétrées par $t \in \mathbb{R}$ telles qu'en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto f_t(x)$ est continue à droite.

(a) Montrer, pour tout $y \in \mathbb{R}$, que l'on a :

$$\Big\{x \in \mathbb{R} \colon\, \sup_{t \in \mathbb{R}} f_t(x) > y\Big\} \,=\, \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \big\{x \in \mathbb{R} \colon\, f_t(x) > y\big\}.$$

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} f_t(x)$ est mesurable.

Exercice 17. Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction $f = f(x,y)$ qui est séparément continue par rapport à chaque variable. Montrer que f est mesurable. Indication: Approximer $f(x,y)$ par la suite :

$$f_n(x,y) \,:=\, f\big(x,\, \tfrac{\mathsf{Ent}\,(yn)}{n}\big) \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Exercice 18. Soit l'intervalle unité $[0,1] \subset \mathbb{R}$, et soit un nombre réel fixé ξ avec $0 < \xi < 1$. À l'étape 1, on supprime de $[0,1]$ l'intervalle ouvert de longueur ξ situé centralement. À l'étape 2, on supprime de chacun des deux intervalles restants l'intervalle ouvert situé centralement de longueur $\xi\,\frac{1-\xi}{2}$. On itère la construction pour tout entier $n \geqslant 1$. Si on note C_ξ l'intersection infinie de tous ces ensembles, montrer que $m^*(C_\xi) = 0$.

Exercice 19. Soit $\widehat{C} \subset [0,1]$ le sous-ensemble de type Cantor qui est construit en supprimant, à la n-ème étape, 2^{n-1} intervalles ouverts situés centralement tous de longueur ℓ_n avec toujours :

$$\ell_1 + 2\,\ell_2 + \cdots + 2^{n-1}\,\ell_n \,<\, 1.$$

Si ces longueurs ℓ_n sont choisies de telle sorte qu'à l'infini, on ait toujours :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n \,<\, 1,$$

montrer que $\widehat{C}$ est mesurable, de mesure :

$$m\big(\widehat{C}\big) = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}\,\ell_n.$$

Exercice 20. Soient $\widehat{C} = \widehat{C}_{\ell_1,\ell_2,\dots}$ et $C = C_\xi$ deux ensembles de type Cantor contenus dans $[0,1]$ tels que construits dans les deux exercices précédents avec $m\big(\widehat{C}\big) > 0$ et $m(C) = 0$. En imitant la construction de la fonction de Cantor-Lebesgue, montrer qu'il existe une fonction $\Phi\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ jouissant des propriétés suivantes :

(a) Φ est continue et bijective ;

(b) Φ est monotone croissante ;

(c) Φ envoie $\widehat{C}$ surjectivement sur C.

Exercice 21. Trouver un exemple de fonction mesurable f et de fonction continue Φ tels que $f \circ \Phi$ ne soit pas mesurable.
Indication: Soit $\Phi\colon \widehat{C} \longrightarrow C$ comme dans l'exercice précédent, et soit $N \subset \widehat{C}$ un sous-ensemble *non* mesurable. Prendre $f = \mathbf{1}_{\Phi(N)}$.

Exercice 22. Utiliser la construction de l'exercice précédent pour trouver un ensemble Lebesgue-mesurable qui n'est pas un borélien dans $\mathbb{R}$.

Exercice 23. Cet exercice produit un exemple de fonction mesurable $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que toute fonction g qui ne diffère de f que sur un ensemble de mesure nulle est discontinue en *tout* point.

(a) Construire un ensemble mesurable $E \subset [0,1]$ tel que, pour tout intervalle ouvert $I \subset [0,1]$, les deux ensembles :

$$E \cap I \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad E^c \cap I$$

sont de mesure positive. Indication: Considérer un ensemble de type Cantor de mesure strictement positive tel que $\widehat{C}$ dans l'Exercice 19, et ajouter dans chacun des intervalles qui sont supprimés un autre ensemble de Cantor.

(b) Montrer que la fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_E$ possède la propriété que toute autre fonction g telle que $g(x) = f(x)$ pour presque tout $x \in [0,1]$ doit être discontinue en *tout* point de $[0,1]$.

Exercice 24. Montrer que la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle du graphe :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\, y = f(x)\big\}$$

d'une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ vaut 0.

Exercice 25. [Lemme de Borel-Cantelli] Soit une famille dénombrable $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty.$$

On considère :

$$\begin{aligned} E \,&=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, x \in E_k \text{ pour une infinité d'entiers } k\big\} \\ &=: \limsup_{k\to\infty} \big(E_k\big). \end{aligned}$$

(a) Montrer que E est mesurable. Indication: Écrire :

$$E = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k\geqslant n} E_k.$$

(b) Montrer que $m(E) = 0$.

Exercice 26. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1]$ avec $|f_n(x)| < \infty$ pour presque tout x. Montrer qu'il existe une suite $(c_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $c_n > 0$ telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{c_n} \qquad \text{(pour presque tout } x \in [0,1]).$$

Indication: Prendre c_n tel que :

$$m\big(\big\{x \in [0,1] \colon\, \big|f_n(x)/c_n\big| \geqslant 1/n\big\}\big) \,\leqslant\, \frac{1}{2^n},$$

et appliquer le Lemme de Borel-Cantelli obtenu dans l'exercice précédent.

Exercice 27. Montrer que tout fonction mesurable est la limite, presque partout, d'une certaine suite de fonctions continues.

Exercice 28. Établir les trois affirmations suivantes concernant l'addition $A+B = \{a+b \in \mathbb{R}^d \colon a \in A,\, b \in B\}$ entre sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$.

(a) Lorsque A et B sont ouverts, $A + B$ est aussi ouvert.

(b) Lorsque A et B sont fermés, $A + B$ est mesurable. Indication: Faire voir que $A + B$ est un F_σ-ensemble.

(c) Montrer par un exemple que $A + B$ n'est pas toujours fermé lorsque A et B le sont.

Exercice 29. En dimensions $d = 1$ et $d = 2$, montrer comme suit qu'il existe des ensembles A et B dans $\mathbb{R}^d$ avec $m(A) = 0 = m(B)$, tandis que $m(A + B) > 0$.

(a) Indication: Dans $\mathbb{R}$, choisir $A := C$ l'ensemble triadique standard de Cantor ainsi que $B := C/2$, et montrer que $A + B \supset [0,1]$.

(b) Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, choisir $A := [0,1] \times \{0\}$ ainsi que $B := \{0\} \times [0,1]$, et montrer que $A + B = [0,1] \times [0,1]$.

Exercice 30. Montrer qu'il existe une fonction continue qui envoie un ensemble Lebesgue-mesurable dans un ensemble non mesurable. Indication: Considérer un sous-ensemble non mesurable de $[0,1]$, et introduire son image inverse dans l'ensemble de Cantor C par la fonction de Cantor Lebesgue F.

Exercice 31. Soit $f(x,y)$ une fonction sur $\mathbb{R}^2$ qui est séparément continue par rapport à chaque variable. Montrer que f est mesurable. Indication: Approximer f dans la variable x par des fonctions affines par morceaux f_n qui convergent ponctuellement vers f.

Exercice 32. Existe-t-il une énumération $\big\{r_n\big\}_{n=1}^{\infty}$ de l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des nombres rationnels telle que le complémentaire dans $\mathbb{R}$ de l'union dénombrable :

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigg]r_n - \frac{1}{n},\; r_n + \frac{1}{n}\bigg[$$

soit non vide ? Indication: Trouver une énumération pour laquelle les seuls nombres rationnels hors d'un intervalle borné fixé prennent la forme r_n avec n de la forme $n = m^2$.

Exercice 33. Une définition alternative de la mesurabilité pourrait être la suivante : un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-ensemble *fermé* $F \subset E$ tel que :

$$m^*(E \backslash F) \leqslant \varepsilon.$$

Établir qu'une telle définition serait en fait entièrement équivalente à celle qui a été donnée dans le texte du cours.

Exercice 34. Montrer que si un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est encadré :

$$A \subset E \subset B,$$

par deux ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ de même mesure $m(A) = m(B)$, alors E est lui aussi mesurable.

Exercice 35. Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^d$ emboîtés :

$$E_1 \subset E_2 \subset \mathbb{R}^d.$$

On pose $a := m(E_1)$ et $b := m(E_2)$ et on suppose $a < b$. Montrer que pour tout nombre réel $a < c < b$, il existe un sous-ensemble compact E avec :

$$E_1 \subset E \subset E_2,$$

tel que $m(E) = c$. Indication: Par exemple en dimension $d = 1$ avec $E \subset [0,1]$ mesurable, étudier la fonction $t \longmapsto m\big(E \cap [0,t]\big)$.

Exercice 36. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble de mesure extérieure $m^*(E) > 0$ strictement positive. Montrer que pour tout $0 < \alpha < 1$, il existe un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ tel que :

$$m^*\big(E \cap I\big) \geqslant \alpha\, m^*(I).$$

Intuitivement, E contient presque tout un intervalle. Indication: Choisir un ouvert $\mathscr{O} \subset E$ tel que :

$$m^*(E) \geqslant \alpha\, m^*(\mathscr{O}),$$

puis écrire $\mathscr{O}$ comme réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints afin de vérifier que l'un de ces intervalles doit satisfaire la propriété désirée.

Exercice 37. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) > 0$ strictement positive. Montrer que l'*ensemble-différence* de E, défini par :

$$\big\{z \in \mathbb{R} \colon\ z = x - y \text{ pour deux points } x,\, y \in E\big\}$$

contient un intervalle ouvert centré à l'origine.

Indication: Grâce à l'exercice précédent, il existe un intervalle I tel que $m(E \cap I) \geqslant \frac{9}{10}\, m(I)$. Noter $E_0 := E \cap I$ et supposer que l'ensemble-différence de E_0 ne contient pas d'intervalle ouvert centré à l'origine. Vérifier que pour a arbitrairement petit, E_0 et $E_0 + a$ sont disjoints. Afin d'atteindre une contradiction, utiliser :

$$\big(E_0 \cup (E_0 + a)\big) \subset \big(I \cup (I + a)\big),$$

en observant que le membre de gauche a pour mesure $2\, m(E_0)$, tandis que le membre de droite n'est de mesure que très légèrement supérieure à $m(I)$.

Exercice 38. Montrer que si E et F sont deux sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}$ de mesures strictement positives $m(E) > 0$ et $m(F) > 0$, alors :

$$E + F = \big\{x + y \colon\ x \in E,\, y \in F\big\}$$

contient un intervalle.

Exercice 39. **(a)** Étant donné un nombre irrationnel $\theta \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, montrer qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ telles que :

$$\left|\theta - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}.$$

(b) Pour $\varepsilon > 0$, montrer que l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une infinité de fractions rationnelles irréductibles $\frac{p}{q}$ satisfaisant :

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^{2+\varepsilon}},$$

est de mesure 0. Indication: Penser au lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 40. Montrer que tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ peut être écrit comme réunion dénombrable :

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j,$$

de cubes fermés $Q_j \subset \mathbb{R}^d$ presque disjoints dont la taille rétrécit régulièrement à l'approche du bord :

$$c\,\mathsf{diam}(Q_j) \leqslant \mathsf{dist}\big(Q_j, \Omega^c\big) \leqslant C\,\mathsf{diam}(Q_j),$$

pour deux constantes $0 < c < C$.

Théorie de l'intégration de Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Une découverte, celle de l'intégrale de Lebesgue, n'est d'abord entendue en son vrai sens que de rares adeptes, prompts à éclairer de ce flambeau saisi quelques coins obscurs de la science. Même la réaction générale est hostile et vive contre l'irruption d'une idée balayant sans égards les jugements révérés. Lentement, mais irrésistiblement, la lumière pénètre un monde d'esprits de plus en plus étendu. Une heure vient où, dans cet ordre de pensées, la dernière acquise des grandes vérités apparaît à tous comme le jour, claire, évidente, et pour finir banale. Arnaud DENJOY

1. Intégrale de Lebesgue : propriétés et théorèmes de convergence

Nous allons définir la notion générale d'*intégrale de Lebesgue sur* $\mathbb{R}^d$ en procédant par généralisations successives à des familles de plus en plus étendues de fonctions. À chaque étape, nous vérifierons que l'intégrale satisfait toutes les propriétés élémentaires qu'on est en droit d'attendre d'elle, la linéarité, la monotonie, l'inégalité du triangle, et nous démontrerons des théorèmes de convergence qui expriment essentiellement que l'on peut intervertir limite et intégration. À la fin de ce processus définitionnel par élargissements successifs, nous aurons atteint une théorie si forte et si générale qu'elle sera d'une utilité décisive dans tous les développements ultérieurs de l'Analyse.

Nous procéderons en quatre étapes majeures, en intégrant progressivement :

1. les fonctions étagées ;

2. les fonctions bornées supportées sur un ensemble de mesure finie ;

3. les fonctions positives ;

4. les fonctions *intégrables*, au sens théorique le plus général.

Soulignons dès à présent que *toutes les fonctions seront d'emblée supposées mesurables*. Le plus souvent aussi, nous travaillerons avec des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$, et plus tard, nous considérerons aussi des fonctions qui sont à valeurs dans $\mathbb{C}$ en regardant leurs partie réelle et leur partie imaginaire.

2. Étape 1 : Fonctions étagées

Rappelons qu'une *fonction étagée*, telle que définie dans le chapitre précédent, est une fonction :

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

qui est combinaison linéaire finie à coefficients $a_k \in \mathbb{R}$ de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{E_k}$ de sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$ de mesures $m(E_k) < \infty$ *finies*.

Toutefois, une complication s'insinue dans cette définition, en tant qu'une fonction étagée peut en fait être écrite d'une infinité de manières différentes comme combinaisons linéaires de cette espèce ; par exemple, et quelque peu artificiellement, on a :

$$0 = \mathbf{1}_E - \mathbf{1}_E,$$

pour tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Fort heureusement, il existe une manière inambiguë de choisir un représentant *unique* parmi toutes les représentations possibles, représentant qui sera à la fois naturel et utile dans les démonstrations.

Proposition-Définition 2.1. *La forme canonique d'une fonction étagée φ est l'unique représentation :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

dans laquelle les a_k sont distincts deux à deux, et les E_k sont disjoints deux à deux.

Démonstration. Trouver la forme canonique d'une fonction étagée n'est pas bien difficile. Puisque φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, l'ensemble de ses valeurs :

$$\begin{aligned} \{a_1, \dots, a_N\} &= \{a_{k_1}, \dots, a_{k_M}\} \\ &=: \{c_1, \dots, c_M\} \end{aligned}$$

se réduit à un certain nombre $M \leqslant N$ de nombres réels *distincts deux à deux :*

$$c_{\ell_1} \neq c_{\ell_2} \qquad (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant M).$$

Si donc nous introduisons les ensembles de niveau :

$$F_\ell := \{x \in \mathbb{R}^d : \ \varphi(x) = c_\ell\},$$

il vient que ces ensembles sont disjoints deux à deux (exercice mental). Par conséquent :

$$\sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{F_\ell} \ = \ \varphi,$$

est la forme canonique désirée de φ. □

Définition 2.2. Si φ est une fonction étagée sous forme canonique :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \, \mathbf{1}_{F_\ell},$$

on définit l'*intégrale de Lebesgue* de φ comme étant le nombre réel :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, dx \ := \ \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot m\big(F_\ell\big).$$

Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) < \infty$ finie, alors (exercice) :

$$\varphi(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)$$

est encore une fonction étagée.

Définition 2.3. L'intégrale sur $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable de φ étagée sur $\mathbb{R}^d$ est définie par :

$$\int_E \varphi(x)\,dx \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,\mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Afin de bien signaler le choix de la mesure de Lebesgue m dans la définition de l'intégrale, on écrit parfois :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dm(x),$$

pour l'intégrale de Lebesgue de φ.

Mais en fait, nous abrégerons souvent l'intégrale par :

$$\int \varphi(x)\,dx,$$

voire même par :

$$\int \varphi.$$

Proposition 2.4. *L'intégrale ainsi définie des fonctions étagées φ, ψ sur $\mathbb{R}^d$ jouit des cinq propriétés suivantes.*

(i) Indépendance vis-à-vis de la représentation : *Pour toute représentation — pas forcément canonique :*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \;=\; \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).$$

(ii) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\,\varphi + b\,\psi\big) \;=\; a\int_{\mathbb{R}^d} \varphi + b\int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(iii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} \varphi \;=\; \int_F \varphi + \int_G \varphi.$$

(iv) Monotonie : *Si $\varphi \leqslant \psi$ en tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} \psi.$$

(v) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|\varphi|$ est aussi une fonction étagée et l'on a :*

$$\bigg|\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\bigg| \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|.$$

Démonstration. La seule affirmation qui est quelque peu délicate est la première. Il faut donc être astucieux lorsqu'on ramène une fonction étagée à sa représentation canonique, et nous allons effectuer cela en deux moments.

Supposons d'abord que dans la représentation :

$$\varphi = \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},$$

les ensembles E_k sont *disjoints deux à deux*, sans toutefois demander que les a_k soient mutuellement distincts. Plus bas, nous verrons comment nous ramener à cette situation. Il s'agit maintenant d'établir **(i)**, et pour cela, nous devons ramener φ à sa forme canonique.

Si c_ℓ est l'une des valeurs distinctes $c_1, \ldots, c_M$, avec $M \leqslant N$, que prennent $a_1, \ldots, a_N$, introduisons l'ensemble :

$$E'_\ell := \bigcup_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} E_k.$$

Les ensembles $\{k\colon a_k = c_\ell\}$ forment alors une partition de $\{1, 2, \ldots, N\}$, et comme les E_k sont disjoints, $E'_1, \ldots, E'_M$ sont disjoints deux à deux. De plus, on a visiblement :

$$m\big(E'_\ell\big) \ = \sum_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} m\big(E_k\big).$$

Enfin, puisque :

$$\varphi = \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \cdot \mathbf{1}_{E'_\ell},$$

est la représentation canonique de φ, une application de la Définition 2.2 suivie d'une réorganisation donne le résultat :

$$\begin{aligned}
\int \varphi \ &\overset{\text{déf}}{=} \ \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \, m\big(E'_\ell\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{M} c_\ell \sum_{\{k\colon a_k = c_\ell\}} m\big(E_k\big) \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \, m\big(E_k\big).
\end{aligned}$$

Ensuite, traitons le cas général pour lequel les ensembles $E_1, \ldots, E_N$ ne sont pas forcément disjoints, et les valeurs $a_1, \ldots, a_N$ ne sont pas forcément distinctes. Pour ramener φ à sa forme canonique, il s'agit surtout de morceler les E_k jusqu'à en faire des pièces de puzzle qui ne se recouvrent plus.

Lemme 2.5. *Étant donné $N \geqslant 1$ sous-ensembles quelconques d'un ensemble abstrait D :*

$$E_1,\, E_2,\, \ldots,\, E_N \ \subset \ D,$$

il existe $2^N - 1$ autres sous-ensembles :

$$E_1^*,\, E_2^*,\, \ldots\ldots\ldots,\, E_{2^N-1}^* \ \subset \ D,$$

qui sont mutuellement disjoints :

$$\emptyset \ = \ E_{\ell_1}^* \cap E_{\ell_2}^* \qquad\qquad (1 \leqslant \ell_1 < \ell_2 \leqslant 2^N - 1),$$

dont la réunion est la même que celle des E_k :

$$\bigcup_{k=1}^{N} E_k = \bigcup_{\ell=1}^{2^N-1} E_\ell^*,$$

et qui satisfont de plus pour tout $k = 1, \dots, N$:

$$E_k = \bigcup_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} E_\ell^*.$$

Démonstration. Ces ensembles sont toutes les 2^N intersections possibles entre les E_k et leurs complémentaires $E_k^c = D \backslash E_k$:

$$\big(E_1 \text{ ou } E_1^c\big) \bigcap \cdots\cdots \bigcap \big(E_N \text{ ou } E_N^c\big),$$

à l'exclusion bien sûr du complémentaire commun :

$$E_1^c \bigcap \cdots \bigcap E_N^c,$$

puisque l'on souhaite demeurer dans la réunion des E_k. Codons alors toutes ces intersections possibles de manière binaire :

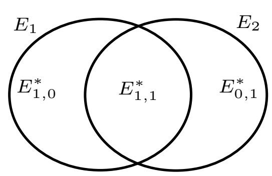
$$E_{i_1,\dots,i_N}^*, \qquad \text{avec } i_1, \dots, i_N \in \{0, 1\},$$

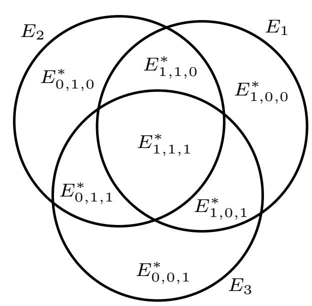
en écartant donc $E_{0,\dots,0}^*$ ce qui nous fait bien $2^N - 1$ ensembles.

Pour $N = 1$, on a $2^1 - 1 = 1$ et on prend $E_1^* := E_1$.

Pour $N = 2$, on a effectivement $2^2 - 1 = 3$ ensembles qui décomposent disjointement la réunion $E_1 \cup E_2$:

$$E_{1,1}^* = E_1 \cap E_2, \qquad E_{1,0} = E_1 \cap E_2^c, \qquad E_{0,1} = E_1^c \cap E_2.$$





Pour $N = 3$, on a effectivement $2^3 - 1 = 7$ ensembles décomposants. Le diagramme s'avère un auxiliaire utile pour qui souhaite (exercice) rédiger les détails combinatoires en langage symbolique. □

De la représentation de chaque E_k en réunion disjointe de certains E_ℓ^* découle :

$$\mathbf{1}_{E_k} = \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*},$$

puis :

$$m\big(E_k\big) = \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big).$$

Grâce à cette décomposition plus fine, on peut transformer naturellement :

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum_{k=1}^{N} a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k \sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} \mathbf{1}_{E_\ell^*} \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \underbrace{\bigg(\sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k \bigg)}_{=:\, a_\ell^*} \cdot \mathbf{1}_{E_\ell^*}.
\end{aligned}
$$

Or maintenant, puisque cette nouvelle représentation de φ est telle que les ensembles mesurables E_ℓ^* sont disjoints deux à deux, nous pouvons lui appliquer le résultat obtenu dans la première partie de la démonstration, ce qui donne ici la conclusion **(i)** :

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \varphi &= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} a_\ell^*\, m\big(E_\ell^*\big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{2^N-1} \sum_{\{k\colon E_k \supset E_\ell^*\}} a_k\, m\big(E_\ell^*\big) \\
\text{[Reconnaître } m(E_k)\text{]} \qquad &= \sum_{k=1}^{N} a_k \underbrace{\sum_{\{\ell\colon E_\ell^* \subset E_k\}} m\big(E_\ell^*\big)}_{=\, m(E_k)} \\
&= \sum_{k=1}^{N} a_k\, m\big(E_k\big).
\end{aligned}
$$

Ensuite, en partant de n'importe quelle représentation étagée pour φ et pour ψ, une fois la propriété **(i)** acquise, la propriété **(ii)** découle de la linéarité évidente des sommations.

Pour ce qui concerne la propriété **(iii)** d'addititivé de l'intégration sur les ensembles disjoints, on transforme :

$$
\begin{aligned}
\int_{F\cup G} \varphi &= \int \varphi \cdot \mathbf{1}_{F\cup G} \\
&= \int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k\, \mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot \big(\mathbf{1}_F + \mathbf{1}_G\big) \\
&= \int \bigg\{\sum_{k=1}^N a_k\, \mathbf{1}_{E_k\cap F} + \sum_{k=1}^N a_k\, \mathbf{1}_{E_k\cap G}\bigg\} \\
\text{[Linéarité (ii)]} \qquad &= \int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot \mathbf{1}_F + \int \bigg(\sum_{k=1}^N a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k}\bigg)\cdot \mathbf{1}_G \\
&= \int_F \varphi + \int_G \varphi.
\end{aligned}
$$

Pour **(iv)**, si $\eta \geqslant 0$ est une fonction étagée positive, il est clair (exercice mental) que sa forme canonique est aussi partout positive, et donc par la Définition 2.1, on a bien $\int \eta \geqslant 0$. Si $\varphi \leqslant \psi$, en posant $\eta := \psi - \varphi$, on a bien $\int \varphi \leqslant \int \psi$.

Enfin pour l'inégalité du triangle **(v)**, il suffit d'écrire φ sous sa forme canonique :

$$
\varphi = \sum_{k=1}^N a_k \cdot \mathbf{1}_{E_k},
$$

et d'observer, puisque les E_k sont disjoints, que :

$$
|\varphi| = \sum_{k=1}^N \big|a_k\big| \cdot \mathbf{1}_{E_k}.
$$

Par conséquent, grâce à l'inégalité du triangle appliquée à la Définition 2.1 de l'intégrale, on obtient :

$$
\begin{aligned}
\bigg|\int_{\mathbb{R}^d} \varphi\bigg| &= \bigg|\sum_{k=1}^N a_k\, m\big(E_k\big)\bigg| \\
&\leqslant \sum_{k=1}^N \big|a_k\big|\, m\big(E_k\big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi|,
\end{aligned}
$$

ce qui termine la démonstration détaillée de ces cinq propriétés (très) élémentaires. □

En fait incidemment, nous avons presque démontré l'énoncé suivant, qui correspond pleinement à la manière de penser propre à la théorie de la mesure : tout énoncé est valide à des ensembles de mesure nulle près.

Proposition 2.6. *Si deux fonctions étagées φ et ψ sur $\mathbb{R}^d$ satisfont presque partout :*

$$
\varphi \leqslant \psi,
$$

alors :

$$\int \varphi \leqslant \int \psi.$$

Démonstration. En considérant à la place la fonction étagée positive presque partout :

$$\begin{aligned}\eta &:= \psi - \varphi \\ &\geqslant 0,\end{aligned}$$

on se ramène à devoir montrer que $\int \eta \geqslant 0$. Or si η est mise sous forme canonique :

$$\eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, \mathbf{1}_{E_\ell},$$

puisque l'intégrale de η vaut par définition :

$$\int \eta = \sum_{\ell=1}^{M} b_\ell \, m\big(E_\ell\big),$$

on peut supposer que tous les E_ℓ sont de mesure strictement positive (mettre de côtés ceux qui sont de mesure nulle). Mais comme les E_ℓ sont disjoints deux à deux, la positivité presque partout de η nécessite (exercice mental) que tous les $b_\ell \geqslant 0$ soient positifs. Donc $\int \eta \geqslant 0$! □

3. Étape 2 : Fonctions mesurables bornées à support dans un ensemble de mesure finie

Définition 3.1. Le *support* d'une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est l'ensemble des points où elle ne s'annule pas :

$$\mathsf{supp}(f) := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \ f(x) \neq 0\big\}.$$

On dit aussi que f est *à support* dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ lorsque $f(x) = 0$ pour tout $x \notin E$.

En fait, la mesurabilité de f assure immédiatement que son support est un ensemble mesurable. Dans cette section, nous allons nous intéresser principalement aux fonctions dont le support est de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty.$$

Un résultat important du chapitre précédent énonce que si une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ bornée en valeur absolue par une constante $M > 0$ est à support dans un ensemble E de mesure finie, alors il existe une suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ telle que :

$$\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

en *tout* point $x \in E$. Le lemme-clé qui suit nous permet alors de définir l'intégrale de Lebesgue des fonctions bornées à support dans un ensemble de mesure finie.

Lemme 3.2. *Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie. Si $\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de fonctions étagées telles que :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*

• $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset E$ *pour tout* $n \geqslant 1$,
• $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour presque tout* $x \in E$,

alors la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int \varphi_n$$

existe, et de plus, lorsqu'on a $f = 0$*, cette limite vaut (naturellement !)* 0.

Démonstration. Ces conclusions seraient presque évidentes si l'on supposait que φ_n converge *uniformément* vers f. Or souvenons-nous de l'un des trois principes de Littlewood, qui prétendait que la convergence d'une suite de fonctions mesurables est toujours *presque* uniforme. Nous savons d'ailleurs aussi que ce principe informel s'est réalisé rigoureusement sous la forme du Théorème (tellement magique !) d'Egorov, que nous allons maintenant sortir de notre chapeau de prestidigitateur-mathématicien.

Ainsi, comme $m(E) < \infty$, le Théorème d'Egorov s'applique, et pour tout $\varepsilon > 0$, il garantit l'existence d'un sous-ensemble mesurable fermé $E_\varepsilon \subset E$ de mesure presque égale à celle de E :

$$m\big(E_\varepsilon\big) \geqslant m(E) - \varepsilon,$$

sur lequel la convergence est *uniforme :*

$$\varphi_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

En utilisant aussi crucialement le fait que la suite $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ est uniformément bornée par la constante $M > 0$, et en découpant :

$$E = E_\varepsilon \cup \big(E \backslash E_\varepsilon\big),$$

nous pouvons alors exécuter des majorations intuitivement naturelles :

$$\begin{aligned}
\bigg| \int \varphi_n - \int \varphi_m \bigg| &\leqslant \int_E \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\, dx \\
&= \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\, dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\, dx \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\, dx + 2\, M\, m\big(E \backslash E_\varepsilon\big) \\
&\leqslant \int_{E_\varepsilon} \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big|\, dx + 2\, M\, \varepsilon.
\end{aligned}$$

Mais par convergence égorovienne uniforme sur E_ε, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ tel que :

$$n, m \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Au total :

$$\bigg| \int \varphi_n - \int \varphi_m \bigg| \leqslant \varepsilon\big(m(E) + 2\, M\big),$$

toujours pour $n, m \geqslant N_\varepsilon$, ce qui montre bien que la suite de nombres réels :

$$\bigg(\int \varphi_n\bigg)_{n=1}^\infty$$

est convergente, puisqu'elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ complet !

Enfin, lorsque $f = 0$, on peut répéter les mêmes arguments, et obtenir (exercice) :

$$\bigg|\int \varphi_n\bigg| \leqslant \varepsilon\big(m(E)+M\big),$$

ce qui, sans doute aucun, assure que la limite en question vaut effectivement 0. □

En utilisant ce lemme, nous pouvons maintenant définir l'intégration des fonctions mesurables bornées qui sont à support dans un ensemble de mesure fini.

Proposition-Définition 3.3. *Étant donné une fonction mesurable bornée $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support contenu* $\mathsf{supp}(f) \subset E$ *dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie, on définit l'*intégrale de Lebesgue *de f comme la limite :*

$$\int f(x)\,dx := \lim_{n\to\infty} \int \varphi_n(x)\,dx,$$

où $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite auxiliaire quelconque de fonctions étagées satisfaisant :
- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|\varphi_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- $\mathsf{supp}(\varphi_n) \subset E$ *pour tout $n \geqslant 1$,*
- $\varphi_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ *pour tout $x \in E$.*

Démonstration. Effectivement, vérifions que cette limite ne dépend *pas* de la suite φ_n, en prenant une *autre* suite $(\psi_n)_{n=1}^{\infty}$ jouissant des mêmes propriétés que $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$. Alors grâce au lemme précédent qui anticipait notre besoin argumentatif présent, la suite des différences :

$$\big(\eta_n\big)_{n=1}^{\infty} := \big(\varphi_n - \psi_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

reste bornée — maintenant par $2\,M$ au lieu de M —, elle reste à support dans E (oui !), et elle tend ponctuellement vers 0, donc la fin du lemme en question assure que :

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\int \eta_n \\ &= \lim_{n\to\infty}\int \big(\varphi_n - \psi_n\big)\end{aligned}$$

ce qui veut justement dire, grâce à la linéarité, déjà acquise, de l'intégrale sur les fonctions étagées, que :

$$\lim_{n\to\infty}\int \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int \psi_n,$$

et conclut en longueur cette vérification *très* détaillée. □

Définition 3.4. Si une fonction mesurable bornée $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ possède un support de mesure finie :

$$m\big(\mathsf{supp}(f)\big) < \infty,$$

et si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, on définit l'*intégrale de Lebesgue de f sur E* par :

$$\int_E f := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Clairement, lorsque f elle-même est une fonction étagée, cette définition coïncide avec la précédente.

Avant de poursuivre, notons que si tous les ensembles E_k mesurables qui interviennent dans une fonction étagée $\varphi = \sum a_k \mathbf{1}_{E_k}$ sont tous de mesure nulle $m(E_k) = 0$, l'intégrale $\int \varphi = \sum a_k \, m(E_k) = 0$ est trivialement nulle. Autrement dit :

« *L'intégrale ne voit pas les ensembles de mesure nulle* ».

Définition 3.5. Une propriété $\mathscr{P} = \mathscr{P}(x)$ dépendant d'un point $x \in E$ appartenant à un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ sera dite *vraie presque partout*, ou *vraie pour presque tout* $x \in E$ lorsqu'il existe un sous-ensemble :

$$N \subset E$$

de mesure nulle $0 = m(N)$ tel que $\mathscr{P}(x)$ est satisfaite pour tout $x \in E \backslash N$.

Par exemple, on dira qu'une suite de fonctions étagées $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ converge *presque partout* vers une certaine fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^d$ lorsqu'il existe un sous-ensemble $N \subset \mathbb{R}^d$ avec $0 = m(N)$ tel que :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d \backslash N).$$

On vérifie alors (exercice de compréhension) que le Lemme 3.2 ci-dessus reste vrai en supposant seulement la convergence presque partout de la suite de fonctions étagées concernée.

Ainsi donc, sur notre route initiatique en direction de la bellissime et généralisssime *intégrale de Lebesgue*, nous atteignons par l'Étape 2 un niveau considérablement plus élevé que celui des fonctions étagées, puisque nous atteignons leurs limites ponctuelles bornées, limites qui ne sont pas forcément uniformes.

Bien entendu, toute cette élucubration par passages téméraires à la limite s'effondrerait si nous ne conservions pas les propriétés élémentaires fondamentales qu'on est en droit d'attendre de toute intégrale. Éh bien, les voici !

Proposition 3.6. *Soient f et g deux fonctions mesurables bornées $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ à support dans un ensemble (commun) de mesure finie. Alors les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(i) Linéarité : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\, f + b\, g\big) = a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$ de mesure finie, alors :*

$$\int_{F \cup G} f = \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si $f \leqslant g$ en presque tout point, alors :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) Inégalité du triangle : *La fonction valeur absolue $|f|$ est aussi une fonction mesurable bornée et l'on a :*

$$\left|\int_{\mathbb{R}^d} f\right| \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} |f|.$$

Démonstration. Toutes ces propriétés se vérifient (exercice) en utilisant l'approximation par des fonctions étagées, à partir des propriétés que ces fonctions satisfont déjà en vertu de la Proposition 2.4 □

Nous sommes maintenant en position de démontrer le premier théorème important de convergence.

Théorème 3.7. [Convergence bornée] *Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :*

- *il existe une constante $M > 0$ avec $\big|f_n\big| \leqslant M$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *il existe $E \subset \mathbb{R}^d$ mesurable avec $m(E) < \infty$ et $\mathsf{supp}(f_n) \subset E$ pour tout $n \geqslant 1$,*
- *$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ pour presque tout $x \in E$.*

Alors la fonction-limite f est mesurable, satisfait :

$$\mathsf{supp}(f) \subset E,$$

et de plus, on a surtout :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

d'où :

$$\int f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int f.$$

Démonstration. D'après les hypothèses, on voit immédiatement que la fonction-limite f est bornée par la même constante :

$$|f| \leqslant M \qquad\qquad \text{(presque partout)}.$$

On voit aussi que f s'annule hors de E. Clairement, l'inégalité du triangle pour les intégrales assure qu'il suffit d'établir la première convergence.

En fait, la démonstration est une reprise d'un argument basé sur le Théorème d'Egorov, qui nous avait permis dans le Lemme 3.2 de vérifier que l'intégrale était indépendante de la suite approximante de fonctions étagées.

En effet, si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit et fixé, le Théorème d'Egorov nous permet de trouver un sous-ensemble mesurable $E_\varepsilon \subset E$ avec :

$$m\big(E \backslash E_\varepsilon\big) \leqslant \varepsilon,$$

en restriction auquel on a convergence uniforme :

$$f_n(x)\big|_{E_\varepsilon} \underset{\text{uniformément}}{\longrightarrow} f(x)\big|_{E_\varepsilon}.$$

Alors sur E_ε, nous pouvons trouver un entier $N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N_\varepsilon \implies \Big(\forall\, x \in E_\varepsilon \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Rassemblant tous ces faits, nous pouvons estimer, toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$:

$$\begin{aligned}\int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx &= \int_{E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx + \int_{E\backslash E_\varepsilon} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \\ &\leqslant \varepsilon\, m\big(E_\varepsilon\big) + 2M\, m\big(E\backslash E_\varepsilon\big) \\ &\leqslant \varepsilon\,\big(m(E) + 2M\big).\end{aligned}$$

Comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cela conclut. □

Observons que ce théorème de convergence exprime la possibilité d'intervertir intégration et passage à la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Une autre observation utile que nous pouvons faire au point que nous venons d'atteindre est la suivante.

Proposition 3.8. *Si $f \geqslant 0$ est une fonction réelle* positive *bornée à support dans un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie, et si $\int f = 0$, alors $f = 0$ presque partout.*

Démonstration. En effet, pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons l'ensemble :

$$E_k := \big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant 1/k\big\}.$$

Alors E_k est mesurable (exercice mental), et le fait que :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\,\mathbf{1}_{E_k}(x) \leqslant f(x)$$

implique par monotonie de l'intégrale :

$$0 \leqslant \frac{1}{k}\,m\big(E_k\big) \leqslant \int f = 0.$$

Par conséquent :

$$m\big(E_k\big) = 0 \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Enfin, puisque :

$$\big\{x\colon\ f(x) > 0\big\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

on conclut (exercice mental) que $f = 0$ presque partout. □

4. Retour aux fonctions Riemann-intégrables

Rappelons que dans un chapitre qui précède, nous avons formulé une question que la théorie de Riemann semblait dans l'incapacité de résoudre, à savoir la :

Question. *Si une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$:*

$$f_n\colon \quad [0,1] \longrightarrow [0,1] \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

possède en tout point $x \in [0,1]$ une limite ponctuelle :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) =: f(x),$$

quelle théorie d'intégration pourrait être développée afin qu'on ait :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx\,?$$

En effet, à la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor, nous avons produit un exemple de fonction bornée $f\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ limite de fonctions continues $f_n\colon [0,1] \longrightarrow [0,1]$ dont les points de discontinuité sont de mesure strictement positive, de telle sorte que f n'est *pas* Riemann-intégrable, bien que la limite des nombres réels $\int_0^1 f_n$ existe.

Mais au niveau que nous venons d'atteindre dans la théorie plus puissante de Lebesgue, le Théorème 3.7 de convergence bornée que nous venons d'établir répond déjà en un certain sens à cette question, et ce Théorème 3.7 montre surtout que *notre fonction f de la fin du chapitre sur l'ensemble de Cantor est Lebesgue-intégrable*.

Or puisque nous allons maintenant montrer que les fonctions Riemann-intégrables sont aussi Lebesgue-intégrables (la réciproque n'étant pas vraie !), nous pouvons d'ores et déjà conclure que c'est l'intégrale de Lebesgue qu'il fallait inventer pour répondre à la question dont nous venons de rappeler l'énoncé ci-dessus.

Théorème 4.1. *Sur un intervalle compact $[a,b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée Riemann-intégrable. Alors f est mesurable, et son intégrale au sens de Riemann coïncide avec son intégrale au sens de Lebesgue :*

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx.$$

Démonstration. Puisque l'intégrale de Riemann ne concerne par définition que les fonctions bornées, il existe une constante $M > 0$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \;\leqslant\; M \qquad\qquad (\forall\, x \in [a,b]).$$

Comme f est Riemann-intégrable, ses sommes de Darboux inférieure et supérieure associées à des subdivisions de plus en plus fines de l'intervalle $[a,b]$ permettent de définir deux suites :

$$\big(\varphi_k^-(x)\big)_{k=1}^{\infty} \qquad \text{et} \qquad \big(\varphi_k^+(x)\big)_{k=1}^{\infty}$$

de fonctions en escalier bornées :

$$\big|\varphi_k^-\big| \;\leqslant\; M \qquad \text{et} \qquad \big|\varphi_k^+\big| \;\leqslant\; M,$$

qui encadrent f de manière monotone :

$$\varphi_1^-(x) \leqslant \varphi_2^-(x) \leqslant \cdots \leqslant f(x) \leqslant \cdots \leqslant \varphi_2^+(x) \leqslant \varphi_1^+(x),$$

et dont les intégrales convergent vers celle de f :

$$\text{(4.2)} \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx \;=\; \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx.$$

Plusieurs observations se manifestent à nous simultanément. Premièrement, il découle immédiatement des définitions que les intégrales de Riemann et de Lebesgue coïncident sur les fonctions en escalier, d'où :

(4.3)

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^-(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx \qquad \text{et} \qquad \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} \varphi_k^+(x)\,dx \;=\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

pour tout $k \geqslant 1$. Ensuite, sachant que toutes les φ_k^- et toutes les φ_k^+ sont mesurables, leurs limites :

$$\varphi_\infty^-(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty} \varphi_k^-(x) \qquad \text{et} \qquad \varphi_\infty^+(x) \;:=\; \lim_{k\to\infty} \varphi_k^+(x)$$

sont mesurables elles aussi — car la mesurabilité est préservée par passage à la limite —, et bien entendu, on a :

$$\varphi_\infty^- \leqslant f \leqslant \varphi_\infty^+.$$

Plus avant, le Théorème 3.7 de convergence bornée assure que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^-(x)\,dx,$$

et que :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_\infty^+(x)\,dx.$$

Ceci combiné à (4.2) et (4.3) donne :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \big(\varphi_\infty^+(x) - \varphi_\infty^-(x)\big)\,dx = 0,$$

et comme par ailleurs $\varphi_k^+ - \varphi_k^- \geqslant 0$ donne à la limite :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- \geqslant 0,$$

nous déduisons grâce à la Proposition 3.8 que :

$$\varphi_\infty^+ - \varphi_\infty^- = 0,$$

presque partout, et enfin que :

$$\varphi_\infty^+ = \varphi_\infty^- = f,$$

presque partout, ce qui démontre merveilleusement que f est mesurable !

Pour terminer, puisque :

$$\varphi_k^- \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f \qquad \text{et} \qquad f \underset{\infty\leftarrow k}{\longleftarrow} \varphi_k^+$$

presque partout, on a, *par définition même* de l'intégrale des fonctions mesurables bornées donnée dans cette section :

$$\lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^-(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \varphi_k^+(x)\,dx,$$

et en tenant à nouveau compte de (4.2) et (4.3), on conclut que :

$$\int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx = \int_{[a,b]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx,$$

comme annoncé. □

5. Étape 3 : Fonctions mesurables positives quelconques

Nous procédons maintenant à l'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques, pas nécessairement bornées. Il sera important d'autoriser ces fonctions à prendre leurs valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels positifs :

$$\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\},$$

la valeur $+\infty$ étant bien entendu prise sur un ensemble mesurable. Rappelons la convention standard que le supremum d'un ensemble de nombres réels positifs vaut $+\infty$ lorsque, et seulement lorsque, l'ensemble en question est non borné.

Définition 5.1. L'*intégrale de Lebesgue* $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'une fonction mesurable positive :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

est le nombre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \;:=\; \sup\Bigg\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\,dx :\; \varphi\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ mesurable bornée avec } 0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ \text{à support dans un ensemble de mesure finie}\Bigg\},$$

nombre qui appartient à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Avec cette définition, deux cas se présentent : ou bien le supremum en question est fini, ou bien il est infini.

Définition 5.2. Dans les mêmes circonstances, lorsque :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \;<\; \infty,$$

on dit que f *est Lebesgue-intégrable*, ou, simplement, *intégrable*.

En restriction à un ensemble mesurable, on peut aussi introduire la :

Définition 5.3. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, si $f \geqslant 0$ est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, alors $f \cdot \mathbf{1}_E$ est aussi positive mesurable sur $\mathbb{R}^d$, et on définit :

$$\int_E f(x)\,dx \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \cdot \mathbf{1}_E(x)\,dx.$$

Pour un réel $a > 0$, considérons les deux fonctions bien connues sur $\mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} f_a(x) \;&=\; \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{lorsque } \;|x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{lorsque } \;|x| > 1, \end{cases} \\ F_a(x) \;&=\; \frac{1}{1+|x|^a}. \end{aligned}$$

Comme en théorie de l'intégrale généralisée de Riemann (exercice de révision), f_a est Lebesgue-intégrable précisément quand $a < d$, tandis que F_a l'est précisément quand $a > d$.

Proposition 5.4. *L'intégrale des fonctions mesurables positives quelconques :*

$$f,\; g\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

satisfait les six propriétés suivantes.

(i) Linéarité positive : *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}_+$, on a :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big(a\,f + b\,g\big) \;=\; a \int_{\mathbb{R}^d} f + b \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(ii) Additivité domaniale : *Si F et G sont deux sous-ensembles disjoints de $\mathbb{R}^d$, alors :*

$$\int_{F\cup G} f \;=\; \int_F f + \int_G f.$$

(iii) Monotonie : *Si* $0 \leqslant f \leqslant g$ *en presque tout point, alors :*

$$0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} g.$$

(iv) *Si* g *est intégrable et si* $0 \leqslant f \leqslant g$*, alors* f *est aussi intégrable.*

(v) *Si* f *est intégrable, alors* $f(x) < \infty$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

(vi) *Si* $\int f = 0$*, alors* $f(x) = 0$ *pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Seule la première assertion **(i)** n'est pas une conséquence rapide des définitions, et pour l'établir, nous procéderons comme suit.

Par dilatation, il suffit de traiter le cas $a = b = 1$. Si $0 \leqslant \varphi \leqslant f$ et si $0 \leqslant \psi \leqslant g$, où φ et ψ sont bornées à support dans un ensemble de mesure finie, alors :

$$\varphi + \psi \leqslant f + g,$$

et la somme $\varphi + \psi$ est aussi bornée à support dans un ensemble de mesure finie. Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\int f + \int g &= \sup_{0 \leqslant \varphi \leqslant f} \int \varphi + \sup_{0 \leqslant \psi \leqslant g} \int \psi \\
&= \sup_{\substack{0 \leqslant \varphi \leqslant f \\ 0 \leqslant \psi \leqslant g}} \int \big(\varphi + \psi\big) \\
&\leqslant \sup_{\varphi + \psi \leqslant f + g} \int \big(\varphi + \psi\big) \\
&\leqslant \sup_{0 \leqslant \chi \leqslant f + g} \int \chi \\
&= \int \big(f + g\big).
\end{aligned}$$

Pour ce qui concerne l'inégalité inverse, supposons qu'une fonction $\eta \geqslant 0$ est bornée à support dans un ensemble de mesure finie avec :

$$\eta \leqslant f + g,$$

et introduisons la fonction mesurable :

$$\eta_1(x) := \min\big(f(x), \eta(x)\big),$$

ainsi que :

$$\eta_2 := \eta - \eta_1 \geqslant 0.$$

Évidemment, on a :

$$0 \leqslant \eta_1 \leqslant f,$$

et puisque η_2 est en tout point, ou bien égale à $\eta - f \leqslant g$, ou bien égale à $\eta - \eta = 0$, on a aussi :

$$0 \leqslant \eta_2 \leqslant g.$$

Clairement, η_1 et η_2 sont toutes deux bornées à support dans un ensemble de mesure finie. Nous en déduisons :

$$\begin{aligned}\int \eta &= \int (\eta_1 + \eta_2) \\ &= \int \eta_1 + \int \eta_2 \\ &\leqslant \int f + \int g.\end{aligned}$$

Enfin, en prenant le supremum sur η, nous obtenons l'inégalité inverse :

$$\int (f+g) \leqslant \int f + \int g,$$

ce qui conclut **(i)**.

Pour montrer **(v)**, introduisons pour tous $k \geqslant 1$ entiers les ensembles :

$$E_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) \geqslant k\big\},$$

ainsi que :

$$E_\infty := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) = \infty\big\}.$$

Alors il est clair que :

$$\infty > \int f \geqslant \int f \cdot \mathbf{1}_{E_k} \geqslant k\, m\big(E_k\big),$$

inégalité qui montre instantanément que :

$$m\big(E_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Mais puisque $(E_k)_{k=1}^\infty$ est une suite décroissante emboitée d'ensembles mesurables qui tend vers E_∞, un énoncé du chapitre qui précède assure que :

$$\begin{aligned}m\big(E_\infty\big) &= \lim_{k\to\infty} m\big(E_k\big) \\ &= 0,\end{aligned}$$

ce qui montre bien que f ne peut être infinie que sur un ensemble de mesure nulle.

Pour terminer, la démonstration de **(vi)** est essentiellement la même que celle de la Proposition 3.8. □

Développons maintenant des théorèmes de convergence importants valables pour la classe des fonctions mesurables positives. Afin de motiver ces résultats, posons la :

Question 5.5. *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions mesurables positives $f_n \geqslant 0$ converge ponctuellemement vers une certaine fonction-limite f :*

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x),$$

elle-même alors automatiquement mesurable, est-il toujours vrai qu'on peut intervertir limite et intégration :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, dx \xrightarrow[n\to\infty]{??} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx?$$

Malheureusement, tel n'est pas toujours le cas, comme le montre un exemple extrêmement simple. Sur $\mathbb{R}$, soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) := \begin{cases} n & \text{lorsque } 0 < x < 1/n, \\ 0 & \text{lorsque } x \leqslant 0 \text{ ou lorsque } x \geqslant 1/n. \end{cases}$$

Il est clair que $f_n(x) \longrightarrow 0$ en tout point x, mais on a :

$$\int_{\mathbb{R}} f_n(x) = 1,$$

constamment pour tout entier $n \geqslant 1$.

Bien qu'essentiellement stupide, cet exemple possède quand même une vertu inattendue ! En effet, il fait suspecter intuitivement que l'intégrale de la fonction-limite doive toujours être inférieure à la limite des intégrales, et tel est bien le cas en général !

Théorème 5.6. [Lemme de Fatou] *Si une suite de fonctions mesurables* positives *sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty} : \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

converge presque partout vers une certaine fonction f, automatiquement mesurable :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Il importe de faire observer que dans cet énoncé, on n'exclut ni le cas $\int \lim_{n\to\infty} f_n = \infty$, ni le cas $\liminf_{n\to\infty} \int f_n = \infty$.

Démonstration. Soit une fonction mesurable g bornée à support dans un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure finie telle que :

$$0 \leqslant g \leqslant f.$$

Si nous introduisons :

$$g_n(x) := \min\big(g(x),\, f_n(x)\big),$$

alors la suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ est aussi mesurable, aussi à support dans E, et l'on a presque partout :

$$g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g(x),$$

donc le Théorème 3.7 de convergence bornée assure que :

$$\int g_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int g.$$

Mais par construction on a aussi $g_n \leqslant f_n$ pour tout $n \geqslant 1$, d'où :

$$\int g_n \leqslant \int f_n,$$

et en prenant la limite à gauche, même si le membre de droite n'a pas de limite, sa limite inférieure lui demeure nécessairement supérieure :

$$\int g \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n.$$

Enfin, en prenant le supremum à gauche sur toutes les fonctions g, on trouve bien par application de la Définition 5.1 :

$$\int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

ce qui est la conclusion. □

Du Lemme de Fatou, on peut déduire les résultats les plus importants de la Théorie de l'Intégration de Lebesgue.

Théorème 5.7. *Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable positive, et soit une suite :*

$$\big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

de fonctions mesurables encadrées en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant f(x),$$

et qui convergent presque partout ponctuellement vers f :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Démonstration. Puisque $f_n(x) \leqslant f(x)$ presque partout, on a instantanément :

$$\int f_n \leqslant \int f,$$

d'où découle (exercice mental) :

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f.$$

Par ailleurs, le Lemme de Fatou qui précède complète ceci :

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n \leqslant \int f \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int f_n,$$

et comme une limite supérieure ne peut se trouver en-dessous d'une limite inférieure que lorsque toutes deux coïncident, c'est bien que la limite existe et vaut $\int f$! □

Ensuite, nous récoltons aussi comme fruit mûr un résultat très important de convergence pour les suites monotones de fonctions positives.

Théorème 5.8. [Convergence monotone, Beppo-Levi] *Soit une suite de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$*

$$f_n\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

qui est ponctuellement croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad \text{(en presque tout point } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

donc qui converge vers une certaine fonction-limite mesurable :

$$f := \lim_{n\to\infty} f_n.$$

Alors on a :

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n = \int f.$$

Il est particulièrement important de noter que l'éventualité $\int f = \infty$ n'est pas exclue ici. Bien entendu, un énoncé analogue vaut aussi pour les suites de fonctions presque partout *ponctuellement décroissantes* de fonctions à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$.

Démonstration. Il s'agit juste d'un corollaire immédiat du théorème qui précède ! □

Ce magnifique théorème de convergence monotone possède de nombreuses conséquences utiles. Par exemple, voici un énoncé spectaculaire qui produit de la convergence.

Théorème 5.9. *Soit une série :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x),$$

de fonctions mesurables positives sur $\mathbb{R}^d$:

$$a_k(x) \geqslant 0 \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1,\ \text{presque partout}).$$

Alors pourvu seulement qu'on ait la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx < \infty,$$

la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable finie.

Démonstration. Introduisons en effet les sommes partielles d'ordre n :

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x),$$

ainsi que la somme infinie complète :

$$f(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x).$$

Bien entendu, les fonctions f_n sont mesurables, leur suite est croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1,\ \text{presque partout}),$$

et l'on a en admettant toujours la valeur ∞ pour les fonctions :

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \qquad\qquad (\text{presque partout}).$$

Mais alors puisque :

$$\int f_n = \sum_{k=1}^{n} \int a_k(x)\, dx,$$

le Théorème de convergence monotone assure que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\, dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\, dx.$$

Si donc on a comme cela a été supposé dans l'énoncé qu'il faut démontrer :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

cette dernière équation implique la finitude de l'intégrale :

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

ce qui signifie précisément que la fonction-limite :

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$$

est *Lebesgue-intégrable*, et nous avons déjà vu que toute fonction positive Lebesgue-intégrable prend presque partout des valeurs *finies*. □

Donnons encore deux belles illustrations de ce dernier énoncé.

Théorème 5.10. [Borel-Cantelli] *Si une collection infinie dénombrable :*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_k,\, \dots,$$

de sous-ensembles $E_k \subset \mathbb{R}^d$ satisfait :

$$\sum_{k=1}^{\infty} m\big(E_k\big) \,<\, \infty,$$

alors l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Démonstration. Introduisons en effet les fonctions indicatrices de ces ensembles :

$$a_k(x) \,:=\, \mathbf{1}_{E_k}(x),$$

et observons alors qu'un point $x \in \mathbb{R}^d$ appartient à une infinité de E_k précisément lorsque :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \,=\, \infty.$$

Mais par contraste, notre hypothèse que la somme des mesures de E_k est *finie* se ré-exprime comme la finitude :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \,<\, \infty,$$

et nous venons à l'instant de voir dans le théorème qui précède que cela forçait la série positive $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ à prendre des valeurs finies excepté sur un ensemble de mesure nulle, et ainsi, Borel-Cantelli tombe de l'arbre mathématique comme une pomme de Newton ! □

La seconde illustration servira ultérieurement dans de nombreux contextes.

Proposition 5.11. *La fonction :*

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{d+1}} & \text{lorsque } x \neq 0, \\ 0 & \text{lorsque } x = 0, \end{cases}$$

est Lebesgue-intégrable hors de toute boule de rayon $\varepsilon > 0$, et son intégrale correspondante satisfait l'inégalité :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f(x)\,dx \;\leqslant\; \frac{C}{\varepsilon},$$

pour une certaine constante $C > 0$.

Démonstration. En partant de l'anneau ouvert :

$$\mathscr{A} := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; 1 \leqslant |x| < 2\big\},$$

pour tout entier $k \geqslant 1$, introduisons ses dilatés d'un facteur $2^{k-1}\varepsilon$:

$$\mathscr{A}_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; 2^{k-1}\varepsilon \;\leqslant\; |x| \;<\; 2^k\varepsilon\big\},$$

dont la réunion infinie est *disjointe* et remplit :

$$\big\{\varepsilon \;\leqslant\; |x| \;\leqslant\; \infty\big\} \;=\; \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathscr{A}_k.$$

Introduisons aussi la série infinie :

$$g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x),$$

constituée des fonctions :

$$g_k(x) \;:=\; \frac{1}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}}\,\mathbf{1}_{\mathscr{A}_k}(x).$$

Comme la fonction $|x| \longmapsto \frac{1}{|x|^{d+1}}$ est décroissante, on se convainc aisément qu'en restriction à $\mathscr{A}_k$, on a :

$$f(x) \;\leqslant\; g_k(x) \qquad\qquad (x \in \mathscr{A}_k),$$

puis :

$$f(x) \;\leqslant\; g(x) \qquad\qquad (\varepsilon \leqslant |x| \leqslant \infty),$$

d'où :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} f \;\leqslant\; \int_{|x|\geqslant\varepsilon} g.$$

D'un autre côté, grâce aux propriétés d'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on a :

$$m\big(\mathscr{A}_k\big) \;=\; \big(2^{k-1}\varepsilon\big)^d\, m\big(\mathscr{A}\big) \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

et comme g est manifestement une fonction étagée :

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\geqslant\varepsilon} g \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m\big(\mathscr{A}_k\big)}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\
&=\; m\big(\mathscr{A}\big)\,\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2^{k-1}\varepsilon)^d}{(2^{k-1}\varepsilon)^{d+1}} \\
&=\; \frac{m(\mathscr{A})}{\varepsilon}\,\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{k-1}} \\
&=\; \frac{2\,m(\mathscr{A})}{\varepsilon},
\end{aligned}$$

ce qui explicite une constante possible $C > 0$! □

Concluons la présentation de cette floppée de théorèmes de convergence par celui qui les chapeaute tous.

Théorème 5.12. [Inégalité généralissime de Fatou] *Étant donné une suite quelconque* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables* positives *sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \geqslant 0,$$

à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$*, la fonction limite inférieure (positive) :*

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

est toujours automatiquement mesurable, et on a en toute généralité maximalissime :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

La force extrême de cet énoncé, en effet, c'est qu'absolument aucune hypothèse de convergence n'est faite : il est vrai dans toutes les situations imaginables !

Démonstration. D'après les propriétés standard de la notion de limite inférieure (exercice : à réviser !) d'une suite de nombres réels, on a :

$$\liminf_{n\to\infty} \underbrace{\int f_n}_{\in[0,\infty]} = \lim_{k\to\infty} \bigg(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} \int f_n}_{\text{suite croissante en fonction de } k} \bigg).$$

De manière similaire, la limite inférieure de la suite de fonctions :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

se détermine comme :

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \lim_{k\to\infty} \Big(\underbrace{\inf_{n\geqslant k} f_n(x)}_{=:\,g_k(x)} \Big).$$

Il est alors avisé d'introduire la suite auxiliaire de fonctions définies pour $k \geqslant 1$ entier par :

$$g_k(x) \;:=\; \inf_{n\geqslant k} f_n(x),$$

qui satisfait donc :

$$\lim_{k\to\infty} g_k(x) \;=\; \liminf_{n\to\infty} f_n(x),$$

et qui est manifestement croissante :

$$g_k \;\leqslant\; g_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1).$$

Mais alors, tel le fantôme phosphorescent d'un Lucky-Luke solitaire perdu au milieu des elfes radioactifs du Plateau de Saclay, en dégainant infiniment plus vite que l'ombre insaisissable de notre intuition mathématique intime, qu'avons-nous de mieux à faire que d'appliquer à une vitesse supérieure à celle de la lumière le Théorème 5.8 de convergence monotone ?

Oui, *dégainons Beppo-Levi calibre 58 :*

$$\int \lim_{k\to\infty} g_k \;=\; \lim_{k\to\infty} \int g_k\,!$$

Ensuite, comme pour tout $n \geqslant k$, on a :

$$0 \leqslant g_k \leqslant f_n,$$

une intégration donne :

$$\int g_k \leqslant \int f_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant k),$$

puis :

$$\int g_k \leqslant \inf_{n \geqslant k} \int f_n,$$

ce qui, en prenant la limite quand k tend vers l'infini, donne justement parce que Beppo-Levi s'applique :

$$\int \lim_{k \to \infty} g_k \leqslant \lim_{k \to \infty} \bigg(\inf_{n \geqslant k} \int f_n \bigg),$$

ce qui est bien (exercice visuel) l'inégalité établie par le *Général en Chef*, Fatou, de notre Grande Armée de l'Intégration théorique (sans blaguer, Fatou était un mathématicien très profond, qui n'a peut-être pas bénéficié de toute la reconnaissance qu'il méritait de son vivant). □

Corollaire 5.13. [Inégalité de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur $\mathbb{R}^d$:*

$$f_n \leqslant 0$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$, on a :

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, dx \ \leqslant\ \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \to \infty} f_n.$$

Démonstration. Appliquons le théorème précédent à la suite de fonctions $-f_n \geqslant 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \to \infty} \big(-f_n(x) \big)\, dx \ \leqslant\ \liminf_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big(-f_n(x) \big)\, dx.$$

Lemme 5.14. *Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $a_n \in \mathbb{R}$, on a :*

$$\liminf_{n \to \infty} \big(-a_n \big) \ =\ -\limsup_{n \to \infty} a_n,$$

ainsi que :

$$\limsup_{n \to \infty} \big(-a_n \big) \ =\ -\liminf_{n \to \infty} a_n.$$

Démonstration. Rappelons que les limites inférieures et supérieures d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sont définies par :

$$\liminf_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \Big(\inf_{m \geqslant n} b_m \Big) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \Big(\sup_{m \geqslant n} b_m \Big),$$

où les deux suites :

$$\inf_{m \geqslant n} b_m \qquad \text{et} \qquad \sup_{m \geqslant n} b_m$$

ont chacune une limite, puisqu'elles sont respectivement croissantes et décroissantes avec n (exercice mental).

Ici appliquée à la suite $b_n := -a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le premier résultat annoncé :

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\big(-a_n\big) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{m\geqslant n}-a_m\Big)\\ &= \lim_{n\to\infty}\Big(-\sup_{m\geqslant n}a_m\Big)\\ &= -\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{m\geqslant n}a_m\Big)\\ &= -\limsup_{n\to\infty}a_n,\end{aligned}$$

le second se vérifiant ensuite de manière similaire. □

Grâce à ce lemme élémentaire, l'inégalité en cours de travaux devient :

$$\int_{\mathbb{R}^d}-\limsup_{n\to\infty}f_n \;\leqslant\; -\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d}f_n(x)\,dx,$$

et pour conclure il suffit alors d'infliger à cette dernière inégalité imparfaite la foudre transperçante d'une inversion de signe ! □

6. Étape 4 : Fonctions Lebesgue-intégrables au sens le plus général possible

Définition 6.1. Une fonction mesurable réelle quelconque :

$$f\colon\quad \mathbb{R}^d\longrightarrow\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$

est dite *Lebesgue-intégrable* lorsque sa valeur absolue :

$$|f|\colon\quad \mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$$

— une fonction elle aussi mesurable —, est Lebesgue-intégrable d'intégrale *finie :*

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f|<\infty,$$

au sens de la Définition 5.1 qui précède.

En fait, on peut donner un sens précis et naturel à la valeur de l'intégrale de f en introduisant les deux fonctions auxiliaires positives :

$$f^+(x) := \max\big(0,\,f(x)\big)\qquad\text{et}\qquad f^-(x) := -\min\big(f(x),0\big),$$

lesquelles sont mesurables ; en effet, on a déjà vu dans le chapitre sur l'intégrale de Riemann que l'on peut écrire simultanément :

$$\begin{aligned}f &= f^+-f^-,\\ |f| &= f^++f^-,\end{aligned}$$

de telle sorte qu'en tenant compte aussi des deux majorations :

$$0\leqslant f^-\leqslant|f|\qquad\text{et}\qquad 0\leqslant f^+\leqslant|f|,$$

montrant que f^- et f^+ sont Lebesgue-intégrables lorsque f *i.e.* $|f|$ l'est, la définition suivante apparaît comme étant parfaitement naturelle.

Définition 6.2. La *valeur* de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction Lebesgue-intégrable est :

$$\int f := \int f^+ - \int f^-.$$

En vérité, on peut rencontrer dans la pratique de multiples décompositions :

$$f = f_1 - f_2,$$

où f_1 et f_2 sont deux fonctions mesurables positives, et alors il est légitime de se demander si l'on est toujours en droit d'écrire :

$$\int f = \int f_1 - \int f_2?$$

Oui, c'est bien le cas, parce que si f jouit d'une *autre* telle décomposition :

$$f = g_1 - g_2,$$

avec $g_1 \geqslant 0$ et $g_2 \geqslant 0$, il vient :

$$f_1 + g_2 = g_1 + f_2,$$

et comme les deux côtés de cette équation consistent en des fonctions mesurables positives, la linéarité déjà vue de l'intégrale sur les fonctions positives donne :

$$\int f_1 + \int g_2 = \int g_1 + \int f_2,$$

ce qui, puisque toutes ces intégrales sont des nombres réels finis, donne bien l'indépendance escomptée :

$$\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2.$$

Intermède spéculatif crucial. Maintenant, lorsqu'on parcourt en arrière mentalement, synthétiquement et intelligemment toute la théorie qui a été développée jusqu'à présent, *il importe d'effectuer une mise au point capitale concernant la pensée interne relative au concept intuitif de « presque partout ».*

Tout d'abord, nous savons que l'intégrabilité d'une fonction f et la valeur de son intégrale $\int f$ restent inchangées lorsqu'on modifie à souhait f sur des ensembles de mesure nulle. Par conséquent, il est à la fois naturel et utile dans le contexte de la *Théorie de l'intégration* d'*adopter la convention fondamentale que les fonctions seront essentiellement non définies sur les ensembles de mesure nulle*.

Qui plus est, puisque nous savons aussi qu'une fonction Lebesgue-intégrable f prend des valeurs finies presque partout, on prolonge cette convention fondamentale en admettant, par exemple, que l'addition $f + g$ de deux fonctions intégrables f et g est toujours possible, puisque l'ambiguïté causée par la non-définition de f et de g sur certains ensembles de mesure nulle, et aussi le fait que f et g peuvent éventuellement prendre des valeurs infinies, ces deux difficultés ne concernent au total qu'un ensemble négligeable et $\int$*-invisible* parce que de mesure nulle.

Enfin, lorsqu'on parle d'une fonction f, il devient alors naturel d'*admettre par convention qu'on considère simultanément la collection de toutes les fonctions qui diffèrent de f seulement sur un ensemble de mesure nulle*.

De simples applications des définitions, accompagnées des résultats obtenus jusqu'à présent, montrent que les propriétés élémentaires de l'intégrale sont héritées par la Définition 6.1 la plus générale.

Proposition 6.3. *L'intégrale de Lebesgue des fonctions Lebesgue-intégrables est linéaire, additive, monotone, et elle satisfait l'inégalité du triangle.* □

Rassemblons maintenant deux résultats qui non seulement sont instructifs, éclairants et intéressants en eux-mêmes, mais s'avéreront aussi utiles pour la démonstration du célébrissime *Théorème de la convergence dominée* de Lebesgue qui va suivre.

Théorème 6.4. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de mesure finie B — une boule assez grande par exemple — tel que :*

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B} |f| \leqslant \varepsilon.$$

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut supposer que $f \geqslant 0$.

Si B_N désigne la boule fermée centrée à l'origine de rayon un entier $N \geqslant 1$, introduisons la suite de fonctions mesurables positives « tronquées » :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{B_N}(x),$$

qui est manifestement croissante :

$$0 \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x),$$

et qui converge ponctuellement vers f partout :

$$\lim_{N \to \infty} f_N(x) = f(x).$$

Or grâce au Théorème 5.8 de convergence monotone, on a :

$$\lim_{N \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_N = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} f - \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_{B_N} \leqslant \varepsilon,$$

et alors puisque :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} = \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} - \mathbf{1}_{B_N},$$

il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash B_N} f \leqslant \varepsilon,$$

comme nous nous étions proposé de le faire voir. □

Intuitivement, les fonctions intégrables doivent en un certain sens s'annuler à l'infini, puisque leurs intégrables sont finies, mais attention ! une telle annulation n'est valable qu'au *sens intégral*, et elle est en général *fausse au sens ponctuel* — penser en effet à une fonction qui contient une infinité de pics s'enfuyant vers l'infini dont les contributions intégrales deviennent de plus en plus petites telle que par exemple (exercice) la fonction :

$$f\colon \quad \mathbb{R}^1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

définie précisément par :

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{lorsque } x \in \left[n,\, n + \frac{1}{n^3}\right] \text{ avec } n \geqslant 2 \text{ entier,} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Théorème 6.5. *Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ avec :*

$$m(E) \leqslant \delta,$$

on a :

$$\int_E |f| \leqslant \varepsilon.$$

Cette dernière condition est connue sous le nom d'*absolue continuité* de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue.

Démonstration. Après remplacement de f par $|f|$, on peut à nouveau supposer que $f \geqslant 0$.

Pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons l'ensemble :

$$F_N := \left\{x \in \mathbb{R}^d :\ f(x) \leqslant N\right\},$$

et la suite de fonctions :

$$f_N(x) := f(x) \cdot \mathbf{1}_{F_N}(x) \qquad\qquad (N \geqslant 1),$$

satisfaisant visiblement :

$$0 \leqslant f_N \leqslant N.$$

Comme dans la démonstration du théorème qui précède, cette suite de fonctions positives est croissante :

$$0 \leqslant f_N(x) \leqslant f_{N+1}(x),$$

avec de plus sur $\mathbb{R}^d \backslash \{f = \infty\}$ la convergence presque partout :

$$f(x) = \lim_{N \to \infty} f_N(x),$$

donc le Théorème 5.8 de convergence monotone assure, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, l'existence d'un entier $N = N_\varepsilon > 0$ assez grand pour que :

$$\big(0 \leqslant \big) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} \big(f - f_N\big) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si maintenant nous prenons $\delta = \delta_\varepsilon > 0$ avec :

$$N\, \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

alors pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure petite :

$$m(E) \leqslant \delta,$$

on peut majorer :

$$
\begin{aligned}
(0 \leqslant) \qquad \int_E f &= \int_E (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} (f - f_N) + \int_E f_N \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + N\, m(E) \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

ce qui conclut ! □

Nous sommes enfin parvenus au terme de ce long périple théorique dévolu à l'intégrale de Lebesgue, et c'est pour fêter ensemble ce moment intellectuel important que nous offrons au lecteur comme bouquet final le théorème le plus frappant et le plus utile de toute la théorie.

Théorème 6.6. [Théorème dit de la *convergence dominée* dû à Lebesgue] *Si une suite* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *de fonctions mesurables :*

$$f_n\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

converge ponctuellement vers une certaine fonction-limite :

$$f_n(x) \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} f(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

tout en restant constamment majorée *presque partout en valeur absolue par une fonction positive fixe* $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *:*

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

qui est Lebesgue-intégrable :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g < \infty,$$

alors on a :

$$\lim_{n \to \infty} \int \big|f_n - f\big| = 0,$$

d'où aussi :

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n = \int \lim_{n \to \infty} f_n.$$

Bien entendu, l'énoncé est tout aussi valable lorsque les fonctions f_n et g sont définies sur un sous-ensemble mesurable fixé $E \subset \mathbb{R}^d$. L'*intérêt phénoménal* de ce théorème, par rapport à ceux de la théorie de Riemann qui exigeaient en général d'abondantes doses de *convergence uniforme*, c'est que la seule hypothèse de domination par une fonction d'intégrale finie suffit à justifier rigoureusement l'interversion entre limite et intégrale !

Rendez-vous compte ! L'exigence de convergence uniforme part en fumée !

Lebesgue, bien à tort, se montra confus des dieux qu'il avait destitués,
des statues qu'il avait renversées de leur socle. Arnaud DENJOY

Démonstration. Pour tout entier $N \geqslant 1$, introduisons l'ensemble simultanément tronqué à l'horizontale et à la verticale :

$$G_N := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x| \leqslant N \text{ et } g(x) \leqslant N\big\},$$

ainsi que la suite de fonctions croissantes :

$$g_N(x) \,:=\, g(x) \cdot \mathbf{1}_{G_N}.$$

Une convergence monotone de ces g_N vers g entièrement analogue à celle qui avait lieu dans la démonstration du Théorème 6.4 assure alors (exercice) que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$\int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Par ailleurs, pour un tel N fixé, la suite de fonctions :

$$f_n \cdot \mathbf{1}_{G_N} \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)}$$

reste bornée par N en valeur absolue puisque $|f_n| \leqslant g \leqslant N$ sur G_N, et comme cette suite reste de plus à support contenu dans l'ensemble de mesure finie G_N, le Théorème 3.7 de convergence bornée s'applique et fournit un entier $n = n_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \,\geqslant\, n_\varepsilon \quad\Longrightarrow\quad \int_{G_N} \big|f_n - f\big| \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Grâce à ces deux inégalités, nous pouvons alors aisément majorer :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n - f\big| \,&=\, \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} \big|f_n - f\big| \\ &\leqslant\, \int_{G_N} \big|f_n - f\big| + 2 \int_{\mathbb{R}^d \backslash G_N} g \\ &\leqslant\, \varepsilon + 2\,\varepsilon,\end{aligned}$$

toujours pour $n \geqslant n_\varepsilon$, ce qui achève la démonstration de ce grand théorème. □

Pour terminer cette section capitale, mettons en lumière une conséquence facile du Théorème 6.6 *majeur* de convergence dominée, ainsi que du Théorème 5.8 — tout aussi *majeur* ! — de convergence monotone, sous la forme d'un « théorème-corollaire », hyper-fréquemment utilisé dans les applications, et qui renforce le Théorème 5.9 sans supposer la positivité des fonctions considérées.

Abrégeons ici :

$$\overline{\mathbb{R}} \,:=\, \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Théorème 6.7. *Si une suite $\big\{f_k(x)\big\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est telle que :*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\, dx \,<\, \infty,$$

alors en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$, la série numérique :

$$f(x) \,:=\, \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x),$$

converge absolument vers une valeur finie *appartenant à* $\mathbb{R}$*, elle définit une fonction mesurable intégrable* $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, et surtout, elle satisfait l'interversion entre intégration et sommation infinie dénombrable :*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\bigg)\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x)\,dx.\end{aligned}$$

Démonstration. Comme les f_k sont intégrables, nous pouvons changer à l'avance leurs valeurs sur une réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle de manière à ce qu'aucune fonction $f_k\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ ne prenne les valeurs $-\infty$ et ∞.

Ensuite, pour $n \geqslant 1$ entier, posons :

$$\begin{aligned}F_n(x) &:= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x) && (\in \mathbb{R}),\\ G_n(x) &:= \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \big|f_k(x)\big|, && (\in \mathbb{R}_+),\\ g(x) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| && (\in \overline{\mathbb{R}}_+),\end{aligned}$$

où :

$$\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

D'après le Théorème 5.8 de convergence monotone, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n\to\infty} G_n(x)\,dx\\ &\overset{\text{CM}}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} G_n(x)\,dx\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\,dx\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_k(x)\big|\,dx\\ &< \infty,\end{aligned}$$

quantité qui est finie, grâce à l'hypothèse principale du théorème en cours de démonstration.

Alors puisque $\int g < \infty$, la Proposition 5.4 **(v)** offre pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ la *finitude* des valeurs $g(x) \in \mathbb{R}_+$, la valeur ∞ étant ainsi *exclue*. C'est exactement la convergence *absolue* :

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_k(x)\big| < \infty \qquad \text{(presque partout)},$$

de notre série initiale de fonctions :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) &=: f(x) \\ &= \lim_{n\to\infty} F_n(x),\end{aligned}$$

qui converge donc aussi presque partounette !

Enfin, notre suite $\big\{F_n(x)\big\}_{n=1}^{\infty}$ étant par nature *dominée :*

$$\begin{aligned}\big|F_n(x)\big| = \bigg|\sum_{1\leqslant k\leqslant n} f_k(x)\bigg| \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} \big|f_k(x)\big| &= G_n(x) \\ &\leqslant g(x),\end{aligned}$$

par notre fonction-plafond positive g dont nous venons de dire qu'elle est Lebesgue-intégrable, le Théorème 6.6 de convergence dominée de Lebesgue — le benêt qui bégaille ! — :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Big(\lim_{n\to\infty} F_n(x)\Big)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n(x)\,dx,$$

nous offre la conclusion annoncée :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)\bigg)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x)\,dx \qquad \square$$

7. Fonctions à valeurs complexes

Lorsque les fonctions f que l'on considère sont à valeurs complexes, elles se décomposent :

$$f(x) = u(x) + i\,v(x),$$

en partie réelle u et en partie imaginaire v. Bien entendu, la fonction f est mesurable si et seulement si u et v le sont.

Définition 7.1. On dit qu'une fonction à valeurs complexes $f = u + i\,v$ définie sur $\mathbb{R}^d$ est *Lebesgue-intégrable* lorsque son module :

$$\big|f(x)\big| = \sqrt{u(x)^2 + v(x)^2}$$

est Lebesgue-intégrable d'intégrale finie :

$$\int |f| < \infty.$$

Rappelons les inégalités élémentaires :

$$\big|u(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| \qquad \text{et} \qquad \big|v(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|,$$

ainsi que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|u(x)\big| + \big|v(x)\big|,$$

cette dernière découlant de l'inégalité $(a+b)^{1/2} \leqslant a^{1/2} + b^{1/2}$, valable pour $a, b \geqslant 0$ (exercice).

Ces inégalités extrêmement simples font d'ailleurs voir qu'une fonction à valeurs complexes est Lebesgue-intégrable *si et seulement si* ses parties réelle et imaginaire le sont, et dans ce cas :

$$\int f(x)\,dx \;=\; \int u(x)\,dx + i\int v(x)\,dx.$$

Définition 7.2. Étant donné un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$, on dit qu'une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \longrightarrow \mathbb{C}$$

est *Lebesgue-intégrable* lorsque $f \cdot \mathbf{1}_E$ l'est sur $\mathbb{R}^d$ au sens de la définition qui précède, et dans ce cas, on note :

$$\int_E f = \int_{\mathbb{R}^d} f \cdot \mathbf{1}_E.$$

La collection de toutes les fonctions à valeurs complexes intégrables sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ forme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, comme on s'en convainc aisément ; en effet, si f et g sont intégrables, alors $f+g$ l'est aussi puisque l'inégalité du triangle donne :

$$\big|(f+g)(x)\big| \;\leqslant\; \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|,$$

et puisque la monotonie de l'intégrale donne :

$$\int_E \big|f+g\big| \;\leqslant\; \int_E |f| + \int_E |g| \;<\; \infty.$$

Enfin, il est clair que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, si f est intégrable, $\lambda\, f$ l'est aussi.

8. Intégrale de Riemann généralisée versus intégrale de Lebesgue

Cherchons maintenant à comparer l'intégrale de Lebesgue avec l'intégrale de Riemann généralisée.

Sur un intervalle ouvert $]a,b[$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$, soit donc $f\colon\,]a,b[\, \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *localement Riemann-intégrable*, à savoir qui, sur tout intervalle compact $[c,d] \subset\,]a,b[$, est bornée et Riemann-intégrable, d'où grâce au Théorème 4.1 :

$$\int_{[c,d]}^{\mathsf{R}} f(x)\,dx \;=\; \int_{[c,d]}^{\mathsf{L}} f(x)\,dx.$$

Rappelons que f est dite *intégrable au sens généralisé de Riemann* lorsque, avec $c \in\,]a,b[$ fixé :

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{a+\varepsilon}^{c} f(x)\,dx \qquad\text{et}\qquad \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ >}} \int_{c}^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

existent toutes deux, *i.e.* pour toutes paires de suites $a \longleftarrow a_n$ décroissante et $b_n \longrightarrow b$ croissante :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx \;=:\; \int_a^b f(x)\,dx \qquad \text{existe.}$$

Lemme 8.1. *Sous ces hypothèses, si f est Lebesgue-intégrable sur $]a,b[$:*

$$\int_{]a,b[}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\,dx \;<\; \infty,$$

alors $|f|$ est intégrable au sens généralisé de Riemann, et f aussi.

Preuve. Le Théorème 6.6 de convergence dominée tout récemment démontré qui sort du four comme un croissant chaud nous offre pour la première fois son croustillant instantané :

$$\int_{[a_n,b_n]}^{\mathsf{R}} \big|f(x)\big|\,dx \;=\; \int_{[a_n,b_n]}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\,dx \;\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{}\; \int_{[a,b]}^{\mathsf{L}} \big|f(x)\big|\,dx \;<\; \infty,$$

ou alors, pour ceux qui préfèrent déguster lentement le beurré délicieux de la vérification scrupuleuse des hypothèses, comme la suite $f_n := f\cdot\mathbf{1}_{[a_n,b_n]}$ est majorée $|f_n|\leqslant|f|$ par la fonction-dominatrice $g := f$ elle-même qui est Lebesgue-intégrable sur $[a,b]$, on peut effectivement intervertir limite et intégration !

Que cette première viennoiserie ne nous déçoive jamais ! car dans l'avenir, nous aurons d'innombrable occasions de constater la puissance incomparable qu'offre la convergence dominée, toujours rapide comme l'éclair ! □

Toutefois, la réciproque est *fausse :* la fonction $t\longmapsto\frac{\sin t}{t}$ sur $[0,\infty[$ nous a déjà fait voir, à la fin du chapitre sur l'intégrale de Riemann, qu'elle admet une intégrale de Riemann généralisée, tandis que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{[0,n\pi]}^{\mathsf{L}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \;=\; \lim_{n\to\infty}\int_{[0,n\pi]}^{\mathsf{R}} \frac{|\sin t|}{t}\,dt \;=\; \infty.$$

9. Espace L^1 des fonctions intégrables : complétude ; séparabilité

Le fait que les fonctions intégrables forment un $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitue une propriété fondamentale qui est de type *algébrique*.

Une propriété de type *analytique* encore plus importante mais bien moins élémentaire — *et qui n'était absolument pas satisfaite en théorie de Riemann* —, est que ce $\mathbb{C}$-espace vectoriel est *complet* pour la quantité positive naturelle :

$$\int |f|,$$

laquelle va s'avérer être une vraie norme.

Définition 9.1. La *norme* d'une fonction Lebesgue-intégrable $f\colon\mathbb{R}^d\longrightarrow\mathbb{C}$ est la quantité :

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx.$$

La collection de toutes les fonctions Lebesgue-intégrables munie de cette norme constitue un espace noté :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

dont il s'agit maintenant de préciser rigoureusement la définition. En fait, on sait déjà par la Propositon 5.4 que :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \;=\; 0 \qquad\Longrightarrow\qquad f = 0 \;\text{ presque partout},$$

et cette propriété reflète la pratique intuitive que nous avons déjà implicitement adoptée de ne pas distinguer deux fonctions qui coïncident en presque tout point. Avec cela en tête, nous pouvons fournir le concept rigoureux attendu.

Définition 9.2. L'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ est l'espace des classes d'équivalence de fonction mesurables

$$f\colon\quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$$

Lebesgue-intégrables :

$$\big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f\big| < \infty,$$

où deux telles fonctions f_1 et f_2 sont équivalentes :

$$f_1 \sim f_2$$

si et seulement si elles sont égales en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Toutefois, il est fréquemment admis de considérer qu'un élément $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction intégrable spécifique, même si en toute rigueur, on devrait parler de la classe d'équivalence d'une telle f.

Bien entendu, la norme $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ ne dépend pas du choix d'un représentant dans une classe d'équivalence. De plus, $L^1(\mathbb{R}^d)$ hérite la propriété d'être un espace vectoriel. Les propriétés élémentaires de $L^1(\mathbb{R}^d)$ sont résumées dans l'énoncé suivant.

Proposition 9.3. *Si f et g sont deux fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, alors :*

(i) $\|\lambda\, f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = |\lambda|\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{C}$;

(ii) $\|f + g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$;

(iii) $\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 0$ *si et seulement si* $f = 0$ *presque partout ;*

(iv) $d(f, g) := \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ *définit une métrique sur* $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Pour ce qui concerne **(iv)**, il s'agit de vérifier que $d(f, g)$ satisfait les trois axiomes d'une métrique, ce qui est manifestement aisé. □

Définition 9.4. Un $\mathbb{C}$-espace vectoriel V muni d'une métrique $d(\cdot, \cdot)$ est dit *complet* lorsque toute suite de Cauchy $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de points $x_n \in V$ admet une limite $x_\infty \in V$ *qui appartient encore à* V, à savoir plus précisément toute cauchycité :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \geqslant N(\varepsilon) \implies d\big(x_n, x_m\big) \leqslant \varepsilon\Big),$$

implique convergence interne à l'espace :

$$\exists\, x_\infty \in V \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = x_\infty.$$

Notre objectif principal est de montrer maintenant que la Théorie de l'intégration de Lebesgue *complète* celle de Riemann, en un sens qui est simultanément fort et signifiant mathématiquement.

Théorème 9.5. [Riesz-Fischer] *Le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $L^1\big(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}\big)$ muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f, g\big) := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f - g\big| = \|f - g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$$

est complet.

Démonstration. Étant donné une suite de Cauchy quelconque $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \geqslant 1 \quad \Big(n,\, m \geqslant N(\varepsilon) \implies \big\| f_n - f_m \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\Big),$$

il s'agit donc d'établir qu'il existe une fonction mesurable intégrable — *a posteriori* unique — :

$$f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}),$$

laquelle est donc encore d'intégrale finie, telle que :

$$0 \,=\, \lim_{n \to \infty} \big\| f_n - f_\infty \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Le plan de la démonstration consiste à extraire une sous-suite appropriée $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui convergera presque partout *ponctuellement* vers une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et à faire voir ensuite que cette sous-suite converge aussi vers f en norme L^1, ce qui produira la fonction $f_\infty := f$ recherchée.

Or dans des circonstances idéales, on pourrait espérer que la suite complète $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ elle-même converge presque partout vers une limite $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, mais malheureusement, une telle convergence n'a pas toujours lieu pour les suites de Cauchy quelconques dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, voir à ce sujet l'Exercice 14. Cependant, il va se trouver que si la convergence au sens de Cauchy est *assez rapide* en norme $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors la convergence ponctuelle presque partout va devenir garantie.

Ce sera donc pour accélérer la convergence au sens de Cauchy que nous devons extraire une certaine sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$.

Plus précisément, pour $k = 1, 2, 3, \dots$, choisissons successivement des $\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$ de plus en plus petits auxquels sont associés des entiers :

$$N\big(\tfrac{1}{2}\big),\ N\big(\tfrac{1}{2^2}\big),\ N\big(\tfrac{1}{2^3}\big),\ \dots\dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big),\ \dots\dots,$$

garantissant que :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{1}{2^k}\big) \implies \big\| f_n - f_m \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k},$$

et introduisons la sous-suite d'entiers :

$$n_k \,:=\, \max\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big),\ \dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

qui est manifestement croissante :

$$1 \leqslant n_k \leqslant n_{k+1}.$$

Grâce à ce choix, on produit donc une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ qui satisfait :

$$\big\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{1}{2^k} \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

Quitte à augmenter légèrement n_k en posant plutôt par exemple :

$$n_k \,:=\, k + \max\Big(N\big(\tfrac{1}{2^1}\big),\ \dots,\ N\big(\tfrac{1}{2^k}\big)\Big),$$

on peut supposer la croissance stricte :

$$n_k \,<\, n_{k+1},$$

ce qui est certainement avisé pour avoir une vraie sous-suite.

Introduisons ensuite une série de fonctions dont la convergence sera établie ultérieurement :

$$f(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big), \tag{9.6}$$

ainsi que la série majorante associée, *via* l'inégalité triangulaire infinie :

$$F(x) = \big|f_{n_1}(x)\big| + \sum_{k=1}^{\infty} \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big|. \tag{9.7}$$

Introduisons aussi, pour tout entier $K \geqslant 1$, les *sommes partielles* d'ordre K :

$$\begin{aligned} S_K(f)(x) &= f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K} \big(f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big) \\ &= f_{n_{K+1}}(x), \end{aligned}$$

qui se contractent par téléscopie, et aussi les majorantes de ces sommes partielles :

$$F_K(x) = \big|f_{n_1}(x)\big| + \sum_{k=1}^{K} \big|f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)\big|,$$

lesquelles ne se simplifient en général *pas*.

En tout cas, l'inégalité triangulaire donne au moins :

$$\begin{aligned} \big\|S_K(f)\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \big\|F_K\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \big\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \\ &\leqslant \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &= \big\|f_{n_1}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce dernier majorant étant uniforme, *i.e.* indépendant de $K \geqslant 1$.

Considérons maintenant la suite de fonctions :

$$\big(F_K\big)_{K=1}^{\infty},$$

qui est manifestement positive croissante :

$$0 \leqslant F_K \leqslant F_{K+1},$$

et qui tend par définition vers la fonction :

$$F(x) = \lim_{K \to \infty} F_K(x),$$

à valeurs dans $[0, +\infty]$. On peut alors appliquer le Théorème 5.8 de convergence monotone qui nous donne :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} F &= \lim_{K \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_K \\ &\leqslant \big\| f_{n_1} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui fait voir que F est Lebesgue-intégrable — information fort agréable !

Immédiatement, de l'inégalité :

$$|f| \leqslant F,$$

on tire que :

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Ensuite, en se référant au Théorème 5.9, on déduit aussi que la série (9.7) ci-dessus qui définit f converge ponctuellement presque partout vers une fonction mesurable presque partout finie, et donc en revenant à (9.6), f elle-même est bien définie, mesurable, presque partout finie.

Dit autrement, les sommes partielles de cette série (9.6) :

$$S_{k-1}(f)(x) = f_{n_k}(x)$$

convergent presque partout ponctuellement vers :

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)}.$$

Nous affirmons alors que cette fonction f est la fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$ recherchée vers laquelle converge la suite de Cauchy $(f_n)_{n=1}^\infty$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ dont nous sommes partis.

En effet, pour établir d'abord la convergence dans L^1 de notre sous-suite :

$$f_{n_k} \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f \quad \text{ dans } L^1(\mathbb{R}^d),$$

à savoir pour vérifier que :

$$0 = \lim_{k \to \infty} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

on remarque que l'inégalité valable par construction presque partout :

$$\begin{aligned}\big| f - f_{n_k} \big| &\leqslant |f| + \big| f_{n_k} \big| \\ &= |f| + \big| S_{k-1}(f) \big| \\ &\leqslant |f| + |F| \\ &\leqslant 2\,F,\end{aligned}$$

assure la domination uniforme :

$$\begin{aligned}\big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\,\|F\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

et alors grâce au Théorème 6.6 de convergence dominée, on conclut que la sous-suite $(f_{n_k})_{k \geqslant 1}$ de la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge en norme L^1 vers la fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{k \to \infty} \big\| f - f_{n_k} \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Mais il s'agit en fait d'établir la convergence vers f de la suite *entière* $(f_n)_{n=1}^\infty$, pas seulement d'une sous-suite !

