Domaines pseudoconvexes,
Fonctions pluri-sous-harmoniques

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Domaines à bords lisses dans $\mathbb{R}^d$

Soit $d \geqslant 1$ un entier, et soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^d$. Rappelons que le *bord* d'un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ est par définition l'ensemble des points qui 'hésitent' entre E et son complémentaire $\mathbb{R}^d \backslash E$, *i.e.* dont dont tout voisinage intersecte E et $\mathbb{R}^d \backslash E$. Autrement dit (exercice) :

$$\partial E := \overline{E} \big\backslash \mathrm{Int}\, E.$$

Pour $E = \Omega \subset \mathbb{R}^d$ égal à un ouvert :

$$\partial \Omega = \overline{\Omega} \big\backslash \Omega.$$

Pour un entier $1 \leqslant \kappa \leqslant \infty$, la classe $\mathscr{C}^\kappa$ désigne les fonctions κ fois continûment différentiables. Par convention, pour $\kappa = \omega$, elle désigne la classe des fonctions analytiques réelles, c'est-à-dire partout localement développables en série entière convergente.

Définition 2.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit *à bord lisse* de classe $\mathscr{C}^\kappa$ avec $1 \leqslant \kappa \leqslant \infty, \omega$ en un point $p \in \partial\Omega$ s'il existe un voisinage ouvert $U \ni p$ de p dans $\mathbb{R}^d$, et une fonction de classe $\mathscr{C}^\kappa$:

$$r \colon \quad U \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \text{avec } dr(p) \neq 0,$$

tels que :

$$\Omega \cap U = \big\{ x \in U \colon\ r(x) < 0 \big\},$$
$$\partial\Omega \cap U = \big\{ x \in U \colon\ r(x) = 0 \big\}.$$

Une telle fonction r est appelée *fonction définissante locale* de $\partial\Omega$ en p.

Sans démonstrations, rappelons quelques énoncés de géométrie différentielle élémentaire. Par convention, $\infty - 1 = \infty$ et $\omega - 1 = \omega$.

Lemme 2.2. *Si $s \colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $V \ni p$ ouvert est une autre fonction $\mathscr{C}^\kappa$ avec $ds(p) \neq 0$ et $\Omega \cap V = \{s < 0\}$ ainsi que $\partial\Omega \cap V = \{s = 0\}$, alors il existe un sous-voisinage ouvert $p \in W \subset U \cap V$ et une fonction $\lambda \colon W \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lambda(p) > 0$ de classe $\mathscr{C}^{\kappa-1}$ telle que :*

$$s(x) = \lambda(x)\, r(x) \qquad (\forall\, x \in W). \qquad \square$$

Le théorème des fonctions implicites montre alors que $\partial\Omega$ est une hypersurface réelle de classe $\mathscr{C}^\kappa$ dans un voisinage assez petit de p.

Définition 2.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit *à bord lisse de classe* $\mathscr{C}^\kappa$ s'il l'est en tout point $p \in \partial\Omega$.

Grâce à des partitions de l'unité, il est alors possible de recoller des fonctions définissantes locales en des points de $\partial\Omega$, puis de globaliser la fonction définissante.

Théorème 2.4. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ les deux conditions suivantes sont équivalentes.*
(i) *Le bord $\partial\Omega$ est $\mathscr{C}^\kappa$-lisse en chacun de ses points $p \in \partial\Omega$.*
(ii) *Il existe une fonction $\mathscr{C}^\kappa$ globale :*

$$r\colon \quad \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\begin{aligned} \Omega &= \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ r(x) < 0\big\}, \\ \partial\Omega &= \big\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ r(x) = 0\big\} \quad \textit{et} \quad dr(p) \neq 0 \ \forall\, p \,\in\, \partial\Omega. \end{aligned} \qquad \square$$

Cette dernière condition de non-annulation de la différentielle de r en tout point du bord est *essentielle*, parce qu'elle garantit, grâce au théorème des fonctions implicites, que $\partial\Omega$ est une *hypersurface lisse* — sous-variété de codimension 1 — de classe $\mathscr{C}^{\kappa-1}$ de $\mathbb{R}^d$.