Or comme $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est par hypothèse de Cauchy :

$$n,\, m \geqslant N\big(\tfrac{\varepsilon}{2}\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|f_n - f_m\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

en choisissant un entier de la sous-suite $n_k \gg 1$ assez grand pour que grâce à ce que nous venons de voir :

$$\big\|f_{n_k} - f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2},$$

un entier satisfaisant aussi, quitte à l'augmenter, $n_k \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, on peut intercaler ce f_{n_k} dans une inégalité triangulaire terminale :

$$\begin{aligned}\big\|f_n - f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \big\|f_n - f_{n_k}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\|f_{n_k} - f\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

valable pour tout $n \geqslant N(\frac{\varepsilon}{2})$, qui conclut la démonstration de ce grand théorème de complétude très souvent utilisée en Analyse. □

Puisque toute suite qui converge en norme L^1 est une suite de Cauchy dans cette norme, les arguments de la démonstration précédente ont fait voir un énoncé suivant qui s'avère très souvent utile.

Théorème 9.8. *Si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite de fonctions appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui converge en norme L^1 vers une certaine fonction $f_\infty \in L^1(\mathbb{R}^d)$:*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f_\infty\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

alors il existe une sous-suite :

$$\big(f_{n_k}\big)_{k=1}^{\infty}$$

qui converge ponctuellement vers f_∞ :

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f_\infty(x)$$

en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

Définition 9.9. On dit qu'une famille $\mathscr{G}$ de fonctions g appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$ est *dense* dans $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}\big)$ lorsque :

$$\forall\, f \in L^1(\mathbb{R}^d) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, g \in \mathscr{G} \quad \big\|f - g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Naturellement, nous sommes déjà familiers avec certaines familles de fonctions qui sont denses dans des espaces fonctionnels : par exemple, le théorème de Weierstrass montre que les polynômes sont denses dans l'espace des fonctions continues $\mathscr{C}^0\big([0,1],\, \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0([0,1])}\big)$ munies de la norme de la convergence uniforme.

Le théorème qui suit décrit d'autres familles denses qui s'avéreront très utiles lorsqu'il s'agira d'établir des propriétés et des identités satisfaites par les fonctions intégrables quelconques. Dans un tel objectif, le principe général c'est que le résultat est souvent plus facile à démontrer pour une classe restreinte de fonctions, telles que par exemple les fonctions étagées, et ensuite, un argument de densité ou de passage à la limite permet d'obtenir le résultat général.

Théorème 9.10. *Dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables sur $\mathbb{R}^d$, les trois familles suivantes de fonctions sont denses :*

(i) *les fonctions étagées ;*

(ii) *les fonctions en escalier ;*

(iii) *les fonctions continues à support compact.*

Démonstration. Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$. On peut supposer que f est à valeurs réelles, en traitant séparément $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$. Si donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, en écrivant $f = f^+ - f^-$ avec $f^- \geqslant 0$ et $f^+ \geqslant 0$, on peut aussi supposer que $f \geqslant 0$.

Maintenant, pour ce qui concerne **(i)**, un théorème du chapitre qui précède garantit l'existence d'une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point. Mais alors le Théorème 5.8 de convergence monotone donne :

$$0 = \lim_{k \to \infty} \big\| f - \varphi_k \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui montre bien qu'il existe des fonctions étagées arbitrairement proches de f en norme L^1 !

Quant à **(ii)**, grâce à **(i)** obtenue à l'instant, il suffit d'approximer les fonctions étagées par des fonctions en escalier. Or par définition, les fonctions étagées sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie. Donc il suffit de faire voir que la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un unique ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est approximable par des escaliers.

Si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il s'agit de trouver une fonction en escalier ψ telle que :

$$\big\| \mathbf{1}_E - \psi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Mais il se trouve que nous avons déjà effectué cette tâche sans nous en rendre compte. En effet, un théorème du chapitre qui précède a fait voir qu'il existe une famille finie de rectangles fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E \Delta \bigcup_{j=1}^{J} R_j \bigg) \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors en passant aux intérieurs des rectangles (leurs bords étant de mesure nulle), les deux fonctions :

$$\mathbf{1}_E \qquad \text{et} \qquad \psi := \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{\mathsf{Int}\, R_j}$$

diffèrent seulement sur un ensemble de mesure $\leqslant \varepsilon$, sont égales à 0 ou à 1 en tout point, ce qui assure que :

$$\big\| \mathbf{1}_E - \psi \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Enfin pour obtenir **(iii)**, grâce à **(ii)** obtenu à l'instant, en jonglant avec des $\varepsilon > 0$ pour embrasser des combinaisons linéaires finies comme on a déjà réussi maintes fois à le faire, on se ramène (exercice du poignet) à démontrer que la fonction indicatrice d'un unique rectangle fermé borné :

$$\mathbf{1}_R = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \mathbf{1}_{[a_i, b_i]} \qquad\qquad (-\infty < a_i < b_i < \infty),$$

est approximable, en norme $\| \cdot \|_{L^1(\mathbb{R}^d)}$ à $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit près, par des fonctions continues à support compact.

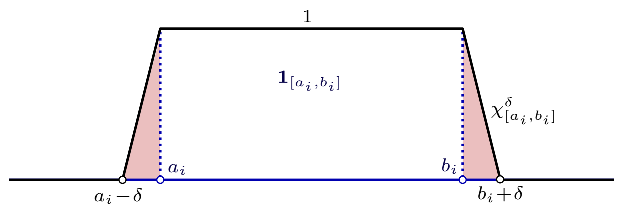
Tous les apprentis-menuisiers de Licence 3 en Mathématiques Fondamentales et Appliquées savent déjà comment raboter les arêtes d'un gratte-ciel en modifiant peu son volume.

Avec $\delta > 0$ très petit, gonflons plutôt légèrement le rectangle R en :

$$R^\delta := \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \big[a_i - \delta,\, b_i + \delta\big],$$

ce qui ne change que très peu son volume :

$$\big|R^\delta\big| = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \big(b_i - a_i + 2\delta\big) = \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \big(b_i - a_i\big) + \mathrm{O}(\delta) = |R| + \mathrm{O}(\delta).$$



Dans chaque i-ème dimension, introduisons ensuite la fonction continue affine par morceaux simplette :

$$\chi^\delta_{[a_i,b_i]}(x) \in \mathscr{C}^0_c\big(\mathbb{R}, [0,1]\big),$$

dont le graphe vient d'être représenté, égale à 1 sur $[a_i, b_i]$, et nulle hors de $[a_i - \delta, b_i + \delta]$. Alors la fonction-produit :

$$\chi^\delta_R(x) := \prod_{1 \leqslant i \leqslant d} \chi^\delta_{[a_i,b_i]}(x),$$

est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, est continue, et puisque $0 \leqslant \chi^\delta_R \leqslant 1$ avec $\chi^\delta_R \equiv 1$ sur R, la différence :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|\mathbf{1}_R(x) - \chi^\delta_R(x)\big|\, dx &\leqslant \int_{R^\delta \setminus R} 1 \\ &= \big|R^\delta\big| - |R| \\ &= \mathrm{O}(\delta),\end{aligned}$$

peut effectivement être rendue $\leqslant \varepsilon$ pour $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ suffisamment petit. □

Nous pouvons maintenant dévoiler une propriété troublante — et pourtant mathématiquement vraie ! — de l'ensemble $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions intégrables. Nous venons de voir que dans l'espace vectoriel normé (complet) :

$$\Big(L^1(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{L^1}\Big),$$

l'ensemble des fonctions en escalier est dense. Toutefois, cet ensemble n'est certainement pas dénombrable, puisqu'une seule combinaison linéaire avec un seul coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ donne déjà une famille de cardinal égal à celui de $\mathbb{R}$, non dénombrable. Mais en approximant ces $\lambda \in \mathbb{R}$ par des rationnels $\lambda_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q}$, tout va devenir possible ! Commençons alors par conceptualiser l'objectif.

Définition 9.11. [Espace séparable] Un espace vectoriel normé $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ — pas nécessairement complet — est dit *séparable* s'il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ — dénombrable ! — de vecteurs $f_n \in E$ qui est *dense :*

$$\forall\, g \in E \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, f_{\mathrm{N}(\varepsilon)} \in \big(f_n\big)_{n=1}^\infty \quad \text{telle que} \quad \big\|g - f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big\|_E \leqslant \varepsilon.$$

Théorème 9.12. [Séparabilité de L^1] *Dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions f_n intégrables qui est* dense.

Le phénomène est troublant en ceci qu'un espace de fonctions aussi vaste et aussi complexe que celui des fonctions mesurables intégrables aurait pu sembler, au moment où on a dépensé tant d'efforts à le construire, ne jamais pouvoir être « capturé » comme l'adhérence d'une suite dénombrable.

Démonstration. D'après le Théorème 9.10 **(ii)**, il existe une combinaison linéaire finie de fonctions indicatrices de rectangles compacts :

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \subset \mathbb{R}^d \qquad (-\infty < a_i < b_i < \infty),$$

telle que :

$$\Big\| g - \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R \Big\|_{L^1} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or puisque $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ est dense, il existe des rationnels extrêmement proches $a_i' \approx a_i$, $b_i' \approx b_i$, $\lambda' \approx \lambda$ tels qu'avec les rectangles perturbés :

$$R' = [a_1', b_1'] \times \cdots \times [a_d', b_d'] \qquad (-\infty < a_i' < b_i' < \infty),$$

on maintient l'approximation :

$$\Big\| \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R - \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \Big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$\Big\| g - \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \Big\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Mais l'ensemble des coefficients rationnels $\lambda' \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$, en nombre fini, et l'ensemble des coordonnées $a_i', b_i' \in \mathbb{Q}$, aussi en nombre fini, sont dénombrables, ce qui permet, par un procédé de renumérotation quelconque d'organiser :

$$\Big\{ \sum_{\text{finie}} \lambda' \cdot \mathbf{1}_{R'} \Big\} = \big(f_n\big)_{n=1}^{\infty}$$

comme une *suite* de fonctions, et ainsi, $\|g - f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\|_{L^1} \leqslant \varepsilon$, comme voulu. □

Les résultats de densité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ conduisent tout naturellement à une généralisation immédiate pour laquelle $\mathbb{R}^d$ est remplacé par un sous-ensemble mesurables $E \subset \mathbb{R}^d$. En fait, on peut introduire et définir $L^1(E)$ comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, pour développer la théorie de manière entièrement similaire. À vrai dire, on peut aussi de manière alternative prolonger à 0 toute fonction f définie sur E en posant :

$$\widetilde{f} := \begin{cases} f & \text{sur } E, \\ 0 & \text{sur } \mathbb{R}^d \backslash E, \end{cases}$$

puis déclarer que :

$$\big\| f \big\|_{L^1(E)} := \big\| \widetilde{f} \big\|_{L^1(E)}.$$

Les versions sur E des propositions et théorèmes de cette section sont alors parfaitement réalisées.

10. Propriétés d'invariance

Définition 10.1. Étant donné une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$, pour un vecteur fixe $h \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$\tau_h(f)(x) := f(x-h)$$

est appelée la *translation de f par h*.

Comme en théorie de Riemann, l'intégrale de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ tout entier est invariante par translation.

Lemme 10.2. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $\tau_h(f) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est aussi intégrable et de plus :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-h)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Démonstration. L'argument est une illustration du principe de réduction à des fonctions simples, complémenté par la densité. En effet, lorsque :

$$f = \mathbf{1}_E$$

est la fonction indicatrice d'un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\tau_h(f) = \mathbf{1}_{E_h},$$

où naturellement :

$$E_h = \big\{x+h\colon\; x \in E\big\},$$

et comme on sait que la mesure de Lebesgue est invariante par translation :

$$m\big(E_h\big) = m(E),$$

le résultat est immédiat dans ce cas :

$$\int \tau_h(f) \;=\; m\big(E_h\big) = m(E) \;=\; \int f.$$

Ensuite par linéarité de l'intégrale, le résultat est encore valable pour toute fonction étagée.

Enfin, soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ une fonction intégrable quelconque à valeurs réelles positives, puisque l'on peut toujours se ramener à ce cas (exercice mental). Nous savons pour l'avoir utilisé il y a très peu de temps qu'il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives :

$$0 \leqslant \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} \leqslant f = \lim_{k\to\infty} \varphi_k,$$

qui convergent ponctuellement vers la fonction f tout en lui restant inférieures, et le Théorème 5.8 de convergence monotone assure donc que :

$$\int f = \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k.$$

Mais alors la suite des fonctions translatées :

$$\tau_h\big(\varphi_k\big) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \tau_h(f)$$

converge (exercice mental) de manière monotone et bornée vers la translatée de f, et donc le Théorème de convergence monotone donne à nouveau

$$\begin{aligned}\int \tau_h(f) &= \lim_{k\to\infty} \int \tau_h\big(\varphi_k\big)\\ &= \lim_{k\to\infty} \int \varphi_k\\ &= \int f,\end{aligned}$$

ce qu'il fallait faire voir. □

En utilisant l'invariance par dilatation de la mesure de Lebesgue, on peut aussi établir l'énoncé élémentaire suivant, laissé en exercice.

Théorème 10.3. *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour $\delta > 0$, la fonction :*

$$x \longmapsto f(\delta\, x)$$

appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec de plus :

$$\delta^d \int_{\mathbb{R}^d} f(\delta x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

Enfin :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(-x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$ □

Conséquemment, pour tout $a > d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\geqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a},$$

tandis que pour tout $a < d$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{|x|\leqslant\varepsilon} \frac{dx}{|x|^a} = \varepsilon^{-a+d} \int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

En fait, comme en théorie de Riemann — à laquelle se ramènent toutes ces considérations fort élémentaires ! —, lorsque $a > d$, on a la finitude :

$$\int_{|x|\geqslant 1} \frac{dx}{|x|^a} < \infty,$$

et lorsque $a < d$, la finitude :

$$\int_{|x|\leqslant 1} \frac{dx}{|x|^a}.$$

Plus important encore que tout ces enfantillages, nous allons maintenant examiner les propriétés de continuité des translatées $\tau_h(f)$ d'une fonction arbitraire $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par des vecteurs $h \longrightarrow 0$ qui tendent vers zéro. Rappelons qu'en un point $x \in \mathbb{R}^d$, la convergence ponctuelle :

$$\tau_h(f)(x) \underset{h\to 0}{\longrightarrow} f(x)$$

a lieu lorsque et seulement lorsque f est continue en x.

Mais hélas, comme nous l'avons fait savoir à plusieurs reprises, il est hors de question d'espèrer avoir une telle convergence ponctuelle pour les fonctions qui sont seulement intégrables au sens de Lebesgue, puisque ces fonctions présentent en général de très nombreux points de discontinuité. Pire encore, on peut montrer par un exemple (voir à ce sujet l'Exercice 18) que même après correction sur un ensemble de mesure nulle, une fonction intégrable peut avoir des points de discontinuité sur un ensemble de mesure strictement positive, et même parfois, en tout point !

Heureusement, il existe une propriété de continuité dont jouissent les fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, celle qui est en relation naturelle avec la norme L^1.

Théorème 10.4. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$0 = \lim_{h \to 0} \big\| \tau_h(f) - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Ce résultat est une conséquence relativement élémentaire de l'approximabilité des fonctions intégrables par des fonctions continues à support compact, déjà vue dans le Théorème 9.10.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ continue à support compact telle que :

$$\big\| f - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Mais alors, puisque g est continue à support compact, il est aisé de se convaincre que elle au moins, parce qu'elle est bien élevée, satisfait sans mal la propriété attendue (exercice ! exploiter la continuité uniforme de g) :

$$\exists\, \delta_\varepsilon > 0 \qquad |h| \leqslant \delta_\varepsilon \implies \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Bien que cela puisse paraître quelque peu contre-intuitif, ce qui vaut pour g continue vaut alors pour f possiblement très discontinue, puisqu'une simple inégalité triangulaire précédée d'insertions astucieuses :

$$\begin{aligned}
\big\| \tau_h(f) - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} &= \big\| \tau_h(f) - \tau_h(g) + \tau_h(g) - g + g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \big\| \tau_h(f) - \tau_h(g) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&= \big\| \tau_h(f - g) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&= \big\| f - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| \tau_h(g) - g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} + \big\| g - f \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon,
\end{aligned}$$

le tout agrémenté de l'invariance de l'intégrale par translations donne effectivement la petitesse de la norme L^1 de la différence entre $\tau_h(f)$ et f, pourvu seulement que $|h| \leqslant \delta_\varepsilon$. □

11. Exercices

Exercice 1. Établir rigoureusement l'affirmation laissée en exercice dans la démonstration du Théorème 6.6 de convergence dominée de Lebesgue.

Exercice 2. Montrer que si une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est Lebesgue-intégrable, alors :

$$0 = \lim_{\delta \to 1} \big\| f(x) - f(\delta x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Exercice 3. Soit une fonction :

$$f \in L^1\big(] - \pi, \pi]\big)$$

que l'on prolonge comme fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout intervalle I de longueur 2π, on a :

$$\int_I f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx.$$

Exercice 4. Avec $b > 0$, à une fonction :

$$f \in L^1\big([0,b]\big),$$

on associe la fonction définie pour $0 < x \leqslant b$ par :

$$g(x) := \int_x^b \frac{f(t)}{t}\,dt,$$

Montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $[0,b]$ et que l'on a :

$$\int_0^b g(x)\,dx = \int_0^b f(t)\,dt.$$

Exercice 5. Soit un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{R}$ dont le complémentaire est de mesure finie :

$$m\big(\mathbb{R}\backslash F\big) < \infty.$$

On note $\delta(\cdot)$ la fonction distance à F, définie par :

$$\delta(x) := \mathsf{dist}(x,F) = \inf\big\{|x-y|\colon\ y \in F\big\},$$

et on introduit la fonction définie par une intégrale :

$$I(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\delta(y)}{|x-y|^2}\,dy.$$

(a) Montrer que δ est continue, et même mieux, montrer que δ satisfait la condition de 1-lipschitzianité :

$$\big|\delta(x) - \delta(y)\big| \leqslant |x-y|.$$

(b) Montrer que $I(x) = \infty$ pour tout $x \notin F$.

(c) Montrer que $I(x) < \infty$ pour presque tout $x \in F$. Certes, cela peut paraître surprenant, eu égard au fait que la condition de Lipschitz ne 'tue' qu'une puissance de $|x-y|$ dans l'intégrande de $I(x)$!
Indication: Étudier $\int_F I(x)\,dx$.

Exercice 6. Comme en théorie de Riemann (généralisée), l'intégrabilité d'une fonction positive f sur $\mathbb{R}$ n'implique *nullement* que $f(x)$ tende vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

(a) Montrer qu'il existe une fonction réelle continue strictement positive f définie sur $\mathbb{R}$ telle que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, bien que :

$$\infty = \limsup_{x\to\infty} f(x).$$

(b) Toutefois, quand f est supposée uniformément continue sur $\mathbb{R}$ et intégrable (au sens de Riemann ou de Lebesgue), montrer que :

$$0 = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Exercice 7. À une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, on associe son *graphe :*

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}\colon\ y = f(x)\big\}.$$

Montrer que Γ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, et que sa mesure est nulle :

$$m(\Gamma) = 0.$$

Exercice 8. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable Lebesgue-intégrable. Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, que l'ensemble :

$$A_n := f^{-1}\big([n,\infty]\big),$$

est de mesure finie, et qu'il satisfait :

$$0 = \lim_{n\to\infty} n \cdot m(A_n).$$

Exercice 9. Si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lebesgue-intégrable, montrer que la fonction définie par :

$$F(x) := \int_{-\infty}^x f(t)\,dt$$

est uniformément continue.

Exercice 10. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que :

$$m\big(E_\alpha\big) \,\leqslant\, \frac{1}{\alpha}\int f.$$

Exercice 11. Soit une fonction $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ mesurable à valeurs positives. Pour $k \geqslant 1$ entier, on pose :

$$E_{2^k} \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, f(x) > 2^k\big\},$$

ainsi que :

$$F_k \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, 2^k < f(x) \leqslant 2^{k+1}\big\},$$

(a) Lorsque f prend presque partout des valeurs $< \infty$, vérifier que :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} F_k \,=\, \big\{f(x) > 0\big\},$$

cette réunion étant disjointe.

(b) Montrer que f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m\big(F_k\big) \,<\, \infty,$$

si et seulement si :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m\big(E_{2^k}\big) \,<\, \infty.$$

(c) On introduit les deux fonctions :

$$f(x) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour}\;\; 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

et :

$$g(x) \,:=\, \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour}\;\; |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Déduire de **(b)** que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 12. Étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \Big(\cos\frac{1}{x}\Big)^n\, dx.$$

Exercice 13. Si $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction satisfaisant $\int_E f(x)\, dx \geqslant 0$ pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, montrer que $f \geqslant 0$ presque partout ; avec $\int_E f = 0$, montrer $f = 0$ p.p.

Exercice 14. Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f - f_n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

bien que $f_n(x)$ ne tende vers $f(x)$ pour *aucun* $x \in \mathbb{R}^d$.
Indication: En dimension $d = 1$, choisir $f_n = \mathbf{1}_{I_n}$, où les $I_n \subset \mathbb{R}$ sont des intervalles appropriés dont les mesures $m(I_n) \longrightarrow 0$ tendent vers zéro.

Exercice 15. Trouver deux ensembles mesurables A et B tels que $A + B$ n'est *pas* mesurable.
Indication: Dans $\mathbb{R}^2$, prendre $A := \{0\} \times [0,1]$ et $B := \mathscr{N} \times \{0\}$, où $\mathscr{N} \subset [0,1]$ est le sous-ensemble *non* mesurable construit par Vitali.

Exercice 16. On se propose d'évaluer la mesure de la boule unité ouverte — ou fermée, cela reviendrait au même — de $\mathbb{R}^d$:

$$v_d := m\Big(\big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x| < 1\big\}\Big).$$

(a) En dimension $d = 2$, montrer que :

$$v_2 = 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx,$$

puis en déduire que $v_2 = \pi$.

(b) Montrer que :

$$v_d \ = \ 2\, v_{d-1} \int_0^1 \big(1 - x^2\big)^{\frac{d-1}{2}}\, dx.$$

(c) Avec la fonction $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}\, e^{-t}\, dt$ d'Euler, obtenir le résultat :

$$v_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)}.$$

Exercice 17. Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Pour un d-uplet quelconque $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_d) \in (\mathbb{R}^*)^d$ de nombres réels non nuls, on pose :

$$f^\delta(x) := f\big(\delta_1 x_1, \dots, \delta_d x_d\big).$$

Montrer que la fonction f^δ est intégrable et qu'elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f^\delta(x)\, dx \ = \ \frac{1}{|\delta_1 \cdots \delta_d|} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx.$$

Exercice 18. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{lorsque } \ 0 < x < 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Soit une énumération $(r_n)_{n=1}^\infty$ des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. On introduit la fonction définie par une série :

$$F(x) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}\, f\big(x - r_n\big).$$

(a) Montrer que F est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que la série qui définit F converge presque partout vers une valeur finie.

(c) Montrer que F est non bornée sur tout intervalle d'intérieur non vide.

(d) Montrer que toute fonction égale à F presque partout est non bornée dans tout intervalle d'intérieur non vide.

Exercice 19. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite paramétrée par $\mathbb{Z}$ de fonctions mesurables positives $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

(a) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \bigg(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\bigg) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

(b) Soit une fonction mesurable positive $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, et soit sa 1-périodisation :

$$f(x) \ := \ \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n + x),$$

à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que :

$$\int_0^1 g(x)\, dx \ = \ \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx.$$

(c) Montrer que si $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable intégrable, *i.e.* si $\int_{\mathbb{R}} f < \infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \ = \ \lim_{|n| \to \infty} f(n + x).$$

(d) Toujours avec $f \geqslant 0$ intégrable, montrer qu'on n'a pas nécessairement :

$$0 \;=\; \lim_{|t|\to\infty} f(t).$$

Indication: Penser à des gratte-ciels fuyant vers l'infini en s'amaigrissant.

(e) Soit $E \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble mesurable de mesure $m(E) < 1$. Établir le non-recouvrement :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} \big(n + E\big) \;\not\supset\; \mathbb{R}.$$

Exercice 20. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ qui converge ponctuellement presque partout vers une certaine fonction-limite :

$$f_\infty(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Montrer que :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}} f_\infty(x)\,dx\bigg) \;\;\Longrightarrow\;\; \bigg(0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x) - f_\infty(x)\big|\,dx\bigg).$$

Indication: Introduire $\big(f_\infty - f_n\big)^+ := \max\big(0, f_\infty - f_n\big)$.

Exercice 21. **(a)** Pour $n \geqslant 0$ entier, calculer $\int_0^1 x^n \log x\,dx$, et en déduire que :

$$\int_0^1 \frac{\log x}{x-1}\,dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

(b) Pour $n \geqslant 0$ entier, calculer $\int_0^1 x^{2n}\,(1-x)\,dx$, et en déduire la valeur de la série alternée :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(c) Montrer que la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{1 + 3^{2n}\,(x - 3^n)^2}$$

est intégrable, et calculer la valeur de son intégrale.

Exercice 22. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable intégrable d'intégrale $0 < \int_{\mathbb{R}} f \; (< \infty)$, soit $\alpha > 0$ un paramètre réel, et soit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$a_n \;:=\; \int_{\mathbb{R}} n \log\bigg(1 + \Big(\frac{f(x)}{n}\Big)^{\alpha}\bigg)\,dx \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer, à l'aide du théorème de Fatou, que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Indication: Travailler sur $E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d \colon\; f(x) \geqslant \delta\}$ pour un $\delta > 0$ tel que $m(E_\delta) > 0$.

(b) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f$.

(c) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Indication: Établir l'inégalité $1 + x^\alpha \leqslant (1+x)^\alpha$ pour tout $x > 0$, et montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\log(1+x^\alpha)}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 23. Étudier l'existence des trois limites suivantes, et les déterminer le cas échéant :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} \frac{n \sin\big(\frac{x}{n}\big)}{x\,(1+x^2)}\,dx,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{1} \frac{n\,x \sin x}{1 + n^\alpha\,x^\alpha}\,dx \qquad\qquad (\text{discuter selon } \alpha \in \mathbb{R}),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{n\,x^\alpha \arctan(nx)}{1 + n\,x^2}\,dx \qquad\qquad (\text{discuter selon } \alpha \in \mathbb{R}).$$

Exercice 24. [Exemple de fonction intégrable nulle part bornée] Soit $(r_k)_{k=1}^{\infty}$ une énumération des nombres rationnels $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, *i.e.* une bijection $\mathbb{N}^* \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}$. Avec :

$$\varphi(x) := \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1]}(x),$$

on définit la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions :

$$f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}\, \varphi\big(x - r_k\big) \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

(a) Montrer que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que, en tout point $x \in \mathbb{R}$, la suite numérique $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$ converge vers une valeur appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. On note $f(x)$ cette limite.

(c) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Calculer $\int_{\mathbb{R}} f$.

(e) Montrer que $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) Montrer que f est non-bornée sur tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$.

(g) Existe-t-il un ensemble mesurable de mesure strictement positive sur lequel f est bornée ?

Théorème de Fubini-Tonelli

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Théorème de Fubini

En Physique comme en Mathématiques, le calcul des intégrales multiples s'effectue très souvent en itérant des intégrales simples. Nous allons maintenant développer cette méthode dans le cadre de la Théorie de l'intégration de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

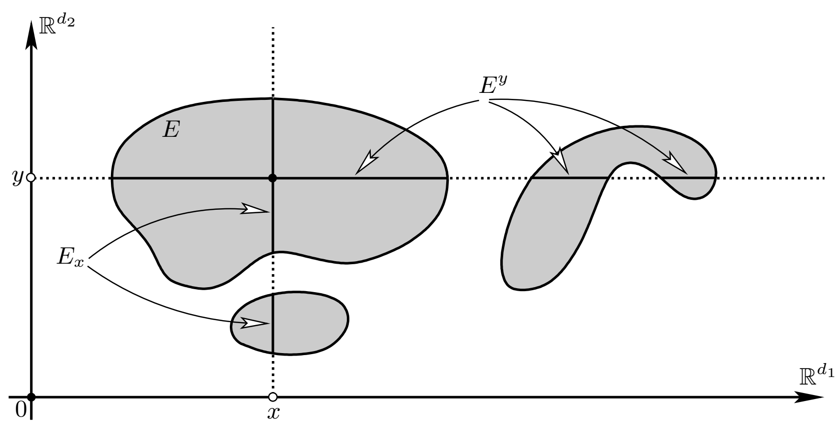
Pour tous entier $d_1 \geqslant 1$ et $d_2 \geqslant 1$ avec $d = d_1 + d_2$, on peut décomposer la dimension ambiante comme :

$$\mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}.$$

Un point de $\mathbb{R}^d$ possède alors des coordonnées (x, y) avec :

$$x \in \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad y \in \mathbb{R}^{d_2}.$$

Eu égard au caractère profondément géométrique d'une telle décomposition qui généralise $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, il apparaît très naturel d'introduire des tranchages.



Définition 1.1. Étant donné un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, pas nécessairement mesurable, pour $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ fixé, la y-*tranche* de E est le sous-ensemble de l'espace des x défini par :

$$E^y := \big\{ x \in \mathbb{R}^{d_1} \colon\ (x, y) \in E \big\}.$$

De même, pour $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, la x-*tranche* de E est le sous-ensemble de l'espace des y défini par :

$$E_x := \big\{ y \in \mathbb{R}^{d_2} \colon\ (x, y) \in E \big\}.$$

Quand on passe aux fonctions, le tranchage s'incarne sous la forme de *restrictions*.

Définition 1.2. Étant donné une fonction :

$$f\colon\quad \mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\},$$

la *tranche* de f correspondant à un $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ *fixé* est la fonction f^y de la variable $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ donnée par :

$$f^y(x) \,:=\, f(x,y).$$

De manière similaire, la *tranche* de f correspondant à un $x\in\mathbb{R}^{d_1}$ *fixé* est la fonction f_x de la variable $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ donnée par :

$$f_x(y) \,:=\, f(x,y).$$

Le *Théorème de Fubini* que nous allons maintenant formuler et démontrer ne se présente pas spontanément à l'esprit comme en théorie de Riemann lorsqu'on se limite à la considération de fonctions continues, et ce, à cause d'une difficulté sous-jacente peu prévisible : les ensembles-tranches E_x et E_y d'un ensemble mesurable $E\subset\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ ne s'avèrent pas toujours être mesurables.

Un contre-exemple très simple à cette croyance spontanée consiste à prendre un sous-ensemble *non* mesurable $\mathscr{N}\subset[0,1]^{d_1}$ dans l'espace des x, et à le regarder comme plongé dans l'espace-produit :

$$E \,:=\, \mathscr{N}\times\{0\} \,\subset\, \mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2};$$

alors la tranche horizontale $E^0=\mathscr{N}$ correspondant à $y=0\in\mathbb{R}^{d_2}$ n'est manifestement pas mesurable, tandis que dans $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, la mesure (d_1+d_2)-dimensionnelle de E est égale à 0 — donc E est mesurable ! —, puisque E est bornée contenu dans un sous-espace linéaire de $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$ de codimension $d_2\geqslant 1$, de telle sorte qu'on peut le recouvrir par des rectangles d'épaisseur verticale arbitrairement petite.

De plus, même sous l'hypothèse qu'une fonction $f\colon E\longrightarrow\{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est mesurable, il n'est pas toujours vrai, aussi, que ses tranches f_x et f^y soient mesurables pour tout x et pour tout y.

Le démon cruel des mathématiques dialectiques, heureusement, va nous laisser la vie sauve, car il va se trouver que la mesurabilité sera satisfaite *pour presque toute* tranche, phénomène qui est en accord avec la manière de penser que nous avons développée en Théorie de la mesure.

Théorème 1.3. [Fubini] *Soit une fonction mesurable :*

$$f\colon\quad \mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\}\cup\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$$

qui est intégrable au sens de Lebesgue, i.e. $\int|f|<\infty$. *Alors* pour presque tout $y\in\mathbb{R}^{d_2}$ *fixé :*

(i) *la fonction-tranche* $x\longmapsto f^y(x)$ *est mesurable et intégrable sur* $\mathbb{R}^{d_1}$ *;*

(ii) *ses différentes intégrales correspondantes définissent une fonction :*

$$y \,\longmapsto\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\,dx$$

qui est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_2}$;

(iii) *et de plus enfin, on a la formule de Fubini :*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}}\left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx\right)dy \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Bien entendu, le théorème est symétrique lorsqu'on échange le rôle de x avec celui de y, donc on a aussi l'intégrabilité des fonctions-tranches $y \longmapsto f_x(y)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, on a aussi l'intégrabilité de la fonction :

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_2}} f_x(y)\, dy,$$

et on a aussi la formule :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\, dy \bigg)\, dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

En particulier, le théorème de Fubini énonce que l'intégrale sur $\mathbb{R}^d$ d'une fonction f peut être calculée en itérant des intégrales en dimension inférieure, et il montre aussi que cela peut être fait dans n'importe quel ordre :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\, dy \bigg)\, dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \bigg)\, dy.$$

Dans le cas plus général où la fonction f serait à valeurs complexes, observons qu'on se ramènerait sans peine au cas où elle est à valeurs réelles, en traitant séparément $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$.

Toute démonstration du Théorème de Fubini est inévitablement longue, et celle que nous allons développer procédera en *six* étapes.

Notation. *Nous noterons :*

$$\mathscr{F}$$

l'ensemble des fonctions mesurable et intégrables sur $\mathbb{R}^d$ *qui satisfont les trois conclusions* **(i)**, **(ii)**, **(iii)** *du théorème.*

Notre but est de parvenir à faire voir que :

$$\mathscr{F} \,\supset\, L^1(\mathbb{R}^d).$$

L'Étape 1 montrera que $\mathscr{F}$ est stable par des opérations élémentaires telles que la prise de combinaisons linéaires. L'Étape 2 montrera une stabilité similaire par passages à la limite.

Ensuite, nous commencerons à construire certaines familles de fonctions qui appartiendront à $\mathscr{F}$. Puisque toute fonction intégrable est 'limite' de fonctions étagées, et puisque les fonctions étagées sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables de mesure finie, *l'objectif va rapidement se concentrer sur une démonstration du fait que la fonction indicatrice* $\mathbf{1}_E$ *d'un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *de mesure finie appartient à* $\mathscr{F}$.

Afin de réaliser cet objectif, nous commencerons à travailler avec des rectangles, et à la fin de l'Étape 3, nous aurons atteint les G_δ-ensembles, tandis que l'Étape 4 sera consacrée à atteindre les ensembles de mesure nulle.

À la fin, un argument de passage à la limite montrera que toutes les fonctions intégrables appartiennent à $\mathscr{F}$, ce qui complétera cette démonstration qui aura exigé, nous nous en rendrons compte, beaucoup d'endurance mathématique !

Démonstration. Commençons donc par une propriété simple et naturelle, d'après laquelle les propriétés **(i)**, **(ii)**, **(iii)** sont linéairement stables.

Étape 1. *Toute combinaison linéaire finie de fonctions appartenant à $\mathscr{F}$ appartient encore à $\mathscr{F}$.*

Démonstration. En effet, soient $f_1, \dots, f_N \in \mathscr{F}$. Pour tout $k = 1, \dots, N$, il existe un sous-ensemble $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ de mesure nulle :

$$0 = m\big(A_k\big) \qquad\qquad (k = 1 \cdots N),$$

tel que pour tout $y \notin A_k$, la fonction-tranche $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$. Si on introduit la réunion :

$$A := \bigcup_{k=1}^{N} A_k,$$

toujours de mesure nulle, il est alors clair que pour toute combinaison linéaire :

$$g := \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_N f_N,$$

lorsque $y \notin A$, la fonction-tranche $x \longmapsto g^y(x)$ est mesurable et intégrable. La linéarité de l'intégrale montre que g satisfait aussi **(ii)** et **(iii)** (exercice mental). □

Étape 2. *Si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite croissante de fonctions appartenant à $\mathscr{F}$:*

$$f_k \leqslant f_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

qui converge ponctuellement presque partout vers une certaine fonction (automatiquement) mesurable :

$$f = \lim_{k \to \infty} f_k,$$

et si cette fonction-limite f est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, alors $f \in \mathscr{F}$ aussi.

Bien entendu, la même conclusion vaut pour les suites décroissantes, les deux énoncés étant équivalents à travers un changement de signe global $f_k \longmapsto -f_k$.

Démonstration. Après remplacement de f_k par $f_k - f_1$, on peut supposer que $f_k \geqslant 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Maintenant, observons que le Théorème de convergence monotone donne :

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x, y)\, dxdy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, y)\, dxdy. \tag{1.4}$$

Or par hypothèse, pour tout k, il existe un sous-ensemble $A_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ tel que $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$ chaque fois que $y \notin A_k$. La réunion infinie de ces ensembles exceptionnels :

$$A := \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k,$$

est encore de mesure nulle dans $\mathbb{R}^{d_2}$:

$$m(A) = 0,$$

et lorsque $y \notin A$, on est certain que *toutes* les fonctions-tranches $x \longmapsto f_k^y(x)$ sont mesurables et Lebesgue-intégrables. Puisque cette suite de fonctions est croissante, le Théorème de convergence monotone assure que la suite de fonctions :

$$y \longmapsto g_k(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k^y(x)\, dx \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

converge pour $k \to \infty$ en croissant vers la limite :

$$g(y) := \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f^y(x)\, dx.$$

Une application renouvelée du Théorème de convergence monotone montre alors qu'on a aussi :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\, dy. \tag{1.5}$$

Mais comme par hypothèse $f_k \in \mathscr{F}$, il vient :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g_k(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k(x,y)\, dxdy,$$

et en tenant compte de (1.4) et de (1.5), nous concluons que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} g(y)\, dy &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, dxdy \\ &< \infty,\end{aligned}$$

puisque f a été supposée Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Cette dernière équation montre donc que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_2}$. Par conséquent :

$$g(y) < \infty \qquad \text{(pour presque tout } y \in \mathbb{R}^{d_2}\text{)},$$

et en revenant à l'expression de $g(y)$, ceci montre premièrement que f^y est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^{d_1}$ pour presque tout y, et deuxièmement que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(x,y)\, dxdy,$$

ce qui est la conclusion annoncée $f \in \mathscr{F}$. □

Étape 3. *Toute fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ d'un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ qui est un G_δ-ensemble de mesure finie, appartient à $\mathscr{F}$.*

Démonstration. Nous procédons en *cinq* sous-étapes organisées par ordre croissant de généralité.

(a) Supposons pour commencer que $E \subset \mathbb{R}^d$ est un cube ouvert borné, de la forme :

$$E = Q_1 \times Q_2,$$

où $Q_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $Q_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ sont deux cubes ouverts bornés. Alors pour tout y, la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E(x,y)$ est mesurable par rapport à x, est intégrable, et satisfait (exercice géométrico-mental) :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\, dx = \begin{cases} |Q_1| & \text{lorsque } y \in Q_2, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Par conséquent, la fonction :

$$g := |Q_1| \cdot \mathbf{1}_{Q_2}$$

est elle aussi mesurable intégrable, et elle satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\, dy = |Q_1| \cdot |Q_2|.$$

Mais comme nous avions au départ :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x,y)\,dxdy \,=\, |E| \,=\, |Q_1|\cdot|Q_2|,$$

nous déduisons bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(b) Maintenant, supposons que E est un sous-ensemble du bord d'un cube fermé borné. Puisque le bord de tout cube est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E(x,y)\,dxdy \,=\, 0.$$

Ensuite, nous laissons en exercice au lecteur le soin de se convaincre que pour *presque tout* y, l'ensemble-tranche E^y est de mesure 0 dans $\mathbb{R}^{d_1}$. Par conséquent, si on introduit :

$$g(y) \,:=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_{E^y}(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\,dx,$$

on déduit que $g(y)=0$ pour presque tout y. Ensuite, il découle de cela que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} g(y)\,dy \,=\, 0,$$

et donc on a bien $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(c) Supposons maintenant que E est réunion finie de cubes fermés dont les intérieurs sont mutuellement disjoints :

$$E \,=\, \bigcup_{k=1}^{K} Q_k.$$

Alors, si Q_k^o désigne l'intérieur de Q_k, on peut écrire $\mathbf{1}_E$ comme combinaison linéaire des fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{Q_k^o}$ de ces intérieurs, ainsi que de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{A_k}$ de sous-ensembles appropriés des bords des Q_k (exercice ; tracer des figures intuitives en dimensions 1, 2, 3).

Mais grâce aux analyses que nous avons déjà conduites, nous savons que les $\mathbf{1}_{Q_k^o}$ appartiennent à $\mathscr{F}$, ainsi que les $\mathbf{1}_{A_k}$, pour tout $k=1,\dots,N$. Or l'Étape 1 garantissait à l'avance que l'ensemble $\mathscr{F}$ est fermé par combinaisons linéaires finies. Donc nous concluons que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

(d) Plus avant, montrons que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est ouvert et de mesure finie, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. En partant de ce qui précède, cette affirmation découle d'un passage à la limite.

En effet, nous avons vu au tout début des développements de la Théorie de la mesure que E ouvert peut toujours être représenté comme réunion dénombrable de cubes fermés presque disjoints :

$$E \,=\, \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j.$$

Par conséquent, si nous posons :

$$f_k \,:=\, \sum_{j=1}^{k} \mathbf{1}_{Q_j},$$

même si $f_k \to \infty$ en certains points, nous observons que ces fonctions f_k tendent en croissant presque partout vers $f=\mathbf{1}_E$, fonction qui est intégrable puisque $m(E)<\infty$. Nous concluons grâce à l'Étape 2 que $f \in \mathscr{F}$.

(e) Enfin, montrons que si E est un G_δ-ensemble de mesure *finie*, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.

En effet, par définition, E est représentable comme intersection dénombrable :

$$E = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathscr{O}_k,$$

d'ouverts $\mathscr{O}_k \subset \mathbb{R}^d$. Comme E est de mesure finie, nous pouvons supposer qu'à partir d'un certain rang, les $\mathscr{O}_k$ deviennent de mesure finie, et donc, on peut supposer que $\mathscr{O}_1$ *est* de mesure finie. Qui plus est, après remplacement :

$$\mathscr{O}_k \longmapsto \bigcap_{\ell=1}^{k} \mathscr{O}_\ell,$$

on peut même supposer que :

$$\mathscr{O}_1 \supset \mathscr{O}_2 \supset \cdots \supset \mathscr{O}_k \supset \cdots .$$

Alors la suite de fonctions $f_k := \mathbf{1}_{\mathscr{O}_k}$ décroît vers $f = \mathbf{1}_E$, et enfin, puisque **(d)** vient de faire voir que $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_k} \in \mathscr{F}$, nous concluons grâce à l'Étape 2 que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 4. *Si un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ est de mesure nulle, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. En effet, puisque E est mesurable, nous pouvons trouver un G_δ-ensemble :

$$G \supset E,$$

de mesure $m(G) = 0$. Or, puisque l'Étape 3 vient de faire voir que $\mathbf{1}_G \in \mathscr{F}$, nous savons que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_G(x,y)\, dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_G = 0,$$

d'où :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_G(x,y)\, dx = 0 \qquad \text{(pour presque tout } y \in \mathbb{R}^{d_2}\text{)}.$$

Par conséquent, l'ensemble-tranche G^y est de mesure 0 pour presque tout y. Mais comme :

$$E^y \subset G^y,$$

nécessairement pour ces y :

$$m\big(E^y\big) = 0 = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\, dx,$$

et pour terminer :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \mathbf{1}_E(x,y)\, dx \right) dy = 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_E,$$

ce qui montre bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 5. *Si un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est de mesure finie, alors $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$.*

Démonstration. En effet, rappelons qu'il existe un G_δ-ensemble $G \supset E$ de mesure finie tel que :

$$0 = m(G \backslash E).$$

Or puisque :

$$\mathbf{1}_E = \mathbf{1}_G - \mathbf{1}_{G \backslash E},$$

et puisque $\mathscr{F}$ est stable par combinaisons linéaires, nous trouvons bien que $\mathbf{1}_E \in \mathscr{F}$. □

Étape 6. *Si une fonction* $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *est Lebesgue-intégrable, alors* $f \in \mathscr{F}$.

Démonstration. Bien entendu, nous pouvons supposer, comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, que f est à valeurs réelles $\geqslant 0$. Grâce à un théorème du chapitre qui précède, il existe une suite croissante $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées qui tend en tout point vers f. Mais puisque chaque φ_k est combinaison linéaire finie de fonctions caractéristiques d'ensembles de mesure finie, on sait que $\varphi_k \in \mathscr{F}$ pour tout $k \geqslant 1$, et l'Étape 2 réalisée à l'avance nous permet bien de conclure ici que $f \in \mathscr{F}$! □

Ces six étapes étant réalisées, la démonstration patiente du Théorème 1.3 s'achève enfin. □

Le génie est une longue patience. Buffon

[Parole de Buffon, rapportée par Hérault de Séchelles, *voyage à Montbard* (1785), qui met dans la bouche de Buffon une phrase légèrement différente : « Le génie n'est qu'une plus grande aptitude à la patience ».]

2. Théorème de Tonelli

Supposons donnée une fonction mesurable :

$$f \colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

dont on ne sait pas *a priori* si elle est intégrable au sens de Lebesgue, mais posons-nous quand même la question de savoir si nous pouvons déterminer $\int_{\mathbb{R}^d} f$, et ce, grâce à l'utilisation d'intégrales itérées, lesquelles sont en général plus accessibles au calcul. Or d'après la définition la plus générale, notre fonction f est Lebesgue-intégrable si et seulement si sa valeur absolue $|f|$ satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \,<\, \infty.$$

Par conséquent, la question concerne en vérité une fonction à valeurs positives, $|f|$. Il faut donc un théorème qui nous permette, par le biais d'intégrales itérées, notamment en dimensions 2 et 3, de déterminer par le calcul si $|f|$ est d'intégrale *finie*, car rappelons que la *Théorie de l'intégration de Lebesgue* attribue toujours une valeur :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g \,\in\, \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

à *toute* fonction mesurable positive $g \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Théorème 2.1. [Tonelli] *Soit une fonction mesurable* positive :

$$g \colon \quad \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

pas forcément Lebesgue-intégrable, à savoir satisfaisant peut-être $\int_{\mathbb{R}^d} g = \infty$. *Alors* pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ *fixé :*

(i) *la fonction-tranche* $x \longmapsto g^y(x)$ *est mesurable sur* $\mathbb{R}^{d_1}$ *;*

(ii) *ses différentes intégrales correspondantes définissent une fonction :*

$$y \longmapsto \int_{\mathbb{R}^{d_1}} g^y(x)\, dx$$

qui est mesurable sur $\mathbb{R}^{d_2}$;

(iii) *et de plus enfin, on a la formule de Fubini-Tonelli :*

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} g(x,y)\,dx \bigg)\,dy \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} g,$$

cette équation pouvant se réduire à :

$$\infty \;=\; \infty.$$

Dans la pratique réelle des exercices, des partiels, des examens, des concours, et des *tutti quanti* estudiantins, en partant d'une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, en lui associant la fonction positive $g := |f|$, si le premier membre de cette équation :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \big|f(x,y)\big|\,dx \bigg)\,dy}_{<\infty} \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} |f|,$$

calculé concrètement par intégration itérée, s'avère être *fini*, alors on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$!

Qui plus est, dans ce cas, les hypothèses du Théorème 1.3 de Fubini sont alors satisfaites, et l'on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \bigg)\,dy}_{\text{en général calculable}} \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Démonstration. Notons f la fonction, au lieu de g. Introduisons les troncatures :

$$f_k(x,y) \;:=\; \begin{cases} f(x,y) & \text{lorsque } \ |(x,y)| \leqslant k \ \text{ et } \ f(x,y) \leqslant k, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Chaque fonction f_k est Lebesgue-intégrable, et grâce à **(i)** du Théorème 1.3 de Fubini, il existe un sous-ensemble $E_k \subset \mathbb{R}^{d_2}$ de mesure 0 tel que la fonction-tranche $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^{d_2} \backslash E_k$.

Si nous introduisons alors :

$$E := \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k,$$

nous trouvons que $x \longmapsto f_k^y(x)$ est mesurable pour tout $y \in \mathbb{R}^{d_2} \backslash E$ et pour tout $k \geqslant 1$.

De plus, $m(E) = 0$, et comme $f_k^y \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f^y$ de manière croissante, le Théorème de convergence monotone implique que pour tout $y \notin E$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx.$$

Ensuite, grâce à **(ii)** du Théorème 1.3 de Fubini, pour tout $k \geqslant 1$, la fonction :

$$y \;\longmapsto\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx$$

est mesurable, et la fonction :

$$y \;\longmapsto\; \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx$$

est aussi mesurable, comme limite presque partout de fonctions mesurables.

Une autre application du théorème de convergence monotone donne alors :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \bigg)\,dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\,dx \bigg)\,dy.$$

Enfin, grâce à **(iii)** du Théorème 1.3 de Fubini, nous savons que :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f_k(x,y)\,dx \bigg)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f_k.$$

Une dernière application du théorème de convergence monotone à f_k donne aussi :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

La synthèse entre ces trois derniers résultats achève la démonstration du théorème de Tonelli. □

Corollaire 2.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un sous-ensemble mesurable, alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, l'ensemble-tranche :*

$$E^y := \big\{ x \in \mathbb{R}^{d_1} \colon \, (x,y) \in E \big\},$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$. De plus, la fonction :

$$y \longmapsto m\big(E^y\big)$$

est mesurable, et on a :

$$m(E) = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m\big(E^y\big)\,dy.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence immédiate de **(i)** du Théorème 2.1 de Tonelli appliqué à la fonction $\mathbf{1}_E$. Bien entendu, il existe un résultat symétrique concernant les x-tranches dans $\mathbb{R}^{d_2}$. □

Nous avons donc établi l'énoncé naturel que si $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est mesurable, alors pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, son y-tranche E^y est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$, et pour presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, sa x-tranche E_x est aussi mesurable dans $\mathbb{R}^{d_2}$. *On pourrait être tenté de croire que la réciproque est vraie, mais il n'en est rien.*

Exemple 2.3. Étant donné un ensemble *non* mesurable $\mathscr{N} \subset \mathbb{R}$, si nous introduisons le produit :

$$\begin{aligned} E &:= [0,1] \times \mathscr{N} \\ &\subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \end{aligned}$$

alors nous voyons que ses y-tranches valent :

$$E^y = \begin{cases} [0,1] & \text{lorsque } \, y \in \mathscr{N}, \\ \emptyset & \text{lorsque } \, y \notin \mathscr{N}. \end{cases}$$

Ainsi, ces E^y sont mesurables pour tout y.

Cependant, si E lui-même était mesurable, alors le corollaire que nous venons de démontrer — et qui est un corollaire *vrai !* — impliquerait que, pour presque tout $x \in [0,1]$, les x-tranches :

$$\begin{aligned} E_x &= \big\{y \in \mathbb{R} \colon\ (x,y) \in [0,1] \times \mathscr{N}\big\} \\ &= \{y \in \mathscr{N}\} \\ &= \mathscr{N}, \end{aligned}$$

seraient mesurables, ce qui n'est manifestement pas le cas !

Un exemple plus frappant apparaît dans l'Exercice 10.

3. Mesurabilité des ensembles-produits

Si on découpe un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ en tranches verticales E_x et horizontales E^y, les choses s'avèrent très simples lorsque E s'adapte à la structure-produit.

Définition 3.1. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un *ensemble-produit* lorsque :

$$E = E_1 \times E_2,$$

en termes de deux sous-ensembles $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$.

L'objectif de cette section est de montrer que si E_1 et E_2 sont mesurables, alors leur produit $E_1 \times E_2$ est aussi mesurable. Deux lemmes seront nécessaires.

Lemme 3.2. *Si $E = E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ est un ensemble-produit mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1+d_2} = \mathbb{R}^d$, et si :*

$$m^*\big(E_2\big) \ > \ 0,$$

alors E_1 est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1}$.

Démonstration. Grâce au Théorème 1.3 de Fubini, nous savons que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^{d_2}$, la fonction-tranche :

$$x \longmapsto \mathbf{1}^y_{E_1 \times E_2}(x) \ = \ \mathbf{1}_{E_1}(x)\, \mathbf{1}_{E_2}(y)$$

est mesurable.

Mais nous affirmons qu'il existe en fait un $y \in E_2$, pas seulement dans $\mathbb{R}^{d_2}$, tel que cette fonction de x est mesurable. Alors pour un tel y, on aura :

$$\mathbf{1}_{E_1 \times E_2}(x,y) \ = \ \mathbf{1}_{E_1}(x),$$

et alors, on obtiendra bien que E_1 est mesurable.

Pour montrer l'existence d'un tel $y \in E_2$, utilisons l'hypothèse $m^*(E_2) > 0$. Notons F l'ensemble des $y \in \mathbb{R}^{d_2}$ tels que la tranche E^y est mesurable. Il s'agit donc de montrer que $E_2 \cap F \neq \emptyset$. Nous savons en tout cas que $m(F^c) = 0$.

Or nous pouvons trivialement écrire :

$$E_2 = \big(E_2 \cap F\big) \cup \big(E_2 \cap F^c\big),$$

d'où par sous-additivité de m^* :

$$\begin{aligned} 0 \ &< \ m^*\big(E_2\big) \\ &\leqslant \ m^*\big(E_2 \cap F\big) + m^*\big(E_2 \cap F^c\big) \\ &= \ m^*\big(E_2 \cap F\big), \end{aligned}$$

et puisque cette mesure extérieure est strictement positive, on a bien $E_2 \cap F \neq \emptyset$. □

Lemme 3.3. *Si $E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ et $E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$ sont deux sous-ensembles quelconques, alors :*

$$m^*\big(E_1 \times E_2\big) \leqslant m^*\big(E_1\big) \cdot m^*\big(E_2\big),$$

avec la convention locale que $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de m^*, on peut trouver deux familles infinies de cubes fermés :

$$\big\{Q_k\big\}_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad \big\{Q'_\ell\big\}_{\ell=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{d_2},$$

recouvrant :

$$E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q'_\ell,$$

et satisfaisant :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_k\big| \leqslant m^*\big(E_1\big) + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q'_\ell\big| \leqslant m^*\big(E_2\big) + \varepsilon.$$

Alors en passant aux produits, il est clair que :

$$E_1 \times E_2 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{\ell=1}^{\infty} Q_k \times Q'_\ell,$$

et la sous-additivité dénombrable de la mesure extérieure donne :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1 \times E_2\big) &\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q_k \times Q'_\ell\big| \\ &= \bigg(\sum_{k=1}^{\infty} \big|Q_k\big|\bigg) \bigg(\sum_{\ell=1}^{\infty} \big|Q'_\ell\big|\bigg) \\ &\leqslant \big[m^*\big(E_1\big) + \varepsilon\big] \big[m^*\big(E_2\big) + \varepsilon\big]. \end{aligned}$$

Naturellement, il s'agit de développer ce dernier produit numérique — mais attention ! Si jamais $m^*(E_1) = \infty$ ou si $m^*(E_2) = \infty$, pourra-t-on dire que :

$$\infty \cdot \varepsilon = \mathrm{O}(\varepsilon)\,?$$

Non, certainement pas !

Aussi, commençons par traiter le cas 'générique' où :

$$m^*\big(E_1\big) < \infty \qquad \text{et} \qquad m^*\big(E_2\big) < \infty.$$

Alors dans ce cas, on peut effectivement développer le produit en question et obtenir :

$$m^*\big(E_1 \times E_2\big) \leqslant m^*\big(E_1\big)\, m^*\big(E_2\big) + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

ce qui démontre bien l'inégalité voulue.

Ensuite, lorsque $0 < m^*(E_1) < \infty$ et $m^*(E_2) = \infty$, ou lorsque, en échangeant les rôles, $m^*(E_1) = \infty$ et $0 < m^*(E_2) < \infty$, on a toujours $m^*(E_1)\, m^*(E_2) = \infty$, et l'inégalité affirmée par le lemme est alors satisfaite sans effort.

Il reste donc le dernier cas subtil où $m^*(E_1) = 0$ tandis que $m^*(E_2) = \infty$, logiquement équivalent à son symétrique $m^*(E_1) = \infty$, $m^*(E_2) = 0$. Il s'agit alors de faire voir que $m^*(E_1 \times E_2) = 0$.

En effet, en intersectant E_2 avec des boules fermées de taille grandissante :

$$E_{2,N} := E_2 \cap \big\{|y| \leqslant N\big\} \qquad\qquad (N \in \mathbb{N}),$$

on se ramène à $m^*(E_{2,N}) < \infty$, et donc ce qui a déjà été vu s'applique pour donner :

$$\begin{aligned} m^*\big(E_1 \times E_{2,N}\big) &\leqslant \underline{m^*(E_1)}_{\circ}\, m^*(E_{2,N}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Enfin, comme la suite d'ensembles $\{E_1 \times E_{2,N}\}_{N=1}^{\infty}$ tend en croissant vers $E_1 \times E_2$, on a bien $m^*(E_1 \times E_2) = \lim_{N\to\infty} m^*(E_1 \times E_{2,N}) = 0$. □

Théorème 3.4. *Soient deux sous-ensembles mesurables :*

$$E_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}.$$

Alors leur produit $E := E_1 \times E_2$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ de mesure :

$$m(E) \,=\, m(E_1) \cdot m(E_2),$$

toujours avec la convention locale $\infty \cdot 0 = 0 \cdot \infty = 0$.

Démonstration. Comme E_1 et E_2 sont mesurables, il existe grâce à un théorème vu dans le chapitre qui précède deux G_δ-ensembles :

$$E_1 \subset G_1 \subset \mathbb{R}^{d_1} \qquad \text{et} \qquad E_2 \subset G_2 \subset \mathbb{R}^{d_2},$$

satisfaisant :

$$0 = m^*\big(G_1 \backslash E_1\big) \qquad \text{et} \qquad 0 = m^*\big(G_2 \backslash E_2\big).$$

Mais alors, l'ensemble-produit $G := G_1 \times G_2$ est mesurable dans $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ (exercice), et l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} G \backslash E &= \big(G_1 \times G_2\big) \big\backslash \big(E_1 \times E_2\big) \\ &\leqslant \big[(G_1 \backslash E_1) \times G_2\big] \,\cup\, \big[G_1 \times (G_2 \backslash E_2\big]. \end{aligned}$$

Grâce au lemme qui précède, nous avons :

$$m^*\big[(G_1 \backslash E_1) \times G_2\big] \,=\, 0 \,=\, m^*\big[G_1 \times (G_2 \backslash E_2\big],$$

d'où découle $m^*(G \backslash E) = 0$, ce qui montre (exercice mental) que E est bien mesurable.

Enfin, le Corollaire 2.2 peut être appliqué, et comme la fonction $y \longmapsto m(E^y)$ s'identifie à la fonction :

$$y \,\longmapsto\, m(E_1) \cdot \mathbf{1}_{E_2}(y),$$

et on obtient bien :

$$\begin{aligned} m(E) &= \int_{\mathbb{R}^{d_2}} m(E_1) \cdot \mathbf{1}_{E_2}(y) \\ &= m(E_1) \cdot m(E_2), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Corollaire 3.5. *Soit f une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^{d_1}$. Alors la fonction $\widetilde{f}$ prolongeant trivialement f au produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$ qui est définie par :*

$$\widetilde{f}(x, y) \,:=\, f(x),$$

est aussi mesurable.

Démonstration. On peut supposer que f est à valeurs réelles. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, l'ensemble de sous-niveau :

$$E_1 := \big\{x \in \mathbb{R}^{d_1} \colon\ f(x) < a\big\}$$

est par définition mesurable. Mais puisque :

$$\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \colon\ \widetilde{f}(x,y) < a\big\} \,=\, E_1 \times \mathbb{R}^{d_2},$$

le théorème démontré à l'instant montre bien que $\{(x,y) \colon\ \widetilde{f}(x,y) < a\}$ est mesurable, ce qui conclut. □

Pour terminer en beauté ce chapitre, nous allons enfin établir l'interprétation géométrique tant attendue de l'intégrale de Lebesgue, que nous connaissons certes tous déjà puisque la théorie de l'intégrale de Cauchy-Riemann-Darboux nous l'a déjà amplement fait voir, mais qui va s'éclairer ici d'un jour nouveau et d'une généralité nouvelle.

Nous avons en effet à l'esprit ici que la valeur $\int f$ de l'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est l'aire généralisée, $(d+1)$-dimensionnelle, qui se trouve '*sous le graphe*' de f.

Théorème 3.6. *Soit une fonction mesurable à valeurs réelles positives :*

$$f \colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+,$$

et soit son hypographe :

$$\mathscr{A}_f \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\}.$$

Alors la fonction f est mesurable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si son hypographe $\mathscr{A}_f$ est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^{d+1}$.

Dans ce cas :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \,=\, m(\mathscr{A}_f).$$

Démonstration. Suppsons f mesurable et démontrons que $\mathscr{A}_f$ est mesurable. Le corollaire vu à l'instant assure alors que la fonction :

$$F(x,y) \,:=\, y - f(x)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^{d+1}$. On en déduit sans délai que que l'hypographe :

$$\mathscr{A}_f = \{y \geqslant 0\} \cap \{F \leqslant 0\}$$

est effectivement mesurable.

Réciproquement, supposons $\mathscr{A}_f$ mesurable. Observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$, la tranche verticale :

$$\mathscr{A}_{f,x} \,=\, \big\{y \in \mathbb{R} \colon\ (x,y) \in \mathscr{A}_f\big\}$$

est le segment fermé :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{f,x} \,&=\, [0,\, f(x)] \\ &\subset\, [0, \infty]. \end{aligned}$$

Le Corollaire 2.2 (dans lequel on échange à l'avance le rôle de x avec celui de y) montre alors la mesurabilité de la fonction :

$$x \longmapsto m\big(\mathscr{A}_{f,x}\big) = f(x),$$

et il montre aussi que :

$$\begin{aligned} m(\mathscr{A}_f) &= \int \mathbf{1}_{\mathscr{A}_f}(x,y)\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} m\big(\mathscr{A}_{f,x}\big) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x)\,dx, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait faire voir. □

Terminons ce chapitre par un résultat simple et utile.

Proposition 3.7. *Si f est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^d$, alors la fonction :*

$$\widetilde{f}(x,y) \,:=\, f(x-y)$$

est mesurable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, l'ensemble $E = \{z \in \mathbb{R}^d \colon f(z) < a\}$ est par hypothèse mesurable. Il s'agit alors de montrer que l'ensemble :

$$\begin{aligned} \widetilde{E} &:= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon\ \widetilde{f}(x,y) < a\big\} \\ &= \big\{(x,y) \colon\ x-y \in E\big\} \end{aligned}$$

est mesurable. Or nous affirmons que cela est vrai, plus généralement, pour *tout* sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Rappelons que tout ensemble mesurable E s'écrit comme différence :

$$E = G \backslash N,$$

entre un G_δ-ensemble $G \supset E$ et un ensemble $N = G\backslash E$ de mesure 0.

En effet, lorsque $E = \mathscr{O}$ est un ouvert, $\widetilde{E} = \widetilde{\mathscr{O}}$ est aussi ouvert, donc mesurable. Lorsque $E = G = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$ est intersection dénombrable d'ouverts $\mathscr{O}_n$, *i.e.* est un G_δ-ensemble :

$$\widetilde{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \widetilde{O}_n$$

est aussi un G_δ-ensemble dans $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Il reste donc à établir que pour $E = N$ de mesure nulle, $\widetilde{E}$ est encore de mesure nulle, mais cela n'est pas immédiat.

Si donc $m(E) = 0$, il existe une suite d'ouverts $\mathscr{O}_n \supset E$ tels que $m(\mathscr{O}_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons les cylindres fermés dans l'espace des y :

$$C_N \,:=\, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon\ |y| \leqslant N\big\},$$

posons :

$$\begin{aligned} \widetilde{E}_N &:= \widetilde{E} \cap C_N \\ &\subset \mathscr{O}_n \cap C_N, \end{aligned}$$

et calculons en utilisant le Théorème 1.3 de Fubini :

$$\begin{aligned} m\big(\widetilde{\mathscr{O}}_n \cap C_N\big) &= \int \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x-y)\, \mathbf{1}_{C_N}(y)\, dydx \\ &= \int \bigg(\int \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x-y)\, dx \bigg) \mathbf{1}_{C_N}(y)\, dy \\ &= m(\mathscr{O}_n) \cdot m(C_N), \end{aligned}$$

la dernière ligne utilisant l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation. Pour $N \geqslant 1$ fixé, nous en déduisons que :

$$\begin{aligned} m\big(\widetilde{E}_N\big) &\leqslant m\big(\widetilde{\mathscr{O}}_n \cap C_N\big) \\ &= m(\mathscr{O}_n) \cdot m(C_N) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$m\big(\widetilde{E}_N\big) = 0,$$

et comme $\widetilde{E}_N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \widetilde{E}$ en croissant dans l'espace $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ on trouve :

$$m\big(\widetilde{E}\big) = \lim_{N\to\infty} m\big(\widetilde{E}_N\big) = 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

4. Exercices

Exercice 1. En utilisant la fonction $f \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie par :

$$f(x,y) := y\, e^{-y^2(1+x^2)},$$

calculer :

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 2. Soit $f \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que si $\big|f(x) - f(y)\big|$ est intégrable sur $[0,1] \times [0,1]$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 3. En dimension $d = 3$, soit le *simplexe unité :*

$$\Delta := \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ x + y + z < 1\big\}.$$

Calculer :

$$\int_\Delta xyz\, \big(1 - x - y - z\big)\, dxdydz.$$

Indication: Utiliser le changement de variables :

$$x' := x + y + z, \qquad x'y' := y + z, \qquad x'y'z' := z,$$

après avoir déterminé rigoureusement des ouverts appropriés entre lesquels il établit un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Exercice 4. Soit une suite $(b_k)_{k=0}^n$ de nombres réels strictement positifs dont la série infinie converge :

$$\sum_{k=0}^\infty b_k =: s < \infty.$$

On note ses sommes partielles d'ordre un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$a_n := \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} b_k.$$

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) \,=\, \begin{cases} a_n & \text{lorsque } \ n \leqslant x < n+1, \ \ n \leqslant y < n+1, \ \ \text{avec } \ n \in \mathbb{N}, \\ -\, a_n & \text{lorsque } \ n \leqslant x < n+1, \ \ n+1 \leqslant y < n+2, \ \ \text{avec } \ n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

(a) Montrer que toutes les fonctions-tranches f^y et f_x sont intégrables, puis que :

$$\int f_x(y)\,dy \,=\, 0 \,=\, \int \bigg(\int f(x,y)\,dy \bigg)\,dx.$$

(b) Montrer que $\int f^y(x)\,dx = a_0$ pour $0 \leqslant y < 1$, et plus généralement, que :

$$\int f^y(x)\,dx \,=\, a_n - a_{n-1} \qquad\qquad (n \leqslant y < n+1;\ n \geqslant 1).$$

(c) Montrer que la fonction $y \longmapsto \int f^y(x)\,dx$ est intégrable sur $[0,\infty[$, avec :

$$\int \bigg(\int f(x,y)\,dx \bigg)\,dy \,=\, s.$$

(d) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \big|f(x,y)\big|\,dxdy \,=\, \infty.$$

Exercice 5. Soit f une fonction réelle mesurable à valeurs finies sur $[0,1]$. Montrer que si $|f(x) - f(y)|$ est intégrable sur $[0,1] \times [0,1]$, alors f est intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 6. Soit une fonction intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour tout $\alpha > 0$, on introduit :

$$E_\alpha \,:=\, \big\{ x \in \mathbb{R}^d\colon\ |f(x)| > \alpha \big\}.$$

Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\,dx \,=\, \int_0^\infty m\big(E_\alpha\big)\,d\alpha.$$

Exercice 7. Dans la démonstration du Théorème de Fubini, on a signalé le problème que certaines tranches d'ensembles mesurables peuvent n'être parfois pas mesurables. Ce problème peut être contourné en restreignant l'attention aux sous-ensembles boréliens.

Montrer en effet que si $E \subset \mathbb{R}^2_{x,y}$ est un borélien, alors pour tout $y \in \mathbb{R}$, la tranche E^y est un borélien de $\mathbb{R}_x$.

Indication: Introduire la collection $\mathscr{C}$ des sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^2$ ayant la propriété que *toute* tranche E^y est un borélien de $\mathbb{R}_x$, et vérifier que $\mathscr{C}$ est une σ-algèbre qui contient les ouverts.

Exercice 8. Une suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}^d$ est dite *de Cauchy en mesure* lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{k,\ell\to\infty} m\Big(\big\{ x \in \mathbb{R}^d\colon\ \big|f_k(x) - f_\ell(x)\big| \geqslant \varepsilon \big\} \Big).$$

Elle est dite *converger en mesure* vers une fonction mesurable f lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{k\to\infty} m\Big(\big\{ x \in \mathbb{R}^d\colon\ \big|f_k(x) - f(x)\big| \geqslant \varepsilon \big\} \Big).$$

Cette notion coïncide avec celle qu'en Théorie des probabilités, on appelle *convergence en probabilité*.

(a) Montrer que si une suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions intégrables converge en norme L^1 vers une certaine fonction intégrable f, alors $(f_k)_{k=1}^\infty$ converge aussi en mesure vers f.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

(c) Relier la convergence en mesure au Théorème d'Egorov.

Exercice 9. Il a déjà été vu dans un exercice qui précède que si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, et si $L\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est une transformation linéaire, alors $L(E)$ est aussi mesurable, avec $m\big(L(E)\big) = 0$ lorsque $m(E) = 0$.

L'objectif présent est d'obtenir la formule quantitative précise :

$$m\big(L(E)\big) \,=\, \big|\mathsf{det}(L)\big|\, m(E).$$

Cas spécial important : la mesure de Lebesgue est invariante par rotations, *i.e.* $m\big(L(E)\big) = m(E)$ lorsque $L \in \mathsf{O}_n(\mathbb{R})$, *i.e.* lorsque $L\,{}^tL = \mathsf{Id}$. On se propose de démontrer cela en utilisant le Théorème de Fubini.

(a) En dimension $d = 2$, soit L une transformation triangulaire supérieure stricte de la forme $x' = x + ay$, $y' = y$. Vérifier que :

$$\mathbf{1}_{L(E)}(x,y) \,=\, \mathbf{1}_E\big(L^{-1}(x,y)\big) \,=\, \mathbf{1}_E\big(x - ay,\, y\big).$$

(b) En utilisant *seulement* l'invariance de la mesure de Lebesgue par translations, montrer que :

$$m\big(L(E)\big) = m(E).$$

(c) Montrer aussi que $m\big(L(E)\big) = m(E)$ lorsque L est triangulaire supérieure stricte.

(d) Montrer généralement que $m\big(L(E)\big) \,=\, \big|\mathsf{det}(L)\big|\, m(E)$.

Indication: Écrire $L = L_1 D L_2$, où L_1 et L_2 sont triangulaires supérieure et inférieure strictes, et où D est diagonale.

(e) Traiter la dimension $d \geqslant 2$ quelconque.

Exercice 10. L'*Hypothèse du Continu* demande que tout sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}$ soit ou bien de cardinal égal à celui de $\mathbb{Z}$, *i.e.* soit dénombrable, ou bien soit de cardinal égal à celui de $\mathbb{R}$: *aucun cardinal intermédiaire n'existe*. D'après Gödel 1938, cette hypothèse est compatible avec les axiomes de Zermelo-Fraenkel de la Théorie des ensembles, et d'après Cohen 1963, la négation de cette hypothèse est *tout aussi* compatible avec la théorie des ensembles. Nous sommes donc libres d'accepter l'hypothèse du continu comme axiome supplémentaire.

Un ensemble E est dit *totalement ordonné* s'il est muni d'une relation binaire $(\cdot) \leqslant (\cdot)$ satisfaisant :

- $x \leqslant x$ pour tout $x \in E$;
- deux éléments quelconques *distincts* $x, y \in E$ sont toujours comparables : ou bien $x \leqslant y$ ou bien $y \leqslant x$, ces deux relations n'étant alors pas satisfaites simultanément ;
- si $x \leqslant y$ et si $y \leqslant z$, alors $x \leqslant z$.

On dit qu'un ensemble E peut être *bien ordonné* s'il peut être muni d'un ordre total ayant la propriété que *tout* sous-ensemble $A \subset E$ possède un (unique) *élément minimal*, à savoir un élément $a_* \in A$ tel que $a_* \leqslant a$ pour tout autre $a \in A \backslash \{a_*\}$.

On admet ici le théorème que *tout ensemble E peut être muni d'un bon ordre*.

(a) Montrer qu'il existe un ordre (hautement paradoxal) $\prec$ sur $\mathbb{R}$ ayant la propriété que pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in \mathbb{R}\colon\; x \prec y\big\},$$

est de cardinal au plus dénombrable.

Indication: Choisir un bon ordre $\prec$ sur $\mathbb{R}$, et introduire :

$$X \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}\colon\; \text{l'ensemble}\, \{y \in \mathbb{R}\colon\, y \prec x\}\, \text{n'est pas dénombrable}\big\}.$$

Si $X = \emptyset$, rien n'est à faire. Sinon, considérer l'élément minimal $x_* \in X$, et utiliser l'hypothèse du continu.

(b) Étant donné un tel ordre, on considère l'ensemble :

$$E \;:=\; \big\{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\colon\; x \prec y\big\}.$$

Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, la y-tranche E^y est de mesure $m(E^y) = 0$, tandis que $m(E_x) = 1$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c) Interpréter ce résultat.

Changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Motivation et énoncé du théorème

En dimension 1, à savoir sur la droite numérique $\mathbb{R}$, la formule de changement de variable dans une intégrale riemannienne s'exprime le plus souvent dans une circonstance différentiable bijective.

Théorème 1.1. *Soit un intervalle $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application $\mathscr{C}^1$ avec $\varphi'(x) > 0$ pour tout $x \in [a,b]$, d'où le difféomorphisme :*

$$\varphi\big([a,b]\big) \,=\, \big[\varphi(a),\, \varphi(b)\big],$$

avec $-\infty < \varphi(a) < \varphi(b) < \infty$. Alors pour toute fonction Riemann-intégrable $f\colon [\varphi(a), \varphi(b)] \longrightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$ est aussi Riemann-intégrable et :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\, dt \,=\, \int_a^b f\big(\varphi(x)\big)\, \varphi'(x)\, dx.$$

Lorsque $\varphi' < 0$, cette formule est tout aussi satisfaite. □

En prenant $f \equiv 1$, on retrouve la formule fondatrice du calcul intégral :

$$\varphi(b) - \varphi(a) \,=\, \int_a^b \varphi'(x)\, dx.$$

Question 1.2. *Comment généraliser cette formule à $\mathbb{R}^d$ en dimension quelconque $d \geqslant 1$, dans le cadre de la théorie de l'intégration de Borel et Lebesgue ?*

Soit donc $d \geqslant 1$, soient deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$, et soit :

$$\varphi\colon \quad U \xrightarrow{\sim} V$$

un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. Si $x = (x_1, \dots, x_d)$ sont les coordonnées canoniques sur l'espace-source $\mathbb{R}^d \supset U$, et si $y = (y_1, \dots, y_d)$ sont les coordonnées sur l'espace-but $\mathbb{R}^d \supset V$, un tel difféomorphisme s'écrit :

$$y_1 \,=\, \varphi_1(x_1, \dots, x_d), \;\; \dots\dots\dots, \;\; y_d \,=\, \varphi_d(x_1, \dots, x_d),$$

où les fonctions $\varphi_1, \dots, \varphi_d \colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, et le fait que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$ est un difféomorphisme s'exprime alors par l'hypothèse que φ est bijectif ainsi que par la non-annulation de son *déterminant jacobien :*

$$\mathsf{Jac}\,\varphi(x) := \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d} \end{vmatrix} (x),$$

en tout point $x \in U$.

Le Théorème d'inversion locale montre que l'inverse $\varphi^{-1} \colon V \xrightarrow{\sim} U$ est aussi un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$. L'énoncé principal de ce chapitre, qui requérera une démonstration longue et endurante, révèle comment changer les variables dans les intégrables en dimension $d \geqslant 1$.

Théorème 1.3. [Changement de variables] *Soit $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$. Alors pour toute fonction mesurable $f \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$:*

$$U \overset{\varphi}{\xrightarrow{\sim}} V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f est de plus Lebesgue-intégrable, $f \circ \varphi$ est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f \circ \varphi(x)\, \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx.$$

La présence d'une valeur absolue dans cette formule de changement de variables en dimension quelconque $d \geqslant 1$ provient du fait que les mesures de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_d$ sur le $\mathbb{R}^d$-source et $dy = dy_1 \cdots dy_d$ sur le $\mathbb{R}^d$-but ont été *ab initio* définies comme positives (à la physicienne), contrairement au dx riemannien sur $\mathbb{R}$ en dimension 1, lequel possède un signe ; d'ailleurs, même en dimension $d = 1$, la théorie de Lebesgue requiert une valeur absolue :

$$\int_J f = \int_I f \circ \varphi \cdot |\varphi'|,$$

puisque si la fonction $\varphi \in \mathscr{C}^1$ du Théorème 1.1 a une dérivée négative $\varphi' < 0$, donc décroît, si $I := [a, b]$, si $J := [\varphi(b), \varphi(a)]$ — noter l'inversion —, il faut effectivement voir en théorie de Lebesgue à travers le miroir de la théorie de Riemann que l'on est forcé d'insérer une valeur absolue :

$$\begin{aligned} \int_J f &= \int_{\varphi(b)}^{\varphi(a)} f(t)\,dt \\ &= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,dt \\ \text{[Théorème 1.1]} \qquad &= \int_a^b f \circ \varphi(x) \big[-\varphi'(x) \big]\, dx \\ &= \int_I f \circ \varphi \cdot |\varphi'|. \end{aligned}$$

Pour pouvoir parler de *mesures de Lebesgue orientées* $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d$ qui généraliseraient le dx riemannien orienté sur $\mathbb{R}$ il faudrait entrer dans la théorie des formes différentielles extérieures, ce que nous ne pourrons pas faire dans ce cours.

La formule de changement de variables peut être appliquée de manière « mécanique » en différentiant :

$$y = \varphi(x) \implies dy = \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

puis en remplaçant :

$$\int_{\varphi(U)} f(y)\,dy = \int_U f\big(\varphi(x)\big)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

D'ailleurs, en remplaçant à nouveau $x = \varphi^{-1}(y)$, une ré-application du même théorème au difféomorphisme inverse φ^{-1} montre comment on se déplace dans l'autre sens :

$$\begin{aligned}\int_U f \circ \varphi(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx &= \int_V f \circ \underbrace{\varphi \circ \varphi^{-1}}_{=\,\mathsf{Id}}(y)\;\underbrace{\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi^{-1}(y)\big|}_{\mathsf{Jac}\,(\varphi\circ\varphi^{-1})\,=\,1}\,dy\\ &= \int_V f(y)\,dy,\end{aligned}$$

pour revenir 'bêtement' au même endroit.

Terminons cette présentation en mentionnant que dans les applications concrètes, la recherche de bons difféomorphismes φ constitue parfois un problème mathématique en soi.

2. Transferts de mesurabilité

La toute première chose à faire est de s'assurer que les difféomorphismes $\mathscr{C}^1$ respectent la mesurabilité. La proposition suivante, appliquée à tout sous-ensemble mesurable $C \subset \mathbb{C}$, d'où $F := f^{-1}(C)$ est mesurable, va alors garantir que $f \circ \varphi$ est mesurable.

Proposition 2.1. *Si $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V$ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$ entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$, alors pour tout sous-ensemble $F \subset V$:*

$$\varphi^{-1}(F) \text{ mesurable} \impliedby F \text{ mesurable}.$$

Démonstration. Comme φ est un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$, il revient au même d'établir que pour tout sous-ensemble $E \subset U$:

$$E \text{ mesurable} \implies \varphi(E) \text{ mesurable}.$$

Rappelons qu'un ensemble $E \subset U$ est mesurable si et seulement si il s'écrit $E = G \backslash N$ avec $G = \cap_{n \geqslant 1} \mathscr{O}_n$ intersection dénombrable d'ouverts $\mathscr{O}_n \subset U$, et avec N de mesure $m(N) = 0$. L'image de E par φ est alors :

$$\begin{aligned}\varphi(E) &= \varphi\big(G \backslash N\big)\\ &= \varphi(G)\big\backslash\varphi(N)\\ &= \varphi\bigg(\bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{O}_n\bigg)\bigg\backslash\varphi(N).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Lemme 2.3. *Pour tout sous-ensemble $N \subset U$:*

$$m(N) = 0 \implies m\big(\varphi(N)\big) = 0.$$

Démonstration. On peut supposer $U \neq \emptyset$ et, quitte à effectuer une translation, que $0 \in U$.

Si $|x| = \max_{1 \leqslant i \leqslant d} |x_i|$ est la norme du supremum sur $\mathbb{R}^d$, la distance 'dist' sera calculée par rapport à cette norme.

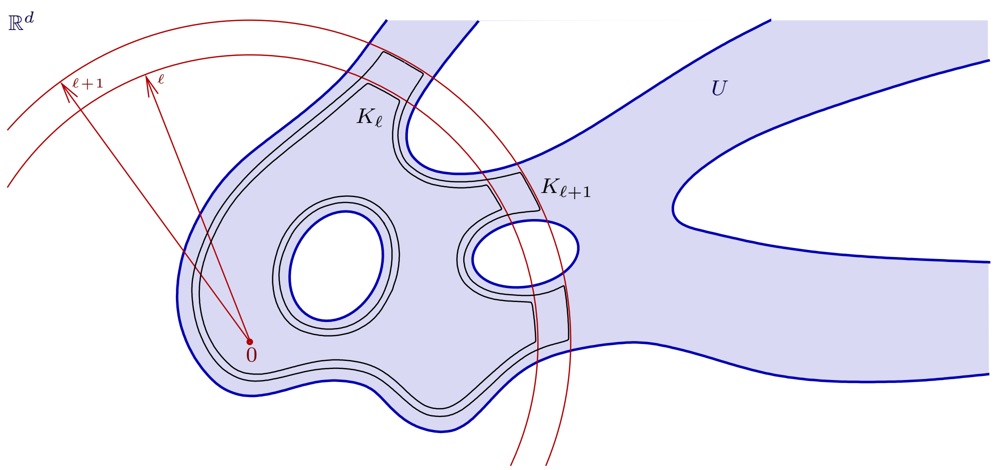
Pour tout $\ell \geqslant 1$, introduisons alors le sous-ensemble suivant $K_\ell \subset U$ qui intersecte tout avec la boule fermée $\{|x| \leqslant \ell\}$ pour demeurer dans un compact, et qui reste à distance $\frac{1}{\ell}$ du complémentaire de U pour ne pas toucher le bord ∂U :

$$K_\ell := \big\{x \in U \colon |x| \leqslant \ell, \ \mathsf{dist}\big(x, \mathbb{R}^d \backslash U\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

Souvenons-nous en passant que pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$ et tout $x \in U$:

$$\mathsf{dist}\big(x, \mathbb{R}^d \backslash U\big) = \mathsf{dist}\big(x, \partial U\big),$$

et si nous n'en avons pas une réminiscence platonicienne, reportons-nous à l'Exercice 1 pour comprendre cela, tout en contemplant les Idées qui se dégagent de la figure.



L'Exercice 2 montre que ces K_ℓ sont compacts, qu'ils sont proprement emboîtés :

$$K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1} \qquad (\forall\, \ell \geqslant 1),$$

et que leur réunion (croissante !) remplit :

$$U = \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell.$$

Terminologie 2.4. On dit que la famille $(K_\ell)_{\ell=1}^\infty$ forme une *exhaustion* de U par des compacts.

Comme toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure 0 est encore de mesure 0, eu égard à :

$$\begin{aligned}\varphi(N) &= \varphi(N \cap U) \\ &= \varphi\Big(N \bigcap_{\ell \geqslant 1} K_\ell\Big) \\ &= \bigcap_{\ell \geqslant 1} \varphi\big(N \cap K_\ell\big),\end{aligned}$$

il suffit de montrer que :

$$m\big(\varphi(N \cap K_\ell)\big) = 0 \qquad (\forall\, \ell \geqslant 1).$$

Fixons donc maintenant un $\ell \geqslant 1$ quelconque.

Puisque $m(N) = 0$, on a aussi $m(N \cap K_\ell) = 0$, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable de cubes fermés $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ recouvrant :

$$N \cap K_\ell \ \subset\ \bigcup_{n\geqslant 1} Q_n,$$

de mesure totale petite :

$$\sum_{n\geqslant 1} \big|Q_n\big| \ \leqslant\ \varepsilon.$$

Chaque Q_n est centré en un certain point $x_n \in \mathbb{R}^d$:

$$Q_n \ =\ \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x - x_n| \leqslant a_n\big\} \qquad\qquad (a_n \geqslant 0),$$

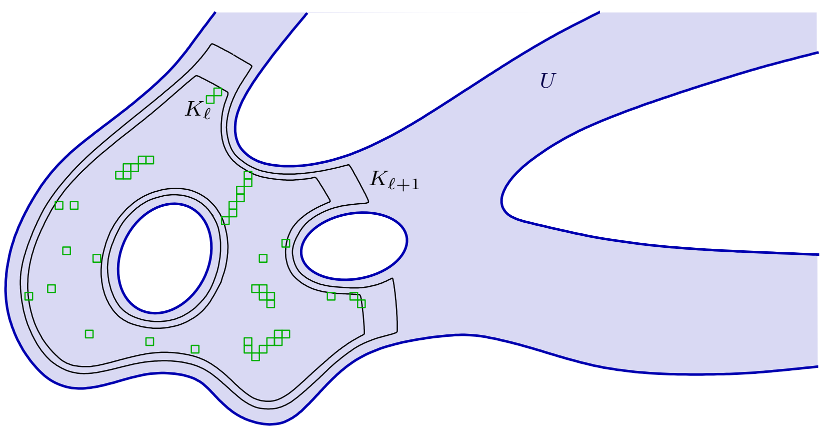
et l'on a donc :

$$\sum_{n\geqslant 1} (2\,a_n)^d \ \leqslant\ \varepsilon.$$

Si nécessaire, subdivisons certains des Q_n — en nombre fini — dont les demi-arêtes a_n sont trop grandes de manière à ce que ces dernières soient toutes :

$$0 \ \leqslant\ a_n \ \leqslant\ \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, j \geqslant 1),$$

et supprimons tous les cubes Q_n qui n'intersectent pas $N \cap K_\ell$, ce qui est naturel. Notons encore Q_n ces cubes.



Si nous réduisons au besoin à l'avance :

$$\varepsilon \ \leqslant\ \tfrac{1}{3}\,\mathsf{dist}\,\big(K_\ell,\, U\backslash K_{\ell+1}\big),$$

alors une manipulation de l'inégalité triangulaire convainc (exercice) que pour tout $j \geqslant 1$:

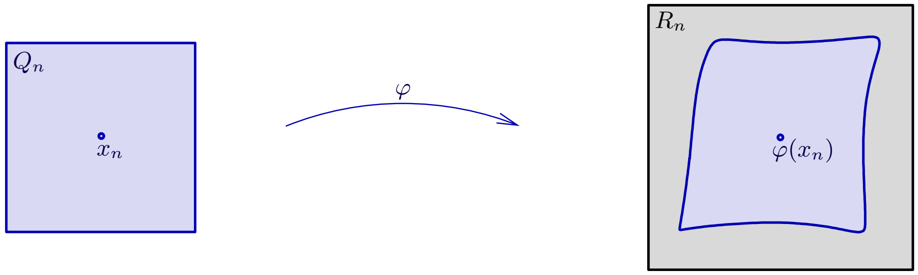
$$\emptyset \neq Q_n \cap K_\ell \ \ \Longrightarrow\ \ Q_n \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}.$$

Par conséquent, le Lemme 5.1 appliqué à l'ouvert $U := \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$ montre qu'avec la constante finie commune à tous les cubes Q_n :

$$C_{\ell+1} \ :=\ d\ \max_{1\leqslant i\leqslant d}\ \max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \max_{x\in K_{\ell+1}} \left|\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x)\right| \ <\ \infty,$$

on a l'inégalité localisée d'accroissements finis :

$$\forall\, j \ \geqslant\ 1 \quad \forall\, x',\, x'' \ \in\ Q_n \qquad \big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \ \leqslant\ C_{\ell+1}\,|x'' - x'|.$$



Si donc nous introduisons pour tout $j \geqslant 1$ les cubes dans l'espace-image d'arêtes dilatées par ce facteur de lipschitzianité :

$$R_n := \big\{y \in \mathbb{R}^d \colon\ |y - \varphi(x_n)| \leqslant C_{\ell+1}\, a_n\big\},$$

il vient (exercice simple) :

$$\varphi(Q_n) \subset R_n,$$

puisque (solution simple) pour tout $x \in Q_n$:

$$\begin{aligned}\big|\varphi(x) - \varphi(x_n)\big| &\leqslant C_{\ell+1}\, |x - x_n| \\ &\leqslant C_{\ell+1}\, a_n.\end{aligned}$$

Observons alors que :

$$m(R_n) = \big(C_{\ell+1}\, a_n\big)^d.$$

Grâce à toutes ces lunettes optiques que nos préparatifs minutieux ont bien voulu faire luire à nos pupilles, nous pouvons enfin voir que :

$$\begin{aligned}\varphi\big(N \cap K_\ell\big) &\subset \varphi\big(\bigcup_{n\geqslant 1} Q_n\big) \\ &= \bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n) \\ &\subset \bigcup_{n\geqslant 1} R_n,\end{aligned}$$

est recouvert par une réunion dénombrable de cubes fermés de mesure totale :

$$\begin{aligned}m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} R_n\Big) &\leqslant \sum_{n\geqslant 1} m(R_n) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \big(C_{\ell+1}\, a_n\big)^d \\ &= C_{\ell+1}^d \sum_{n\geqslant 1} \big(2\, a_n\big)^d \\ &= C_{\ell+1}^d\, \varepsilon,\end{aligned}$$

manifestement arbitrairement petite, ce qui établit la nullité de sa mesure. □

Comme φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme, donc en particulier un homéomorphisme, tous les ensembles $\varphi(\mathscr{O}_n)$ sont ouverts, et par conséquent $\varphi(E)$ vient d'être représenté dans (2.2) sous une forme qui montre qu'il est mesurable. □

Un énoncé plus général que le Lemme 2.3, qui sera utile ultérieurement, découle en fait de la méthode de démonstration, et il est valable sans hypothèse de difféomorphie.

Proposition 2.5. *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert et soit $\varphi \colon U \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Alors pour tout sous-ensemble compact $K \subset U$, il existe une constante :*

$$C = C_{\varphi,K} \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant C < \infty,$$

telle que pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset K$, on a l'inégalité entre mesures extérieures :

$$m^*\big(\varphi(E)\big) \leqslant C \cdot m^*(E).$$

Démonstration. Rappelons que pour tout entier $\ell \geqslant 1$, nous pouvons introduire les sous-ensembles de U :

$$\begin{aligned}\mathscr{O}_\ell &:= \big\{x \in U \colon |x| < \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) > \tfrac{1}{\ell}\big\},\\ K_\ell &:= \big\{x \in U \colon |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\},\end{aligned}$$

ouverts et fermés qui satisfont :

$$\overline{\mathscr{O}}_\ell = K_\ell \qquad \text{et} \qquad \mathsf{Int}\, K_\ell = \mathscr{O}_\ell.$$

Puisque $K \subset U$ est compact, *i.e.* $K \cap \partial U = \emptyset$, il existe un entier $\ell \gg 1$ assez grand pour que :

$$E \subset K \subset K_\ell \subset K_{\ell+1}.$$

Par définition de la mesure extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable $(Q_n)_{n=1}^\infty$ de cubes fermés recouvrant :

$$E \subset \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n,$$

tels que :

$$m^*(E) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n) \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Comme dans la démonstration du Lemme 2.3, on peut supposer après subdivisions et nettoyage qu'ils sont tous d'arêtes assez petites pour être contenus dans $K_{\ell+1}$.

Posons :

$$C_{\ell+1} := d \max_{1 \leqslant i \leqslant d} \max_{1 \leqslant j \leqslant d} \max_{x \in K_{\ell+1}} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) \right| < \infty.$$

Comme :

$$\varphi(E) \subset \bigcup_{n \geqslant 1} \varphi(Q_n) \subset \bigcup_{n \geqslant 1} R_n,$$

avec les mêmes cubes R_n que dans la démonstration du Lemme 2.3, et comme les volumes de ces derniers valent :

$$m(R_n) = C_{\ell+1}^d\, m(Q_n),$$

on voit que :

$$\begin{aligned}m^*\big(\varphi(E)\big) &\leqslant C_{\ell+1}^d \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n)\\ &\leqslant C_{\ell+1}^d \big(m^*(E) + \varepsilon\big),\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$ avec la constante finie $C_{\varphi,K} := C_{\ell+1}^d$. □

Soit maintenant $L\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une application linéaire vue en coordonnées cartésiennes :

$$L(x_1, \dots, x_d) = \bigg(\sum_{j=1}^{d} L_{1,j}\, x_j,\, \dots\dots,\, \sum_{j=1}^{d} L_{d,j}\, x_j\bigg),$$

à coefficients réels $L_{i,j} \in \mathbb{R}$. On définit la *norme* de L par (noter le facteur d) :

$$\|L\| := d \max_{1\leqslant i\leqslant d} \max_{1\leqslant j\leqslant d} |L_{i,j}|,$$

de telle sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ on ait (exercice) :

$$\big|L(x)\big| \leqslant \|L\| \cdot |x|.$$

Corollaire 2.6. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble quelconque :*

$$m^*\big(L(E)\big) \leqslant \big(\|L\|\big)^d\, m^*(E).$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une collection dénombrable de cubes fermés Q_n recouvrant $E \subset \cup_{n=1}^{\infty} Q_n$ tels que :

$$m^*(E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \leqslant m^*(E) + \varepsilon.$$

Si $Q_n = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |x - x_n| \leqslant a_n\}$, où x_n est le centre et $a_n \geqslant 0$ la demi-arête, la même estimation que dans le Lemme 2.3 avec $\varphi(x) := L(x)$ en tenant compte de :

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}(x) = \frac{\partial L_i}{\partial x_j}(x) = L_{i,j},$$

montre que l'image par L de chaque Q_n :

$$L(Q_n) \subset R_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

est contenue dans le cube fermé :

$$R_n := \big\{y \in \mathbb{R}^d\colon\ |y - L(x_n)| \leqslant \|L\| \cdot a_n\big\}.$$

Ainsi, $L(E)$ est recouvert par la réunion dénombrable de ces cubes R_n dont la mesure totale vaut :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} |R_n| &= \sum_{n=1}^{\infty} \big(\|L\| \cdot a_n\big)^d \\ &= \big(\|L\|\big)^d \sum_{n=1}^{\infty} |Q_n| \\ &\leqslant \big(\|L\|\big)^d \big[m^*(E) + \varepsilon\big],\end{aligned}$$

et ceci démontre bien (exercice mental) l'inégalité annoncée. □

Lemme 2.7. *Pour tout sous-espace affine strict $H \subset \mathbb{R}^d$ de dimension* $\dim H \leqslant d - 1$*, et pour tout sous-ensemble quelconque $E \subset H$:*

$$m(E) = m(H) = 0.$$

Démonstration. Il suffit de faire voir que $m(H) = 0$. En s'autorisant l'utilisation du théorème de Fubini, un argument assez direct basé sur une induction dimensionnelle existe (exercice).

Pour répondre à une exigence de n'employer que des moyens élémentaires, une démonstration alternative qui utilise un recouvrement de H par des cubes dont la taille décroît assez vite à l'infini montre (exercice) que $m^*(H) = 0$. □

Un dernier préliminaire mérite attention.

Proposition 2.8. *Si une transformation affine inversible $\mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ s'écrit $x \longmapsto v + L(x)$ avec un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ et avec une application linéaire* inversible *L, alors pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$:*

$$m\big(v + L(E)\big) \,=\, \big|\mathsf{det}\, L\big| \cdot m(E).$$

En particulier, $m(E) < \infty$ si et seulement si $m(v + L(E)) < \infty$.

Démonstration. Rappelons que $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable avec $m(E) < \infty$ lorsque et seulement lorsque, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ de cubes fermés $Q_n \subset \mathbb{R}^d$ tels que la différence symétrique entre E et la réunion des Q_n est petite en mesure :

$$m\Big(E \,\Delta \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} Q_n\Big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Le Corollaire 2.6 garantit alors que la mesure — égale à la mesure extérieure sur les ensembles mesurables ! — de l'image par L de cette différence symétrique demeure également négligeable :

$$m\Big(L\Big(E \,\Delta \bigcup_{1 \leqslant n \leqslant \mathrm{N}} Q_n\Big)\Big) \,\leqslant\, \|L\|^d\, \varepsilon.$$

Grâce à cette observation, on se convainc en jouant avec des ε (exercice) qu'il suffit d'établir la proposition dans le cas où $E = Q$ est un cube fermé borné d'intérieur non vide.

Qui plus est, comme la mesure de Lebesgue est invariante par translation, et comme elle satisfait pour toute homothétie (dilatation ou contraction) de rapport $\lambda > 0$:

$$m\big(\lambda\, E\big) \,=\, \lambda^d\, m(E),$$

il suffit même de démontrer la proposition dans le cas modèle où $E = Q = [0,1]^d$ est le cube unité.

Nous admettrons le résultat d'algèbre linéaire suivant, dont une démonstration est proposée en Exercice 4.

Lemme 2.9. *Toute matrice inversible $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ peut être représentée comme un produit fini :*

$$L \,=\, L_1 \cdots L_{\mathrm{K}},$$

de matrices $L_\bullet$ qui sont chacune de l'un des trois types suivants.

□ *Matrice associée à une* permutation *$\sigma \colon \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{1, \dots, d\}$:*

$$L_\bullet \,=\, P_\sigma \,=\, \begin{array}{c} \quad j \\ \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \\ \dots & 1 & \dots \\ \mathbf{0} & \vdots & \mathbf{0} \end{pmatrix} \end{array} \longleftarrow i = \sigma(j),$$

le 1 de la j-ème colonne pour $j = 1, \dots, d$ se trouvant à la $i = \sigma(j)$-ème ligne, tous les autres éléments valant 0.

□ *Matrice diagonale associée à un unique nombre réel non nul $\lambda \in \mathbb{R}^*$:*

$$L_\bullet = D_i^\lambda := \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \lambda & & & \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow i,$$

λ se trouvant à la i-ème ligne.

□ *Matrice spéciale :*

$$L_\bullet = U := \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Grâce à la multiplicativité du déterminant :

$$m\big(L_1 \cdots L_{\text{K}}(E)\big) \overset{?}{=} \big|\mathsf{det}\, L_1 \cdots L_{\text{K}}\big| \cdot m(E) = \big|\mathsf{det}\, L_1\big| \cdots \big|\mathsf{det}\, L_{\text{K}}\big| \cdot m(E),$$

nous sommes donc simplement ramenés à vérifier sur $E = [0,1]^d$ que pour toute matrice $L_\bullet$ de l'un de ces trois types :

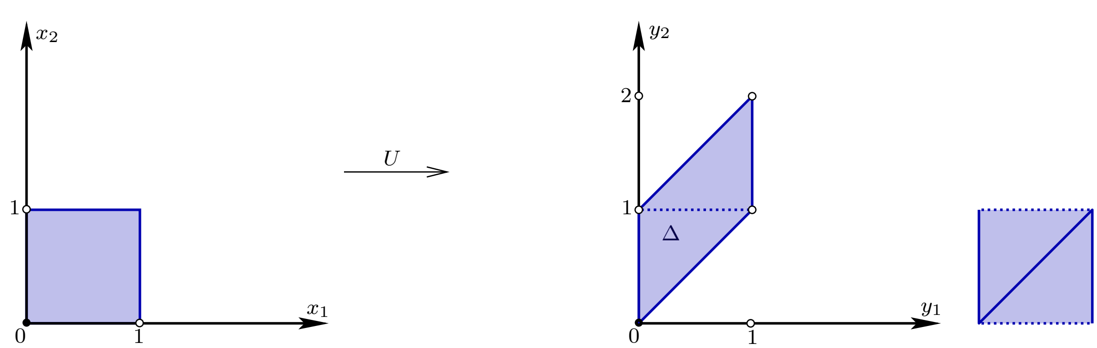
$$m\big(L_\bullet([0,1]^d)\big) = \big|\mathsf{det}\, L_\bullet\big| \cdot \underbrace{m([0,1]^d)}_{=1\,!}.$$

□ Toute matrice de permutation P_σ laisse invariant le cube unité, et donc on a bien :

$$m\big(P_\sigma([0,1]^d)\big) = m([0,1]^d) = 1 = \big|\mathsf{det}\, P_\sigma\big| = \big|\mathsf{det}\, P_\sigma\big| \cdot m([0,1]^d).$$

□ Toute matrice D_i^λ dilate (ou contracte) le i-ème axe de coordonnées du facteur $\lambda \in \mathbb{R}^*$, donc on a bien :

$$m\big(D_i^\lambda([0,1]^d)\big) = 1^{i-1}\,|\lambda|\,1^{d-i} = |\lambda| = \big|\mathsf{det}\, D_i^\lambda\big| \cdot m([0,1]^d).$$



$\square$ La matrice spéciale U agit essentiellement en dimension 2 comme :

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1, \\ y_2 &= x_1 + x_2, \end{aligned}$$

donc elle transforme le cube unité en un produit :

$$U\big([0,1]^2 \times [0,1]^{d-2}\big) = \Delta \times [0,1]^{d-2},$$

du cube unité dans $\mathbb{R}^{d-2}$ (qui est invariant par U) avec le triangle :

$$\Delta := \big\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqslant y_1 \leqslant 1,\ 0 \leqslant y_1 \leqslant y_2 \leqslant 2\big\},$$

lequel est de mesure égale à 1 dans $\mathbb{R}^2$ par un argument de géométrie du carrelage, et donc on a bien :

$$m\big(U([0,1]^d)\big) = m(\Delta) \cdot 1^{d-2} = 1 \cdot 1^{d-2} = 1 = \big|\mathsf{det}\, U\big| \cdot m([0,1]^d),$$

ce qui conclut les vérifications. $\square$

3. Démonstration du théorème

Démonstration du Théorème 1.3. Soit donc $\varphi \colon U \xrightarrow{\sim} V = \varphi(U)$ un difféomorphisme $\mathscr{C}^1$, et soit $f \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction mesurable Lebesgue-intégrable. Nous savons déjà via la Proposition 2.1 que $f \circ \varphi$ est mesurable.

En un point $x_0 \in U$, pour tout nombre réel :

$$0 \leqslant a < \mathsf{dist}\big(x_0, \mathbb{R}^d \backslash U\big),$$

soit le cube fermé de centre x_0 et de demi-arête a :

$$Q_a(x_0) = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x - x_0| \leqslant a\big\} \subset U,$$

qui est contenu dans l'ouvert. Puisque l'application tangente à φ au point central x_0 de ce cube (qui approxime φ à l'ordre 1 dans un voisinage de x_0) est linéaire :

$$T_{x_0}\varphi \colon \quad (x_1, \dots, x_d) \longmapsto \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_d}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial \varphi_d}{\partial x_d}(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix},$$

la Proposition 2.8 montre, pour tout cube Q, que :

$$\begin{aligned} m\big(T_{x_0}\varphi(Q)\big) &= \big|\mathsf{det}\, T_{x_0}\varphi\big| \cdot m(Q) \\ &= \big|\mathsf{Jac}\, \varphi(x_0)\big| \cdot m(Q). \end{aligned}$$

Lorsqu'un tel cube Q est assez petit et est centré en x_0, son image $\varphi(Q)$ aura une mesure qui sera assez bien approximée par celle de $T_{x_0}\varphi(Q)$, comme l'énonce le lemme suivant. Il requiert hypothèse importante de restreindre les considérations à un sous-ensemble de points x_0 qui restent à une certaine distance de sécurité du complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash U$.

Proposition 3.1. [Approximation linéaire] *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $\mathscr{O} \subset U$ un sous-ouvert relativement compact,* i.e. *dont l'adhérence $\overline{\mathscr{O}}$ dans $\mathbb{R}^d$ reste dans l'ouvert :*

$$\overline{\mathscr{O}} \subset U.$$

Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta \quad \forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$$

le cube fermé :

$$Q \,:=\, Q_a(x_0) \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, |x - x_0| \leqslant a\big\}$$

satisfait :

$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big| \cdot m(Q) \,\leqslant\, m\big(\varphi(Q)\big) \,\leqslant\, (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big| \cdot m(Q).$$

Démonstration. Implicitement, donc, le $\delta > 0$ dont ce lemme affirme l'existence devra au moins satisfaire :

$$0 \,<\, \delta \,\leqslant\, \mathsf{dist}\big(\overline{\mathscr{O}},\, \mathbb{R}^d\backslash U\big),$$

afin d'assurer que tous les cubes considérés demeurent contenus dans l'ouvert :

$$Q_a(x_0) \,\subset\, U \qquad\qquad (\forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}},\, \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta).$$

L'énoncé suivant — un classique du cours de Calcul Différentiel — dit que φ est bien approximée par son développement de Taylor à l'ordre 1.

Lemme 3.2. *Soit comme précédemment $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert et soit un sous-ouvert $\mathscr{O} \subset U$ avec $\overline{\mathscr{O}} \subset U$. Alors :*

$$\forall\, \varepsilon' \,>\, 0 \quad \exists\, \delta \,>\, 0 \quad \forall\, 0 \leqslant a \leqslant \delta \quad \forall\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}} \quad \forall\, x \,\in\, Q_a(x_0)$$

on a :

$$\big|\varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x - x_0)\big| \,\leqslant\, \varepsilon'|x - x_0|.$$

Démonstration. Choisissons :

$$0 \,<\, \delta \,<\, \mathsf{dist}\,\big(\overline{\mathscr{O}},\, \mathbb{R}^d\backslash U\big),$$

que nous rapetisserons ultérieurement encore, regardons l'ensemble fermé borné, donc compact :

$$K_\delta \,:=\, \big\{(x_0, x) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \colon\, x_0 \in \overline{\mathscr{O}},\, |x - x_0| \leqslant \delta\big\},$$

et introduisons l'application :

$$\Psi_{x_0}(x) \,:=\, \varphi(x) - \varphi(x_0) - T_{x_0}\varphi(x - x_0),$$

définie pour $x_0 \in \overline{\mathscr{O}}$ et pour $|x - x_0| \leqslant \delta$. Visiblement :

$$\Psi_{x_0}(x_0) \,=\, 0.$$

Pour x_0 fixé, puisque cette application $x \longmapsto \Psi_{x_0}(x)$ est $\mathscr{C}^1$, nous pouvons prendre sa différentielle :

$$T_x\Psi_{x_0} \,=\, T_x\varphi - T_{x_0}\varphi,$$

à savoir plus précisément :

$$\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x) \,=\, \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) \qquad\qquad (1 \leqslant i, j \leqslant d).$$

Visiblement aussi :

$$\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x_0) \,=\, 0 \qquad\qquad (1 \leqslant i, j \leqslant d).$$

Or ces $d \times d$ dérivées partielles sont continues sur le compact K_δ définit plus haut, donc uniformément continues grâce au théorème de Heine-Borel :

$$\forall\, \tfrac{\varepsilon'}{d} \,>\, 0 \quad \exists\, \delta \,>\, 0 \quad \Big(x_0 \in \overline{\mathscr{O}} \quad |x - x_0| \leqslant \delta \quad \Longrightarrow \quad \bigg|\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x) - \underline{\frac{\partial \Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x_0)}\bigg| \,\leqslant\, \frac{\varepsilon'}{d} \quad \forall\, i, j\Big),$$

c'est-à-dire :

$$\max_{1\leqslant i\leqslant d}\ \max_{1\leqslant j\leqslant d}\ \max_{x_0\in\overline{\mathscr{O}}}\ \max_{|x-x_0|\leqslant\delta}\ \left|\frac{\partial\Psi_{x_0,j}}{\partial x_i}(x)\right|\ \leqslant\ \frac{\varepsilon'}{d}.$$

Pour terminer, le Lemme 5.1, envisagé avec le paramètre continu $x_0\in\overline{\mathscr{O}}$, donne l'inégalité locale d'accroissements finis :

$$\big|\Psi_{x_0}(x)-\underline{\Psi_{x_0}(x_0)}\big|\ \leqslant\ d\,\tfrac{\varepsilon'}{d}\,|x-x_0|,$$

à savoir :

$$\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)-T_{x_0}\varphi(x-x_0)\big|\ \leqslant\ \varepsilon'\,|x-x_0|,$$

ce qui est la conclusion. □

Grâce à ce lemme, pour tout $x_0\in\overline{\mathscr{O}}$ et pour tout $|x-x_0|\leqslant a\leqslant\delta$, *i.e.* pour tout $x\in Q_a(x_0)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\big|\varphi(x)-\varphi(x_0)-T_{x_0}\varphi(x-x_0)\big| &\leqslant \varepsilon'\,|x-x_0|\\ &\leqslant \varepsilon' a.\end{aligned}$$

Posons :

$$y\ :=\ \varphi(x)-\varphi(x_0)-T_{x_0}\varphi(x-x_0),$$

d'où $|y|\leqslant\varepsilon' a$.

L'Assertion suivante provient de la continuité de $x_0\longmapsto(T_{x_0}\varphi)^{-1}$ et de connaissances acquises en cours de Calcul Différentiel.

Assertion 3.3. *Pour tout $x_0\in\overline{\mathscr{O}}$, l'application linéaire tangente $T_{x_0}\varphi$ est continue inversible et il existe une constante $0<C<\infty$ telle que :*

$$\big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\ =\ \big\|T_{\varphi(x_0)}\varphi^{-1}\big\|\ \leqslant\ C\qquad\qquad(\forall\,x_0\in\overline{\mathscr{O}}).$$

De plus :

$$\big\|\mathsf{det}\,(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\ =\ \big\|\mathsf{det}\,T_{\varphi(x_0)}\varphi^{-1}\big\|\ =\ \frac{1}{\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big|}.$$ □

En utilisant :

$$\big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}(y)\big|\ \leqslant\ \big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\cdot|y|,$$

nous pouvons majorer pour tout $|x-x_0|\leqslant a$:

$$\begin{aligned}\Big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)-(x-x_0)\Big| &=\ \big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}(y)\big|\\ &\leqslant\ \big\|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big\|\cdot|y|\\ &\leqslant\ C\,\varepsilon'\,a.\end{aligned}$$

Ensuite, une inégalité triangulaire donne une inégalité :

$$\begin{aligned}\Big|(T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi(x)-\varphi(x_0)\big)\Big| &\leqslant\ |x-x_0|+\varepsilon'\,a\,C\\ &\leqslant\ a+\varepsilon'\,a\,C,\end{aligned}$$

qui signifie :

$$(T_{x_0}\varphi)^{-1}\Big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\Big)\ \subset\ Q_{a+\varepsilon' aC}(x_0),$$

d'où découle :

$$\begin{aligned} m\Big((T_{x_0}\varphi)^{-1}\big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\big)\Big) \;&\leqslant\; (1+\varepsilon' C)^d\, a^d \\ &\leqslant\; (1+\varepsilon)\, m\big(B_a(x_0)\big), \end{aligned}$$

si nous choisissons $\varepsilon' > 0$ assez petit à l'avance pour que :

$$(1+\varepsilon' C)^d \;\leqslant\; 1+\varepsilon.$$

Enfin, une application de la Proposition 2.8 à l'application linéaire $L := (T_{x_0}\varphi)^{-1}$ donne :

$$\frac{1}{|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)|}\, m\big(\varphi\big(Q_a(x_0)\big)\big) \;\leqslant\; (1+\varepsilon)\, m\big(B_a(x_0)\big),$$

c'est-à-dire que nous venons d'achever la démonstration de l'inégalité droite de la proposition en cours.

La démonstration de l'inégalité gauche, qui requiert d'avoir simultanément $\varepsilon' > 0$ assez petit pour que :

$$(1-\varepsilon) \;\leqslant\; (1-\varepsilon' C)^d,$$

s'effectue d'une manière essentiellement similaire, et sera éludée. □

La première proposition principale va maintenant montrer que le Théorème 1.3 est vrai en restriction à tout sous-ouvert $\mathscr{O} \subset U$ relativement compact — *i.e.* satisfaisant $\overline{\mathscr{O}} \subset U$ — pour la fonction indicatrice :

$$f \;:=\; \mathbf{1}_{\varphi(\mathscr{O})}.$$

Nous continuerons ensuite à travailler avec des fonctions indicatrices, et ce ne sera qu'à la fin que nous traiterons le cas de fonctions Lebesgue-intégrables quelconques, grâce au fait que ces dernières sont — par définition ! — limites croissantes simples de fonctions étagées, *i.e.* combinaisons linéaires de fonctions indicatrices d'ensembles mesurables.

Proposition 3.4. *Soit $U \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soit $\mathscr{O} \subset U$ un sous-ouvert relativement compact,* i.e. *satisfaisant $\overline{\mathscr{O}} \subset U$. Alors :*

$$\int_{\varphi(\mathscr{O})} \mathbf{1}\, dy \;=\; m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;=\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx.$$

Démonstration. Comme φ est $\mathscr{C}^1$ dans U, les $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$ sont $\mathscr{C}^0$, donc $\mathsf{Jac}\,\varphi$ est $\mathscr{C}^0$ dans U. Comme $\overline{\mathscr{O}} \subset U$ est compact, la fonction continue :

$$x \longmapsto \mathsf{Jac}\,\varphi(x)$$

est uniformément continue sur $\overline{\mathscr{O}}$ grâce au Théorème de Heine-Borel :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\delta > 0 \quad \Big(\forall\, x',\, x'' \in \overline{\mathscr{O}} \quad |x'-x''| \leqslant \delta \;\Longrightarrow\; \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x') - \mathsf{Jac}\,\varphi(x'')\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Fixons donc un tel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

Rappelons que tout sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^d$ tel que notre $\mathscr{O} \subset U$ peut être représenté comme réunion dénombrable :

$$\mathscr{O} \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} Q_n$$

de cubes fermés $Q_n \subset \mathscr{O}$ presque disjoints deux à deux, c'est-à-dire ne s'intersectant au plus que le long leurs faces $(d-1)$-dimensionnelles.

Si les centres de ces Q_n sont notés x_n, on peut même supposer qu'ils sont tous d'intérieur non vide, à savoir de demi-arêtes $a_n > 0$:

$$Q_n = \big\{x \in \mathbb{R}^d : \, |x - x_n| \leqslant a_n\big\},$$

et quitte à re-subdiviser certains d'entre eux si nécessaire, on peut supposer qu'ils sont tous petits :

$$0 < a_n \leqslant \delta,$$

d'où :

$$|x - x_n| \leqslant a_n \implies \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x) - \mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \leqslant \varepsilon,$$

ce qui revient à dire, pour $|x - x_n| \leqslant a_n$, qu'on a les deux inégalités de contrôle :

$$\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| - \varepsilon \leqslant \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \leqslant \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| + \varepsilon. \tag{3.5}$$

En sus, rétrécissons si nécessaire $\delta > 0$ de telle sorte le Lemme 3.1 soit lui aussi satisfait en tous les centres x_n :

(3.6)

$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n) \leqslant m\big(\varphi(Q_n)\big) \leqslant (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n).$$

Enfin, observons (exercice mental) que :

$$m(\mathscr{O}) = \sum_{n \geqslant 1} m(Q_n),$$

ainsi que :

$$\int_{\mathscr{O}} \mathsf{Jac}\,\varphi(x)\,dx = \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n} \mathsf{Jac}\,\varphi(x)\,dx.$$

Grâce à tous ces préparatifs que nous venons d'inscrire dans notre mémoire immédiate, nous pouvons majorer pas à pas en détaillant toutes les étapes intermédiaires :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) &= m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n)\Big) \\
&\leqslant \sum_{n\geqslant 1} m\big(\varphi(Q_n)\big) \\
\text{[Inégalité 3.6 droite]} \qquad &\leqslant \sum_{n\geqslant 1} (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n) \\
&= (1+\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n} \big|\underbrace{\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)}_{\text{constante}}\big|\,dx \\
\text{[Inégalité 3.5 droite]} \qquad &\leqslant (1+\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n} \Big(\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| + \varepsilon\Big)\,dx \\
&= (1+\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx + (1+\varepsilon)\,\varepsilon \sum_{n\geqslant 1} m(Q_n) \\
&= (1+\varepsilon) \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx + (1+\varepsilon)\,\varepsilon\, m(\mathscr{O}),
\end{aligned}$$

d'où en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \leqslant \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Il s'agit maintenant d'établir l'inégalité inverse d'une manière essentiellement similaire, bien que non exactement identique.

Tout d'abord, toujours avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit fixé, les cubes Q_n peuvent être rétrécis d'une manière infinitésimale en des sous-cubes :

$$Q_n' := \big\{|x - x_n| \leqslant a_n'\big\},$$

de demi-arêtes inférieures $0 < a_n' < a_n$ — d'où ces $Q_n' \subset \mathsf{Int}\, Q_n$ deviennent rigoureusement disjoints deux à deux — avec les $a_n' \sim a_n$ tous extrêmement proches a_n afin que :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 1} m(Q_n') &\geqslant \sum_{n\geqslant 1} m(Q_n) - \varepsilon \\ &= m(\mathscr{O}) - \varepsilon,\end{aligned}$$

et afin, en utilisant la continuité de $\mathsf{Jac}\,\varphi$ sur $\overline{\mathscr{O}}$, que :

$$\sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx \ \geqslant\ \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx - \varepsilon.$$

Bien entendu, le Lemme 3.1 appliqué à $Q = Q_n' \subset Q_n$ donne la version modifiée utile de l'inégalité (3.6) :

(3.7)
$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n') \ \leqslant\ m\big(\varphi(Q_n')\big) \ \leqslant\ (1+\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big| \cdot m(Q_n').$$

Grâce à ces préparatifs, nous pouvons minorer :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) &= m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n)\Big) \\
&\geqslant m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(Q_n')\Big) \\
&= \sum_{n\geqslant 1} m\big(\varphi(Q_n')\big) \\
\text{[Inégalité 3.7 gauche]} \qquad &\geqslant \sum_{n\geqslant 1} (1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)\big|\, m(Q_n') \\
&= (1-\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \big|\underbrace{\mathsf{Jac}\,\varphi(x_n)}_{\text{constante}}\big|\, dx \\
\text{[Inégalité 3.5 gauche]} \qquad &\geqslant (1-\varepsilon) \sum_{n\geqslant 1} \int_{Q_n'} \Big(\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big| - \varepsilon\Big)\, dx \\
&\geqslant (1-\varepsilon)\left[\int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx - \varepsilon\right] - (1-\varepsilon)\,\varepsilon\,\big[m(\mathscr{O}) - \varepsilon\big],
\end{aligned}$$

d'où en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$:

$$m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \ \geqslant\ \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\, dx,$$

ce qui est l'inégalité inverse qui achève d'établir l'égalité de la proposition. □

Une fois acquis le cas d'ouverts $\mathscr{O} \subset U$ relativement compacts $\overline{\mathscr{O}} \subset U$, on peut étendre le résultat au moyen d'arguments d'exhaustion.

Proposition 3.8. *Pour tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset U$, on a :*

$$\int_{\varphi(\mathscr{O})} \mathbf{1}\,dy \;=\; m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;=\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Introduisons les sous-ensembles ouverts de $\mathscr{O}$ paramétrés par un entier $n \geqslant 1$:

$$\mathscr{O}_n \;:=\; \big\{x \in \mathscr{O} \colon\; |x| < n,\; \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) > \tfrac{1}{n}\big\},$$

notons les emboîtements $\mathscr{O}_n \subset \mathscr{O}_{n+1}$, et observons que :

$$\mathscr{O} \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} \mathscr{O}_n.$$

Puisque $\overline{\mathscr{O}}_n \subset U$, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(\mathscr{O})\big) \;&=\; m\Big(\bigcup_{n\geqslant 1} \varphi(\mathscr{O}_n)\Big) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} m\big(\varphi(\mathscr{O}_n)\big) \\
\text{[Proposition 3.4]} \qquad &=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathscr{O}_n} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \int_U \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &=\; \int_U \lim_{n\to\infty} \mathbf{1}_{\mathscr{O}_n}(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_{\mathscr{O}} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Proposition 3.9. *Pour tout sous-ensemble fermé $F \subset U$, on a :*

$$\int_{\varphi(F)} \mathbf{1}\,dy \;=\; m\big(\varphi(F)\big) \;=\; \int_F \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Il suffit d'observer que F s'écrit comme différence entre deux ouverts :

$$F \;=\; U \big\backslash \big(U \backslash F\big),$$

d'appliquer la proposition qui précède à chacun de ces ouverts :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(U)\big) \;&=\; \int_U \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx, \\
m\big(\varphi(U\backslash F)\big) \;&=\; \int_{U\backslash F} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,
\end{aligned}$$

et de soustraire :

$$\begin{aligned}
m\big(\varphi(F)\big) \;&=\; m\big(\varphi(U)\big) - m\big(\varphi(U\backslash F)\big) \\
&=\; \int_U \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx - \int_{U\backslash F} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_F \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,
\end{aligned}$$

pour constituer la formule désirée. □

Proposition 3.10. *Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$ relativement compact,* i.e. *tel que $\overline{E} \subset U$, on a :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \,=\, \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Rappelons que tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$, dont la mesure $m(E) \in [0,\infty]$ peut valoir ∞, peut être « *approximé* » par une suite croissante de sous-ensembles fermés :

$$F_k \,\subset\, F_{k+1} \,\subset\, E \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1),$$

au sens de la mesure :

$$m(E) \,=\, \lim_{k\to\infty} m(F_k).$$

Autrement dit, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $\mathrm{K} \gg 1$ un entier assez grand pour que :

$$m\big(E\backslash F_k\big) \,\leqslant\, \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant \mathrm{K}).$$

Assertion 3.11. *Alors on a aussi :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \,=\, \lim_{k\to\infty} m\big(\varphi(F_k)\big).$$

Démonstration. Comme $\overline{E} \subset U$, on peut supposer, avec la suite exhaustive croissante de compacts :

$$K_\ell \,=\, \big\{x \in U\colon\, |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d\backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\},$$

que pour un entier $\ell \gg 1$ assez grand, on a :

$$E \,\subset\, K_\ell \,\subset\, K_{\ell+1}.$$

Donc la Proposition 2.5 peut maintenant garantir l'existence d'une certaine constante $0 \leqslant C < \infty$ qui ne dépend que de φ et de K_ℓ telle que :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E\backslash F_k)\big) \,&\leqslant\, C\cdot m(E\backslash F_k) \\ &\leqslant\, C\,\varepsilon \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant \mathrm{K}), \end{aligned}$$

ce qui établit la limite annoncée. □

Ainsi, nous pouvons estimer :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E)\big) \,&=\, \lim_{k\to\infty} m\big(\varphi(F_k)\big) \\ \text{[Proposition 3.9]} \qquad &=\, \lim_{k\to\infty} \int_{F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ \text{[Convergence monotone]} \qquad &=\, \int_{\cup_{k\geqslant 1} F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx. \end{aligned}$$

Mais comme :

$$0 \,=\, m\Big(E\Big\backslash \bigcup_{k\geqslant 1} F_k\Big),$$

et comme la fonction continue $|\mathsf{Jac}\,\varphi|$ est bornée sur K_ℓ qui contient E ainsi que tous les F_k, il vient :

$$0 \,=\, \int_{E\backslash \cup_{k\geqslant 1} F_k} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

d'où en additionnant ce 0 à la formule qui précède :

$$m\big(\varphi(E)\big) \;=\; \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,$$

comme voulu. □

Le cas d'un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset U$ qui n'est pas forcément relativement compact s'en déduit par un argument d'exhaustion.

Proposition 3.12. *Pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset U$, on a :*

$$m\big(\varphi(E)\big) \;=\; \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. Pour tout entier $\ell \geqslant 1$, coupons :

$$\begin{aligned} E_\ell &:= E \cap K_\ell \\ &= E \cap \big\{x \in U\colon\; |x| \leqslant \ell,\; \mathsf{dist}(x, \mathbb{R}^d \backslash U) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}. \end{aligned}$$

On a la croissance $E_\ell \subset E_{\ell+1}$, avec $\cup_\ell E_\ell = E$, donc un théorème connu de théorie de la mesure donne :

$$m(E_\ell) \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} m(E).$$

De même, les ensembles mesurables images $\varphi(E_\ell)$ sont croissants dans le $\mathbb{R}^d$-but, donc :

$$m\big(\varphi(E_\ell)\big) \underset{\ell\to\infty}{\longrightarrow} m\big(\varphi(E)\big).$$

L'intérêt de couper E est qu'on peut appliquer la proposition qui précède pour obtenir :

$$m\big(\varphi(E_\ell)\big) \;=\; \int_{E_\ell} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \qquad\qquad (\forall\,\ell \geqslant 1).$$

Grâce à tous ces préparatifs, nous pouvons entreprendre des métamorphoses effectuées en douceur progressive :

$$\begin{aligned} m\big(\varphi(E)\big) &= m\Big(\bigcup_{\ell\geqslant 1} \varphi(E_\ell)\Big) \\ &= \lim_{\ell\to\infty} m\big(\varphi(E_\ell)\big) \\ \text{[Proposition 3.10]} \qquad &= \lim_{\ell\to\infty} \int_{E_\ell} \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \lim_{\ell\to\infty} \int_U \mathbf{1}_{E_\ell}(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ \text{[Convergence monotone]} \qquad &= \int_U \lim_{\ell\to\infty} \mathbf{1}_{E_\ell}(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \int_U \mathbf{1}_E(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\ &= \int_E \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx, \end{aligned}$$

pour déployer notre train d'atterrissage à bonne destination. □

Le tout dernier vol sera offert par la compagnie aérienne *BLK*, « *Bonne Lampée de Kérosène* ».

Proposition 3.13. *Pour toute fonction mesurable intégrable $f\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$, on a :*

$$\int_V f(y)\,dy \;=\; \int_U f\circ\varphi(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.$$

Démonstration. En décomposant $f = \mathsf{Re}\,f + i\,\mathsf{Im}\,f$ en parties réelle et imaginaire, on peut supposer que f est à valeurs réelles, puis, en décomposant $f = f^+ - f^-$, on peut même supposer que f est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$.

Pour $f = \mathbf{1}_E$ fonction indicatrice d'un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset U$, cette formule vient d'être dûment établie. Nous avons aussi vu plus haut que $E \subset U$ est mesurable si et seulement si $\varphi(E) \subset V$ l'est.

Rappelons que les *fonctions étagées* sont celles qui sont combinaisons linéaires finies de telles fonctions indicatrices, et grâce au transfert de mesurabilité à travers φ, elles s'écrivent sous la forme générale :

$$e(y) \;=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\cdot\mathbf{1}_{\varphi(E_k)}(y),$$

avec des constantes réelles $b_k > 0$ et des sous-ensembles mesurables $E_k \subset \mathbb{R}^d$.

Alors pour de telles fonctions, la formule en vue est vraie :

$$\begin{aligned}
\int_V e(y)\,dy \;&=\; \int_V \bigg(\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\,\mathbf{1}_{\varphi(E_k)}(y)\bigg)\,dy \\
&=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k \int_{\varphi(E_k)} 1\cdot dy \\
\text{[Proposition 3.12]}\qquad &=\; \sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k \int_U \mathbf{1}_{E_k}(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_U \bigg(\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} b_k\,\mathbf{1}_{E_k}(x)\bigg)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&=\; \int_U e\circ\varphi(x)\cdot\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx.
\end{aligned}$$

Pour terminer, rappelons que toute fonction mesurable $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est limite ponctuelle en *tout* point d'une suite croissante $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ de telles fonctions étagées :

$$0 \;\leqslant\; e_n \;\leqslant\; e_{n+1} \;\leqslant\; f,$$

à savoir :

$$f(y) \;=\; \lim_{n\to\infty} e_n(y) \qquad\qquad (\forall\, y \in U).$$

Il ne reste plus qu'à asséner deux bons coup fatals de convergence monotone à tout ce monde ravissant de belles fonctions étagées intégrables :

$$\begin{aligned}
\int_V f(y)\,dy &= \int_U \lim_{n\to\infty} e_n(y)\,dy \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_V e_n(y)\,dy \\
\text{[Vient d'être vu !]} \qquad &= \lim_{n\to\infty} \int_U e_n \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
\text{[Convergence monotone]} \qquad &= \int_U \lim_{n\to\infty} e_n \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx \\
&= \int_U f \circ \varphi(x) \cdot \big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx,
\end{aligned}$$

pour se libérer *enfin* de cette succession si éprouvante de démonstrations interminablement délicates et détaillées ! □

Ceci achève donc la démonstration du Théorème 1.3 de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue. *Beautiful, is'nt it ?* □

4. Coordonnées polaires, sphériques, hypersphériques

En utilisant les concepts et résultats du cours de calcul différentiel, on vérifie que l'application :

$$\begin{aligned}
\varphi\colon \quad \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi, \pi[\;&\longrightarrow\; \mathbb{R}^2 \big\backslash \big(\mathbb{R}_- \times \{0\}\big) \\
(r, \theta) \;&\longmapsto\; \big(r \cos\theta,\, r \sin\theta\big) =: (x, y)
\end{aligned}$$

est un $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme, appelé passage aux *coordonnées polaires*, de déterminant jacobien strictement positif (donc jamais nul) :

$$\begin{aligned}
\mathsf{Jac}\,\varphi(r,\theta) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \\
&= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta \\
&= r,
\end{aligned}$$

et donc, puisque la droite horizontale négative $\mathbb{R}_- \times \{0\} = \{(x,0)\colon x \leqslant 0\}$ que l'on soustrait à $\mathbb{R}^2$ est de mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle nulle, la formule de changement de variables s'écrit ici, pour toute fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^\infty f\big(r\cos\theta,\, r\sin\theta\big)\,rdr.$$

Par exemple, l'aire (mesure 2-dimensionnelle) d'un disque ouvert centré à l'origine de rayon $R > 0$:

$$\mathbb{D}_R := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\colon\; x^2 + y^2 < R^2\big\}$$

vaut :

$$m\big(\mathbb{D}_R\big) = \int_{\mathbb{D}_R} 1 \cdot dxdy = \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_0^R rdr = 2\pi\,\frac{R^2}{2} = \pi\,R^2$$

— pas de contradiction avec les mathématiques antiques !

En dimension 3, le passage aux *coordonnées sphériques* est réalisé par le $\mathscr{C}^\infty$-difféomorphisme :

$$\begin{aligned} \varphi\colon\quad \mathbb{R}_+^* \times \,]-\pi,\pi[\, \times \,]-\tfrac{\pi}{2},\tfrac{\pi}{2}[\quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^3 \big\backslash \big(\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}\big) \\ (r,\theta,\eta) \quad &\longmapsto \quad \big(r \cos\theta \cos\eta,\ r \sin\theta \cos\eta,\ r \sin\eta\big) \\ &\qquad =: \ (x,y,z), \end{aligned}$$

de déterminant jacobien strictement positif (donc jamais nul) :

$$\begin{aligned} \mathsf{Jac}\,\varphi(r,\theta,\eta) &= \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\eta & -r\sin\theta\cos\eta & -r\cos\theta\sin\eta \\ \sin\theta\cos\eta & r\cos\theta\cos\eta & -r\sin\theta\sin\eta \\ \sin\eta & 0 & r\cos\eta \end{vmatrix} \\ &= r\sin\theta\cos\eta \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\eta & -r\sin\theta\sin\eta \\ \sin\eta & r\cos\eta \end{vmatrix} + r\cos\theta\cos\eta \begin{vmatrix} \cos\theta\cos\eta & -r\cos\theta\sin\eta \\ \sin\eta & r\cos\eta \end{vmatrix} \\ &= r\sin\theta\cos\eta\,\big(r\sin\theta\cos^2\eta + r\sin\theta\sin^2\eta\big) + r\cos\theta\cos\eta\big(r\cos\theta\cos^2\eta + r\cos\theta\sin^2\eta\big) \\ &= r\sin\theta\cos\eta\, r\sin\theta + r\cos\theta\cos\eta\, r\cos\theta \\ &= r^2\cos\eta \ > \ 0, \end{aligned}$$

et donc, puisque le demi-plan $\mathbb{R}_- \times \{0\} \times \mathbb{R}$ que l'on soustrait à $\mathbb{R}^3$ est de mesure de Lebesgue 3-dimensionnelle nulle, la formule de changement de variables s'écrit ici, pour toute fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz \ = \ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\eta\, d\eta \int_0^\infty f\big(r\cos\theta\cos\eta,\, r\sin\theta\cos\eta,\, r\sin\eta\big)\, r^2 dr.$$

Par exemple, le volume (mesure 3-dimensionnelle) d'une boule ouverte centrée à l'origine de rayon $R > 0$:

$$B(0,R) \ := \ \big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \colon\ x^2 + y^2 + z^2 < R^2\big\}$$

vaut :

$$\begin{aligned} m\big(B(0,R)\big) \ = \ \int_{B(0,R)} 1 \cdot dxdydz \ &= \ \int_{-\pi}^{\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\eta\, d\eta \int_0^R r^2\, dr \\ &= \ 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{R^3}{3} \\ &= \ \frac{4\pi\, R^3}{3}, \end{aligned}$$

ce qui rassure le vieil Archimède sur les capacités mathématiques du jeune Lebesgue !

Généralement, et en changeant légèrement la représentation par rapport aux dimensions 2 et 3, en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, le passage aux *coordonnées hypersphériques* peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\eta_1, \\ x_2 &= r\sin\eta_1\cos\eta_2, \\ x_3 &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\cos\eta_3, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_{d-1} &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3\cdots\sin\eta_{d-2}\cos\theta, \\ x_d &= r\sin\eta_1\sin\eta_2\sin\eta_3\cdots\sin\eta_{d-2}\sin\theta, \end{aligned}$$

avec un rayon $r > 0$ et des angles :

$$0 \, < \, \eta_1, \dots, \eta_{d-2} < \pi, \qquad\qquad 0 \, < \, \theta \, < \, 2\pi.$$

En formant et en calculant le déterminant jacobien de cette transformation, on peut se convaincre (exercice) par récurrence sur d qu'il vaut :

$$\mathsf{Jac}\,\varphi \, = \, r^{d-1} \sin^{d-2}\eta_1 \sin^{d-3}\eta_2 \cdots \sin^1\eta_{d-2},$$

et pour calculer le volume d-dimensionnel d'une boule ouverte centrée à l'origine de rayon $R > 0$:

$$B(0,R) \, := \, \big\{ x_1^2 + \cdots + x_d^2 < R^2 \big\},$$

on peut utiliser les valeurs (classiques !) des *intégrales de Wallis :*

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} t \, dt \, = \, \frac{(2m)!}{2^{2m}\,(m!)^2}\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m+1} t \, dt \, = \, \frac{2^{2m}\,(m!)^2}{(2m+1)!},$$

pour obtenir au final les volumes de ces hyperboules qui, suivant la parité de la dimension :

$$d \, = \, 2e \qquad \text{et} \qquad d \, = \, 2e+1,$$

valent :

$$\frac{\pi^e}{e!}\,R^{2e} \qquad \text{et} \qquad \frac{2^{2e+1}\,e!\,\pi^e}{(2e+1)!}\,R^{2e+1},$$

ce qui redonne les cas de la dimension $2e = 2$ et $2e + 1 = 3$.

Une application plus amusante de la formule de changement de variables va permettre de re-calculer la célèbre valeur de :

$$\zeta(2) \, := \, \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Partons en effet de :

$$\frac{1}{2m+1}\,\frac{1}{2m+1} \, = \, \int_0^1 \int_0^1 x^{2m}\,y^{2m}\,dxdy,$$

puis sommons :

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \, = \, \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy.$$

Question : *que vaut cette intégrale double ?*

Réponse : comme l'application $\mathscr{C}^\infty$:

$$\begin{aligned} \varphi\colon \quad \Delta \quad &\longrightarrow \quad \square \\ (u,v) \quad &\longmapsto \quad \left(\frac{\sin u}{\cos v},\, \frac{\sin v}{\cos u}\right) \, =: \, \big(x(u,v),\, y(u,v)\big) \end{aligned}$$

établit un difféomorphisme (exercice) entre :

$$\begin{aligned} \Delta \, &:= \, \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 \colon \; u > 0,\, v > 0,\, u + v < \tfrac{\pi}{2}\big\} \\ \text{et} \qquad \square \, &:= \, \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; 0 < x < 1,\, 0 < y < 1\big\}, \end{aligned}$$

d'inverse :

$$u(x,y) \, = \, \arctan\left(x\sqrt{\frac{1-y^2}{1-x^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad v(x,y) \, = \, \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}}\right),$$

et comme un calcul de son jacobien :

$$\begin{aligned}\mathsf{Jac}\,\varphi(u,v) \;&=\; \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} \\ \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} & \frac{\cos v}{\cos u}\end{vmatrix} \;=\; 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \\ &=\; 1 - x(u,v)^2\, y(u,v)^2\end{aligned}$$

révèle le phénomène agréable que dans la formule de changement de variables :

$$\int_\Delta \underbrace{\frac{1}{1-x(u,v)^2 y(u,v)^2}\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(u,v)\big|}_{=\,1!}\,dudv \;=\; \int_\square \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy,$$

une *compensation magique* intervient, et donc calculer cette intégrale se ramène simplement à connaître l'aire d'un triangle rectangle isocèle :

$$\begin{aligned}\int_\square \frac{1}{1-x^2y^2}\,dxdy \;&=\; \int_\Delta 1\cdot dudv \\ &=\; \mathsf{Aire}(\Delta) \\ &=\; \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2}\,\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

ce qui offre sur un plateau :

$$\begin{aligned}\frac{\pi^2}{8} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^2} \;&=\; \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} - \sum_{\ell=1}^{\infty}\frac{1}{(2\ell)^2} \\ &=\; \zeta(2) - \frac{1}{2^2}\,\zeta(2),\end{aligned}$$

la statuette fétiche d'Euler $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$.

5. Appendice : accroissements locaux finis

Dans un espace-source $\mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $x = (x_1, \dots, x_d)$, on choisit la norme $|x| := \mathsf{max}_{1\leqslant i\leqslant d}\,|x_i|$, et dans un espace-but $\mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_d)$, on choisit de même $|y| := \mathsf{max}_{1\leqslant j\leqslant d}\,|y_j|$.

Lemme 5.1. *Soit $Q \subset \mathbb{R}^d$ un cube fermé, et soit $Q \subset U \subset \mathbb{R}^d$ un voisinage ouvert. Soit $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^d$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Alors il existe une constante $0 \leqslant C_\varphi < \infty$ telle que pour tous $x', x'' \in Q$:*

$$\big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \;\leqslant\; C\cdot|x''-x'|,$$

et le choix suivant convient :

$$C \;:=\; d\,\max_{1\leqslant i\leqslant d}\,\max_{1\leqslant j\leqslant d}\,\max_{x\in Q}\,\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right| \;<\; \infty.$$

Rappelons que la norme de l'application linéaire tangente est définie par :

$$\big\|T_x\varphi\big\| \;=\; d\,\max_{1\leqslant i\leqslant d}\,\max_{1\leqslant j\leqslant d}\,\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right|,$$

et donc on a simplement ici :

$$C \;=\; \max_{x\in Q}\,\big\|T_x\varphi\big\|.$$

Démonstration. Par définition de la norme :

$$\big|\varphi(x'') - \varphi(x')\big| \,=\, \max_{1\leqslant j\leqslant d} \big|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')\big|.$$

Fixons j, et regardons droit dans les yeux la fonction d'une unique variable réelle :

$$\psi_j\colon\quad [0,1] \ni t \longmapsto \varphi_j\big(x' + t(x''-x')\big) \in \mathbb{R},$$

qui est bien définie, car le cube Q est convexe, d'où le segment $[x', x''] \subset Q$.

L'inégalité classique des accroissements finis pour cette fonction s'écrit :

$$\big|\psi_j(1) - \psi_j(0)\big| \,\leqslant\, \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|\frac{d\psi_j}{dt}(t)\right| \cdot (1-0).$$

Or ici, comme :

$$\psi_j(t) \,=\, \varphi_j\Big(x_1' + t(x_1''-x_1'),\, \dots\dots,\, x_d'' + t(x_d''-x_d')\Big),$$

calculons cette dérivée par rapport à t, majorons-la :

$$\begin{aligned}
\big|\varphi_j(x'') - \varphi_j(x')\big| &= \big|\psi_j(1) - \psi_j(0)\big| \\
&\leqslant \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left|(x_1''-x_1')\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\big(x'+t(x''-x')\big) + \cdots\cdots + (x_d''-x_d')\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_d}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| \\
&\leqslant \max_{1\leqslant l\leqslant d} \big|x_l''-x_l'\big| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} \left(\left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_1}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| + \cdots\cdots + \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_d}\big(x'+t(x''-x')\big)\right|\right) \\
&= \big|x''-x'\big| \max_{0\leqslant t\leqslant 1} d \max_{1\leqslant i\leqslant d} \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\big(x'+t(x''-x')\big)\right| \\
&\leqslant \big|x''-x'\big|\; d \max_{1\leqslant i\leqslant d} \max_{x\in Q} \left|\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}(x)\right|,
\end{aligned}$$

et enfin, prenons le maximum sur les indices $1 \leqslant j \leqslant d$, ce qui conclut. □

6. Exercices

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ et soit un point $x \in \Omega$. On rappelle que le *bord* — ou la *frontière* — de Ω est l'ensemble, noté $\partial\Omega$, des points $y \in \mathbb{R}^d$ dont tout voisinage ouvert intersecte à la fois Ω et son complémentaire $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$. Intuitivement, $\partial\Omega$ est l'ensemble des points qui '*hésitent*' entre Ω et $\mathbb{R}^d\backslash\Omega$.

On note $\overline{E}$ l'*adhérence* de tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, ensemble de tous les points-limites $x_\infty = \lim_{k\to\infty} x_k \in \mathbb{R}^d$ de suites $(x_k)_{k=1}^\infty$ de points $x_k \in E$ qui sont de Cauchy dans $\mathbb{R}^d$ (pour une, donc n'importe quelle norme, puisque toutes sont équivalentes).

(a) Montrer que :

$$\partial\Omega \,=\, \overline{\Omega}\backslash\Omega.$$

(b) Montrer que :

$$\mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) \,=\, \mathrm{dist}\big(x,\, \partial\Omega\big) \qquad\qquad (\forall\, x \in \Omega).$$

Indication: Comme $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^d\backslash\Omega$, l'inégalité '$\leqslant$' est claire. Pour l'inégalité inverse '$\geqslant$', supposer en raisonnant par l'absurde que :

$$\delta \,:=\, \mathrm{dist}\big(x,\, \partial\Omega\big) - \mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) \,>\, 0,$$

trouver $y \in \mathbb{R}^d\backslash\Omega$ satisfaisant :

$$|y-x| \,\leqslant\, \mathrm{dist}\big(x,\, \mathbb{R}^d\backslash\Omega\big) + \tfrac{\delta}{2},$$

et montrer qu'il existe un point $z \in [y, x[\,\cap\, \partial\Omega$.

Exercice 2. Dans un ouvert $0 \in U \subset \mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$, pour tout entier $\ell \geqslant 1$, on considère les sous-ensembles :

$$K_\ell := \big\{x \in U\colon\ |x| \leqslant \ell,\ \mathsf{dist}\,\big(x,\, \mathbb{R}^d \backslash U\big) \geqslant \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

(a) Montrer les emboîtements $K_\ell \subset K_{\ell+1}$ pour tout $\ell \geqslant 1$.

(b) Montrer que chaque K_ℓ est compact.

(c) Montrer que ces K_ℓ remplissent :

$$U = \bigcup_{\ell \geqslant 1} K_\ell.$$

(d) Montrer que l'intérieur topologique de chaque K_ℓ est :

$$\mathsf{Int}\, K_\ell = \big\{x \in U\colon\ |x| < \ell,\ \mathsf{dist}\,\big(x,\, \mathbb{R}^d \backslash U\big) > \tfrac{1}{\ell}\big\}.$$

(e) Montrer que $K_\ell \subset \mathsf{Int}\, K_{\ell+1}$ pour tout $\ell \geqslant 1$.

Exercice 3. Détailler les arguments de l'inégalité gauche :

$$(1-\varepsilon)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x_0)\big| \cdot m(Q) \leqslant m\big(\varphi(Q)\big)$$

de la Proposition 3.1.

Exercice 4. L'objectif est de démontrer le Lemme 2.9, dont on conserve les notations.

(a) Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{1 \leqslant i \leqslant d}^{1 \leqslant j \leqslant d}$ une matrice générale de taille $d \times d$ à coefficients $a_{i,j} \in \mathbb{R}$, l'indice i étant celui des lignes. Vérifier que :

- $P_\sigma \cdot A$ permute les lignes de A par σ^{-1} ;
- $A \cdot P_\sigma$ permute les colonnes de A par σ.

(b) Pour $i = 1, \dots, d$, soit $e_i \in \mathbb{R}^d$ le vecteur de la base canonique :

$$e_i := {}^{\mathrm{T}}\big(0 \cdots 0\, 1\, 0 \cdots 0\big),$$

le « 1 » se trouvant à la i-ème place, et « $^{\mathrm{T}}$ » désignant la transposition. Vérifier que pour toute permutation $\sigma\colon \{1, \dots, d\} \longrightarrow \{1, \dots, d\}$, on a :

$$P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}, \qquad\qquad \big(P_\sigma\big)^{-1} = P_{\sigma^{-1}}.$$

(c) Vérifier que :

- $A \cdot D_j^\lambda$ multiplie la j-ème colonne de A par λ ;
- $D_i^\lambda \cdot A$ multiplie la i-ème ligne de A par λ.

(d) Montrer que l'inverse :

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ -1 & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix},$$

peut être écrit comme un produit fini de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, U.

(e) On note alors G l'ensemble de toutes les matrices de taille $d \times d$ qui s'obtiennent comme produits finis de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, U. Pour tous $i, j \in \{1, \dots, d\}$, on note $E_{i,j}$ la matrice de base ayant 1 à la i-ème ligne, j-ème colonne, et 0 aux $d^2 - 1$ places restantes. Montrer que :

$$\mathsf{Id} + E_{i,j} \in G.$$

(f) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j} \in G,$$

et que :

$$\big(\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}\big)^{-1} = \mathsf{Id} - \alpha\, E_{i,j}.$$

(g) Vérifier l'identité-produit :

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ a_3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_d & & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ a_2 & 1 & & & \\ a_3 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ a_d & & & & 1 \end{pmatrix},$$

les termes non écrits étant tous des 0.

(h) Soit enfin $L \in \mathbb{R}^{d \times d}$ une matrice inversible quelconque. Vérifier qu'il suffit de réduire L à l'identité en la multipliant à gauche et à droite par un nombre fini de matrices des trois types P_σ, D_i^λ, $\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}$.

(i) Montrer qu'on peut supposer que $L_{1,1} = 1$.

(j) En multipliant L à gauche et à droite par des matrices du type $\mathsf{Id} + \alpha\, E_{i,j}$, se ramener à des matrices :

$$\widetilde{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * \end{pmatrix}.$$

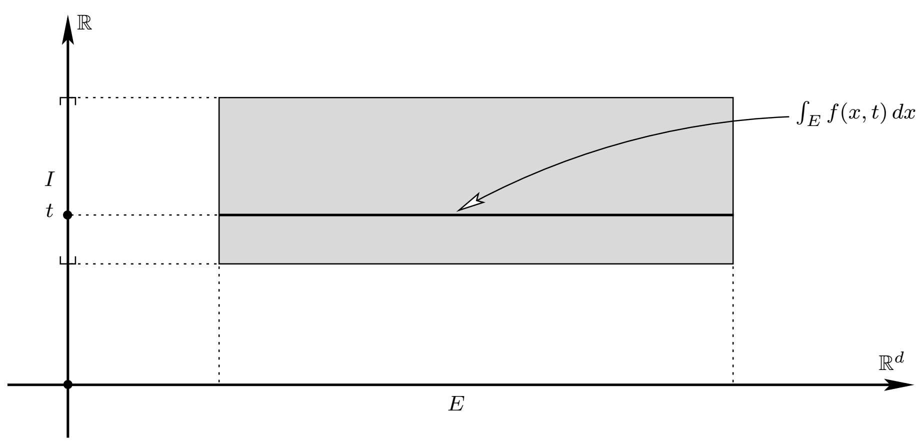
(k) Conclure en raisonnant par récurrence sur la dimension $d \geqslant 1$.

Intégrales dépendant de paramètres

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \times I \longrightarrow \mathbb{C}.$$



Une question naturelle qui possède des applications extrêmement nombreuses et utiles en Analyse consiste à déterminer de quelle manière l'intégrale :

$$F(t) := \int_E f(x,t)\,dx$$

dépend du paramètre t en fonction de la régularité de l'application f que l'on intègre (sur des tranches horizontales).

En fait, de telles *représentation intégrales* $F(t)$ s'avèrent constituer un outil puissant répandu pour étudier les propriétés des solutions à de nombreuses équations aux dérivées partielles, notamment issues de la physique, par exemple leur régularité, la localisation de leurs singularités, ou encore leurs propriétés asymptotiques. *C'est pourquoi ce bref chapitre simple est d'une importance absolument capitale !*

1. Continuité d'intégrales dépendant de paramètres

Dans le cadre mathématique abstrait et avancé de la théorie de l'intégration de Lebesgue, un premier énoncé fondamental est le suivant.

Théorème 1.1. [Continuité d'une intégrale à paramètre] *Si, au voisinage d'un point fixé $t_0 \in I$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(ii) *pour presque tout $x \in E$:*

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) \,=\, f(x,t_0);$$

(iii) *il existe une fonction positive $g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui, pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0 et pour presque tout $x \in E$, domine uniformément :*

$$\big|f(x,t)\big| \,\leqslant\, g(x);$$

Alors premièrement la fonction :

$$x \longmapsto f(x,t_0)$$

est Lebesgue-intégrable sur E et deuxièmement surtout :

$$\lim_{t \to t_0} \int_E f(x,t)\,dx \,=\, \int_E f(x,t_0)\,dx.$$

Autrement dit, ces trois conditions garantissent que la fonction introduite ci-dessus :

$$F(t) \,=\, \int_E f(x,t)\,dx$$

est *continue* en $t = t_0$. Dans la plupart des applications utiles et intéressantes, il est en général aisé de vérifier que ces trois conditions sont effectivement satisfaites.

Démonstration. L'argument est dérisoirement simple, puisque, comme l'aura fait deviner la présence d'une fonction dominatrice g, ce résultat est une application immédiate du théorème de convergence dominée, par exemple en introduisant une suite :

$$t_n \longrightarrow t_0,$$

à laquelle est associée la suite de fonctions intégrables :

$$f_n(x) \,:=\, f(x,t_n),$$

la vérification complète étant laissée en exercice d'assimilation. □

Bien entendu, l'énoncé le plus fréquemment utile dans les applications concerne une continuité en *tous* les points de l'intervalle I.

Théorème 1.2. *Si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(ii) *pour tout $x \in E$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est continue en la variable t sur I ;*

(iii) *il existe une fonction positive $g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\big|f(x,t)\big| \,\leqslant\, g(x)$$

en tout *point* $(x,t) \in E \times I$ *;*
Alors la fonction :

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est continue sur l'intervalle I en entier.

Démonstration. C'est encore un corollaire direct du Théorème de convergence dominée, et aussi un corollaire logique du théorème qui précède. □

Des énoncés analogues sont satisfaits par des intégrales :

$$F(t_1,\dots,t_r) := \int_E f(x,t_1,\dots,t_r)\,dx$$

de fonctions mesurables qui dépendent d'un nombre $r \geqslant 1$ quelconque de paramètres réels. Il peuvent être formulés (exercice d'écriture), et ils découlent essentiellement directement (pour des raisons formelles) des deux énoncés que nous venons de voir dans le cas d'un seul paramètre ($r = 1$).

2. Dérivabilité d'intégrales dépendant de paramètres

Commençons par rappeler deux résultats classique d'Analyse de niveau Licence 1 ou 2.

Théorème 2.1. [des accroissements finis] *Sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, si une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et aussi dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$ — mais pas forcément $\mathscr{C}^1$ —, alors il existe au moins un élément $c \in\,]a,b[$ tel que :*

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Démonstration. Cet énoncé est une conséquence du Théorème de Rolle, rappelé ci-dessous, appliqué à la fonction auxiliaire :

$$\begin{aligned} g\colon\quad [a,b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot x, \end{aligned}$$

dont la dérivée vaut :

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$ □

Théorème 2.2. [de Rolle] *Sur un intervalle compact $[a,b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$, si une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, et aussi dérivable sur l'intervalle ouvert $]a,b[$, et si enfin :*

$$f(b) = f(a),$$

alors il existe au moins un élément $c \in]a,b[$ tel que :

$$f'(c) = 0.$$

Démonstration. Un $c \in]a,b[$ qui convient est par exemple

$$c := \max_{[a,b]} f \qquad \text{ou} \qquad c := \min_{[a,b]} f,$$

car on sait (exercice de révision) qu'en un extremum d'une fonction dérivable, la dérivée s'annule nécessairement (sinon, s'il y avait une pente non nulle, le point en question ne serait pas un extremum). $\square$

Voici maintenant l'énoncé que nous attendons tous, à savoir celui qui permet d'intervertir l'intégration et la dérivation partielle.

Théorème 2.3. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Avec les mêmes notations précédemment :*

$$F(t) = \int_E f(x,t)\,dx,$$

si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(ii) *pour tout $x \in E$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable, de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t);$$

(iii) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;

Alors en tout $t \in I$ fixé, la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E, et surtout, la fonction :

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est dérivable sur I de dérivée égale à :

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx.$$

Démonstration. Fixons donc un paramètre $t \in I$ et donnons-nous une suite quelconque $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ d'élément $t_n \in I\backslash\{t\}$ qui tendent vers :

$$t = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

En tout point $x \in E$, les quotients différentiels $\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t}$ ont alors une valeur finie qui tend par hypothèse vers :

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \lim_{n\to\infty}\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t}.$$

La formule des accroissement finis assure alors qu'il existe au moins un élément s_n situé entre t_n et t tel que :

$$\frac{f(x,t_n)-f(x,t)}{t_n-t} = \frac{\partial f}{\partial t}(x,s_n).$$

Grâce à l'hypothèse **(ii)**, la suite de fonctions intégrables sur E :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\right)_{n=1}^{\infty}$$

vérifie les hypothèses du Théorème de convergence dominée, d'où nous déduisons que la fonction-limite :

$$\begin{aligned} x \longmapsto & \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n) \\ & = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \end{aligned}$$

est Lebesgue-intégrable sur E, et aussi que l'on a :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\, dx & = \int_E \lim_{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n)\, dx \\ & = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)\, dx. \end{aligned}$$

Mais comme $t_n \neq t$ pour tout $n \geqslant 1$, on peut grâce à la linéarité de l'intégrale développer les quotients différentiels finis :

$$\begin{aligned} \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, s_n) & = \int_E \frac{f(x, t_n) - f(x, t)}{t_n - t}\, dx \\ & = \frac{1}{t_n - t} \left\{ \int_E f(x, t_n)\, dx - \int_E f(x, t)\, dx. \right\}, \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration (exercice visuel). □

Par exemple, ce théorème permet d'établir que la *Fonction Gamma d'Euler*, définie par :

$$\Gamma(y) := \int_0^\infty e^{-x}\, x^{y-1}\, dx$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0, \infty[$, et que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k-ème vaut :

$$\Gamma^{(k)}(y) = \int_0^\infty e^{-x}\, x^{y-1}\, \big(\log x\big)^k\, dx.$$

De même, à partir de la formule élémentaire valable pour $y > 0$ réel :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + y^2} = \frac{\pi}{2y},$$

on obtient par dérivation, pour tout entier $n \geqslant 2$, que (exercice) :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + y^2)^n} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdots (2n-4)} \cdot \frac{1}{y^{2n-1}}.$$

Outre la continuité et la dérivabilité des intégrales dépendant d'un ou de plusieurs paramètres, il est également extrêmement utile dans de nombreuses applications de connaître la régularité d'une intégrale :

$$F(z) := \int_E f(x, z)\, dx$$

d'une fonction $f \colon E \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ qui dépend *holomorphiquement* d'un paramètre $z \in \mathbb{C}$, où $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert.

Rappelons à cet effet rapidement qu'une fonction :

$$h\colon\quad \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dite *analytique* si elle est développable en série entière convergente au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$, c'est-à-dire si :

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \exists\, r_0 > 0,\;\; r_0 < \mathsf{dist}(z_0, \partial\Omega), \quad \forall\, |z - z_0| < r_0 \quad h(z) \,=\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z - z_0\right)^n$$

la série $\sum a_n(z - z_0)^n$ étant convergente dans le disque $\{z \in \mathbb{C}\colon |z - z_0| < r_0\}$. On démontre — et nous admettrons ce résultat ici — que les fonctions analytiques sont indéfiniment dérivables et que leurs dérivées de tous ordres par rappport à z :

$$\frac{\partial^k h}{\partial z^k}(z) \qquad\qquad (k \geqslant 1)$$

demeurent analytiques dans le même ouvert Ω. Citons alors sans démonstration le résultat suivant.

Théorème 2.4. [Analyticité d'une intégrale dépendant d'un paramètre complexe] *Avec les notations qui précèdent :*

$$F(z) \,:=\, \int_E f(x,z)\, dx,$$

E étant un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$, si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $x \longmapsto f(x,z)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(ii) *pour tout $x \in E$, la fonction $z \longmapsto f(x,z)$ est analytique dans Ω ;*

(iii) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\big|f(x,z)\big| \,\leqslant\, g(x),$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;

Alors la fonction :

$$z \,\longmapsto\, \int_E f(x,z)\, dx$$

est analytique dans Ω de dérivées k-èmes d'ordre quelconque égales à :

$$\frac{d^k}{dz^k} \int_E f(x,z)\, dx \,=\, \int_E \frac{\partial^k f}{\partial z^k}(x,z)\, dx.$$

Par exemple, la fonction Γ d'Euler complexe définie pour $z \in \mathbb{C}$ par :

$$\Gamma(z) \,:=\, \int_0^\infty e^{-x}\, x^{z-1}\, dx$$

est analytique dans le demi-plan complexe $\big\{z \in \mathbb{C}\colon\; \mathrm{Re}\, z > 0\big\}$.

3. Exercices

Exercice 1. Soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide, soit une fonction $f\colon \mathbb{R} \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ et soient deux fonctions $u, v\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant :

- f est continue sur $\mathbb{R} \times I$;
- la dérivée partielle $(x,t) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ existe et est continue sur $\mathbb{R} \times I$;
- u et v sont dérivables sur I ;

Montrer que la fonction $G\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$G(t) := \int_{u(t)}^{v(t)} f(x,t)\, dx$$

est bien définie, qu'elle est dérivable sur I, et enfin, que sa dérivée vaut :

$$G'(t) = \int_{u(t)}^{v(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\, dx + f\big(v(t),t\big) \cdot v'(t) - f\big(u(t),t\big) \cdot u'(t).$$

Exercice 2. En discutant les cas $a \leqslant 1$ et $a > 1$, étudier :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \Big(1 + \frac{x}{n}\Big)^n e^{-ax}\, dx.$$

Exercice 3. Soit une fonction mesurable intégrable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Avec un paramètre $t > 0$, on introduit :

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + t\, f(x)^2}}\, dx.$$

(a) Montrer que F prend des valeurs finies, qu'elle est continue, et que $0 = \lim_{t\to\infty} F(t)$.

(b) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(c) Montrer l'existence de la dérivée à droite de F en 0 :

$$\lim_{\substack{t \longrightarrow 0 \\ >}} \frac{F(t) - F(0)}{t},$$

dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$.

(d) Quelle condition nécessaire et suffisante f doit-elle satisfaire pour que F soit de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,\infty[$?

Exercice 4. [Fonction gamma d'Euler et formule de Stirling] Pour $s > 0$, soit la fonction :

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty x^{s-1}\, e^{-x}\, dx.$$

(a) Montrer, pour $s > 0$, que l'intégrale a un sens, à savoir que les deux limites suivantes existent :

$$\lim_{\substack{\delta \to 0 \\ >}} \int_\delta^1 x^{s-1}\, e^{-x}\, dx \qquad \text{et} \qquad \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \int_1^{\mathrm{M}} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx.$$

(b) Montrer que Γ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$.

(c) Déterminer $\lim_{s \overset{>}{\to} 0} \Gamma(s)$ ainsi que $\lim_{s\to\infty} \Gamma(s)$.

(d) Montrer que $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ pour tout $s > 0$, puis, pour $n \geqslant 1$ entier, montrer que $\Gamma(n+1) = n!$.

(e) En utilisant la valeur de $\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi x^2}\, dx = 1$, calculer :

$$\Gamma\big(\tfrac{1}{2}\big) = \sqrt{\pi} \qquad \text{et} \qquad \Gamma\big(\tfrac{3}{2}\big) = \tfrac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(f) Montrer que :

$$\int_0^n x^{s-1} \Big(1 - \frac{x}{n}\Big)^n dx = \frac{n!\, n^s}{s(s+1)\cdots(s+n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(s).$$

Indication: Comparer $(1 - \frac{x}{n})^n$ et e^{-x} lorsque $x \in [0,n]$.

(g) Montrer, à l'aide d'un changement de variable, que :

$$\Gamma(s+1) = s^s \sqrt{s}\, e^{-s} \int_{-\sqrt{s}}^\infty F(s,u)\, du,$$

avec :

$$F(s,u) := \left(1 + \frac{u}{\sqrt{s}}\right)^s e^{-u\sqrt{s}}.$$

(h) Déterminer la limite ponctuelle simple, lorsque $s \longrightarrow \infty$, de $F(s,u)$.

(i) Établir l'inégalité $\log(1+t) \leqslant t - \frac{t^2}{2}$ pour $-1 < t \leqslant 0$.

(j) En utilisant $\int_{-\infty}^0 e^{-\frac{u^2}{2}}\,du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, calculer :

$$\lim_{s\to\infty} \int_{-\sqrt{s}}^0 F(s,u)\,du.$$

(k) Montrer que $F(s,u) \leqslant (1+u)\,e^{-u}$ pour tout $s \geqslant 1$ et tout $u \geqslant 0$.

(l) Trouver :

$$\lim_{s\to\infty} \int_0^\infty F(s,u)\,du = \sqrt{2\pi}.$$

(m) En déduire la *formule de Stirling* qui offre une asymptotique pour la factorielle d'un entier :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

Espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

> Dans ce chapitre, l'hypothèse d'intégrabilité quadratique sera remplacée par celle de l'intégrabilité de $\left|f(x)\right|^{\mathsf{p}}$. L'analyse de ces classes de fonctions jettera une lumière toute particulière sur l'avantage spécial dont bénéficie l'exposant $\mathsf{p} = 2$.
> F. RIESZ, 1910

Les espaces de fonctions intégrables sur $\mathbb{R}^d$, notamment les espaces L^1, L^2, L^{p}, jouent un rôle central dans de nombreuses questions de l'Analyse Mathématique. L'importance toute particulière des espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ provient du fait qu'ils offrent une généralisation partielle, mais utile, des espaces de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de carré intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Dans l'ordre de simplicité logique, l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ vient en première position, puisqu'il décrit l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables. Par dualité, l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables bornées apparaît naturellement, et ce n'est qu'une généralisation de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}^d$ munies de la norme du supremum $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)}$.

Mais c'est l'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui présente l'intérêt le plus élevé, en tant qu'il plonge les racines de son origine dans l'acte de naissance de la théorie des séries de Fourier sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z}$.

Les espaces de Hölder $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions de puissance p-ème intégrables, avec $1 < \mathsf{p} < \infty$ et $\mathsf{p} \neq 2$, pourraient sembler quelque peu artificiels, mais les résultats structuraux fondamentaux que nous allons démontrer dans ce court chapitre vont nous convaincre du contraire.

1. Espaces L^{p} pour $0 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$

Dans tout ce qui va suivre, en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$ sera muni de la mesure de Lebesgue, notée $dx = dx_1 \cdots dx_d$, les sous-ensembles dits *mesurables* $E \subset \mathbb{R}^d$ ayant été définis dans un chapitre qui précède.

Définition 1.1. Pour un exposant p satisfaisant :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \infty,$$

l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est constitué des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) := \left\{ f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} \left|f(x)\right|^{\mathsf{p}} dx < \infty \right\}.$$

Lorsque $\mathsf{p} = 1$, on retrouve bien entendu l'espace, noté dans un chapitre qui précède :

$$L^1(\mathbb{R}^d),$$

des fonctions dites *Lebesgue-intégrables*. Nous avons alors démontré que la quantité :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|\, dx$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $L^1(\mathbb{R}^d)$, *et que* $\big(L^1(\mathbb{R}^d),\, \|\cdot\|_{L^1}\big)$ *est un espace vectoriel normé complet*, pourvu seulement qu'on s'accorde pour dire que deux fonctions sont *égales* lorsqu'elles prennent les mêmes valeurs sauf éventuellement sur un sous-ensemble de mesure nulle.

De même, nous allons établir, lorsque $\mathsf{p} = 2$, que l'espace :

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \bigg\{ f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f \text{ est mesurable et satisfait } \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^2\, dx <, \infty \bigg\},$$

est un espace vectoriel normé complet. *Une structure supplémentaire très importante enrichit $L^2(\mathbb{R}^d)$, à savoir la structure d'un espace de Hilbert pour le produit scalaire :*

$$\big\langle f,\, g\big\rangle_{L^2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

On peut aussi définir les espaces L^{p} pour $\mathsf{p} = \infty$, sans utiliser d'intégrale, mais nous verrons dans la Section **4** que les L^{p} tendent en un certain sens naturel vers L^∞ lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.

Définition 1.2. L'espace des $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions *essentiellement bornées* sur $\mathbb{R}^d$ est :

$$\begin{aligned} L^\infty(\mathbb{R}^d) := \Big\{ f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}\colon\ f &\text{ est mesurable et il existe une constante } 0 \leqslant C < \infty \\ &\text{telle que } \big|f(x)\big| \leqslant C \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d \Big\}. \end{aligned}$$

On définit alors la *norme* L^∞ de f :

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} := \inf C,$$

comme étant l'infimum de ces constantes C, lorsqu'il en existe au moins une, et l'on a alors en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\big|f(x)\big| \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. En effet, en introduisant l'ensemble :

$$E := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |f(x)| > \|f\|_{L^\infty}\big\},$$

et en introduisant, pour $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, les ensembles :

$$E_n := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ |f(x)| > \|f\|_{L^\infty} + 1/n\big\},$$

on a $m(E_n) = 0$ pour tout n et $E = \cup\, E_n$, d'où $m(E) = 0$. □

Parfois, on appelle $\|f\|_{L^\infty}$ le *supremum essentiel* de f. Il est clair que cette norme généralise la norme du supremum sur les fonctions continues $g\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$:

$$\|g\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R}^d)} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|.$$

Mais revenons aux « vrais » espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ de fonctions dont la puissance p-ème est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.

Comme dans les cas déjà connus de $L^1(\mathbb{R}^d)$ et de $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est naturel de convenir que les fonctions sont définies à un ensemble de mesure nulle près, et donc que l'on a :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0,$$

lorsque et seulement lorsque $f = 0$ presque partout, où la quantité « *norme* L^{p} » d'une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ devrait, comme on doit s'y attendre, être naturellement définie par :

$$\big\|f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

la puissance $\frac{1}{\mathsf{p}}$ garantissant l'homogénéité par dilatation que toute norme doit satisfaire :

$$\big\|\lambda\,f\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} = |\lambda|\cdot\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \qquad\qquad (\lambda\in\mathbb{C}).$$

Toutefois, cette idée de définir une telle norme ne pourrait avoir de sens que si on parvenait à prouver que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ jouit d'une structure d'espace vectoriel, et heureusement, les raisonnements qui vont suivre vont nous faire parvenir à un tel résultat.

Lorsque l'exposant p satisfait $0 < \mathsf{p} < 1$, on constate (Exercice 2) qu'une inégalité du triangle ne peut pas être satisfaite, ce qui justifie, pour bénéficier d'une structure naturelle d'espace vectoriel, de se restreindre à supposer $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Dans cette circonstance, c'est l'*inégalité* dite *de Hölder* généralisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cas $\mathsf{p} = 2$) qui constitue l'outil principal de toute la théorie, et elle servira à démontrer l'*inégalité de Minkowski*, établissant que $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ est bien un espace vectoriel.

2. Inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit donc un exposant réel p, et supposons qu'il est éventuellement égal à l'infini :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty.$$

Définition 2.1. L'*exposant conjugué* de p est l'unique nombre réel p' satisfaisant :

$$\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1.$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\mathsf{p}' &= \frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &= \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},\end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$1 < \mathsf{p} < \infty \qquad\Longleftrightarrow\qquad 1 < \mathsf{p}' < \infty.$$

Bien entendu ici, on convient que :

$$\frac{1}{\infty} = 0 \qquad \text{et que :} \qquad \frac{1}{0} = \infty,$$

d'où (exercice visuel) :

$$\infty' = 1 \qquad \text{et} \qquad 1' = \infty.$$

Observation 2.2. *L'exposant* $\mathsf{p} = 2$*, et seulement lui, est auto-conjugué :*

$$2 = \mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2. \qquad \square$$

Théorème 2.3. [Inégalité de Hölder] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 < \mathsf{p} < \infty,$$

pour toute paire de fonctions appartenant à des espaces conjugués :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d),$$

le produit $f\,g$ *appartient à* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *et l'on a l'inégalité :*

$$\big\|f\,g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)},$$

à savoir on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}.$$

L'Exercice 3 propose de caractériser simplement le cas d'égalité ci-dessus.

En particulier, pour $\mathsf{p} = \mathsf{p}' = 2$, on retrouve l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big\|f\,\overline{g}\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

que l'on a déjà démontrée par d'autres voies.

De plus, pour $\mathsf{p} = \infty$, d'où $\mathsf{p}' = 1$, nous affirmons que l'inégalité est encore valable :

$$\big\|f\,g\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

ce qui est essentiellement évident, puisqu'il suffit de majorer dans l'intégrale la fonction f par son supremum essentiel :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x)\,g(x)\big|\,dx &\leqslant \underset{\mathbb{R}^d}{\mathsf{supess}}\,|f| \int_{\mathbb{R}^d} \big|g(x)\big|\,dx \\ &= \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Démonstration. Pour ce qui est du cas le plus fréquent $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par généraliser l'inégalité évidente (exercice !) :

$$t\,s \leqslant \frac{t^2 + s^2}{2},$$

satisfaite par deux nombres réels $t, s \geqslant 0$ quelconques.

Lemme 2.4. *Pour tout exposant* θ *avec* $0 \leqslant \theta \leqslant 1$, *deux nombres réels* $t, s \geqslant 0$ *quelconques satisfont toujours :*

$$t^\theta\,s^{1-\theta} \leqslant \theta\,t + (1-\theta)\,s.$$

Démonstration. En effet, puisqu'on a gratuitement $0 \leqslant 0$ lorsque $s = t = 0$, on peut supposer que $(s,t) \neq (0,0)$. Ensuite, grâce au fait que l'inégalité à établir est symétrique à travers les échanges simultanés :

$$\theta \longleftrightarrow (1-\theta) \qquad\qquad s \longleftrightarrow t,$$

on peut supposer que $s \neq 0$.

Or puisque l'ensemble des couples $(t,s) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+^*$ est le même que l'ensemble des couples (ts, s) avec $s \neq 0$, nous sommes ramenés à établir :

$$(ts)^\theta\,s^{1-\theta} \overset{?}{\leqslant} \theta\,ts + (1-\theta)\,s,$$

ce qui, après division par s, et disparition de s, devient :

$$t^\theta \overset{?}{\leqslant} \theta\, t + 1 - \theta.$$

On a donc affaire ici à la fonction d'une seule variable $t \in \mathbb{R}_+$:

$$f(t) \,:=\, t^\theta - \theta\, t - 1 + \theta,$$

partant de la valeur négative $f(0) = -1 + \theta$, dont la fonction dérivée :

$$f'(t) \,=\, \theta\big(t^{\theta-1} - 1\big),$$

est $\geqslant 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant 1$, puis $\leqslant 0$ pour $1 \leqslant t < \infty$, ce qui force f à atteindre son maximum au point $t = 1$, où elle vaut :

$$f(1) = 0,$$

et donc f prend toujours des valeurs $\leqslant 0$, ce qui établit l'inégalité désirée. □

Maintenant, nous pouvons raisonner comme suit pour obtenir l'inégalité de Hölder.

Si l'on a soit $||f||_{L^{\mathsf{p}}} = 0$, soit $||g||_{L^{\mathsf{p}'}} = 0$, il vient soit $f = 0$ soit $g = 0$ presque partout, et donc dans les deux cas $f\, g = 0$ presque partout, et enfin, l'inégalité de Hölder se réduit à l'inégalité triviale $0 \leqslant 0$.

Nous pouvons donc supposer que :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}} \,\neq\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad ||g||_{L^{\mathsf{p}'}} \,\neq\, 0.$$

Divisons alors f et g par leurs normes :

$$f \,\longmapsto\, \frac{f}{||f||_{L^{\mathsf{p}}}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad g \,\longmapsto\, \frac{g}{||g||_{L^{\mathsf{p}'}}},$$

afin de nous ramener, dans l'inégalité à établir, au cas où f et g sont toutes deux de norme unité :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad ||g||_{L^{\mathsf{p}'}} \,=\, 1.$$

En un point fixé $x \in \mathbb{R}^d$, appliquons alors le lemme qui précède aux deux nombres réels :

$$t \,:=\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad s \,:=\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'},$$

avec l'exposant :

$$\theta \,:=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \qquad\qquad \text{d'où} \qquad\qquad 1 - \theta \,=\, \frac{1}{\mathsf{p}'},$$

ce qui nous donne :

$$\big|f(x)\, g(x)\big| \,\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \big|g(x)\big|^{\mathsf{p}'}.$$

Pour terminer, une simple intégration de cette inégalité apporte sur un plateau doré le jeu d'(in)égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
\big|\big|f\, g\big|\big|_{L^1} \,&\leqslant\, \frac{1}{\mathsf{p}}\, \big(||f||_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}\, \big(||g||_{L^{\mathsf{p}'}}\big)^{\mathsf{p}'} \\
&=\, \frac{1}{\mathsf{p}} \cdot 1^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} \cdot 1^{\mathsf{p}'} \\
&=\, 1 \\
&=\, ||f||_{L^{\mathsf{p}}} \cdot ||g||_{L^{\mathsf{p}'}},
\end{aligned}$$

qui conclut les hostilités. □

Nous sommes maintenant prêts pour établir l'inégalité du triangle dans l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 2.5. [Minkowski] *Étant donné un exposant* p *quelconque satisfaisant :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty,$$

pour toute paire de fonctions dans le même espace de Hölder :

$$f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d) \qquad \text{et} \qquad g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d),$$

on a :

$$\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}.$$

Démonstration. Le cas déjà connu $\mathsf{p} = 1$ s'obtient instantanément en intégrant l'inégalité :

$$\big|f(x)+g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big| + \big|g(x)\big|.$$

Le cas $\mathsf{p} = \infty$, aisé, est laissé au lecteur en exercice de compréhension.

Maintenant, pour $1 < \mathsf{p} < \infty$, commençons par vérifier que $f + g \in L^{\mathsf{p}}$ lorsque $f, g \in L^{\mathsf{p}}$.

À cet effet, comme en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ on a soit :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \big|g(x)\big|, \qquad \text{soit} \qquad \big|g(x)\big| \leqslant \big|f(x)\big|,$$

on a toujours soit :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|g(x)\big|^{\mathsf{p}}, \qquad \text{soit} \qquad \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}},$$

d'où toujours :

$$\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} + 2^{\mathsf{p}}\,\big|g(x)\big|^{\mathsf{p}},$$

ce qui démontre bien, en intégrant cette dernière inégalité, que $f + g \in L^{\mathsf{p}}$ avec l'estimation :

$$\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\,\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} + 2^{\mathsf{p}}\,\big(\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},$$

qui est moins bonne que l'inégalité de Minkowski désirée à cause de la constante $2^{\mathsf{p}} > 1$, donc il reste du travail.

En fait, comme $\mathsf{p} > 1$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}} &= |f(x)+g(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} \\ &\leqslant |f(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1} + |g(x)| \cdot \big|f(x)+g(x)\big|^{\mathsf{p}-1}.\end{aligned}$$

Or si p' est l'exposant conjugué de p :

$$\mathsf{p}' = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1},$$

qui satisfait donc :

$$(\mathsf{p}-1)\,\mathsf{p}' = \mathsf{p},$$

nous voyons que la fonction $(f+g)^{\mathsf{p}-1}$ qui apparaît deux fois dans l'inégalité ci-dessus appartient à l'espace $L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$, donc nous pouvons appliquer deux fois l'inégalité de Hölder et chercher ensuite à faire ré-apparaître les normes L^{p} :

$$\begin{aligned}
\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \big\||f|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1}+\big\||g|\cdot|f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^1}\\
&\leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big\||f+g|^{\mathsf{p}-1}\big\|_{L^{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(\big|f+g\big|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big(\big|f+g\big|^{\mathsf{p}-1}\big)^{\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f+g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f+g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}\\
&= \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}
\end{aligned}$$

ce qui donne en factorisant :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \leqslant \Big(\big\|f+g\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}\Big\{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big\}.$$

Pour terminer, dans l'inégalité de Minkowski à démontrer, on peut bien sûr supposer que $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}>0$ (exercice mental), et donc en simplifiant à gauche et à droite par la bonne puissance de $\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}$, grâce au fait « miraculeux » (exercice) que :

$$\mathsf{p}-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'} = 1,$$

on obtient bien l'inégalité de Minkowski :

$$\big(\|f+g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}+\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}. \qquad \square$$

3. Complétude de $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$

Taking limits is a necessity in many problems, and the L^{p} spaces would be of little use if they were not complete. Elias STEIN, 2002

En adaptant la démonstration que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est complet, on démontre plus généralement que tous les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ sont complets.

Théorème 3.1. [Riesz-Fischer] *Pour* $1\leqslant\mathsf{p}\leqslant\infty$*, le* $\mathbb{C}$*-espace vectoriel* $L^{\mathsf{p}}\big(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}\big)$ *muni de la métrique dérivée de sa norme :*

$$d\big(f,g\big) := \bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f-g\big|^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

est complet. $\square$

La démonstration dans le cas $\mathsf{p}=\infty$, plus élémentaire que celle des cas $1\leqslant\mathsf{p}<\infty$, est suggérée en exercice (utiliser la Théorie de la mesure).

4. Espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$

Naturellement, les espaces L^{p} ont un sens sur les sous-ensembles mesurables quelconques de $\mathbb{R}^d$.

Définition 4.1. Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est un sous-ensemble mesurable, pour un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(E)$ est constitué des fonctions mesurables sur E de puissance p-ème intégrable :

$$L^{\mathsf{p}}(E) := \left\{ f\colon\, E \longrightarrow \mathbb{C}\colon\, f \text{ est mesurable et satisfait } \int_E \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx < \infty \right\}.$$

On peut aussi définir $L^\infty(E)$, en mimant la définition de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Lorsque $m(E) < \infty$ est de mesure (de Lebesgue) finie, les espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$ peuvent être comparés entre eux.

Proposition 4.2. *Si $E \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable avec $m(E) < \infty$, pour tout couple d'exposants :*

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} \leqslant \infty,$$

on a les inclusions inversées :

$$L^1(E) \supset L^{\mathsf{p}}(E) \supset L^{\mathsf{q}}(E) \supset L^\infty(E),$$

et lorsque de plus :

$$1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \mathsf{q} < \infty,$$

on a les inégalités normiques :

$$\frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\, ||f||_{L^{\mathsf{p}}(E)} \leqslant \frac{1}{m(E)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}}\, ||f||_{L^{\mathsf{q}}(E)}.$$

Démonstration. Le cas où $\mathsf{q} = \infty$ étant laissé au lecteur-étudiant, nous pouvons alors bien entendu supposer que :

$$1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty.$$

Si donc une fonction quelconque $f \in L^{\mathsf{q}}(E)$ est donnée, il s'agit de faire voir que cette fonction appartient automatiquement à $L^{\mathsf{p}}(E)$, et pour ce faire, nous devons chercher à majorer :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}},$$

sachant que seule l'intégrabilité de la puissance q-ème de f est connue, et alors une *astuce simple et artificielle mais omniprésente dans toute la théorie* consiste à faire apparaître un facteur 1 implicite afin d'appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\int_E |f|^{\mathsf{p}} \cdot 1 \leqslant \left(\int_E \big(|f|^{\mathsf{p}}\big)^{\mathsf{p}_1} \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1}} \underbrace{\left(\int_E 1^{\mathsf{p}_1'} \right)^{\frac{1}{\mathsf{p}_1'}}}_{\substack{\text{quantité finie} \\ \text{puisque } m(E) < \infty}},$$

en choisissant des exposants conjugués :

$$\frac{1}{\mathsf{p}_1} + \frac{1}{\mathsf{p}_1'} = 1,$$

afin que l'exposant de $|f|$ soit justement égal à q :

$$\mathsf{p}\,\mathsf{p}_1 = \mathsf{q},$$

ce qui impose le choix unique :

$$\mathsf{p}_1 := \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}} \qquad \text{d'où} \qquad \frac{1}{\mathsf{p'}_1} = 1 - \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}.$$

L'inégalité obtenue devient alors :

$$\begin{aligned}\Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \bigg(\int_E |f|^{\mathsf{q}}\bigg)^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &= \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{q}}(E)}\Big)^{\mathsf{p}} \cdot \Big(m(E)\Big)^{1-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui montre tout d'abord bien que $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$, et ensuite, après prise de racine p-ème, offre l'inégalité annoncée. □

Toutefois, lorsque la mesure $m(E) = \infty$ de E est infinie, ces inclusions cessent d'être vraies en général, *cf.* l'Exercice 4.