La géométrie différentielle élémentaire nous apprend alors qu'en un point quelconque $p \in \partial\Omega$, l'espace tangent s'écrit :

$$T_p\partial\Omega \,=\, \big\{v \in \mathbb{R}^n\colon\ 0 = dr(p)(v) = \tfrac{\partial r}{\partial x_1}(p)\, v_1 + \cdots + \tfrac{\partial r}{\partial x_d}(p)\, v_d\big\}.$$

Si $\Omega = \{s < 0\}$ avec $\partial\Omega = \{s = 0\}$ pour une autre telle fonction globale $s\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, une version globale du lemme qui précède fournit une fonction $\lambda\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lambda(p) \neq 0$ pour tout $p \in \partial\Omega$ telle que :

$$s(x) \,=\, \lambda(x) \cdot r(x) \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, x \in \mathbb{R}^d)},$$

d'où par différentiation en un point quelconque $p \in \partial\Omega = \{r = 0\}$:

$$ds(p) \,=\, d\lambda(p) \cdot \underline{r(p)}_{\circ} + \lambda(p) \cdot dr(p),$$

ce qui montre que cette définition de l'espace tangent ne dépend pas de la fonction définissante globale choisie :

$$T_p\partial\Omega \,=\, \big\{\partial r(p)(v) = 0\big\} \,=\, \big\{\partial s(p)(v) = 0\big\}.$$

Lemme 2.5. *En tout point $p \in \partial\Omega$ du bord d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à bord lisse de classe $\mathscr{C}^\kappa$, il existe des coordonnées affines centrées $x = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)$ avec $x(p) = 0$, avec $T_p\partial\Omega = \{x_d = 0\}$, et il existe une fonction $h = h(x_1, \dots, x_{d-1})$ de classe $\mathscr{C}^{\kappa-1}$ définie dans un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{R}^{d-1}$ telle que, près de p :*

$$\begin{aligned} \Omega &= \big\{x_d = h\big(x_1, \dots, x_{d-1}\big)\big\}, \\ \partial\Omega &= \big\{x_d < h\big(x_1, \dots, x_{d-1}\big)\big\}. \end{aligned} \qquad \square$$

3. Inéquation locale pour un bord de domaine dans $\mathbb{C}^n$

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord lisse $\partial\Omega \in \mathscr{C}^{\kappa \geqslant 1}$, et soit un point quelconque :

$$p_0 \,\in\, M \,:=\, \partial\Omega.$$

Après une transformation affine, nous pouvons supposer que les coordonnées $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ sont centrées en $p_0 = 0$ qui devient l'origine et telles que :

$$T_{p_0}M \,=\, \big\{y_n = 0\big\}.$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors de représenter localement le bord M de ce domaine comme graphe au-dessus de son espace tangent horizontal $T_{p_0}M$:

$$\begin{aligned} M: &\qquad \big\{y_n \,=\, F\big(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_{n-1},x_n\big)\big\}, \\ \Omega: &\qquad \big\{0 \,>\, -y_n + F\big(x_1,\dots,x_{n-1},y_1,\dots,y_{n-1},x_n\big)\big\}, \end{aligned}$$

au moyen d'une certaine fonction locale F de classe $\mathscr{C}^\kappa$ par rapport à ses $(2n-1)$ variables réelles. Comme l'espace tangent à l'origine a été redressée en $\{y_n = 0\}$, il vient :

$$0 \,=\, F(0) \,=\, F_{x_1}(0) \,=\, \cdots \,=\, F_{x_{n-1}}(0) \,=\, F_{y_1}(0) \,=\, \cdots \,=\, F_{y_{n-1}}(0) \,=\, F_{x_n}(0).$$

Il sera utile d'abréger :

$$z' \,:=\, \big(z_1,\dots,z_{n-1}\big), \qquad x' \,:=\, \big(x_1,\dots,x_{n-1}\big), \qquad y' \,:=\, \big(y_1,\dots,y_{n-1}\big),$$

et il est alors naturel de prendre pour fonction définissante implicite locale de $\Omega = \{r < 0\}$:

$$r(x,y) \,:=\, -y_n + F\big(x',y',x_n\big).$$

Le lemme suivant montre que l'on peut toujours *normaliser* les termes d'ordre 2 en (x',y') dans la fonction graphante F de manière à ce qu'il ne reste qu'une forme hermitienne diagonale en $(z_1,\dots,z_{n-1})$. Cette forme hermitienne, que nous redéfinirons plus tard et que nous appellerons forme de Levi, jouera un rôle absolument fondamental dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Théorème 3.1. *Il existe des coordonnées* holomorphes *locales* $(z',z_n) = (z_1,\dots,z_{n-1},z_n)$ *centrées en* $p_0 = 0 \in M$ *dans lesquelles* Ω *est localement représenté par l'inéquation :*

$$0 \,>\, -y_n + \varepsilon_1\,|z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\,|z_{n-1}|^2 + \mathrm{O}_{x',y'}(3) + x_n\,\mathrm{O}_{x',y',x_n}(1),$$

où :

$$\varepsilon_j \,\in\, \big\{-1,0,+1\big\} \qquad\qquad {\scriptstyle (1 \leqslant j \leqslant n-1)}.$$

Ici, la notation $\mathrm{O}_{x',y'}(3)$ désigne une fonction-reste qui ne dépend que des variables (x',y') et est d'ordre $\geqslant 3$ à l'origine. En négligeant les restes, le bord de Ω s'identifie à une simple quadrique d'équation :

$$y_n \,=\, \varepsilon_1\,|z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}\,|z_{n-1}|^2.$$

Quand tous les $\varepsilon_j = 1$, le domaine $\big\{y_n > |z_1|^2 + \cdots + |z_{n-1}|^2\big\}$ est strictement convexe dans toutes les directions z_j.

Démonstration. En spécifiant la forme générale des termes d'ordre 2 en (x',y'), nous pouvons écrire l'équation du bord $M = \partial\Omega$ comme :

$$y_n \,=\, \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(4\,a_{i,j}\,x_jx_k + 4\,b_{i,j}\,x_jy_k + 4\,c_{j,k}\,y_jy_k\Big) + \mathrm{O}_{x',y'}(3) + x_n\,\mathrm{O}_{x',y',x_n}(1),$$

au moyen de certaines constantes réelles $a_{j,k}, b_{j,k}, c_{j,k} \,\in\, \mathbb{R}$, avec par exemple $b_{j,k} \,:=\, \frac{1}{4}\,\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k}(0)$, et il n'est pas nécessaire pour la suite d'arranger les symétries $a_{k,j} \,=\, a_{j,k}$

et $c_{k,j} = c_{j,k}$. Le facteur 4 est placé à l'avance pour disparaître lorsqu'on exprime cette partie quadratique en fonction des $z_\bullet$ et des $\overline{z}_\bullet$:

$$\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(a_{j,k}\,\big(z_j+\overline{z}_j\big)\,\big(z_k+\overline{z}_k\big)-b_{j,k}\,\sqrt{-1}\,\big(z_j+\overline{z}_j\big)\,\big(z_k-\overline{z}_k\big)-c_{j,k}\,\big(z_j-\overline{z}_j\big)\,\big(z_k-\overline{z}_k\big)\Big)=$$

$$\begin{aligned}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\Big(\; & z_jz_k\,\big[a_{j,k}-\sqrt{-1}\,b_{j,k}-c_{j,k}\big]+\\ & +\overline{z}_jz_k\,\big[a_{j,k}+a_{k,j}+\sqrt{-1}\,b_{j,k}-\sqrt{-1}\,b_{k,j}+c_{j,k}+c_{k,j}\big]+\\ & +\overline{z}_j\overline{z}_k\,\big[a_{j,k}+\sqrt{-1}\,b_{j,k}-c_{j,k}\big]\;\Big),\end{aligned}$$

ce qui fait apparaître de nouvelles constantes *complexes* $\alpha_{j,k}\in\mathbb{C}$ et $\varepsilon_{j,k}\in\mathbb{C}$ telles que :

$$\frac{z_n-\overline{z}_n}{2\sqrt{-1}}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{j,k}\,z_jz_k+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{j,k}\,\overline{z}_jz_k+\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\alpha_{j,k}}\,\overline{z}_j\overline{z}_k+\mathrm{O}_{x',y'}(3)+x_n\,\mathrm{O}_{x',y',x_n}(1).$$