Pour conclure ce bref chapitre, voici un énoncé qui montre que l'espace $L^\infty(E)$ est un cas-limite des espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$.

Proposition 4.3. *Sur un ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, pour toute fonction :*

$$f \in L^\infty(E),$$

d'où par la Proposition 4.2, pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$:

$$f \in L^{\mathsf{p}}(E),$$

on a :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} \longrightarrow \|f\|_{L^\infty(E)},$$

lorsque $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$.

Démonstration. Si $\|f\|_{L^\infty} = 0$, on a $f = 0$ presque partout, donc $\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} = 0$ pour tout p, et $0 \to 0$ gratuitement. De même, lorsque $m(E) = 0$, il n'y a rien à vérifier.

En supposant donc que $m(E) > 0$ et que $\|f\|_{L^\infty} > 0$, majorons :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \bigg(\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \bigg(\int_E \big(\|f\|_{L^\infty}\big)^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty} \cdot \big(m(E)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.\end{aligned}$$

Or comme $a^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \longrightarrow 1$ pour tout nombre réel $a > 0$, on déduit :

$$\limsup_{\mathsf{p}\to\infty} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^\infty}.$$

D'un autre côté, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on doit avoir d'après la Définition 1.2 du supremum essentiel :

$$m\Big(\big\{x \in E\colon\ |f(x)| \geqslant \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\big\}\Big) \geqslant \delta > 0,$$

pour un certain $\delta = \delta(\varepsilon)$ strictement positif, d'où (exercice mental) :

$$\int_E |f(x)|^{\mathsf{p}}\,dx \geqslant \delta \cdot \big(\|f\|_{L^\infty} - \varepsilon\big)^{\mathsf{p}}.$$

Après prise de la racine p-ème de cette inégalité, nous déduisons :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty} - \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire :

$$\liminf_{\mathsf{p}\to\infty} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \;\geqslant\; \|f\|_{L^\infty}$$

La comparaison visuelle entre les deux inégalités concernant les limites supérieure et inférieure montre que le résultat tombe du ciel. □

5. Séparabilité de $L^{\mathsf{p}}(E)$

Comme $L^1(\mathbb{R}^d)$, les espaces $L^{\mathsf{p}}(E)$ sont séparables.

Théorème 5.1. *Sur tout ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ et pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, l'espace $L^{\mathsf{p}}(E)$ des fonctions de puissance p-ème intégrable sur E est séparable :*

$$\exists\, \big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty} \in L^{\mathsf{p}}(E) \quad \forall\, g \in L^{\mathsf{P}}(E) \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \big\|g - \varphi_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big\|_{L^{\mathsf{p}}(E)} \;\leqslant\; \varepsilon.$$

Démonstration. Fixons $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. En multipliant les fonctions impliquées par la fonction indicatrice $\mathbf{1}_E$ de E, tout revient à considérer des fonctions $g, \varphi_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, et nous pouvons donc travailler avec $E := \mathbb{R}^d$.

Comme dans la démonstration du fait que $L^1(\mathbb{R}^d)$ est séparable, on regarde la famille des fonctions de la forme $\lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}}$, où $\lambda_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}$ est un nombre complexe à composantes rationnelles, et où :

$$R_{\mathbb{Q}} \;=\; \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \big[a_{i,\mathbb{Q}}, b_{i,\mathbb{Q}}\big] \qquad\qquad (1 \leqslant i \leqslant d),$$

est un rectangle de $\mathbb{R}^d$ à coordonnées rationnelles.

Affirmation 5.2. *Les sommes finies de ce type de fonctions sont denses dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$.*

Démonstration. Soient donc $g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ quelconque et $\varepsilon > 0$ arbitraire. Pour des grands entiers $\mathrm{K} \gg 1$, tronquons :

$$g_{\mathrm{K}}(x) \;:=\; \begin{cases} g(x) & \text{lorsque } |x| \leqslant \mathrm{K} \text{ et } |g(x)| \leqslant \mathrm{K}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Alors comme l'intégrabilité $\int |g|^{\mathsf{p}} < \infty$ garantit que $|g(x)| < \infty$ presque partout, on a la convergence ponctuelle :

$$g_{\mathrm{K}}(x) \underset{\mathrm{K}\to\infty}{\longrightarrow} g(x) \qquad\qquad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d).$$

De plus, par $|g_{\mathrm{K}}| \leqslant |g|$, on a la majoration uniforme :

$$\big|g - g_{\mathrm{K}}\big|^{\mathsf{p}} \;\leqslant\; 2^{\mathsf{p}}\, |g|^{\mathsf{p}},$$

donc le théorème de convergence dominée offre :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{K}\to\infty} \big\|g - g_{\mathrm{K}}\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)},$$

et donc, il existe $\mathrm{K}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\big\|g - g_{\mathrm{K}(\varepsilon)}\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \;\leqslant\; \frac{\varepsilon}{2}.$$

En notant de manière abrégée $g_{\mathsf{K}(\varepsilon)} =: h$, on est maintenant ramené à approximer en norme L^{p} une fonction $h \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ qui est de plus *bornée* et à support *bornée*. Or ceci garantit qu'on a de surcroît :

$$h \in L^1(\mathbb{R}^d)!$$

Et donc, le théorème de séparabilité de $L^1(\mathbb{R}^d)$ fournit, pour tout $\varepsilon' > 0$ — qui sera choisi dans un instant —, l'existence d'une fonction-type :

$$\varphi = \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}},$$

telle que :

$$\big\|h - \varphi\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon'.$$

Or un examen de la construction de cette approximante φ montre qu'on peut aisément supposer que sa taille et son support ne débordent pas trop de celui de h :

- $\big|\varphi(x)\big| \leqslant 2 \sup |h| \leqslant 2\,\mathrm{K}$;
- $\mathrm{supp}\, \varphi \subset \big\{|x| \leqslant 2\,\mathrm{K}\big\}$.

Si donc nous choisissons :

$$0 < \varepsilon' \leqslant \frac{1}{(3\,\mathrm{K})^{\mathsf{p}-1}} \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\mathsf{p}},$$

il vient par une majoration élémentaire :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \big|h - \varphi\big|^{\mathsf{p}} &\leqslant \sup_{|x| \leqslant 2\mathrm{K}} |h - \varphi|^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}^d} |h - \varphi| \\
&\leqslant \big(\mathrm{K} + 2\,\mathrm{K}\big)^{\mathsf{p}-1}\, \varepsilon' \\
&= \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\mathsf{p}},
\end{aligned}$$

à savoir $\|h - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$, et enfin $\|g - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|g - h\|_{L^{\mathsf{p}}} + \|h - \varphi\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \varepsilon$. □

Comme dans le cas de $L^1(\mathbb{R}^d)$, on vérifie que cet ensemble *dense* dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de fonctions-type $\sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}}$ est dénombrable, donc peut être organisé en une certaine *suite* $\big(\varphi_n\big)_{n=1}^{\infty}$ telle qu'on l'a notée dans l'énoncé du théorème. □

Pour terminer ce chapitre, une adaptation (exercice) d'un théorème de densité déjà vu dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables offre un énoncé extrêmement utile au-delà dans de nombreux contextes.

Théorème 5.3. *Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable, et soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Dans l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables de puissance p-ème intégrable, les trois familles suivantes de fonctions sont denses pour la norme $\|\cdot\|_{L^{\mathsf{p}}(E)}$:*

(i) *les fonctions étagées ;*

(ii) *les fonctions en escalier ;*

(iii) *les fonctions continues à support compact.*

6. Exercices

Exercice 1. Montrer que $L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions mesurables bornées presque partout en valeur absolue, n'est pas séparable. Indication: En dimension $d = 1$, utiliser la famille non dénombrable de fonctions :

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \lambda_n \cdot \mathbf{1}_{]n,n+1[},$$

où $\lambda_n \in \{0, 1\}$ pour tout n, et en dimension $d \geqslant 2$, imiter cette famille avec des cubes au lieu d'intervalles.

Exercice 2. On considère les espaces $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $0 < \mathsf{p} < \infty$. Montrer que si l'on a :

$$\big\| f + g \big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \| f \|_{L^{\mathsf{p}}} + \| g \|_{L^{\mathsf{p}}}$$

pour toutes fonctions $f, g \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, alors nécessairement $\mathsf{p} \geqslant 1$.

Exercice 3. Si $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)$ avec $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1$ ne sont pas toutes deux nulles presque partout, montrer qu'on a égalité dans l'inégalité de Hölder du Théorème 2.3 :

$$\big\| f\, g \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = \| f \|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)} \, \| g \|_{L^{\mathsf{p}'}(\mathbb{R}^d)},$$

si et seulement s'il existe deux constantes réelles $a > 0$ et $b > 0$ telles que :

$$a \, \big| f(x) \big|^{\mathsf{p}} = b \, \big| g(x) \big|^{\mathsf{p}'} \qquad \text{(presque partout)}.$$

Indication: Examiner l'inégalité $\big| f(x) g(x) \big| \leqslant \frac{1}{\mathsf{p}} \, | f(x) |^{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} \, | g(x) |^{\mathsf{p}'}$ dans la démonstration du Théorème 2.3.

Exercice 4. Sur $\mathbb{R}^d$ muni de la mesure de Lebesgue, on considère l'espace $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$. Soit la première fonction :

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } \ |x| < 1 \\ 0 & \text{lorsque } \ |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

et soit la deuxième fonction :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha} & \text{lorsque } \ |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

(a) Montrer que $f_0 \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $p\, \alpha < d$.

(b) Montrer que $f_\infty \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ si et seulement si $d < p\, \alpha$.

(c) Qu'arrive-t-il si on considère la première fonction modifiée :

$$f_0(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\big(\frac{2}{|x|}\big)} & \text{lorsque } \ |x| < 1 \\ 0 & \text{lorsque } \ |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

et si on considère la deuxième fonction modifiée :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ |x| < 1 \\ \dfrac{1}{|x|^\alpha \log\big(2\, |x|\big)} & \text{lorsque } \ |x| \geqslant 1\, ? \end{cases}$$

Exercice 5. Soient $f, g \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables, avec $|g|^3$ intégrable. On introduit, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$F(t) := \int_0^\infty \frac{\arctan\big(t\, f(x)\big)}{(1+x)^{\frac{3}{4}}} \, g(x)\, dx.$$

(a) Montrer que F est à valeurs finies continue sur $\mathbb{R}$. Indication: Penser à utiliser l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que $\lim_{t \to \infty} F(t)$ existe, et en déterminer une expression.

(c) Montrer que F est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R} \backslash \{0\}$.

Exercice 6. Soit $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable de carré intégrable, *i.e.* $f \in L^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$.

(a) Montrer, pour tout $n \geqslant 1$, l'inégalité :

$$\int_0^1 x^n \left|f(x)\right| dx \;\leqslant\; \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,\|f\|_{L^2}.$$

(b) Montrer la finitude de :

$$\int_0^1 \bigg(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\left|f(x)\right|\bigg)\,dx \;<\; \infty.$$

(c) En déduire la formule :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 \frac{x^n}{n}\,f(x)\,dx \;=\; \int_0^1 f(x)\log\Big(\frac{1}{1-x}\Big)\,dx.$$

Exercice 7. Soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction positive mesurable. Pour $\lambda \geqslant 0$ réel, on regarde les ensembles de sur-niveau de f :

$$E_\lambda \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}\colon\; f(x) > \lambda\big\}.$$

(a) Vérifier que ces E_λ sont mesurables.

(b) Montrer que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Établir la formule :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx \;=\; \mathsf{p}\int_0^\infty \lambda^{\mathsf{p}-1}\,m\big(E_\lambda\big)\,d\lambda.$$

Exercice 8. Soit une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ pour un certain exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$F(x) \;:=\; \int_x^{x+1} f(t)\,dt.$$

(a) Montrer que F prend des valeurs finies, et qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{M}\to\infty}\int_{-\infty}^{-\mathrm{M}} \left|f(t)\right|^{\mathsf{p}} dt \;=\; \lim_{\mathrm{M}\to\infty}\int_{\mathrm{M}}^{\infty} \left|f(t)\right|^{\mathsf{p}} dt.$$

(c) En déduire que :

$$0 \;=\; \lim_{|x|\to\infty} F(x).$$

Exercice 9. Soient trois paramètres réels $0 < \kappa < 1$, $\beta > 1$, $\alpha < \beta$, et soient les deux suites de fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définies par :

$$f_n(x) \;:=\; \frac{n^\alpha}{(n+|x|)^\beta} \qquad\text{et}\qquad g_n(x) \;:=\; \frac{n^\kappa}{e^{n|x|}}.$$

(a) Montrer que $f_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, et calculer $\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})}$.

(b) Étudier le comportement de la suite $\big(\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)_{n=1}^{\infty}$ suivant les valeurs de p.

(c) Montrer que $g_n \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} \leqslant \infty$, et calculer $\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})}$.

(d) Étudier le comportement de la suite $\big(\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)_{n=1}^{\infty}$ suivant les valeurs de p.

(e) Déduire de ce qui précède que pour toute paire d'exposants distincts :

$$1 \;\leqslant\; \mathsf{p} \;<\; \mathsf{q} \;\leqslant\; \infty,$$

les deux topologies induites sur :

$$L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}) \cap L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$$

par les deux normes $\|\cdot\|_{L^{\mathsf{p}}}$ et $\|\cdot\|_{L^{\mathsf{q}}}$ ne sont pas comparables.

(f) On note $\ell^{\mathsf{p}}_{\mathbb{C}}$ l'ensemble des suites $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres complexes $x_n \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^{\mathsf{p}} < \infty$. Toujours pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} \leqslant \infty$, comparer $\ell^{\mathsf{p}}_{\mathbb{C}}$ et $\ell^{\mathsf{q}}_{\mathbb{C}}$.

Mesures abstraites et théorie de Carathéodory

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Algèbres et σ-algèbres

L'existence, établie par Vitali en 1905, de sous-ensembles non mesurables au sens de Borel-Lebesgue, explique que les cours théoriques sur la notion générale de mesure soient hérissés de tribus, clans, et autres cohortes qui désarçonnent les malheureux étudiants auxquels, bien entendu, on se garde d'expliquer quoi que ce soit ! M. Guinot

Soit X un ensemble quelconque. Classiquement, l'ensemble des sous-ensembles $E \subset X$ ou *parties* de X est noté :

$$\mathscr{P}(X).$$

Définition 1.1. Une collection $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ de sous-ensembles de X est appelée une *algèbre* si :

- $X \in \mathscr{A}$;
- $\mathscr{A}$ est stable par passage au complémentaire :

$$A \in \mathscr{A} \implies A^c = X \backslash A \in \mathscr{A};$$

- $\mathscr{A}$ est stable par réunions finies :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A} \implies A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}.$$

Alors l'ensemble vide appartient aussi à $\mathscr{A}$:

$$\emptyset = X^c \in \mathscr{A},$$

et $\mathscr{A}$ est aussi stable par intersections finies :

$$\begin{aligned}\forall\, n \in \mathbb{N}^* \quad A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A} \implies A_1 \cap \cdots \cap A_n &= \\ &= \big(A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c\big)^c \in \mathscr{A}.\end{aligned}$$

De plus, si $A, B \in \mathscr{A}$, alors $A \backslash B \in \mathscr{A}$, simplement parce que $A \backslash B = A \cap B^c$.

Une notion plus archaïque encore que celle d'algèbre sera utile plus tard.

Définition 1.2. Un π-*système* est un sous-ensemble $\mathscr{P} \subset \mathscr{P}(X)$ stable par intersections finies.

Par exemple, $\mathscr{A} = \{\emptyset, X\}$ est une algèbre, ainsi que :

$$\mathscr{A} = \big\{A \subset X : \, \mathsf{Card}\, A < \infty \text{ ou } \mathsf{Card}\, X \backslash A < \infty\big\}.$$

Le passage à des familles dénombrables de sous-ensembles joue un rôle important pour répondre aux exigences de l'Analyse, laquelle cherche constamment à prendre des limites de *suites* de fonctions ou *suites* de sous-ensembles, ce qui motive le concept suivant.

Définition 1.3. Une collection $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ de sous-ensembles de X est appelée une σ-*algèbre* si :

- $\mathscr{A}$ est une algèbre :
- $\mathscr{A}$ est stable par réunions dénombrables :

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \in \mathscr{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}.$$

Ici, la lettre $\sigma \sim \Sigma$ de « σ-*algèbre* » réfère implicitement à la notation $\sum_{i=1}^{\infty}$.

Il en découle que $\mathscr{A}$ est aussi stable par intersections dénombrables :

$$A_1, A_2, \dots, A_i, \dots \in \mathscr{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A},$$

grâce à la relation ensembliste générale (exercice) :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c\bigg)^c.$$

Par exemple, $\big\{\emptyset, X\big\}$ est une σ-algèbre (grossière !), et $\mathscr{P}(X)$ aussi, dite σ-algèbre *discrète*.

Une σ-algèbre est le prototype général de famille d'ensembles sur lequel le concept de *mesure* va pouvoir être défini dans peu de temps. C'est en quelque sorte une famille de sous-ensembles de X « à mesurer », de diverses manières, avec une ou plusieurs mesures.

Définition 1.4. Un ensemble X muni d'une σ-algèbre $\mathscr{A}$ est appelé un *espace mesurable*.

Autrement dit, c'est un espace qui se prêtera à être mesuré, qui pourra être mesuré. Il importe de noter que la σ-algèbre $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ sera souvent fixée une fois pour toutes.

Proposition-Définition 1.5. *Étant donné une famille $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$ de sous-ensembles de X, la plus petite σ-algèbre de X contenant $\mathscr{M}$ existe, est notée :*

$$\sigma(\mathscr{M}),$$

et est appelée σ-algèbre engendrée par $\mathscr{M}$.

Démonstration. L'argument ensembliste très abstrait et très idéal consiste à introduire la 'gigantesque' intersection :

$$\sigma(\mathscr{M}) := \bigcap_{\substack{\mathscr{A} \supset \mathscr{M} \\ \mathscr{A} \ \sigma\text{-algèbre}}} \mathscr{A}, \tag{1.6}$$

et à voir un miracle se produire.

Lemme 1.7. *Une intersection quelconque de σ-algèbres est encore une σ-algèbre.*

Démonstration. Étant donné des σ-algèbres $\mathscr{A}_\lambda$ indexées par un ensemble quelconque $\Lambda \ni \lambda$, pas forcément fini ou dénombrable, il s'agit donc de vérifier que :

$$\mathscr{A} := \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$$

est encore une σ-algèbre.

• Tout d'abord, puisque $X \in \mathscr{A}_\lambda$ pour tout λ, il est évident que $X \in \mathscr{A}$.

• Ensuite, pour $n \geqslant 1$ entier :

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A} &\implies A_1, \dots, A_n \in \mathscr{A}_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ \text{[Algèbres]} \qquad &\implies A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ &\implies A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{A}. \end{aligned}$$

• Puis, pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$:

$$A \in \mathscr{A} \implies A \in \mathscr{A}_\lambda \ \ \forall \lambda \implies A^c \in \mathscr{A}_\lambda \ \ \forall \lambda \implies A^c \in \mathscr{A},$$

ce qui montre que $\mathscr{A}$ est une algèbre.

• Enfin, pour ce qui est de la stabilité par réunions dénombrables :

$$\begin{aligned} A_1, \dots, A_i, \dots \in \mathscr{A} &\implies A_1, \dots, A_i, \dots \in \mathscr{A}_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ [\sigma\text{-algèbres}] \qquad &\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}_\lambda \quad \forall \lambda \in \Lambda \\ &\implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}, \end{aligned}$$

il y a formellement peu de différences avec le cas des réunions finies. □

Grâce à ce lemme, $\sigma(\mathscr{M})$ *est* une σ-algèbre, et c'est trivialement la plus petite contenant $\mathscr{A}$, puisque l'on peut prendre $\mathscr{A} := \sigma(\mathscr{M})$ dans la grande intersection (1.6). □

Cette proposition-définition débouche sur un exemple absolument fondamental de σ-algèbre, celle découverte et exploitée par Borel dans ses premiers travaux sur la théorie de la mesure des sous-ensembles de la droite réelle $\mathbb{R}$.

Auparavant, un rappel s'impose.

Définition 1.8. Une *topologie* sur un ensemble (quelconque) X est une collection $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ de sous-ensembles $O \subset X$, appelés *ouverts*, qui satisfait :

• $X \in \mathscr{T}$ et $\emptyset \in \mathscr{T}$;

• $\mathscr{T}$ est stable par réunions absolument quelconques :

$$\forall \Lambda \quad \big(O_\lambda\big)_{\lambda \in \Lambda} \in \mathscr{T}^\Lambda \implies \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathscr{T};$$

• $\mathscr{T}$ est stable par intersections *finies :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad O_1, \dots, O_n \in \mathscr{T} \implies O_1 \cup \cdots \cup O_n \in \mathscr{T}.$$

Deux différences existent par rapport aux σ-algèbres : la stabilité n'a lieu que pour des intersections *finies*, mais elle a lieu pour des réunions *quelconques*, pas forcément dénombrables.

Définition 1.9. Sur un ensemble X muni d'une topologie $\mathscr{T}$, la σ-algèbre *borélienne*, notée :

$$\mathscr{B}_X := \sigma(\mathscr{T}),$$

est la σ-algèbre engendrée par les ouverts de X. Les éléments de $\mathscr{B}_X$ sont appelés (*ensembles*) *boréliens*.

Ainsi, $\mathscr{B}_X$ contient les ouverts $O \in \mathscr{T}$, mais aussi les intersections dénombrables :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} O_i$$

d'ouverts $O_i \in \mathscr{T}$, et encore les réunions dénombrables d'intersections dénombrables :

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{i=1}^{\infty} O_{j,i}$$

d'ouverts $O_{i,j} \in \mathscr{T}$, et généralement, $\mathscr{B}_X$ contient tous les ensembles de la forme :

$$\bigcup_{j_1=1}^{\infty} \bigcap_{i_1=1}^{\infty} \cdots\cdots \bigcup_{j_\nu=1}^{\infty} \bigcap_{i_\nu=1}^{\infty} \cdots\cdots\; O_{j_1,i_1,\dots,j_\nu,i_\nu,\dots},$$

avec des ensembles dénombrables d'indexation. On démontre que ce processus ne s'arrête pas, et que chaque ajout d'intersections ou de réunions dénombrables apporte de nouveaux types d'ensembles, ce qui fait qu'on ne peut pas décrire tous les boréliens de manière compacte et simple.

Toutefois, dans $\mathbb{R}^d$ en dimension $d \geqslant 1$ quelconque, on peut, comme cela a déjà été vu dans le chapitre qui construit la mesure de Lebesgue, se servir de diverses familles d'ouverts-types de $\mathbb{R}^d$ pour engendrer $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$, sans utiliser *tous* les ouverts de $\mathbb{R}^d$.

Proposition 1.10. *Les boréliens de $\mathbb{R}^d$ sont engendrés par l'une des quatre familles suivantes d'intervalles :*

$$]a,b[, \qquad [a,b[, \qquad]a,b], \qquad [a,b],$$

avec $-\infty < a < b < \infty$. □

2. Mesures abstraites et leurs propriétés élémentaires

Il est maintenant grand temps de définir le concept de mesure abstraite. L'idée est qu'un espace fixé peut posséder plusieurs mesures distinctes. Soit donc X un espace mesurable, à savoir muni d'une certaine σ-algèbre $\mathscr{A}$.

Définition 2.1. Une *mesure* μ sur $(X, \mathscr{A})$ est une application à valeurs réelles positives :

$$\mu\colon \quad \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

la valeur ∞ étant acceptée, avec :

$$\mu(\emptyset) = 0,$$

qui satisfait l'axiome d'*additivité dénombrable* ou de σ-*additivité :*

$$\mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

pour toute suite $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ de sous-ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ mutuellement disjoints :

$$\emptyset \,=\, A_{i_1} \cap A_{i_2} \qquad\qquad (\forall\, i_1 \neq i_2).$$

Lorsque la suite $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ devient stationnaire à partir d'un certain rang, cette condition incorpore évidemment l'additivité disjointe finie.

Ici, la notion de *mesure* μ requiert donc seulement la condition minimale et intuitivement naturelle que le « μ-poids » de parties sans intersections soit finiment et dénombrablement additif. Rappelons qu'à l'inverse, dans le chapitre consacré à la construction de la mesure de Borel-Lebesgue m sur $\mathbb{R}^d$, l'additivité dénombrable disjointe était un *théorème* de la théorie, et même *le* théorème le plus important. Ainsi, le concept de mesure abstraite *renverse par abstraction* un théorème en une définition ! Et grâce à cette force nouvelle, il va nous conduire bien au-delà de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$!

Comme la mesure $\mu(\cdot)$ peut prendre la valeur ∞, il est utile de fixer des règles naturelles de calcul sur $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

- pour $a \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\infty \pm a = \infty;$$

- pour $0 < a < \infty$, on a :

$$a \cdot \infty \,=\, \infty;$$

- on a :

$$\infty + \infty \,=\, \infty \cdot \infty \,=\, \infty.$$

Terminologie 2.2. Un espace X avec une σ-algèbre $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ munie d'une mesure μ est appelé un *espace mesuré*, et sera souvent noté $\big(X, \mathscr{A}, \mu\big)$.

Avant de parler de mesures, le choix de la σ-algèbre $\mathscr{A}$ doit être adapté aux circonstances.

Par exemple, lorsque l'ensemble X est discret — penser à $\mathbb{N}$ ou à $\mathbb{Z}$ —, la σ-algèbre discrète $\mathscr{P}(X)$ est souvent intéressante. Sur de tels espaces, la *mesure de comptage* (ou de dénombrement) est définie par :

$$\eta(A) \,:=\, \begin{cases} \mathrm{Card}\, A & \text{lorsque } \ A \text{ est fini,} \\ \infty & \text{autrement.} \end{cases}$$

Lorsque l'ensemble X est un espace topologique, la σ-algèbre borélienne $\mathscr{B}_X$ est souvent la meilleure à considérer. Sur de tels espaces, étant donné un élément quelconque fixé $x \in X$, la *mesure de Dirac* est définie par :

$$\delta_x(A) \,:=\, \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \ A \ni x, \\ 0 & \text{lorsque } \ A \not\ni x. \end{cases}$$

Bien entendu, l'exemple le plus fondamental de mesure sur $\mathbb{R}^d$ est celui de la mesure de Borel-Lebesgue, laquelle a été construite à grand renfort de raisonnements géométriques dans un des chapitres qui précédent. Implicitement d'ailleurs, nous avons obtenu un énoncé d'unicité, dont la démonstration est laissée au lecteur comme exercice de compréhension et d'assimilation du cours.

Théorème 2.3. *En dimension $d \geqslant 1$ quelconque, sur la famille $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ des sous-ensembles boréliens de $\mathbb{R}^d$, il existe une* unique *mesure m satisfaisant :*

(1) *la mesure de tout rectangle fermé borné est égale à son volume :*

$$m\big([a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]\big) \,=\, \prod_{i=1}^{d} \big(b_i - a_i\big);$$

(2) *la mesure de tout $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ est invariante par translation au moyen de tout vecteur $x \in \mathbb{R}^d$:*

$$m\big(A + x\big) \,=\, m(A). \qquad \square$$

Revenons maintenant aux mesures abstraites générales.

Définition 2.4. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$.

• Lorsque $\mu(X) < \infty$, la mesure μ est dite *finie*.

• La mesure μ est dite *σ-finie* lorsque X se décompose en une réunion dénombrable :

$$X \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$$

de sous-ensembles $X_n \subset X$ tous de mesures $\mu(X_n) < \infty$ finies.

• Lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{B}_X$ est la σ-algèbre des boréliens associés à une topologie sur X, la mesure μ est dite *borélienne*

• La mesure μ est dite *de Borel* lorsqu'elle est borélienne *et* finie sur tous les sous-ensembles compacts $K \subset X$.

Par exemple, sur $\mathbb{R}^d$, la mesure de Lebesgue m est σ-finie, borélienne, et de Borel (exercice mental).

Définition 2.5. Soit μ une mesure sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$.

• Un *atome* de μ est un élément $x \in X$ avec $\{x\} \in \mathscr{A}$ tel que :

$$\mu(\{x\}) \,>\, 0.$$

• Lorsque $\mathscr{A} = \mathscr{B}_X$ est la σ-algèbre des boréliens associés à une topologie sur X, le *support topologique* de μ, noté $\operatorname{supp} \mu$, est le plus petit sous-ensemble *fermé* $F \subset X$ tel que :

$$\mu\big(F^c\big) \,=\, 0.$$

Évidemment, la mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{R}^d$ n'a aucun atome.

Nous pouvons maintenant commencer à détailler certaines propriétés générales élémentaires des mesures abstraites. Tout d'abord, la croissance.

Lemme 2.6. *Pour tous $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \subset B$, on a :*

$$\mu(A) \,\leqslant\, \mu(B),$$

et si de plus $\mu(A) < \infty$:

$$\mu\big(B \backslash A\big) \,=\, \mu(B) - \mu(A).$$

Preuve. En effet, la réunion $B = A \cup (B \backslash A)$ étant disjointe, on a par simple additivité :

$$\mu(B) \,=\, \mu(A) + \mu\big(B \backslash A\big) \,\geqslant\, \mu(A). \qquad \square$$

Contrairement aux apparences algébriques, cette dernière équation ne fournit pas instantanément $\mu(B \backslash A)$, car lorsque $\mu(A) = \infty$, d'où $\mu(B) = \infty$ aussi, la soustraction est indéterminée :

$$\infty - \infty \,=\, \mathbf{?},$$

comme le montrent sur $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue les deux exemples :

$$B \,:=\, [0, \infty[, \qquad\qquad A \,:=\, \begin{cases} [1, \infty[, \\ [2, \infty[. \end{cases}$$

Comme corollaire naturel, toujours avec $A, C \in \mathscr{A}$, si $A \cap C = \emptyset$, en posant $B := A \cup C$, il découle de ce lemme l'additivité simple qui était requise en axiome :

$$\mu\big(A \cup C\big) \,=\, \mu(A) + \mu(C).$$

Proposition 2.7. *Si $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ est une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ croissante :*

$$A_i \,\subset\, A_{i+1} \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1),$$

alors :

$$\lim_{i \to \infty} \mu\big(A_i\big) \,=\, \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigg).$$

Démonstration. Posons $A_0 := \emptyset$ et, pour tout entier $j \geqslant 1$, introduisons les différences :

$$B_j \,:=\, A_j \big\backslash A_{j-1},$$

avec $B_1 = A_1$. Alors pour $i \geqslant 1$ fixé, cette collection de couronnes (esquisser une figure manuscrite) remplit :

$$A_i \,=\, \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_j \,=\, \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} B_j$$

en une réunion mutuellement disjointe :

$$\emptyset \,=\, B_{j_1} \cap B_{j_2} \qquad\qquad (1 \leqslant j_1 \neq j_2),$$

et donc les axiomes d'additivité disjointe finie et dénombrable permettent de transformer la limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{i \to \infty} \mu\big(A_i\big) \,=\, \lim_{i \to \infty} \mu\bigg(\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_j\bigg) &\,=\, \lim_{i \to \infty} \mu\bigg(\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} B_j\bigg) \\
&\,=\, \lim_{i \to \infty} \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} \mu\big(B_j\big) \\
&\,=\, \sum_{j=1}^{\infty} \mu\big(B_j\big) \\
&\,=\, \mu\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j\bigg) \\
&\,=\, \mu\bigg(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j\bigg)
\end{aligned}$$

en le résultat annoncé. □

Dans ce lemme, la limite de la suite numérique croissante $\big(\mu(A_i)\big)_{i=1}^{\infty}$ est bien entendu autorisée à valoir ∞.

Pour les suites *dé*croissantes $A_{i+1} \subset A_i$ d'ensembles, le résultat analogue est en général faux sans une hypothèse supplémentaire, comme le montre la suite d'intervalles :

$$A_i \,:=\, [i, \infty[\;\subset\; \mathbb{R} \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

tous de mesure de Borel-Lebesgue égale à ∞, mais d'intersection $\cap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$ vide et de mesure nulle.

Proposition 2.8. *Si* $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ *est une suite d'ensembles* $A_i \in \mathscr{A}$ *décroissante :*

$$A_{i+1} \,\subset\, A_i \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1),$$

et si $\mu(A_1) < \infty$*, alors :*

$$\lim_{i\to\infty} \mu\big(A_i\big) \,=\, \mu\bigg(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\bigg).$$

Ici, cette limite est alors un nombre de $\mathbb{R}_+$, elle ne peut valoir ∞ car elle est $\leqslant \mu(A_1)$.

Démonstration. Le passage au complémentaire :

$$B_i \,:=\, A_1 \big\backslash A_i \qquad\qquad (i \geqslant 1)$$

permet, grâce à l'hypothèse $\mu(A_1) < \infty$ requise dans le Lemme 2.6, d'écrire :

$$\mu\big(B_i\big) \,=\, \mu\big(A_1\big) - \mu\big(A_i\big).$$

Or comme la suite $\big(B_i\big)_{i=1}^{\infty}$ est alors *croissante* (exercice) :

$$B_i \,\subset\, B_{i+1} \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

la Proposition 2.7 — appliquée dans un sous-cas où les mesures $\mu(B_i) \leqslant \mu(A_1) < \infty$ sont uniformément bornées — donne :

$$\lim_{i\to\infty} \mu\big(B_i\big) \,=\, \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\bigg).$$

Ceci permet d'effectuer un calcul :

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} \Big(\mu\big(A_1\big) - \mu\big(A_i\big)\Big) \,&=\, \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} \big(A_1 \backslash A_i\big)\bigg) \\
&=\, \mu\bigg(A_1 \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigg) \\
&=\, \mu\big(A_1\big) - \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigg)
\end{aligned}$$

dont le résultat, après multiplication par -1 et soustraction de $\mu(A_1)$, est exactement celui qui était visé. $\square$

Enfin, toute mesure satisfait une propriété très souvent utile de sous-additivité dénombrable.

Proposition 2.9. *Si $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ est une famille dénombrable d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ quelconques — pas forcément deux à deux disjoints —, alors :*

$$\mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigg) \;\leqslant\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(A_i\big).$$

Démonstration. En forçant la suite à dégénérer $\emptyset = A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots$ à partir d'un certain rang $n \geqslant 2$, cet énoncé contient clairement la sous-additivité *finie :*

$$\mu\big(A_1 \cup \cdots \cup A_n\big) \;\leqslant\; \mu(A_1) + \cdots + \mu(A_n).$$

Or une telle sous-addititivé finie s'obtient par récurrence facile (exercice) à partir du cas $n = 2$, lequel, en partant de la décomposition disjointe :

$$A_1 \cup A_2 \;=\; A_1 \cup \big(A_2 \backslash A_1\big),$$

a déjà été presque démontré dans le Lemme 2.6 :

$$\begin{aligned}\mu\big(A_1 \cup A_2\big) \;&=\; \mu(A_1) + \mu\big(A_2 \backslash A_1\big)\\ &\leqslant\; \mu(A_1) + \mu(A_2).\end{aligned}$$

Grâce à cette sous-additivité finie, en introduisant alors astucieusement la suite auxiliaire visiblement croissante :

$$B_i \;:=\; \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_i \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

afin de pouvoir appliquer la Proposition 2.7, des calculs transformationnels simples :

$$\begin{aligned}\mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\bigg) \;=\; \mu\bigg(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\bigg) \;&=\; \lim_{i \to \infty} \mu\big(B_i\big)\\ &=\; \lim_{i \to \infty} \mu\big(A_1 \cup \cdots \cup A_i\big)\\ &\leqslant\; \lim_{i \to \infty} \Big[\mu\big(A_1\big) + \cdots + \mu\big(A_i\big)\Big]\\ &=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(A_i\big)\end{aligned}$$

concluent la sous-additivité dénombrable annoncée. □

3. Théorème des classes monotone et théorème de Dynkin

Un concept un peu moins 'riche' que celui de σ-algèbre, grâce auquel de nombreuses démonstrations de la théorie des mesures abstraites peuvent être simplifiées, est le suivant.

Définition 3.1. Un sous-ensemble $\mathscr{M} \subset \mathscr{P}(X)$ est appelé une *classe monotone* si :

• $X \in \mathscr{M}$;

• $\mathscr{M}$ est stable par *différence propre*, *i.e.* pour toute paire emboîtée $A \subset B$ d'ensembles $A, B \in \mathscr{M}$, on a aussi $B \backslash A \in \mathscr{M}$;

• $\mathscr{M}$ est stable par réunion dénombrable croissante, *i.e.* quelle que soit la suite $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ avec $A_i \in \mathscr{M}$ et :

$$A_i \;\subset\; A_{i+1} \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

on a aussi :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\in\, \mathscr{M}.$$

Observons qu'une classe monotome est stable par passage au complémentaire, car $X \in \mathscr{M}$ et $A \in \mathscr{M}$ donne $A^c = X \backslash A \in \mathscr{M}$.

De plus, une classe monotone est stable par intersections décroissantes, car pour $\big(B_i\big)_{i=1}^{\infty}$ avec $B_i \in \mathscr{M}$ et :

$$B_{i+1} \,\subset\, B_i \qquad\qquad (i \geqslant 1),$$

en introduisant $A_i := X \backslash B_i$, d'où $A_i \subset A_{i+1}$, il vient $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{M}$, puis :

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i \,=\, X \Big\backslash \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,\in\, \mathscr{M}.$$

Ainsi, une classe monotone est stable par limite monotone, croissante ou décroissante, d'ensembles, ce qui justifie la terminologie !

Évidemment, toute σ-algèbre est une classe monotone (exercice mental).

Lemme 3.2. *Une classe monotone $\mathscr{M}$ stable par intersections finies est une σ-algèbre.*

Démonstration. En effet, la réécriture astucieuse d'une réunion dénombrable disjointe quelconque d'éléments $A_i \in \mathscr{M}$ sous la forme croissante :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \,=\, \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigg(\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_j \bigg)$$

montre que $\mathscr{M}$ est stable par réunions infinies dénombrables, donc aussi par réunions finies quelconques — considérer des suites $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ stationnaires à partir d'un certain rang. □

Une adapation aisée de la démonstration de la Proposition-Définition 1.5 fournit une

Proposition-Définition 3.3. *Étant donné un sous-ensemble quelconque $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$, l'ensemble :*

$$\mathsf{mon}(\mathscr{E}) \,:=\, \bigcap_{\substack{\mathscr{M} \supset \mathscr{E} \\ \mathscr{M} \text{ classe monotone}}} \mathscr{M}$$

est une classe monotone, la plus petite contenant $\mathscr{E}$, appelée classe monotone engendrée *par $\mathscr{E}$.* □

Rappelons qu'un π-*système* demande seulement la stabilité par intersections finies.

Théorème 3.4. [des classes monotones] *La classe monotone engendrée par un π-système $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}(X)$ coïncide avec la σ-algèbre qu'il engendre :*

$$\mathsf{mon}(\mathscr{E}) \,=\, \sigma(\mathscr{E}).$$

L'intérêt de cet énoncé est que si $\mathscr{M}$ est une classe monotone contenant un π-système $\mathscr{E}$, alors $\sigma(\mathscr{E}) \subset \mathscr{M}$.

Démonstration. L'inclusion $\mathsf{mon}(\mathscr{E}) \subset \sigma(\mathscr{E})$ est triviale, car $\sigma(\mathscr{E})$ *est* une classe monotone qui contient $\mathscr{E}$, donc contient la plus petite possible contenant $\mathscr{E}$.

Donc le but est d'obtenir l'inclusion inverse :

$$\mathsf{mon}(\mathscr{E}) \,\supset\, \sigma(\mathscr{E}).$$

Comme $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est — *per se* — une classe monotone, le Lemme 3.2 dit qu'il suffit de montrer que $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est stable par intersections finies, pour déduire que c'est une σ-algèbre, donc qu'elle contient la plus petite $\sigma(\mathscr{E})$ contenant $\mathscr{E}$.

Or pour établir que $A \cap B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$ quels que soient $A, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, deux étapes sont nécessaires.

Premièrement, introduisons :

$$\mathscr{M}_1 := \big\{A \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \colon \forall\, B \in \mathscr{E},\ A \cap B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})\big\}.$$

Assertion 3.5. *En fait :*

$$\mathscr{M}_1 = \mathsf{mon}(\mathscr{E}).$$

Preuve. Comme $\mathscr{E}$ est un π-système, il est clair que $\mathscr{M}_1 \supset \mathscr{E}$. Pour avoir $\mathscr{M}_1 = \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, il suffit de montrer que $\mathscr{M}_1$ *est* une classe monotone, car $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est la plus petite contenant $\mathscr{E}$. Trois axiomes sont à vérifier.

- On a $X \in \mathscr{M}_1$, car $X \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$ et $\forall\, B \in \mathscr{E}$, il est clair que $X \cap B = B \in \mathscr{E} \subset \mathsf{mon}(\mathscr{E})$.
- Soient $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_1$ avec $A_1 \subset A_2$. Alors $\forall\, B \in \mathscr{E}$, par définition de $\mathscr{M}_1$:

$$\begin{matrix} A_1 \cap B \\ A_2 \cap B \end{matrix} \in \mathscr{M}_1 \subset \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

et comme $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est une classe monotone, il vient :

$$\underbrace{\big(A_2 \cap B\big)\big\backslash\big(A_1 \cap B\big)}_{=\,(A_2 \backslash A_1) \cap B} \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

et ceci montre que $A_2 \backslash A_1$ appartient bien aussi à $\mathscr{M}_1$.

- Soit enfin $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{M}_1$ croissante : $A_i \subset A_{i+1}$. Alors $\forall\, B \in \mathscr{E}$, par définition de $\mathscr{M}_1$:

$$A_i \cap B \in \mathscr{M}_1 \subset \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \qquad (\forall\, i \geqslant 1),$$

et comme $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est une classe monotone, il vient :

$$\underbrace{\bigcup_{i \geqslant 1} A_i \cap B}_{=\,(\cup A_i) \cap B} \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

ce qui montre que $\cup\, A_i$ appartient bien aussi à $\mathscr{M}_1$. □

Deuxièmement, introduisons :

$$\mathscr{M}_2 := \big\{A \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \colon \forall\, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}),\ A \cap B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})\big\}.$$

Assertion 3.6. *En fait :*

$$\mathscr{M}_2 = \mathsf{mon}(\mathscr{E}).$$

Preuve. Tout d'abord, nous affirmons que :

$$\mathscr{M}_2 \supset \mathscr{E}.$$

En effet, soit $A \in \mathscr{E}$ quelconque, donc $A \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$. Alors $\forall\, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, grâce au résultat qui vient d'être démontré, on a $B \in \mathscr{M}_1$, puis par définition de $\mathscr{M}_1$, il vient :

$$\underbrace{B \cap A}_{=\,A \cap B} \in \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

ce qui montre bien que A satisfait la condition d'appartenance à $\mathscr{M}_2$.

Ensuite, par minimalité de $\mathsf{mon}(\mathscr{E}) \supset \mathscr{E}$, il suffit de montrer que $\mathscr{M}_2$ *est* une classe monotone. Les arguments sont très similaires à ceux de l'Assertion 3.5.

• On a $X \in \mathscr{M}_2$, car $X \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$ et $\forall\, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, il est clair que $X \cap B = B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$.

• Soient $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_2$ avec $A_1 \subset A_2$. Alors $\forall\, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, par définition de $\mathscr{M}_2$:

$$\begin{matrix} A_1 \cap B \\ A_2 \cap B \end{matrix} \in \mathscr{M}_2 \subset \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

et comme $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est une classe monotone, il vient :

$$\underbrace{\big(A_2 \cap B\big) \big\backslash \big(A_1 \cap B\big)}_{= \, (A_2 \backslash A_1) \cap B} \ \in \ \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

et ceci montre que $A_2 \backslash A_1$ appartient bien aussi à $\mathscr{M}_2$.

• Soit enfin $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{M}_2$ croissante : $A_i \subset A_{i+1}$. Alors $\forall\, B \in \mathsf{mon}(\mathscr{E})$, par définition de $\mathscr{M}_2$:

$$A_i \cap B \ \in \ \mathscr{M}_2 \ \subset \ \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1),$$

et comme $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est une classe monotone, il vient :

$$\underbrace{\bigcup_{i \geqslant 1} A_i \cap B}_{= \, (\cup A_i) \cap B} \ \in \ \mathsf{mon}(\mathscr{E}),$$

ce qui montre que $\cup\, A_i$ appartient bien aussi à $\mathscr{M}_2$. □

En conclusion, cette égalité $\mathsf{mon}(\mathscr{E}) = \mathscr{M}_2$ fait voir que $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$ est stable par intersections finies, ce qui conclut le plan d'argumentation. □

Voici une application du Théorème 3.4 des classes monotones.

Théorème 3.7. [de Dynkin] *Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre. Si deux mesures μ_1 et μ_2 sur $(X, \mathscr{A})$ de même poids total* fini :

$$\mu_1(X) \ = \ \mu_2(X) \ < \ \infty$$

prennent les mêmes valeurs sur un certain sous-ensemble $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$:

$$\mu_1(E) \ = \ \mu_2(E) \qquad\qquad (\forall\, E \in \mathscr{E}),$$

qui est stable par intersections finies (un π-système), alors :

$$\mu_1\big|_{\sigma(\mathscr{E})} \ = \ \mu_2\big|_{\sigma(\mathscr{E})}.$$

Démonstration. Introduisons l'ensemble de coïncidence :

$$\mathscr{M} \ := \ \big\{ A \in \mathscr{A} \colon \ \mu_1(A) = \mu_2(A) \big\} \ \supset \ \mathscr{E}.$$

Assertion 3.8. *Cet ensemble $\mathscr{M}$* est *une classe monotone.*

Preuve. Comme précédemment, trois conditions sont à vérifier.

• On a $X \in \mathscr{M}$, car $\mu_1(X) = \mu_2(X)$.

• Soient $A, B \in \mathscr{M}$ avec $A \subset B$. Alors le Lemme 2.6 et l'hypothèse de finitude permettent d'écrire :

$$\mu_1\big(B \backslash A\big) \ = \ \mu_1(B) - \mu_1(A) \ = \ \mu_2(B) - \mu_2(A) \ = \ \mu_2\big(B \backslash A\big),$$

ce qui donne $B \backslash A \in \mathscr{M}$ aussi

• Soit $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ avec $A_i \in \mathscr{M}$ et $A_i \subset A_{i+1}$. Alors la Proposition 2.7 et l'hypothèse permettent d'écrire :

$$\mu_1\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\Big) \;=\; \lim_{i\to\infty} \mu_1\big(A_i\big) \;=\; \lim_{i\to\infty} \mu_2\big(A_i\big) \;=\; \mu_2\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\Big),$$

ce qui donne $\cup A_i \in \mathscr{M}$ aussi — fin de cette assertion ! □

Ainsi, $\mathscr{M}$ est une classe monotone qui contient le π-système $\mathscr{E}$, donc contient $\mathsf{mon}(\mathscr{E})$, et alors le Théorème 3.4 des classes monotones offre :

$$\mathscr{M} \;\supset\; \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \;=\; \sigma(\mathscr{E}),$$

ce qui montre bien que μ_1 et μ_2 coïncident sur $\sigma(\mathscr{E})$. □

4. Complétions de σ-algèbres

Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre, et soit μ une mesure fixée sur $(X, \mathscr{A})$. Étant donné un ensemble $A \in \mathscr{A}$, il existe en général beaucoup de sous-ensembles $E \subset A$ qui n'appartiennent *pas* à $\mathscr{A}$.

Introduisons la classe des ensembles *μ-négligeables :*

$$\mathscr{N}_\mu \;:=\; \big\{N \in \mathscr{P}(X) \colon\; \exists\, A \in \mathscr{A} \text{ avec } N \subset A \text{ tel que } \mu(A) = 0\big\}.$$

Il semble alors très naturel d'attribuer une mesure 0 aux ensembles de $\mathscr{N}_\mu$, même si ils ne sont pas *a priori* dans le groupe $\mathscr{A}$ de ceux qu'on 'peut' mesurer.

Plus généralement, si un ensemble $E \subset X$ peut être encadré par deux ensembles de $\mathscr{A}$ dont la μ-mesure coïncide, on est tenté d'attribuer la même μ-mesure à E, ce qui conduit à introduire aussi la classe :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \;:=\; \big\{E \subset X \colon\; \exists\, A_1, A_2 \in \mathscr{A} \text{ avec } A_1 \subset E \subset A_2 \text{ tels que } \mu(A_2 \backslash A_1) = 0\big\}.$$

En prenant $A_1 := \emptyset$, on voit que :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \;\supset\; \mathscr{N}_\mu.$$

Proposition 4.1. *Cet ensemble s'identifie en fait à la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu$:*

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \;=\; \sigma\big(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\big).$$

Démonstration. Tout d'abord, montrons que $\overline{\mathscr{A}}_\mu$ *est* une σ-algèbre. Trois conditions sont à vérifier.

• On a $X \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$, car $A_1 := X =: A_2$ donne $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(\emptyset) = 0$.

• Soit $E \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$, accompagné de $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ avec $A_1 \subset E \subset A_2$ tels que $0 = \mu(A_2 \backslash A_1)$. Les complémentaires A_1^c, A_2^c satisfont donc $A_1^c \supset E^c \supset A_2^c$, et aussi :

$$\mu\big(A_1^c \backslash A_2^c\big) \;=\; \mu\big(A_1^c \cap A_2\big) \;=\; \mu\big(A_2 \backslash A_1\big) \;=\; 0,$$

ce qui fait voir que $E^c \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$ aussi.

• Enfin, soit une suite quelconque $\big(E_i\big)_{i=1}^{\infty}$ d'éléments $E_i \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$, donc accompagnée d'encadrants $A_{1,i} \subset E_i \subset A_{2,i}$ appartenant à $\mathscr{A}$ satisfaisant :

$$\mu\big(A_{2,i} \backslash A_{1,i}\big) \;=\; 0 \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1).$$

Comme $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre, $\cup\, A_{1,i} \in \mathscr{A}$ ainsi que $\cup\, A_{2,i} \in \mathscr{A}$, et l'encadrement unionique :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{1,i} \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2,i},$$

agrémenté de l'observation ensembliste — exercice ! l'inclusion peut être stricte ! — générale :

$$\bigcup_{i\geqslant 1} A_{2,i} \Big\backslash \bigcup_{i\geqslant 1} A_{1,i} \;\subset\; \bigcup_{i\geqslant 1} A_{2,i}\backslash A_{1,i},$$

permet, grâce à la sous-additivité dénombrable de μ :

$$\begin{aligned}\mu\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} A_{2,i} \Big\backslash \bigcup_{i\geqslant 1} A_{1,i}\bigg) &\leqslant \mu\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} A_{2,i}\backslash A_{1,i}\bigg) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(A_{2,i}\backslash A_{1,i}\big) \\ &= 0\end{aligned}$$

de conclure que $\cup\, E_i$ est encadré comme il faut pour appartenir au 'club' $\overline{\mathscr{A}}_\mu$.

Ainsi, $\overline{\mathscr{A}}_\mu$ est une σ-algèbre, et comme elle contient (trivialement) :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \supset \mathscr{A} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \overline{\mathscr{A}}_\mu \supset \mathscr{N}_\mu,$$

elle contient nécessairement la plus petite σ-algèbre que le mariage de ces deux-là engendre :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \supset \sigma\big(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\big).$$

Pour terminer, l'inclusion inverse gage d'égalité :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \subset \sigma\big(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\big)$$

est plus facile. En effet, soit $E \subset \overline{\mathscr{A}}_\mu$, encadré $A_1 \subset E \subset A_2$ par $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ tels que $\mu(A_2\backslash A_1) = 0$. L'inclusion :

$$E\backslash A_1 \subset A_2\backslash A_1$$

montre que $E\backslash A_1 \in \mathscr{N}_\mu$, et la décomposition :

$$E = \underbrace{A_1}_{\in \mathscr{A}} \cup \big(\underbrace{E\backslash A_1}_{\in \mathscr{N}_\mu}\big)$$

montre qu'on a en fait un peu mieux pour conclure :

$$\overline{\mathscr{A}}_\mu \subset \mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu \subset \sigma\big(\mathscr{A} \cup \mathscr{N}_\mu\big).$$ □

Maintenant, nous pouvons réaliser le programme de prolongement de la mesure μ à la σ-algèbre complétée $\overline{\mathscr{A}}_\mu$.

Théorème 4.2. *La fonction $\overline{\mu}\colon \overline{\mathscr{A}}_\mu \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ définie par :*

$$\overline{\mu}(E) := \mu\big(A_1\big) = \mu\big(A_2\big)$$

lorsque $A_1 \subset E \subset A_2$ avec $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ satisfaisant $\mu(A_2\backslash A_1) = 0$ l'est sans ambiguïté, et elle constitue une mesure sur l'espace mesurable complété :

$$\big(X, \overline{\mathscr{A}}_\mu\big).$$

De plus, elle prolonge :

$$\mu \,=\, \overline{\mu}\big|_{\mathscr{A}},$$

et c'est l'unique mesure ν *sur* $\overline{\mathscr{A}}_\mu$ *prolongeant* $\mu = \nu\big|_{\mathscr{A}}$.

Démonstration. L'ambiguïté provient de la non-unicité des encadrants. Soient donc deux autres $B_1, B_2 \in \mathscr{A}$ avec $B_1 \subset E \subset B_2$ tels que $\mu(B_2 \backslash B_1) = 0$. Il en découle l'encadrement :

$$A \cup B_1 \,\subset\, E \,\subset\, A_2 \cap B_2,$$

avec bien sûr $A_1 \cup B_1 \in \mathscr{A}$ ainsi que $A_2 \cap B_2 \in \mathscr{A}$, et comme :

$$A_2 \cap B_2 \big\backslash \big(A_1 \cup B_1\big) \;\subset\; A_2 \backslash A_1,$$

il est clair que la μ-mesure de ce nouvel interstice est nulle :

$$\mu\Big(A_2 \cap B_2 \big\backslash \big(A_1 \cup B_1\big)\Big) \;\leqslant\; \mu\big(A_2 \backslash A_1\big) \;=\; 0.$$

Pour établir que cette fonction maintenant rigoureusement définie $\overline{\mu}\colon \overline{\mathscr{A}}_\mu \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est bel et bien une mesure, sachant que $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ est évident, l'objectif est l'axiome d'additivité dénombrable disjointe.

Soient donc $\big(E_i\big)_{i=1}^{\infty}$, $E_i \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$, $E_i \cap E_{i'} = \emptyset$ pour $1 \leqslant i \neq i'$. Par définition de $\overline{\mathscr{A}}_\mu$, il existe des encadrants $A_{1,i} \subset E_i \subset A_{2,i}$ appartenant à $\mathscr{A}$ et satisfaisant :

$$\mu\big(A_{2,i} \backslash A_{1,i}\big) \;=\; 0 \qquad\qquad (i \geqslant 1).$$

Comme $\mathscr{A}$ est une σ-algèbre, on a $\cup A_{1,i} \in \mathscr{A}$ et $\cup A_{2,i} \in \mathscr{A}$, puis :

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_{1,i} \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \;\subset\; \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{2,i},$$

et grâce au fait que les $A_{1,i} \subset E_i$ sont eux aussi mutuellement disjoints :

$$\emptyset \;=\; A_{1,i} \cap A_{1,i'} \qquad\qquad (\forall\, 1 \leqslant i \neq i'),$$

on peut leur appliquer la σ-additivité de μ :

$$\begin{aligned}
\overline{\mu}\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\bigg) &:=\; \mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_{1,i}\bigg) \\
&=\; \sum_{i=1}^{\infty} \mu\big(A_{1,i}\big) \\
&=\; \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\mu}\big(E_i\big),
\end{aligned}$$

laquelle établit en beauté celle de $\overline{\mu}$!

De plus, il est absolument clair que $\overline{\mu}$ prolonge μ, car sur un ensemble $E \in \mathscr{A}$, en prenant simplement $A_1 := E =: A_2$, d'où $\mu(A_2 \backslash A_1) = \mu(\emptyset) = 0$, on trouve $\overline{\mu}(E) := \mu(A_1) = \mu(E)$.

Enfin, soit ν une mesure sur $\overline{\mathscr{A}}_\mu$ qui prolonge $\mu = \nu\big|_{\mathscr{A}}$. L'objectif est d'atteindre $\nu = \overline{\mu}$.

Soit $E \in \overline{\mathscr{A}}_\mu$ quelconque, avec $A_1 \subset E \subset A_2$ et $\mu(A_2 \backslash A_1) = 0$. La décomposition disjointe $E = A_1 \cup (E \backslash A_1)$ donne :

$$\begin{aligned} \nu(E) &= \nu(A_1) + \nu(E\backslash A_1) \\ &= \mu(A_1) + \nu(E\backslash A_1) \\ [E\backslash A_1 \subset A_2\backslash A_1] \qquad &\leqslant \mu(A_1) + \nu(A_2\backslash A_1) \\ &= \mu(A_1) + \underline{\mu(A_2\backslash A_1)}_{\circ}, \end{aligned}$$

ce qui, après soustraction de $\mu(A_1)$ entre les lignes 2 et 4, force :

$$\nu(E\backslash A_1) = 0,$$

et un retour aux lignes 1 et 2 conclut que :

$$\nu(E) = \mu(A_1) = \overline{\mu}(E). \qquad \square$$

5. Mesures extérieures et mesurabilité au sens de Carathéodory

Rappelons que la construction de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ procédait en 3 étapes.

□ Considérer tous les cubes relativement compacts $Q \subset \mathbb{R}^d$ de volume $|Q| < \infty$.

□ Définir la mesure extérieure de sous-ensembles arbitraires $E \subset \mathbb{R}^d$ par :

$$m^*(E) := \inf \sum_{j=1}^{\infty} |Q_j|,$$

où l'infimum est pris sur la famille de tous les recouvrements $\cup Q_j \supset E$ de E par des familles dénombrables $(Q_j)_{j=1}^{\infty}$ de cubes $Q_j \subset \mathbb{R}^d$.

□ Montrer, au moyen d'exhaustions par des cubes, que les sous-ensembles ouverts $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^d$ — pour la topologie standard de $\mathbb{R}^d$ — ont un volume, ou une *mesure*, bien définis :

$$|\mathscr{O}| = m(\mathscr{O}) := m^*(\mathscr{O}).$$

□ Définir la sous-classe (stricte) dans $\mathscr{P}(\mathbb{R}^d)$ des ensembles *mesurables* $A \subset \mathbb{R}^d$ au sens de Borel-Lebesgue par l'approximabilité arbitraire au moyen des ensembles-mesurables types que sont les ouverts :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \mathscr{O} \supset A \text{ ouvert} \quad \text{tel que } m^*(\mathscr{O}\backslash A) \leqslant \varepsilon.$$

Dans sa théorie plus élaborée, toujours en se servant d'une certaine mesure extérieure comme auxiliaire, Carathéodory définit d'une manière alternative vraiment puissante les sous-ensembles mesurables dans le cas le plus général possible.

Par conséquent, comme dans les sections précédentes, soit X un ensemble abstrait quelconque, au lieu de ce vieux $\mathbb{R}^d$ concret déguingandé.

Définition 5.1. Une *mesure extérieure* μ^* sur X est une fonction définie sur *tous* les sous-ensembles de X :

$$\mu^* \colon \quad \mathscr{P}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

satisfaisant :

(1) $\mu^*(\emptyset) = 0$;

(2) si $E_1 \subset E_2$, alors $\mu^*(E_1) \leqslant \mu^*(E_2)$;

(3) si $\big(E_i\big)_{i=1}^{\infty}$ est une famille dénombrable d'ensembles, alors :

$$\mu^*\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} E_i\bigg) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

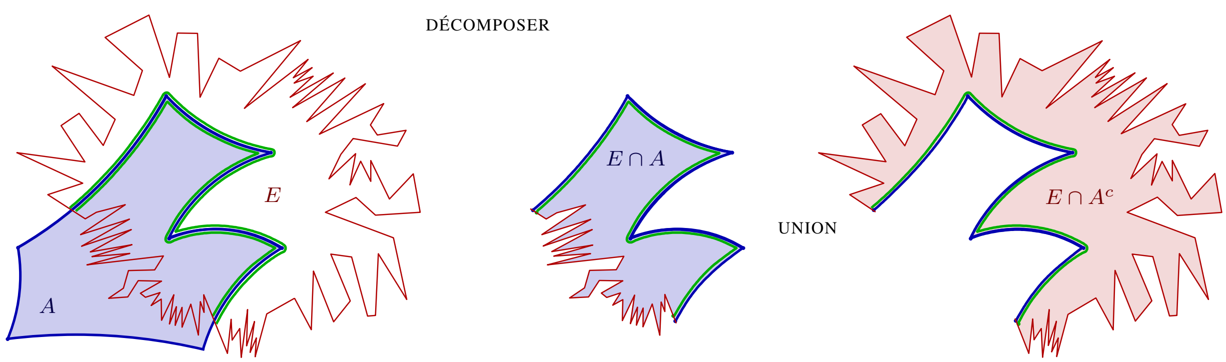
Nous avons déjà vu que la mesure extérieure de Borel-Lebesgue m^* sur $\mathbb{R}^d$ possède toutes ces qualités. Redisons que m^* appartient à une classe de mesures extérieures qui sont déduites, par recouvrements dénombrables au moyen de cubes-modèles concrets à volumes connus, de l'ensemble E considéré. Mais dans le cadre général de la théorie abstraite de la mesure, cette idée sera systématisée ultérieurement, lorsque nous introduirons la notion antécédante de « *prémesure* ».

Étant donné une mesure extérieure μ^* sur un ensemble X, le *Problème de la mesure* demande d'« *inventer* » une notion correspondante d'ensemble *mesurable*. Redisons que dans le cas de la mesure de Borel-Lebesgue m sur $\mathbb{R}^d$, les ensembles mesurables $A \subset \mathbb{R}^d$ ont été définis en demandant qu'ils soient approximables par des ouverts $\mathscr{O} \supset A$, eux-mêmes mesurables, tels que $m^*\big(\mathscr{O}\backslash A\big)$ puisse être rendu arbitrairement petit.

Dans un cadre abstrait général, c'est le mathématicien grec Carathéodory qui a trouvé, en 1918, un substitut ingénieux à la construction de Borel-Lebesgue.

Définition 5.2. Un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *mesurable au sens de Carathéodory*, ou simplement *C-mesurable*, si, pour tout sous-ensemble arbitraire $E \subset X$, il satisfait :

$$\mu^*(E) = \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big).$$



Autrement dit, A sépare tout ensemble E en deux morceaux disjoints :

$$E = \big(E \cap A\big) \cup \big(E \cap A^c\big),$$

qui se comportent bien vis-à-vis de la mesure extérieure, au sens où μ^* est additive, et non pas seulement sous-additive :

$$\mu^*(E) \leqslant \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big) \qquad \text{(toujours vrai)},$$

comme cela découle de la Définition 5.1.

Plus encore, comme la figure tente de le suggérer à une intuition de complexité, le « *bord de A dans E* » est supposé n'être pas trop « *sauvage* » pour que μ^* ne compte aucune 'masse parasite' le long de la découpe de E opérée par A et par A^c.

Observons au passage que $A \subset X$ est Carathéodory-mesurable si et seulement si, $\forall\, E \subset X$, on a :

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big), \tag{5.3}$$

puisque l'inégalité inverse est toujours vraie par sous-additivité de μ^*.

Nous savons tous que la cohérence théorique est l'une des friandises préférées des mathématiciens.

Théorème 5.4. *Un sous-ensemble $A \subset \mathbb{R}^d$ est mesurable au sens de Borel-Lebesgue si et seulement si il l'est au sens de Carathéodory.*

Démonstration. Premièrement, traitons l'implication $\Longrightarrow$. Soit donc $A \subset \mathbb{R}^d$ BL-mesurable, et soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble quelconque.

Comme $m^*(E)$ est l'infimum de la somme des volumes d'une réunion dénombrable de cubes ouverts recouvrant E, en prenant une suite minimisante de tels recouvrements, pour tout $n \geqslant 1$ entier, il existe un ouvert $\mathscr{O}_n \supset E$ tel que :

$$m^*(E) \leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n\big) \leqslant m^*(E) + \tfrac{1}{n},$$

donc l'ensemble :

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n$$

(qui est un « G_δ ») est mesurable, contient $E \subset G$, et satisfait :

$$m(G) = m^*(E).$$

Alors la décomposition disjointe en ensembles BL-mesurables :

$$G = \big(G \cap A\big) \cup \big(G \cap A^c\big)$$

donne, en tenant compte du fait que $m \equiv m^*$ sur les ensembles BL-mesurables :

$$\begin{aligned} m^*(E) = m(G) &= m\big(G \cap A\big) + m\big(G \cap A^c\big) \\ &= m^*\big(G \cap A\big) + m^*\big(G \cap A^c\big). \end{aligned}$$

Ensuite, l'inclusion $E \subset G$ implique :

$$E \cap A \subset G \cap A \qquad \text{et} \qquad E \cap A^c \subset G \cap A^c,$$

puis la monotonie de m^* donne :

$$m * \big(E \cap A\big) \leqslant m * \big(G \cap A\big) \qquad \text{et} \qquad m^*\big(E \cap A^c\big) \leqslant m^*\big(G \cap A^c\big),$$

d'où en poursuivant :

$$\begin{aligned} m^*(E) &= m^*\big(G \cap A\big) + m^*\big(G \cap A^c\big) \\ &\geqslant m^*\big(E \cap A\big) + m^*\big(E \cap A^c\big), \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'inégalité 'difficile' (5.3) qui suffit pour conclure la C-mesurabilité.

Deuxièmement, traitons l'implication $\Longleftarrow$. Soit donc $A \subset \mathbb{R}^d$ tel que, pour tout $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$m^*(E) = m^*\big(E \cap A\big) + m^*\big(E \cap A^c\big). \tag{5.5}$$

Supposons temporairement pour simplifier que $m^*(A) < \infty$. Comme pour la première implication (mais avec A au lieu de E), pour tout $n \geqslant 1$, il existe un ouvert $\mathscr{O}_n \supset A$ tel que :

$$m^*(A) \leqslant m^*\big(\mathscr{O}_n\big) \leqslant m^*(A) + \tfrac{1}{n},$$

donc le G_δ-ensemble :

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathscr{O}_n,$$

qui *est* BL-mesurable, satisfait :

$$m^*(A) = m^*(G) = m(G).$$

Appliquons alors l'hypothèse (5.5) à l'ensemble $E := G \supset A$:

$$\begin{aligned} m^*(G) &= m^*\big(G \cap A\big) + m^*\big(G \cap A^c\big) \\ &= m^*(A) + m^*\big(G \cap A^c\big) \\ &= m^*(G) + m^*\big(G \backslash A\big), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$0 = m^*\big(G \backslash A\big),$$

et grâce à un théorème du chapitre sur la théorie de la mesure de Borel-Lebesgue, ceci garantit que A est bien BL-mesurable.

Le cas où $m^*(A) = \infty$ se ramène directement à celui où $m^*(A) < \infty$, en introduisant les intersections :

$$A_n := A \cap \big\{x \in \mathbb{R}^d : \ |x| \leqslant n\big\} \qquad (n \geqslant 1),$$

qui sont alors toutes BL-mesurables, et nous savons pertinemment que la BL-mesurabilité est préservée par unions dénombrables quelconques ! □

Ainsi, la théorie grecque de Carathéodory est autorisée à commencer à se dévoiler à nos yeux, puisqu'elle respecte nos vénérés ancêtres de la Gaule du début du XIX$^{\text{ème}}$ siècle. Soit μ^* une mesure extérieure sur un ensemble X.

Lemme 5.6. *Tout ensemble $A \subset X$ de mesure $\mu^*(A) = 0$ nulle est Carathéodory-mesurable.*

Démonstration. En effet, pour un ensemble quelconque $E \subset X$, comme :

$$\mu^*\big(E \cap A\big) \leqslant \mu^*(A) = 0,$$

la sous-additivité de μ^* offre l'inégalité caractérisante (5.3) :

$$\begin{aligned} \underline{\mu^*\big(E \cap A\big)}_{\circ} + \mu^*\big(E \cap A^c\big) &= 0 + \mu^*\big(E \cap A^c\big) \\ &\leqslant \mu^*(E). \end{aligned}$$

□

Le premier fait remarquable au sujet de la définition de la C-mesurabilité est le suivant.

Théorème 5.7. *Pour toute mesure extérieure μ^* sur un ensemble X, la collection :*

$$\mathscr{M}_C := \Big\{A \in \mathscr{P}(X) : \ \mu^*(E) = \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big), \forall\, E \subset X\Big\}$$

des ensembles C-mesurables constitue une σ-algèbre.

De plus, la restriction :

$$\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{M}_C}$$

est une mesure.

Notifions toutefois que pour l'instant, cet énoncé demeure extrêmement abstrait et purement existentiel, car rien ne dit à quoi ressemble cette σ-algèbre, qui pourrait très bien se réduire à $\{\emptyset, X\}$.

Démonstration. Clairement, $\emptyset \in \mathscr{M}_C$ et $X \in \mathscr{M}_C$.

Puis, la symétrie inhérente à la condition de la Définition 5.2 offre sans effort :

$$A \in \mathscr{M}_C \quad \Longrightarrow \quad A^c \in \mathscr{M}_C.$$

Ensuite, il s'agit d'établir que $\mathscr{M}_C$ est stable par réunions finies, et par réunions infinies dénombrables. Or l'Exercice 3 convainc de manière élémentaire, quitte à intersecter et à redécouper en morceaux appropriés, que de telles réunions peuvent être supposées *disjointes*.

Assertion 5.8. *L'ensemble $\mathscr{M}_C$ est stable par réunions disjointes finies, et $\mu^*\big|_{\mathscr{M}_C}$ est finiment additive.*

Démonstration. Soient donc $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_C$, et soit $E \subset X$. En utilisant $A_1 \in \mathscr{M}_C$ puis $A_2 \in \mathscr{M}_C$, il vient :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*\big(E \cap A_1\big) + \mu^*\big(E \cap A_1^c\big)\\ &= \mu^*\big(E \cap A_1 \cap A_2\big) + \mu^*\big(E \cap A_1 \cap A_2^c\big) + \mu^*\big(E \cap A_1^c \cap A_2\big) + \mu^*\big(E \cap A_1^c \cap A_2^c\big).\end{aligned}$$

Pour ce qui est des 3 premiers termes, la sous-additivité de μ^* appliquée à la décomposition :

$$A_1 \cup A_2 = \big(A_1 \cap A_2\big) \cup \big(A_1 \cap A_2^c\big) \cup \big(A_1^c \cap A_2\big),$$

suivie d'une légère transformation du 4$^{\text{ème}}$ terme, donnent :

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*\big(E \cap (A_1 \cup A_2)\big) + \mu^*\big(E \cap (A_1 \cup A_2)^c\big),$$

ce qui est l'inégalité caractérisante (5.3) montrant que $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{M}_C$.

Pour terminer, une application de l'égalité de la Définition 5.2 à $E := A_1 \cup A_2$ offre l'additivité conclusive :

$$\begin{aligned}\mu^*\big(A_1 \cup A_2\big) &= \mu^*\big((A_1 \cup A_2) \cap A_1\big) + \mu^*\big((A_1 \cup A_2) \cap A_1^c\big)\\ &= \mu^*\big(A_1\big) + \mu^*\big(A_2\big).\end{aligned}$$

□

Assertion 5.9. *L'ensemble $\mathscr{M}_C$ est stable par réunions dénombrables disjointes, et $\mu^*\big|_{\mathscr{M}_C}$ est σ-additive.*

Démonstration. Soit donc $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ une collection dénombrable d'ensembles $A_i \in \mathscr{M}_C$ mutuellement disjoints, et soit $E \subset X$ arbitraire. Pour $i \geqslant 1$, introduisons les ensembles :

$$B_i := \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_i \qquad \text{et} \qquad B := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Grâce à ce qui vient d'être démontré, pour tout $i \geqslant 1$, puisque l'ensemble B_i est réunion disjointe finie d'éléments de $\mathscr{M}_C$, on a :

$$B_i \in \mathscr{M}_C \qquad\qquad (\forall\, i \geqslant 1).$$

Ensuite, pour tout $E \subset X$, comme $A_i \in \mathscr{M}_C$, on a :

$$\begin{aligned}\mu^*\big(E \cap B_i\big) &= \mu^*\big((E \cap B_i) \cap A_i\big) + \mu^*\big((E \cap B_i) \cap A_i^c\big)\\ &= \mu^*\big(E \cap A_i\big) + \mu^*\big(E \cap B_{i-1}\big),\end{aligned}$$

et alors une récurrence élémentaire sur i donne :

$$\mu^*\big(E \cap B_i\big) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant i} \mu^*\big(E \cap A_j\big).$$

Mais comme nous savons que $B_i \in \mathscr{M}_C$ grâce à l'Assertion 5.8 :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*\big(E\cap B_i\big)+\mu^*\big(E\cap B_i^c\big)\\ &= \sum_{1\leqslant j\leqslant i}\mu^*\big(E\cap A_j\big)+\mu^*\big(E\cap B_i^c\big)\\ &\geqslant \sum_{1\leqslant j\leqslant i}\mu^*\big(E\cap A_j\big)+\mu^*\big(E\cap B^c\big),\end{aligned}$$

la dernière transformation venant, par sous-additivité de μ^*, du fait que $B_i \subset B$ implique $B_i^c \supset B^c$.

À présent, laissons $i \longrightarrow \infty$ s'échapper furtivement vers l'infini, pour, en appliquant la sous-additivité dénombrable de μ^* à l'inclusion :

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} E\cap A_j \underset{\substack{\text{en fait}\\ =}}{\supset} E\cap B,$$

obtenir :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*\big(E\cap A_j\big)+\mu^*\big(E\cap B^c\big)\\ &\geqslant \mu^*\big(E\cap B\big)+\mu^*\big(E\cap B^c\big)\\ &\geqslant \mu^*(E).\end{aligned}$$

L'égalité visible des membres extrêmes de ce jeu d'inégalités force enfin l'identité :

$$\mu^*(E) = \mu^*\big(E\cap B\big)+\mu^*\big(E\cap B^c\big)$$

certifiant la C-mesurabilité de $B = \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. □

Pour terminer, en prenant $E := B$ dans ces mêmes (in)égalités, nous concluons :

$$\mu^*\bigg(\bigcup_{j\geqslant 1} A_j\bigg) = \mu^*(B) = \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*\big(A_j\big)+0$$

la σ-additivité de μ^* sur $\mathscr{M}_C$ — fin des réjouissances ! □

À la mesure $\mu = \mu^*\big|_{\mathscr{M}_C}$ sur la σ-algèbre de ce Théorème 5.7, le Théorème 4.2 a alors naturellement associé une extension $\overline{\mu}$ sur la complétion :

$$\overline{\mathscr{M}}_{C,\mu} := \Big\{A\subset X\colon\ \exists\, A_1,A_2\in\mathscr{M}_C \text{ avec } A_1\subset A\subset A_2 \text{ tels que } \mu(A_2\backslash A_1)=0\Big\}.$$

Mais implicitement, la théorie de Carathéodory a tout arrangé à l'avance.

Proposition 5.10. *En fait, la σ-algèbre $\mathscr{M}_C$ est complète :*

$$\overline{\mathscr{M}}_{C,\mu} = \mathscr{M}_C.$$

Démonstration. Il s'agit de faire voir que tout $A \in \overline{\mathscr{M}}_{C,\mu}$ est C-mesurable. Soit donc $E \subset X$ quelconque. Par l'hypothèse que $A_1 \subset A \subset A_2$ et que $A_1, A_2 \in \mathscr{M}_C$, on a :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &= \mu^*\big(E\cap A_1\big)+\mu^*\big(E\cap A_1^c\big),\\ \mu^*(E) &= \mu^*\big(E\cap A_2\big)+\mu^*\big(E\cap A_2^c\big).\end{aligned}$$

Les supclusions $A_2 \supset A$ et $A_1^c \supset A^c$ alliées à la sous-additivité de μ^* donnent :

$$\mu^*\big(E\cap A_2\big)+\mu^*\big(E\cap A_1^c\big) \geqslant \mu^*\big(E\cap A\big)+\mu^*\big(E\cap A^c\big).$$

Or, de l'identité ensembliste :

$$E \cap A_1^c \,=\, \big(E \cap A_2^c\big) \cup \big(E \cap (A_1^c \cap A_2)\big),$$

découle :

$$\begin{aligned} \mu^*\big(E \cap A_1^c\big) &\leqslant \mu^*\big(E \cap A_2^c\big) + \underline{\mu^*\big(E \cap (A_1^c \cap A_2)\big)} \\ {\scriptstyle [\mu^*(A_2 \backslash A_1) = 0]} \qquad &= \mu^*\big(E \cap A_2^c\big) + 0. \end{aligned}$$

Finalement, en repartant de la C-mesurabilité de E et en rassemblant les pièces (d'argent ?) :

$$\begin{aligned} \mu^*(E) &= \mu^*\big(E \cap A_2\big) + \mu^*\big(E \cap A_2^c\big) \\ &\geqslant \mu^*\big(E \cap A_2\big) + \mu^*\big(E \cap A_1^c\big) \\ &\geqslant \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big), \end{aligned}$$

on extrait l'inégalité (5.3) caractérisant la C-mesurabilité de A. □

Lorsque l'ensemble X est un espace métrique, nous allons maintenant définir une classe naturelle de mesures extérieures très utiles dans la pratique. Ces mesures extérieures vont alors induire, via le Théorème 5.7 de Carathéodory, des vraies mesures sur une vraie σ-algèbre, celle des boréliens, très vaste.

Rappelons qu'un *espace métrique* (X, d) est un ensemble X muni d'une *fonction-distance* satisfaisant :

- $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in X$;
- $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in X$;
- $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$.

Les *boules ouvertes* et *fermées* de centre $x \in X$ et de rayon $r \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} B_r(x) &:= \big\{y \in X \colon\ d(x, y) < r\big\}, \\ \overline{B}_r(x) &:= \big\{y \in X \colon\ d(x, y) \leqslant r\big\}, \end{aligned}$$

définissent une topologie canonique $\mathscr{T}_X$, dite *métrique*, sur (X, d), d'après laquelle un *ouvert* est réunion (arbitraire) de boules ouvertes, un *fermé*, complémentaire d'un ouvert.

À cette topologie métrique $\mathscr{T}_X$, la Définition 1.9 a déjà associé la σ-algèbre borélienne :

$$\mathscr{B}_X \,:=\, \sigma\big(\mathscr{T}_X\big),$$

engendrée par la collection de *toutes* les boules ouvertes et fermées par prises dénombrables de réunions, d'intersections, et de complémentaires. Ainsi, $\mathscr{B}_X$ est une très « grande » σ-algèbre, beaucoup plus vaste que la collection $\mathscr{T}_X$ des ouverts de X.

Nous allons maintenant tourner notre attention vers une classe distinguée de mesures extérieures sur X, à savoir celles qui sont exactement additives sur des paires d'ensembles '*bien séparés*'.

Ensuite, nous montrerons que cette propriété garantira que les boréliens de X sont mesurables au sens de Carathéodory, *cf.* la Définition 5.2.

Tout d'abord, rappelons que la *distance* entre deux sous-ensembles E, F d'un espace métrique (X, d) vaut :

$$\mathsf{dist}\,(E, F) \,:=\, \mathsf{inf}\,\big\{d(x, y) \colon\ x \in E,\ y \in F\big\}.$$

Définition 5.11. Une *mesure extérieure* μ^* sur (X, d) est dite *métrique* si :

$$\mathsf{dist}\,(E, F) > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mu^*\big(E \cup F\big) = \mu^*(E) + \mu^*(F).$$

Souvenons-nous que cette propriété a joué un rôle-clé dans le développement de la théorie de la mesure m sur $\mathbb{R}^d$ due à Borel et à Lebesgue, notamment lorsque nous avons établi le théorème principal montrant que m est exactement additive sur les réunions dénombrables disjointes d'ensembles mesurables.

Théorème 5.12. *Si μ^* est une mesure extérieure* métrique *sur un espace métrique (X, d), alors les boréliens de X sont Carathéodory-mesurables :*

$$\mathscr{B}_X \subset \mathscr{M}_C(\mu^*),$$

et $\mu^*\big|_{\mathscr{B}_X} =: \mu$ est une mesure.

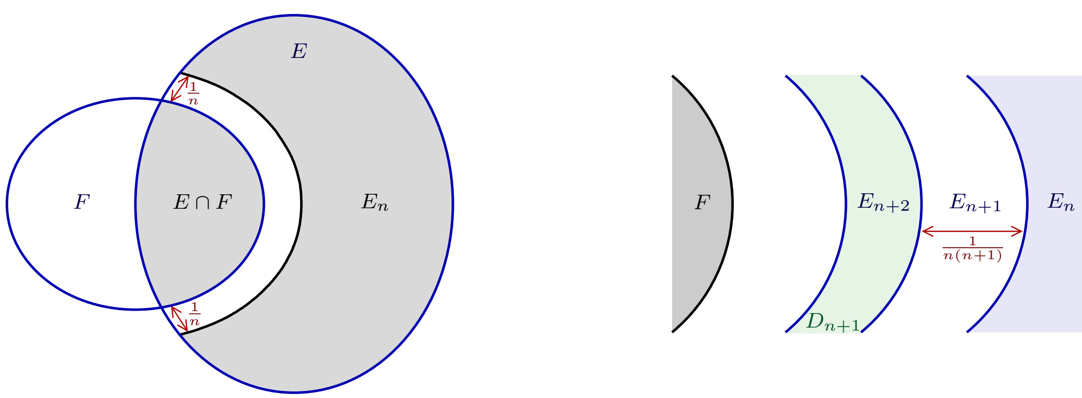
La deuxième partie de cet énoncé reprend ce qui a déjà été vu dans le Théorème 5.7.

Démonstration. Or puisque d'après ce même théorème, $\mathscr{M}_C$ est une σ-algèbre, il suffit de démontrer que les sous-ensembles fermés $F \subset X$ sont Carathéodory-mesurables, car alors $\mathscr{M}_C$ contiendra la σ-algèbre $\mathscr{B}_X$ engendrée par les fermés.

Soit donc un fermé quelconque $F \subset X$, et soit $E \subset X$ un sous-ensemble arbitraire. L'objectif est d'établir l'inégalité caractérisante (5.3) :

$$\mu^*(E) \geqslant \mu^*\big(E \cap F\big) + \mu^*\big(E \cap F^c\big),$$

laquelle est trivialement satisfaite lorsque $\mu^*(E) = \infty$, donc on peut supposer que $\mu^*(E) < \infty$.



Pour $n \geqslant 1$ entier, introduisons :

$$E_n := \big\{y \in E \cap F^c \colon \mathsf{dist}\,(y, F) \geqslant \tfrac{1}{n}\big\}.$$

Alors ces ensembles emboîtés $E_n \subset E_{n+1}$ remplissent (exercice) :

$$E \cap F^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n.$$

De plus, pour tout $x \in E \cap F \subset F$, et tout $y \in E_n \subset E \cap F^c$, on a par définition de E_n :

$$d(y, x) \geqslant \mathsf{dist}\,(y, F) \geqslant \tfrac{1}{n},$$

et donc :

$$\mathsf{dist}\,\big(E_n,\, E \cap F\big) \geqslant \tfrac{1}{n} > 0,$$

ce qui permet d'appliquer l'hypothèse que μ^* est une mesure extérieure métrique :

$$\begin{aligned}\mu^*(E) &\geqslant \mu^*\big((E\cap F)\cup E_n\big)\\ &= \mu^*\big(E\cap F\big) + \underbrace{\mu^*\big(E_n\big)}_{\text{faire } n\to\infty}.\end{aligned} \tag{5.13}$$

Assertion 5.14. *On a :*

$$\lim_{n\to\infty}\mu^*\big(E_n\big) = \mu^*\big(E\cap F^c\big).$$

Preuve. Avec la convention $E_0 = \emptyset$, introduisons les 'ensembles-couronnes' :

$$D_n := E_{n+1}\cap E_n^c \qquad\qquad (n\in\mathbb{N}).$$

Nous affirmons que :

$$\mathsf{dist}\,\big(D_{n+1}, E_n\big) \geqslant \tfrac{1}{n} - \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{n(n+1)},$$

parce que si $x \in D_{n+1}$, si $y \in X$ est quelconque avec $d(x,y) < \frac{1}{n(n+1)}$, comme $x \in D_{n+1} \subset E_{n+1}^c$, on a $\mathsf{dist}\,(x,F) < \frac{1}{n+1}$, d'où :

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}\,(y,F) &\leqslant d(x,y) + \mathsf{dist}\,(x,F)\\ &< \tfrac{1}{n(n+1)} + \tfrac{1}{n+1} = \tfrac{1}{n},\end{aligned}$$

donc $y \notin E_n$.

Ceci permet à nouveau d'appliquer l'axiome de mesure extérieure métrique, pour $n = 2k+1$ impair, à la 'décomposition' disjointe :

$$E_{2k+1} \supset D_{2k}\cup E_{2k-1},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned}\mu^*\big(E_{2k+1}\big) &\geqslant \mu^*\big(D_{2k}\cup E_{2k-1}\big)\\ &= \mu^*\big(D_{2k}\big) + \mu^*\big(E_{2k-1}\big),\end{aligned}$$

et une sommation-simplification offre un jeu d'inégalités :

$$\infty > \mu^*(E) \geqslant \mu^*\big(E_{2k-1}\big) \geqslant \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*\big(D_{2j}\big) + \mu^*\big(A_1\big),$$

qui *établit* la convergence de la série à termes positifs $\sum_j \mu^*\big(D_{2j}\big)$.

Un argument entièrement similaire offre aussi :

$$\infty > \sum_{j=1}^{\infty}\mu^*\big(D_{2j-1}\big) + \underline{\mu^*\big(A_0\big)}$$

et donc c'est toute la série qui converge :

$$\infty > \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\big(D_i\big).$$

Finalement, comme pour tout $n \geqslant 1$, on a :

$$E_n \subset E\cap F^c \subset E_n\cup D_n\cup D_{n+1}\cup D_{n+2}\cup\cdots,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\mu^*\big(E_n\big) &\leqslant \mu^*\big(E\cap F^c\big)\\ &\leqslant \mu^*\big(E_n\big)+\underbrace{\sum_{j=n}^{\infty}\mu^*\big(D_j\big)}_{\substack{\longrightarrow\, 0\\ n\to\infty}},\end{aligned}$$

ce qui conclut qu'on a bien $\mu^*\big(E_n\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mu^*\big(E\cap F^c\big)$. □

Pour terminer, un retour à l'inégalité (5.13) dans laquelle on fait $n \longrightarrow \infty$ permet d'atteindre l'objectif :

$$\mu^*(E) \,\geqslant\, \mu^*\big(E\cap F\big)+\mu^*\big(E\cap F^c\big). \qquad \square$$

Ainsi, la mesure $\mu = \mu^*\big|_{\mathscr{B}_X}$ qui est définie sur la σ-algèbre $\mathscr{B}_X \subset \mathscr{P}(X)$ des boréliens est borélienne, au sens de la Définition 2.4. Lorsqu'elle satisfait de plus $\mu(K) < \infty$ pour tout compact $K \subset X$, la même définition disait qu'elle est *de Borel*. Avec cette hypothèse supplémentaire, un théorème d'approximation très satisfaisant est vrai.

Théorème 5.15. *Sur un espace métrique (X,d), soit μ une mesure de Borel,* i.e. *finie sur les compacts. Alors pour tout borélien $A \in \mathscr{B}_X$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert $\mathscr{O}$ avec :*

$$F \,\subset\, A \,\subset\, \mathscr{O},$$

tels que :

$$\mu\big(A\backslash F\big) \,\leqslant\, \varepsilon \qquad\text{et}\qquad \mu\big(\mathscr{O}\backslash A\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Démonstration. Nous aurons besoin plusieurs fois d'un lemme auxiliaire qui 'corrige' en quelque sorte le fait qu'une union dénombrable de fermés n'est pas en général fermée.

Lemme 5.16. *Dans l'espace métrique (X,d), soit $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de fermés, et soit :*

$$F^\sharp \,:=\, \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé $F \subset F^\sharp$ tel que :

$$\mu\big(F^\sharp\backslash F\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Preuve. Quitte à remplacer F_k par $F_1 \cup \cdots \cup F_k$, la réunion est croissante :

$$F_k \,\subset\, F_{k+1} \qquad\qquad (k \geqslant 1).$$

Fixons un point $x_0 \in X$ et, pour $n \geqslant 1$ entier, introduisons les boules ouvertes :

$$B_n \,:=\, \big\{x\in X\colon\; d(x_0,x)<n\big\}.$$

Comme $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = X$, l'ensemble $F^\sharp$ est une union dénombrable *disjointe* de ses intersections avec les coquilles sphériques successives :

$$F^\sharp \,=\, \bigcup_{n=1}^{\infty} F^\sharp \cap \Big(\overline{B}_n\backslash B_{n-1}\Big).$$

Mais pour n fixé, $F^\sharp \cap \big(\overline{B}_n \backslash B_{n-1}\big)$ est limite, quand $k \longrightarrow \infty$, de la suite croissante des ensembles mesurables $F_k \cap \big(\overline{B}_n \backslash B_{n-1}\big)$. Comme $\overline{B}_n \backslash B_{n-1}$ est de μ-mesure finie, les Propositions 2.7 et 2.8 offrent alors un entier $\mathrm{N}(n) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mu\Big(\big(F^\sharp \backslash F_{\mathrm{N}(n)}\big) \bigcap \big(\overline{B}_n \backslash B_{n-1}\big)\Big) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2^n}.$$

Par conséquent, nous pouvons poser :

$$F := \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(F_{\mathrm{N}(n)} \bigcap \big(\overline{B}_n \backslash B_{n-1}\big)\Big),$$

sous-ensemble de X qui est *fermé*, car sa trace sur chaque couronne l'est, qui est de plus contenu dans $F^\sharp$, et qui satisfait bien :

$$\mu\big(F^\sharp \backslash F\big) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon. \qquad \square$$

Introduisons maintenant :

$$\mathscr{C} := \Big\{A \subset X \colon \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, F \subset X \text{ fermé},\ \exists\, \mathscr{O} \subset X \text{ ouvert avec } F \subset A \subset \mathscr{O}$$
$$\text{tels que } \mu(A \backslash F) \leqslant \varepsilon \text{ et } \mu(\mathscr{O} \backslash A) \leqslant \varepsilon\Big\}.$$

Il est clair que $X \in \mathscr{C}$, et aussi que :

$$A \in \mathscr{C} \implies A^c \in \mathscr{C},$$

simplement parce que lors d'un passage au complémentaire, fermés et ouverts échangent leurs rôles :

$$F \subset A \subset \mathscr{O} \quad\implies\quad \mathscr{O}^c \subset A^c \subset F^c.$$

Assertion 5.17. *Cette classe $\mathscr{C}$ contient les ouverts $\mathscr{O} \subset X$.*

Preuve. Pour trouver un fermé $F \subset A := \mathscr{O}$ avec $\mu(\mathscr{O} \backslash F) \leqslant \varepsilon$, pour $k \geqslant 1$ entier, introduisons :

$$F_k := \big\{x \in \mathscr{O} \colon d(x_0, x) \leqslant k \text{ et } \mathsf{dist}\,\big(x, \mathscr{O}^c\big) \geqslant \tfrac{1}{k}\big\}.$$

On vérifie aisément que ces F_k sont fermés, et que $\mathscr{O} = \cup_{k=1}^{\infty} F_k$. Le Lemme 5.16 fournit alors F. $\square$

Assertion 5.18. *La classe $\mathscr{C}$ est une σ-algèbre.*

Preuve. Il reste à exhiber la stabilité de $\mathscr{C}$ par réunions dénombrables. Soit donc $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ avec $A_k \in \mathscr{C}$ et soit $A := \cup_{k=1}^{\infty} A_k$, Par hypothèse, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe des encadrements fermés-ouverts :

$$F_k \subset A_k \subset \mathscr{O}_k \qquad\qquad (k \geqslant 1),$$

tels que :

$$\mu\big(A_k \backslash F_k\big) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2^k} \qquad \text{et} \qquad \mu\big(\mathscr{O}_k \backslash A_k\big) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2^k}.$$

Si donc nous posons $\mathscr{O} := \cup_{k=1}^{\infty} \mathscr{O}_k$, comme on a (exercice) :

$$\mathscr{O} \backslash A \subset \bigcup_{k \geqslant 1} \mathscr{O}_k \backslash A_k,$$

il vient :

$$\mu\big(\mathscr{O}\backslash A\big) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

D'un autre côté, en posant $F^\sharp := \cup_{k=1}^\infty F_k$, on voit de la même façon que :

$$\mu\big(A\backslash F^\sharp\big) \leqslant \varepsilon,$$

et le Lemme 5.16 — encore lui ! — fournit un fermé $F \subset F^\sharp$ tel que $\mu\big(F^\sharp\backslash F\big) \leqslant \varepsilon$.

Au final :

$$\mu\big(A\backslash F\big) \leqslant 2\,\varepsilon. \qquad \square$$

Comme nous venons de le détailler, des classes d'ensembles mesurables peuvent être construites au moyen de mesures extérieures. Cependant, la définition d'une mesure extérieure dépend fréquemment d'une idée plus « primitive » de mesure connue pour une classe plus simple d'ensembles, exactement comme nous nous sommes servis de cubes-modèles à volume connu pour construire la mesure extérieure m^* de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Dans un cadre abstrait général, cela va être au concept intuitif de *prémesure* de jouer le rôle du volume des cubes $Q \subset \mathbb{R}^d$. Commençons donc par une définition.

Soit X un ensemble, et soit $\mathscr{A}$ une algèbre sur X, au sens de la Définition 1.1, objet primitif n'incorporant que du fini.

Définition 5.19. Une *prémesure* sur une algèbre $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une fonction :

$$\mu_0\colon \quad \mathscr{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$$

satisfaisant :

(1) $\mu_0(\emptyset) = 0$;

(2) si $A_1, A_2, \dots$ est une collection dénombrable d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ mutuellement disjoints telle que :

$$\bigcup_{i\geqslant 1} A_i \in \mathscr{A},$$

alors :

$$\mu_0\Big(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\Big) = \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i\big).$$

En particulier, μ_0 est finiment additive.

Les prémesures donnent naissance à des mesures extérieures d'une manière naturelle.

Proposition 5.20. *Si μ_0 est une prémesure sur une algèbre $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, alors la fonction à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ définie par :*

$$\mu^*(A) := \mathsf{inf}\left\{\sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i\big)\colon\ A \subset \bigcup_{i=1}^\infty A_i \text{ avec } A_i \in \mathscr{A}\right\}$$

est une mesure extérieure sur X satisfaisant :

(1) *$\mu^*(A) = \mu_0(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$;*

(2) *tout ensemble $A \in \mathscr{A}$ est mesurable au sens de Carathéodory,* i.e. *vérifie :*

$$\mu^*(E) = \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big) \qquad (\forall\, E \in \mathscr{P}(X)).$$

Démonstration. Les arguments qui établissent que μ^* est une mesure extérieure sont très analogues à ceux, vus dans le chapitre sur la théorie de la mesure de Borel-Lebesgue, qui montraient que m^* est une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^d$: ils ne seront pas répétés.

Ensuite, pour voir que :

$$\mu^*\big|_{\mathscr{A}} \,=\, \mu_0,$$

soit $A \in \mathscr{A}$. Puisque A se recouvre lui-même, il est clair que $\mu^*(A) \leqslant \mu_0(A)$.

Pour l'inégalité opposée, supposons $A \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$ recouvert par des $A_i \in \mathscr{A}$. Remplaçons les A_i par les ensembles :

$$A_i' \,:=\, A \bigcap \Big(A_i \Big\backslash \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant i-1} A_j \Big),$$

qui appartiennent à l'algèbre $\mathscr{A}$, sont mutuellement disjoints, et recouvrent $A = \cup_{i=1}^\infty A_i'$. Alors la Définition 5.19 s'applique pour donner :

$$\mu_0(A) \,=\, \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i'\big) \,\leqslant\, \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i\big),$$

d'où découle en prenant un infimum que $\mu_0(A) \leqslant \mu^*(A)$, comme voulu.

Enfin, pour faire voir la C-mesurabilité d'un ensemble $A \in \mathscr{A}$, soit $E \in \mathscr{P}(X)$ et soit $\varepsilon > 0$. Par définition de $\mu^*(E)$, il existe une suite $\big(A_i\big)_{i=1}^\infty$ d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ avec $E \subset \cup_{i=1}^\infty A_i$ tels que :

$$\sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i\big) \,\leqslant\, \varepsilon + \mu^*(E).$$

Or comme μ_0 est une prémesure finiment et dénombrablement additive sur $\mathscr{A}$, et comme μ^* est dénombrablement sous-additive, nous atteignons l'inégalité caractéristique de Carathéodory :

$$\begin{aligned} \mu^*(E) + \varepsilon \,\geqslant\, \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i\big) \,&=\, \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i \cap A\big) + \sum_{i=1}^\infty \mu_0\big(A_i \cap A^c\big) \\ &\geqslant\, \mu^*\big(E \cap A\big) + \mu^*\big(E \cap A^c\big). \end{aligned} \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant synthétiser le travail réalisé. Soit X un ensemble quelconque, soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une algèbre, et soit μ_0 une prémesure sur $\mathscr{A}$. La Proposition 5.20 a alors associé à μ_0 une mesure extérieure μ^* sur $\mathscr{P}(X)$ avec :

$$\mu^*\big|_{\mathscr{A}} \,=\, \mu_0,$$

et elle a montré que la collection $\mathscr{M}_C = \mathscr{M}_C(\mu^*)$ des sous-ensembles $A \subset X$ qui sont Carathéodory-mesurables contient :

$$\mathscr{A} \,\subset\, \mathscr{M}_C(\mu^*).$$

Or puisque le premier Théorème 5.7 a déjà démontré que $\mathscr{M}_C(\mu^*)$ *est* une σ-algèbre, la σ-algèbre $\sigma(\mathscr{A})$ engendrée par $\mathscr{A}$ satisfait nécessairement par minimalité :

$$\sigma(\mathscr{A}) \,\subset\, \mathscr{M}_C(\mu^*),$$

cette inclusion pouvant d'ailleurs être stricte. Enfin, le même Théorème 5.7 a aussi établi que :

$$\mu \,:=\, \mu^*\big|_{\mathscr{M}_C(\mu^*)}$$

est une mesure. Bien entendu, on a :

$$\mu\big|_{\mathscr{A}} \,=\, \mu^*\big|_{\mathscr{A}} \,=\, \mu_0.$$

En résumé :

Théorème 5.21. *Soit $\mathscr{A}$ une algèbre sur un ensemble X, soit μ_0 une prémesure sur $\mathscr{A}$, et soit $\sigma(\mathscr{A})$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{A}$.*

Alors il existe une mesure μ sur $\sigma(\mathscr{A})$ qui prolonge :

$$\mu_0 \,=\, \mu\big|_{\mathscr{A}}.$$

De plus, toute autre mesure ν sur $\sigma(\mathscr{A})$ prolongeant aussi $\mu_0 = \nu\big|_{\mathscr{A}}$ prend la même valeur :

$$\nu(B) \,=\, \mu(B)$$

sur tout ensemble $B \in \sigma(\mathscr{A})$ avec $\mu(B) < \infty$, et lorsque μ est σ-finie, on a $\nu = \mu$.

Démonstration. Il reste seulement à éclaircir cette dernière affirmation d'unicité. Soit donc ν avec $\mu_0 = \nu\big|_{\mathscr{A}}$, et soit $B \in \sigma(A)$ avec $\mu(B) < \infty$.

Assertion 5.22. *On a $\nu(B) \leqslant \mu(B)$.*

Preuve. En effet, si $B \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathscr{A}$, alors :

$$\nu(B) \,\leqslant\, \sum_{i=1}^{\infty} \nu\big(A_i\big) \,=\, \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\big(A_i\big),$$

et en prenant l'infimum sur de tels recouvrements, il vient :

$$\nu(B) \,\leqslant\, \mu^*(B) \,=\, \mu(B), \tag{5.23}$$

comme affirmé. □

Assertion 5.24. *On a $\mu(B) \leqslant \nu(B)$.*

Preuve. Pour cette inégalité inverse, notons que si $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathscr{A}$, en considérant les $A_i' := \cup_{1 \leqslant j \leqslant i} A_i$ appartenant à $\mathscr{A}$ dont la suite est croissante $A_i' \subset A_{i+1}'$, la Proposition 2.7 s'applique pour donner :

$$\nu(A) \,=\, \lim_{i\to\infty} \nu\Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant i} A_i\Big) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu_0\Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant i} A_i\Big) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu\Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant i} A_i\Big) \,=\, \mu(A).$$

Or par définition de ν^*, tout sous-ensemble $E \subset X$ peut, quel que soit $\varepsilon > 0$, être recouvert $E \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i$ par des $A_i \in \mathscr{A}$ de telle sorte que, en posant encore $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$, on a :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu_0\big(A_i\big) \,=\, \nu(A) \,\leqslant\, \varepsilon + \nu^*(E),$$

et si on applique cela à $E := B \subset A$, sachant que $\nu = \nu^*$ sur $\mathscr{M}_C(\nu^*) \supset \sigma(\mathscr{A})$, il vient :

$$\nu(A) \,\leqslant\, \varepsilon + \nu(B).$$

Ensuite, de l'hypothèse que $\mu(B) < \infty$ découle que $\nu(B) < \infty$ aussi grâce à l'Assertion 5.22, donc le Lemme 2.6 s'applique :

$$\nu\big(A\backslash B\big) \,\leqslant\, \varepsilon,$$

et donc :

$$\mu(B) \leqslant \mu(A) = \nu(A) = \nu(B) + \nu\big(A \backslash B\big)$$
$$\leqslant \nu(B) + \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, on obtient bien $\mu(B) \leqslant \nu(B)$. □

Ces deux assertions concluent l'égalité $\nu(B) = \mu(B)$ sur les $B \in \sigma(\mathscr{A})$ avec $\mu(B) < \infty$.

Pour terminer, lorsque μ est σ-finie, *i.e.* lorsque $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ avec $\mu\big(X_n\big) < \infty$ quel que soit $n \geqslant 1$, cette réunion pouvant être supposée disjointe quitte à remplacer :

$$X_n \longmapsto X_n \Big\backslash \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant n-1} X_m,$$

pour tout $C \in \sigma(\mathscr{A})$, il devient facile de constater l'égalité :

$$\mu(C) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\big(C \cap X_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu\big(C \cap X_n\big) = \nu(C),$$

grâce à l'égalité $\mu(\cdot) = \nu(\cdot)$ qu'on vient d'obtenir sur les $B_n := C \cap X_n$. □

Un dernier travail de synthèse concerne le cas spécial des espaces métriques (X, d) avec leurs σ-algèbres boréliennes $\mathscr{B}_X$. Dans ce cadre, notre parcours théorique abstrait vient de suivre un ordre exactement inverse de celui que nous avons suivi dans le chapitre consacré à la construction de la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

$\downarrow$ Étant donné une mesure extérieure μ^* sur un ensemble X, la classe $\mathscr{M}_C$ des ensembles C-mesurables satisfaisant la condition de Carathéodory est une σ-algèbre.

$\downarrow$ Les boréliens d'un espace métrique (X, d) muni d'une mesure extérieure μ^* sont C-mesurables lorsque μ^* est additive sur les paires d'ensembles à distance > 0.

$\downarrow$ Une prémesure μ_0 sur une algèbre $\mathscr{A}$ d'un espace métrique (X, d) donne naissance à une mesure extérieure μ^* par infima de recouvrements.

Alors le résultat majeur qui synthétise tout ce qui vient d'être démontré dans un cadre abstrait général, tout en rétablissant l'ordre logique $\uparrow$ d'une saine pensée progressive, s'énonce comme suit.

Théorème 5.25. *Soit $\mathscr{A}$ une σ-algèbre sur un espace métrique (X, d), et soit μ_0 une prémesure* métrique *sur $\mathscr{A}$,* i.e. *satisfaisant :*

$$\mu_0\big(A \cup B\big) = \mu_0(A) + \mu_0(B) \qquad\qquad (\forall\, A, B \in \mathscr{A} \text{ avec } \mathrm{dist}\,(A,B) > 0).$$

Alors il existe une mesure μ sur :

$$\sigma\big(\sigma(\mathscr{A}) \cup \mathscr{B}_X\big)$$

prolongeant :

$$\mu_0 = \mu\big|_{\mathscr{A}},$$

unique lorsque μ est σ-finie.

Démonstration. On vérifie que la mesure extérieure μ^* associée à μ_0 est aussi métrique, donc le Théorème 5.12 s'applique et offre :

$$\mathscr{M}_C(\mu^*) \supset \mathscr{B}_X.$$

Mais le Théorème 5.21 a aussi offert :

$$\mathscr{M}_C(\mu^*) \supset \sigma(\mathscr{A}),$$

et comme, d'après le Théorème 5.7, c'est une σ-algèbre, il vient :

$$\mathscr{M}_C(\mu^*) \supset \sigma\big(\sigma(\mathscr{A}) \cup \mathscr{B}_X\big),$$

et enfin, d'après le même théorème, $\mu := \mu^*\big|_{\mathscr{M}_C(\mu^*)}$ est une mesure, donc la restriction $\mu\big|_{\sigma(\sigma(\mathscr{A})\cup\mathscr{B}_X)}$ l'est aussi. □

6. Exercices

Exercice 1. Soit $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite de sous-ensembles $E_i \subset X$ d'un ensemble X. On définit la *limite inférieure :*

$$\liminf_{i\to\infty} E_i := \bigcap_{i\geqslant 1} \bigcup_{j\geqslant i} E_j,$$

ainsi que la *limite supérieure :*

$$\limsup_{i\to\infty} E_i := \bigcup_{i\geqslant 1} \bigcap_{j\geqslant i} E_j.$$

(a) Soit un élément $x \in X$. Comment s'exprime la propriété « *À partir d'un certain rang, x est contenu dans tous les E_i* » ?, et comment s'exprime la propriété « *x appartient à une infinité de E_i* » ?

(b) Montrer que :

$$\liminf_{i\to\infty} E_i \subset \limsup_{i\to\infty} E_i.$$

(c) Vérifier que :

$$\Big(\limsup_{i\to\infty} E_i\Big)^c = \liminf_{i\to\infty} \big(E_i\big)^c.$$

(d) La suite $\big(E_i\big)_{i=1}^{\infty}$ est dite *convergente* lorsque :

$$\liminf_{i\to\infty} E_i = \limsup_{i\to\infty} E_i.$$

Vérifier que si la suite est *croissante* au sens où $E_i \subset E_{i+1}$ pour tout $i \geqslant 1$, alors elle est convergente, puis déterminer sa limite. Que dire lorsque la suite est décroissante ?

Exercice 2. Soit un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, où $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une σ-algèbre. On suppose que $X = \cup_{n=1}^{\infty} X_n$ est réunion dénombrable de sous-ensembles $X_n \subset X$ sur lesquels :

$$\mu_1\big(X_n\big) = \mu_2\big(X_n\big) \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Généraliser le Théorème 3.7 de Dynkin à ce contexte, à savoir, démontrer que si μ_1 et μ_2 coïncident sur un certain π-système $\mathscr{E} \subset \mathscr{A}$, alors elles coïncident sur la σ-algèbre $\sigma(\mathscr{E})$ qu'il engendre.

Exercice 3. Soit X un ensemble. Montrer qu'un sous-ensemble $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une σ-algèbre si :

- $X \in \mathscr{A}$;
- pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $A^c \in \mathscr{A}$ aussi ;
- pour tous $A_1, A_2 \in \mathscr{A}$ avec $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, on a $A_1 \cup A_2 \in \mathscr{A}$ aussi ;
- pour toute suite $\big(A_i\big)_{i=1}^{\infty}$ d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints :

$$\emptyset = A_i \cap A_{i'} \qquad (1 \leqslant i \neq i'),$$

on a $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{A}$ aussi.

Exercice 4. Démontrer rigoureusement le Théorème 2.3.

Exercice 5. Soit X un ensemble, soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une algèbre, soit μ_0 une prémesure sur $\mathscr{A}$, soit μ^* la mesure extérieure associée, soit $E \subset X$ un sous-ensemble quelconque, et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit.

(a) Montrer qu'il existe une réunion dénombrable :

$$A_1 := \bigcup_{i=1}^{\infty} A_{1,i}$$

d'ensembles $A_{1,i} \in \mathscr{A}$ avec $A_1 \supset E$ telle que $\mu^*\big(A_1\big) \leqslant \varepsilon + \mu^*(E)$.

(b) Montrer qu'il existe une intersection dénombrable de réunions dénombrables :

$$A_2 := \bigcap_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} A_{2,i,j}$$

d'ensembles $A_{2,i,j} \in \mathscr{A}$ avec $A_2 \supset E$ telle que $\mu^*\big(A_2\big) = \mu^*(E)$.

Exercice 6. Soient m et m^* la mesure et la mesure extérieure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Montrer que la complétion, au sens de la Section **4**, de la σ-algèbre des boréliens de $\mathbb{R}^d$ s'identifie avec la σ-algèbre des ensembles mesurables au sens de Carathéodory :

$$\overline{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^d,m} = \mathscr{M}_C(m^*).$$

Exercice 7. EE

Théorie abstraite de l'intégration et théorème de Radon-Nikodym

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Maintenant que nous avons établi les propriétés fondamentales des espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$, où $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ est une σ-algèbre, munis d'une mesure μ, nous pouvons développer la généralisation de la théorie de l'intégration de Lebesgue à ce cadre abstrait. En fait, les théorèmes et les démonstrations de la théorie nouvelle sont quasiment les mêmes que ceux que nous avons détaillés pour l'intégration dans $\mathbb{R}^d$. Autrement dit, nous connaissons déjà presque tout de la théorie abstraite de l'intégration sur un espace mesuré :

$$\big(X, \mathscr{A}, \mu\big),$$

car il suffit de remplacer le dx dans les intégrales de la théorie de Lebesgue par un $d\mu$.

Aussi, nous nous contenterons de décrire les points essentiels et d'énoncer les théorèmes principaux, sans reproduire leurs démonstrations. Tout lecteur ayant bien assimilé les chapitres qui précèdent pourra, s'il le souhaite, compléter les détails.

1. Fonctions mesurables

Pour commencer, abrégeons l'ensemble étendu des nombres réels par :

$$\overline{\mathbb{R}} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Soit X un ensemble abstrait, et soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre.

Définition 1.1. Une fonction :

$$f\colon \quad (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

est dite *mesurable* si, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :

$$\underbrace{f^{-1}\big([-\infty, c[\big) \;=\; \big\{x \in X\colon\; f(x) < c\big\}}_{\in\, \mathscr{A}}$$

appartient à la σ-algèbre de référence. Fréquemment, f prendra en fait des valeurs finies dans $\mathbb{R}$.

Avec cette définition, les propriétés élémentaires des fonctions mesurables déjà vues dans $\mathbb{R}^d$ se généralisent aisément. Par exemple, on a stabilité sous manipulations algébriques.

Lemme 1.2. *Si $f, g\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, alors fg, puis $\alpha\, f + \beta\, g$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, et aussi $|f|$, sont mesurables.* $\square$

Les Exercices 1 et 2 proposent même d'autres propriétés élémentaires qui sont satisfaites par des applications *mesurables* à valeurs dans des espaces plus généraux que $\overline{\mathbb{R}}$.

La propriété la plus spectaculaire et la plus importante de l'ensemble des fonctions mesurables concerne les suites de fonctions.

Théorème 1.3. *Soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables :*

$$f_n\colon \quad \big(X, \mathscr{A}\big) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}.$$

Alors :

$$\inf_{n\geqslant 1} f_n, \qquad \sup_{n\geqslant 1} f_n, \qquad \liminf_{n\to\infty} f_n, \qquad \limsup_{n\to\infty} f_n,$$

sont mesurables.

Si de plus $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement vers une certaine fonction :

$$f_\infty(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad\qquad (\forall\, x\in X),$$

alors cette fonction-limite f_∞ est mesurable. □

Enfin, l'analogie avec la théorie de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$ demande d'étendre le concept de « *presque partout* », qui doit tenir compte de la présence d'une mesure μ sur l'espace mesurable $(X, \mathscr{A})$.

Définition 1.4. Un ensemble $A \in \mathscr{A}$ est dit μ-*négligeable* si $\mu(A) = 0$.

Évidemment, tout dépend de la mesure μ : pour la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$, tout singleton $\{c\}$ avec $c \in \mathbb{R}$ est dx-négligeable, mais $\{c\}$ n'est sûrement pas négligeable pour la mesure de Dirac δ_c, car $\delta_c\big(\{c\}\big) = 1$!

Définition 1.5. Une propriété est dite vraie μ-*presque partout* si l'ensemble des points où elle n'est pas vraie est contenu dans un ensemble μ-négligeable.

En particulier, on dit que deux fonctions $f, g\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sont *égales μ-presque partout* si :

$$0 = \mu\Big(\big\{x \in X\colon\ f(x) \neq g(x)\big\}\Big).$$

Lemme 1.6. *Si $f\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, et si $g\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ satisfait :*

$$f(x) = g(x) \qquad\qquad (\mu\text{-presque partout}),$$

alors g est aussi mesurable. □

2. Intégration abstraite des fonctions positives

Maintenant, pour développer la théorie de l'intégration des fonctions mesurables définies sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, il convient, comme dans $\mathbb{R}^d$, de travailler surtout avec des fonctions positives :

$$f\colon \quad \big(X, \mathscr{A}\big) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

et de démarrer avec des fonctions-types simples.

Pour nous épargner quelques complications techniques, nous ferons l'hypothèse constante que l'espace $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est σ-fini.

Définition 2.1. Une fonction *étagée positive* sur $(X, \mathscr{A}, \mu)$ est une combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i},$$

à coefficients réels positifs $\alpha_i \geqslant 0$ de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{A_i}$ d'ensembles mesurables $A_i \in \mathscr{A}$.

Alors un résultat d'approximation extrêmement central et utile sur lequel repose la possibilité de réellement ériger une théorie de l'intégration est le suivant.

Théorème 2.2. *Si $f \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est une fonction mesurable quelconque sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, alors il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions* étagées :

$$\varphi_k \colon \quad X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad (k \geqslant 1)$$

croissante :

$$0 \leqslant \varphi_k(x) \leqslant \varphi_{k+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1),$$

qui converge ponctuellement vers :

$$f(x) = \lim_{k \to \infty} \varphi_k(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in X). \qquad \square$$

En effet, ce résultat permet d'*étendre* la définition naturelle de l'intégrale d'une fonction étagée positive :

$$\int \bigg(\sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i} \bigg) d\mu := \sum_{\text{finie}} \alpha_i \cdot \mu\big(A_i\big)$$

— on doit démontrer que la valeur ne dépend pas de la représentation étagée choisie — aux fonctions positives quelconques, en acceptant la valeur ∞ pour l'intégrale.

Définition 2.3. Sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'*intégrale* de toute fonction mesurable positive f est le nombre appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$:

$$\int_X f\, d\mu := \sup \bigg\{ \int_X \varphi\, d\mu \colon \;\; \varphi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}_+ \text{ étagée avec } \varphi \leqslant f \text{ partout} \bigg\}.$$

L'intégrale sur un sous-ensemble mesurable quelconque $A \in \mathscr{A}$ est alors définie (obtenue) en multipliant les fonctions (étagées ou non) par la fonction indicatrice de A :

$$\int_A f\, d\mu := \int_X f \cdot \mathbf{1}_A\, d\mu.$$

Toutes les propriétés élémentaires satisfaites par l'intégrale des fonctions étagées positives sont alors héritées — démonstrations analogues au cas de $\mathbb{R}^d$ — par les fonctions positives.

Proposition 2.4. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables $f, g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on a :*

- $\int_A (\alpha\, f + \beta\, g)\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu + \beta \int_A g\, d\mu$ *pour tous* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$ *;*
- $\mu(A) = 0$ *implique* $\int_A f\, d\mu = 0$
- $\int_A f\, d\mu = 0$ *si* $f = 0$, *μ-presque partout sur A ;*
- *f prend des valeurs finies μ-presque partout sur A si* $\int_A f\, d\mu < \infty$ *;*
- $B \supset A$ *avec* $B \in \mathscr{A}$ *implique* $\int_A f\, d\mu \leqslant \int_B f\, d\mu$ *;*

- $\int_A f\,d\mu \leqslant \int_A g\,d\mu$ *si* $f \leqslant g$, μ*-presque partout sur* A*;*
- $\int_{A\cup B} f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$ *si* $A, B \in \mathscr{A}$ *avec* $A \cap B = \emptyset$.

Dans la suite, plusieurs notations pourront être employées pour l'intégrale :

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) \equiv \int_X f\,d\mu \equiv \int f\,d\mu \equiv \int f.$$

3. Théorèmes de convergence

Comme dans le chapitre sur l'intégrale de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$, un auxiliaire essentiel des démonstrations — éludées car très analogues — est le

Théorème 3.1. [d'Egorov] *Sur un sous-ensemble* $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré* $(X, \mathscr{A}, \mu)$ *dont la mesure* $\mu(A) < \infty$ *est finie, soit une suite de fonctions mesurables positives :*

$$f_n\colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \qquad\qquad (n \in \mathbb{N}^*)$$

qui convergent μ*-presque partout* simplement *vers une certaine fonction-limite :*

$$f\colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Alors pour tout $\varepsilon > 0$*, il existe un sous-ensemble* $A_\varepsilon \subset A$ *avec* $A_\varepsilon \in \mathscr{A}$*, avec :*

$$\mu(A_\varepsilon) \geqslant \mu(A) - \varepsilon,$$

et tel que :

$$f_n\big|_{A_\varepsilon} \xrightarrow[n\to\infty]{\text{uniformément}} f\big|_{A_\varepsilon}. \qquad \square$$

Le premier théorème de convergence, probablement le plus important de tous, est le

Théorème 3.2. [de convergence monotone, Beppo-Levi] *Sur un sous-ensemble* $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré* σ*-fini* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*, soit une suite de fonctions mesurables positives :*

$$f_n\colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

croissante :

$$f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in A).$$

Alors la fonction-limite $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$*, à valeurs dans* $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$*, satisfait :*

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu. \qquad \square$$

Le second possède un intérêt exceptionnel, en tant qu'il ne suppose rien sur la convergence de la suite de fonctions étudiée.

Théorème 3.3. [de Fatou] *Étant donné une suite quelconque* $(f_n)_{n=1}^\infty$ *de fonctions mesurables positives :*

$$f_n\colon \quad A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

définies sur un ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ *d'un espace mesuré* $(X, \mathscr{A}, \mu)$*, on a toujours :*

$$\int_A \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\,d\mu. \qquad \square$$

Une application utile concerne les suites $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions convergeant simplement vers une certaine fonction-limite $f\colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$: bien qu'il ne soit pas vrai en général que $\int \lim = \lim \int$ puissent être interverties, on a toutefois au moins :

$$\int_A f\, d\mu \leqslant \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu.$$

Il est temps maintenant de survoler l'intégrabilité des fonctions qui prennent des valeurs réelles de signe quelconque. Rappelons que la mesurabilité des fonctions est préservée par prise de valeur absolue.

Définition 3.4. Dans un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, sur $A \in \mathscr{A}$, une fonction mesurable :

$$f\colon \quad A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

est dite μ-*intégrable* si :

$$\int_A |f|\, d\mu < \infty.$$

En particulier, cette définition concerne les fonctions positives $A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ considérées jusqu'à présent, mais qui n'étaient pas supposées intégrables ; en effet, on a autorisé l'intégrale d'une fonction positive à prendre la valeur ∞ afin de donner plus de flexibilité et de généralité aux théorèmes.

Le cas des fonctions à valeurs complexes :

$$f\colon \quad A \longrightarrow \mathbb{C}$$

se ramène, en considérant $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$, au cas de fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Bien entendu, les propriétés élémentaires des fonctions intégrables proviennent de la Proposition 2.4.

Proposition 3.5. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables* intégrables $f, g\colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$*, on a :*

- *f, g prennent des valeurs finies μ-presque partout sur A ;*
- *$\int_A (\alpha\, f + \beta\, g)\, d\mu = \alpha \int_A f\, d\mu + \beta \int_A g\, d\mu$ pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$;*
- *$\mu(A) = 0$ implique $\int_A f\, d\mu = 0$*
- *$\int_A f\, d\mu = 0$ si $f = 0$, μ-presque partout sur A ;*
- *$\int_{A\cup B} f\, d\mu = \int_A f\, d\mu + \int_B f\, d\mu$ si $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$;*
- *$\int_A f\, d\mu \leqslant \int_A g\, d\mu$ si $f \leqslant g$, μ-presque partout sur A, et :*

$$\left| \int_A f\, d\mu \right| \leqslant \int_A |f|\, d\mu \quad (< \infty). \qquad \square$$

Cette dernière inégalité est tellement utile et importante dans toutes les mathématiques qu'il faudrait la graver en lettres lumineuses flamboyantes au sommet de la Tour Eiffel !

Proposition 3.6. *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour toutes fonctions mesurables $f, g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a :*

$$f = g, \ \ \mu\text{-presque partout} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f \text{ est } \mu\text{-intégrable} \iff g \text{ est } \mu\text{-intégrable} \\ \text{et alors } \int_A f\, d\mu = \int_A g\, d\mu. \end{cases} \qquad \square$$

Nous pouvons maintenant énoncer le théorème-phare de toute la théorie.

Théorème 3.7. [de la convergence dominée, Lebesgue] *Sur un sous-ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ d'un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit une suite de fonctions mesurables $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. On suppose que cette suite converge simplement vers une certaine fonction-limite $f \colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

S'il existe une fonction-dominatrice mesurable $g \colon A \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec :

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\mu\text{-presque partout, } \forall\, n \geqslant 1),$$

qui est μ-intégrable :

$$\int_A g\, d\mu < \infty,$$

alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n\, d\mu = \int_A f\, d\mu. \qquad \square$$

Ainsi, sous cette hypothèse d'existence d'une fonction-dominatrice positive μ-intégrable, on peut intervertir limite et intégration.

De surcroît, comme cela a été vu pour l'intégrale de Lebesgue classique dans $\mathbb{R}^d$, on a en fait mieux :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_A \big|f_n - f\big|\, d\mu.$$

Définition 3.8. Les classes d'équivalence, modulo égalité μ-presque partout, de fonctions μ-intégrables sur un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, forment un espace vectoriel noté :

$$L^1(X, \mu).$$

Théorème 3.9. *Cet espace $L^1(X, \mu)$ est complet.* $\square$

Enfin, pour terminer ce chapitre de survol, formulons deux généralisations des théorèmes de continuité et de dérivabilité d'intégrales dépendant de paramètres qui sont des corollaires assez directs de la convergence dominée de Lebesgue.

Théorème 3.10. *Soit un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide, soit $A \in \mathscr{A}$, et soit une fonction :*

$$f\colon \quad A \times I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un $t_0 \in I$:

- *pour tout $t \sim t_0$ dans un voisinage de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable,*
- *pour tout $x \in A$, on a $\lim_{t\to t_0} f(x,t) = f(x,t_0)$,*
- *il existe une fonction $g \colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dominant $\big|f(x,t)\big| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \sim t_0$, avec $\int_A g\, d\mu < \infty$,*

alors la fonction $x \longrightarrow f(x, t_0)$ est μ-intégrable et :

$$\lim_{t\to t_0} \int_A f(x,t)\, d\mu = \int_A f(x,t_0)\, d\mu. \qquad \square$$

Le second résultat concerne la dérivabilité.

Théorème 3.11. *Soit un espace mesuré σ-fini $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle d'intérieur non vide, soit $A \in \mathscr{A}$, et soit une fonction :*

$$f\colon \quad A \times I \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Si, en un $t_0 \in I$:

• *pour tout $t \sim t_0$ dans un voisinage de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est μ-intégrable sur A,*

• *pour tout $x \in A$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable en $t = t_0$, de dérivée $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$,*

• *il existe une fonction $g\colon A \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ dominant $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $t \sim t_0$, avec $\int_A f\, d\mu < \infty$,*

alors la fonction $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)$ est μ-intégrable sur A, et :

$$\frac{d}{dt} \int_A f(x,t)\, d\mu \bigg|_{t_0} = \int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x, t_0)\, d\mu. \qquad \square$$

4. Mesure produit

Soient deux espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$ deux σ-algèbres. Sur le produit cartésien :

$$X \times Y = \big\{(x,y)\colon\ x \in X,\ y \in Y\big\}$$

existe la famille naturelle $\mathscr{R}$ des *rectangles mesurables* (produits d'ensembles mesurables) :

$$\mathscr{R} := \big\{A \times B\colon\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\big\},$$

qui est un π-système (est stable par intersections finies), puisque :

$$\big(A_1 \times B_1\big) \cap \big(A_2 \times B_2\big) = \big(A_1 \cap A_2\big) \times \big(B_1 \cap B_2\big),$$

mais n'est pas en général une σ-algèbre.

Définition 4.1. La *σ-algèbre produit :*

$$\begin{aligned} \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} &:= \sigma\big(\mathscr{R}\big) \\ &= \sigma\Big(\big\{A \times B\colon\ A \in \mathscr{A},\ B \in \mathscr{B}\big\}\Big) \end{aligned}$$

est la σ-algèbre engendrée dans $\mathscr{P}\big(X \times Y\big)$ par les rectangles mesurables.

Dans le contexte classique, on vérifie, *cf.* l'Exercice 10, que pour tous entiers $d_1 \geqslant 1$ et $d_2 \geqslant 1$, on a :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_1}} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_2}} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{d_1+d_2}}.$$

Maintenant, pour tout ensemble $E \subset X \times Y$, et tous $x \in X$, $y \in Y$ fixés, les sections verticale et horizontale de E sont :

$$E_x := \big\{y \in Y\colon (x,y) \in E\big\} \qquad \text{et} \qquad E^y := \big\{x \in X\colon (x,y) \in E\big\}.$$

Il est clair que si $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$ sont des ensembles mesurables, alors :

$$\big(A \times B\big)_x = \begin{cases} B & \text{lorsque } x \in A, \\ \emptyset & \text{lorsque } x \notin A, \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \big(A \times B\big)^y = \begin{cases} A & \text{lorsque } y \in B, \\ \emptyset & \text{lorsque } y \notin B. \end{cases}$$

Lemme 4.2. *Pour tout ensemble $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{R})$ dans la σ-algèbre produit, on a :*

$$\forall\, x \in X,\ E_x \in \mathscr{B} \qquad \textit{et} \qquad \forall\, y \in Y,\ E^y \in \mathscr{A}.$$

Dans la suite, nous traiterons seulement la première de deux affirmations, toutes les fois qu'elles seront visiblement symétriques.

Preuve. Fixons $x \in X$ et introduisons :

$$\mathscr{E} := \big\{E \subset X \times Y : \, E_x \in \mathscr{B}\big\}.$$

On vérifie (exercice) que $\mathscr{E}$ est une σ-algèbre. Ensuite :

Assertion 4.3. *On a $\mathscr{R} \subset \mathscr{E}$.*

Preuve. En effet, pour $A \in \mathscr{A}$ et $B \in \mathscr{B}$, puisqu'on vient de voir que :

$$\big(A \times B\big)_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

il est clair que $A \times B \in \mathscr{E}$. □

Par conséquent, en appliquant $\sigma(\cdot)$:

$$\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} = \sigma(\mathscr{R}) \subset \sigma(\mathscr{E}) = \mathscr{E},$$

ce qui démontre bien que tout $E \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, d'où $E \in \mathscr{E}$, satisfait $E_x \in \mathscr{B}$. □

Lemme 4.4. *Pour toute application mesurable :*

$$f \colon \quad \big(X \times Y, \, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}\big) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$

on a :

$$\forall\, x \in X, \quad f_x \colon \, (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{est mesurable,}$$
$$\forall\, y \in Y, \quad f^y \colon \, (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \quad \text{est mesurable.}$$

Preuve. En effet, avec $x \in X$ fixé, quel que soit $c \in \mathbb{R}$:

$$\big\{y \in Y : \, f_x(y) < c\big\} = \big\{y \in Y : f(x,y) < c\big\} = \big(\{f < c\}\big)_x,$$

et comme $\{f < c\} \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, le lemme qui précède donne bien $\big(\{f < c\}\big)_x \in \mathscr{B}$. □

À partir de maintenant, $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ seront supposés munis de deux mesures σ-finies μ et ν, *i.e.* :

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n, \qquad X_n \subset X_{n+1}, \qquad \mu\big(X_n\big) < \infty,$$
$$Y = \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n, \qquad Y_n \subset Y_{n+1}, \qquad \nu\big(Y_n\big) < \infty.$$

Proposition 4.5. *Pour tout ensemble mesurable $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, les deux applications :*

$$\begin{aligned} (X, \mathscr{A}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ x &\longmapsto \nu\big(E_x\big) \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} (Y, \mathscr{B}) &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ y &\longmapsto \nu\big(E^y\big) \end{aligned}$$

sont mesurables.

Démonstration. Supposons temporairement que ν est *finie*, *i.e.* que $\nu(Y) < \infty$, d'où la majoration uniforme :

$$0 \leqslant \nu\big(E_x\big) \leqslant \nu(Y) < \infty \qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in X)}.$$

Pour un rectangle mesurable $A \times B \in \mathscr{R}$, il est clair que :

$$\nu\big((A \times B)_x\big) \;=\; \begin{cases} \nu(B) & \text{lorsque } x \in A, \\ 0 & \text{lorsque } x \notin A, \end{cases}$$

ce qui peut s'écrire :

$$\Big(x \longmapsto \nu\big((A \times B)_x\big)\Big) \;=\; \Big(x \longmapsto \nu(B) \cdot \mathbf{1}_A(x)\Big),$$

et comme $\nu(B) < \infty$, toutes ces fonctions sont étagées, donc mesurables. Si nous introduisons alors :

$$\mathscr{E} \;:=\; \big\{E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \colon\; x \longmapsto \nu(E_x) \text{ est mesurable}\big\},$$

nous venons de faire voir que :

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{E}.$$

L'objectif est d'atteindre $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B} \subset \mathscr{E}$.

Assertion 4.6. *$\mathscr{E}$ est une classe monotone dans $X \times Y$.*

Preuve. Trois propriétés sont à vérifier.

• On a $X \times Y \in \mathscr{R} \subset \mathscr{E}$, donc $X \times Y \in \mathscr{E}$.

• Pour $E, F \in \mathscr{E}$ avec $E \subset F$, la fonction qui à $x \in X$ associe :

$$\nu\big((F \backslash E)_x\big) \;=\; \nu\big(F_x \backslash E_x\big) \;=\; \nu\big(F_x\big) - \nu\big(E_x\big),$$

est mesurable comme différence de deux fonctions mesurables à valeurs finies (bornées), donc $F \backslash E \in \mathscr{E}$ aussi.

• Pour une suite $(E_i)_{i=1}^{\infty}$ avec $E_i \in \mathscr{E}$ croissante $E_i \subset E_{i+1}$, comme $(E_i)_x \subset \big(E_{i+1}\big)_x$, une proposition connue montre que la fonction qui, à $x \in X$ associe :

$$\nu\bigg(\Big(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\Big)_x\bigg) \;=\; \nu\Big(\bigcup_{i \geqslant 1} (E_i)_x\Big) \;=\; \lim_{i \to \infty} \nu\big((E_i)_x\big)$$

est mesurable comme limite de fonctions mesurables (Théorème 1.3), donc $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathscr{E}$ aussi. □

Or comme nous savons que $\mathscr{R}$ est un π-système, le Théorème des classes monotones vu dans le chapitre précédent offre $\mathsf{mon}(\mathscr{R}) = \sigma(\mathscr{R})$, et nous atteignons l'objectif :

$$\begin{array}{ccccc} \mathscr{R} \subset \mathscr{E} & \Longrightarrow & \mathsf{mon}(\mathscr{R}) & \subset & \mathsf{mon}(\mathscr{E}) \\ & & \| & & \| \\ \mathscr{A} \otimes \mathscr{B} & = & \sigma(\mathscr{R}) & \subset & \mathscr{E}. \end{array}$$

Levons maintenant l'hypothèse temporaire, et supposons seulement que $Y = \cup_{n=1}^{\infty} Y_n$ avec $Y_n \subset Y_{n+1}$ et $\nu(Y_n) < \infty$. Pour chaque $n \geqslant 1$, introduisons la mesure :

$$\nu_n(B) \;:=\; \nu\big(B \cap Y_n\big) \qquad\qquad (B \in \mathscr{B}).$$

Comme ν_n est finie, ce qui vient d'être démontré donne la mesurabilité de $x \longmapsto \nu_n(E_x)$, quel que soit $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, et comme :

$$\nu\big(E_x\big) \;=\; \lim_{n \to \infty} \nu_n\big(E_x\big),$$

la fonction $x \longmapsto \nu(E_x)$ est bien mesurable, en tant que limite de fonctions mesurables.

Proposition 4.7. *Étant donné deux espaces mesurés σ-finis $(X, \mathscr{A}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{B}, \nu)$, il existe une et une seule mesure sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, dite* mesure-produit*, notée :*

$$\mu \otimes \nu,$$

satisfaisant :

$$(\mu \otimes \nu)\big(A \times B\big) = \mu(A)\,\nu(B) \qquad\qquad (\forall\, A \in \mathscr{A}, \forall\, B \in \mathscr{B}).$$

De plus, pour tout $E \in \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$:

$$(\mu \otimes \nu)(E) = \int_X \nu\big(E_x\big)\, d\mu = \int_Y \mu\big(E^y\big)\, d\nu.$$

Démonstration. Commençons par l'unicité. Si χ_1 et χ_2 sont deux mesures sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ coïncidant sur les rectangles mesurables appartenant à $\mathscr{R}$, comme $\mathscr{R}$ est un π-système, le Théorème de Dynkin vu dans le chapitre précédent donnerait directement $\chi_1 = \chi_2$ sur $\sigma(\mathscr{R}) = \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$, pourvu qu'on ait la finitude $\chi_1(X \times Y) = \chi_2(X \times Y) < \infty$.

Or par hypothèse de σ-finitude :

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \quad \text{avec} \quad X_n \subset X_{n+1} \quad \text{et} \quad \mu\big(X_n\big) < \infty,$$

$$Y = \bigcup_{n \geqslant 1} Y_n \quad \text{avec} \quad Y_n \subset Y_{n+1} \quad \text{et} \quad \nu\big(Y_n\big) < \infty,$$

donc l'ensemble produit se décompose en :

$$X \times Y = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \times Y_n \quad \text{avec} \quad X_n \times Y_n \subset X_{n+1} \times Y_{n+1},$$

avec :

$$\chi_1\big(X_n \times Y_n\big) = \mu\big(X_n\big) \cdot \nu\big(Y_n\big) = \chi_2\big(X_n \times Y_n\big) < \infty \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

Le Théorème de Dynkin s'applique alors pour donner la coïncidence :

$$\chi_1\big|_{X_n \times Y_n} = \chi_2\big|_{X_n \times Y_n} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

puis $\chi_1 = \chi_2$ en faisant $n \longrightarrow \infty$.

Traitons maintenant l'existence. Soit $E \subset \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$ quelconque. Grâce à la mesurabilité de $x \longmapsto \nu(E_x)$ et à celle de $y \longmapsto \mu(E^y)$ obtenues dans la proposition précédente, les intégrales :

$$\int_X \nu\big(E_x\big)\, d\mu =: \chi_1(E) \qquad \text{et} \qquad \int_Y \mu\big(E^y\big)\, d\nu =: \chi_2(E)$$

existent dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Assertion 4.8. *χ_1 et χ_2 sont deux mesures sur $\mathscr{A} \otimes \mathscr{B}$.*

Preuve. Deux propriétés sont à vérifier.

• Pour l'ensemble vide :

$$\chi_1(\emptyset) = \int_X \nu\big(\emptyset_x\big)\, d\mu = 0 = \int_Y \mu\big(\emptyset^y\big)\, d\nu = \chi_2(\emptyset).$$

• Pour une réunion disjointe, $E = \cup_{i=1}^{\infty} E_i$ avec $E_i \cap E_{i'} = \emptyset$ $(i \neq i')$, d'ensembles $E_i \in \mathscr{A} \times \mathscr{B}$, puisque :

$$E_x = \Big(\bigcup_{i \geqslant 1} E_i\Big)_x = \bigcup_{i \geqslant 1} \big(E_i\big)_x,$$

il vient :

$$\begin{aligned}
\chi_1(E) \;=\; \int_X \nu\big(E_x\big)\,d\mu \;&=\; \int_X \nu\Big(\bigcup_{i\geqslant 1}\,\big(E_i\big)_x\Big)\,d\mu \\
&=\; \int_X \sum_{i\geqslant 1} \nu\big((E_i)_x\big)\,d\mu \\
\text{[Convergence monotone]}\qquad &=\; \sum_{i\geqslant 1} \int_X \nu\big((E_i)_x\big)\,d\mu \\
&=\; \sum_{i\geqslant 1} \chi_1\big(E_i\big). \qquad \square
\end{aligned}$$

Comme ces deux mesures prolongent évidemment le produit de μ par ν sur les rectangles $A\times B$ avec $A\in\mathscr{A}$ et $B\in\mathscr{B}$:

$$\begin{aligned}
\chi_1\big(A\times B\big) \;&=\; \int_X \nu\big((A\times B)_x\big)\,d\mu \;=\; \int_A \nu(B)\,d\mu \;=\; \nu(B)\,\mu(A), \\
\chi_2(A\times B) \;&=\; \int_Y \mu\big((A\times B)^y\big)\,d\nu \;=\; \int_B \mu(A)\,d\nu \;=\; \mu(A)\,\nu(B),
\end{aligned}$$

ces deux mesures χ_1 et χ_2 conviennent, et donc, grâce à l'unicité démontrée en premier, nous concluons que $\chi_1 = \chi_2 =: \mu\otimes\nu$. $\square$

Comme dans $\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}$, les théorèmes de permutation d'intégrales multiples s'articulent en deux moment.

Théorème 4.9. [de Tonelli abstrait] *Sur l'espace mesuré produit* $\big(X\times Y,\,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B},\mu\otimes\nu\big)$ *associé à deux espaces mesurés σ-finis* $\big(X,\mathscr{A},\mu\big)$ *et* $\big(Y,\mathscr{B},\nu\big)$*, étant donné une fonction mesurable* positive :

$$f\colon\quad \big(X\times Y,\,\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}\big) \;\longrightarrow\; \mathbb{R}_+\cup\{\infty\},$$

les deux fonctions :

$$\begin{aligned}
(X,\mathscr{A}) \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}_+\cup\{\infty\} \\
x \;&\longmapsto\; \int_Y f_x\,d\nu
\end{aligned}
\qquad\text{et}\qquad
\begin{aligned}
(Y,\mathscr{B}) \;&\longrightarrow\; \mathbb{R}_+\cup\{\infty\} \\
y \;&\longmapsto\; \int_X f^y\,d\mu
\end{aligned}$$

sont mesurables, et de plus :

$$\int_{X\times Y} f\,d(\mu\otimes\nu) \;=\; \int_X\bigg(\int_Y f_x\,d\nu\bigg)\,d\mu \;=\; \int_Y\bigg(\int_X f^y\,d\mu\bigg)\,d\nu.$$

Ici, ces intégrales peuvent valoir ∞.

Démonstration. Résumons les éléments argumentatifs, analogues au cas $X=\mathbb{R}^{d_1}$ et $Y=\mathbb{R}^{d_2}$.

• Pour $f=\mathbf{1}_E$ avec $E\subset\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}$ mesurable, tout a déjà été vu dans les deux propositions précédentes.

• Pour f étagée positive, tout en découle par linéarité.

• Pour f mesurable positive quelconque, comme il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ croissante $\varphi_k\leqslant\varphi_{k+1}$ de fonction étagées positives $\varphi_k\geqslant 0$ qui converge ponctuellement vers f en tout point, en un $x \in X$ fixé, le théorème de convergence monotone donne :

$$\int_Y f_x \, d\nu \, = \, \lim_{k \to \infty} \int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu,$$

donc la fonction :

$$x \, \longmapsto \, \int_Y f_x \, d\nu$$

est mesurable, en tant que limite de fonctions mesurables.

Enfin, trois applications, à $\mu \otimes \nu$, à μ, à ν, de ce même théorème de convergence monotone, prolongent à f ce résultat déjà acquis pour les fonctions étagées φ_k :

$$\begin{aligned}
\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) \, = \, \lim_{k \to \infty} \int_{X \times Y} \varphi_k \, d(\mu \otimes \nu) \, &= \, \lim_{k \to \infty} \int_X \bigg(\int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) \, d\mu \\
&= \int_X \lim_{k \to \infty} \bigg(\int_Y \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) \, d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_Y \lim_{k \to \infty} \big(\varphi_k\big)_x \, d\nu \bigg) \, d\mu \\
&= \int_X \bigg(\int_Y f_x \, d\nu \bigg) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Le résultat avec des intégrations dans l'autre sens se justifie pareillement. □

Pour conclure cette section, le théorème de Fubini ne s'intéresse qu'à des fonctions *intégrables* sur $X \times Y$, *i.e.* dont l'intégrale de la valeur absolue est *finie*.

Théorème 4.10. [de Fubini abstrait] *Sur l'espace mesuré produit* $\big(X \times Y, \, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}, \mu \otimes \nu\big)$ *associé à deux espaces mesurés* σ*-finis* $\big(X, \mathscr{A}, \mu\big)$ *et* $\big(Y, \mathscr{B}, \nu\big)$*, étant donné une fonction mesurable :*

$$f\colon \quad \big(X \times Y, \, \mathscr{A} \otimes \mathscr{B}\big) \, \longrightarrow \, \{-\infty\} \cup \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},$$

intégrable :

$$\int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) \, < \, \infty,$$

pour μ*-presque tout* x*, la fonction* f_x *est* ν*-intégrable, pour* ν*-presque tout* y*, la fonction* f^y *est* μ*-intégrable, les deux intégrales correspondantes :*

$$x \, \longmapsto \, \int_Y f_x \, d\nu \qquad \text{et} \qquad y \, \longmapsto \, \int_X f^y \, d\mu$$

sont des fonctions intégrables sur X *et sur* Y*, et enfin :*

$$\int_{X \times Y} f \, d(\mu \otimes \nu) \, = \, \int_X \bigg(\int_Y f_x \, d\nu \bigg) \, d\mu \, = \, \int_Y \bigg(\int_X f^y \, d\mu \bigg) \, d\nu.$$

Démonstration. Une application à la fonction mesurable $|f|$ du Théorème de Tonelli qui précéde donne :

$$\infty \, > \, \int_{X \times Y} |f| \, d(\mu \otimes \nu) \, = \, \int_X \bigg(\underbrace{\int_Y \big|f_x\big| \, d\nu}_{\substack{\text{donc} \\ \mu\text{-presque partout } < \infty}} \bigg) \, d\mu \, = \, \int_Y \bigg(\underbrace{\int_X \big|f^y\big| \, d\mu}_{\substack{\text{donc} \\ \nu\text{-presque partout } < \infty}} \bigg) \, d\nu.$$

Ensuite, en introduisant les deux fonctions mesurables :

$$f_+ := \max\{0, f\} \qquad \text{et} \qquad f_- := -\min\{f, 0\},$$

avec :

$$f = f_+ - f_-,$$

on vérifie (exercice) que l'égalité des trois intégrales $\int_{X\times Y} = \int_X \big(\int_Y\big) = \int_Y \big(\int_X\big)$ découle du Théorème de Tonelli. □

Comme dans le cas de $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, pour calculer l'intégrale d'une fonction mesurable f sur un espace produit $X \times Y$, en la ramenant à deux calculs successifs d'intégrales, on raisonne comme suit.

• Vérifier que $|f|$ est $(\mu \otimes \nu)$-intégrable sur $X \times Y$ en choisissant la plus pratique des deux intégrales itérées dans le théorème de Tonelli :

$$\int_X \bigg(\int_Y |f|\, d\nu\bigg)\, d\mu \qquad \text{ou} \qquad \int_Y \bigg(\int_X |f|\, d\mu\bigg)\, d\nu.$$

• Calculer alors $\int_{X\times Y} f\, d(\mu \otimes \nu)$ en choisissant la plus pratique des deux intégrales itérées — souvent la même ! — dans le théorème de Fubini :

$$\int_X \bigg(\int_Y f\, d\nu\bigg)\, d\mu \qquad \text{ou} \qquad \int_Y \bigg(\int_X f\, d\mu\bigg)\, d\nu.$$

□

5. Décompositions de Hahn et de Jordan des mesures signées

Intuitivement, une mesure signée possède toutes les propriétés d'une vraie mesure $\geqslant 0$, à ceci près qu'elle est autorisée à prendre des valeurs négatives.

Définition 5.1. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ une σ-algèbre, une *mesure signée* est une fonction :

$$\mu\colon \quad \mathscr{A} \longrightarrow \,]-\infty, \infty] = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

avec $\mu(\emptyset) = 0$, qui satisfait la l'additivité dénombrable disjointe :

$$\mu\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\bigg) = \sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i),$$

quelle que soit la suite $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ avec $A_i \in \mathscr{A}$ et $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour tous $1 \leqslant i \neq i'$.

Observons que pour que cette égalité ait lieu, la somme $\sum_{i\geqslant 1} \mu(A_i)$ doit être indépendante de l'ordre des termes — puisque l'union $\cup_{i\geqslant 1} A_i$ l'est ! —, donc lorsque $\mu\big(\cup_{i=1}^{\infty} A_i\big) < \infty$, cette somme *doit* converger absolument, *voir* le Lemme 5.3 ci-dessous.

Ainsi, une mesure signée ne prend jamais la valeur $-\infty$, mais est autorisée à prendre la valeur $+\infty$. Une définition alternative peut être employée en demandant que $-\infty \leqslant \mu(A) < +\infty$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, mais il est impossible d'autoriser les deux valeurs $-\infty$ et $+\infty$, sous peine d'incohérence arithmétique.

Comme nous le verrons, des exemples naturels de mesures signées sont donnés par :

$$\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu \qquad\qquad (A \in \mathscr{A}),$$

où $f = f_+ - f_-$ est une fonction mesurable décomposée en partie positive $f_+ = \max\{0, f\}$ et partie négative $-f_- = \min\{f, 0\}$, en supposant $f_- \in L^1(X, \mu)$ pour garantir que $-\infty < \mu_f(A) \leqslant +\infty$, tandis que f_+ est autorisée à être d'intégrale infinie.

De nombreuses propriétés usuelles des (vraies) mesures $\geqslant 0$ considérées jusqu'à présent demeurent satisfaites par les mesures signées.

Lemme 5.2. *Étant donné une mesure signée μ sur $(X, \mathscr{A})$, pour tous $A, B \in \mathscr{A}$ avec $A \subset B$, on a :*

$$\mu(B) < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} \mu(A) < \infty, \\ \mu\big(B \backslash A\big) = \mu(B) - \mu(A). \end{cases}$$

Preuve. Sinon, si on avait $\mu(A) = \infty$, l'additivité :

$$\mu(B) = \underbrace{\mu(A)}_{= \infty\, ?} + \underbrace{\mu\big(B \backslash A\big)}_{-\infty <}$$

impliquerait $\mu(B) = \infty$ aussi, contradiction.

Ensuite, puisque $-\infty < -\mu(A)$, on peut effectivement soustraire, l'arithmétique étant cohérente. $\square$

Lemme 5.3. *Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable muni d'une mesure signée μ. Si $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ est une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$, alors :*

$$\big(-\infty <\big) \quad \mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i\bigg) < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{i \geqslant 1} \big|\mu(A_i)\big| < \infty.$$

Preuve. En effet, en introduisant :

$$A_i^- := \begin{cases} A_i & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ \emptyset & \text{si } \mu(A_i) \geqslant 0, \end{cases} \qquad \text{ainsi que} \qquad A_i^+ := \begin{cases} \emptyset & \text{si } \mu(A_i) < 0, \\ A_i & \text{si } \mu(A_i) \geqslant 0, \end{cases}$$

nous avons par σ-additivité deux séries à termes de signes constants $\leqslant 0$ et $\geqslant 0$:

$$\mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i^-\bigg) = \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^-\big) \qquad \text{et} \qquad \mu\bigg(\bigcup_{i \geqslant 1} A_i^+\bigg) = \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^+\big).$$

Abrégeons aussi :

$$A^- := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i^-, \qquad A^+ := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i^+, \qquad A := \bigcup_{i \geqslant 1} A_i.$$

Comme $-\infty < \mu(A^-)$, la première série à termes $\leqslant 0$ converge absolument.

L'hypothèse $\mu(A) < \infty$, l'inclusion $A^+ \subset A$, et le Lemme 5.2 donnent alors :

$$\big(-\infty <\big) \quad \mu\big(A^+\big) < \infty,$$

et donc $\sum \mu\big(A_i^+\big) < \infty$ converge aussi. Enfin :

$$\sum_{i \geqslant 1} \big|\mu(A_i)\big| = \sum_{i \geqslant 1} \big|-\mu\big(A_i^-\big)\big| + \sum_{i \geqslant 1} \mu\big(A_i^+\big) < \infty. \qquad \square$$

Puisque les arguments sont essentiellement les mêmes que pour les (vraies) mesures (à valeurs $\geqslant 0$), énonçons sans démonstration une

Proposition 5.4. *Dans un espace mesurable* $(X, \mathscr{A})$ *muni d'une mesure signée* μ*, soit une suite* $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ *d'ensembles mesurables* $A_i \in \mathscr{A}$*.*

(1) *Si* $A_i \subset A_{i+1}$ *est croissante, alors :*

$$\mu\bigg(\bigcup_{i\geqslant 1} A_i\bigg) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu\big(A_i\big).$$

(2) *Si* $A_i \supset A_{i+1}$ *est décroissante, et si* $\mu\big(A_1\big) < \infty$*, alors :*

$$\mu\bigg(\bigcap_{i\geqslant 1} A_i\bigg) \,=\, \lim_{i\to\infty} \mu\big(A_i\big). \qquad \square$$

Maintenant, si μ_1 et μ_2 sont deux *vraies* mesures sur $(X, \mathscr{A})$, disons finies pour simplifier, *i.e.* $\mu_1(X) < \infty$ et $\mu_2(X) < \infty$, alors la différence :

$$\mu \,:=\, \mu_2 - \mu_1$$

est une mesure signée. L'objectif des paragraphes qui suivent est d'établir que toute mesure signée s'écrit de manière unique comme différence de deux telles mesures, maximales en un certain sens.

Tout d'abord, il s'agit de localiser les lieux où μ est $\leqslant 0$, et ceux où elle est $\geqslant 0$.

Définition 5.5. Un sous-ensemble $N \subset X$ avec $N \in \mathscr{A}$ est dit *négatif pour* μ si :

$$\forall\, N' \,\subset\, N \text{ avec } N' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(N') \,\leqslant\, 0.$$

Un sous-ensemble $O \subset X$ avec $O \in \mathscr{A}$ est dit *nul pour* μ si :

$$\forall\, O' \,\subset\, O \text{ avec } O' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(O') \,=\, 0.$$

Un sous-ensemble $P \subset X$ avec $P \in \mathscr{A}$ est dit *positif pour* μ si :

$$\forall\, P' \,\subset\, P \text{ avec } P' \in \mathscr{A}, \qquad \mu(P') \,\geqslant\, 0.$$

L'objet du théorème suivant est de capturer de tels ensembles N, O, P, en évitant de mélanger le négatif avec le positif, sans vraiment porter attention sur les nuls.

Théorème 5.6. [de décomposition de Hahn] *Si* μ *est une mesure signée sur un espace mesurable* $(X, \mathscr{A})$*, alors il existe deux sous-ensembles* $N \subset X$ *et* $P \subset X$ *avec* $N \in \mathscr{A}$*, et* $P \in \mathscr{A}$ *et avec :*

$$N \cup P \,=\, X, \qquad\qquad N \cap P \,=\, \emptyset,$$

tels que N *est négatif pour* μ*, et* P *est positif pour* μ*.*

Cette décomposition est essentiellement unique, au sens où pour toute autre telle paire (N', P')*, les deux différences symétriques :*

$$N\Delta N' \,=\, \big(N\backslash N'\big) \cup \big(N'\backslash N\big) \qquad \textit{et} \qquad P\Delta P' \,=\, \big(P\backslash P'\big) \cup \big(P'\backslash P\big)$$

sont des ensembles nuls pour μ*.*

Démonstration. Commençons par un résultat auxiliaire-clé.

Proposition 5.7. *Si* $\mu(D) \leqslant 0$ *sur un ensemble* $D \in \mathscr{A}$*, alors il existe un sous-ensemble* $A \subset D$ *négatif pour* μ *tel que* $\mu(A) \leqslant \mu(D)$*.*

Démonstration. Définissons $A_0 := D$, et supposons par récurrence que pour un entier $n \geqslant 0$, un ensemble $A_n \subset D$ a été construit. Soit :

$$\begin{aligned} t_n &:= \sup \big\{ \mu(B) \colon \ B \subset A_n \text{ avec } B \in \mathscr{A} \big\} \\ &\in [0, \infty]; \end{aligned}$$

comme $B := \emptyset$ convient, il est clair que $t_n \geqslant 0$.

Par définition de t_n, il existe $B_n \subset A_n$ avec $B_n \in \mathscr{A}$ satisfaisant :

$$\mu\big(B_n\big) \geqslant \tfrac{t_n}{2} \geqslant \min\big\{1, \tfrac{t_n}{2}\big\} \geqslant 0.$$

Par induction, définissons :

$$A_{n+1} := A_n \big\backslash B_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Nous affirmons alors que l'ensemble :

$$A := D \Big\backslash \bigcup_{n \geqslant 0} B_n$$

convient ; observons au passage que $A_n = D \big\backslash \big(B_0 \cup \cdots \cup B_{n-1}\big)$, d'où :

$$A \subset A_n.$$

En effet, comme les B_n, $n \geqslant 0$, sont mutuellement disjoints (exercice mental), la σ-additivité de μ donne, en tenant compte de $\mu(D) < \infty$ pour être autorisé à soustraire :

$$\begin{aligned} -\infty < \mu(A) &= \mu(D) - \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(B_n\big) \\ &\leqslant \mu(D) - \sum_{n \geqslant 0} \min\big\{1, \tfrac{t_n}{2}\big\}, \end{aligned}$$

ce qui montre $\mu(A) \leqslant \mu(D)$.

Si A n'était *pas* un ensemble négatif pour μ, il existerait un sous-ensemble $B \subset A$ avec $B \in \mathscr{A}$ pour lequel $\mu(B) > 0$. Mais comme $A \subset A_n$, d'où $B \subset A_n$, la définition de t_n s'appliquerait pour donner :

$$0 < \mu(B) \leqslant t_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0),$$

et la série à droite ci-dessus $- \sum \min\{\cdot\}$ vaudrait alors $-\infty$, ce qui contredirait avec une insolence condamnable l'hypothèse que μ ne prend jamais la valeur $-\infty$. Donc A est un ensemble négatif pour μ ! $\square$

Pour construire l'ensemble N du Théorème 5.6, posons $N_0 := \emptyset$, et par induction, supposant N_n connu pour un entier $n \geqslant 0$, considérons :

$$s_n := \inf \big\{ \mu(D) \colon \ D \subset X \big\backslash N_n, \ D \in \mathscr{A} \big\}.$$

Cet infimum peut éventuellement valoir $-\infty$, et puisque $D = \emptyset$ convient, on a $s_n \leqslant 0$. Clairement, il existe un sous-ensemble $D_n \subset X \backslash N_n$ avec $D_n \in \mathscr{A}$ satisfaisant :

$$\mu\big(D_n\big) \leqslant \tfrac{s_n}{2} \leqslant \max\big\{\tfrac{s_n}{2}, -1\big\} \leqslant 0.$$

Grâce à la Proposition 5.7, il existe un sous-ensemble $A_n \subset D_n$ avec $A_n \in \mathscr{A}$, avec $\mu(A_n) \leqslant \mu(D_n)$, tel que A_n est négatif pour μ.

Par induction, définissons :

$$N_{n+1} := N_n \cup A_n \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 0).$$

Nous affirmons alors que l'ensemble :

$$N := \bigcup_{n \geqslant 0} A_n$$

et son complémentaire $P := X \backslash N$, forment une décomposition de Hahn pour μ ; observons au passage que :

$$N_n = \emptyset \cup A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1} \qquad \text{d'où} \qquad N_n \subset N \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1)}.$$

En effet, puisque les A_n, $n \geqslant 0$, sont mutuellement disjoints, on a pour tout $B \subset N$ avec $B \in \mathscr{A}$, par σ-additivité :

$$\mu(B) = \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(B \cap A_n\big) \leqslant 0,$$

ce qui montre que N est un ensemble négatif pour μ.

Si $P = X \backslash N$ n'était *pas* un ensemble positif pour μ, il existerait $D \subset X \backslash N$ avec $D \in \mathscr{A}$ tel que $\mu(D) < 0$. Mais comme $N_n \subset N$ équivaut à $X \backslash N \subset X \backslash N_n$, d'où $D \subset X \backslash N_n$, la définition de s_n s'appliquerait pour donner :

$$s_n \leqslant \mu(D) < 0 \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 0)},$$

ce qui, via la σ-additivité de μ :

$$\begin{aligned} \mu(N) = \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(A_n\big) &\leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mu\big(D_n\big) \\ &\leqslant \sum_{n \geqslant 0} \mathsf{max}\left\{\tfrac{s_n}{2}, -1\right\} \\ &= -\infty, \end{aligned}$$

contredirait l'hypothèse que μ ne prend jamais la valeur $-\infty$. Ceci conclut la démonstration d'existence.

Soit maintenant $X = N' \cap P'$ une autre décomposition de Hahn pour μ. En partant de $X = N' \cup P'$ et de $X = N \cup P$, on intersecte avec P et avec P' :

$$P = \big(P \cap N'\big) \cup \big(P \cap P'\big) \qquad \text{et} \qquad P' = \big(P' \cap N\big) \cup \big(P' \cap P\big),$$

d'où :

$$P \backslash P' = P \cap N' \qquad \text{et} \qquad P' \backslash P = P' \cap N,$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} P \Delta P' &= \big(P \backslash P'\big) \cup \big(P' \backslash P\big) \\ &= \big(P \cap N'\big) \cup \big(P' \cap N\big) = N \Delta N', \end{aligned}$$

cette seconde différence symétrique étant analogue. Or puisque $P \cap N'$ et $P' \cap N$ sont tous deux simultanément négatifs et positifs pour μ, ils sont tous deux *nuls* pour μ — fin des raisonnements ! □

Grâce à une telle décomposition de Hahn de $X = N \cup P$, nous pouvons introduire deux (vraies) mesures (à valeurs positives) :

$$\mu_-(A) := -\,\mu\big(A \cap N\big) \qquad \text{et} \qquad \mu_+(A) := \mu\big(A \cap P\big),$$

pour tout $A \in \mathscr{A}$, et nous observons que μ_- est à valeurs finies dans $\mathbb{R}_+$, puisque $-\infty < \mu(A \cap N)$, tandis que μ_+ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cap \{\infty\}$.

Théorème 5.8. [de décomposition de Jordan] *Étant donné une décomposition de Hahn $X = N \cup P$ pour une mesure signée μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, les deux mesures $\mu_- := -\,\mu\big|_N$ et $\mu_+ := \mu\big|_P$ satisfont :*

$$\mu \,=\, \mu_+ - \mu_-,$$

et elles ne dépendent pas *de la décomposition de Hahn.*

De plus, toute autre paire (ν_-, ν_+) de mesures $\geqslant 0$ avec $\mu = \nu_+ - \nu_-$ telle qu'il existe $E \subset X$, $E \in \mathscr{A}$, avec :

$$\nu_-(E) \,=\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \nu_+(X\backslash E) \,=\, 0,$$

coïncide avec (μ_-, μ_+).

Sans cette condition d'existence de E, il est clair qu'aucune unicité ne peut avoir lieu — penser par exemple à $\mu = (\mu_+ + \nu) - (\mu_- + \nu)$, où ν est une mesure quelconque.

Démonstration. Soit donc (N', P') une autre décomposition de Hahn, et soient pour $A \in \mathscr{A}$:

$$\mu'_-(A) \,:=\, -\,\mu\big(A \cap N'\big) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mu'_+(A) \,:=\, \mu\big(A \cap P'\big).$$

Grâce à l'information du théorème précédent que $N'\backslash N$ et $N\backslash N'$ sont nuls pour μ, en utilisant :

$$\begin{aligned} N' \,&=\, \big(N' \cap N\big) \cup \big(N'\backslash N\big), \\ N \,&=\, \big(N \cap N'\big) \cup \big(N\backslash N'\big), \end{aligned}$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \mu'_-(A) \,=\, -\,\mu\big(A \cap N'\big) \,&=\, -\,\mu\big(A \cap (N' \cap N)\big) - \underline{\mu\big(A \cap (N'\backslash N)\big)}_{\circ} \\ &=\, -\,\mu\big(A \cap (N \cap N')\big) - \underline{\mu\big(A \cap (N\backslash N')\big)}_{\circ} \\ &=\, -\,\mu\big(A \cap N\big) \\ &=\, \mu_-(A), \end{aligned}$$

et de même pour voir que $\mu'_+ = \mu_+$.

Ensuite, l'hypothèse d'existence de E implique, quels que soient $F \subset E$ et $G \subset X\backslash E$ appartenant à $\mathscr{A}$, en partant de $\mu = \nu_+ - \nu_-$, que :

$$\begin{aligned} \mu(F) \,&=\, \nu_+(F) - 0 \\ &\geqslant\, 0, \end{aligned} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \begin{aligned} \mu(G) \,&=\, 0 - \nu_-(G) \\ &\leqslant\, 0, \end{aligned}$$

donc $\big(X\backslash E, E\big)$ est une décomposition de Hahn pour μ, et comme $\nu_- = -\,\mu\big|_{X\backslash E}$ et $\nu_+ = \mu\big|_E$ (exercice mental), ce qu'on vient de dire offre $\nu_- = \mu_-$ et $\nu_+ = \mu_+$. □

Ainsi, la décomposition $\mu = \mu_+ - \mu_-$ est unique en un certain sens, et on l'appelle la *décomposition de Jordan* de μ.

Définition 5.9. La *variation totale* $|\mu|$ d'une mesure signée μ sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ est la mesure positive :

$$|\mu|(A) \,:=\, \mu_-(A) + \mu_+(A) \qquad\qquad (\forall\, A \in A).$$

L'Exercice 12 propose une définition directe de $|\mu|$ qui ne passe pas par les décompositions de Hahn et de Jordan.

Observons que $\big|\mu(A)\big| \leqslant |\mu|(A)$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, avec égalité seulement lorsque A est ou bien négatif pour μ, ou bien positif pour μ.

Enfin, on notera que $|\mu|(A) = 0$ implique que A est un ensemble nul pour $|\mu|$, μ_-, μ_+, μ.

6. Intégrale par rapport à une mesure signée

Comme nous l'avons déjà dévoilé par anticipation plus haut, des exemples canoniques — et très nombreux ! — de mesures signées sont fournis par des intégrales indéfinies de fonctions mesurables.

Le prototype est le suivant, avec la décomposition habituelle $f = f_+ - f_-$.

Théorème 6.1. *Pour toute fonction mesurable $f = f_+ - f_-$ sur un espace mesuré $\big(X, \mathscr{A}, \mu\big)$, où $\mu \geqslant 0$ est une vraie mesure, telle que $f_- \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$, l'application :*

$$\begin{aligned} \nu_f \colon \quad \mathscr{A} &\longrightarrow \,]-\infty, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A f\,d\mu \end{aligned}$$

est une mesure signée sur $(X, \mathscr{A})$.

Observons que l'hypothèse $\int_X |f_-|\,d\mu = \int_X f_-\,d\mu < \infty$ garantit que $-\infty < \nu(A)$ pour tout $A \subset X$ avec $A \in \mathscr{A}$.

Démonstration. Puisqu'on a de suite $\nu_f(\emptyset) = 0$, il s'agit d'établir la σ-additivité de ν_f.

Pour cela, soit $(A_i)_{i=1}^{\infty}$ une suite d'ensembles $A_i \in \mathscr{A}$ disjoints, $A_i \cap A_{i'} = \emptyset$ pour $i \neq i'$, et posons $A := \cup_{i=1}^{\infty} A_i$. En écrivant simultanément pour f_- et pour f_+ :

$$f_\pm \cdot \mathbf{1}_A = \sum_{i \geqslant 1} f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i},$$

le théorème de convergence monotone donne :

$$\begin{aligned} \int_A f_\pm\,d\mu = \int_X \bigg(\sum_{i\geqslant 1} f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i}\bigg)\,d\mu &= \sum_{i\geqslant 1} \int_X f_\pm \cdot \mathbf{1}_{A_i}\,d\mu \\ &= \sum_{i\geqslant 1} \int_{A_i} f_\pm\,d\mu. \end{aligned}$$

Puisque $\int_A f_- \, d\mu < \infty$, la somme des intégrales de f_- sur les A_i converge vers un nombre positif fini, et donc on peut absorber dans une somme commune :

$$\begin{aligned}
\nu_f(A) &= \int_A f_+ \, d\mu - \int_A f_- \, d\mu \\
&= \underbrace{\sum_{i \geqslant 1} \int_{A_i} f_+ \, d\mu}_{\in [0,\infty]} - \underbrace{\sum_{i \geqslant 1} \int_{A_i} f_- \, d\mu}_{\in [0,\infty[} \\
&= \sum_{i \geqslant 1} \left(\int_{A_i} (f_+ - f_-) \, d\mu \right) \\
&= \sum_{i \geqslant 1} \nu_f\big(A_i\big),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Une décomposition de Hahn naturelle de X pour cette mesure signée ν_f est par exemple :

$$N := \big\{ x \in X \colon \, f(x) < 0 \big\} \qquad \text{et} \qquad P := \big\{ x \in X \colon \, f(x) \geqslant 0 \big\},$$

ou encore :

$$N := \big\{ x \in X \colon \, f(x) \leqslant 0 \big\} \qquad \text{et} \qquad P := \big\{ x \in X \colon \, f(x) > 0 \big\}.$$

Dans ces deux cas, la décomposition de Jordan $\nu_f = \nu_{f,+} - \nu_{f,-}$ est donnée, pour $A \in \mathscr{A}$, par :

$$\nu_{f,-}(A) := \int_A f_- \, d\mu \qquad \text{et} \qquad \nu_{f,+}(A) := \int_A f_+ \, d\mu,$$

tandis que la variation totale $|\nu_f| = \nu_{f,-} + \nu_{f,+}$ vaut :

$$|\nu_f|(A) := \nu_{f,-}(A) + \nu_{f,+}(A) = \int_A f_- \, d\mu + \int_A f_+ \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu.$$

7. Continuité absolue et singularités mutuelles des mesures

Étant donné deux mesures (positives) μ et ν sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, nous allons terminer ce chapitre en dévoilant les relations qu'elles sont susceptibles d'entretenir. Deux scénarios extrêmes peuvent se produire :

(i) μ et ν sont « supportées » sur deux ensembles $E, F \in \mathscr{A}$ disjoints ;

(ii) le « support » de ν est une portion essentielle du support de μ.

Pour clarifier les idées, nous entendons ici que ν est « supportée » sur un ensemble $E \in \mathscr{A}$ si $\nu(A) = \nu(A \cap E)$, quel que soit $A \in \mathscr{A}$.

Le théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym que nous allons démontrer énonce en un sens mathématique précis que la relation la plus générale possible entre deux mesures μ et ν est une combinaison de ces deux possibilités. Venons-en aux concepts exacts.

Définition 7.1. Deux mesures signées μ et ν sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ sont dites *mutuellement singulières* s'il existe $E, F \in \mathscr{A}$ avec $\emptyset = E \cap F$ tels que, pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\mu(A) = \mu\big(A \cap E\big) \qquad \text{et} \qquad \nu(A) = \nu\big(A \cap F\big),$$

ce qui sera noté :

$$\mu \perp \nu.$$

Ainsi, μ et ν sont supportées sur deux ensembles *disjoints*. Observons que l'on peut remplacer F par $X\backslash E \supset F$, ou E par $X\backslash F \supset E$, sans rien changer à cette définition (exercice mental).

Par contraste, on a une deuxième :

Définition 7.2. Une mesure signée est dite *absolument continue* par rapport à une mesure positive μ si, pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\nu(A) = 0 \qquad \Longleftarrow \qquad \mu(A) = 0,$$

ce qui sera noté :

$$\nu \ll \mu.$$

Lemme 7.3. *Si une mesure positive μ et une mesure signée ν satisfont simultanément $\nu \perp \mu$ et $\nu \ll \mu$, alors $\nu = 0$.*

Preuve. Comme $\mu \perp \nu$, il existe $E \in \mathscr{A}$ tel que pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\begin{aligned} \mu(A) &= \mu\big(A \cap E\big), \qquad\qquad &\text{donc} \quad \mu\big(A \cap E^c\big) = 0, \\ \nu(A) &= \nu\big(A \cap E^c\big), \qquad\qquad &\text{donc} \quad \nu\big(A \cap E\big) = 0, \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \underline{\nu(A \cap E)}_{\circ} + \nu\big(A \cap E^c\big) \\ &= 0 + 0, \end{aligned}$$

puisque l'hypothèse $\nu \ll \mu$ offre :

$$0 = \nu\big(A \cap E^c\big) \qquad \Longleftarrow \qquad \mu\big(A \cap E^c\big) = 0. \qquad \square$$

La définition d'absolue continuité $\nu \ll \mu$ demande seulement que tout ensemble nul pour μ soit aussi nul pour ν, et semble n'avoir rien à voir avec la notion classique de continuité. Toutefois, la terminologie est justifiée par un :

Lemme 7.4. *Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A})$, soit une mesure positive μ, et soit une mesure signée ν telle que $|\nu|(X) < \infty$. Alors :*

$$\nu \ll \mu \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) \;\; \Big(\forall\, A \in \mathscr{A} \quad \mu(A) \leqslant \delta \implies \big|\nu(A)\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Preuve. L'implication $\Longleftarrow$, directe (exercice mental), est vraie sans supposer $|\nu|(X) < \infty$.

Pour montrer la réciproque $\Longrightarrow$, en remplaçant ν par $|\nu|$, on peut supposer $\nu \geqslant 0$ positive, avec $\nu(X) < \infty$.

Supposons par l'absurde que :

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, \delta > 0 \quad \Big(\exists\, A \in \mathscr{A} \quad \mu(A) \leqslant \delta \;\;\text{mais}\;\; \big|\nu(A)\big| > \varepsilon\Big).$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, il existe $A_n \in \mathscr{A}$ avec $\mu(A_n) \leqslant \frac{1}{2^n}$, mais $\nu(A_n) > \varepsilon$. Introduisons alors :

$$A^* := \limsup_{n \to \infty} A_n = \bigcap_{n \geqslant 1} \bigcup_{m \geqslant n} A_m,$$

et abrégeons $A_n^* := \cup_{m \geqslant n} A_m$. Comme :

$$\mu\big(A_n^*\big) \,\leqslant\, \sum_{m \geqslant n} \frac{1}{2^m} \,=\, \frac{1}{2^{n-1}} \,<\, \infty,$$

et comme la suite décroissante $\big(A_n^*\big)_{n=1}^{\infty}$ est contenue dans A_1^* avec $\mu(A_1^*) \leqslant 1$, une proposition maintes fois utilisée s'applique :

$$\mu\big(A^*\big) \,=\, \lim_{n \to \infty} \mu\big(A_n^*\big) \,=\, 0.$$

Cependant, on a pour tout $n \geqslant 1$:

$$\nu\big(A_n^*\big) \,\geqslant\, \nu\big(A_n\big) \,>\, \varepsilon,$$

et comme $\nu(A_1^*) \leqslant \nu(X) < \infty$, la même proposition donne aussi :

$$\nu\big(A^*\big) \,=\, \lim_{n \to \infty} \nu\big(A_n^*\big) \,\geqslant\, \varepsilon,$$

ce qui contredit l'hypothèse « $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$ quel que soit $A \in \mathscr{A}$ ». □

8. Théorème de Lebesgue-Radon-Nikodym

Grâce à ces préliminaires, nous pouvons présenter le résultat principal de ce chapitre qui dévoile la structure générale des mesures signées sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$.

Au-delà des mesures $\nu_f(A) := \int_A f \, d\mu$ obtenues par intégration de fonction mesurables $f \geqslant 0$, nous pouvons dorénavant aussi regarder les fonctions de signe quelconque $f = f_+ - f_-$ qui sont *intégrables au sens étendu*, à savoir qui satisfont, avec $f_- = -\min\{f, 0\}$ et $f_+ = \max\{0, f\}$:

$$\int_X f_- \, d\mu \,<\, \infty \qquad \text{mais possiblement} \qquad \int_X f_+ \, d\mu \,=\, \infty,$$

et alors l'application :

$$\begin{aligned} \nu_f \colon \quad \mathscr{A} &\longrightarrow \,]-\infty, \infty] \\ A &\longmapsto \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

s'avère être encore une mesure signée, d'après le Théorème 6.1.

Au sujet d'une mesure signée quelconque ν, le théorème profond qui suit affirme alors qu'on peut extraire une telle mesure ν_f, maximale en un certain sens, afin que le reste $\nu - \nu_f$ devienne singulier par rapport à μ.

Théorème 8.1. [Lebesgue, Radon, Nikodym] *Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ muni d'une mesure positive σ-finie $\mu \geqslant 0$, soit ν une autre mesure, éventuellement signée, avec $|\nu|$ aussi σ-finie. Alors il existe deux uniques mesures signées ν_a et ν_s sur $(X, \mathscr{A})$ telles que :*

$$\nu \,=\, \nu_a + \nu_s, \qquad\qquad \nu_a \,\ll\, \mu, \qquad\qquad \nu_s \perp \mu.$$

De plus, il existe une unique fonction mesurable $f \colon X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, intégrable au sens étendu, telle que :

$$\nu(A) \,=\, \int_A f \, d\mu \qquad\qquad (\forall\, A \in \mathscr{A}).$$

Enfin, lorsque $\nu \geqslant 0$ est une (vraie) mesure, $\nu_a \geqslant 0$ et $\nu_s \geqslant 0$ sont des mesures, et $f \geqslant 0$.

Démonstration. Traitons d'abord les deux assertions d'unicité, faciles.

Premièrement, si $\nu_a + \nu_s = \nu = \nu_a' + \nu_s'$, alors la mesure $\nu_a - \nu_a' = \nu_s' - \nu_s$ est à la fois absolument continue et singulière par rapport à μ, donc le Lemme 7.3 montre qu'elle s'annule, *i.e.* $\nu_a = \nu_a'$ et $\nu_s = \nu_s'$.

Deuxièmement, si $\nu_a(A) = \int_A f\,d\mu = \int_A f'\,d\mu$, alors en choisissant $A := \{f > f'\}$, on obtient $\int_A (f - f')\,d\mu = 0$, ce qui exige $0 = \mu(A) = \mu\big(\{f > f'\}\big)$, et de même $0 = \mu\big(\{f' > f\}\big)$ en intervertissant $f \longleftrightarrow f'$, et donc $f = f'$, ce μ-presque partout.

Traitons maintenant l'existence de ν_a et de ν_s, délicates.

Temporairement, faisons l'hypothèse que μ et ν sont des mesures positives et finies :

$$\mu \geqslant 0, \quad \mu(X) < \infty \qquad \text{et} \qquad \nu \geqslant 0, \quad \nu(X) < \infty.$$

Introduisons l'ensemble-clé :

$$\mathscr{K} := \Big\{ f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \text{ mesurable}\colon\ \int_A f\,d\mu \leqslant \nu(A) \text{ pour tout } A \in \mathscr{A} \Big\}.$$

L'argument consiste à trouver $f \in \mathscr{K}$ qui maximise $\int f\,d\mu$, de façon à « extraire » autant que possible de la mesure signée ν au moyen de $\int f\,d\mu$, pour obtenir ν_a, et espérer ensuite que le reste $\nu_s := \nu - \nu_a$ sera singulier par rapport à μ.

Tout d'abord, $\mathscr{K} \neq \emptyset$, puisque $\mathscr{K}$ contient la fonction $f = 0$. Soit le réel :

$$\alpha := \sup \Big\{ \int_X f\,d\mu\colon\ f \in \mathscr{K} \Big\},$$

qui est fini, car $0 \leqslant \alpha \leqslant \nu(X) < \infty$. Soit aussi une suite maximisante $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in \mathscr{K}$ telles que :

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \qquad \text{et} \qquad \int_X f_n\,d\mu \leqslant \int_X f_{n+1}\,d\mu.$$

Pour $n \geqslant 1$, posons $g_n := \max\big\{f_1, \dots, f_n\big\} \geqslant 0$. Tout ensemble mesurable $A \in \mathscr{A}$ se décompose en $\cup_{i=1}^n A_i = A$ au moyen des ensembles disjoints :

$$A_1 := \big\{g_n = f_1\big\}, \quad A_2 := \big\{g_n = f_2\big\}\big\backslash A_1, \ \dots\dots, \ A_n := \big\{g_n = f_n\big\}\big\backslash\big(A_1 \cup \cdots \cup A_{n-1}\big),$$

ce qui permet, via un calcul :

$$\begin{aligned} \int_A g_n\,d\mu = \sum_{i=1}^n \int_{A_i} g_n\,d\mu &= \sum_{i=1}^n \int_{A_i} f_i\,d\mu \\ &\leqslant \sum_{i=1}^n \nu\big(A_i\big) = \nu(A), \end{aligned}$$

de voir que $g_n \in \mathscr{K}$. Or comme la suite de fonctions positives $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ est croissante, sa limite $f := \lim_{n\to\infty} g_n$ existe en tant que fonction mesurable $X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, et par convergence monotone, on obtient pour tout $A \in \mathscr{A}$:

$$\int_A f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_A g_n\,d\mu \leqslant \nu(A),$$

ce qui montre que $f \in \mathscr{K}$, d'où $\int_X f\,d\mu \leqslant \alpha$.

Enfin par construction :

$$\begin{aligned}\int_X f\,d\mu &= \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu = \alpha,\end{aligned}$$

et en conclusion :

$$\int_X f\,d\mu = \alpha = \sup_{h\in\mathscr{K}}\int_X h\,d\mu.$$

Évidemment, $f \in L^1(X,\mathscr{A},\mu)$, car $\int_X f\,d\mu \leqslant \nu(X) < \infty$, et donc nous pouvons introduire la mesure visiblement absolument continue par rapport à μ :

$$\nu_a(A) := \int_A f\,d\mu \qquad\qquad (A\in\mathscr{A}).$$

Pour terminer la démonstration, il reste à établir que la mesure-reste :

$$\nu_s := \nu - \nu_a,$$

positive et finie (exercice mental), est singulière par rapport à μ.

À cette fin, quel que soit $n \geqslant 1$ entier, introduisons la mesure signée auxiliaire :

$$\lambda_n := \nu_s - \tfrac{1}{n}\,\mu,$$

et considérons la décomposition de Hahn $X = N_n \cup P_n$ de X par rapport à λ_n, à savoir $\lambda_n\big|_{N_n}$ est négative, et $\lambda_n\big|_{P_n}$ est positive.