Il n'est pas nécessaire d'assurer les symétries $\alpha_{k,j}=\alpha_{j,k}$, mais il importe d'observer (exercice visuel) l'hermitianité :

$$\overline{\varepsilon_{k,j}}=\varepsilon_{j,k}\qquad\qquad(1\leqslant j,k\leqslant n).$$

Pour faire disparaître du membre de droite les termes quadratiques holomorphes purs en $z_\bullet z_\bullet$, en les déplaçant à gauche :

$$\frac{z_n-2\sqrt{-1}\,\sum_j\sum_k\alpha_{j,k}\,z_jz_k-\big(\overline{z}_n+2\sqrt{-1}\,\sum_j\sum_k\overline{\alpha_{j,k}}\,\overline{z}_j\overline{z}_k\big)}{2\sqrt{-1}}=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{j,k}\,\overline{z}_jz_k+\mathsf{restes}$$

nous voyons qu'il suffit d'effectuer le biholomorphisme quadratique :

$$\underline{z}_1:=z_1,\quad\ldots\ldots,\quad\underline{z}_{n-1}:=z_{n-1},\quad\underline{z}_n:=z_n-2\sqrt{-1}\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\alpha_{j,k}\,z_jz_k,$$

pour atteindre :

$$\underline{y}_n=\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon_{j,k}\,\overline{\underline{z}}_j\,\underline{z}_k+\underline{\mathsf{restes}}.$$

Mais quelle est alors la forme de ces nouveaux restes ? Puisqu'il est tout d'abord évident que :

$$\mathrm{O}_{x',y'}(3)=\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}'}(3),$$

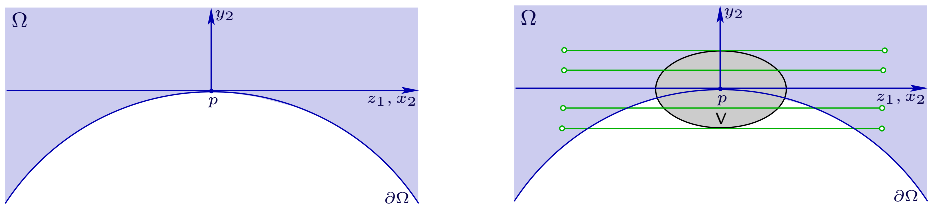
un calcul simple pour le deuxième reste montre qu'il conserve aussi la même forme :

$$\begin{aligned}x_n\,\mathrm{O}_{x',y',x_n}(1)&=\big(\underline{x}_n+\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}'}(2)\big)\,\big(\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}'}(1)+\underline{x}_n\,\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}',\underline{x}_n}(0)\big)\\&=\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}'}(3)+\underline{x}_n\,\mathrm{O}_{\underline{x}',\underline{y}',\underline{x}_n}(1).\end{aligned}$$

Pour terminer, une transformation $\mathbb{C}$-linéaire appropriée $\underline{z}'\longmapsto H'\cdot\underline{z}'$ normalise la forme hermitienne $\sum_j\sum_k\varepsilon_{j,k}\,\overline{\underline{z}}_j\underline{z}_k$ de manière à la rendre diagonale. $\square$

4. Phénomène d'extension de Levi

Nous avons déjà vu qu'une figure de Hartogs bien placée permettait de prolonger toutes les fonctions holomorphes au-delà du bord de certains domaines.



Quand l'un des $\varepsilon_j = -1$ du Théorème 3.1 qui précède est strictement négatif, il est alors possible de placer un petit disque tangentiellement au bord du domaine de manière à ce qu'il soit contenu — excepté l'unique point de contact qui est son centre — *dans* le domaine, et alors des épaississements appropriés de ce petit disque produisent un analogue de la figure de Hartogs.