Assertion 8.2. *Quel que soit $n \geqslant 1$, la fonction $h_n := f + \frac{1}{n}\mathbf{1}_{P_n}$ appartient à $\mathscr{K}$.*

Preuve. En effet, pour tout $A\in\mathscr{A}$, on vérife par le calcul que :

$$\begin{aligned}\int_A h_n\,d\mu &= \int_A f\,d\mu + \frac{1}{n}\,\mu\big(A\cap P_n\big) \\ &= \nu_a(A) + \nu_s\big(A\cap P_n\big) - \lambda_n\big(A\cap P_n\big) \\ &= \nu(A) - \nu_s(A) + \nu_s\big(A\cap P_n\big) - \lambda_n\big(A\cap P_n\big) \\ &= \nu(A) - \nu_s\big(A\cap N_n\big) - \lambda_n\big(A\cap P\big) \\ &\leqslant \nu(A),\end{aligned}$$

car ν_s est une (vraie) mesure, et car la restriction $\lambda_n\big|_{P_n}$ est positive. □

Puisque $h_n\in\mathscr{K}$, on doit avoir :

$$\begin{aligned}\alpha \geqslant \int_X h_n\,d\mu &= \int_X f\,d\mu + \frac{1}{n}\,\mu\big(P_n\big) \\ &= \alpha + \frac{1}{n}\,\mu\big(P_n\big),\end{aligned}$$

ce qui force $\mu(P_n)=0$. Par conséquent, la réunion $P := \cup_{n=1}^\infty P_n$ satisfait aussi $\mu(P)=0$, donc μ est supportée sur $X\backslash P$. Nous affirmons alors que ν_s est supportée sur P.

En effet, comme $X\backslash P \subset X\backslash P_n = N_n$, on a $\lambda_n(X\backslash P)\leqslant 0$, et donc :

$$\nu_s\big(X\backslash P\big) \leqslant \tfrac{1}{n}\,\mu\big(X\backslash P\big),$$

d'où $\nu_s(X\backslash P) = 0$ en faisant $n\longrightarrow\infty$. En conclusion, on a bien $\nu_s\perp\mu$.

Ensuite, toujours avec $\mu \geqslant 0$ et $\nu \geqslant 0$, levons l'hypothèse temporaire que ces deux mesures $\mu(X) < \infty$ et $\nu(X) < \infty$ sont finies, et supposons à la place leur σ-finitude :

$$X = \bigcup_{n \geqslant 1} X_n \qquad \text{avec} \quad \mu\big(X_n\big) < \infty \quad \text{et} \quad \nu\big(X_n\big) < \infty \qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

En restriction à chaque X_n, nous pouvons introduire les mesures finies :

$$\mu_n(A) := \mu\big(A \cap X_n\big) \qquad \text{et} \qquad \nu_n(A) := \nu\big(A \cap X_n\big),$$

et ce que nous venons de démontrer décompose chaque :

$$\nu_n = \nu_{n,a} + \nu_{n,s}, \qquad \nu_{n,a} \ll \mu, \qquad \nu_{n,s} \perp \mu,$$

le tout étant escorté par de superbes fonctions intégrables $f_n \in L^1(X, \mathscr{A}, \mu)$ représentant $\nu_{n,a}(A) = \int_A f_n \, d\mu$.

Il suffit alors de prendre :

$$f := \sum_{n \geqslant 1} f_n, \qquad \nu_a := \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,a}, \qquad \nu_s := \sum_{n \geqslant 1} \nu_{n,s},$$

les détails de vérification formelle étant directs.

Lorsque ν est une mesure *signée*, $|\nu|$ étant supposée σ-finie, il suffit d'appliquer tout cela aux deux composantes $\nu_+ - \nu_- = \nu$ de la décomposition de Jordan de ν — détails tout aussi directs, *ma jolie !* □

9. Exercices

Exercice 1. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deux ensembles munis de σ-algèbres. Une application $\psi \colon X \longrightarrow Y$ est dite $(\mathscr{A}, \mathscr{B})$-*mesurable* si :

$$\forall\, B \in \mathscr{B}, \quad \psi^{-1}(B) \in \mathscr{A}.$$

(a) Soit $\mathscr{B}_1 \subset \mathscr{B}$ une sous-collection qui engendre :

$$\mathscr{B} = \sigma\big(\mathscr{B}_1\big).$$

Montrer que ψ est mesurable si et seulement si $\psi^{-1}(B_1) \in \mathscr{A}$ pour tout $B_1 \in \mathscr{B}_1$.

(b) Soient $(X, \mathscr{T})$ et $(Y, \mathscr{U})$ deux ensembles munis de topologies $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{U} \subset \mathscr{P}(Y)$, et soient les σ-algèbres boréliennes associées $\mathscr{B}_X$ et $\mathscr{B}_Y$. Vérifier que les fonctions continues $X \longrightarrow Y$ sont $(\mathscr{B}_X, \mathscr{B}_Y)$-mesurables.

(c) Si $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ et $\chi \colon (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow (Z, \mathscr{C})$ sont mesurables, montrer que leur composition $\chi \circ \psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Z, \mathscr{C})$ est aussi mesurable.

(d) Si $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{U})$ à valeurs dans un espace topologique est mesurable, et si $\chi \colon (Y, \mathscr{U}) \longrightarrow (Z, \mathscr{V})$ est continue, montrer que $\chi \circ \psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Z, \mathscr{V})$ est mesurable.

(e) Si $f_1 \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R}$ sont mesurables, montrer que $(f_1, f_2) \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ l'est aussi.

Exercice 2. Soit $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable entre deux espaces mesurables. Si μ est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, on définit la *mesure-image* μ_ψ sur $(Y, \mathscr{B})$ par :

$$\mu(B) := \mu\big(\psi^{-1}(B)\big) \qquad (\forall\, B \in \mathscr{B}).$$

Démontrer que μ_ψ est effectivement une mesure sur $(Y, \mathscr{B})$.

Exercice 3. On désigne la partie entière d'un réel $x \in \mathbb{R}$ par $\mathsf{Ent}(x)$.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \mathsf{Ent}(x) & \text{si } 0 \leqslant x < 5, \\ 3 & \text{si } 5 \leqslant x, \end{cases}$$

est étagée.

(b) Montrer que la fonction $x \longmapsto \mathsf{Ent}(x)$ n'est *pas* étagée.

Exercice 4. Soit $(X, \mathscr{A})$ un espace mesurable, soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $f\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Montrer que l'on a pour tout réel $c > 0$:

$$\mu\big(\{x \in X\colon\ f(x) \geqslant c\}\big) \ \leqslant\ \frac{\int_X f\,d\mu}{c}.$$

Exercice 5. **(a)** Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, pour une fonction étagée quelconque $\varphi = \sum_{\mathsf{finie}} \alpha_i \cdot \mathbf{1}_{A_i}$, où $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, avec $A_i \in \mathscr{A}$ et $\mu(A_i) < \infty$, montrer que l'application :

$$\nu_\varphi\colon \quad A \longmapsto \int_A \varphi\,d\mu$$

est une mesure sur $(X, \mathscr{A})$.

(b) Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est μ-intégrable, montrer que cette mesure ν_φ est finie, puis traiter la réciproque.

(c) Pour toute autre fonction mesurable g, montrer que :

$$\int_X g\,d\nu_\varphi \ =\ \int_X g\,f\,d\mu.$$

Exercice 6. Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, montrer que toute suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n\colon X \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ vérifie :

$$\int_X \bigg(\sum_{n\geqslant 1} f_n\bigg)\,d\mu \ =\ \sum_{n=1}^\infty \int_X f_n\,d\mu.$$

Exercice 7. Soit $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables intégrables $X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

(a) S'il existe une fonction $g\colon X \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable intégrable telle que $g \leqslant f_n$ pour tout $n \geqslant 1$, montrer que le Théorème 3.3 de Fatou est encore vrai :

$$\int_X \Big(\liminf_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu \ \leqslant\ \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu.$$

(b) Si inversement $f_n \leqslant g$, montrer que :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \ \leqslant\ \int_X \Big(\limsup_{n\to\infty} f_n\Big)\,d\mu.$$

Exercice 8. Soient deux espaces mesurables $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$, avec $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$ et $\mathscr{B} \subset \mathscr{P}(Y)$ deux σ-algèbres, et soit $\psi\colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable.

L'Exercice 2 a associé à toute mesure μ sur $(X, \mathscr{A})$ une mesure-image μ_ψ sur $(Y, \mathscr{B})$.

(a) Démontrer que pour toute fonction mesurable $g\colon (Y, \mathscr{B}) \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$:

$$g \circ \psi \text{ est } \mu\text{-intégrable} \qquad \Longleftrightarrow \qquad g \text{ est } \mu_\psi\text{-intégrable.}$$

Indication: Supposer d'abord g à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, puis travailler avec des fonctions étagées.

(b) Dans ces circonstances, montrer que :

$$\int_X g \circ \psi\,d\mu \ =\ \int_Y g\,d\mu_\psi.$$

Exercice 9. Sur un espace mesuré $(X, \mathscr{A}, \mu)$, soit une fonction mesurable $f\colon X \longrightarrow \mathbb{C}$. Si $\big|\int_X f\,d\mu\big| = \int_X |f|\,d\mu$, montrer qu'il existe une constante $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| = 1$ telle que $\alpha\,f = |f|$, ce μ-presque partout.

Exercice 10. Soient $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2}$ les σ-algèbres des boréliens dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{R}^2$, respectivement. Établir la coïncidence entre la σ-algèbre produit $\mathscr{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et :

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} \ =\ \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Exercice 11. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, soient une (vraie) mesure μ, et soient ν, ν_1, ν_2 des mesures signées. Montrer les quatre propriétés suivantes.

(a) Si $\nu_1 \perp \mu$ et $\nu_2 \perp \mu$, alors $\nu_1 + \nu_2 \perp \mu$.

(b) Si $\nu_1 \ll \mu$ et $\nu_2 \ll \mu$, alors $\nu_1 + \nu_2 \ll \mu$.

(c) $\nu_1 \perp \nu_2$ implique $|\nu_1| \perp |\nu_2|$.

(d) $\nu \ll |\nu|$.

Exercice 12. Étant donné une mesure signée ν sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, on définit la *variation totale* $|\nu|$ de ν par :

$$|\nu|(A) \,:=\, \sup \sum_{i=1}^{\infty} \big|\nu\big(A_i\big)\big|,$$

où le supremum est pris sur toutes les partitions :

$$A \,=\, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \qquad\qquad (A_i \in \mathscr{A},\; A_i \cap A_{i'} = \emptyset, \forall\, i \neq i').$$

(a) Montrer que $|\nu|$ est une (vraie) mesure, *i.e.* à valeurs à $\geqslant 0$, sur $(X, \mathscr{A})$, en établissant successivement :

$$\sum_{i\geqslant 1} |\nu|\big(A_i\big) \,\leqslant\, |\nu|(A) \qquad \text{puis} \qquad |\nu|(A) \,\leqslant\, \sum_{i\geqslant 1} |\nu|\big(A_i\big).$$

(b) On définit la *variation positive* et la *variation négative* de ν par :

$$\nu_+ \,:=\, \tfrac{1}{2}\,\big(|\nu| + \nu\big) \qquad \text{et} \qquad \nu_- \,:=\, \tfrac{1}{2}\,\big(|\nu| - \nu\big).$$

Montrer que la décomposition de Jordan de ν est :

$$\nu \,=\, \nu_+ - \nu_-.$$

(c) On dit que ν est *σ-finie* si $|\nu|$ l'est. Montrer que ceci implique que ν_- et ν_+ sont aussi σ-finies.

Exercice 13. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, soit une mesure signée μ, et soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sa décomposition de Jordan.

(a) Montrer qu'un ensemble $E \in \mathscr{A}$ est négatif pour μ si et seulement si $\mu_+(E) = 0$.

(b) Montrer qu'un ensemble $F \in \mathscr{A}$ est positif pour μ si et seulement si $\mu_-(F) = 0$.

Exercice 14. Soit μ une mesure signée sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$, et soit $\mu = \mu_+ - \mu_-$ sa décomposition de Jordan.

(a) Montrer que $L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|) = L^1(X, \mathscr{A}, \mu_-) \cap L^1(X, \mathscr{A}, \mu_+)$.

(b) Pour $f \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$, quel que soit $A \in \mathscr{A}$, montrer que :

$$\bigg|\int_A f\, d\mu\bigg| \,\leqslant\, \int_A |f|\, d|\mu|.$$

(c) Soit une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^1\big(X, \mathscr{A}, |\mu|\big)$ satisfaisant :

$$\big|f_n\big| \,\leqslant\, g \qquad\qquad (|\mu|\text{-presque partout}),$$

pour une certaine fonction $g \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$ à valeurs $\geqslant 0$. Montrer que si $f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ tend $|\mu|$-presque partout vers une fonction mesurable f, alors $f \in L^1(X, \mathscr{A}, |\mu|)$, et :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \int_X \big|f_n - f\big|\, d|\mu|.$$

Exercice 15. Soient $(X, \mathscr{A})$ et $(Y, \mathscr{B})$ deus espaces mesurables, soit μ une mesure signée sur $(X, \mathscr{A})$, et soit $\psi \colon (X, \mathscr{A}) \longrightarrow (Y, \mathscr{B})$ une application mesurable.

(a) Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} \mu_\psi \colon \quad \mathscr{B} &\longrightarrow\,]-\infty, \infty] \\ B &\longmapsto\, \mu\big(\psi^{-1}(B)\big) \end{aligned}$$

est une mesure signée sur $(Y, \mathscr{B})$.

(b) Si $f\colon Y \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ est $\mathscr{B}$-mesurable telle que $f \circ \psi \in L^1(|\mu|)$, montrer que $f \in L^1\big(|\mu_\psi|\big)$, et établir la formule de transfert d'intégrales :

$$\int_X f \circ \psi \, d\mu \,=\, \int_Y f \, d\mu_\psi.$$

Exercice 16. Sur un espace mesurable $(X, \mathscr{A})$ muni d'une mesure positive μ et d'une mesure signée ν de décomposition de Jordan $\nu = \nu_+ - \nu_-$, établir les deux équivalences :

$$\big(\nu \ll \mu\big) \quad \Longleftrightarrow \quad \Big(\nu_- \ll \mu \text{ et } \nu_+ \ll \mu\Big) \quad \Longleftrightarrow \quad \big(|\nu| \ll \mu\big).$$

Exercice 17. L'objectif est d'établir une caractérisation de la mesure de Lebesgue : *Si μ est une mesure sur la σ-algèbre $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$ des boréliens de $\mathbb{R}^d$ qui est invariante par translation et finie sur les compacts, alors μ est une multiple de la mesure de Borel-Lebesgue $m = dx$.*

(a) Soit Q_a un translaté quelconque du cube ouvert $\{0 < x_1, \dots, x_d < a\}$ de côté $a > 0$. En posant $c := \mu(Q_1)$, montrer que $\mu\big(Q_{\frac{1}{n}}\big) = \frac{c}{n^d}$, pour tout entier $n \geqslant 1$.

(b) Montrer qu'il existe une fonction localement Lebesgue-intégrable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que $\mu(E) = \int_E f \, dx$, pour tout $E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^d}$.

(c) En déduire que $\mu = c\, m$.

Exercice 18. EE

Examens corrigés

François de Marçay
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives qui est Lebesgue-intégrable. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\big(E_\alpha\big) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 2. En dimension $d \geqslant 1$, soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives finies.

(a) Rappeler la définition initiale de la mesurabilité d'une fonction, puis des caractérisations équivalentes.

(b) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les sous-ensembles :

$$E_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\big\}$$

sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que l'on a la réunion disjointe (figure-bonus possible) :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ f(x) > 0\big\}.$$

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction étagée :

$$F_n := \sum_{k=-n}^{k=+n} 2^k\, \mathbf{1}_{E_k},$$

ainsi que $F := \lim_{n\to\infty} F_n$. Montrer que l'on a en tout point :

$$\tfrac{1}{2}\, F \leqslant f \leqslant F.$$

(e) Montrer que la fonction d'origine f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m(E_k) < \infty$.

(f) Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit les deux fonctions :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant **(e)**, montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 3. Sur un segment compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f satisfait $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 4. Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots \subset \mathbb{R}^d$ une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)}.$$

On suppose que pour un certain entier $k_0 \geqslant 1$, on a :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty.$$

En utilisant un théorème fondamental énoncé avec soin concernant les réunions dénombrables disjointes d'ensembles mesurables, montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big),$$

puis trouver un exemple simple faisant voir que cette conclusion peut être mise en défaut sans l'existence de k_0 tel que $m(E_{k_0}) < \infty$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$. En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) = \inf \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0, 1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que sa mesure extérieure de Lebesgue vaut $m^*(E) = 0$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^d$, soit un nombre fini quelconque $n \geqslant 1$ de sous-ensembles mesurables $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesures finies :

$$m(A_1) < \infty, \quad m(A_2) < \infty, \quad \dots\dots, \quad m(A_n) < \infty.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\Big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\Big) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} m\Big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\Big).$$

Exercice 7. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction réelle continue à support compact. Montrer que :

$$0 = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-h) - f(x)\big|\, dx.$$

Indication: Si $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ pour un rayon $R \gg 1$ assez grand, se limiter à $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < 1$ et se ramener à $\int_{B(0,R+1)}$.

Exercice 9. Trouver une suite de fonctions en escalier $f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx,$$

mais telle que, en *tout* point $x \in [0,1]$, la suite numérique :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

soit bornée et ne converge vers aucune valeur réelle. Indication: Utiliser la suite double $F_{k,m}(x) := \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]}$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$, illustrer son comportement pour $m = 1, 2, 3, 4$, décrire en mots les idées qui viennent à l'esprit, et enfin, rédiger en détail une démonstration rigoureuse.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. Comme $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est Lebesgue-intégrable, pour tout réel $\alpha > 0$, l'ensemble de sur-niveau :

$$E_\alpha := \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ f(x) > \alpha\big\}$$

est mesurable dans $\mathbb{R}^d$. De plus, l'inégalité entre fonctions :

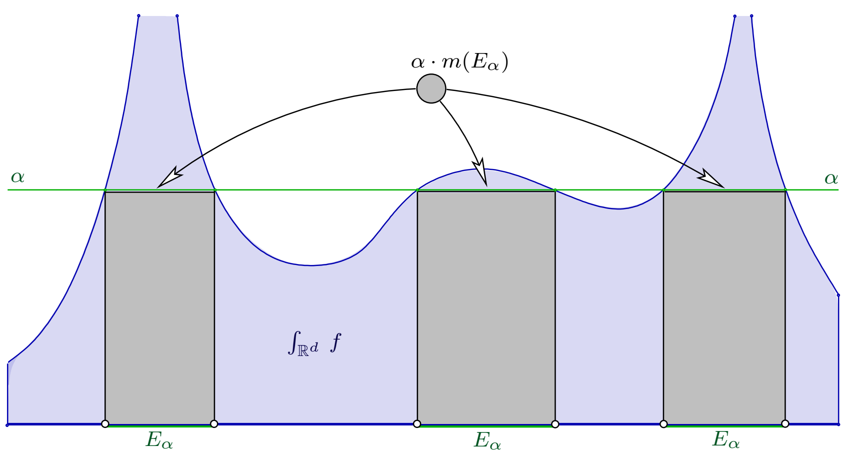
$$f(x) \geqslant \alpha \cdot \mathbf{1}_{E_\alpha}(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d),$$

est claire lorsque $x \notin E_\alpha$ car $f(x) \geqslant 0 = \alpha \cdot 0$ par hypothèse, et vraie aussi lorsque $x \in E_\alpha$, car $f(x) > \alpha = \alpha \cdot 1$, donc elle est satisfaite partout.

Par intégration de cette inégalité, nous obtenons instantanément :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \geqslant \alpha \cdot m\big(E_\alpha\big),$$

ce qui donne bien $m(E_\alpha) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f$.



Géométriquement, l'hypographe de f :

$$\big\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+\colon\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

dont la mesure $(d+1)$-dimensionnelle vaut $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'après un théorème du cours, est « coupé » à hauteur $\alpha > 0$, et sur le sous-ensemble $E_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ où $f > \alpha$, on ne retient que la valeur-type α, ce qui correspond à restreindre la considération au « *pseudo-rectangle* » de hauteur α et de « base » E_α, lequel est entièrement contenu dans l'hypographe de f au-dessus de E_α :

$$\big\{(x, y)\colon\ x \in E_\alpha,\, 0 \leqslant y \leqslant \alpha\big\} \subset \big\{(x, y)\colon\ x \in E_\alpha,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\big\},$$

et par intégration « visuelle », on trouve bien que l'aire de ce pseudo-rectangle est inférieure à l'aire intégrale totale :

$$\alpha \cdot m\big(E_\alpha\big) \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Exercice 2. **(a)** Une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty,\, a[\big) \;=\; \big\{x \in E\colon\; f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$. Dans le cours, on a obtenu les caractérisations équivalentes suivantes :

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \leqslant a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) \geqslant a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\; f(x) > a\big\}$$

est mesurable ;

• pour tout couple de nombres réels finis :

$$-\infty \;<\; a \;<\; b \;<\; +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\big\{a < f < b\big\}$$

sont mesurables ;

• plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ par l'un des trois ensembles :

$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad\qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad\qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}.$$

(b) On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles $E_k := \{x \in \mathbb{R}^d : \quad 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\}$ sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $E_k = \{x \in \mathbb{R}^d\colon\; 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\}$ est contenu dans l'ensemble :

$$E^* \;:=\; \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\; f(x) > 0\big\},$$

donc :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k \;\subset\; E^*.$$

Pour l'inclusion opposée, soit $x \in E^*$ quelconque. Comme $f(x) > 0$, et comme la réunion d'intervalles enchaînés :

$$\coprod_{k\in\mathbb{Z}} \big]2^{k-1},\, 2^k\big] \;=\,]0, \infty[$$

est disjointe, il existe un unique entier $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2^{k_x - 1} \;<\; f(x) \;\leqslant\; 2^{k_x},$$

ce qui signifie $x \in E_{k_x}$, et donne bien :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k \;\supset\; E^*.$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque fixé.

• Si $f(x) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x \notin E_k$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$F_n(x) \,=\, \sum_{|k| \leqslant n} 2^k \, \underline{\mathbf{1}_{E_k}(x)} \,=\, 0,$$

puis en faisant $n \longrightarrow \infty$:

$$F(x) \,=\, 0 \,=\, f(x),$$

d'où trivialement $\frac{1}{2}\, F(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$, car $\frac{1}{2}\, 0 \leqslant 0 \leqslant 0$, c'est très vrai, mon bébé !

• Si maintenant $f(x) > 0$, il existe un unique $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in E_{k_x}$, d'où pour tout $n \geqslant |k_x|$:

$$F_n(x) \,=\, 2^{k_x},$$

puis en faisant $n \longrightarrow \infty$:

$$F(x) \,=\, 2^{k_x}.$$

Comme par définition de k_x on a :

$$\frac{1}{2}\, F(x) \,=\, 2^{k_x - 1} \,<\, f(x) \,\leqslant\, 2^{k_x} \,=\, F(x),$$

en relaxant la « *strictitude* » de l'inégalité à gauche, nous obtenons bien $\frac{1}{2}\, F(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$.

(e) Comme $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable à valeurs positives finies, f est Lebesgue-intégrable (par définition !) si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^d} f < \infty$. Or une intégration de l'encadrement de f par F obtenu à l'instant dans la question précédente donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} F \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} f \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^d} F,$$

donc f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ si et seulement si F l'est.

Maintenant, il est temps d'observer que la suite $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions positives est croissante :

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) \,=\, 2^{-(n+1)}\, \mathbf{1}_{E_{-n-1}}(x) + 2^{n+1}\, \mathbf{1}_{E_{n+1}}(x) \,\geqslant\, 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} F \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\lim_{n\to\infty} F_n \Big) \,&=\, \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \bigg(\sum_{|k| \leqslant n} 2^k\, \mathbf{1}_{E_k} \bigg) \\
&=\, \lim_{n\to\infty} \sum_{|k| \leqslant n} 2^k\, m\big(E_k\big) \\
&=\, \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k\, m\big(E_k\big) \\
&\in\, \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},
\end{aligned}$$

et donc on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,<\, \infty \iff \int_{\mathbb{R}^d} F \,<\, \infty \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k\, m\big(E_k\big).$$

(f) Avec un exposant $a \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$f_a(x) := \begin{cases} |x|^{-a} & \text{lorsque } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est mesurable à valeurs $\geqslant 0$.

Puisque dans la boule unité fermée $\{|x| \leqslant 1\}$, on a $|x|^c \leqslant 1$ pour tout exposant réel $c \geqslant 0$, la fonction f_a est toujours intégrable lorsque $a \leqslant 0$.

Supposons donc $a > 0$, et, en application de ce qui précède, regardons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles :

$$\begin{aligned} E_k &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 2^{k-1} < f_a(x) \leqslant 2^k\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 0 < |x| \leqslant 1 \text{ et } 2^{k-1} < \tfrac{1}{|x|^a} \leqslant 2^k\big\} \\ &= \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 0 < |x| \leqslant 1 \text{ et } \tfrac{1}{2^{\frac{k}{a}}} \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{\frac{k-1}{a}}}\big\}, \end{aligned}$$

qui s'avèrent ainsi visuellement être une collection infinie d'anneaux (en dimension $d = 2$), ou de coquilles sphériques (en dimension $d = 3$), emboîtés.

Or lorsque $k \leqslant 0$, on voit que $E_k = \emptyset$, et donc seuls les E_k avec $k \geqslant 1$ interviennent.

Maintenant, grâce à la question **(e)**, f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, m\big(E_k\big) \ < \ \infty.$$

Mais chacune de ces coquilles d-dimensionnelles E_k avec $k \geqslant 1$ apparaît manifestement comme étant la dilatée du facteur $\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}$ de la coquille de référence :

$$\mathscr{C}_a := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 1 \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{-\frac{1}{a}}}\big\},$$

évidemment de mesure strictement positive finie $0 < m(\mathscr{C}_a) < \infty$, et donc d'après la propriété naturelle de dilatation de la mesure de Lebesgue :

$$m\big(\lambda \cdot F\big) = \lambda^d\, m(F) \qquad\qquad (\lambda > 0,\ F \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable}),$$

on obtient ici :

$$m\big(E_k\big) = \bigg(\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}\bigg)^d \cdot m\big(\mathscr{C}_a\big),$$

d'où enfin, en reconnaissant une série géométrique sérendipitrice :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k\, m\big(E_k\big) = m\big(\mathscr{C}_a\big) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{d}{a})} = \begin{cases} \infty & \text{lorsque } a \geqslant d, \\ m(\mathscr{C}_a)\, \dfrac{2^{(1-\frac{d}{a})}}{1 - 2^{(1-\frac{d}{a})}} & \text{lorsque } 0 < a < d, \end{cases}$$

ce qui montre que f_a est intégrable si et seulement si $a < d$.

Passons maintenant au cas — fort similaire ! — de la fonction :

$$g_b(x) := \begin{cases} |x|^{-b} & \text{là où } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Lorsque $b \geqslant 0$, elle est manifestement non-intégrable.

Supposons donc $b > 0$. Dans ce cas :

$$E_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ |x| \geqslant 1 \text{ et } \tfrac{1}{2^{\frac{k}{b}}} \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{\frac{k-1}{b}}}\big\},$$

avec $E_k = \emptyset$ pour $k \geqslant 1$. Toujours avec :

$$\mathscr{C}_b \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\, 1 \leqslant |x| < \tfrac{1}{2^{-\frac{1}{b}}}\big\},$$

on vérifie que :

$$\sum_{k=-\infty}^{0} 2^k\, m\big(E_k\big) \,=\, m\big(\mathscr{C}_b\big) \sum_{k=-\infty}^{0} 2^{k(1-\frac{d}{b})} \,=\, \begin{cases} \infty & \text{lorsque } \ 0 < b \leqslant d, \\ m(\mathscr{C}_b)\, \dfrac{1}{1-2^{\frac{d}{b}-1}} & \text{lorsque } \ b > d, \end{cases}$$

ce qui montre que g_b est intégrable si et seulement si $b > d$.

Exercice 3. Soit $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Dans la définition des sommes de Darboux associées à des subdivisions $\Delta \subset [a,b]$, il se peut alors que l'infimum de f sur un intervalle de la subdivision (ou son supremum) soit infini, auquel cas la somme de Darboux correspondante est infinie. Dans tous les cas rien ne nous empêche de vérifier si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a,b]$:

$$\Delta \,=\, \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\big\},$$

telle que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Supposons cette condition verifiée pour un $\varepsilon > 0$ fixé, et montrons qu'alors f est nécessairement bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons f non bornée, par exemple $\mathsf{sup}_{[a,b]} f = +\infty$. Alors il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que sur $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, on a $\mathsf{sup}_{I_k} f = +\infty$ et donc $\Sigma^{\Delta}(f) = +\infty$. Mais alors

$$\Sigma_{\Delta}(f) \geqslant \Sigma^{\Delta}(f) - \varepsilon = +\infty.$$

Cela entraîne que sur un certain intervalle $I_l = [x_{l-1}, x_l]$, on a $\mathsf{inf}_{I_l} f = +\infty$, ce qui est impossible, car on considère des fonctions dont toutes les valeurs sont réelles. En conclusion, si une fontion vérifie la définition de Riemann-intégrabilité, elle est nécessairement bornée.

Une autre démonstration possible part d'une caractérisation obtenue dans le cours : une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier encadrant f :

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \,\leqslant\, f \,\leqslant\, f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}},$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \,\leqslant\, \varepsilon.$$

La fonction f sera de nouveau implicitement bornée, puisque les fonctions en escalier sont (par nature) bornées.

Exercice 4. Cela apparaît explicitement dans le cours, mais refaisons la démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après éliminination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie. Posons $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$, et considérons alors les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 \,=\, E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au théorème d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) \,&=\, m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big)\Big] \\ &=\, m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a des nombres réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) \,=\, \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux, car si on prend par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$, alors $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ tandis que $m(E_k) = \infty$ pour tout $k \geqslant 1$, ce qui entraîne la non-coïncidence :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) \,=\, 0 \,\neq\, \infty \,=\, \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big).$$

Exercice 5. (a) Pour prouver l'égalité demandée, on va raisonner par double inégalité.

• Avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, soit $\cup_{j=1}^{J} I_j$ un recouvrement de E par un nombre fini d'intervalles fermés tels que :

$$\sum_{j=1}^{J} |I_j| \,\leqslant\, m_J^*(E) + \varepsilon.$$

Alors en utilisant le fait qu'une réunion *finie* de fermés est fermée, il vient en prenant les adhérences :

$$\overline{E} \,\subset\, \overline{\bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j} \,=\, \bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j.$$

Donc $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est aussi un recouvrement de la fermeture $\overline{E}$ par un nombre fini d'intervalles fermés, ce qui implique par définition de $m_J^*(\overline{E})$:

$$m_J^*\big(\overline{E}\big) \,\leqslant\, \sum_{j=1}^{J} |I_j|.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout recouvrement de E, on peut passer à l'infimum, c'est-à-dire faire $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, pour obtenir une première inégalité :

$$m_J^*\big(\overline{E}\big) \,\leqslant\, m_J^*(E).$$

• L'inégalité inverse est plus « *naturelle-automatique* », donc plus facile. En effet, si $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est un recouvrement de $\overline{E}$ par un nombre fini intervalles fermés, alors l'inclusion :

$$E \,\subset\, \overline{E} \,\subset\, \bigcup_{1\leqslant j\leqslant J} I_j,$$

fait voir que $\cup_{j=1}^J I_j$ est *aussi* un recouvrement de E, ce qui donne $m_J^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^J |I_j|$, puis en prenant l'infimum, l'inégalité inverse conclusive :

$$m_J^*(E) \leqslant m_J^*(\overline{E}).$$

Notons qu'en réalité, nous venons simplement de ré-utiliser le fait connu que la mesure extérieure de Jordan est croissante sur toute inclusion telle que $E \subset \overline{E}$.

(b) On cherche ici un ensemble dénombrable de mesure de Borel-Lebesgue nulle dont l'adhérence soit de mesure grande au sens de Jordan. Il vient naturellement à l'esprit de regarder :

$$E := \mathbb{Q} \cap [0,1],$$

qui a pour adhérence $\overline{E} = [0,1]$.

Cet ensemble E est dénombrable car $\mathbb{Q}$ l'est, donc mesurable de mesure de Borel-Lebesgue $m(E) = m^*(E) = 0$.

Mais d'après la question précédente,

$$m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big) = m_J^*([0,1]) = 1,$$

puisque Jordan n'a pas fait la bêtise de ne pas attribuer 1 comme mesure — et comme mesure extérieure ! — à l'intervalle unité $[0,1]$, ce qu'on peut vérifier rapidement comme suit.

Tout recouvrement $\cup_{j=1}^J I_j$ de $[0,1]$ par des intervalles vérifie nécessairement $\sum_{j=1}^J |I_j| \geqslant 1$, et comme on a même égalité en utilisant le recouvrement $I_1 = [0,1]$, nous déduisons bien que $m_J^*([0,1]) = 1$.

Exercice 6. Les complémentaires des sous-ensembles $A_i \subset \mathbb{R}^d$ seront notés de manière abrégée :

$$\mathbb{R}^d \backslash A_i =: A_i^c \qquad\qquad (i = 1, 2, 3 \cdots).$$

Pour la formule visée, le cas $n = 1$ est trivial, tandis que le cas $n = 2$ se démontre en partant des trois réunions *disjointes :*

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= (A_1 \cap A_2^c) \bigcup (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1^c \cap A_2), \\ A_1 &= (A_1 \cap A_2^c) \bigcup (A_1 \cap A_2), \\ A_2 &= \qquad\qquad\quad (A_1 \cap A_2) \bigcup (A_1^c \cap A_2), \end{aligned}$$

dont on n'hésite pas à prendre les mesures :

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup A_2) &= m(A_1 \cap A_2^c) + m(A_1 \cap A_2) + m(A_1^c \cap A_2), \\ m(A_1) &= \underline{m(A_1 \cap A_2^c)} + m(A_1 \cap A_2), \\ m(A_2) &= \qquad\qquad\quad m(A_1 \cap A_2) + \underline{m(A_1^c \cap A_2)}, \end{aligned}$$

et en remplaçant dans la première ligne les valeurs soulignées dans les lignes 2 et 3, on obtient bien après petit toilettage arithmétique :

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2).$$

Ce cas $n = 2$ n'a l'air de rien, mais maintenant que nous décidons gaillardement de passer à l'implication de récurrence majeure, en supposant atteint le niveau n, pour démarrer en direction du niveau $n+1$, il s'avère naturel d'utiliser ce qui vient d'être vu :

$$\begin{aligned}
m\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= m\Big(\underbrace{\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big)}_{A_1'} \cup \underbrace{A_{n+1}}_{A_2'}\Big) \\
&= m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + m\big(A_{n+1}\big) - m\Big(\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \bigcap A_{n+1}\Big) \\
&= m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) + m\big(A_{n+1}\big) - m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \cap A_{n+1}\big)\Big),
\end{aligned}$$

pour observer qu'au premier et au troisième termes ainsi apparaissants, on peut appliquer en douceur l'hypothèse de récurrence, tout d'abord sans modification et sans effort au premier :

$$m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\Big),$$

puis avec un peu plus d'intentions esthéticiennes au troisième :

$$\begin{aligned}
m\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \big(A_i \cap A_{n+1}\big)\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\Big(\big(A_{i_1}\cap A_{n+1}\big)\bigcap\cdots\bigcap\big(A_{i_k}\cap A_{n+1}\big)\Big)\Big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\cap A_{n+1}\big)\Big) \\
\text{[Changer } \ell := k+1\text{]} \qquad &= \sum_{\ell=2}^{n+1} \Big((-1)^{\ell} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{\ell-1}}\cap A_{n+1}\big)\Big),
\end{aligned}$$

cette dernière somme multiple pouvant d'ailleurs être interprétée — agréablement pour la suite — avec un ℓ-ème indice i_ℓ égal à $n+1$:

$$\sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n \\ i_\ell=n+1}},$$

car en effet, si nous revenons à ce dont nous étions partis et si nous y insérons les formules que nous venons de façonner — le deuxième terme ne quittant pas sa douillette place —, il vient :

$$\begin{aligned}
m\Big(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\Big) &= \sum_{k=1}^{n} \Big((-1)^{k-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\big)\Big) + m\big(A_{n+1}\big) - \\
&\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} \Big((-1)^{\ell} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<\cdots<i_{\ell-1}\leqslant n \\ i_\ell=n+1}} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_{\ell-1}}\cap A_{n+1}\big)\Big) \\
&= \sum_{\ell=1}^{n+1} \Big((-1)^{\ell-1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_\ell\leqslant n+1} m\big(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_\ell}\big)\Big),
\end{aligned}$$

et le résultat n'est autre que la formule désirée au niveau $n+1$, puisque la première somme rassemble exactement toutes les intersections dans lesquelles ne figure pas A_{n+1}, tandis que dans la deuxième somme (troisième terme), on trouve toutes les intersections de plus de deux ensembles A_i parmi lesquels figure A_{n+1}.

Exercice 7. Pour construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense et de mesure $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$ arbitrairement petite, on pense spontanément à l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des rationnels, et comme $\mathbb{Q}$ n'est pas ouvert, il vient à l'esprit de former des intervalles ouverts de taille ajustée autour de ses points et qui rétrécissent suffisamment vite.

Plus précisément, si $(r_n)_{n=1}^{\infty}$ est une énumération (bijective) des points (dénombrables) de $\mathbb{Q}$, essayons :

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty} \big]r_n - \alpha_n,\, r_n + \alpha_n\big[,$$

où $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geqslant 1$, de telle sorte que Ω est automatiquement ouvert. De plus Ω sera *de facto* dense dans $\mathbb{R}$, simplement parce qu'il contient :

$$\Omega \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} = \mathbb{Q}.$$

Majorons maintenant sa mesure :

$$\begin{aligned} m(\Omega) &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m\Big(\big]r_n - \alpha_n,\, r_n + \alpha_n\big[\Big) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\,\alpha_n. \end{aligned}$$

Il suffit alors pour conclure de choisir $\alpha_n := \frac{1}{2}\,\frac{\varepsilon}{2^n}$ pour atteindre $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$, grâce à Achille $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ qui rejoint la Tortue.

Exercice 8. Puisque f est à support compact dans $\mathbb{R}^d$, il existe $R \gg 1$ assez grand pour que :

$$\mathsf{supp}\, f \subset B(0, R).$$

Soit un vecteur $h \in \mathbb{R}^d$ de norme $|h| < 1$. Nous affirmons que la fonction continue :

$$x \longmapsto \big|f(x-h) - f(x)\big|$$

est à support inclus dans la boule ouverte $B(0, R+1)$. En effet, pour $x \notin B(0, R+1)$ quelconque, *i.e.* avec $|x| \geqslant R+1$, on a par inégalité triangulaire :

$$|x-h| \geqslant |x| - |h| \geqslant R+1-|h| > R+1-1 = 1,$$

ce qui garantit que $f(x-h) = 0$, et comme on a évidemment aussi $f(x) = 0$, ceci prouve notre affirmation.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. La fonction f étant continue, elle est uniformément continue sur le compact (boule fermée) $\overline{B}(0, R{+}2)$, à savoir, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, qu'on peut — et qu'on va ! — supposer $\delta \leqslant 1$, tel que :

$$\forall\, |x| \leqslant R+1 \quad \forall\, |h| \leqslant \delta \qquad \big|f(x-h) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-h) - f(x)\big|\, dx &= \int_{B(0,R+1)} \big|f(x-h) - f(x)\big| \\ &\leqslant \int_{B(0,R+1)} \varepsilon\, dx \\ &= \varepsilon\, m\big(B(0, R+1)\big), \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 avec $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, puisque le volume d-dimensionnel :

$$0 \,<\, m\big(B(0,R+1)\big) \,=\, \big|B(0,R+1)\big| \,<\, \infty$$

de la boule en question est bien entendu fini.

Remarquons qu'on peut démontrer avec des moyens plus sophistiqués que le volume d-dimensionnel d'une boule (ouverte ou fermée) de rayon $R > 0$ dans $\mathbb{R}^d$ vaut :

$$\big|B(0,R)\big| \,=\, \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}\, R^d,$$

où Γ est la *fonction Gamma* d'Euler, définie pour $x > 0$ par :

$$\Gamma(x) \,:=\, \int_0^\infty t^{x-1}\, e^{-t}\, dt,$$

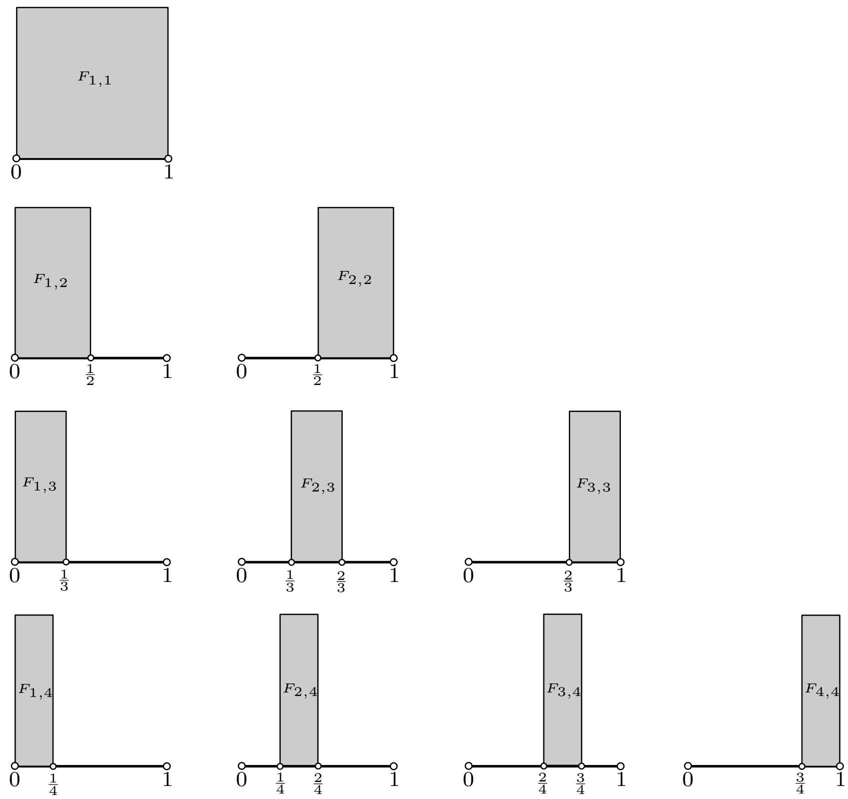
et qui peut être considérée comme un prolongement de la factorielle aux nombres réels, sachant que $\Gamma(n+1) = n!$ (exercice !) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Un simple dessin convainc que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$:

$$\begin{array}{llll}
f_1 := F_{1,1}, & & & \\
f_2 := F_{1,2}, & f_3 := F_{2,2}, & & \\
f_4 := F_{1,3}, & f_5 := F_{2,3}, & f_6 := F_{3,3}, & \\
f_7 := F_{1,4}, & f_8 := F_{2,4}, & f_9 := F_{3,4}, & f_{10} := F_{4,4},
\end{array}$$

....

prend une infinité de fois les deux valeurs 0 et 1 en tout point $x \in [0,1]$ fixé, tandis que $\int_0^1 f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, car la largeur des gratte-ciels de hauteur constamment égale à 1 qui glissent de la gauche vers la droite tend à rétrécir indéfiniment. Le voici, ce dessin !



Ainsi, il faut renuméroter tout cela. Comme la suite :

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)_{m=1}^{\infty} = \big\{1,\,3,\,6,\,10,\,15,\,21,\,28,\,35,\,\dots\big\}$$

est strictement croissante, à tout $n \geqslant 1$ est associé un unique entier $m = m_n \geqslant 1$ encadrant :

$$\frac{m_n(m_n+1)}{2} + 1 \leqslant n \leqslant \frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2},$$

l'écart entre ces deux extrémités valant :

$$\frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2} - \frac{m_n(m_n+1)}{2} = m_n,$$

et donc, à tout $n \geqslant 1$ est associé un unique couple (m_n, k_n) avec $1 \leqslant k_n \leqslant m_m$ le représentant sous la forme :

$$n = \frac{m_n(m_n+1)}{2} + k_n.$$

Clairement :

$$\lim_{n\to\infty} m_n = \infty,$$

car une des inégalités ci-dessus donne $\sqrt{2n} \leqslant m_n + 2$.

Ainsi, grâce à la renumérotation offerte par ces couples (k_n, m_n), on a généralement :

$$f_n(x) := F_{k_n,m_n}(x),$$

et donc :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx \;&=\; \int_0^1 F_{k_n,m_n}(x)\,dx \\ &=\; \int_0^1 \mathbf{1}_{[\frac{k_n-1}{m_n},\frac{k_n}{m_n}]}(x)\,dx \\ &=\; \frac{1}{m_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Pour démontrer que la suite $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^\infty$ des valeurs des f_n en tout point fixé $x \in [0,1]$ n'est *pas* convergente, il suffit d'expliquer l'assertion suivante :

En tout $x \in [0,1]$*, la suite des valeurs* $\big(f_n(x)\big)_{n=1}^\infty$ *prend une infinité de fois la valeur* 0*, et aussi une infinité de fois la valeur* 1.

En effet, puisque $(f_n)_{n=1}^\infty$ n'est qu'une renumérotation, il suffit de montrer que la suite double :

$$\big(F_{k,m}\big)_{1\leqslant k\leqslant m}^{1\leqslant m<\infty}$$

fait ce qui est affirmé.

Visuellement, il est transparent que la valeur 0 est prise très souvent, sûrement une infinité de fois ! Pour s'en convaincre rigoureusement, fixons $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, le cas $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ se traitant de manière similaire. Or dès que $m \geqslant 3$, on a $\frac{1}{2} \leqslant \frac{m-1}{m}$, et donc :

$$F_{m-1,m}(x) \;=\; \mathbf{1}_{[\frac{m-1}{m},m]}(x) \;=\; 0,$$

donc la valeur 0 est prise par toutes ces $\big(F_{m-1,m}\big)_{m=1}^\infty$ — et beaucoup d'autres ! —, en nombre infini.

Quant à la valeur 1, c'est presque aussi simple, car en $x \in [0,1]$ fixé, pour tout $m \geqslant 1$, comme :

$$\bigcup_{k=1}^{m} \big[\tfrac{k-1}{m},\, \tfrac{k}{m}\big] \;=\; [0,1],$$

il existe au moins un entier $k_{x,m}$ avec $1 \leqslant k_{x,m} \leqslant m$ tel que :

$$1 \;=\; \mathbf{1}_{[\frac{k_{x,m}-1}{m},\frac{k_{x,m}}{m}]}(x) \;=\; F_{k_{x,m},m}(x),$$

et ces $\big(F_{k_{x,m},m}\big)_{m=1}^\infty$ sont manifestement infiniment nombreuses.

3. Examen 2

Exercice 1. **(a)** Montrer que ni l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, ni celle $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ne sont vraies. Indication : supposer $d = 1$ et penser à $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}$ ainsi qu'à $\frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty[}$.

(b) Montrer que si une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, alors $f \in L^2(E, \mathbb{C})$ implique $f \in L^1$ avec :

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \sqrt{m(E)}\, \|f\|_{L^2}.$$

(c) Montrer que si f est bornée, *i.e.* si $|f(x)| \leqslant C < \infty$, et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|f\|_{L^2} \leqslant \sqrt{C}\, \sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. **(a)** Établir l'existence de la limite suivante, et déterminer sa valeur :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{4\,t^3 + 12}{12\,t^6 + 3\,n\,t + 2}\, dt.$$

Indication: Utiliser le théorème de convergence dominée.

(b) Faire de même pour :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{n \sin x}\, dx.$$

Indication: Découper l'intégrale en $\int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2}$.

Exercice 3. **(a)** Montrer pour $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ continue à support compact que l'on a :

$$0 = \lim_{\delta\to 1} \big\| f(x) - f(\delta\, x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) Généraliser cela aux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ Lebesgue-intégrables quelconques.

Exercice 4. **[Inégalité de Hardy dans L^{p}]** Soit un nombre réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. L'objectif est d'étudier l'opérateur qui, à une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(]0, \infty[, \mathbb{C})$, associe la fonction :

$$x \longmapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad\qquad (0 < x < \infty).$$

(a) Rappeler la valeur de l'exposant conjugué de p, dans l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que cette fonction $x \longmapsto T(f)(x)$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$, alors g et $T(g)$ sont liées par une équation différentielle, que l'on explicitera.

(d) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$ est à support dans $[a, A]$ avec $0 < a \leqslant A < \infty$, alors :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{(A-a)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\, \|g\|_{L^{\mathsf{p}}}}{x}.$$

(e) Montrer que $x\big[T(g)(x)\big]^{\mathsf{p}}$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow \infty$.

(f) Montrer que $T(g) \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[\big)$.

(g) On suppose temporairement que $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}_+)$ prend des valeurs réelles positives. En exécutant une intégration par parties, et en utilisant ce qui précède, montrer que :

$$\big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \,=\, -\,\mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1} + \mathsf{p}\int_0^\infty T(g)^{\mathsf{p}}.$$

(h) Toujours pour $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}_+)$, montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que :

$$\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(i) Montrer que si une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions continues positives $g_n \in \mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ converge en norme L^{p} vers une fonction-limite (positive) $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$, alors :

$$\lim_{n\to\infty} T(g_n)(x) \,=\, T(f)(x) \qquad\qquad (\forall\, x > 0).$$

(j) Montrer que l'inégalité précèdente est maintenant vraie pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$:

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,\leqslant\, \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Indication: Utiliser Fatou.

(k) Montrer qu'elle demeure encore vraie pour toute fonction à valeurs complexes $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{C}\big)$.

(l) Trouver un exemple de fonction $f \in L^1(]0,\infty[)$ telle que $T(f) \notin L^1(]0,\infty[)$.

(m) Montrer qu'il n'est pas possible de remplacer la constante $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$ par une constante plus petite. Indication: On pourra considérer la suite de fonctions $\big(t \mapsto t^{-\frac{1}{\mathsf{p}}}\cdot \mathbf{1}_{[1,n]}\big)_{n=1}^\infty$.

(n) Examiner le cas $\mathsf{p} = \infty$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables $f_n\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrables convergeant presque partout vers une certaine fonction-limite :

$$f(x) \,=\, \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad\qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

mesurable et intégrable qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \,=\, \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n.$$

(a) On suppose toutes les $f_n \geqslant 0$ positives, et on introduit la suite auxiliaire $g_n := \min\,(f_n, f)$. Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

Indication: Penser à Fatou !

(b) Toujours en supposant toutes les $f_n \geqslant 0$ positives, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx.$$

(c) Montrer que la suite :

$$h_n(x) \,=\, n^d\,\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[^d}(x) - n^d\,\mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},0[^d}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1)$$

converge ponctuellement vers 0 et que $0 = \lim\limits_{n\to\infty} \int h_n$.

(d) La suite $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ converge-t-elle vers 0 dans un $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$?

Exercice 6. [Espaces de Sobolev] Ici, toutes les fonctions sont supposées à valeurs dans $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $L^2\big(]0,1[\big)$ constitué des fonctions $f\colon\,]0,1[\longrightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2\big(]0,1[\big)$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^1\big(]0,1[,\mathbb{C}\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et dont le support :

$$\mathsf{supp}\,\varphi \overset{\mathsf{def}}{:=} \overline{\big\{t \in]0,1[:\ \varphi(t) \neq 0\big\}}$$

est un sous-ensemble *compact* de $]0,1[$.

(a) En admettant la densité de $\mathscr{C}_c^1$ dans $\mathscr{C}_c^0$, montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble dense de $L^2\big(]0,1[\big)$.

(b) Montrer que :

$$\langle f,\, g\rangle_{\mathscr{S}} := \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)\,\Lambda_g(x)\,dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

(c) Montrer que $\mathscr{S}$, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 7. [Bases produits] Montrer que si $(\varphi_i(x))_{i=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1},\mathbb{C})$ et si $(\psi_j(y))_{j=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_2},\mathbb{C})$, alors :

$$\big(\varphi_i(x)\,\psi_j(y)\big)_{i,j=1}^{\infty}$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2},\mathbb{C})$.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. **(a)** En dimension $d = 1$, la fonction positive :

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \, dx \,=\, \big[2\sqrt{x}\big]_0^1 \,=\, 2,$$

mais n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \bigg(\frac{1}{\sqrt{x}}\bigg)^2 dx \,=\, \int_0^1 \frac{1}{x} \, dx \,=\, \log 1 - \log 0 \,=\, \infty,$$

ce qui montre que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

De manière quelque peu similaire bien qu'inversée, la fonction positive :

$$x \longmapsto \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$$

n'appartient *pas* à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx \,=\, \log\infty - \log 1 \,=\, \infty,$$

mais appartient à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \bigg(\frac{1}{x}\bigg)^2 dx \,=\, \bigg[-\frac{1}{x}\bigg]_1^\infty \,=\, 1,$$

ce qui montre que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

(b) Toutefois, sur tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, l'inclusion :

$$L^2\big(E, \mathbb{C}\big) \,\subset\, L^1\big(E, \mathbb{C}\big),$$

est toujours vraie, grâce à une application astucieuse standard de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui consiste à faire apparaître un facteur '1' invisible :

$$\begin{aligned}
||f||_{L^1(E)} \,=\, \int_E \big|f(x)\big| \, dx \,=\, \int_E \big|f(x)\big| \cdot 1 \, dx &\leqslant \bigg(\int_E \big|f(x)\big|^2 dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_E 1^2 \, dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||f||_{L^2(E)} \sqrt{m(E)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce, pour toute fonction $f \in L^2(E, \mathbb{C})$.

(c) Enfin, sur $E = \mathbb{R}^d$, donc au contraire en mesure infinie, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est *bornée :*

$$\big|f(x)\big| \,\leqslant\, C \,<\, \infty \qquad \text{(pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d\text{)},$$

alors la norme L^2 de f s'estime « brutalement » par :

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)\big|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} = \bigg(\int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)\big|^{1+1}\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant \bigg(C\int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)\big|\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{C}\,\sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. **(a)** La suite de fonctions à intégrer, indexée par un entier $n \geqslant 0$, admet, par exemple, la fonction-dominante indépendante de n suivante :

$$\frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+2} \leqslant \frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+2} = \frac{2\,t^3+6}{6\,t^6+1},$$

et l'on voit grâce à $\int_1^\infty \frac{1}{t^3}\,dt < \infty$ que :

$$\int_0^\infty \frac{2\,t^3+6}{6\,t^6+1}\,dt < \infty.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+2}\,dt = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty}\frac{4\,t^3+12}{12\,t^6+3n\,t+12}\,dt = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(b) Rappelons pour débuter que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{2}{\pi}\,x \leqslant \sin x \leqslant x,$$

ce qui a été vu en cours. Ainsi :

$$\frac{\sin(nx)}{n\sin x} \leqslant \frac{n\,x}{n\sin x} = \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{\pi}{2},$$

et en découpant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\delta + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}}$ avec $\delta > 0$ petit, on majore :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n\sin x}\,dx \leqslant \delta\,\frac{\pi}{2} + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n\sin x}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\,0}\,dx,$$

ce qui démontre (exercice mental) que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n\sin x}\,dx = 0.$$

Exercice 3. **(a)** Lorsque $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ est continue à support compact, disons $\operatorname{supp} f \subset B(0,R)$, une boule ouverte centrée en l'origine de rayon $R \gg 1$ assez grand, la domination uniforme en le paramètre dilatoire $\frac{1}{2} \leqslant \delta \leqslant 2$:

$$\big|f(x)-f(\delta x)\big| \leqslant 2\max_{\mathbb{R}^d}|f|\cdot \mathbf{1}_{B(0,2R)},$$

par une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$, assure qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne effectivement :

$$\lim_{\delta\to 1}\int_{\mathbb{R}^d}\big|f(x)-f(\delta x)\big|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\lim_{\delta\to 1}\big|f(x)-f(\delta x)\big|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} 0 = 0.$$

(b) Comme prévisible, le même résultat pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d,\mathbb{C})$ — circonstance plus générale — s'obtient grâce à un raisonnement par densité standard.

En effet, comme $\mathscr{C}_c^0$ est dense dans L^1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g_\varepsilon \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que :

$$\big\| f - g_\varepsilon \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Maintenant, le résultat de la Question **(a)** s'applique à g_ε, et donne un $\delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$|\delta - 1| \leqslant \delta(\varepsilon) \implies \big\| g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

Alors par inégalité triangulaire, toujours pour $|\delta - 1| \leqslant \delta(\varepsilon)$, on estime :

$$\begin{aligned}
\big\| f(x) - f(\delta x) \big\|_{L^1} &= \Big\| f(x) - g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x) + g_\varepsilon(\delta x) - f(\delta x) \Big\|_{L^1} \\
&\leqslant \big\| f(x) - g_\varepsilon(x) \big\|_{L^1} + \big\| g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x) \big\|_{L^1} + \big\| g_\varepsilon(\delta x) - f(\delta x) \big\|_{L^1} \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Avec un exposant $1 < \mathsf{p} < \infty$, à une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0, \infty[, \mathbb{C}\big)$, associons donc sa *transformée de Hardy :*

$$x \longmapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt,$$

définie pour $x > 0$.

(a) L'exposant conjugué de p est l'unique nombre réel $1 < \mathsf{p}' < \infty$ satisfaisant $1 = \frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'}$, et il vaut :

$$\mathsf{p}' = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p} - 1}.$$

(b) Pour $x > 0$ quelconque, et $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ arbitraire, une application avisée de l'inégalité de Hölder permet de majorer :

$$\begin{aligned}
T(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \cdot 1\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{x} \bigg(\int_0^x \big| f(t) \big|^{\mathsf{p}}\, dt \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_0^x 1^{\mathsf{p}'}\, dt \bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} = \| f \|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot x^{\frac{1}{\mathsf{p}'} - 1} = \| f \|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot x^{-\frac{1}{\mathsf{p}}} < \infty,
\end{aligned}$$

pour constater agréablement que la valeur de $T(f)(x)$ est finie en tout $x > 0$.

(c) En effet, une différentiation par rapport à x de la définition $T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t)\, dt$ — justifiée car avec $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$, le cours a montré que $x \longmapsto \int_0^x g(t)\, dt$ est $\mathscr{C}^1$ — donne :

$$\begin{aligned}
T(g)'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x g(t)\, dt + \frac{1}{x}\, g(x) \\
&= -\frac{1}{x}\, T(g)(x) + \frac{1}{x}\, g(x),
\end{aligned}$$

ce qu'on peut ré-écrire :

$$\big(x\, T(g)(x) \big)' = g(x),$$

ou encore :

$$0 = -\, x\, T(g)'(x) - T(g)(x) + g(x).$$

(d) Comme $g \in \mathscr{C}_c^0\big(]0, \infty[, \mathbb{C}\big)$ est supposée à support dans $[a, A]$ avec $0 < a \leqslant A < \infty$, on a clairement :

$$\forall\, 0 < x < a \quad T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x 0 = 0,$$

puis, pour $a \leqslant x$, toujours grâce à Hölder :

$$\begin{aligned}\big|T(g)(x)\big| &= \frac{1}{x}\left|\int_a^x g(t)\,\mathbf{1}_{[a,A]}(t)\,dt\right| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\left(\int_a^x \big|g(t)\big|^{\mathsf{p}}\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\left(\int_a^x \big(1_{[a,A]}(t)\big)^{\mathsf{p}'}\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\ &\leqslant \frac{1}{x}\left(\int_a^A \big|g(t)\big|^{\mathsf{p}}\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\left(\int_a^A 1\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\ &= \frac{1}{x}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\cdot\big(A-a\big)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}.\end{aligned}$$

(e) Toujours avec $\mathsf{supp}\, g \subset [a, A]$, grâce à cette inégalité :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{C}{x} \qquad\qquad (C \geqslant 0)$$

il est clair qu'en se souvenant de l'hypothèse $\mathsf{p} > 1$, on a un majorant qui tend vers zéro :

$$\begin{aligned}x\,\big|T(g)(x)\big|^{\mathsf{p}} &\leqslant x\,\frac{C^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}} \\ &= \frac{C^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}-1}} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

ce qui livre le résultat.

(f)

Grâce à la Question **(d)**, nous savons que :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{C}{x}\,\mathbf{1}_{[a,\infty[},$$

d'où :

$$\int_0^\infty \big|T(g)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \leqslant C^{\mathsf{p}}\int_a^\infty \frac{dx}{x^{\mathsf{p}}} = C^{\mathsf{p}}\,\frac{1}{a^{\mathsf{p}-1}} < \infty,$$

car $\mathsf{p} - 1 > 0$ depuis le début.

(g) Soit donc $g \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ à valeurs positives, ce qui entraîne que $T(g)(x) \geqslant 0$ aussi. Pour estimer :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_0^\infty \big|T(g)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\ &= \int_0^\infty 1\cdot\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx,\end{aligned}$$

on effectue effectivement une intégration par parties en prenant la primitive du facteur artificiel 1 :

$$\begin{aligned}\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \Big[x\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty x\,\mathsf{p}\,T(g)'(x)\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}-1}\,dx \\ \text{[Question (e)]}\qquad &= \underline{\lim_{x\to\infty} x\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}}} - \underline{0\,\big(T(g)(0)\big)^{\mathsf{p}}} - \text{même chose} \\ \text{[Question (c)]}\qquad &= 0 - \int_0^\infty \mathsf{p}\,\Big[g(x) - T(g)(x)\Big]\,\big(T(g)(x)\big)^{\mathsf{p}-1}\,dx \\ &= -\,\mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1} + \mathsf{p}\int_0^\infty T(g)^{\mathsf{p}}.\end{aligned}$$

(h) Une réorganisation de l'identité qui précède permet de la ré-écrire sous une forme où il devient avisé d'appliquer — encore elle ! — l'inégalité de Hölder :

$$
\begin{aligned}
(\mathsf{p}-1)\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1} \\
&\leqslant \mathsf{p}\bigg(\int_0^\infty g^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\bigg(\int_0^\infty T(g)^{(\mathsf{p}-1)\mathsf{p}'}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
[(\mathsf{p}-1)\mathsf{p}'=\mathsf{p}] \qquad &= \mathsf{p}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\bigg(\Big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
&= \mathsf{p}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}\big(\|T(g)\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}-1},
\end{aligned}
$$

ce qui conduit bien à :

$$
\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.
$$

(i) Soit donc $(g_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions positives $g_n \in \mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ satisfaisant $\|g_n - f\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, pour une certaine fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$. Alors pour tout $x>0$ fixé, l'inégalité de Hölder va encore abuser de ses charmes :

$$
\begin{aligned}
\big|T(g_n)(x) - T(f)(x)\big| = \big|T(g_n - f)(x)\big| &= \bigg|\frac{1}{x}\int_0^x \big(g_n(t)-f(t)\big)\cdot 1\,dt\bigg| \\
&\leqslant \frac{1}{x}\bigg(\int_0^x \big|g_n(t)-f(t)\big|^{\mathsf{p}}\,dt\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\bigg(\int_0^x 1^{\mathsf{p}'}\,dt\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
&= \frac{1}{x}\,\big\|g_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\,x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}} \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

(j) Par densité de $\mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ dans $L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$, si $f \in L^{\mathsf{p}}\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ est donnée, il existe une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $g_n \in \mathscr{C}_c^0\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$ telle que :

$$
0 = \lim_{n\to\infty}\big\|f - g_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.
$$

En utilisant le résultat de la question qui précède sous la forme :

$$
\liminf_{n\to\infty} T(g_n)(x) = \lim_{n\to\infty} T(g_n)(x) = T(f)(x) \qquad (\forall\, x>0),
$$

on peut majorer patiemment :

$$
\begin{aligned}
\Big(\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_0^\infty \big|T(f)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\
&= \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty}\big|T(g_n)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\
[\text{Fatou}] \qquad &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty \big|T(g_n)(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\
&\leqslant \liminf_{n\to\infty}\Big(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\Big)^{\mathsf{p}}\big(\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \\
[\text{Convergence des normes}] \qquad &\leqslant \Big(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\Big)^{\mathsf{p}}\big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},
\end{aligned}
$$

puisque la convergence supposée $\|g_n - f\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ en norme L^{p} implique la convergence dans $\mathbb{R}_+$ des normes L^{p} :

$$\|g_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

énoncé vrai dans n'importe quel espace vectoriel normée $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$:

$$\Big(\|y_n - x\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\Big) \implies \Big(\|y_n\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|x\|_E\Big),$$

ce dont on se convainc grâce à la majoration élémentaire :

$$\big|\|y_n\|_E - \|x\|_E\big| \leqslant \|y_n - x\|_E,$$

expliquée par inégalité triangulaire (signe opposé similaire) :

$$\|y_n\|_E - \|x\|_E = \big\|y_n - x + x\big\|_E - \|x\|_E \leqslant \|y_n - x\|_E + \underline{\|x\|_E}_{\circ} - \underline{\|x\|_E}_{\circ}.$$

(k) La fonction valeur absolue $|f|$ est encore dans L^{p}, et puisqu'elle prend des valeurs positives, la Question **(g)** s'applique à elle :

$$\big\|T(|f|)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\big\||f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

et puis, des majorations naturelles conduisent à la généralisation désirée de l'inégalité de Hardy :

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_0^\infty \left|\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right|^{\mathsf{p}} dx \\
&\leqslant \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x \big|f(t)\big|\,dt\right)^{\mathsf{p}} dx \\
&= \int_0^\infty \Big(T\big(|f|\big)(x)\Big)^{\mathsf{p}} dx \\
&= \Big(\big\|T\big(|f|\big)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\
&\leqslant \left(\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\right)^{\mathsf{p}} \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}},
\end{aligned}$$

dorénavant vraie pour les fonctions à valeurs complexes.

(l) Soit la fonction :

$$f(t) := \frac{1}{t^2}\,\mathbf{1}_{[1,\infty[}(t),$$

qui appartient à $L^1\big(]0,\infty[,\mathbb{R}_+\big)$. Sa transformée de Hardy vaut 0 pour $0 < x \leqslant 1$, et pour $x \geqslant 1$:

$$T(f)(x) = \frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \geqslant 0,$$

d'où pour $x \geqslant 2$:

$$T(f)(x) \geqslant \frac{1}{x}\,\frac{1}{2},$$

ce qui fait qu'elle ne peut pas être dans L^1.

(m) Pour $n \geqslant 1$ entier, soit donc la suite de fonctions :

$$f_n(t) := \frac{1}{t^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\,\mathbf{1}_{[1,n]}(t).$$

Leurs normes L^{p} valent :

$$\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} = \left(\int_1^n \frac{1}{t}\,dt\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} = \big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

Ensuite, leurs transformées de Hardy $T(f_n)(x)$, qui s'annulent bien sûr pour $0 < x \leqslant 1$ valent pour $1 \leqslant x \leqslant n$:

$$\begin{aligned} T(f_n)(x) &= \frac{1}{x}\int_1^x \frac{1}{t^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}\,dt = \frac{1}{x}\left[\frac{t^{-\frac{1}{\mathsf{p}}+1}}{-\frac{1}{\mathsf{p}}+1}\right]_1^x \\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}}{\frac{1}{\mathsf{p}'}} - \frac{1}{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\right) \\ &= \mathsf{p}'\,\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x}, \end{aligned}$$

et, par le même calcul dans lequel on remplace $\int_1^x$ par $\int_1^n$, ces transformées valent pour $n \leqslant x$:

$$T(f_n)(x) = \mathsf{p}'\,\frac{n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x}.$$

Alors l'expression exacte de la puissance p-ème de la norme L^{p} de $T(f_n)$ est :

$$\begin{aligned} \Big(\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_1^\infty \big(T(f_n)(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx \\ &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_1^n \frac{\big(x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}}\,dx + (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_n^\infty \frac{\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}}{x^{\mathsf{p}}}\,dx \\ &=: I_1(n,\mathsf{p}) + I_2(n,\mathsf{p}). \end{aligned}$$

La deuxième intégrale, positive, se calcule et se majore par une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant I_2(n,\mathsf{p}) &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}\left[\frac{x^{-\mathsf{p}+1}}{-\mathsf{p}+1}\right]_n^\infty \\ &= (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\big(n^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1\big)^{\mathsf{p}}\,\frac{1}{\mathsf{p}-1}\,\frac{1}{n^{\mathsf{p}-1}} \\ [\tfrac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'} = \mathsf{p}-1] \qquad &\leqslant (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\,\underline{n^{\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}'}}}\,\frac{1}{\mathsf{p}-1}\,\frac{1}{\underline{n^{\mathsf{p}-1}}} \\ &= \frac{(\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}}{\mathsf{p}-1}. \end{aligned}$$

Quant à la première, son intégrande a pour équivalent :

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}-1}{x}\right)^{\mathsf{p}} = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} - \frac{1}{x}\right)^{\mathsf{p}} \sim \frac{1}{x} \qquad \text{(lorsque } x \longrightarrow \infty),$$

donc :

$$I_1(n,\mathsf{p}) \underset{n\to\infty}{\sim} (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\int_1^n \frac{1}{x}\,dx \underset{n\to\infty}{\sim} (\mathsf{p}')^{\mathsf{p}}\log n,$$

ce qui donne :

$$\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \underset{n\to\infty}{\sim} \mathsf{p}'\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} = \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

Pour terminer, supposons comme suggéré qu'une constante $0 < C_{\mathsf{p}} < \infty$ dépendant de p satisfasse :

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_{\mathsf{p}}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})).$$

En appliquant cela à nos fonctions $(f_n)_{n=1}^{\infty}$:

$$\big\|T(f_n)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_{\mathsf{p}}\,\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}} \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

grâce à l'équivalent que nous venons d'obtenir :

$$\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \leqslant C_{\mathsf{p}}\,\big(\log n\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}},$$

nous concluons que :

$$\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1} \leqslant C_{\mathsf{p}}.$$

(n) Le cas $\mathsf{p} = \infty$ devrait donner à la limite, puisque $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1} \longrightarrow 1$ quand $\mathsf{p} \longrightarrow \infty$:

$$\big\|T(f)\big\|_{L^\infty} \leqslant \|f\|_{L^\infty},$$

et ceci est effectivement vrai, puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\big|T(f)(x)\big| &= \frac{1}{x}\,\bigg|\int_0^x f(t)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \frac{1}{x}\,x\,\|f\|_{L^\infty]0,x[} \\ &\leqslant \|f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Exercice 5. (a) Soit donc $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables positives intégrables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ convergeant ponctuellement presque partout vers une certaine fonction-limite intégrable :

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad\qquad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d),$$

elle aussi positive qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Soit aussi la suite auxiliaire :

$$g_n := \min\big(f_n, f\big) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

d'où :

$$0 \leqslant g_n \leqslant f_n \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant g_n \leqslant f.$$

Nous affirmons que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} g_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \min\big(f_n(x), f(x)\big) \\ &= f(x) \qquad\qquad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d);\end{aligned}$$

en effet, l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon$$

garantit aussi dans les deux cas possibles :

$$\big|g_n(x) - f(x)\big| = \begin{cases} |f(x) - f(x)| = 0 \leqslant \varepsilon, \\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant :

$$\liminf_{n\to\infty} g_n \;=\; \lim_{n\to\infty} g_n \;=\; f,$$

l'inégalité de Fatou — qui s'applique car les $g_n \geqslant 0$ sont positives — donne :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} g_n(x)\,dx \\
\text{[Fatou]} \qquad &\leqslant\; \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \\
\text{[Trivial]} \qquad &\leqslant\; \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, une intégration de l'inégalité $g_n \leqslant f$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \;=\; \text{constante} \;<\; \infty,$$

d'où en prenant la limite supérieure :

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx,$$

et ces deux inégalités mises bout à bout impliquent qu'on a partout égalité, ce qui offre le résultat demandé :

$$\liminf \;=\; \limsup \;=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx.$$

(b) Nous observons que :

$$\big|f_n - f\big| \;=\; f_n + f - 2\min\big(f_n, f\big),$$

car lorsque $f_n \geqslant f$, on a bien :

$$f_n - f \;=\; f_n + f - 2\,f,$$

et quand $f_n \leqslant f$, on a bien aussi :

$$f - f_n \;=\; f_n + f - 2\,f_n.$$

Alors par intégration, le résultat **(a)** qui précède termine aisément :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx \;&=\; \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx - 2\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x)\,dx \\
&=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx - 2\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx \\
&=\; 0!
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \geqslant 1$, la fonction :

$$h_n(x) \;:=\; n^d\,\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[}(x) - n^d\,\mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},0[}(x)$$

prend, en $x = 0$, visiblement la valeur $h_n(0) = 0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d \backslash \{0\}$ quelconque. Dès que l'une de ses coordonnées $x_i \neq 0$ non nulle satisfait :

$$|x_i| \geqslant \frac{1}{n} \qquad\qquad (\exists\, 1 \leqslant i \leqslant d),$$

à savoir dès que :

$$n \geqslant \frac{1}{|x_i|},$$

on a $h_n(x) = 0$, ce qui montre la convergence simple :

$$0 = \lim_{n\to\infty} h_n(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d).$$

Ensuite, il est clair que :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} h_n(x)\,dx &= n^d\, m\big(]0, \tfrac{1}{n}[\big) - n^d\, m\big(]-\tfrac{1}{n}, 0[\big)\\ &= n^d\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d - n^d\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d\\ &= 0.\end{aligned}$$

L'interprétation à conduire est de réaliser que sans l'hypothèse $h_n \geqslant 0$, le résultat de la Question **(a)** peut être mis en défaut.

(d) Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Pour $\mathsf{p} = 1$:

$$\big\|h_n\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = n^d\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d + n^d\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d = 2 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

et pour $1 < \mathsf{p} < \infty$:

$$\begin{aligned}\Big(\big\|h_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)}\Big)^{\mathsf{p}} &= (n^d)^{\mathsf{p}}\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d + (n^d)^{\mathsf{p}}\,\big(\tfrac{1}{n}\big)^d\\ &= 2\,n^{d(\mathsf{p}-1)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.\end{aligned}$$

En conclusion, on n'a donc jamais convergence vers 0 dans $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(h_n)_{n=1}^{\infty}$.

Exercice 6. (a) D'après un théorème du cours, $\mathscr{C}_c^0(]0,1[)$ est dense dans $L^2(]0,1[)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, et il en va de même pour $\mathscr{C}_c^1(]0,1[)$ — en fait, le cours a traité cela, et même établi la densité de $\mathscr{C}_c^\infty$ dans tous les L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

Lorsque $f \in \mathscr{C}_c^1$, une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx &= \Big[f(x)\,\varphi(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 f'(x)\,\varphi(x)\,dx\\ \scriptstyle{[f(0)=\varphi(0)=f(1)=\varphi(1)=0]}\qquad &= 0 - 0 - \int_0^1 \underbrace{f'(x)}_{=:\,\Lambda_f(x)}\,\varphi(x)\,dx\end{aligned}$$

montre qu'on peut prendre la dérivée (continue) de f comme fonction associée Λ_f, donc $\mathscr{C}_c^1 \subset \mathscr{S}$, et ainsi, $\mathscr{S}$ est *a fortiori* dense dans L^2.

(b) Établissons tout d'abord que la correspondance :

$$f \longmapsto \Lambda_f \qquad\qquad (f \in \mathscr{S})$$

est linéaire.

En fait, lorsqu'elle existe, *i.e.* lorsque $f \in \mathscr{S}$, la fonction Λ_f satisfaisant :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\, \varphi \in \mathscr{C}_c^1),$$

est unique, car si $\Lambda_f^\sim$ est une autre telle fonction, après soustraction évidente, on obtient les annulations :

$$0 \,=\, -\int_0^1 \Big(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x)\Big)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{C}_c^1),$$

et par densité de $\mathscr{C}_c^1$ dans L^2, on déduit pour toute $g \in L^2$ que :

$$0 \,=\, \int_0^1 \Big(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x)\Big)\,g(x)\,dx,$$

d'où $\Lambda_f^\sim = \Lambda_f$ en choisissant $g := \Lambda_f^\sim - \Lambda_f$ pour trouver l'annulation d'une norme L^2 qui implique l'annulation (presque partout) de la fonction.

Grâce à cette unicité, et grâce à la linéarité des intégrales qui définissent Λ_f, on vérifie maintenant aisément que :

$$f_1 + f_2 \,\longmapsto\, \Lambda_{f_1} + \Lambda_{f_2} \qquad\quad \text{et que :} \qquad\quad \mu\,f \,\longmapsto\, \mu\,\Lambda_f.$$

Une fois acquise cette linéarité de $f \longmapsto \Lambda_f$, des raisonnements élémentaires standard vus en cours montrent la bilinéarité :

$$\langle f, g\rangle_{\mathscr{S}} \,:=\, \int_0^1 f(x)\,g(x)\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)\,\Lambda_g(x)\,dx.$$

Enfin, pour conclure, on a bien positivité :

$$\langle f, f\rangle_{\mathscr{S}} \,=\, \int_0^1 f(x)^2\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)^2\,dx \,\geqslant\, 0,$$

et annulation $0 = \langle f, f\rangle_{\mathscr{S}}$ si et seulement si $f(x) = 0$ presque partout, d'ailleurs seulement grâce à $0 = \int_0^1 f^2$.

(c) Pour établir la complétude de $\big(\mathscr{S}, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathscr{S}}\big)$, soit donc $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n_1, n_2 \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \;\;\Longrightarrow\;\; \big\|f_{n_1} - f_{n_2}\big\|_{\mathscr{S}} \leqslant \varepsilon\Big),$$

à savoir :

$$\int_0^1 \big(f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x)\big)^2\,dx + \int_0^1 \Big(\Lambda_{f_{n_1}}(x) - \Lambda_{f_{n_2}}(x)\Big)^2\,dx \,\leqslant\, \varepsilon^2.$$

Or ceci implique manifestement la « *cauchycité* » dans L^2 :

$$\big\|f_{n_1} - f_{n_2}\big\|_{L^2} \,\leqslant\, \varepsilon,$$

et comme L^2 est complet, il existe une limite $f \in L^2$:

$$\big\|f - f_n\big\|_{L^2} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.$$

De même, la suite $\big(\Lambda_{f_n}\big)_{n=1}^\infty$ de L^2 étant tout aussi de Cauchy grâce à la même inégalité, comme L^2 est complet, il existe une limite $g \in L^2$:

$$\big\|g - \Lambda_{f_n}\big\|_{L^2} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.$$

Il reste encore à démontrer que $g = \Lambda_f$.

À cette fin, en revenant aux identités intégrales qui définissent les Λ_{f_n} :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\varphi'(x)\,dx \,=\, -\int_0^1 \Lambda_{f_n}(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad\qquad (\forall\,\varphi\in\mathscr{C}_c^1),$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que le membre de gauche et le membre de droite tendent respectivement vers :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx \;=\; -\int_0^1 g(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

ce qui montre que $f \in \mathscr{S}$, avec $\Lambda_f = g$.

Exercice 7. Pour vérifier l'orthonormalité, étant donné deux couples (i, i') et (j, j') d'indices entiers $\geqslant 1$, le théorème de Fubini-Tonelli permet de décomposer l'intégrale :

$$\begin{aligned}\big\langle \varphi_i(x)\psi_j(y),\, \varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y)\big\rangle_{L^2(R^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2})} &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y)\,\overline{\varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y)}\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x)\,\overline{\varphi_{i'}(x)}\,dx \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{\psi_{j'}(y)}\,dy \\ &= \delta_{i'}^i\,\delta_{j'}^j \\ &= \delta_{i',j'}^{i,j}.\end{aligned}$$

Ensuite, pour vérifier la complétude, il s'agit de montrer que toute fonction :

$$h(x,y) \;\in\; L^2\big(\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}\big)$$

qui est orthogonale à toutes les $\varphi_i(x)\psi_j(y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}\times\mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x)\,\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dy}_{=:\overline{g(x)}} \qquad\qquad (\forall\, i, \forall\, j),\end{aligned}$$

est nécessairement nulle (presque partout). Mais alors, la fonction (mesurable) $g(x)$ qui apparaît ci-dessus est orthogonale à toutes les φ_i, donc par totalité de la base hilbertienne $\big(\varphi_i(x)\big)_{i=1}^{\infty}$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_1})$, il vient, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \;=\; \overline{g(x)} \;=\; \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y)\,\overline{h(x,y)}\,dy \qquad\qquad (\forall\, j),$$

et à nouveau de manière similaire par totalité de la base hilbertienne $\big(\psi_j(y)\big)_{j=1}^{\infty}$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_2})$, il vient :

$$h(x,y) \;=\; 0 \qquad\qquad \text{(presque partout)}.$$

5. Examen 3

Exercice 1. [Convergence en mesure] On dit qu'une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonction $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonctions mesurables définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ *converge en mesure* vers une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} m\big(\{x \in E \colon\, |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big).$$

(a) Lorsque f_n converge en norme L^1 vers une fonction $f \in L^1(E,\mathbb{C})$, montrer que f_n converge en mesure vers f, et généraliser ensuite cela aux espaces L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(b) Avec l'hypothèse supplémentaire que $m(E) < \infty$, montrer que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une fonction f, alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi en mesure vers f.

(c) En considérant la suite de fonctions sur $\mathbb{R}_+$:

$$g_n(x) \,:=\, \frac{x}{n}\,\mathbf{1}_{[0,n^2]}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

montrer que l'hypothèse $m(E) < \infty$ dans **(b)** est en général nécessaire.

Exercice 2. Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable intégrable satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} f \in]0,\infty[$. Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On introduit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$a_n \,:=\, \int_{\mathbb{R}^d} n \log\left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right] dx,$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Montrer que $m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, f(x) \neq 0\}\big) > 0$, où m désigne la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer que $\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$. Indication: Utiliser le théorème de Fatou après en avoir soigneusement rappelé l'énoncé exact.

(c) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $\int f = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(d) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $0 = \lim_{n\to\infty} a_n$. Indication: Montrer que la fonction $y \longmapsto \frac{\log(1+y^{\alpha})}{y}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, K(\varepsilon) \gg 1 \qquad \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K(\varepsilon)\}} \,\leqslant\, \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).$$

(a) Pour une constante réelle fixée $K > 0$, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| \leqslant K\}}\right).$$

(b) Montrer, pour tout entier $p \geqslant 1$, que :

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\}} \;\leqslant\; \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \int_0^1 \big|f_n\big| \cdot \mathbf{1}_{\big\{|f_n| > K\big\}}.$$

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}} \;\leqslant\; \sum_{1 \leqslant n \leqslant p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}},$$

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une grande constante réelle $K(\varepsilon) \gg 1$ telle que :

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \Big(\sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\}} \;\leqslant\; \varepsilon \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant 1).$$

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{p \to \infty} \bigg(\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leqslant p} \big|f_n\big|\bigg).$$

Exercice 4. Pour $y \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$I(y) \;:=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\, dx.$$

(a) Calculer $I(y)$ et montrer que $y \longmapsto I(y)$ est une fonction continue bornée.

(b) Soit $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Pour $x \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$g_n(x) \;:=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}.$$

Montrer que la suite numérique $\big(\int_0^1 g_n(x)\, dx\big)_{n=1}^{\infty}$ est bornée.

(c) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement vers une certaine fonction g_∞ mesurable et intégrable sur $[0,1]$.

(d) Montrer que la série de fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,\infty]$:

$$x \;\longmapsto\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}$$

converge presque partout vers une fonction finie.

(e) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite à valeurs dans $[0,1]$ qui est dense dans $[0,1]$, alors la fonction g_∞ est discontinue en presque tout point.

(f) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ est à valeurs dans $[2,\infty]$, alors la fonction g_∞ est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 5. [Lemme d'Austin] Un ensemble qui est réunion $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ d'intervalles ouverts non vides $I_i \subset \mathbb{R}$ est toujours de mesure :

$$m(I_1 \cup \cdots \cup I_n) \;\leqslant\; m(I_1) + \cdots + m(I_n).$$

Montrer qu'il existe une sous-famille d'intervalles deux à deux *disjoints* $I_{i_1}, \dots, I_{i_k}$ pour certains indices appropriés $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ tels que :

$$m(I_{i_1}) + \cdots + m(I_{i_k}) \;=\; m\big(I_{i_1} \cup \cdots \cup I_{i_k}\big) \;\geqslant\; \frac{1}{3}\, m\big(I_1 \cup \cdots \cup I_n\big).$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) Soit donc $\delta > 0$ fixé. On travaille directement dans L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$. Si on abrège, pour $n \geqslant 1$:

$$E_{n,\delta} := \big\{x \in E\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\},$$

il vient :

$$\delta^{\mathsf{p}}\, \mathbf{1}_{E_{n,\delta}}(x) \leqslant \big|(f_n - f)(x)\big|^{\mathsf{p}} \qquad\qquad (\forall\, x \in E),$$

ce qui, après intégration, donne :

$$\begin{aligned}\delta^{\mathsf{p}}\, m\big(E_{n,\delta}\big) &\leqslant \int_E \big|f_n(x) - f(x)\big|^{\mathsf{p}}\, dx \\ &\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,\end{aligned}$$

et comme on peut diviser par la constante non nulle $\delta^{\mathsf{p}} > 0$, on obtient bien :

$$\lim_{n\to\infty} m\big(E_{n,\delta}\big) = 0.$$

(b) Pour tout $\delta > 0$ fixé, le but, sur $E \subset \mathbb{R}$ de mesure finie, si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge simplement presque partout vers une certaine fonction mesurable f, est d'atteindre :

$$0 = \lim_{n\to\infty} m\big(E_{n,\delta}\big) = \lim_{n\to\infty} \big(\{x \in E\colon\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\}\big),$$

autrement dit, d'établir que :

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N(\varepsilon) \implies m\big(E_{n,\delta}\big) \leqslant \varepsilon\Big).$$

À cette fin, pour $N \geqslant 1$ entier, introduisons les ensembles :

$$G_N := \big\{x \in E\colon\ |f_n(x) - f(x)| < \delta,\ \forall\, n \geqslant N\big\},$$

qui sont emboîtés (exercice mental) :

$$G_N \subset G_{N+1} \qquad\qquad (\forall\, N \geqslant 1),$$

et qui remplissent :

$$E = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N,$$

parce que (exercice mental avec solution), en tout point $x \in E$, l'hypothèse de convergence simple s'écrit :

$$\exists\, N(x,\delta) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant N(x,\delta) \implies \big|f_n(x) - f(x)\big| < \delta\ \ \forall\, n \geqslant N(x,\delta)\Big).$$

Les complémentaires :

$$\begin{aligned}F_N &:= \big\{x \in E\colon\ \exists\, n \geqslant N,\ |f_n(x) - f(x)| \geqslant \delta\big\} \\ &= \bigcup_{n \geqslant N} E_{n,\delta},\end{aligned}$$

sont alors décroissants :

$$F_N \,=\, E\backslash G_N \,\subset\, E\backslash G_{N+1} \,=\, F_{N+1} \qquad\qquad (\forall\, N \geqslant 1),$$

et comme :

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N \,=\, E \Big\backslash \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N \,=\, \emptyset,$$

en tenant compte de l'hypothèse qu'ils sont tous contenus dans l'ensemble E de mesure *finie*, un théorème du cours donne :

$$\lim_{N\to\infty} m\big(F_N\big) \,=\, m\bigg(\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N\bigg) \,=\, 0,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$m\big(F_{N(\varepsilon)}\big) \,\leqslant\, \varepsilon.$$

Alors la conclusion s'offre à nous, car maintenant, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} m\big(E_{n,\delta}\big) \,&=\, m\bigg(\bigcup_{n\geqslant N(\varepsilon)} E_{n,\delta}\bigg) \\ &=\, m\big(F_{N(\varepsilon)}\big) \\ &\leqslant\, \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Sur $E = \mathbb{R}_+$, ensemble de mesure infinie, la suite de fonctions *positives :*

$$g_n(x) \,:=\, \tfrac{x}{n} \cdot \mathbf{1}_{[0,n^2]}(x) \qquad\qquad (x\in\mathbb{R}_+,\, n\geqslant 1),$$

est manifestement encadrée par :

$$0 \,\leqslant\, g_n(x) \,\leqslant\, \tfrac{x}{n} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0,$$

ce qui montre la convergence simple vers la fonction nulle $g := 0$.

Toutefois, elle ne converge *pas* en mesure vers la fonction $g = 0$, car si $\delta > 0$ est fixé :

$$\begin{aligned} m\big(\{x \in \mathbb{R}_+ \colon\, g_n(x) \geqslant \delta\big) \,&=\, m\big(\{0 \leqslant x \leqslant n^2 \colon\, \tfrac{x}{n} \geqslant \delta\}\big) \\ &=\, m\big(\{\delta n \leqslant x \leqslant n^2\}\big) \\ &=\, n\,(n-\delta) \end{aligned}$$

ne tend pas vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$ — et même bien pire, diverge vers l'infini !

Exercice 2. **(a)** Si on avait au contraire :

$$0 \,=\, m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, f(x) \neq 0\}\big),$$

on aurait $0 = \int_{\mathbb{R}^d} f$, en contradiction avec l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^d} f \in \,]0, \infty[$.

(b) Tout d'abord, le théorème de Fatou énonce que si une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *ne prend que des valeurs positives* — hypothèse importante —, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \,\leqslant\, \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx.$$

Ici, comme la mesure de $\{x \in \mathbb{R}^d \colon f(x) > 0\}$ est strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble :

$$E_\delta \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\, f(x) \geqslant \delta\big\}$$

est de mesure strictement positive :

$$m(E_\delta) > 0,$$

car $m(\{f > 0\}) > 0$ et car $\{f > 0\} = \cup_{n=1}^\infty \{f > \frac{1}{n}\}$.

Maintenant, supposons que l'exposant α dans :

$$\begin{aligned} a_n &:= \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx \\ &\geqslant \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx, \end{aligned}$$

satisfait $0 < \alpha < 1$. Comme $\log(1+x) \sim x$ pour x proche de 0, et comme $n\left(\frac{\delta}{n}\right)^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$, il vient :

$$\lim_{n\to\infty} n \log \left[1 + \left(\frac{\delta}{n}\right)^\alpha\right] = \infty,$$

et nous pouvons donc minorer :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx \\ \text{[Fatou !]} \qquad &\geqslant \int_{E_\delta} \liminf_{n\to\infty} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx \\ &\geqslant \int_{E_\delta} \lim_{n\to\infty} n \log \left[1 + \left(\frac{\delta}{n}\right)^\alpha\right] dx \\ &= m(E_\delta) \cdot \infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(c) Lorsque $\alpha = 1$, l'inégalité classique $\log(1+y) \leqslant y$ valable pour tout $y \geqslant 0$ — en fait pour tout $y > -1$, mais notre $y := f(x)$ est ici $\geqslant 0$ — donne :

$$n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n}\right] \leqslant f(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^d),$$

d'où par intégration :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n}\right] dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx \qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

ce qui montre en particulier que tous ces $a_n < \infty$ sont finis.

Pour l'inégalité inverse, c'est encore et à nouveau Fatou qui nous appelons à la rescousse :

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} a_n &\geqslant \liminf_{n\to\infty} \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n}\right] dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n\to\infty} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n}\right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, dx, \end{aligned}$$

cette dernière limite inférieure étant une vraie limite.