Théorème 4.1. [Levi 1909] *Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^{n\geqslant 2}$ à bord lisse $\partial\Omega \in \mathscr{C}^\infty$, localement représenté en un des points de son bord par l'inéquation :*

$$y_n > \varepsilon_1|z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}|z_{n-1}|^2 + \mathrm{O}_{x',y'}(3) + x_n\,\mathrm{O}_{x',y',x_n}(1).$$

S'il y a un entier $1 \leqslant j_* \leqslant n-1$ avec :

$$\varepsilon_{j_*} = -1,$$

alors il existe un voisinage ouvert $\mathsf{V} \ni 0$ tel que :

$$\forall\, f \in \mathscr{O}(\Omega) \quad \exists\,!\, F \in \mathscr{O}\big(\Omega \cup \mathsf{V}\big) \quad F\big|_{\Omega} = f.$$

Plus tard, ces ε_j seront réinterprétés comme des *valeurs propres* d'une certaine forme hermitienne intrinsèque sur l'espace tangent *complexe* $T_0^{\mathbb{C}}\partial\Omega$, mais avant d'en venir à cette conceptualisation, il est préférable de transmettre les idées géométriques concrètes.

L'énoncé et les arguments de preuve sont tout aussi vrais en supposant seulement $\partial\Omega \in \mathscr{C}^2$, car il suffit de remplacer partout $\mathrm{O}_{x',y'}(3)$ par $\mathrm{o}_{x',y'}(2)$.

Démonstration. Détaillons seulement le cas $n = 2$, puisque le cas général $n \geqslant 2$ s'en déduit par modifications symboliques mineures. Ainsi Ω est défini par l'inéquation :

$$y_2 > -|z_1|^2 + \mathrm{O}_{x_1,y_1}(3) + x_2\,\mathrm{O}_{x_1,y_1}(1) + \mathrm{O}_{x_2}(2).$$

Pour $r > 0$ petit, nous affirmons alors que les disques holomorphes définis, pour $z \in \mathbb{D}$ dans le disque unité, par :

$$A_{z_2}(z) := \big(rz,\, z_2\big)$$

ont un bord $A_{z_2}(\partial\mathbb{D}) \subset \Omega$ entièrement contenu dans le domaine, pour tout $z_2 \in \mathbb{C}$ assez petit. En effet, demandons pour fixer les idées que :

$$|x_2| < \tfrac{1}{2}\,r^2, \qquad\qquad |y_2| < \tfrac{1}{2}\,r^2,$$

et constatons que l'inégalité, pour $|z| = 1$, donc pour $|z_1| = r$:

$$y_2 + |z_1|^2 = y_2 + r^2 > \tfrac{1}{2}\,r^2 \overset{?}{>} \mathrm{O}(r^3) + \mathrm{O}(r^2)\,\mathrm{O}(r) + \mathrm{O}(r^4), \tag{4.2}$$

est effectivement satisfaite par $r > 0$ assez petit.

Comme dans la démonstration du théorème de Hartogs, la formule de Cauchy permet alors de prolonger holomorphiquement :

$$f(z_1, z_2) \,:=\, \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1}\, d\zeta,$$

cela dans l'ouvert :

$$\big\{|z_1| < r,\ |x_2| < \tfrac{1}{2}\, r^2,\ |y_2| < \tfrac{1}{2}\, r^2\big\} \,=:\, \mathsf{V}. \qquad \square$$

Les paragraphes qui suivent sont alors consacrés à des rappels préliminaires à une conceptualisation plus intrinsèque de cette hypothèse spéciale « $\varepsilon_{j_*} = -1$ ».

5. Champs de vecteurs et formes différentielles sur $\mathbb{R}^d$

Soit $d \geqslant 1$ un entier, soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées réelles canoniques sur $\mathbb{R}^d$ et soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. Les champs de vecteurs réels et les formes différentielles réelles de classe $\mathscr{C}^{\kappa \geqslant 1}$ sur U s'écrivent :

$$L \,=\, \sum_{i=1}^d \ell_i(x)\, \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad \omega \,=\, \sum_{i=1}^d \omega_i(x)\, dx_i,$$

avec des fonctions-coefficients $\ell_i, \omega_i \in \mathscr{C}^\kappa(U, \mathbb{R})$.

Évidemment :

$$\omega(L) \,=\, \sum \omega_i\, \ell_i.$$

Complexifions la situation, *i.e.* tensorisons avec $\mathbb{C}$ pour obtenir $TU \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $T^*U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, avec des coefficients à valeurs complexes, décomposés en parties réelles et imaginaires :

$$\ell_i(x) \,=\, \ell_i'(x) + \sqrt{-1}\, \ell_i''(x) \qquad \text{et} \qquad \omega_i(x) \,=\, \omega_i'(x) + \sqrt{-1}\, \omega_i''(x),$$

d'où :

$$L \,=\, L' + \sqrt{-1}\, L'' \qquad \text{et} \qquad \omega \,=\, \omega' + \sqrt{-1}\, \omega''.$$

Évidemment :

$$\omega(L) \,=\, \omega'(L') - \omega''(L'') + \sqrt{-1}\, \big(\omega'(L'') + \omega''(L')\big).$$

En particulier, $\sqrt{-1}$ est une constante librement déplaçable :

$$\omega(\sqrt{-1}\, L) \,=\, \sqrt{-1}\, \omega(L).$$

De plus l'opérateur de différentiation extérieure satisfait :

$$d\big(\omega' + \sqrt{-1}\, \omega''\big) \,=\, d\omega' + \sqrt{-1}\, d\omega''.$$

Tout ceci vaut aussi pour des formes différentielles de degrés supérieurs.

Rappelons que pour $0 \leqslant k \leqslant d$ entier, une k-forme différentielle de classe $\mathscr{C}^{\kappa \geqslant 1}$ sur $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert s'écrit :

$$\omega \,=\, \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x)\, dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k},$$

et souvenons-nous qu'elle a pour différentielle extérieure :

$$d\omega \,:=\, \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant d}\ \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(x)\, dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}.$$

La commutativité de Schwarz donne (calcul de révision) :

$$d \circ d \,=\, 0.$$

Ensuite, soit un autre ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_d)$, et soit une application de classe $\mathscr{C}^\kappa$:

$$\begin{aligned} \phi\colon \quad V &\longrightarrow U \\ y &\longmapsto x = \phi(y). \end{aligned}$$

La *tirée en arrière* $\phi^*(\omega)$ d'une 1-forme différentielle $\omega = \omega(x, dx)$ sur U est par définition la 1-forme différentielle :

$$\phi^*(\omega) \,:=\, \sum_{i=1}^{d} \omega_i\big(\phi(y)\big)\, d\big(\phi_i(y)\big) \,=\, \sum_{i=1}^{d} \omega_i\big(\phi(y)\big) \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y)\, dy_j,$$

et il y a une formule analogue pour les k-formes différentielles.

L'extension aux formes à valeurs complexes est simple :

$$\phi^*\big(\omega' + \sqrt{-1}\,\omega''\big) \,=\, \phi^*(\omega') + \sqrt{-1}\,\phi^*(\omega'').$$

Par conséquent, la conjugaison complexe commute avec l'opération de tirer en arrière :

$$\begin{aligned} \overline{\phi^*\big(\omega' + \sqrt{-1}\,\omega''\big)} \,&=\, \overline{\phi^*(\omega') + \sqrt{-1}\,\phi^*(\omega'')} \\ &=\, \phi^*(\omega') - \sqrt{-1}\,\phi^*(\omega'') \\ &=\, \phi^*\big(\omega' - \sqrt{-1}\,\omega''\big). \end{aligned}$$

Souvenons-nous que la barre de conjugaison ne touche ni $\phi^*(\cdot)$ ni $d(\cdot)$.

6. Champs de vecteurs et formes différentielles sur $\mathbb{C}^n$

Maintenant, en dimension $d = 2n$ soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ à bord $\partial\Omega \in \mathscr{C}^\kappa$ au moins deux fois continûment différentiable. D'après ce qui précède, il existe une fonction $r\colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Omega = \{r < 0\}$ avec $\partial\Omega = \{r = 0\}$ et avec $dr(p) \neq 0$ quel que soit $r(p) = 0$.

Il s'agit maintenant d'analyser l'interaction de la géométrie complexe ambiante de $\mathbb{C}^n$ avec la géométrie réelle de de l'hypersurface $\mathscr{C}^\kappa$:

$$M \,:=\, \partial\Omega.$$

Commençons par analyser la structure complexe du fibré tangent de $\mathbb{C}^n$ lui-même. Les paragraphes qui vont suivre ont beau sembler élémentaires et simples, nous conseillons de les étudier en profondeur.

Pour $i = 1, \dots, n$, notons $z_i = x_i + \sqrt{-1}\,y_i$ les coordonnées complexes canoniques de $\mathbb{C}^n$, de telle sorte que x_i, y_i sont des coordonnées réelles sur $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Aussi, notons $T\mathbb{C}^n \cong T\mathbb{R}^{2n}$ le fibré tangent *réel* à $\mathbb{C}^n$.