(d) Supposons enfin que $\alpha > 1$, et commençons par vérifier, comme cela a été suggéré, que la fonction :

$$y \longmapsto \frac{\log\left(1+y^\alpha\right)}{y}$$

est bornée sur $\mathbb{R}_+$.

En effet, elle est $\mathscr{C}^\infty$ — donc $\mathscr{C}^0$ — sur $]0,\infty[$, et quand $y \overset{>}{\longrightarrow} 0$, l'équivalent $\log(1+y) \sim y$ donne le prolongement par continuité :

$$\frac{\log\left(1+y^\alpha\right)}{y} \underset{y\to 0}{\sim} y^{\alpha-1} \underset{y\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

tandis que, lorsque $y \longrightarrow \infty$:

$$\frac{\log\left(1+y^\alpha\right)}{y} \underset{y\to\infty}{\sim} \frac{\alpha\log y}{y} \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par conséquent, il existe une constante $0 < C_\alpha < \infty$ telle que :

$$(0 \leqslant) \quad \log\big(1+y^\alpha\big) \leqslant C_\alpha\, y \qquad\qquad (\forall\, y \in\,]0,\infty[).$$

Ici appliquée à $y := \frac{f(x)}{n}$, cette inégalité montre que les intégrandes des a_n sont uniformément dominées par une fonction-majorante :

$$n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \leqslant n\,C_\alpha\,\frac{f(x)}{n} = C_\alpha\, f(x),$$

qui est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, puisque f avait été supposée l'être, ce qui permet premièrement de constater agéablement la finitude de tous ces :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^d} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] dx \leqslant C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,dx < \infty,$$

et deuxièmement, en appliquant le théorème de convergence dominée, après avoir furtivement observé l'annulation des limites ponctuelles en tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé :

$$(0 \leqslant) \quad n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right] \leqslant \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha-1}}\big(f(x)\big)^\alpha \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

de conclure que :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\lim_{n\to\infty} n\log\left[1+\left(\frac{f(x)}{n}\right)^\alpha\right]\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 0 = 0.\end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Pour toute constante réelle fixée $0 < K < \infty$, et tout entier $p \geqslant 1$, on a clairement :

$$\sup_{n\leqslant p}|f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|\leqslant K\}} \leqslant K \qquad\qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

d'où après intégration la majoration permettant de déterminer la limite demandée :

$$\begin{aligned}\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}|f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p}|f_n|\leqslant K\}}(x)\,dx\right) &\leqslant \lim_{p\to\infty}\frac{1}{p}K\int_0^1 dx \\ &= 0.\end{aligned}$$

(b) Fixons un point $x \in [0,1]$, et choisissons un entier $m = m(x)$ avec $1 \leqslant m \leqslant p$ réalisant :

$$\big|f_m(x)\big| = \sup_{1\leqslant n\leqslant p} \big|f_n(x)\big|,$$

d'où :

$$\big|f_n(x)\big| \leqslant \big|f_m(x)\big| \qquad (\forall\, 1\leqslant n\leqslant p),$$

puis :

$$\big|f_n(x)\big| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}}(x) \leqslant \big|f_m(x)\big| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}}(x) \qquad (\forall\, 1\leqslant n\leqslant p).$$

Lorsque $|f_m(x)| \leqslant K$, le membre de droite vaut 0, il est donc inférieur à toute quantité positive.

Lorsque $\big|f_m(x)\big| > K$, on poursuit la majoration du membre de droite :

$$\begin{aligned}
\big|f_n(x)\big| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}}(x) &\leqslant \big|f_m(x)\big| \cdot 1 \\
&= \big|f_m(x)\big| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_m|>K\}}(x) \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \big|f_n(x)\big| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}}(x),
\end{aligned}$$

puis en prenant le supremum sur $1 \leqslant n \leqslant p$ à gauche :

$$\Big(\sup_{n\leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}} \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}},$$

pour conclure par une simple intégration :

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K\}} \leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K\}},$$

(c) Soient donc $\varepsilon > 0$ et $K(\varepsilon) \gg 1$ comme dans l'hypothèse de cet exercice. Alors grâce à ce qui précède, que l'on divise par p :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p} |f_n|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K(\varepsilon)\}} &\leqslant \frac{1}{p}\sum_{1\leqslant n\leqslant p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n|>K(\varepsilon)\}} \\
&\leqslant \sum_{1\leqslant n\leqslant p} \varepsilon \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

(d) Il ne reste plus qu'à effectuer la synthèse de ce qui vient d'être vu. L'intégrale dont il faut déterminer la limite quand $p \longrightarrow \infty$ se découpe naturellement en deux morceaux, toujours avec $K = K(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p} |f_n| &= \frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|\leqslant K(\varepsilon)\}} + \frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|>K(\varepsilon)\}} \\
\text{[Questions (a) et (c)]} \qquad &\leqslant \underbrace{\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n\leqslant p} |f_n|\leqslant K(\varepsilon)\}}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}} + \varepsilon
\end{aligned}$$

et donc, il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que, pour tout $n \geqslant N(\varepsilon)$, on ait :

$$(0 \leqslant) \quad \frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p} |f_n| \,\leqslant\, \varepsilon+\varepsilon,$$

ce qui établit bien la « zéro-ité » annoncée de la limite.

Exercice 4. (a) Trois cas sont naturellement à distinguer.

• Lorsque $y \leqslant 0$:

$$I(y) \,=\, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx \,=\, \Big[2\sqrt{x-y}\Big]_0^1 \,=\, 2\sqrt{1-y}-2\sqrt{-y}.$$

• Lorsque $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} I(y) \,&=\, \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dx + \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}}\,dx \\ &=\, \Big[-2\sqrt{y-x}\Big]_0^y + \Big[2\sqrt{x-y}\Big]_y^1 \\ &=\, 2\sqrt{y}+2\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

• Lorsque $1 \leqslant y$:

$$I(y) \,=\, \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}}\,dx \,=\, \Big[-2\sqrt{y-x}\Big]_0^1 \,=\, 2\sqrt{y}-2\sqrt{y-1}.$$

Sur $]-\infty,0[\,\cup\,]0,1[\,\cup\,]1,\infty[$, la continuité de $y \longmapsto I(y)$ est claire, tandis qu'au premier point spécial 0 :

$$\lim_{y \underset{<}{\longrightarrow} 0} I(y) \,=\, 2\sqrt{1-0}-\sqrt{-0} \,=\, 2\sqrt{0}+2\sqrt{1-0} \,=\, \lim_{0 \underset{<}{\longleftarrow} y} I(y),$$

et au point spécial 1 :

$$\lim_{y \underset{<}{\longrightarrow} 1} I(y) \,=\, 2\sqrt{1}+2\sqrt{1-1} \,=\, 2\sqrt{1}-2\sqrt{1-1} \,=\, \lim_{1 \underset{<}{\longleftarrow} y} I(y).$$

Ainsi, $y \longmapsto I(y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier, donc bornée sur tout compact de $\mathbb{R}$. Mais comme, en utilisant $\sqrt{b}-\sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$, on a :

$$\lim_{-\infty \leftarrow y} I(y) \,=\, \lim_{-\infty \leftarrow y} 2\,\frac{1}{\sqrt{1-y}+\sqrt{-y}} \,=\, 0,$$

ainsi que :

$$\lim_{y\to\infty} I(y) \,=\, \lim_{y\to\infty} 2\,\frac{1}{\sqrt{y}+\sqrt{y-1}} \,=\, 0,$$

cette fonction $I(\cdot)$ est en fait bornée sur $\mathbb{R}$ tout entier.

(b) Ainsi donc, puisque :

$$\|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \,=\, \sup_{y\in\mathbb{R}} |I(y)| \,<\, \infty,$$

il devient aisé de majorer uniformément en $n \geqslant 1$ les intégrales sur $[0,1]$ des fonctions proposées :

$$g_n(x) \,:=\, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}\,\frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}} \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

où $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite quelconque de nombres réels, car en effet :

$$
\begin{aligned}
(0 \leqslant) \qquad \int_0^1 g_n(x)\,dx \;&=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}\,dx \\
&\leqslant\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\, I(y_k) \\
&\leqslant\; \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \\
&\leqslant\; \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6},
\end{aligned}
$$

en se souvenant que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ converge et vaut d'ailleurs $\frac{\pi^2}{6}$, comme nous l'a appris Euler.

(c) Tout d'abord, en tout point fixé $x \in [0,1]$, la limite ponctuelle :

$$
g_\infty(x) \;:=\; \lim_{n\to\infty} g_n(x)
$$

existe toujours dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, car les valeurs $g_n(x) \leqslant g_{n+1}(x)$ croissent, et la fonction-limite g_∞ est mesurable, grâce à un théorème fondamental du cours.

De plus, comme $0 \leqslant g_n \leqslant g_{n+1}$ partout sur $[0,1]$, pour tout $n \geqslant 1$, le théorème de convergence monotone s'applique et donne :

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g_\infty(x)\,dx \;=\; \int_0^1 \lim_{n\to\infty} g_n(x)\,dx \;&=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^1 g_n(x)\,dx \\
&\leqslant\; \|I\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6} \\
&<\; \infty,
\end{aligned}
$$

inégalité fort agréable qui établit l'intégrabilité sur $[0,1]$ de la fonction positive g_∞.

(d) Observant que la fonction g_∞ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est bien entendu donnée par :

$$
g_\infty(x) \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}},
$$

la finitude ainsi acquise de $\int g_\infty$ garantit alors, d'après un lemme du cours bien connu car très souvent utilisé, que les valeurs $0 \leqslant g_\infty(x) < \infty$ sont finies en presque tout point $x \in [0,1]$ — car sinon, si ces valeurs étaient infinies sur un ensemble de mesure strictement positive, on aurait $\int g_\infty = \infty$.

(e) D'après la Question **(d)**, la fonction :

$$
g_\infty(x) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x-y_n|}}
$$

prend des valeurs finies en presque tout point $x \in [0,1]$. Posons alors :

$$
D \;:=\; \big\{x \in [0,1] \colon\; g_\infty(x) < \infty\big\},
$$

et observons que $y_n \notin D$ car on a visiblement :

$$
g_\infty(y_n) \;=\; \infty \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1).
$$

Nous affirmons alors que :

$$D \subset \big\{x \in [0,1] \colon\ g_\infty \text{ n'est pas continue en } x\big\},$$

ce qui montrera que g_∞ est discontinue presque partout. En effet, par densité de $(y_n)_{n=1}^\infty$ dans $[0,1]$, tout point $x \in D$ est limite d'une certaine sous-suite $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$:

$$y_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x.$$

Si g_∞ était continue en x, elle serait nécessairement bornée dans un petit voisinage ouvert non vide de x (exercice mental), contredisant le fait que :

$$g_\infty\big(y_{n_k}\big) = \infty \qquad\qquad (\forall\, k \geqslant 1).$$

L'interprétation à retenir est qu'une fonction peut tout à fait être Lebesgue-intégrable, comme l'est g_∞, tout en étant *discontinue* presque partout.

(f) On suppose pour terminer au contraire que tous les y_n, avec $n \geqslant 1$, sont dans $[2,\infty[$, d'où :

$$y_n - x \geqslant 2 - 1 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1, \forall\, x \in [0,1]),$$

et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{y_n - x}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2-1}} = 1,$$

ce qui montre que la série :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\,\frac{1}{\sqrt{y_n - x}}\bigg|_{[0,1]}$$

est normalement, donc uniformément, convergente sur $[0,1]$, donc définit une fonction continue sur $[0,1]$, d'après un théorème classique connu.

Ensuite généralement, pour tout entier $\kappa \geqslant 0$, la dérivée κ-ème de la fonction $x \longmapsto (y_n - x)^{-1/2}$ vaut :

$$\big(-\tfrac{1}{2}\big)\big(-\tfrac{1}{2}-1\big)\cdots\big(-\tfrac{1}{2}-\kappa+1\big)\,\big(y_n - x\big)^{-\frac{1}{2}-\kappa} = \frac{\mathsf{constante}_\kappa}{(y_n-x)^{\kappa+\frac{1}{2}}},$$

et pour la même raison, on a les majorations uniformes par rapport à $x \in [0,1]$:

$$\bigg|\frac{d^\kappa}{dx^\kappa}\,\big[(y_n-x)^{-\frac{1}{2}}\big]\bigg| \leqslant \frac{|\mathsf{constante}_\kappa|}{1^{\kappa+\frac{1}{2}}},$$

qui garantissent la convergence normale-uniforme de la série dérivée terme à terme :

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{\sqrt{y_n - x}}\right)^{(\kappa)}\Bigg|_{[0,1]} \qquad\qquad (\kappa \geqslant 0),$$

donc grâce à un théorème connu, $g_\infty\big|_{[0,1]}$ est de classe $\mathscr{C}^\kappa$ pour tout $\kappa \geqslant 0$, donc est $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 5. Avec $n_1 := n$, on renote cette collection d'ouverts non vides :

$$I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1,$$

on sélectionne l'un d'entre eux $I_{i_1}^1$ de longueur maximale, on définit :

$$\widetilde{I_{i_1}^1} := 3\, I_{i_1}^1,$$

comme étant l'intervalle de même centre dilaté 3 fois, on supprime de la collection *tous* les I_j^1 avec $j \neq i_1$ qui *intersectent* $\widetilde{I}_{i_1}^1$, et on note, avec un certain entier $0 \leqslant n_2 \leqslant n_1 - 1$, la réunion des intervalles restants :

$$I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2.$$

Comme on a inclusion de tous les intervalles dans la réunion maintenant *disjointe :*

$$I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1 \subset \widetilde{I_{i_1}^1} \coprod \big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big),$$

il vient :

$$\begin{aligned} m\big(I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1\big) &= m\big(\widetilde{I}_{i_1}^1\big) + m\big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big) \\ &= 3\, m\big(I_{i_1}^1\big) + m\big(I_1^2 \cup \cdots \cup I_{n_2}^2\big). \end{aligned}$$

Ensuite, on répète ce procédé avec la collection restante, il se termine en un nombre fini $k \leqslant n$ d'étapes, et on obtient bien une sous-famille disjointe satisfaisant :

$$m\big(I_1 \cup \cdots \cup I_n\big) \leqslant 3\,\big(m(I_{i_1}) + \cdots + m(I_{i_k})\big).$$

7. Examen 4

Exercice 1. [Convergence monotone en théorie de Riemann] Sur un intervalle $[a, b] \Subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite de fonctions $f_n \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont toutes *décroissantes* sur $[a, b]$. On suppose que $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$ existe en tout point $x \in [a, b]$. L'objectif est d'établir que $\int_a^b f_n(x)\, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\, dx$, l'intégrale étant prise ici au sens de Riemann.

(a) Montrer que f est décroissante.

(b) Justifier que les f_n ainsi que f sont toutes Riemann-intégrables.

(c) Au moyen d'une figure soignée, esthétique et intelligente, faire voir sans mots qu'en un point $x_0 \in \,]a, b[$, la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas forcément décroissante, ni même croissante.

(d) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, dont on rappelera soigneusement la définition, satisfont :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(e) Montrer qu'il existe un entier $n = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon, \forall\, \kappa = 1, \dots, \nu).$$

(f) Toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon.$$

(g) Toujours et encore pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(h) Montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon),$$

(i) Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x)\, dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\, dx + 2\,\varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon),$$

et conclure.

Exercice 2. [Borel-Cantelli] Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant toutes $a_k \geqslant 0$ presque partout.

(a) Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Vérifier que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ presque partout.

(b) Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(c) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx \;=\; \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx.$$

(d) Sous l'hypothèse supplémentaire que la valeur du membre de gauche est $< \infty$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable *finie*.

(e) Soit maintenant une suite $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Montrer que l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Exercice 3. Pour $t > 0$, on pose :

$$k(t) \;:=\; \int_0^{\infty} e^{-t\,x}\,\frac{\sin x}{x}\,dx.$$

(a) Montrer que k est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(b) Montrer que $k'(t) = -\,\frac{1}{t^2+1}$.

(c) Calculer la limite de $k(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

(d) En déduire $k(t)$.

(e) Calculer la limite quand $t \longrightarrow 0$ de $k(t)$.

(f) La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable sur $[0,\infty[$ pour la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. [Théorie de la mesure, Question de cours] Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(a) Justifier brièvement qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point, avec $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$.

(b) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{k\to\infty} \big\|f - \varphi_k\big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Sans rappeler toute la démonstration mais en rappelant les idées, justifier soigneusement qu'il existe une famille finie de rectangle fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E \,\Delta\, \bigcup_{j=1}^{J} R_j\bigg) \;\leqslant\; \varepsilon.$$

(d) Montrer que :

$$\bigg\|\mathbf{1}_E - \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{\mathsf{Int}\,R_j}\bigg\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \;\leqslant\; \varepsilon.$$

(e) Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(f) Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(g) Comment étendre ces deux résultats à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$?

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soient deux nombres réels $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$.

(a) Pour $d = 1$, trouver un exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(\Omega) = \infty$ infinie tel que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C})$ n'est *pas* contenu dans $L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) Lorsque Ω est de mesure de Lebesgue *finie*, montrer au contraire que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(c) Toujours sous l'hypothèse $m(\Omega) < \infty$, montrer que :

$$\sup \big\{ \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \colon\ f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}),\ \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \,=\, 1 \big\} \,=\, \big(m(\Omega) \big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}}.$$

Indication: Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f \cdot 1$ avec un réel p_1 tel que $\mathsf{p}\,\mathsf{p}_1 = \mathsf{q}$.

Exercice 6. [Subdivisions verticales L^{p}] Étant donné une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, soit pour tout réel $\lambda \geqslant 0$ l'ensemble :

$$E_\lambda \,:=\, \big\{ x \in \mathbb{R} \colon\ f(x) \geqslant \lambda \big\}.$$

(a) Justifier la mesurabilité de ces E_λ.

(b) Montrer que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Pour tout exposant réel p avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x) \big)^{\mathsf{p}}\, dx \;=\; \mathsf{p} \int_{[0,\infty[} \lambda^{\mathsf{p}-1}\, m\big(E_\lambda\big)\, d\lambda.$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. Tous les éléments de cet exercice apparaissent déjà dans le cours.

Exercice 2. Il en va de même pour cet exercice, lui aussi conçu en vu de tester l'assimilation du cours.

Exercice 3. **(a)** Pour $t > 0$ et $x \geqslant 0$, posons :

$$f(t,x) \;:=\; e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme $t \longmapsto f(t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, de dérivée $-\,e^{-tx}\sin x$ majorée sur $[\varepsilon,\infty[$ par la fonction dominatrice uniforme en t :

$$\begin{aligned}\big|-e^{-tx}\sin x\big| &\leqslant e^{-\varepsilon x}\,|\sin x|\\ &\leqslant e^{-\varepsilon x},\end{aligned}$$

qui est intégrable sur $[0,\infty[$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique pour offrir le caractère $\mathscr{C}^1$ sur $[\varepsilon,\infty[$ de la fonction :

$$k(t) \;:=\; \int_0^\infty e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx,$$

avec en sus une formule pour sa dérivée :

$$k'(t) \;=\; \int_0^\infty -\,e^{-tx}\sin x\,dx.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ était prédestiné — par les dieux tout-puissants de la morphogénétique grecque — à tendre vers 0, nous concluons bien que la fonction k est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(b) Il suffit de calculer l'intégrale précédente, grâce à une primitivation évidente :

$$\begin{aligned}k'(t) \;=\; -\,\mathsf{Im}\left(\int_0^\infty e^{-tx}\,e^{ix}\,dx\right) &= -\,\mathsf{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t}\right]_0^\infty\right)\\ &= \mathsf{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right)\\ &= -\,\frac{1}{t^2+1}.\end{aligned}$$

(c) Pour tout $x > 0$ fixé, il est clair qu'on a la convergence ponctuelle :

$$f(t,x) \;=\; e^{-tx}\,\frac{\sin x}{x} \;\underset{t\to\infty}{\longrightarrow}\; 0.$$

De plus, en utilisant l'inégalité classique $|\sin x| \leqslant x$ valable pour $x \in [0,\infty[$, on a la majoration uniforme en $t \geqslant 1$:

$$\big|f(t,x)\big| \;=\; e^{-tx}\,\frac{|\sin x|}{x} \;\leqslant\; e^{-1\cdot x}\cdot 1,$$

par la fonction dominatrice $x \longmapsto e^{-x}$, intégrable sur $[0, \infty[$. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique, pour offrir :

$$k(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) On résout l'équation différentielle obtenue en **(b)** :

$$k'(t) = -\frac{1}{t^2+1},$$

par simple primitivation pour obtenir :

$$k(t) = -\operatorname{arctan}(t) + \mathsf{constante},$$

la condition à l'infini de **(c)** déterminant cette constante :

$$k(t) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctan} t \qquad\qquad (t>0).$$

(e) Il est alors clair que $k(t)$ se prolonge continûment en $t=0$, avec la belle valeur :

$$k(0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Ainsi, ce qui vient d'être acquis fournit la valeur de l'intégrale impropre au sens de Riemann :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty e^{-0}\,\frac{\sin x}{x}\,dx = \lim_{\mathrm{M}\to\infty}\int_0^{\mathrm{M}} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

limite dont on peut indépendamment démontrer qu'elle existe, car :

$$\sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

est une série alternée de terme général tendant vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$ (exercice), mais à proprement parler, $x \longmapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est *pas* intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$, car lorsqu'on prend les valeurs absolues :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,dx \\
&\geqslant \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi}\,dx \\
&= \int_0^\pi \sin x\,dx \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{2}{\pi}\cdot\infty,
\end{aligned}$$

on trouve un majorant qui vaut ∞ à cause de la divergence $\infty = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$ de la série harmonique.

Exercice 4. À nouveau et encore — mais c'est la dernière fois ! —, cet exercice, ce n'était que du cours !

Exercice 5. En dimension $d = 1$, prenons $\Omega := [1, \infty[$, satisfaisant comme suggéré $m(\Omega) = \infty$, et prenons un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$c\,\mathsf{p} < 1 < c\,\mathsf{q},$$

ce qui est possible car $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$ par hypothèse.

Alors grâce à la connaissance de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e}\,dx = \infty$ pour $e \leqslant 1$ et de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e}\,dx = \left[\frac{x^{-e+1}}{-e+1}\right]_1^\infty = \frac{1}{e-1}$ pour $e > 1$, on voit que :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^c}$$

n'appartient pas à $L^{\mathsf{p}}(\Omega)$, mais appartient à $L^{\mathsf{q}}(\Omega)$.

(b) Supposons donc maintenant l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure (de Borel-Lebesgue) *finie*, toujours avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$, et soit $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C})$.

Pour montrer que l'on a aussi $f \in L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$, l'astuce « *intersidérale* » à laquelle il fallait penser (y compris dans de nombreux autres contextes) consiste, afin d'atteindre $\int_\Omega |f|^{\mathsf{p}} < \infty$, à appliquer l'inégalité de Hölder en faisant naître un deuxième facteur artificiel anodin, le 1 :

$$\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} = \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \cdot 1,$$

tout en choisissant des exposants finement ajustés :

$$\mathsf{r} := \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{p}}, \qquad\qquad \frac{1}{\mathsf{r}} + \frac{1}{\mathsf{r}'} = 1, \qquad\qquad \mathsf{r}' = \frac{\mathsf{r}}{\mathsf{r}-1} = \frac{\mathsf{q}}{\mathsf{q}-\mathsf{p}},$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx &= \int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}} \cdot 1\,dx \\
\text{[Hölder]} \qquad &\leqslant \bigg(\int_\Omega \Big(\big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\Big)^{\mathsf{r}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}}} \cdot \bigg(\int_\Omega 1^{\mathsf{r}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}} \\
[\mathsf{pr} = \mathsf{q}] \qquad &= \bigg(\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{q}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{r}}} \cdot \underbrace{\Big(m(\Omega)\Big)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}}}_{\text{fini !}},
\end{aligned}$$

d'où en faisant apparaître les vraies normes L^{p} et L^{q} :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \leqslant \bigg(\Big(\big(||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)}\big)^{\mathsf{q}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{r}}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \Big(m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{r}'}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}$$

à savoir — exercice d'arithmétique élémentaire — :

$$\begin{aligned}
||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} &\leqslant \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot ||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

ce majorant étant fini, puisqu'on a supposé $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)$.

En fait, cette inégalité montre mieux, elle fait même voir (exercice mental) que l'injection :

$$L^{\mathsf{q}}(\Omega) \hookrightarrow L^{\mathsf{p}}(\Omega)$$

est continue, et que la topologie définie par la norme $||\cdot||_{L^{\mathsf{p}}}$ est plus fine que la topologie définie par la norme $||\cdot||_{L^{\mathsf{q}}}$.

On peut aussi faire voir (mais cela n'était pas demandé) que cette inclusion $L^{\mathsf{q}}(\Omega) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega)$ avec $m(\Omega) < \infty$ est toujours stricte, en s'inspirant, et en généralisant (exercice), le cas de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{1}{x^c},$$

sur $\Omega := [0,1] \subset \mathbb{R}$ en dimension $d = 1$, avec un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$c\,\mathsf{p} \,<\, 1 \,<\, c\,\mathsf{q},$$

puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \infty$ pour $e \geqslant 1$, et puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \big[\frac{x^{-e+1}}{-e+1}\big]_0^1 = \frac{1}{1-e}$ pour $e < 1$.

On pouvait aussi montrer directement l'inclusion $L^{\mathsf{q}}(\Omega) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega)$ lorsque $m(\Omega) < \infty$ en utilisant l'inégalité élémentaire (distinguer $|y| \leqslant 1$ et $|y| \geqslant 1$) :

$$|y|^{\mathsf{p}} \,\leqslant\, 1 + |y|^{\mathsf{q}} \qquad\qquad (\forall\, y \in \mathbb{R},\ 1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty),$$

d'où avec $y := f(x)$ et par intégration :

$$\begin{aligned}\int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \,&\leqslant\, m(\Omega) + \int_\Omega \big|f(x)\big|^{\mathsf{q}}\,dx \\ &<\, \infty.\end{aligned}$$

(c) Toutefois, c'était la première approche avec l'inégalité de Hölder qui était la plus adéquate, car dans l'inégalité générale obtenue à l'instant :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \,\leqslant\, \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot ||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)},$$

nous affirmons que la constante $\big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}}$ s'avère être optimale, *i.e.* être la plus petite constante $0 < C < \infty$ satisfaisant :

$$||f||_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \,\leqslant\, C \cdot ||f||_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} \qquad\qquad (\forall\, f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)),$$

comme on s'en convainc en réalisant qu'avec le choix « bête » de la fonction constante :

$$f \,:=\, m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}},$$

on a en fait *égalité* dans l'inégalité :

$$\begin{aligned}\bigg(\int_\Omega \Big(m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \,=\, \Big(m(\Omega)\cdot m(\Omega)^{-\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{q}}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \,&=\, m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot 1 \\ &=\, m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot \Big(m(\Omega)\cdot m(\Omega)^{-\frac{\mathsf{q}}{\mathsf{q}}}\Big)^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\ &=\, m(\Omega)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}} \cdot \bigg(\int_\Omega \Big(m(\Omega)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}\Big)^{\mathsf{q}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{q}}}.\end{aligned}$$

Exercice 6. **(a)** Comme $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty[$ est mesurable, pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble de surniveau :

$$E_\lambda \,:=\, \big\{x \in \mathbb{R}\colon\ f(x) \geqslant \lambda\big\}$$

est *par définition* mesurable.

(b) Un résultat du cours, obtenu dans le chapitre « *Fubini-Tonelli* », a fait voir qu'une fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ comme celle-ci est mesurable si et seulement si son hypographe :

$$E \,:=\, \big\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+\colon\ 0 \leqslant \lambda \leqslant f(x)\big\}$$

est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$.

Le théorème de Tonelli, appliqué à la fonction :

$$(x,\lambda) \longmapsto \mathbf{1}_E(x,\lambda),$$

nous assure alors que l'application $\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\lambda \longmapsto \int_{E_\lambda} 1 \cdot dx = m\big(E_\lambda\big),$$

est mesurable, puisque $\lambda \longrightarrow m(E_\lambda)$ est l'intégrale par rapport à la première variable x de la fonction $(x,\lambda) \longmapsto \mathbf{1}_E(x,\lambda)$.

(c) Pour terminer, avec un exposant réel $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, appliquons enfin le théorème de Tonelli à la fonction mesurable $\geqslant 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x,\lambda) &\longmapsto \mathsf{p}\,\lambda^{\mathsf{p}-1}\,\mathbf{1}_E(x,\lambda), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \mathsf{p}\int_0^\infty \lambda^{\mathsf{p}-1}\, m\big(E_\lambda\big)\,d\lambda = \int_0^\infty \mathsf{p}\,\lambda^{\mathsf{p}-1}\left(\int_{E_\lambda} 1\,dx\right)d\lambda &= \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+} \mathsf{p}\,\lambda^{\mathsf{p}-1}\,\mathbf{1}_E(x,\lambda)\,dxd\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty \mathsf{p}\,\lambda^{\mathsf{p}-1}\,\mathbf{1}_E(x,\lambda)\,d\lambda\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{f(x)} \mathsf{p}\,\lambda^{\mathsf{p}-1}\,d\lambda\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx, \end{aligned}$$

comme demandé.

9. Examen 5

Exercice 1. Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, si une fonction quelconque $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée, on rappelle qu'il existe une suite minimisante $(y_\ell^-)_{\ell=1}^\infty$ et une suite maximisante $(y_\ell^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E g = \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^-) \qquad\text{et}\qquad \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^+) = \sup_E g.$$

On suppose donnée une suite de fonctions bornées $f_n\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, qui convergent uniformément vers une certaine fonction $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\,n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \forall\,x \in E \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Si deux fonctions $h_1, h_2\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées satisfont :

$$h_1(x) \leqslant h_2(x) \qquad\qquad (\forall\,x\in E),$$

montrer que :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad\text{et}\qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Big|\inf_E f_n - \inf_E f\Big| \leqslant \varepsilon \qquad\text{et}\qquad \Big|\sup_E f_n - \sup_E f\Big| \leqslant \varepsilon.$$

On travaille dorénavant sur un intervalle réel $E = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste $\mathrm{N}(\varepsilon)$ pour que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \bigg(\forall\,x \in [a,b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\bigg).$$

Soit $g\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

(d) Si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$ est une subdivision quelconque de $[a, b]$ avec $\nu \geqslant 1$, rappeler les deux définitions des sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(g)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(g)$ de g.

(e) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Montrer que toute fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

(g) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Établir que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien réel standard $\mathbb{R}^d$ de dimension $d \geqslant 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une fonction $f\colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels est dite *mesurable* si *tous* ses ensembles de sous-niveau :

$$\big\{x \in E\colon\ f(x) < a\big\} \qquad\qquad (\forall\, a \in \mathbb{R}),$$

sont mesurables.

(a) Montrer que $\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant a\}$ est mesurable, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\{f = -\infty\}$ et $\{f = +\infty\}$ sont mesurables.

(c) Montrer, pour tous réels $-\infty < a < b < +\infty$, que l'ensemble :

$$\big\{x \in E\colon\ a < f(x) < b\big\}$$

est mesurable.

(d) Lorsque $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, montrer que f est mesurable si et seulement si l'image inverse $f^{-1}(\mathscr{O})$ par f de tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3. [Questions d'assimilation du cours] Énoncer précisément sans démonstrations :

(a) le théorème de Tonelli, suivi du théorème de Fubini, en explicitant l'articulation logique naturelle qui existe entre eux lorsqu'on doit les appliquer dans des situations concrètes ;

(b) le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures ;

(c) le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue ;

(d) le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dépendant d'un paramètre, en supposant que la dépendance par rapport au paramètre est $\mathscr{C}^1$.

Exercice 4. Soit dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable.

(a) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}\colon |f(x)| = \infty\}$ est de mesure nulle.

(b) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,n} \int_{-n}^{n} f(x)\, dx.$$

(c) En produisant un contre-exemple, montrer que cette limite n'est pas toujours égale à 0 (voire n'existe pas toujours) lorsque la fonction mesurable f n'est pas supposée intégrable.

(d) Maintenant, soit $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction $h := \lim_{n\to\infty} h_n$. Justifier que h est mesurable.

(e) On suppose de plus que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$. Après en avoir justifié l'utilisation, appliquer le Lemme de Fatou aux deux fonctions $g_n - h_n$ et $g_n + h_n$.

(f) Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $a_n \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\liminf_{n\to\infty} \big(-a_n\big) \;=\; -\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(g) Montrer l'implication :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\right) \;\Longrightarrow\; \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx\right).$$

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Établir l'équivalence :

$$\left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx \;=\; 0\right) \;\Longleftrightarrow\; \left(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)\big|\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\right).$$

Indication: Pour l'implication « $\Longleftarrow$ », introduire $g_n := 2\,\big(|f_n| + |f|\big)$ ainsi que $h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Pour l'implication « $\Longrightarrow$ », utiliser l'inégalité $\big||a| - |b|\big| \;\leqslant\; \big|a - b\big|$ valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit une fonction mesurable intégrable $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto e^{-xt}\,f(x)$ est aussi mesurable intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On introduit alors la *transformée de Laplace* de f :

$$L_f(t) \;:=\; \int_0^{\infty} e^{-xt}\,f(x)\,dx \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) \in \mathbb{R}$ est finie et continue.

(c) Montrer que $0 = \lim_{t\to\infty} L_f(t)$.

(d) Calculer une expression explicite de $L_f(t)$ pour $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$.

(e) Faire de même pour $f(x) := \mathbf{1}_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}} \cdot \sin(x)$.

(f) Soient maintenant un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\,f(x)\,dx \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,L_f(kn).$$

(g) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\,f(x)\,dx \;=\; \int_T^{\infty} f(x)\,dx.$$

(h) Soit un nombre réel $a > 0$. Établir qu'il n'existe pas de fonction mesurable intégrable f sur $\mathbb{R}_+$ dont la transformée de Laplace vaut $L_f(t) = e^{-at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

(i) Pour $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mesurable intégrable, montrer que $t \longmapsto L_f(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(j) Quand $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, montrer que :

$$\Big(x \longmapsto x\,f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big) \;\Longleftrightarrow\; \Big(t \longmapsto L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\Big).$$

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Faisons $\varepsilon := 1$, prenons $n := \mathrm{N}(1)$, et, pour tout $x \in E$, par majoration triangulaire, déduisons le résultat voulu :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x) + f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| + \big|f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant 1 + \sup_E \big|f_{\mathrm{N}(1)}\big| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

car par hypothèse, $f_{\mathrm{N}(1)}$ est bornée sur E !

(b) Clairement, de $h_1 \leqslant h_2$, on déduit pour tout $x \in E$ que :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_1(x) \leqslant h_2(x) \leqslant \sup_E h_2,$$

d'où deux extraits intéressants pour la suite :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_2(x) \qquad \text{et} \qquad h_1(x) \leqslant \sup_E h_2 \qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in E)}.$$

En prenant deux suites $(y_{2,\ell}^-)_{\ell=1}^\infty$ et $(y_{1,\ell}^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E h_2 = \lim_{\ell\to\infty} h_2\big(y_{2,\ell}^-\big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell\to\infty} h_1\big(y_{1,\ell}^+\big) = \sup_E h_1,$$

il vient comme désiré :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad \text{et} \qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) En appliquant le résultat de la question **(b)** qui précède aux deux inégalités :

$$f_n(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon \qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in \mathbb{E})},$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \inf_E f_n - \varepsilon &\leqslant \inf_E f, \\ \sup_E f_n - \varepsilon &\leqslant \sup_E f, \end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned} \inf_E f &\leqslant \inf_E f_n + \varepsilon, \\ \sup_E f &\leqslant \sup_E f_n + \varepsilon, \end{aligned}$$

d'où :

$$-\varepsilon \leqslant \inf_E f_n - \inf_E f \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad -\,\varepsilon \leqslant \sup_E f_n - \sup_E f \leqslant \varepsilon,$$

et on reconstitue l'inégalité demandée en se souvenant que $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$ pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Pour qui n'a pas oublié son cours :

$$\Sigma_\Delta(g) \,=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} g,$$
$$\Sigma^\Delta(g) \,=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} g.$$

(e) Grâce à la question **(c)** appliquée sur $E := [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, en tenant compte de la normalisation de l'epsilon, nous avons, pour tout $1 \leqslant \kappa \leqslant \nu$:

$$\inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \,\leqslant\, \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f,$$

ainsi que :

$$\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f \,\leqslant\, \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned}
\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \,&=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \varepsilon \\
&=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \\
&=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}\right] \\
&\leqslant\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f \\
&=\, \Sigma_\Delta(f),
\end{aligned}$$

ce qui est la première inégalité demandée.

La seconde inégalité $\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f)$, abondamment vue en cours, est essentiellement évidente, donc pourrait être revue en instantané ici en notant que l'infimum de f sur chaque intervalle $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ est bien entendu majoré par son supremum sur ce même segment.

Pour ce qui est de la troisième inégalité, on procède de manière similaire quoique légèrement différente :

$$\begin{aligned}
\Sigma^\Delta(f) \,&=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f \\
&\leqslant\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}\right] \\
&=\, \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1},x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \\
&=\, \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de :

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \,\leqslant\, \Sigma_\Delta(f) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f) \,\leqslant\, \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Soit comme ci-dessus $f = \lim f_n$, la convergence étant uniforme sur $[a,b]$. L'objectif est de trouver, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, une subdivision Δ de $[a,b]$ assez fine pour que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant 3\,\varepsilon.$$

Rien de plus facile ! Sachant que pour tout quadruplet de nombres réels :

$$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \beta,$$

le petit segment $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ a une longueur inférieure au grand :

$$\delta - \gamma \leqslant \beta - \alpha,$$

on tire des inégalités de la question précédente, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \Sigma^{\Delta}(f_n) - \Sigma_{\Delta}(f_n) + 2\,\varepsilon,$$

puis en prenant $n := \mathrm{N}(\varepsilon)$, il suffit de choisir Δ telle que :

$$\Sigma^{\Delta}\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) - \Sigma_{\Delta}\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est possible, puisque $f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}$ est Riemann-intégrable par hypothèse !

(g) Dans le cours, on a démontré que les fonctions en escalier sont Riemann-intégrables, donc la dernière question **(f)** vient d'établir que leurs limites uniformes — les fonctions réglées — sont aussi Riemann-intégrables.

Exercice 2. **(a)** D'après un théorème du cours, le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ensemble mesurable est toujours mesurable, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{f \geqslant a\} &= E \big\backslash \{f < a\} \\ &= E \cap \big(\mathbb{R} \big\backslash \{f < a\}\big) \end{aligned}$$

est bel et bien mesurable !

(b) La mesurabilité étant préservée par réunions et par intersections dénombrables, les deux écritures :

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f < -n\} \qquad \text{et} \qquad \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f \geqslant n\}$$

font voir le résultat, en utilisant d'ailleurs furtivement **(a)** qui précède.

(c) On écrit :

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} \cap \{f > a\},$$

puis, afin de faire voir que le deuxième ensemble est lui aussi mesurable, on le récrit sous la forme adéquate :

$$\begin{aligned} \{f > a\} &= \bigcup_{n \geqslant 1} \big\{f \geqslant a + \tfrac{1}{n}\big\} \\ &= \underbrace{\bigcup_{n \geqslant 1} \Bigg(\underbrace{E \Big\backslash \underbrace{\big\{f < a + \tfrac{1}{n}\big\}}_{\text{mesurable par définition}}}_{\text{mesurable par un théorème connu}} \Bigg)}_{\text{mesurable par un théorème connu}}. \end{aligned}$$

(d) Dans l'un des tous premiers théorèmes du cours sur les ensembles mesurables, on a montré en dimension $d = 1$ que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints :

$$\mathscr{O} \;=\; \bigcup_{n \geqslant 1} \,]a_n,\, b_n[\qquad\qquad (-\infty \leqslant a_n < b_n \leqslant \infty),$$

d'où :

$$f^{-1}(\mathscr{O}) \;=\; \underbrace{\bigcup_{n \geqslant 1} \underbrace{f^{-1}\big(]a_n,\, b_n[\big)}_{\text{mesurable par }(\mathbf{c})}}_{\text{donc mesurable !}}.$$

Exercice 3. (a) Comme cela a été dit en cours, dans la pratique réelle des exercices, c'est-à-dire dans la vraie vie des mathématiques, on rencontre parfois une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie sur un espace-produit :

$$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \qquad\qquad (d_1 \geqslant 1,\; d_2 \geqslant 1),$$

dont on ignore si elle est Lebesgue-intégrable — telle est la question que l'on se pose !

Alors on lui associe la fonction mesurable positive $|f| \geqslant 0$, fonction dont on voudrait déterminer si elle est d'intégrale finie, ce qui rendrait l'étudiant(e) très content(e).

Mais comme on peut toujours calculer l'intégrale de $|f| \geqslant 0$ *puisqu'on accepte, dans la théorie, que les intégrales de fonctions mesurables* $\geqslant 0$ *puisse valoir* ∞, on espère, en utilisant le Théorème de Tonelli qui permet de se ramener à deux intégrales emboîtées en dimensions inférieures $d_1 < d_1 + d_2$ et $d_2 < d_1 + d_2$, pouvoir calculer ou estimer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| \;=\; \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \big|f(x,y)\big|\, dx \right) dy,$$

et alors — bingo ! —, si le résultat numérique s'avère être *fini*, on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$! Quel contentement !

Car ensuite, le Théorème de Fubini peut être appliqué puisque l'hypothèse (cruciale) $\int |f| < \infty$ qui apparaît dans son énoncé est satisfaite, et on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \right) dy}_{\text{en général calculable}} \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Bien entendu, ces énoncés sont tout aussi vrais pour l'ordre inverse d'intégration itérée :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \big|f(x,y)\big|\, dy \right) dx,$$

puis :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y)\, dy \right) dx,$$

et la pratique enseigne que si on a fait un mauvais premier choix d'ordre, il y a de bonnes chances que l'ordre inverse ouvre les portes secrètes.

(b) Le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures, s'énonce comme suit — attention à la frappe sur les doigts de qui oublie l'hypothèse $f_n \leqslant 0$!

Théorème. [Inégalité généralissime de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \leqslant 0 \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$*, on a :*

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n\to\infty} f_n. \qquad \square$$

(c) Éh bien, le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue s'énonce comme suit.

Théorème. [Changement de variables] *Soit* $\varphi\colon U \xrightarrow{\sim} V$ *un difféomorphisme* $\mathscr{C}^1$ *entre deux ouverts* $U \subset \mathbb{R}^d$ *et* $V \subset \mathbb{R}^d$*. Alors pour toute fonction mesurable* $f\colon V \longrightarrow \mathbb{C}$*, la composée* $f \circ \varphi$ *:*

$$U \xrightarrow[\sim]{\varphi} V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f *est de plus Lebesgue-intégrable,* $f \circ \varphi$ *est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :*

$$\int_V f(y)\,dy = \int_U f \circ \varphi(x)\,\big|\mathsf{Jac}\,\varphi(x)\big|\,dx. \qquad \square$$

(d) Le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dont l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la variable et au paramètre s'énonce comme suit.

Théorème. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Si* $E \times I \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{C}$ *est une fonction définie sur le produit d'un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *par un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *d'intérieur non vide telle que :*

(i) *pour tout* $t \in I$*, la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est Lebesgue-intégrable en la variable* x *sur* E *;*

(ii) *pour tout* $x \in E$*, la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est* $\mathscr{C}^1$*, de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t);$$

(iii) *il existe une fonction positive* $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *mesurable Lebesgue-intégrable sur* E *qui domine uniformément :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

pour tout $x \in E$ *et tout* $t \in I$ *;*

Alors en tout $t \in I$ *fixé, la fonction :*

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E*, et surtout, la fonction :*

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est dérivable sur I *de dérivée égale à :*

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \qquad \square$$

Exercice 4. Soit donc $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable, à savoir dont l'intégrale de la valeur absolue est finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx \ < \ \infty.$$

(a) Le fait que $\{|f| = \infty\}$ est de mesure nulle est un théorème du cours, mais redémontrons-le. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$, la majoration :

$$\mathrm{N} \cdot m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \ \leqslant \ \int |f| \ < \ \infty,$$

donne l'*inégalité de Tchebytchev :*

$$m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \ \leqslant \ \frac{\int |f|}{\mathrm{N}},$$

dont le membre de droite tend visiblement vers zéro lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. Mais puisque :

$$\big\{|f| = \infty\big\} \ = \ \bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\},$$

un théorème du cours sur les intersections dénombrables décroissantes d'ensembles mesurables de mesure finie à partir d'un certain rang — ce qui est le cas ici ! — fait voir la nullité demandée :

$$\begin{aligned} m\big(\{|f| = \infty\}\big) \ &= \ m\bigg(\bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\}\bigg) \\ &= \ \lim_{\mathrm{N}\to\infty} m\big(\big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\}\big) \\ &= \ 0. \end{aligned}$$

On pourrait aussi raisonner de manière plus directe, mais quelque peu moins rigoureuse, par l'absurde, en supposant que $m(\{|f| = \infty\}) > 0$, ce qui, puisque f est supposée Lebesgue-intégrable, conduirait à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$\begin{aligned} \infty \ > \ \int_{\mathbb{R}} |f| \ &\geqslant \ \infty \cdot m\big(\{|f| = \infty\}\big) \\ &= \ \infty. \end{aligned}$$

Notons qu'il serait impossible d'en puiser une contradiction lorsque $0 = m(\{|f| = \infty\})$, puisque $\infty \cdot 0$ n'a pas de valeur fixe attribuable.

(b) Puisque le sujet demande d'*appliquer* le théorème de convergence dominée, introduisons la suite de fonctions mesurables :

$$f_n(x) \ := \ \frac{1}{2n}\, f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,+n]}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

lesquelles sont constamment dominées par la fonction intégrable f :

$$\big|f_n(x)\big| \ \leqslant \ |f(x)| \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, n \geqslant 1),$$

donc le célèbre théorème de Lebesgue s'applique pour offrir sur un plateau ce qui était demandé :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} 0 \\
&= 0\,!
\end{aligned}$$

Subrepticement, on a utilisé ici $0 = m(\{|f| = \infty\})$ de la question **(a)**.

On peut en fait se passer du théorème de convergence dominée, grâce à la majoration élémentaire :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\left|\int_{-n}^{n} f(x)\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \big|f(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \underbrace{\frac{1}{2n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx}_{\text{constante} < \infty}}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0},
\end{aligned}$$

inégalité qui démontre bien :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx = 0.$$

(c) La fonction $f(x) := 1$ constante égale à 1 n'est bien sûr pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est d'intégrale infinie, ce qui est exclu), et la suite :

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} 1\cdot dx = 1,$$

est constante égale à 1, donc ne converge pas vers 0.

Plus subtilement, soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction *paire* définie, pour $x \geqslant 0$, par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k\,k & \text{lorsque } k-1 < x < k \quad \text{pour un entier } k \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx &= \frac{2}{2n}\int_{0}^{n} f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{n}\big(-1 + 2 - \cdots + (-1)^n\,n\big),
\end{aligned}$$

somme dont les creux de vague croissent et décroissent alternativement, égale, lorsque $n = 2n' - 1$ avec $n' \geqslant 1$, à :

$$\begin{aligned}\frac{[-1+2]+[-3+4]+\cdots+[-(2n'-3)+(2n'-2)]-(2n'-1)}{2n'-1} &= \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n'-1 \text{ fois}}-(2n'-1)}{2n'-1} \\ &= \frac{-n'}{2n'-1} \\ &\underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

et autrement, lorsque $n' = 2n$ est pair, constamment égale à :

$$\begin{aligned}\frac{[-1+2]+[-3+4]+\cdots+[-(2n'-3)+(2n'-2)]+[-(2n'-1)+(2n')]}{2n'} &= \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1+1}^{n' \text{ fois}}}{2n'} \\ &= \frac{n'}{2n'} \\ &= \frac{1}{2},\end{aligned}$$

et là, il y a deux limites possibles, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Un exemple encore plus convaincant faisant voir que la limite de $\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f$ n'existe pas forcément est la fonction dérivée :

$$f(x) := \frac{d}{dx}\big(x \sin x\big),$$

non intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue (exercice non immédiat) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\sin x + x \cos x\big|\, dx \,=\, \infty,$$

tandis que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \frac{d}{dx}\big(x\sin x\big)\, dx &= \frac{n \sin n - n \sin(-n)}{2n} \\ &= \sin n\end{aligned}$$

oscille sans limite entre -1 et $+1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, grâce à un théorème de densité des entiers naturels modulo 2π.

(d) D'après un théorème du cours, toute suite $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout sur $\mathbb{R}$ a toujours pour limite une fonction qui est mesurable. D'ailleurs, la théorie de la mesure est en grande partie érigée dans l'objectif de stabiliser la mesurabilité par passage à des limites dénombrables quelconques.

Rappelons plus précisément que dans le cours, étant donné une suite quelconque $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables, on a démontré que les deux fonctions :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} h_n$$

sont mesurables, et lorsque ces deux fonctions coïncident — partout ou presque partout, cela revient au même —, *i.e.* lorsque h_n converge (presque partout) vers une certaine fonction-limite $h = \lim h_n$, on en a déduit que :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \;=\; \lim_{n\to\infty} h_n \;=\; \limsup_{n\to\infty} h_n$$

est mesurable.

(e) On suppose maintenant que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$.

Il est alors clair que les deux fonctions :

$$g_n - h_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g_n + h_n \geqslant 0$$

combinaisons algébriques de fonctions mesurables sont mesurables, et de plus sont *positives*, hypothèse *requise* pour pouvoir appliquer le Théorème — généralissime ! — de Fatou, lequel donne ici deux fois :

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n - h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n - h_n\big), \\
\int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n + h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n + h_n\big).
\end{aligned}$$

Or $g_n \longrightarrow g$ et $h_n \longrightarrow h$, donc en faisant extrêmement attention à la manière dont les limites inférieures se distribuent à droite, *i.e.* en n'intervertissant pas le signe moins et la limite inférieure :

$$\begin{aligned}
\int g - \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int \big(-h_n\big), \\
\int g + \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int h_n.
\end{aligned}$$

(f) Tout le monde sait en effet qu'il faut se méfier des signes « $-$ » ! Rappelons que les limites inférieure et supérieure d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sont définies par :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geqslant n} b_m\Big) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{m\geqslant n} b_m\Big).$$

Ici appliquée à la suite $b_n := -a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le résultat demandé :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} \big(-a_n\big) &= \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geqslant n} -a_m\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty} \Big(-\sup_{m\geqslant n} a_m\Big) \\
&= -\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{m\geqslant n} a_m\Big) \\
&= -\limsup_{n\to\infty} a_n.
\end{aligned}$$

(g) Supposons donc que la suite g_n satisfait :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

En revenant alors à la fin de la question **(e)** :

$$\begin{aligned}
\underline{\int g} - \int h &\leqslant \underline{\int g} + \liminf_{n\to\infty} \int \big(-h_n\big), \\
\underline{\int g} + \int h &\leqslant \underline{\int g} + \liminf_{n\to\infty} \int h_n,
\end{aligned}$$

cela permet instantanément de simplifier et d'obtenir :

$$-\int h \leqslant \liminf_{n\to\infty}\Big(-\int h_n\Big),$$
$$\int h \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int h_n.$$

Mais la question **(f)** qui précède avait justement préparé le terrain à l'avance pour que l'on puisse remplacer la première limite inférieure par une limite supérieure :

$$-\int h \leqslant -\limsup_{n\to\infty}\int h_n,$$
$$\int h \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int h_n,$$

et en regardant bien droit dans les yeux ces deux inégalités, l'aigle-étudiant qui sommeille en nous les voit s'articuler instantanément en un tryptique :

$$\limsup_{n\to\infty}\int h_n \leqslant \int h \leqslant \liminf_{n\to\infty}\int h_n,$$

ce qui lui permet d'attraper d'un seul coup d'œil sa proie-réponse :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx,$$

puisqu'une limite inférieure est de toute façon toujours *inférieure* à une limite supérieure !

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Traitons d'abord l'implication facile :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx = 0\bigg) \Longrightarrow \bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg).$$

Pour cela, l'inégalité élémentaire valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$:

$$0 \leqslant \big||a|-|b|\big| \leqslant \big|a-b\big|,$$

qui apparaissait — heureusement ! — comme indication dans le sujet, va expédier la démonstration comme suit :

$$\begin{aligned}0 \leqslant \bigg|\Big|\int f_n\Big| - \Big|\int f\Big|\bigg| &\leqslant \bigg|\int f_n - \int f\bigg| \\ &\leqslant \int |f_n - f|,\end{aligned}$$

car en effet, si le membre de droite tend vers zéro, le membre de gauche aussi !

Pour traiter l'autre implication, principale :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx = 0\bigg) \Longleftarrow \bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg),$$

introduisons, comme cela a été gentiment suggéré par le sujet, les deux fonctions auxiliaires :

$$g_n := 2\big(|f_n| + |f|\big) \qquad \text{et} \qquad h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|,$$

lesquelles satisfont effectivement les conditions requises :

$$g_n \longrightarrow g := 4\,|f|, \qquad\qquad h_n \longrightarrow h := 0, \qquad\qquad |h_n| \leqslant g_n$$

— on a même $h_n \geqslant 0$, quoique cela ne serve pas spécialement —, ainsi que :

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n \,=\, \int g,$$

et donc une application directe de la question **(g)** donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int h_n \,=\, \int h \,=\, \int 0 \,=\, 0,$$

c'est-à-dire en remplaçant h_n :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big| + \underbrace{\lim_{n\to\infty} \int |f_n| - \int |f|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0},$$

d'où la conclusion :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \int \big|f_n - f\big|. \qquad \square$$

Exercice 5. (a) Les deux fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto e^{-xt}$ sont mesurables, et on a démontré en cours qu'un produit de fonctions mesurables est encore mesurable.

De plus, la majoration :

$$\big|e^{-xt}\, f(x)\big| \,\leqslant\, |f(x)| \qquad\qquad {\scriptstyle (t\,\in\,\mathbb{R}_+,\ x\,\geqslant\,0)},$$

donne après intégration :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^\infty e^{-xt}\, f(x)\, dx\right| \,&\leqslant\, \int_0^\infty \big|e^{-xt}\, f(x)\big|\, dx \\ &\leqslant\, \int_0^\infty |f(x)|\, dx \\ &<\, \infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $x \longmapsto e^{-xt}\, f(x)$ est Lebesgue-intégrable, puisque $x \longmapsto f(x)$ l'est.

(b) Posons :

$$g(x,t) \,:=\, e^{-xt}\, f(x).$$

Pour tout t, nous venons de voir que $x \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et même $\mathscr{C}^\infty$!). Enfin, l'inégalité-clé ci-dessus :

$$\big|g(x,t)\big| \,\leqslant\, |f(x)|$$

fournit une fonction-dominatrice intégrable indépendante de t.

Toutes les hypothèses du Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètres sont ainsi satisfaites, et donc, la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \,\ni\, t \,\longmapsto\, L_f(t) \,:=\, \int_0^\infty e^{-xt}\, f(x)\, dx \,\in\, \mathbb{R}$$

est bel et bien continue !

(c) À nouveau grâce à la domination intégrable uniforme $|g(x,t)| \leqslant |f(x)|$, pour toute suite $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ de réels $t_n \longrightarrow \infty$ divergeant vers l'infini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique pour donner :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty g(x,t_n)\,dx \;=\; \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\,f(x)\Big)\,dx.$$

De l'Exercice 4 **(a)**, rappelons que $0 = m(\{|f| = \infty\})$, donc quitte à corriger f sur cet ensemble de mesure nulle, on peut (on pouvait) supposer (dès le départ !) que $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ne prend que des valeurs *finies*, et alors il est clair que :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\,f(x) \qquad\qquad (\forall\, x > 0),$$

et puisque $\int_{]0,\infty[} = \int_{[0,\infty[}$, nous concluons que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-xt_n}\,f(x)\,dx \;=\; \int_0^\infty 0\cdot dx \;=\; 0.$$

Ceci étant valable quelle que soit la suite $t_n \longrightarrow \infty$, on a bien fait voir que :

$$\lim_{t\to\infty} L_f(t) \;=\; 0.$$

(d) La transformée de Laplace de la fonction $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$ est :

$$L_f(t) \;=\; \int_0^\infty e^{-xt}\,e^{-\theta x}\,dx \;=\; \left[\frac{e^{-x(t+\theta)}}{-t-\theta}\right]_0^\infty \;=\; \frac{1}{t+\theta}.$$

(e) Le calcul de la transformée de Laplace de la fonction $f(x) := \mathbf{1}_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}}\cdot \mathsf{sin}(x)$ débute astucieusement en douceur comme suit :

$$\begin{aligned}
L_f(t) \;&=\; \int_0^1 e^{-xt}\,\mathsf{sin}\,x\,dx \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\int_0^1 e^{-xt}\,e^{ix}\,dx\right) \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\left[\frac{e^{x(i-t)}}{i-t}\right]_0^1\right) \\
&=\; \mathsf{Im}\left(\frac{e^{i-t}-1}{i-t}\right),
\end{aligned}$$

puis, pour faire disparaître les imaginaires au dénominateur, on multiplie en haut et à droite par $(-i-t)$, en notant que $(i-t)(-i-t)=1+t^2$:

$$\begin{aligned}
L_f(t) &= \mathsf{Im}\ \frac{(e^{i-t}-1)(-i-t)}{(i-t)(-i-t)} \\
&= \mathsf{Im}\ \frac{e^{-t}(-ie^i-te^i)+i+t}{1+t^2} \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2}\ \mathsf{Im}\big(-i\,e^i-t\,e^i\big)+\frac{1}{1+t^2}+0 \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2}\big(-\cos 1-t\sin 1\big)+\frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{1-e^{-t}(\cos 1+t\sin 1)}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

(f) Le développement classique en série entière de l'exponentielle permet d'écrire :

$$e^{-e^{n(T-x)}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}.$$

Multiplions-le par $f(x)$:

$$e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x).$$

Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$:

$$g_n\colon\quad x \longmapsto e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x) \qquad\qquad (n\geqslant 1),$$

qui sont mesurables uniformément dominées par :

$$\begin{aligned}
\big|g_n(x)\big| &= \Big|e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\Big| \\
&\leqslant |f(x)| \qquad\qquad (\forall\, x\in\mathbb{R}_+,\ \forall\, n\geqslant 1),
\end{aligned}$$

donc intégrables. D'un autre côté, les termes :

$$\frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x)$$

ont une somme absolument (car normalement) convergente, puisque :

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x)\right| \leqslant \frac{e^{knT}}{k!}\,|f(x)|,$$

et puisque :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(e^{nT})^k}{k!} = e^{e^{nT}} < \infty.$$

Cette convergence normale justifie l'interversion entre intégration et sommation infinie dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx &= \int_0^\infty \bigg(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x)\bigg)\, dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT} \int_0^\infty e^{-knx}\, f(x)\, dx \\ &= \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn),\end{aligned}$$

qui aboutit à l'identité demandée.

(g) Lorsque $n \longrightarrow \infty$, la suite de fonction $(g_n)_{n=1}^\infty$ introduite dans la question précédente converge simplement vers :

$$g_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } 0 \leqslant x < T, \\ e^{-1} f(T) & \text{lorsque } x = T, \\ f(x) & \text{lorsque } T \leqslant x. \end{cases}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx = \int_T^\infty f(x)\, dx.$$

(h) Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ dont la transformée de Laplace vaut :

$$e^{-a\,t} = L_f(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\, f(x)\, dx,$$

pour une certaine constante $a > 0$.

Prenons alors un nombre réel $0 < T$. Les questions **(g)** et **(f)** qui précèdent nous permettent alors de représenter la quantité finie :

$$\begin{aligned}\int_T^\infty f(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn)\bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-akn}\bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{\big(-\, e^{n(T-a)}\big)^k}{k!}\bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} e^{-\, e^{n(T-a)}} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{lorsque } 0 < T < a, \\ e^{-1} & \text{lorsque } T = a, \\ 0 & \text{lorsque } T > a. \end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{e},$$

tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{a+\varepsilon}^\infty f(x)\,dx \;=\; 0,$$

ce qui contredit un théorème du cours d'après lequel $\int_a^{a+\varepsilon} g$ doit tendre vers 0 avec ε, pour toute fonction intégrable g.

(i) Soit $t_0 > 0$ et soit l'intervalle ouvert l'entourant sans toucher $\{0\}$ à gauche :

$$t_0 \;\in\; \big]\tfrac{t_0}{2},\,\tfrac{3\,t_0}{2}\big[\;\subset\;]0,\infty[.$$

La dérivée partielle de $x\,e^{-xt}\,f(x)$ par rapport à t est alors majorée par :

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}\big[e^{-xt}\,f(x)\big]\right| \;&\leqslant\; \big|-\,x\,e^{-xt}\,f(x)\big| \\ &\leqslant\; \big|x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}\big|\cdot|f(x)| \\ &\leqslant\; C_0\cdot|f(x)|,\end{aligned}$$

la constante $0 < C_0 < \infty$ étant une majorante quelconque de la fonction continue $x \longmapsto x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}$, laquelle vaut 0 en $x = 0$ et tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Grâce à cette majoration uniforme par la fonction-dominatrice $C_0\,|f(x)|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et offre le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]\frac{t_0}{2},\frac{3\,t_0}{2}[$, donc sur $]0,\infty[$, puisque le choix initial de $t_0 > 0$ était laissé à notre entière discrétion.

(j) Maintenant, lorsque $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, la fonction $t \longmapsto L_f(t)$ est décroissante, puisque :

$$\begin{aligned}0 \;\leqslant\; t' \;\leqslant\; t'' \;<\; \infty \qquad \Longrightarrow \qquad L_f(t') - L_f(t'') \;&=\; \int_0^\infty \big(\underbrace{e^{-xt'} - e^{-xt''}}_{\geqslant 0\;\forall\,x\geqslant 0}\big)\,\underbrace{f(x)}_{\geqslant 0}\,dx \\ &\geqslant\; 0.\end{aligned}$$

De l'équivalence :

$$\Big(x \;\longmapsto\; x\,f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\;\Big) \;\;\Longleftrightarrow\;\; \Big(t \;\longmapsto\; L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\Big),$$

démontrons en premier lieu l'implication la plus délicate '$\Longleftarrow$'.

Puisque le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]0,\infty[$ est toujours 'gratuitement' vrai, en vertu du résultat de la question **(i)** qui précède, c'est surtout la dérivabilité $t = 0$ qui est une hypothèse ici, et par la décroissance qui vient d'être observée, l'hypothèse en question est donc que la limite suivante existe et est positive finie :

$$\begin{aligned}0 \;\leqslant\; -\,L_f'(0) \;&=\; \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ &=\; \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t}\,f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Or pour faire voir que $x \longmapsto x\,f(x)$ est L^1 sur $[0,\infty[$, un bon Coup de Fatou là où il faut — qui s'applique car $\frac{1-e^{-xt}}{t}\,f(x) \geqslant 0$, mais de grâce ! Monsieur de Marçay ! pas de frappe sur nos doigts fragiles ! — permet de vérifier que l'on a effectivement la finitude de l'intégrale :

$$
\begin{aligned}
& 0 \leqslant \int_0^\infty x\, f(x)\, dx \overset{?}{<} \infty \\
\text{[Reconnaître une dérivée]} \qquad & = \int_0^\infty \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{1-e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
[\lim = \liminf] \qquad & = \int_0^\infty \liminf_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{1-e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
\text{[Coup de Fatou !]} \qquad & \leqslant \liminf_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \int_0^\infty \frac{1-e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\
& = \liminf_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{L_f(0)-L_f(t)}{t} \\
[\lim = \liminf] \qquad & = \lim_{t \underset{>}{\longrightarrow} 0} \frac{L_f(0)-L_f(t)}{t} \\
& = -\, L_f'(0) \\
& \overset{\textbf{oui}}{<} \infty,
\end{aligned}
$$

ce qui montre que $x \longmapsto x\, f(x)$ est bien L^1 sur $[0, \infty[$.

L'implication inverse '$\Rightarrow$' est en fait plus facile, et généralement vraie sans supposer que $f \geqslant 0$. Supposons donc $x \longmapsto x\, |f(x)|$ intégrable sur $[0, \infty[$. À nouveau grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral, comme dans la question **(i)**, mais maintenant sur $[0, \infty[$ en *incluant* l'extrémité gauche $\{0\}$, on a la majoration uniforme de la dérivée partielle par rapport à t :

$$
\big| -\, x\, e^{-xt}\, f(x) \big| \leqslant x\, |f(x)|,
$$

par une fonction indépendante de t qui *est* intégrable sur $[0, \infty[$, et donc — youpi ! c'est enfin fini ! —, le théorème de dérivation sous le signe intégral tord le cou à cette dernière implication !

11. Examen 6

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un compact $K \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(K) > 0$ strictement positive. Pour tout entier $n \geqslant 1$, soit :

$$U_n := \bigcup_{x \in K} \big]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\big[.$$

(a) Vérifier que $U_{n+1} \subset U_n$, pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Montrer que :

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Indication: Pour l'inclusion non triviale, prendre $z \in \mathbb{R} \backslash K$, justifier que dist $(z, K) > 0$, puis argumenter que $z \notin U_{\mathrm{N}}$ pour $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand.

(c) Montrer qu'il existe un entier $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand pour que :

$$0 < \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) < m(K).$$

(d) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, on pose $K_\tau := \big\{x - \tau\colon\ x \in K\big\}$. Vérifier que :

$$K_\tau \subset U_{\mathrm{N}},$$

puis montrer que :

$$U_{\mathrm{N}} \big\backslash \big(K \cap K_\tau\big) = \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) \cup \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big).$$

Indication: Élaborer une figure complète, parlante, notée.

(e) Montrer que :

$$m\big(U_{\mathrm{N}} \big\backslash (K \cap K_\tau)\big) \leqslant \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}).$$

(f) Montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, on a $K \cap K_\tau \neq \emptyset$.

(g) Obtenir le *Théorème de Steinhaus*, d'après lequel, si K est un compact de $\mathbb{R}$ de mesure > 0, alors l'ensemble des différences :

$$K - K := \big\{x - x' \in \mathbb{R}\colon\ x \in K,\ x' \in K\big\},$$

contient un voisinage ouvert de l'origine 0 dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un ensemble mesurable E, et soit une fonction mesurable $f\colon E \longrightarrow \mathbb{R}$. On rappelle que par définition, $f \in L^1(E)$ si et seulement si $\int_E |f| < \infty$.

(a) Montrer l'implication :

$$f \in L^1(E) \qquad \Longrightarrow \qquad 0 = \lim_{n \to \infty} n \cdot m\big(\big\{x \in E\colon\ |f(x)| \geqslant n\big\}\big).$$

Indication: Utiliser la suite $f_n(x) := n \cdot \mathbf{1}_{\{|f| \geqslant n\}}(x)$.

(b) On se propose de démontrer que l'implication inverse n'est pas vraie. Soit la fonction définie sur $\big[0, e^{-1}\big]$, où $e^{-1} \approx 0,369\cdots$, par :

$$g(x) \,:=\, \begin{cases} 0 & \text{pour } x \,=\, 0, \\ x \log\big(x^{-1}\big) & \text{pour } 0 \,<\, x \,\leqslant\, e^{-1}. \end{cases}$$

Montrer que $g(x)$ est continue sur $\big[0, e^{-1}\big]$, croissante de $g(0) = 0$ à $g(e^{-1}) = e^{-1}$.

(c) On pose $f(x) := \frac{1}{g(x)}$. Montrer que $f \notin L^1\big([0, e^{-1}]\big)$, c'est-à-dire que :

$$\int_0^{e^{-1}} f(x)\,dx \,=\, \infty.$$

Indication: Effectuer le changement de variable $u := \frac{1}{x}$, puis, trouver une primitive.

(d) Montrer, pour tout entier $n \geqslant 3$, qu'il existe un unique réel $x_n \in \big]0, e^{-1}\big[$ tel que :

$$-\,x_n \log x_n \,=\, \tfrac{1}{n}.$$

(e) Montrer que :

$$n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 3. Soient $-\infty < a < b < \infty$, soit l'intervalle fermé $[a, b]$, soit $f\colon [0,1] \longrightarrow [a,b]$ une fonction mesurable, et soit $\varphi\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction *convexe*, au sens où :

$$\forall\, c \,\in\, [a,b] \qquad \exists\, p_c \,\in\, \mathbb{R} \qquad \text{tel que} \qquad \varphi(y) \,\geqslant\, p_c\,\big(y - c\big) + \varphi(c) \qquad \forall\, y \,\in\, [a,b].$$

(a) Montrer que la valeur de l'intégrale $\int_0^1 f(x)\,dx$ appartient à l'intervalle $[a,b]$.

(b) Établir l'*inégalité de Jensen :*

$$\int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx \,\geqslant\, \varphi\Big(\int_0^1 f(x)\,dx\Big).$$

Exercice 4. Soit l'intervalle $[0,1]$, muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$. Soit un exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(a) Montrer (question de cours) que $L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big) \subset L^1\big([0,1]\big)$, pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(b) Pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$ fixé, calculer $\|f_n\|_{L^{\mathsf{p}}}$, où pour $n \geqslant 1$ entier, les fonctions $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ sont définies par :

$$f_n(x) \,:=\, n \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[}(x) \,=\, \begin{cases} n & \text{pour } \frac{1}{n+1} \,<\, x \,<\, \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(c) Soit $\big(E, \|\cdot\|_E\big)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Si une suite $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs $v_n \in E$ converge en norme vers un certain vecteur $v \in E$, montrer que l'on a aussi $\|v_n\|_E \longrightarrow \|v\|_E$ quand $n \longrightarrow \infty$. Indication: Après l'avoir justifiée, utiliser l'inégalité $\big|\|u\|_E - \|v\|_E\big| \leqslant \|u - v\|_E$, pour tous $u, v \in E$.

(d) Pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < 2$, trouver une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^{p}.

(e) Pour tout $2 < \mathsf{p} < \infty$, montrer qu'il n'existe *pas* de fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^{p}.

(f) Pour tout exposant $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, montrer qu'il n'existe *pas* de fonction-dominatrice $g \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1], \mathbb{R}_+\big)$ de la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$.

(g) Pour $\mathsf{p} = 2$, existe-t-il une fonction $f \in L^2\big([0,1]\big)$ telle que f_n converge vers f en norme L^2.

Exercice 5. Dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \geqslant 1$ muni de la mesure de Borel-Lebesgue $m(\bullet)$, soit un ensemble mesurable E, et soit une fonction mesurable $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) Soit $f \in L^1(E)$. Pour $n \geqslant 1$ entier, on introduit :

$$f_n(x) \, := \, \frac{1}{n^2} \, \big|f(x)\big|^2 \, \mathbf{1}_{\{|f| \leqslant n\}}(x).$$

Justifier brièvement que les f_n sont mesurables, puis, justifier que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x) \, dx \, = \, \int_E \bigg(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \bigg) \, dx.$$

(b) On pose :

$$F(x) \, := \, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, \big|f(x)\big|^2 \mathbf{1}_{\{|f| \leqslant n\}}(x).$$

Montrer que :

$$F(x) \, = \, \big|f(x)\big|^2 \sum_{n \geqslant \max\{|f(x)|, 1\}} \frac{1}{n^2}.$$

(c) Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$, montrer que :

$$\sum_{n \geqslant \mathrm{N}} \frac{1}{n^2} \, \leqslant \, \frac{1}{\mathrm{N}-1}.$$

Indication: Comparer cette somme avec $\int_{\mathrm{N}-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2}$.

(d) On admet la valeur de la série convergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \, = \, \frac{\pi^2}{6} \, \approx \, 1,645 \cdots.$$

Montrer que :

$$0 \, \leqslant \, F(x) \, \leqslant \, \begin{cases} \frac{\pi^2}{6} \, \big|f(x)\big|^2 & \text{lorsque } \, |f(x)| \leqslant 2, \\ \dfrac{|f(x)|^2}{|f(x)| - 1} & \text{lorsque } \, |f(x)| > 2. \end{cases}$$

(e) Toujours sous l'hypothèse que $f \in L^1(E)$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 \, dx \, < \, \infty.$$

Indication: Montrer que $F(x) \leqslant 4 \, |f(x)|$ pour tout $x \in E$.

(f) Le fait que la somme de la Question **(e)** converge implique-t-il que $f \in L^1(E)$?

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. **(a)** Comme $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, il est clair, pour tout $x \in \mathbb{R}$, que :

$$\big]x - \tfrac{1}{n+1},\ x + \tfrac{1}{n+1}\big[\ \subset\ \big]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\big[,$$

et donc :

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \bigcup_{x \in K} \big]x - \tfrac{1}{n+1},\ x + \tfrac{1}{n+1}\big[\\ &\subset \bigcup_{x \in K} \big]x - \tfrac{1}{n},\ x + \tfrac{1}{n}\big[\ =\ U_n. \end{aligned}$$

(b) Comme $\{x\} \subset \big]x - \frac{1}{n},\ x + \frac{1}{n}\big[$ pour tout entier $n \geqslant 1$ et tout point $x \in K$, la première inclusion est claire :

$$K \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Pour ce qui est de l'inclusion inverse, passons au complémentaire :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n \overset{?}{\subset} K \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \mathbb{R}\Big\backslash \bigcap_{n \geqslant 1} U_n \overset{?}{\supset} \mathbb{R}\backslash K.$$

Étant donné un point quelconque $z \in \mathbb{R}\backslash K$, cherchons donc à montrer qu'il est dans $\mathbb{R}\backslash \cap U_n$.

Rappelons que les compacts de $\mathbb{R}$ sont les sous-ensembles fermés-bornés. Alors d'après un théorème connu de topologie générale, plusieurs fois utilisé en cours de théorie de la mesure, on a stricte positivité de :

$$d := \mathsf{dist}\,(z, K) > 0.$$

Ensuite, avec un entier $\mathrm{N} \gg 1$ assez grand afin que $\frac{1}{\mathrm{N}} \leqslant d$, d'où :

$$\mathsf{dist}\,(z,\ K) \geqslant \tfrac{1}{\mathrm{N}},$$

le fait que par définition :

$$\forall\, y \in U_{\mathrm{N}}, \qquad \exists\, x \in K, \qquad\qquad y \in \big]x - \tfrac{1}{\mathrm{N}}, x + \tfrac{1}{\mathrm{N}}\big[,$$

implique :

$$\mathsf{dist}\,(y,\ K) < \tfrac{1}{\mathrm{N}},$$

allié à l'inégalité triangulaire, garantissent que :

$$z \notin U_{\mathrm{N}},$$

d'où :

$$z \notin \bigcap_{n \geqslant 1} U_n,$$

et enfin :

$$z \in \mathbb{R} \Big\backslash \bigcap_{n \geqslant 1} U_n.$$

(c) Toute réunion (y compris non dénombrable) d'ouverts étant encore un ouvert par définition d'une topologie, il est clair que chaque U_n est ouvert, donc mesurable.

Soit $\mathrm{R} \gg 1$ assez grand pour que $K \subset [-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$. Alors $U_{n=1} \subset \big[-\mathrm{R}-1,\, \mathrm{R}+1\big]$, d'où $m\big(U_{n=1}\big) < \infty$. Un théorème du cours qui requiert cette hypothèse de finitude assure alors que :

$$\begin{aligned} 0 \,<\, m(K) \,&=\, m\Big(\bigcap_{n\geqslant 1} U_n\Big) \\ &=\, \lim_{n\to\infty} m\big(U_n\big), \end{aligned}$$

la suite $\big\{m(U_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ étant décroissante.

Il existe donc un entier $\mathrm{N} \gg 1$ tel que :

$$0 \,<\, m(K) \,\leqslant\, m(U_{\mathrm{N}}) \,<\, \tfrac{3}{2}\, m(K) \,<\, \infty,$$

d'où :

$$\tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) \,<\, m(K) \,<\, \infty.$$

(d) Effectivement, $K_\tau \subset U_{\mathrm{N}}$, puisque U_{N} contient tous les points à distance $< \frac{1}{\mathrm{N}}$ de K, et puisque K_τ est un translaté de K à distance $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$.

Ensuite, soit un point $x \in U_{\mathrm{N}}$ avec $x \notin K \cap K_\tau$, c'est-à-dire $x \notin K$ ou $x \notin K_\tau$. Alors $x \in U_{\mathrm{N}} \backslash K$ ou $x \in U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau$.

Inversement, soit y un point dans cette réunion à droite, c'est-à-dire $y \in U_{\mathrm{N}} \backslash K$ ou $y \in U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau$. Dans les deux cas, $y \in U_{\mathrm{N}}$. De plus, $y \notin K$ ou $y \notin K_\tau$. Donc $y \notin K \cap K_\tau$, ce qui donne $y \in U_{\mathrm{N}} \big\backslash (K \cap K_\tau)$.

(e) La mesure de Borel-Lebesgue étant invariante par translation, on a :

$$m\big(K_\tau\big) \,=\, m(K).$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned} m\Big(U_{\mathrm{N}} \big\backslash \big(K \cap K_\tau\big)\Big) \,&=\, m\Big(\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) \cup \big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big)\Big) \\ &\leqslant\, m\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K\big) + m\big(U_{\mathrm{N}} \backslash K_\tau\big) \\ &=\, m(U_{\mathrm{N}}) - m(K) + m(U_{\mathrm{N}}) - m(K_\tau) \\ &=\, 2\, m(U_{\mathrm{N}}) - 2\, m(K) \\ \text{[Question (c) } -\tfrac{2}{3} m(K) < -\tfrac{4}{3}\, m(U_{\mathrm{N}})] \qquad &<\, \tfrac{2}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}). \end{aligned}$$

(f) C'est immédiat parce que grâce à la question qui précède :

$$m\big(K \cap K_\tau\big) \,>\, \tfrac{1}{3}\, m(U_{\mathrm{N}}) \,>\, 0,$$

et parce que tout ensemble de mesure strictement positive est évidemment *non vide*.

(g) Pour tout $\tau \in \mathbb{R}$ avec $|\tau| < \frac{1}{\mathrm{N}}$, nous venons de voir qu'il existe un point :

$$x_\tau \,\in\, K \cap K_\tau.$$

Mais $x_\tau \in K_\tau$ signifie qu'il existe $x'_\tau \in K$ avec :

$$\begin{aligned} & x_\tau = x'_\tau - \tau \\ \Longleftrightarrow \qquad & \tau = x'_\tau - x_\tau. \end{aligned}$$

Nous avons donc démontré que l'intervalle ouvert $\big] -\frac{1}{\mathrm{N}},\ \frac{1}{\mathrm{N}}\big[$, qui est un voisinage ouvert dans $\mathbb{R}$ de l'origine 0, est inclus dans $K - K$.

Exercice 2. **(a)** Puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}$, d'où $|f(x)| < \infty$ pour tout $x \in E$, il est clair que pour tout $x \in E$, on a :

$$0 = \lim_{n \to \infty} f_n(x).$$

De plus, les f_n sont uniformément dominées par $|f|$ qui est intégrable :

$$\big(0 \leqslant \big) \qquad f_n(x) \leqslant |f(x)| \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant 1,\ \forall\, x \in E)}.$$

Donc le théorème de la convergence dominée donne :

$$\int_E \Big(\lim_{n \to \infty} f_n(x)\Big)\, dx = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\, dx,$$

c'est-à-dire :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_E f_n(x)\, dx.$$

(b) En effet, comme on sait que $0 = \lim \varepsilon \log \varepsilon$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0^+$, cette fonction $-x \log x$ est continue en 0, donc sur $\big[0, e^{-1}\big]$. De plus, comme on a sur $\big]0, e^{-1}\big]$:

$$g'(x) = \big(-x \log x\big)' = -\log x - \frac{x}{x} = -\log x - 1 \geqslant 0,$$

elle est effectivement croissante, de $g(0) = 0$ à :

$$g\big(e^{-1}\big) = e^{-1} \log \big((e^{-1})^{-1}\big) = e^{-1} \log e = e^{-1}.$$

(c) Avec $x = \frac{1}{u}$, d'où $dx = -\frac{du}{u^2}$, calculons :

$$\begin{aligned} \int_0^{e^{-1}} f(x)\, dx &= \int_0^{e^{-1}} \frac{1}{x \log \frac{1}{x}}\, dx \\ &= \int_\infty^e \frac{1}{\frac{1}{u} \log u} \Big(-\frac{du}{u^2}\Big) \\ &= \int_e^\infty \frac{du}{u \log u} \\ &= \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \int_e^{\mathrm{R}} \frac{du}{u \log u} \\ &= \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \Big[\log \log u\Big]_e^{\mathrm{R}} \\ &= \lim_{\mathrm{R} \to \infty} \Big(\log \log \mathrm{R} - \underline{\log \log e}_{\circ}\Big) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(d) Grâce au théorème des valeurs intermédiaires, et à la croissance de $g(x)$ sur $\big[0, e^{-1}\big]$, l'existence et l'unicité de x_n tel que $g(x_n) = \frac{1}{n}$ est claire, pourvu que $n \geqslant 3$ afin d'avoir :

$$\tfrac{1}{n} \;\leqslant\; 0,333\cdots \;<\; 0,369\cdots \;=\; e^{-1}.$$

(e) En effet, pour tout $n \geqslant 3$, on a grâce à la continuité croissante de $g\colon [0, e^{-1}] \xrightarrow{\sim} [0, e^{-1}]$:

$$\begin{aligned}\big\{x \in [0, e^{-1}]\colon\; |f(x)| \geqslant n\big\} &= \big\{|g(x)| \leqslant \tfrac{1}{n}\big\} \\ &= \big[0,\, x_n\big],\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) &= n \cdot x_n \\ \text{[Question (d)]} \qquad\qquad &= -\,\tfrac{1}{\log x_n} \;\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0,\end{aligned}$$

car $x_n \longrightarrow 0^+$.

En conclusion, cette fonction mesurable $f(x) = \frac{1}{x \log \frac{1}{x}}$ définie sur $E := \big[0, e^{-1}\big]$ avec $f(0) = \infty$ et continue sur $\big]0, e^{-1}\big]$ montre que la condition $n \cdot m\big(\{|f| \geqslant n\}\big) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ n'est *pas* suffisante pour garantir l'intégrabilité, car $\int |f| = \int f = \infty$, d'après la Question **(c)**.

Exercice 3. (a) En effet, l'hypothèse :

$$a \;\leqslant\; f(x) \;\leqslant\; b \qquad\qquad (\forall\, x \in [0,1]),$$

donne, après intégration sur $[0, 1]$:

$$a \;=\; \int_0^1 a\,dx \;\leqslant\; \int_0^1 f(x)\,dx \;\leqslant\; \int_0^1 b\,dx \;=\; b.$$

(b) Posons :

$$c \;:=\; \int_0^1 f(x)\,dx \;\in\; [a, b],$$

exprimons l'hypothèse de convexité de φ :

$$\varphi(y) \;\geqslant\; p_c\,\big(y - c\big) + \varphi(c) \qquad\qquad (\forall\, y \in [a, b]),$$

remplaçons $y := f(x)$ là-dedans :

$$\varphi\big(f(x)\big) \;\geqslant\; p_c\,\big(f(x) - c\big) + \varphi(c),$$

puis, intégrons sur $[0, 1]$, et enfin, terminons les calculs :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi\big(f(x)\big)\,dx \;&\geqslant\; p_c\bigg(\int_0^1 f(x)\,dx - c\bigg) + \int_0^1 \varphi(c)\,dx \\ &=\; p_c\bigg(\underline{\int_0^1 f(x)\,dx} \;-\; \underline{\int_0^1 f(x)\,dx}\bigg) + \varphi(c) \\ &=\; 0 + \varphi(c) \\ &=\; \varphi\bigg(\int_0^1 f(x)\,dx\bigg).\end{aligned}$$

Exercice 4. **(a)** Comme la mesure $m\big([0,1]\big) = 1 < \infty$ de l'ensemble ambiant est finie, on peut appliquer l'inégalité de Hölder en faisant apparaître la fonction 1, astucieusement comme suit.

Pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}\big([0,1]\big)$, c'est-à-dire satisfaisant :

$$\|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \,=\, \bigg(\int_0^1 \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \,<\, \infty,$$

on constate que la fonction f appartient aussi à L^1, car avec l'exposant conjugué $\frac{1}{\mathsf{p}} + \frac{1}{\mathsf{p}'} = 1$, il vient :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^1} \,=\, \int_0^1 \big|f(x)\big|\,dx \,&\leqslant\, \bigg(\int_0^1 \big|f(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \cdot \bigg(\int_0^1 1^{\mathsf{p}'}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}'}}\\ &=\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}} \cdot 1\\ &<\, \infty.\end{aligned}$$

(b) On calcule :

$$\begin{aligned}\big\|f_n\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \,&=\, \bigg(\int_0^1 \Big|n \cdot \mathbf{1}_{]\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}[}(x)\Big|^{\mathsf{p}}\,dx\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &=\, \bigg(\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^{\mathsf{p}}\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &=\, \bigg(n^{\mathsf{p}}\Big(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\Big)\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}\\ &=\, n\,\frac{1}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}}.\end{aligned}$$

(c) Les deux inégalités triangulaires :

$$\begin{aligned}\|u\|_E \,&=\, \big\|u - v + v\big\|_E \,\leqslant\, \|u - v\|_E + \|v\|_E,\\ \|v\|_E \,&=\, \big\|v - u + u\big\|_E \,\leqslant\, \|v - u\|_E + \|u\|_E,\end{aligned}$$

qui se ré-écrivent comme :

$$\begin{aligned}\|u\|_E - \|v\|_E \,&\leqslant\, \|u - v\|_E,\\ -\|u\|_E + \|v\|_E \,&\leqslant\, \|v - u\|_E,\end{aligned}$$

donnent effectivement :

$$\Big|\|u\|_E - \|v\|_E\Big| \,\leqslant\, \big\|u - v\big\|_E.$$

En supposant donc que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|v_n - v\big\|_E,$$

cette inégalité permet de terminer la question :

$$\Big|\|v_n\|_E - \|v\|_E\Big| \,\leqslant\, \big\|v_n - v\big\|_E \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) Soit $f := 0$. Alors pour tout $1 \leqslant \mathsf{p} < 2$, on a grâce à la Question **(b)** :

$$\begin{aligned}\big\|f_n - 0\big\|_{L^\mathsf{p}} \,=\, \|f_n\|_{L^\mathsf{p}} \,&=\, \frac{n}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} \\ &\underset{n\infty}{\sim}\, n^{1-\frac{2}{\mathsf{p}}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, 0.\end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, toujours grâce à la Question **(b)**, on a :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{L^\mathsf{p}} \,&=\, \frac{n}{\big(n(n+1)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}} \\ &\underset{n\infty}{\sim}\, n^{1-\frac{2}{\mathsf{p}}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, \infty.\end{aligned}$$

S'il existait $f \in L^\mathsf{p}\big([0,1]\big)$ satisfaisant :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^\mathsf{p}},$$

alors la Question **(c)** impliquerait la convergence des nombres réels positifs :

$$\|f_n\|_{L^\mathsf{p}} \,\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\, \|f\|_{L^\mathsf{p}} \,<\, \infty,$$

en contradiction flagrante avec la divergence qui vient d'être montrée.

(f) Par l'absurde, supposons qu'il existe $g \in L^\mathsf{p}\big([0,1],\,\mathbb{R}_+\big)$ satisfaisant :

$$\big|f_n(x)\big| \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \text{presque partout}),$$

pour presque tout $x \in [0,1]$. Comme les intervalles-supports de $f_1, f_2, f_3, \dots, f_n, \dots$:

$$\big]\tfrac{1}{2},\, \tfrac{1}{1}\big[, \quad \big]\tfrac{1}{3},\, \tfrac{1}{2}\big[, \quad \big]\tfrac{1}{4},\, \tfrac{1}{3}\big[, \quad \dots, \quad \big]\tfrac{1}{n+1},\, \tfrac{1}{n}\big[, \quad \dots,$$

sont mutuellement disjoints, les inégalités précédentes impliqueraient que la *somme infinie :*

$$h(x) \,:=\, \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x),$$

satisferait aussi :

$$|h(x)| \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (\text{presque partout}).$$

Comme $\|g\|_{L^\mathsf{p}} < \infty$, on en déduirait que $\|h\|_{L^\mathsf{p}} < \infty$ aussi. Mais en fait, comme les intervalles ci-dessus sont disjoints, on a :

$$\begin{aligned}\big(\|h\|_{L^\mathsf{p}}\big)^\mathsf{p} \,&=\, \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} n^\mathsf{p}\,dx \\ &=\, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\mathsf{p}}{n(n+1)} \\ &=\, \infty,\end{aligned}$$

car le terme général est équivalent à $\frac{1}{n^{2-\mathsf{p}}}$, or on sait que $\sum \frac{1}{n^c} < \infty$ si et seulement si $c > 1$, et ici, $2 - \mathsf{p} > 1$ est impossible car on a supposé $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(g) Si f existait, la suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ devrait être de Cauchy en norme L^2, à savoir :

$$0 \,\overset{?}{=}\, \lim_{n>m\to\infty} \big\|f_m - f_n\big\|_{L^2},$$

mais cela est impossible, car à cause du caractère disjoint des supports, on a pour tout $m < n$:

$$\begin{aligned}\big\|f_m - f_n\big\|_{L^2} &= \bigg(\int_{\frac{1}{m+1}}^{\frac{1}{m}} (m-0)^2\,dx + \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} (0-n)^2\,dx\bigg)^{1/2} \\ &= \bigg(m^2\,\frac{1}{\big(m(m+1)\big)} + n^2\,\frac{1}{\big(n(n+1)\big)}\bigg)^{1/2},\end{aligned}$$

quantité qui tend vers $\big(1+1\big)^{1/2} = \sqrt{2}$, certainement pas vers 0, lorsque $n > m \longrightarrow \infty$.

Exercice 5. **(a)** Puisque toutes ces fonctions visiblement mesurables d'après les théorèmes du cours sont positives, avec la suite des sommes partielles :

$$g_{\mathrm{N}}(x) := \sum_{n=1}^{\mathrm{N}} f_n(x),$$

cette égalité, qui est autorisée à signifier $\infty = \infty$, est une conséquence directe du théorème de convergence monotone, ou de Beppo-Levi, puisque $g_{\mathrm{N}} \leqslant g_{\mathrm{N}+1}$, partout dans E.

(b) En effet :

$$\begin{aligned}F(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\big|f(x)\big|^2 \mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x) \\ &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathbf{1}_{\{|f|\leqslant n\}}(x) \\ &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n\geqslant \max\{|f(x)|,1\}} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

(c) Pour $\mathrm{N} = 1$, on a trivialement $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2} \leqslant \infty$, ne serait-ce que parce que cette série converge, d'après le critère de Riemann.

Supposons donc $\mathrm{N} \geqslant 2$. Comme la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x^2}$ décroît sur $]0, \infty[$, le principe de comparaison entre séries et intégrales donne :

$$\begin{aligned}\sum_{n=\mathrm{N}}^{\infty} \frac{1}{n^2} &= \frac{1}{\mathrm{N}^2} + \frac{1}{(\mathrm{N}+1)^2} + \frac{1}{(\mathrm{N}+2)^2} + \cdots \\ &\leqslant \int_{\mathrm{N}-1}^{\mathrm{N}} \frac{dx}{x^2} + \int_{\mathrm{N}}^{\mathrm{N}+1} \frac{dx}{x^2} + \int_{\mathrm{N}+1}^{\mathrm{N}+2} \frac{dx}{x^2} + \cdots \\ &= \int_{\mathrm{N}-1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= \frac{1}{\mathrm{N}-1}.\end{aligned}$$

(d) En revenant à la Question **(b)**, quand $|f(x)| \leqslant 2$, on majore aisément :

$$\big(0 \leqslant \big) \qquad\qquad \begin{aligned}F(x) &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= \big|f(x)\big|^2\,\frac{\pi^2}{6}.\end{aligned}$$

Quand $|f(x)| > 2$, grâce à la Question **(c)**, en introduisant :

$$\mathrm{N}_x := \text{plus petit entier } \geqslant |f(x)|,$$

d'où :

$$|f(x)| - 1 \leqslant \mathrm{N}_x - 1 \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{\mathrm{N}_x - 1} \leqslant \frac{1}{|f(x)| - 1},$$

il vient :

$$\begin{aligned}(0 \leqslant) \qquad F(x) &= \big|f(x)\big|^2 \sum_{n=\mathrm{N}_x}^{\infty} \frac{1}{n^2} \\ &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \frac{1}{\mathrm{N}_x - 1} \\ &\leqslant \big|f(x)\big|^2 \frac{1}{|f(x)| - 1}.\end{aligned}$$

(e) Tout d'abord, il faut observer que :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 dx = \int_E F(x)\, dx.$$

Donc il suffit de montrer que $F \in L^1(E)$. Pour cela, on revient aux inégalités de la Question **(d)**.

Quand $|f(x)| \leqslant 2$, en tenant compte de $\frac{\pi^2}{6} \leqslant 2$, on majore :

$$\begin{aligned}0 \leqslant F(x) &\leqslant \tfrac{\pi^2}{6} |f(x)|\, |f(x)| \\ &\leqslant 2 \cdot 2 \cdot |f(x)|.\end{aligned}$$

Quand $|f(x)| > 2$, on majore :

$$\begin{aligned}0 \leqslant F(x) &\leqslant \frac{|f(x)|}{|f(x)| - 1} \big|f(x)\big| \\ &\leqslant \frac{2}{2-1} \big|f(x)\big| \\ &= 2\big|f(x)\big|.\end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a :

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 4\,|f(x)|,$$

et comme $f \in L^1(E)$, il en va de même pour $F \in L^1(E)$. En conclusion, nous avons démontré l'implication :

$$f \in L^1(E) \qquad \Longrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 dx < \infty.$$

(f) Non, car avec la fonction $f(x) := \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$, qui n'est *pas* dans $L^1(E)$ avec $E := [1, \infty[$, on a néanmoins :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{|f| \leqslant n\}} \big|f(x)\big|^2 dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \int_{\{x \geqslant 1\}} \frac{1}{x^2}\, dx \\ &= \frac{\pi^2}{6} < \infty.\end{aligned}$$

13. Examen 7

Exercice 1. Soit une fonction réelle mesurable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ à valeurs *positives* qui est *intégrable*, *i.e.* satisfait $\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx < \infty$. Pour un paramètre réel $t \geqslant 0$, on considère :

$$F(t) \;:=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1 + t\,(f(x))^2}}\; dx.$$

(a) Montrer que $t \longmapsto F(t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Indication: Introduire $g(x,t) := \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}$.

(b) Montrer que $0 = \lim\limits_{t \to \infty} F(t)$.

(c) Pour $(x,t) \in \mathbb{R} \times \,]0, \infty[$, calculer $\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)$, puis, en observant la décomposition :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) \;=\; \mathbf{1}_{\{0 \leqslant f \leqslant 1\}}(x) + \mathbf{1}_{\{1 < f\}}(x),$$

pour tout $\delta > 0$ fixé, montrer la majoration pour tout $t > \delta$:

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \;\leqslant\; \tfrac{1}{2}\, f(x) \cdot \mathbf{1}_{\{0 \leqslant f \leqslant 1\}}(x) + \tfrac{1}{2}\, \frac{f(x)^3}{(1 + \delta\, f(x)^2)^{3/2}}\; \cdot \mathbf{1}_{\{1 < f\}}(x).$$

(d) Déterminer une constante positive $C_\delta < \infty$ telle que pour tout $t > \delta$, on ait la majoration :

$$\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| \;\leqslant\; \tfrac{1}{2}\, f(x) \cdot \mathbf{1}_{\{0 \leqslant f \leqslant 1\}}(x) + \tfrac{1}{2}\, C_\delta\, f(x) \cdot \mathbf{1}_{\{1 < f\}}(x).$$

(e) Établir que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(f) Pour $t > 0$, montrer que :

$$\frac{F(t) - F(0)}{t} \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1 + t\,f(x)^2}\,\left(1 + \sqrt{1 + t\,f(x)^2}\right)}\, dx.$$

(g) Montrer que le quotient différentiel :

$$\frac{F(t) - F(0)}{t}$$

admet une limite dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$ lorsque $t > 0$ tend vers 0 en décroissant. Indication: Noter $h(x,t)$ la fonction sous le signe intégral obtenue à la Question **(e)**, et penser à la monotonie.

(h) Montrer que :

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1 + t\,f(x)^2}\,\left(1 + \sqrt{1 + t\,f(x)^2}\right)}\, dx \;=\; -\,\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x)^3\, dx.$$

(i) Établir que la fonction $t \longmapsto F(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \infty[$ si et seulement si $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^3(\mathbb{R})$.

Exercice 2. Avec $d \geqslant 1$ entier, on munit $\mathbb{R}^d$ des coordonnées $x = (x_1, \ldots, x_d)$ et de la norme $|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2}$. Pour tout multi-indice entier $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$, on note $\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_d}}{\partial x_d^{\alpha_d}}$. Soit l'*espace de Schwartz :*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^d) := \Big\{ \text{fonctions } f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ telles que} \\ 0 = \lim_{|x| \to \infty} |x|^\kappa \, \big|\partial_x^\alpha f(x)\big|, \ \forall \kappa \in \mathbb{N}, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^d \Big\}.$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}^d$, avec le produit scalaire $x \cdot \xi := x_1 \, \xi_1 + \cdots + x_d \, \xi_d$, on définit la *transformée de Fourier* d'une fonction quelconque $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ par $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, e^{-2i\pi \xi \cdot x} \, dx$.

On s'intéresse à l'*équation des ondes* sur $\mathbb{R}^d$ d'inconnue une fonction $u = u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ définie sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, avec deux conditions initiales $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ u(x,0) = f(x), \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x). \end{cases}$$

(a) Montrer que toute solution u de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, telle que $x \longmapsto u(x,t)$ appartient à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ pour tout t fixé, satisfait :

$$-4\,\pi^2 \, |\xi|^2 \, \widehat{u}(\xi, t) = \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial t^2}(\xi, t).$$

(b) Montrer que :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big) + \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)}{2\pi \, |\xi|}.$$

(c) L'objectif est d'établir qu'une solution de l'équation des ondes avec conditions initiales est donnée par la formule intégrale :

$$u(x,t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left[\widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big) + \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)}{2\pi \, |\xi|} \right] e^{2i\pi x \cdot \xi} \, d\xi.$$

Commencer par justifier brièvement que $(x,t) \longmapsto u(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

(d) Montrer que cette formule intégrale est solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

(e) Montrer que $u(x,0) = f(x)$.

(f) Montrer que $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$.

(g) La fonction $\xi \longmapsto \widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi \, |\xi| \, t\big)$ appartient-elle à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$? La fonction $\xi \longmapsto \widehat{g}(\xi) \, \frac{\sin(2\pi \, |\xi| \, t)}{2\pi \, |\xi|}$ appartient-elle à $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$?

(h) On introduit l'*énergie* d'une solution de l'équation des ondes (avec conditions initiales) :

$$E(t) := \int_{\mathbb{R}^d} \left(\Big| \frac{\partial u}{\partial x_1} \Big|^2 + \cdots + \Big| \frac{\partial u}{\partial x_d} \Big|^2 + \Big| \frac{\partial u}{\partial t} \Big|^2 \right) dx.$$

Établir que l'énergie est *conservée*, à savoir que l'on a $E(t) = E(0)$ constamment pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_y$, soit une fonction mesurable *positive* $A\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_+$. On suppose qu'il existe une constante $0 \leqslant C_0 < \infty$ telle que :

$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dx \leqslant C_0, \qquad \text{pour presque tout } y \in \mathbb{R} \text{ fixé},$$

$$\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dy \leqslant C_0, \qquad \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R} \text{ fixé}.$$

On rappelle que pour toute fonction mesurable *positive* $(x,y) \longmapsto A(x,y)$ définie sur $\mathbb{R}^2$, un théorème du cours (Tonelli) a démontré que la fonction-tranche $x \longmapsto A(x,y)$ est mesurable pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, et de même pour la fonction-tranche $y \longmapsto A(x,y)$. On notera $d(x,y)$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

(a) Pour une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, on introduit :

$$Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy.$$

Justifier que $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer que $Tf(x)$ est bien définie, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$. Indication: Montrer, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, l'inégalité $\big|Tf(x)\big| \leqslant C_0\, \|f\|_{L^\infty}$.

(b) Pour deux fonctions quelconques $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que l'application $(x,y) \longmapsto A(x,y)\, f(y)\, g(x)$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, puis, montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

(c) Toujours avec deux fonctions quelconques $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que l'application $x \longmapsto Tf(x)\, g(x)$ est mesurable et intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Montrer que la fonction $x \longmapsto Tf(x)$ est mesurable.

(e) Montrer que $f \longmapsto \big(Tf\colon x \longmapsto Tf(x)\big)$ définit un opérateur linéaire borné $L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$, dont la norme d'opérateur satisfait $\|T\| \leqslant C_0\, \|f\|_{L^1}$.

(f) On suppose maintenant que $f \in L^1(\mathbb{R})$ est intégrable. Établir que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est intégrable en y, puis que la formule $x \longmapsto Tf(x) = \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$ définit une fonction mesurable-intégrable $Tf \in L^1(\mathbb{R})$ qui satisfait l'inégalité $\big\|Tf\big\|_{L^1} \leqslant C_0\, \|f\|_{L^1}$.

(g) Pour une fonction mesurable *positive* $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on définit à nouveau $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$, en admettant que la valeur $Tf(x) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ puisse éventuellement être infinie. Justifier que $x \longmapsto Tf(x)$ est mesurable.

(h) Soit maintenant un exposant réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. Toujours avec $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ *positive*, montrer l'inégalité :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad Tf(x) \leqslant C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

(i) Montrer l'inégalité :

$$\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(j) Toujours avec $1 < \mathsf{p} < \infty$, on suppose maintenant plus généralement que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ est à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, sans forcément être positive.

Montrer que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est intégrable en y.

Pour ces x, on définit ensuite $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$, et on décide de poser $Tf(x) := 0$ pour les x appartenant à l'ensemble négligeable restant.

(k) Soit $\mathsf{q} := 1 - \frac{1}{\mathsf{p}}$. Établir, pour toute fonction $g \in L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$, que la fonction $x \longmapsto Tf(x)\, g(x)$, est mesurable. Indication: Penser encore à Tonelli $\rightarrow$ Fubini.

(l) Montrer que la fonction $x \longmapsto Tf(x)$ elle-même est mesurable.

(m) Montrer que $Tf \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ avec $\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}$.

(n) On pose $A(x,y) := u(x-y)$ avec une fonction *positive* $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que A vérifie les hypothèses énoncées tout au début, et montrer que l'on obtient la bonne définition du produit de convolution $u * v \in L^{\mathsf{p}}$ lorsque $v \in L^{\mathsf{p}}$, en établissant la majoration :

$$\big\|u * v\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|u\|_{L^1}\, \|v\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. **(a)** Puisqu'il s'agit d'une intégrale à paramètre, il est avisé d'introduire la fonction positive de deux variables :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \ni (x,t) \longrightarrow \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}} =: g(x,t) \in \mathbb{R}_+.$$

Pour appliquer le théorème concerné du cours sur les intégrales à paramètres, trois observations sont nécessaires.

• Pour $t \geqslant 0$ fixé, la fonction $x \longmapsto g(x,t)$ est mesurable sur $\mathbb{R}$, par opérations usuelles de fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$.

• Comme f est intégrable, il est clair que ses valeurs $(0 \leqslant) f(x) < \infty$ sont *finies* pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, donc pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$ fixés, la fonction $t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$,

• Enfin, comme pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\big|g(x,t)\big| = g(x,t) \leqslant \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}} \leqslant f(x),$$

et comme $\int f < \infty$, il existe une fonction-dominatrice intégrable évidente.

D'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre, on en déduit que F est finie et continue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Soit une suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ de réels $t_n \longrightarrow \infty$ s'évadant vers l'infini à droite. Deux observations s'imposent.

• Pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé tel que $0 < f(x) < \infty$, il est clair que la suite $\big\{g(x,t_n)\big\}_{n=1}^{\infty}$ tend vers 0 lorsque $t_n \longrightarrow \infty$. C'est encore vrai si $f(x) = 0$, donc c'est vrai pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

• À nouveau, nous avons une inégalité dominatrice uniforme $\big|g(x,t_n)\big| \leqslant f(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\int f < \infty$.

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, et grâce au critère séquentiel, nous concluons bien que $0 = \lim\limits_{t \to \infty} F(t)$.

(c) Aisément, on trouve :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| &= \left| -\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\right| \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)^3\cdot \mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
\text{[$y^3\leqslant y$ pour $0\leqslant y\leqslant 1$]}\qquad &\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot \mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot \mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+\delta\,f(x)^2)^{3/2}}\cdot \mathbf{1}_{\{1<f\}}(x).
\end{aligned}$$

(d) Ensuite, il s'agit de trouver une constante $0\leqslant C_\delta<\infty$ telle que, pour toute valeur $f(x)>1$ et tout $t>\delta$, on ait :

$$\frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+t\,f(x)^2)^{3/2}} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{f(x)^3}{(1+\delta\,f(x)^2)^{3/2}} \overset{?}{\leqslant} \tfrac{1}{2}\,C_\delta\cdot f(x),$$

ce qui équivaut à :

$$f(x)^2 \overset{?}{\leqslant} C_\delta\,\big(1+\delta\,f(x)^2\big)^{3/2},$$

c'est-à-dire à :

$$\begin{aligned}
\underline{f(x)^4} &\overset{?}{\leqslant} C_\delta^2\,\big(1+\delta\,f(x)^2\big)^3 \\
&= C_\delta^2\,\Big(1+3\,\delta\,f(x)^2+\underline{3\,\delta^2\,f(x)^4}+\delta^3\,f(x)^6\Big),
\end{aligned}$$

et l'on voit que l'on peut choisir :

$$C_\delta := \frac{1}{\sqrt{3}\,\delta}.$$

(e) Il s'agit à nouveau d'appliquer soigneusement un théorème du cours concernant la dérivabilité (continue) d'une intégrale à paramètre. Nous allons montrer que $F(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta,\infty[$ pour $\delta>0$ arbitraire, ce qui conviendra. Trois observations s'imposent, dont la dernière repose sur la question précédente.

• Pour tout $t>\delta$ fixé, la fonction positive $x\longmapsto g(x,t)$ est intégrable car majorée par $f(x)$, d'après ce qui précède.

• Pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, la fonction $t\longmapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\delta,\infty[$, puisque la racine carrée au dénominateur porte sur une fonction constamment $\geqslant 1$.

• Enfin, pour des paramètres $t\in\,]\delta,\infty[$, la Question **(c)** qui précède nous permet de majorer la dérivée partielle, par rapport au paramètre, de l'intégrande :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial g}{\partial t}(x,t)\right| &\leqslant \tfrac{1}{2}\,f(x)\cdot \mathbf{1}_{\{0\leqslant f\leqslant 1\}}(x) + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}\,\delta}\,f(x)\cdot \mathbf{1}_{\{1<f\}}(x) \\
&\leqslant \Big(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{\sqrt{3}\,\delta}\Big)\,f(x)\cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}}(x) \\
&= \mathsf{constante}_\delta\,f(x),
\end{aligned}$$

par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ indépendante de t.

Grâce au théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, nous obtenons que $t \longmapsto F(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle $]\delta, \infty[$, de dérivée égale à :

$$F'(t) \,=\, \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx.$$

Le réel sécuritaire positif $\delta > 0$ étant arbitraire, nous concluons que $t \longmapsto F(t)$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(f) En effet, calculons en utilisant une astuce connue concernant les racines carrées :

$$\begin{aligned}
\frac{F(t)-F(0)}{t} &= \frac{1}{t}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}\,dx - \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx\right) \\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-\sqrt{1+t\,f(x)^2}}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}\right) f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\big(1-\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}}\,\frac{\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}{\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\right) f(x)\,dx \\
&= \frac{1}{t}\int_{\mathbb{R}} \frac{1-1-t\,f(x)^2}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,f(x)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)}\,dx.
\end{aligned}$$

(g) Effectivement, comme $t \longmapsto \sqrt{1+t\,f(x)^2}$ est clairement croissante, ainsi que $t \longmapsto 1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}$, donc leur produit aussi, après une inversion *et* un signe moins qui neutralisent leurs inversions de monotonie respectives, la fonction sous le signe intégral :

$$h(x,t) \,:=\, \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t\,f(x)^2}\big)},$$

est elle aussi *croissante* par rapport à $t \in \,]0, \infty[$. Par croissance de l'intégrale, il en va de même pour :

$$\frac{F(t)-F(0)}{t} \,=\, \int_{\mathbb{R}} h(x,t)\,dx.$$

Clairement, $h(x,t) \leqslant 0$, donc $\frac{F(t)-F(0)}{t} \leqslant 0$ aussi.

Par conséquent, lorsque $t \overset{>}{\longrightarrow} 0$ tend vers 0 *en décroissant*, les valeurs du quotient différentiel $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ *décroissent* dans l'ensemble $\mathbb{R}_-$ des réels négatifs, donc il est clair que $\frac{F(t)-F(0)}{t}$ tend vers une certaine limite négative, éventuellement égale à $-\infty$.

(h) Pour toute suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ décroissante $0 < t_{n+1} \leqslant t_n$ avec $0 \longleftarrow t_n$, soit la suite de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$:

$$h_n(x) \,:=\, h(x,t_n) \,=\, \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+t_n\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+t_n\,f(x)^2}\big)},$$

satisfaisant d'après ce qui précède pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h_{n+1}(x) \,\leqslant\, h_n(x) \,\leqslant\, 0.$$

Le théorème de convergence monotone *inversé* s'applique — il fallait y penser ! — et permet alors d'obtenir aisément :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n)-F(0)}{t_n} &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x,t_n)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} h(x,t_n)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,f(x)^3}{\sqrt{1+0\,f(x)^2}\,\big(1+\sqrt{1+0\,f(x)^2}\big)}\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx.\end{aligned}$$

Comme la suite $t_n \longrightarrow 0$ était arbitraire, la question est « pliée » !

(i) Premièrement, nous savons que F est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, continue sur $[0,\infty[$ avec $F(0) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx$.

Deuxièmement, nous venons de prendre conscience grâce à la Question **(g)** qui précède que $F(t)$ est dérivable à droite en 0^+ si et seulement si la valeur :

$$-\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \;=\; \lim_{t\to 0} \frac{F(t)-F(0)}{t}$$

existe et est *finie* — appartient à $\mathbb{R}_-$ —, c'est-à-dire si et seulement si $f\in L^3(\mathbb{R})$, sachant que $f\in L^1(\mathbb{R})$ depuis le début.

Troisièmement, il nous reste encore à vérifier que la dérivée $F'(t)$ sur $]0,\infty[$ que nous avons avons calculée à la Question **(d)** :

$$F'(t) \;=\; \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx,$$

tend, lorsque $t \overset{>}{\longrightarrow} 0$, vers cette valeur négative *dorénavant supposée finie :*

$$F'(0) \;=\; -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \;\in\; \mathbb{R}_-.$$

Or par chance, l'intégrande concerné pour $F'(t)$:

$$\ell(x,t) \;:=\; \frac{-\,\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+t\,f(x)^2\big)^{3/2}},$$

est à nouveau négatif croissant par rapport à $t\in\,]0,\infty[$ pour presque tout $x\in\mathbb{R}$ fixé, donc pour toute suite $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ avec $0<t_{n+1}<t_n$, le théorème de convergence monotone nous

permet de conclure de manière analogue que :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} F'(t_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \ell(x,t_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} \ell(x,t_n)\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{-\,\frac{1}{2}\,f(x)^3}{\big(1+0\,f(x)^2\big)^{3/2}}\,dx \\
&= -\,\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(x)^3\,dx \\
&= F'(0).
\end{aligned}$$

Exercice 2. **(a)** À travers la transformation de Fourier, la différentiation par rapport à une variable x_k pour $k \in \{1,\dots,d\}$ devient la multiplication par $2i\pi\,\xi_k$.

Comme la fonction u est $\mathscr{C}^\infty$, comme ses fonctions-tranches $x \longmapsto u(x,t)$ appartiennent à l'espace $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ où la transformation de Fourier est bien définie (de surcroît inversible), et comme la différentiation par rapport à t commute avec la transformation de Fourier dans l'espace des x, on obtient en effet :

$$\mathscr{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2}\Big) = \mathscr{F}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\Big),$$

c'est-à-dire :

$$\big(2i\pi\,\xi_1\big)^2\,\widehat{u}(\xi,t)+\cdots+\big(2i\pi\,\xi_d\big)^2\,\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t),$$

ou :

$$-\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,\widehat{u}(\xi,t) = \frac{\partial^2\widehat{u}}{\partial t^2}(\xi,t).$$

(b) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé, nous venons de trouver une équation différentielle ordinaire en t du second ordre (ultra-classique !), dont la solution générale est :

$$\widehat{u}(\xi,t) = A(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)+B(\xi)\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big).$$

Mais à cause des conditions initiales posées, qui deviennent après transformation de Fourier :

$$\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \frac{\partial\widehat{u}}{\partial t}(\xi,0) = \widehat{g}(\xi),$$

il est clair qu'on a nécessairement :

$$A(\xi) := \widehat{f}(\xi) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad 2\pi\,|\xi|\,B(\xi) = \widehat{g}(\xi).$$

(c) La transformation de Fourier étant un endomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, on peut retrouver $u(x,t)$ par transformation de Fourier *inverse :*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d}\Big[\widehat{f}(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)+\widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi,$$

et cette formule a clairement un sens car l'intégrale converge visiblement — ne serait-ce que parce que $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$ sont à décroissance rapide lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, tandis que $\cos(\bullet)$ et $\sin(\bullet)$ restent bornées.

De plus, en x et en t, on a affaire ici à une intégrale à paramètres $x \in \mathbb{R}^d$ et $t \in \mathbb{R}$, et à nouveau, la décroissance rapide à l'infini de $\widehat{f}$ et de $\widehat{g}$ domine toutes les dérivées partielles de l'intégrale par rapport aux variables $x_1, \dots, x_d$ et t.

Donc la fonction $u(x,t)$ représentée par cette formule est bien $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

(d) Par dérivation sous le signe d'intégration, on a d'une part, pour $k \in \{1, \dots, d\}$ quelconque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \int_{\mathbb{R}^d} \Big[\widehat{f}(\xi) \cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big) + \widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,\big(2i\pi\,\xi_k\big)^2\, e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi,$$

d'où :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} &= \Big(-\,4\,\pi^2\,\xi_1^2 - \cdots - 4\,\pi^2\,\xi_d^2\Big)\,u(x,t)\\ &= -\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,u(x,t),\end{aligned}$$

et on a d'autre part :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \int_{\mathbb{R}}^{d} \Big[-\,\big(2\pi\,|\xi|\big)^2\,\widehat{f}(\xi)\cos\big(2\pi\,|\xi|\,t\big) - \big(2\pi\,|\xi|\big)^2\,\widehat{g}(\xi)\,\frac{\sin\big(2\pi\,|\xi|\,t\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi\\ &= -\,4\,\pi^2\,|\xi|^2\,u(x,t),\end{aligned}$$

ce qui montre que cette expression intégrale satisfait bien l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

(e) Pour $t = 0$, il vient :

$$\begin{aligned}u(t,0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi\\ &= f(x),\end{aligned}$$

car on a $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, et on sait d'après le cours que f est égale à la transformée de Fourier *inverse* de $\widehat{f}$.

(f) Ensuite, en différentiant par rapport à t en $t = 0$, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Big[0 + 2\pi\,|\xi|\,\widehat{g}(\xi)\,\frac{\cos\big(2\pi\,|\xi|\,0\big)}{2\pi\,|\xi|}\Big]\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi)\,e^{2i\pi x\cdot\xi}\,d\xi\\ &= g(x),\end{aligned}$$

de nouveau grâce au fait que $\widehat{g} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$.

(g) Oui dans les deux cas, grâce à la formule de Leibniz, et grâce au fait que la décroissance forte à l'infini de $\widehat{f}$ et de $\widehat{g}$ ainsi que de toutes leurs dérivées partielles *domine — neutralise ! —* tous les facteurs polynomiaux en ξ qui proviennent des dérivées de $\cos\big(2\pi|\xi|\,t\big)$ et de $\frac{\sin(2\pi|\xi|\,t)}{2\pi\,|\xi|}$ — les détails « *maniaco-masochistes* » s'avérant quelque peu fastidieux à écrire ...

(h) $\boxed{\textbf{Fill ??}}$

Exercice 3. **(a)** Comme $y \longmapsto A(x,y)$ est mesurable pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, son produit avec la fonction mesurable $f(y)$ est encore mesurable.

Ensuite, pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$, comme on a $|f(y)| \leqslant \|f\|_{L^\infty}$ pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, l'intégrale qui définit $Tf(x)$ est convergente (existe), car :

$$\begin{aligned}
\big|Tf(x)\big| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,\big|f(x)\big|\,dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dy \cdot \|f\|_{L^\infty} \\
\text{[Hypothèse]}\qquad &\leqslant C_0 \cdot \|f\|_{L^\infty} \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

Donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la valeur $Tf(x)$ calculée par une intégrale est bien définie et donne un nombre réel unique qui appartient à $\mathbb{R}$.

(b) Nous savons que les produits de fonctions mesurables sont encore mesurables, donc il est clair que $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est mesurable.

Ensuite, pour déterminer si $A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, à savoir si l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \Big|A(x,y)\,f(y)\,g(x)\Big|\,d(x,y) \;\overset{?}{<}\; \infty,$$

est finie, en remarquant que $A(x,y) \geqslant 0$, nous savons que le théorème de Tonelli permet de tester cela au moyen d'intégrales unidimensionnelles itérées :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,\big|f(y)\,g(x)\big|\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy\bigg)\,|g(x)|\,dx \\
\text{[Hypothèse]}\qquad &\leqslant C_0\,\|f\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} |g(x)|\,dx \\
&= C_0\,\|f\|_{L^\infty}\,\|g\|_{L^1} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(c) Comme $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)\,g(x)$ est mesurable-intégrable *sur* $\mathbb{R}^2$, le théorème de Fubini nous assure alors que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$\begin{aligned}
x \;\longmapsto\; &\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,g(x)\,dy \\
&= Tf(x)\,g(x),
\end{aligned}$$

est mesurable, avec de plus :

$$\int_{\mathbb{R}} Tf(x)\,g(x)\,dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,f(y)\,g(x)\,d(x,y),$$

ce qui montre que $x \longmapsto Tf(x)\,g(x)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$.

(d) Nous savons que $Tf(x)\,g(x)$ est mesurable pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et il s'agit maintenant d'éliminer ce facteur g. Or la fonction continue (mesurable) jamais nulle :

$$g(x) \;:=\; \begin{cases} 1 & \text{pour } \; 0 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{pour } \; 1 < |x|, \end{cases}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$, et comme son inverse $\frac{1}{g(x)}$ est encore mesurable car continu, le produit suivant est mesurable :

$$Tf(x)\,g(x)\,\tfrac{1}{g(x)} \,=\, Tf(x).$$

(e) La linéarité de T est claire. Comme $x \longmapsto Tf(x)$ est mesurable, on peut se poser la question, avec $f \in L^\infty(\mathbb{R})$, de savoir si l'on a aussi $Tf \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Et c'est bien le cas, grâce à la Question **(a)** qui nous a fait voir que l'on a $\big|Tf(x)\big| \leqslant C_0\,\|f\|_{L^\infty}$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, majoration qui, d'ailleurs, fournit immédiatement l'inégalité demandée $|\!|\!|T|\!|\!| \leqslant C_0\,\|f\|_{L^1}$.

(f) Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R})$. Grâce au théorème de Tonelli et grâce à l'hypothèse faite au début sur $A(x,y)$, nous obtenons une inégalité :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,|f(y)|\,d(x,y) \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dx\bigg)\,dy \\
&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,dx\bigg)\,|f(y)|\,dy \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}} C_0\,|f(y)|\,dy \\
&=\, C_0\,\|f\|_{L^1} \,<\, \infty,
\end{aligned}$$

qui montre que la fonction $(x,y) \longmapsto A(x,y)\,f(y)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Alors le théorème de Fubini nous assure que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction-tranche $y \longmapsto A(x,y)\,f(y)$ est mesurable et intégrable. Ainsi, pour ces presque tous $x \in \mathbb{R}$, la valeur :

$$Tf(x) \,:=\, \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy,$$

est bien définie, et le théorème de Fubini assure de plus que $x \longmapsto Tf(x)$ est intégrable, avec comme valeur :

$$\int_{\mathbb{R}} Tf(x)\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,f(y)\,d(x,y).$$

Enfin, il est clair, grâce à ce que nous avons constaté au début de la question, que :

$$\begin{aligned}
\big\|Tf\big\|_{L^1} \,&=\, \int_{\mathbb{R}} \big|Tf(x)\big|\,dx \\
&=\, \int_{\mathbb{R}} \bigg|\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy\bigg|\,dx \\
&\leqslant\, \int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,|f(y)|\,d(x,y) \\
&\leqslant\, C_0\,\|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

(g) D'après le théorème de Tonelli (valable pour les fonctions réelles à valeurs $\geqslant 0$) appliqué à $\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,f(y)\,d(x,y)$, chacune des deux fonctions intégrale-tranche possible est mesurable — éventuellement à valeurs égales à ∞ sur un ensemble mesurable de mesure > 0.

Ainsi, la fonction intégrale-tranche :

$$x \,\longmapsto\, \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy \,=\, Tf(x),$$

de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, est mesurable.

(h) L'astuce consiste à appliquer l'inégalité de Hölder en « découpant » la fonction A en deux quartiers d'orange nappés de caramel, comme suit :

$$\begin{aligned} Tf(x) &= \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \underline{\Big[A(x,y)\Big]^{\frac{1}{\mathsf{p}}} f(y)}\ \underline{\Big[A(x,y)\Big]^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}}\, dy \\ &\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(A(x,y)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} f(y)\Big)^{\mathsf{p}} dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} \Big(A(x,y)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\Big)^{\frac{1}{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}} dy\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}} \\ &= \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, dy\bigg)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}, \end{aligned}$$

pour en déduire, grâce à l'hypothèse faite sur $A(x,y)$, que :

$$Tf(x) \leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}.$$

(i) En prenant les puissances p-ièmes et en appliquant l'inégalité obtenue à l'instant, nous pouvons calculer afin d'atteindre l'inégalité demandée :

$$\begin{aligned} \Big(\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_{\mathbb{R}} \big(Tf(x)\big)^{\mathsf{p}}\, dx \\ &\leqslant \Big(C_0^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy\bigg) dx \\ \text{[Tonelli]} \qquad &\leqslant C_0^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}} \bigg(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, dx\bigg) f(y)^{\mathsf{p}}\, dy \\ \text{[Hypothèse]} \qquad &\leqslant C_0^{\mathsf{p}-1} \int_{\mathbb{R}} C_0\, f(y)^{\mathsf{p}}\, dy \\ &= C_0^{\mathsf{p}} \Big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}}. \end{aligned}$$

(j) Tout ce qui précède s'applique à la fonction positive $x \longmapsto |f(x)|$. L'inégalité obtenue à l'instant :

$$\big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant C_0 \big\||f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}} = C_0\, \|f\|_{L^{\mathsf{p}}},$$

montre que $T|f| \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$.

On en déduit que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, la valur $T|f|(x) < \infty$ est finie, et donc, pour ces presque tous x, la fonction $y \longmapsto A(x,y)\, f(y)$ est intégrable en y, ce qui permet de définir $Tf(x) := \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, dy$, en décidant d'attribuer la valeur $Tf(x) := 0$ aux autres x, « perdus dans les limbres de la poussière nulle ».

(k) Pour établir la mesurabilité de la fonction $x \longmapsto Tf(x)\, g(x)$, nous allons à nouveau raisonner « indirectement », en appliquant Tonelli-Fubini.

Considérons donc encore la fonction mesurable $(x,y) \longmapsto A(x,y)\, f(y)\, g(x)$, et cherchons à démontrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, de telle sorte que Fubini offrira la mesurabilité de la fonction-tranche :

$$x \longmapsto \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, f(y)\, g(x)\, dy = Tf(x)\, g(x).$$

Grâce à Tonelli qui permet d'évaluer l'intégrale sur $\mathbb{R}^2$ d'une fonction positive comme intégrale itérée, et grâce à Hölder, tout fonctionne « comme sur des roulettes » :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} A(x,y)\,|f(y)|\,|g(x)|\,d(x,y) &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy\right) |g(x)|\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} T|f|(x)\,|g(x)|\,dx \\
&\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}} \Big(T|f|(x)\Big)^{\mathsf{p}} dx\right)^{\frac{1}{\mathsf{p}}} \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^{\mathsf{q}}\,dx\right)^{\frac{1}{\mathsf{q}}} \\
&= \big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\ \|g\|_{L^{\mathsf{q}}} \\
&\leqslant C_0\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\ \|g\|_{L^{\mathsf{q}}}.
\end{aligned}$$

(l) Comme dans la Question **(d)**, la fonction continue (mesurable) jamais nulle :

$$g(x) \ := \begin{cases} 1 & \text{pour } \ 0 \leqslant |x| \leqslant 1, \\ \frac{1}{|x|^{\frac{2}{\mathsf{q}}}} & \text{pour } \ 1 < |x|, \end{cases}$$

appartient à $L^{\mathsf{q}}(\mathbb{R})$, et comme son inverse $\frac{1}{g(x)}$ est encore mesurable car continu, le produit suivant est mesurable :

$$Tf(x)\,g(x)\,\tfrac{1}{g(x)} \ = \ Tf(x).$$

(m) Sachant que :

$$\begin{aligned}
\big|Tf(x)\big| &= \left|\int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,f(y)\,dy\right| \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\,|f(y)|\,dy \\
&= T|f|(x),
\end{aligned}$$

nous pouvons obtenir par le calcul une majoration qui démontre que Tf appartient bien à $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned}
\Big(\big\|Tf\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} &= \int_{\mathbb{R}} \big|Tf(x)\big|^{\mathsf{p}}\,dx \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}} \Big(T|f|(x)\Big)^{\mathsf{p}}\,dx \\
&= \Big(\big\|T|f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\
&\leqslant C_0^{\mathsf{p}} \Big(\big\||f|\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\Big)^{\mathsf{p}} \\
&= C_0^{\mathsf{p}} \big(\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

(n) On voit aisément que A vérifie les deux hypothèses de départ avec la constante $C_0 := \|u\|_{L^1}$.

Ensuite, puisqu'il est clair que :

$$\begin{aligned} Tv(x) &= \int_{\mathbb{R}} A(x,y)\, v(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x-y)\, v(y)\, dy \\ &= u * v\,(x), \end{aligned}$$

on retrouve effectivement la définition du produit de convolution $u * v \in L^1 * L^{\mathsf{p}}$.

En cours au tableau ou dans le polycopié, nous avons démontré que $L^1 * L^{\mathsf{p}} \subset L^{\mathsf{p}}$, avec un exposant quelconque $1 < \mathsf{p} < \infty$.

Ici, à l'extrême fin de cet exercice, nous constatons que tout ce qui précède fournit une autre démonstration, alternative, du même résultat, tout en établissant à nouveau la belle inégalité connue :

$$\begin{aligned} \big\| u * v \big\|_{L^{\mathsf{p}}} &= \big\| Tv \big\|_{L^{\mathsf{p}}} \\ &\leqslant C_0\, \| v \|_{L^{\mathsf{p}}} \\ &= \| u \|_{L^1}\, \| v \|_{L^{\mathsf{p}}}. \end{aligned}$$

Excellente année 2022 ! ! !

Orange-Caramelle, tout dans l'âtre des mignardises

rayonne

illumine la cuisine suspendue

sur l'autre nappage

d'inondations

C'était une peau d'opale, et translucide, sur la pulpe,

craquante comme le fruit sous l'écorce en fusion

C'étaient,

des cristaux de bijoux de confiserie

prêts à nous transmettre leurs gemmes

petites sphères, petits quartiers, petites pommes,
orangescentes

Trêve des Confiseurs, Saint-Sylvestre 2021

15. Examen 8

Exercice 1. Dans $\mathbb{R}^{d\geqslant 1}$ muni de la mesure de Lebesgue $m(\bullet)$, soit une suite $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ d'ensembles mesurables. On pose :

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=0}^{\infty} \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=0}^{\infty} \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p$$

(a) Justifier que ces deux ensembles sont mesurables.

(b) Montrer que :

$$m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \leqslant \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(c) Trouver un exemple montrant que cette inégalité peut être *stricte*.

(d) On suppose qu'il existe un entier $n_0 \geqslant 0$ tel que $m\big(\bigcup_{p\geqslant n_0} A_p\big) < \infty$. Montrer que :

$$m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) \geqslant \limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(e) Trouver un exemple montrant que cette inégalité peut être *stricte*.

Exercice 2. **(a)** Étudier la limite, lorsque $n \longrightarrow \infty$, de la suite numérique :

$$\int_{]0,1]} \left(\cos\frac{1}{x}\right)^n dx = \textbf{?} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(b) Dans le cas $a \leqslant 1$, déterminer, si elle existe, la limite :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}\, dx = \textbf{?}$$

(c) Faire de même dans le cas $a > 1$.

Exercice 3. On note l'ensemble étendu des nombres réels positifs $\overline{\mathbb{R}}_+ := \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Soit une suite $\{f_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de fonctions mesurables *positives* $f_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n.$$

(b) Pour $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable, et pour $x \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$g(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f\big(n+x\big) \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

Montrer que :

$$\int_0^1 g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt.$$

(c) Montrer que si $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ est (Lebesgue-)intégrable, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$0 = \lim_{|n| \to \infty} f\big(n + x\big).$$

(d) A-t-on nécessairement $f(t) \longrightarrow 0$ lorsque $|t| \longrightarrow \infty$ **?**

(e) Soit B un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}$, de mesure de Lebesgue $m(B) < 1$. Montrer que la réunion de ses translatés entiers :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \big(n + B\big) \not\supset \mathbb{R},$$

ne recouvre pas toute la droite réelle $\mathbb{R}$. Indication: On pourra poser $f := \mathbf{1}_B$.

Exercice 4. On considère la fonction à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

(a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. Que vaut $f(0)$?

(b) Déterminer, si elle existe :

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \textbf{?}$$

(c) Montrer que $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $]0, \infty[$, hors l'origine. Indication: Avec $a > 0$ fixé arbitrairement petit proche de 0, on pourra raisonner d'abord sur $]a, \infty[$.

(d) Déterminer, si elle existe :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \textbf{?}$$

Indication: On pourra considérer plutôt $-f'(x_n)$, avec une suite $x_n \longrightarrow 0$, et travailler avec $\liminf$.

Exercice 5. En dimension $d \geqslant 1$, soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ *finie*. Soit $L^1(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables intégrables $f\colon E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

On dit qu'une partie (*i.e.* un sous-ensemble) $\mathscr{H} \subset L^1(E)$ est *uniformément intégrable* si :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \bigg(\sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{\{|f| > n\}} \big|f(x)\big|\, dx \bigg).$$

(a) Montrer que l'on peut bien parler de limite lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(b) La partie infinie suivante de $L^1\big([0,1]\big)$:

$$\mathscr{H}_1 := \Big\{ i\, \mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1}, \frac{1}{i}\right]} \colon\ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \Big\}$$

est-elle uniformément intégrable ?

(c) La partie infinie suivante de $L^1\big([0,1]\big)$:

$$\mathscr{H}_2 := \Big\{ i\, \mathbf{1}_{\left[0, \frac{1}{i}\right]} \colon\ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1} \Big\}$$

est-elle uniformément intégrable ?

(d) Montrer que toute partie $\mathscr{H} \subset L^1(E)$, qui est *dominée* au sens où il existe $g \in L^1(E)$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{H}),$$

est uniformément intégrable. Indication: On pourra introduire la suite :

$$g_n(x) := \begin{cases} g(x) & \text{si } g(x) \leqslant n, \\ 0 & \text{si } g(x) > n. \end{cases}$$

(e) Toute partie uniformément intégrable dans $L^1(E)$ est-elle nécessairement dominée ?

(f) Montrer que toute partie finie $\big\{f_1, \dots, f_{\mathrm{K}}\big\}$ de $L^1(E)$ est uniformément intégrable.

(g) Montrer que si une partie $\mathscr{H} \subset L^1(E)$ est uniformément intégrable, alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites :

(P1) $\sup\limits_{f \in \mathscr{H}} \|f\|_{L^1(E)} < \infty$;

(P2) $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \eta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $A \subset E$:

$$m(A) \leqslant \eta \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_A |f| \leqslant \varepsilon.$$

(h) Réciproquement, montrer que si une famille $\mathscr{H}$ de fonctions $f \in L^1(E)$ définies sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie satisfait **(P1)** et **(P2)**, *alors* elle est uniformément intégrable.

(i) Montrer que si $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une suite convergente dans $L^1(E)$, *i.e.* s'il existe $f \in L^1(E)$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{i \to \infty} \big\|f - f_i\big\|_{L^1(E)},$$

alors la partie $\big\{f_i \colon\ i \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}\big\}$ est uniformément intégrable.

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. (a) D'après le cours, les intersections dénombrables et les réunions dénombrables d'ensembles mesurables sont encore mesurables, donc :

$$B_n := \bigcap_{p=n}^{\infty} A_p \qquad \text{et} \qquad C_n := \bigcup_{p=n}^{\infty} A_p,$$

sont mesurables, puis, pour la même raison :

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = \liminf_{n\to\infty} A_n \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

sont eux aussi, encore mesurables.

(b) Avec $B_n = \cap_{p\geqslant n} A_p$, nous avons une suite croissante $B_n \subset B_{n+1}$ d'ensembles mesurables dont la réunion est $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n$. Donc un théorème vu en cours garantit que :

$$\lim_{n\to\infty} m\big(B_n\big) = m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}.$$

Par ailleurs, $B_n \subset A_p$ pour tout $p \geqslant n$ implique, par monotonie de la mesure :

$$m\big(B_n\big) \leqslant m\big(A_p\big) \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant n),$$

d'où :

$$m\big(B_n\big) \leqslant \inf_{p\geqslant n} m\big(A_p\big),$$

et enfin, en prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) &\leqslant \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{p\geqslant n} m\big(A_p\big)\Big) \\ &= \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big). \end{aligned}$$

(c) Pour $n \geqslant 1$, posons :

$$A_{2n-1} = [-2, 1] \qquad \text{et} \qquad A_{2n} := [-1, 2].$$

Clairement :

$$\begin{aligned} 3 &= m\big(A_{2n-1}\big) = m\big(A_{2n}\big) \qquad (\forall\, n \geqslant 1) \\ [-1, 1] &= \liminf_{n\to\infty} A_n, \end{aligned}$$

d'où une inégalité stricte :

$$m\Big(\liminf_{n\to\infty} A_n\Big) = 2 < 3 = \liminf_{n\to\infty} m\big(A_n\big).$$

(d) Avec $C_n = \cup_{p\geqslant n} A_p$ satisfaisant la décroissance $C_n \supset C_{n+1}$, comme on a :

$$\bigcap_{n\geqslant 0} C_n = \bigcap_{n\geqslant n_0} C_n,$$

il est clair qu'on peut supposer d'emblée que $n_0 = 0$. Alors un théorème du cours, qui requiert expressément cette hypothèse de finitude de la mesure, garantit l'égalité :

$$m\bigg(\bigcap_{n\geqslant 0} C_n\bigg) = \lim_{n\to\infty} m\big(C_n\big).$$

Par ailleurs, $C_n \supset A_p$ pour $p \geqslant n$ implique par monotonie de la mesure que :

$$m\big(C_n\big) \geqslant m\big(A_p\big) \qquad\qquad (\forall\, p \geqslant n),$$

d'où :

$$m\big(C_n\big) \geqslant \sup_{p\geqslant n} m\big(A_p\big),$$

et enfin, en prenant la limite quand $n \longrightarrow \infty$, nous obtenons bien :

$$\begin{aligned} m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big) &\geqslant \lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{p\geqslant n} m\big(A_p\big)\Big) \\ &= \limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big). \end{aligned}$$

(e) Le même exemple qu'à la solution de la Question **(c)** fonctionne, et donne :

$$[-2,2] = \limsup_{n\to\infty} A_n,$$

d'où :

$$\limsup_{n\to\infty} m\big(A_n\big) = 3 < 4 = m\Big(\limsup_{n\to\infty} A_n\Big).$$

Exercice 2. **(a)** Soit $A = \{(k\pi)^{-1}, k \in \mathbb{Z}\}$. On remarque que $\cos(1/x)$ vaut ± 1 si $(1/x) \in \pi\mathbb{Z}$, c'est-à-dire $x \in A$, mais dès que $x \notin A$, on a

$$|\cos(1/x)| < 1 \Rightarrow (\cos 1/x)^n \to 0.$$

Or A est dénombrable donc de mesure nulle. Donc, pour presque tout x dans $]0,1]$, $(\cos(1/x))^n$ tend vers 0. De plus, cette suite est bornée par 1, qui est une fonction intégrable sur $]0,1]$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{]0,1]} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^n dx \to 0.$$

(b) Si $a \leqslant 1$, le lemme de Fatou donne

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x)dx \geq \int_{[0,\infty[} \exp(x(1-a))dx = +\infty$$

et donc la suite $\int_{[0,\infty[} f_n(x)dx$ tend vers l'infini.

(c) Posons $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-ax}$. On remarque que ces fonctions sont positives. De plus

$$f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - ax\right) = \exp\left(n\left(\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right)\right) - ax\right) \to \exp(x(1-a)).$$

Cette dernière fonction est intégrable sur $[0,\infty[$ si et seulement si $a > 1$. Si $a > 1$, on peut utiliser le théorème de convergence dominée, puisqu'on a la domination

$$f_n(x) = \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - ax\right) \leq \exp\left(n\left(\frac{x}{n}\right) - ax\right) \leq \exp(x(1-a))$$

(avec $\exp(x(1-a))$ intégrable qui ne dépend pas de n). Donc , si $a > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,\infty[} f_n(x)dx = \int_{[0,\infty[} \exp(x(1-a))dx = \frac{1}{a-1}.$$

Exercice 3. (a) C'est une application directe du théorème de convergence monotone.

(b) La fonction g est mesurable comme limite des fonctions mesurables $\sum_{-N}^{N} f(x+n)$. Comme f est positive, on a par théorème de convergence monotone — utilisé deux fois, la première fois comme dans la Question **(a)** — :

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(t)dt = \int_{[0,1[} \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(t+n)\Big)\, dt &\overset{\mathsf{CM}}{=} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[0,1[} f(t+n)dt \\ = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{[n,n+1[} f(t)dt &\overset{\mathsf{CM}}{=} \int_{\mathbb{R}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{[n,n+1[}(t)f(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt.\end{aligned}$$

(c) Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\int_0^1 g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt < +\infty$ et g est intégrable sur $[0,1[$. On a donc g finie presque partout sur $[0,1[$, mettons sauf sur A. Comme g est périodique de période 1, elle est finie sauf sur $B = \cup_{n\in\mathbb{Z}}(n+A)$ qui est aussi de mesure nulle comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. La série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ est donc convergente (dans $\mathbb{R}^+$) si $x \notin B$. On en déduit que son terme général $f(x+n)$ doit tendre vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$ si $x \notin B$.

(d) On n'a pas nécessairement pour autant f de limite nulle en ∞, comme le montre par exemple $f = \sum_{n\geq 1} n\mathbf{1}_{[n,n+n^{-3}]}$.

(e) On considère $f = \mathbf{1}_B$. Alors

$$g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_B(n+x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathbf{1}_{B-n}(x) = \mathrm{Card}\{n \in \mathbb{Z} \mid x \in B-n\}\,.$$

En particulier $g \geq \mathbf{1}_A$ avec $A = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}(n+B)$. Alors d'après 1, on a

$$m(A \cap [0,1[) = \int_0^1 \mathbf{1}_A(t)dt \leq \int_0^1 g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = m(B) < 1\,.$$

L'ensemble A ne peut donc pas recouvrir $[0,1[$, encore moins $\mathbb{R}$.

Exercice 4. (a) La fonction de deux variables :

$$(x,t) \longmapsto \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2},$$

définie pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $t \in \mathbb{R}_+$, est, grâce à :

$$0 < e^{-x\,t^2} \leqslant 1,$$

dominée par une fonction manifestement Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+$:

$$\big(0 \leqslant\big) \quad \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2}.$$

Comme pour tout t fixé, la fonction $x \longmapsto \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}$ est continue, un théorème du cours garantit que l'intégrale à paramètre :

$$x \longmapsto \int_0^\infty \frac{e^{-x\,t^2}}{1+t^2}\, dt,$$

est bien une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Enfin, il est clair que :

$$f(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \big[\arctan t\big]_0^\infty = \tfrac{\pi}{2}.$$

(b) Soit une suite quelconque $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ de réels $x_n \longrightarrow \infty$. Grâce à la domination par une fonction intégrable :

$$\big(0 <\big) \quad \frac{e^{-x_n\, t^2}}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{1+t^2},$$

le théorème de convergence dominée s'applique, et donne instantanément :

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \int_{]0,\infty[} \frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}\, dt \\ &= \int_{]0,\infty[} \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-x_n\, t^2}}{1+t^2}\, dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

Comme la suite $x_n \longrightarrow \infty$ était quelconque, nous concluons que :

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

(c) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ fixé, la fonction à intégrer $x \longmapsto \frac{e^{-x\, t^2}}{1+t^2}$ est continûment dérivable, de dérivée :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x\, t^2}}{1+t^2}\right) = -\frac{t^2\, e^{-x\, t^2}}{1+t^2}.$$

Soit $a > 0$ arbitrairement proche de 0. Sur l'intervalle $]a, \infty[$ strictement inclus dans $]0, \infty[$, on peut majorer cette dérivée par une fonction-dominatrice *indépendante du paramètre x :*

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^{-x\, t^2}}{1+t^2}\right)\right| &= t^2\, \frac{e^{-x\, t^2}}{1+t^2} \\ &\leqslant t^2\, \frac{e^{a\, t^2}}{1+t^2} \\ &\leqslant e^{-a\, t^2}, \end{aligned}$$

qui est Lebesgue-intégrable par rapport à t sur $\mathbb{R}_+$, grâce à $a > 0$ et à la décroissance rapide à l'infini de $t \longmapsto e^{-a\, t^2}$.

Ainsi, les hypothèses du théorème de dérivabilité sous le signe intégral sont vérifiées, et donc, la fonction $x \longmapsto f(x)$ est dérivable sur $]a, \infty[$, de dérivée :

$$f'(x) = -\int_0^\infty t^2\, \frac{e^{-x\, t^2}}{1+t^2}\, dt.$$

Comme $a > 0$ était arbitraire, et comme :

$$\bigcup_{a>0}\,]a, \infty[\; = \;]0, \infty[,$$

nous concluons que cela est vrai pour $x \in]0, \infty[$.

(d) Soit donc une suite quelconque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels strictement positifs $x_n \longrightarrow \infty$. En changeant de signe la dérivée partielle de l'intégrande par rapport à x, posons :

$$g_n(t) \,:=\, t^2\,\frac{e^{-x_n t^2}}{1+t^2}.$$

Chaque g_n est continue sur $\mathbb{R}_+$, donc mesurable, et positive. Donc le théorème de Fatou-qui-fait-tout s'applique :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\Big(-\,f'(x_n)\Big) \,=\, \liminf_{n\to\infty}\int_0^\infty g_n(t)\,dt \;&\overset{\text{Fatou}}{\geqslant}\; \int_0^\infty \liminf_{n\to\infty} g_n(t)\,dt \\
&=\, \int_0^\infty \frac{t^2}{1+t^2}\,dt \\
&=\, \int_0^\infty \Big(1-\frac{1}{1+t^2}\Big)\,dt \\
&=\, \infty,
\end{aligned}$$

et donc :

$$\lim_{n\to\infty}\Big(-\,f'(x_n)\Big) \,=\, \infty,$$

d'où nous concluons :

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} f'(x) \,=\, -\infty.$$

Exercice 5. **(a)** Regardons la suite numérique $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$c_n \,:=\, \sup_{f\in\mathscr{H}}\int_{\{|f|>n\}} |f|.$$

Pour $0 \leqslant n < n+1$, comme :

$$\big\{|f|>n+1\big\} \,\subset\, \big\{|f|>n\big\},$$

il est clair que pour toute $f\in\mathscr{H}$:

$$\begin{aligned}
\int_{\{|f|>n+1\}} |f| \,&\leqslant\, \int_{\{|f|>n\}} |f| \\
&\leqslant\, \sup_{g\in\mathscr{H}}\int_{\{|g|>n\}} |g|,
\end{aligned}$$

et enfin, en prenant à gauche le supremum pour $f\in\mathscr{H}$, il vient :

$$\sup_{f\in\mathscr{H}}\int_{\{|f|>n+1\}} |f| \,\leqslant\, \sup_{g\in\mathscr{H}}\int_{\{|g|>n\}} |g|,$$

ce qui signifie la *décroissance* de la suite positive $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$\big(0\leqslant\big)\qquad c_{n+1} \,\leqslant\, c_n,$$

laquelle possède donc bien une certaine limite appartenant à $\mathbb{R}_+$.

(b) Notons $\mathscr{H}_1 := \{f_i\}_{i=1}^{\infty}$, et regardons :

$$\sup_{i\geqslant 1}\int_{\{|f_i|>n\}} \big|f_i(x)\big|\,dx.$$

Pour un entier $n \longrightarrow \infty$, nous avons :

$$\Big\{x \in [0,1] \colon \ i\,\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1},\,\frac{1}{i}\right]}(x) > n\Big\} \ = \ \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \left[\frac{1}{i+1},\ \frac{1}{i}\right] & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

donc :

$$\int_{\{|f_i|>n\}} |f_i| \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \displaystyle\int_{\left[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right]} i & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

donc en calculant $i\left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{i}\right) = \frac{1}{i+1}$, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{i\geqslant 1} \int_{\{|f_i|>n\}} |f_i| \ &= \ \sup_{i\geqslant 1} \Big\{0,\ \left\{\tfrac{1}{i+1}\right\}_{i\geqslant n+1}\Big\} \\ &= \ \frac{1}{n+2} \ \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \ 0, \end{aligned}$$

et ainsi, $\mathscr{H}_1$ *est* uniformément intégrable.

(c) Éh bien, cette fois-ci, non !

En effet, notons $\mathscr{H}_2 = \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$, fixons un entier n qui tendra vers ∞, et observons que :

$$\Big\{x \in [0,1] \colon \ i\,\mathbf{1}_{\left[0,\,\frac{1}{i}\right]}(x) > n\Big\} \ = \ \begin{cases} \emptyset & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \left[0,\ \frac{1}{i}\right] & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

d'où :

$$\int_{\{|g_i|>n\}} |g_i| \ = \ \begin{cases} 0 & \text{si } \ i \leqslant n, \\ \displaystyle\int_{\left[0,\frac{1}{i}\right]} i & \text{si } \ i \geqslant n+1, \end{cases}$$

et comme $i\left(\frac{1}{i} - 0\right) = 1$, il vient :

$$\begin{aligned} \sup_{i\geqslant 1} \int_{\{|g_i|>n\}} |g_i| \ &= \ \sup_{i\geqslant 1} \Big\{0,\ \{1\}_{i\geqslant n+1}\Big\} \\ &= \ 1, \end{aligned}$$

constante qui ne *tend pas* vers 0 lorsque $n \longrightarrow \infty$, et ainsi, la famille $\mathscr{H}_2$ *n'est pas* uniformément intégrable — tant pis pour elle !

(d) D'abord, quand $n \longrightarrow \infty$, introduisons :

$$g_n(x) \ := \ \begin{cases} g(x) & \text{si } \ g(x) \ \leqslant \ n, \\ 0 & \text{si } \ g(x) \ > \ n. \end{cases}$$

Ces $g_n \geqslant 0$ sont positives, tendent vers $g(x) = \lim\limits_{n\to\infty} g_n(x)$, et satisfont :

$$0 \ \leqslant \ g_n(x) \ \leqslant \ g_{n+1}(x) \ \leqslant \ g(x),$$

donc le théorème de convergence monotone donne :

$$\int_E g_n \ \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \ \int_E g,$$

d'où :

$$(0 \ \leqslant \ ) \qquad\qquad \int_E \big(g - g_n\big) \ \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ } \ 0.$$

Mais comme $g(x) - g_n(x)$ vaut 0 si $g(x) \leqslant n$ et vaut $g(x)$ si $g(x) > n$, cette dernière intégrale est égale à :

$$\int_E \big(g - g_n\big) \,=\, \int_{\{g>n\}} g \ \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ }\ 0.$$

Ensuite, comme pour toute $f \in \mathscr{H}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité de domination :

$$n \,<\, \big|f(x)\big| \,\leqslant\, g(x),$$

donne :

$$\big\{|f| > n\big\} \,\subset\, \big\{g > n\big\},$$

il vient :

$$\sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \,\leqslant\, \int_{\{g>n\}} g \ \xrightarrow[]{\ n\to\infty\ }\ 0,$$

ce qui prouve que $\mathscr{H}$ est uniformément intégrable.

(e) *Ah que non !* Revenons à $\mathscr{H}_1$ de la Question **(b)** qui était uniformément intégrable. S'il existait g positive intégrable qui dominait toutes les f_i (qui sont positives) :

$$0 \,\leqslant\, f_i(x) \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (i \geqslant 1,\ x \in [0,1]),$$

c'est-à-dire si :

$$0 \,\leqslant\, i\,\mathbf{1}_{\left[\frac{1}{i+1},\frac{1}{i}\right]}(x) \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (i \geqslant 1,\ x \in [0,1]),$$

comme on a la réunion presque disjointe :

$$\big]0,1\big] \,=\, \bigcup_{i=1}^{\infty} \big[\tfrac{1}{i+1}, \tfrac{1}{i}\big],$$

il viendrait :

$$0 \,\leqslant\, \sum_{i=1}^{\infty} i\,\big(\tfrac{1}{i} - \tfrac{1}{i+1}\big) \,\leqslant\, \int_{]0,1]} g(x)\,dx$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tfrac{1}{i+1} \,=\, \infty \,\leqslant\, \int_{]0,1]} g,$$

ce qui forcerait g à ne pas être Lebesgue-intégrable — contradiction.

(f) Comme $\int_E |f_1| < \infty$, ..., $\int_E |f_{\mathrm{K}}| < \infty$, cette partie finie est dominée par la fonction positive appartenant à $L^1(E)$:

$$g \,:=\, |f_1| + \cdots + |f_{\mathrm{K}}|,$$

c'est-à-dire :

$$\big(0 \,\leqslant\big) \qquad \big|f_k(x)\big| \,\leqslant\, g(x) \qquad\qquad (1 \leqslant k \leqslant \mathrm{K},\ x \in E),$$

donc la réponse est un corollaire direct de la Question **(d)**.

(g) Prouvons **(P1)**. Comme :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f|,$$

il existe $\mathrm{N}_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$n \,\geqslant\, \mathrm{N}_1 \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \,\leqslant\, 1.$$

Prenons alors $n := \mathrm{N}_1$. Pour $f \in \mathscr{H}$ quelconque, nous avons :

$$\begin{aligned}\int_E |f| &= \int_{\{|f| \leqslant \mathrm{N}_1\}} |f| + \int_{\{|f| > \mathrm{N}_1\}} |f| \\ &\leqslant m(E) \cdot \mathrm{N}_1 + 1,\end{aligned}$$

d'où **(P1)** :

$$\begin{aligned}\sup_{f \in \mathscr{H}} \int_E |f| &\leqslant m(E) \cdot \mathrm{N}_1 + 1 \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Prouvons ensuite **(P2)**. Choisissons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. À nouveau, comme par hypothèse :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{\{|f| > n\}} |f|,$$

il existe $\mathrm{N}(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} \int_{\{|f| > n\}} |f| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Prenons $n := \mathrm{N}(\varepsilon)$, et prenons $A \subset E$ mesurable avec :

$$m(A) \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2\,\mathrm{N}(\varepsilon)} =: \eta(\varepsilon).$$

Alors pour toute $f \in \mathscr{H}$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\int_A |f| &= \int_{A \cap \{|f| \leqslant \mathrm{N}(\varepsilon)\}} |f| + \int_{A \cap \{|f| > \mathrm{N}(\varepsilon)\}} |f| \\ &\leqslant m(A) \cdot \mathrm{N}(\varepsilon) + \tfrac{\varepsilon}{2} \\ &\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

ce qui est **(P2)**.

(h) Pour $n \in \mathbb{N}$, introduisons les sous-ensembles mesurables de E :

$$A_{f,n} := \big\{|f| > n\big\},$$

avec l'objectif d'estimer uniformément :

$$\int_{A_{f,n}} |f| = \int_{\{|f| > n\}} |f|.$$

Nous affirmons que si nous démontrons que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \sup_{f \in \mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big),$$

alors $\mathscr{H}$ est uniformément intégrable.

En effet, ceci s'exprime comme :

$$\forall\, \eta > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\eta) \gg 1 \quad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\eta) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f \in \mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big) \leqslant \eta \Big).$$

Si donc cela est vrai, fixons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et trouvons $\eta(\varepsilon) > 0$ assez petit comme dans **(P2)**, c'est-à-dire :

$$m(A) \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\int_A |f| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, f \in \mathscr{H} \Big).$$

Alors avec $A := A_{f,n}$ qui satisfait $m\big(A_{f,n}\big) \leqslant \eta(\varepsilon)$, il vient pour tout $n \geqslant \mathrm{N}\big(\eta(\varepsilon)\big)$:

$$\int_{A_{f,n}} |f| \leqslant \varepsilon, \qquad \forall\, f \in \mathscr{H},$$

d'où l'uniforme intégrabilité :

$$n \geqslant \mathrm{N}\big(\eta(\varepsilon)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \sup_{f\in\mathscr{H}} \int_{\{|f|>n\}} |f| \leqslant \varepsilon.$$

Il reste à faire voir que :

$$d_n := \sup_{f\in\mathscr{H}} m\big(A_{f,n}\big) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Raisonnons par l'absurde, en supposant que $d_n \not\to 0$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. Clairement, l'inclusion $\big\{|f| > n+1\big\} \subset \big\{|f| > n\big\}$ donne la décroissance :

$$d_n \geqslant d_{n+1} \geqslant \cdots \geqslant 0,$$

et donc $d_n \not\to 0$ s'exprime par l'existence d'un $\delta > 0$ tel que :

$$d_n > \delta > 0 \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1),$$

c'est-à-dire d'après la définition d'un supremum comme dans d_n :

$$\exists\,\delta > 0 \quad \forall\, n \geqslant 1 \quad \exists\, f_n \in \mathscr{H} \quad m\big(A_{f_n,n}\big) > \delta > 0,$$

ce qui implique :

$$\begin{aligned}\|f_n\|_{L^1(E)} &\geqslant \int_{A_{f_n,n}} \big|f_n\big| \\ &\geqslant \delta\cdot n \\ &\xrightarrow{n\to\infty} \infty,\end{aligned}$$

en contradiction manifeste avec **(P1)**.

(i) Appliquons la Question **(h)** et montrons que **(P1)**, **(P2)** sont satisfaites.
Pour **(P1)**, utilisons l'existence d'un entier I tel que :

$$i \geqslant \mathrm{I} \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|f_i - f\big\|_{L^1} \leqslant 1,$$

d'où pour tout $i \geqslant \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned}\big\|f_i\big\|_{L^1} &\leqslant \big\|f_i - f\big\|_{L^1} + \|f\|_{L^1} \\ &\leqslant 1 + \|f\|_{L^1},\end{aligned}$$

puis, obtenons **(P1)** :

$$\begin{aligned}\sup_{i\geqslant 1} \big\|f_i\big\|_{L^1(E)} &\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant \mathrm{I}-1} \big\|f_i\big\|_{L^1} + 1 + \|f\|_{L^1} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Traitons enfin **(P2)**. Par hypothèse :

$$\forall\,\varepsilon > 0 \quad \exists\,\mathrm{I}(\varepsilon) \gg 1 \quad \Big(i \geqslant \mathrm{I}(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad \big\|f_i - f\big\|_{L^1} \leqslant \varepsilon \Big),$$

Or d'après un théorème du cours, **(P2)** est vraie pour une fonction donnée $f \in L^1(E)$, et de plus, par un raisonnement élémentaire, **(P2)** est vraie aussi pour un nombre fini de fonctions

$f_i \in L^1(E)$, ce qui donne, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit l'existence de $\eta(\varepsilon) > 0$ tel que pour tout $A \subset E$ mesurable :

$$
\begin{aligned}
m(A) \leqslant \eta(\varepsilon) \qquad & \Longrightarrow \qquad \int_A |f| \leqslant \varepsilon, \\
& \Longrightarrow \qquad \int_A |f_i| \leqslant \varepsilon \quad \forall\, 1 \leqslant i \leqslant \mathrm{I}(\varepsilon) - 1,
\end{aligned}
$$

d'où en conclusion pour tous $i \geqslant \mathrm{I}(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
\int_A |f_i| &\leqslant \int_A |f - f_i| + \int_A |f| \\
&\leqslant \int_E |f - f_i| + \varepsilon \\
&\leqslant \varepsilon + \varepsilon.
\end{aligned}
$$

17. Examen 9

Exercice 1. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un ensemble mesurable, soit un exposant réel $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, et soit une suite $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^{\mathsf{p}}(E, \mathbb{C})$, *i.e.* $\int_E |f_n|^{\mathsf{p}} < \infty$, qui satisfont l'hypothèse de domination uniforme :

$$\big|f_n(x)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x) \qquad\qquad (\forall\, n \geqslant 1,\ \text{p.p.}\, x \in E),$$

par une certaine fonction positive intégrable $g \in L^1(E, \mathbb{R}_+)$.

On suppose que cette suite $f_n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$ converge simplement presque partout vers une certaine fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$.

(a) Montrer que $\big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \leqslant 2^{\mathsf{p}}\, g$.

(b) Pour $\mathrm{M} \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on introduit :

$$E_{\mathrm{M}} := \big\{x \in E \colon\ |x| \leqslant \mathrm{M} \text{ et } g(x) \leqslant \mathrm{M}\big\},$$

ainsi que la suite :

$$g_{\mathrm{M}} := g \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}.$$

Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$, qu'il existe un entier $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\int_{E \setminus E_M} g \leqslant \varepsilon.$$

(c) On fixe $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon)$, et sur E_{M}, on considère la suite de fonctions :

$$\big\{f_n \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}\big\}_{n=1}^{\infty} \qquad\qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer, pour tout $\delta > 0$, qu'il existe un sous-ensemble mesurable $F_{\mathrm{M},\delta} \subset E_{\mathrm{M}}$ (dépendant aussi de ε), et un entier $\mathrm{N}(\delta) \gg 1$, tels que, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$, on ait :

$$\int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}} \setminus F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \leqslant m(E_{\mathrm{M}}) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M}.$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(e) Montrer que $f \in L^{\mathsf{p}}(E)$.

Exercice 2. On devra utiliser, à un certain moment, le résultat de l'Exercice 1. Sur $\mathbb{R}$, soit une fonction $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ à valeurs complexes telle que $f \in L^2(\mathbb{R})$ *ainsi que* $f' \in L^2(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que $f \cdot f' \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Montrer l'existence des deux limites :

$$\lim_{-\infty \leftarrow x} f(x)^2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} f(x)^2.$$

Indication: Intégrer sur $[-\mathrm{R}, \mathrm{S}]$.

(c) Montrer que ces deux limites valent 0. Indication: Raisonner par l'absurde.

(d) On note $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$, car l'écriture $\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x} f(x)\, dx$ n'est pas toujours légitime — sauf lorsque $f \in L^1(\mathbb{R})$, ici si $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, *cf.* le cours polycopié.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}_{\geqslant 1}$, on pose :

$$f_n(x) \,:=\, f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,n]}(x).$$

Justifier que $f_n \in L^2$, puis, montrer que :

$$0 \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\| f_n - F \big\|_{L^2}.$$

(e) Justifier que $f_n \in L^1$, puis, montrer que $\widehat{f_n}$ converge *en norme* L^2 vers $\mathscr{F}(f)$.

(f) Montrer qu'il existe une sous-suite $\big\{ \widehat{f}_{n_k}(\xi) \big\}_{k=1}^{\infty}$ de la suite $\{ \widehat{f}_n(\xi) \}_{n=1}^{\infty}$ qui converge en presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ ponctuellement vers $\mathscr{F}(f)(\xi)$.

(g) On pose :

$$f_n^1(x) \,:=\, f'(x)\, \mathbf{1}_{[-n,n]}(x).$$

Justifier que $f_n^1 \in L^1$, puis, montrer que $\widehat{f_n^1}$ converge en norme L^2 vers $\mathscr{F}(f')$.

(h) Établir la formule :

$$\mathscr{F}(f')(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\, \mathscr{F}(f)(\xi).$$

Exercice 3. Sur $\mathbb{R}_+^*$, soit une fonction mesurable $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ à valeurs complexes de carré intégrable.

(a) Montrer que l'on peut, pour tout $x > 0$, définir :

$$F(x) \,:=\, \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}\, dt.$$

Indication: Penser à Cauchy-Schwarz.

(b) Montrer que F est continûment dérivable sur tout intervalle $]a, \infty[$, avec $a > 0$ quelconque. Indication: On pourra estimer $\int_a^\infty \frac{dt}{(a+t)^4}$.

(c) Montrer que $F \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$, avec la formule :

$$F'(x) \,=\, -\int_0^\infty \frac{f(t)}{(x+t)^2}\, dt.$$

(d) On admettra la valeur de $\int_0^\infty \frac{\log u}{\sqrt{u}\,(u-1)}\, du = \pi^2$. Pour $\varphi, \psi \in L^2(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$, montrer que la fonction :

$$g(t,u) \,:=\, \varphi(t)\, \overline{\psi(t\,u)}\, \frac{\log u}{1-u},$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, avec :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \big| g(t,u) \big|\, dt du \,\leqslant\, \pi^2\, \|\varphi\|_{L^2}\, \|\psi\|_{L^2}.$$

(e) Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \big| F(x) \big|^2\, dx \,\leqslant\, \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \bigg| \frac{f(t)\, \overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)} \bigg|\, dx dt ds.$$

(f) Pour $s \neq t$ dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifier que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)} \,=\, \frac{1}{s-t}\,\mathsf{log}\,\frac{s}{t}.$$

(g) Établir l'inégalité :

$$\big\|F\big\|_{L^2} \,\leqslant\, \pi\,\|f\|_{L^2}.$$

18. Corrigé de l'examen 9

Exercice 1. (a) À la limite, quand $n \longrightarrow \infty$, en partant de $\left|f_n(x)\right|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x)$ presque partout, il vient :

$$\left|f(x)\right|^{\mathsf{p}} \leqslant g(x) \qquad \text{(p.p.)}.$$

Nous pouvons donc majorer presque partout :

$$\begin{aligned}\left|f_n - f\right|^{\mathsf{p}} = \Big(\left|f_n - f\right|\Big)^{\mathsf{p}} &\leqslant \Big(|f_n| + |f|\Big)^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant \Big(2\max\big\{|f_n|,\,|f|\big\}\Big)^{\mathsf{p}} \\ &= 2^{\mathsf{p}}\max\big\{|f_n|^{\mathsf{p}},\,|f|^{\mathsf{p}}\big\} \\ &\leqslant 2^{\mathsf{p}}\,g.\end{aligned}$$

(b) Comme la suite $\big\{g_{\mathrm{M}}(x)\big\}_{\mathrm{M}=1}^{\infty}$ est ponctuellement croissante, positive, et tend simplement presque partout vers $g(x)$ sur E, le théorème de convergence monotone s'applique :

$$\int_E g_{\mathrm{M}} \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} \int_E g.$$

Donc la différence entre ces deux intégrales tend vers zéro :

$$\int_E \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) + \int_{E_{\mathrm{M}}} \big(g - g_{\mathrm{M}}\big) \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0,$$

ou encore :

$$\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} g + 0 \xrightarrow{\mathrm{M}\to\infty} 0.$$

Donc on a bien, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un entier $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que $\int_{E\backslash E_{\mathrm{M}}} g \leqslant \varepsilon$.

(c) Maintenat, comme $E_{\mathrm{M}} \subset \big\{|x| \leqslant \mathrm{M}\big\}$ est de mesure finie (inférieure ou égale au volume de la boule de rayon $\mathrm{M} < \infty$), le théorème d'Egorov s'applique à la suite de fonctions mesurables définies sur E_{M} :

$$\big\{f_n \cdot \mathbf{1}_{E_{\mathrm{M}}}\big\}_{n=1}^{\infty},$$

qui converge par hypothèse ponctuellement presque partout vers $f(x)$.

Ainsi, pour tout $\delta > 0$ arbitrairement petit, il existe un sous-ensemble mesurable $F_{\mathrm{M},\delta} \subset E_{\mathrm{M}}$ de mesure presque pleine :

$$m\big(E_{\mathrm{M}}\backslash F_{\mathrm{M},\delta}\big) \leqslant \delta,$$

en restriction auquel la suite :

$$\big\{f_n\big|_{F_{\mathrm{M},\delta}}\big\}_{n=1}^{\infty},$$

converge *uniformément* vers $f\big|_{F_{\mathrm{M},\delta}}$. Donc avec ce même $\delta > 0$ arbitrairement petit, nous avons :

$$\exists\, \mathrm{N}(\delta) \gg 1 \qquad \Big(n \geqslant \mathrm{N}(\delta) \quad \Longrightarrow \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \delta \quad \text{p.p. sur } F_{\mathrm{M},\delta} \Big).$$

Nous pouvons donc majorer, pour $n \geqslant \mathrm{N}(\delta)$:

$$\begin{aligned}\int_{E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} &= \int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}} \backslash F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant m\big(F_{\mathrm{M},\delta}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}} \backslash F_{\mathrm{M},\delta}} 2^{\mathsf{p}} \cdot g \\ &\leqslant m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + m\big(E_{\mathrm{M}} \big\backslash F_{\mathrm{M},\delta}\big) \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \\ &\leqslant m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M}.\end{aligned}$$

(d) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et fixons $\mathrm{M} = \mathrm{M}(\varepsilon)$ comme à la Question **(b)**. Choisissons aussi $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \leqslant \varepsilon.$$

Alors pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}\int_{E} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} &= \int_{E \backslash E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{E_{\mathrm{M}} \backslash F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + \int_{F_{\mathrm{M},\delta}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} \\ &\leqslant \int_{E \backslash E_{\mathrm{M}}} \big|f_n - f\big|^{\mathsf{p}} + m\big(E_{\mathrm{M}}\big) \cdot \delta^{\mathsf{p}} + \delta \cdot 2^{\mathsf{p}} \cdot \mathrm{M} \\ &\leqslant 2^{\mathsf{p}} \cdot \varepsilon + \varepsilon \\ &\xrightarrow{\ \varepsilon \to 0\ } 0,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien un théorème de convergence dominée dans les espaces L^{p}.

(e) Fixons $n_0 \in \mathrm{N}_{\geqslant 1}$ quelconque tel que $\big\|f_{n_0} - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}} < \infty$, ce qui est possible car nous venons de voir que $\big\|f_n - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}$ devient de plus en plus petit.

Mais $L^{\mathsf{p}}(E)$ est un espace vectoriel grâce à l'inégalité de Minkowski ! Donc $f_{n_0} \in L^{\mathsf{p}}$ et $f_{n_0} - f \in L^{\mathsf{p}}$ donne la réponse :

$$L^{\mathsf{p}} \ni f_{n_0} - \big(f_{n_0} - f\big) = f\,!$$

Exercice 2. (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \big|f \cdot f'\big| &\leqslant \bigg(\int_{\mathbb{R}} |f|^2\bigg)^{1/2} \bigg(\int_{\mathbb{R}} |f'|^2\bigg)^{1/2} \\ &= \|f\|_{L^2}\, \|f'\|_{L^2} \\ &< \infty,\end{aligned}$$

montre bien que $f \cdot f' \in L^1$.

(b) Comme ff' est continue et a pour primitive évidente $\frac{1}{2}\, f^2$, et comme l'intégrale de Lebesgue des fonctions continues coïncide avec leur intégrale de Riemann (impropre, généralisée), l'intégrabilité sur $]-\infty, \infty[$ de ff' signifie l'existence de la double limite :

$$\lim_{\substack{-\infty \leftarrow -\mathrm{R} \\ \mathrm{S} \to \infty}} \int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{S}} f(x)\, f'(-x)\, dx,$$

c'est-à-dire de :

$$\lim_{\substack{-\infty \leftarrow -\mathrm{R} \\ \mathrm{S} \to \infty}} \left[\tfrac{1}{2}\, f(x)^2 \right]_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{S}}.$$

Donc on a bien l'existence des deux limites :

$$\lim_{-\infty \leftarrow x} f(x)^2 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \lim_{x \to \infty} f(x)^2,$$

dans lesquelles on peut évidemment enlever le carré $(\bullet)^2$.

(c) Par l'absurde, si $\lim\limits_{x\to\infty} |f(x)|^2 =: \ell > 0$ était non nulle, on aurait $|f(x)|^2 \geqslant \frac{1}{2}\,\ell$ pour tout $x \geqslant \mathrm{S} \gg 1$ assez grand, d'où :

$$\int_{\mathbb{R}} |f|^2 \;\geqslant\; \int_{\mathrm{S}}^{\infty} \tfrac{1}{2}\,\ell \;=\; \infty,$$

ce qui contredirait massivement l'hypothèse que $f \in L^2(\mathbb{R})$.

On vérifie de même que $0 = \lim\limits_{-\infty \leftarrow x} f(x)^2$.

(d) Vérifier que $f_n \in L^2$, c'est facile :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|^2\, dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \Big| f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,n]}(x) \Big|^2\, dx \\
&=\; \int_{-n}^{n} |f(x)|^2\, dx \\
&\leqslant\; \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \\
&=\; \big(||f||_{L^2} \big)^2 \;<\; \infty.
\end{aligned}$$

Ensuite, comme :

$$f_n(x) \xrightarrow[]{\;n\to\infty\;} f(x) \qquad\qquad \text{(p.p.)},$$

et comme la suite $|f_n|^2 \leqslant |f|^2 =: g$ est uniformément dominée par une fonction positive intégrable, une application directe du résultat de l'Exercice 1 **(d)** avec $\mathsf{p} = 2$ nous donne bien :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \big|\big| f_n - f \big|\big|_{L^2}.$$

(e) La fonction f_n étant à support contenu dans l'ensemble *de mesure finie* $[-n, n]$, l'astuce vue en cours qui consiste à appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz au produit artificiel $f \cdot 1$:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \big|f_n(x)\big|\, dx \;&=\; \int_{\mathbb{R}} \Big| f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,n]}(x) \Big|\, dx \\
&=\; \int_{-n}^{n} \big| f(x) \cdot 1 \big|^1\, dx \\
&\leqslant\; \left(\int_{-n}^{n} \big|f(x)\big|^2\, dx \right)^{1/2} \left(\int_{-n}^{n} 1^2\, dx \right) \\
&=\; ||f||_{L^2} \cdot \sqrt{2\,n} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

nous permet de constater que $f_n \in L^1$. Ainsi, nous pouvons calculer les transformées de Fourier de toutes ces fonctions f_n au moyen de la formule intégrale classique :

$$\widehat{f_n}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi}\, f_n(x)\, dx.$$

Ensuite, l'égalité de Parseval :

$$\big\| \mathscr{F}\big(f_n - f\big) \big\|_{L^2} = \big\| f_n - f \big\|_{L^2}$$

nous permet de déduire que la transformée de Fourier « abstraite dans L^2 » $\mathscr{F}(f)$ de notre fonction initiale $f \in L^2$ est limite *en norme* L^2 des transformées de Fourier « concrètes dans L^1 » $\widehat{f_n}$ de ses approximations $f_n = f\, \mathbf{1}_{[-n,n]}$:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \big\| f_n - f \big\|_{L^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \big\| \mathscr{F}\big(f_n - f\big) \big\|_{L^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \big\| \widehat{f_n} - \mathscr{F}(f) \big\|_{L^2}, \end{aligned}$$

ce qui est un super-joli théorème général !

(f) Mais la convergence en norme L^2 n'a souvent rien à voir avec la convergence ponctuelle (presque partout).

Heureusement, d'après un théorème du cours, la convergence, en norme L^1, ou en norme L^2, ou plus généralement en norme L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, d'une suite de fonctions, vers une certaine fonction-limite, implique, après extraction d'une sous-suite, la convergence ponctuelle presque partout.

(g) Comme $f' \in L^2$ par hypothèse, on procède exactement comme pour $f \in L^2$ dans les questions qui précèdent, pour obtenir de même :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \Big\| \widehat{f_n^1} - \mathscr{F}(f') \Big\|_{L^2}.$$

(h) Après extraction itérée d'une sous-sous-suite $\big\{n_{k_m}\big\}_{m=1}^{\infty}$ de $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, nous pouvons nous arranger pour avoir simultanément les deux convergences ponctuelles :

$$\begin{aligned} \widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi) &\xrightarrow{m\to\infty} (f)(\xi), \\ \widehat{f_{n_{k_m}}^1}(\xi) &\xrightarrow{m\to\infty} \mathscr{F}(f')(\xi), \end{aligned}$$

en presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Mais avant de prendre ces limites, pour tout entier n_{k_m}, les deux transformées de Fourier en question sont reliées entre elles grâce à une intégration par parties :

$$\begin{aligned} \widehat{F_{n_{k_m}}^1}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi\xi x}\, f'(x)\, \mathbf{1}_{[-n_{k_m}, n_{k_m}]}(x)\, dx \\ &= \int_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} e^{-2i\pi\xi x}\, f'(x)\, dx \\ &= \Big[e^{-2i\pi\xi x}\, f(x) \Big]_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} + 2i\pi\xi \int_{-n_{k_m}}^{n_{k_m}} e^{-2i\pi\xi x}\, f(x)\, dx \\ &= e^{-2i\pi\xi n_{k_m}} \underbrace{f\big(n_{k_m}\big)}_{m\to\infty}{}_{\circ} - e^{+2i\pi\xi n_{k_m}} \underbrace{f\big(-n_{k_m}\big)}_{m\to\infty}{}_{\circ} + 2i\pi\xi\, \widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi). \end{aligned}$$

Enfin, en faisant prestement tendre $m \to \infty$:

$$\lim_{m\to\infty} \widehat{f^1_{n_{k_m}}}(\xi) \,=\, 0 - 0 + \lim_{m\to\infty} \widehat{f_{n_{k_m}}}(\xi),$$

nous obtenons la belle formule naturelle :

$$\mathscr{F}(f')(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\,\mathscr{F}(f)(\xi).$$

En conclusion, la formule naturelle pour la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1 \cap \mathscr{C}^1$ dont la dérivée $f' \in L^1$ est aussi intégrable :

$$\widehat{f}(\xi) \,=\, 2i\pi\xi\,\widehat{f}(\xi) \qquad \text{(Exercice subsididaire)},$$

est encore valable pour une fonction $f \in L^2 \cap \mathscr{C}^1$ dont la dérivée $f' \in L^2$ est de carré intégrable, après remplacement de la transformé de Fourier intégrale « concrète dans L^1 » $\widehat{(\bullet)}$ par la transformée de Fourier « abstraite dans L^2 » $\mathscr{F}(\bullet)$.

Exercice 3. (a) L'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de majorer, pour $x > 0$ fixé :

$$\begin{aligned}\big|F(x)\big| \,&\leqslant\, \int_0^\infty \bigg|\frac{f(t)}{x+t}\bigg|\,dt \\ &\leqslant\, \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2} \bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^2}\bigg)^{1/2} \\ &=\, \|f\|_{L^2}\,\big(\tfrac{1}{x}\big)^{1/2} \\ &<\, \infty,\end{aligned}$$

ce qui fait voir l'intégrabilté, sur $\mathbb{R}_+^*$, de la fonction $t \longmapsto \frac{f(t)}{x+t}$, quel que soit le paramètre réel $x > 0$, et justifie donc que $F(x) := \int_0^\infty \frac{f(t)}{x+t}dt$ est bien définie.

(b) Certainement, la fonction $x \longmapsto \frac{f(t)}{x+t}$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, de dérivée égale à $-\frac{f(t)}{(x+t)^2}$.

Sur tout intervalle $]a, \infty[$ avec $a > 0$ fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz — encore elle ! — nous permet de majorer, uniformément pour $x \in \,]a, \infty[$:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \bigg|\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{f(t)}{x+t}\bigg|\,dt \,&=\, \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(x+t)^2}\,dt \\ &\leqslant\, \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2} \bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(x+t)^4}\bigg)^{1/2} \\ &=\, \|f\|_{L^2}\,\big(\tfrac{1}{3\,x^3}\big)^{1/2} \\ &\leqslant\, \|f\|_{L^2}\,\big(\tfrac{1}{3\,a^3}\big)^{1/2} \\ &<\, \infty.\end{aligned}$$

Mieux encore, uniformément pour $x \in \,]a, \infty[$, nous avons :

$$\bigg|\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{f(t)}{x+t}\bigg| \,=\, \frac{|f(t)|}{(x+t)^2} \,\leqslant\, \frac{|f(t)|}{(a+t)^2} \,=:\, g(t),$$

avec $g \in L^1(\mathbb{R}_+^*)$, car :

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{|f(t)|}{(a+t)^2} &\leqslant \bigg(\int_0^\infty \big|f(t)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg(\int_0^\infty \frac{dt}{(a+t)^4}\bigg)^{1/2}\\ &= \|f\|_{L^2}\,\big(\tfrac{1}{3\,a^3}\big)^{1/2}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

Le théorème de dérivation sous le signe intégral garantit alors que F est continûment dérivable sur $]a,\infty[$, avec la formule :

$$F'(x) \,=\, -\int_0^\infty \frac{f(t)}{(x+t)^2}\,dt \qquad\qquad (x>a).$$

(c) Ceci étant vrai sur tout intervalle $]a,\infty[$ avec $a>0$ quelconque, il est clair que cela est vrai sur :

$$\bigcup_{a>0}\,]a,\infty[= \mathbb{R}_+^*.$$

(d) En utilisant le théorème de Fubini-Tonelli, puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz — qu'est-ce qu'elle est 'collante', celle-là ! —, nous obtenons la majoration demandée :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\big|g(t,u)\big|\,dtdu &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\int_{\mathbb{R}_+^*}|\varphi(t)|\,\big|\psi(t\,u)\big|\,dt\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}|\varphi(t)|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|\psi(t\,u)\big|^2\,dt\bigg)^{1/2}\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ [v\,:=\,t\,u] \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg\{\|\varphi\|_{L^2}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|\psi(v)\big|^2\,\frac{dv}{u}\bigg)^{1/2}\bigg\}\frac{\log u}{u-1}\,du\\ &= \|\varphi\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2}\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\log u}{\sqrt{u}\,(u-1)}\,du\\ \text{[Admis]} \qquad &= \|\varphi\|_{L^2}\,\|\psi\|_{L^2}\,\pi^2.\end{aligned}$$

(e) Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}_+^*}\big|F(x)\big|^2\,dx &= \int_{\mathbb{R}_+^*}F(x)\,\overline{F(x)}\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{f(t)}{x+t}\,dt\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\overline{f(s)}}{x+s}\,ds\bigg)\,dx\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{f(t)}{x+t}\bigg|\,dt\bigg)\bigg(\int_{\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{\overline{f(s)}}{x+s}\bigg|\,ds\bigg)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*}\bigg|\frac{f(t)\,\overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)}\bigg|\,dxdtds,\end{aligned}$$

cette dernière égalité délectable étant offerte par les célèbres confiseries Tonelli.

(f) Pour $s\neq t$ dans $\mathbb{R}_+^*$, la décomposition :

$$\frac{1}{(x+t)\,(x+s)} \,=\, \frac{1}{s-t}\bigg[\frac{1}{x+t}-\frac{1}{x+s}\bigg],$$

nous permet d'intégrer :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)} &= \frac{1}{s-t} \int_0^\infty \left[\frac{1}{x+t} - \frac{1}{x+s}\right] dx \\
&= \frac{1}{s-t} \left[\log \frac{x+t}{x+s}\right]_0^\infty \\
&= \frac{1}{s-t} \log \frac{s}{t}.
\end{aligned}$$

(g) Synthétisons toutes les belles gerbes de blé que nous venons récolter, en repartant de la Question **(c)** :

$$\begin{aligned}
\Big(\|F\|_{L^2}\Big)^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} \left|\frac{f(t)\,\overline{f(s)}}{(x+t)\,(x+s)}\right| dxdtds \\
\text{[Fubini-Tonelli]} \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(s)}\big| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{dx}{(x+t)\,(x+s)}\right) ds\right) dt \\
\text{[Question (f)]} \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(s)}\big| \, \frac{1}{s-t} \log \frac{s}{t}\, ds\right) dt \\
[u := \tfrac{s}{t}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}_+^*} |f(t)| \left(\int_{\mathbb{R}_+^*} \big|\overline{f(t\,u)}\big| \, \frac{1}{u-1} \log u \; du\right) dt \\
\text{[Question (d) avec } \varphi = f = \psi\text{]} \qquad &= \pi^2 \, \|f\|_{L^2} \, \|f\|_{L^2},
\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\|F\|_{L^2} \leqslant \pi \, \|f\|_{L^2}.$$