Par définition, la structure complexe standard de $T\mathbb{C}^n$ agit sur les champs de vecteurs unitaires le long des axes comme le ferait une multiplication par $\sqrt{-1}$:

$$J\bigg(\frac{\partial}{\partial x_i}\bigg) \,:=\, \frac{\partial}{\partial y_i} \qquad \text{et} \qquad J\bigg(\frac{\partial}{\partial y_i}\bigg) \,:=\, -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Après extension de J par $\mathbb{R}$-linéarité, nous obtenons un automorphisme de fibré $J\colon T\mathbb{C}^n \longrightarrow T\mathbb{C}^n$ qui satisfait $J^2 = -\,\mathsf{Id}$.

Introduisons aussi le fibré vectoriel *complexe* $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^n$. On vérifie (exercice) que c'est une somme directe :

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^n \,=\, T^{1,0}\mathbb{C}^n \oplus T^{0,1}\mathbb{C}^n,$$

de deux fibrés complexes fondamentaux ayant pour fibres respectives, en un point quelconque $p \in \mathbb{C}^n$:

$$\begin{aligned} T_p^{1,0}\mathbb{C}^n \,&:=\, \big\{X_p - \sqrt{-1}\,J(X_p) \colon\; X_p \in T_p\mathbb{C}^n\big\}, \\ T_p^{0,1}\mathbb{C}^n \,&:=\, \big\{X_p + \sqrt{-1}\,J(X_p) \colon\; X_p \in T_p\mathbb{C}^n\big\}, \end{aligned}$$

d'où par conjugaison $\overline{T^{1,0}\mathbb{C}^n} = T^{0,1}\mathbb{C}^n$, et de plus $\{0\} = T^{1,0}\mathbb{C}^n \cap T^{0,1}\mathbb{C}^n$.

Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, introduisons les champs de vecteurs :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} \,:=\, \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}_i} \,:=\, \frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\frac{\partial}{\partial y_i},$$

ainsi que les différentielles :

$$dz_i \,:=\, dx_i + \sqrt{-1}\,dy_i, \qquad\qquad d\overline{z}_i \,:=\, dx_i - \sqrt{-1}\,dy_i.$$

Les sections locales de $T^{1,0}\mathbb{C}^n$ et de $T^{0,1}\mathbb{C}^n$ s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n \ell_i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial z_i} \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n b_i(x,y)\,\frac{\partial}{\partial \overline{z}_i},$$

avec des fonctions-coefficients ℓ_i et b_i de classe $\mathscr{C}^\kappa$ dans leurs domaines de définition. Les sections locales de $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ et de $T^{*0,1}\mathbb{C}^n$ s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(x,y)\,dz_i \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^n \varpi_i(x,y)\,d\overline{z}_i.$$

Puisque les transformations biholomorphes locales de $\mathbb{C}^n$:

$$(z_1,\dots,z_n) \;\longmapsto\; \big(h_1(z_1,\dots,z_n),\dots,h_n(z_1,\dots,z_n)\big) \,=:\, (z_1',\dots,z_n')$$

stabilisent les $dz_\bullet$ et les $d\overline{z}_\bullet$:

$$dz_i' \,=\, \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial z_k}\,dz_k \qquad \text{et} \qquad d\overline{z}_i' \,=\, \sum_{k=1}^n \frac{\partial \overline{h}_i}{\partial \overline{z}_k}\,d\overline{z}_k,$$

les formes différentielles avec p fois $dz_\bullet$ et q fois $d\overline{z}_\bullet$:

$$\eta \,:=\, \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\;\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n} \omega_{i_1,\dots,i_p;\,j_1,\dots,j_q}\big(x,y\big)\,dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}$$

conservent une invariante, et sont appelées pour cette raison des (p,q)-*formes*.

Sur des fonctions $\chi = \chi(x,y)$, définissons premièrement :

$$\partial\chi \,:=\, \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial z_k}\,dz_k \qquad \text{et} \qquad \overline{\partial}\chi \,:=\, \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial \overline{z}_k}\,d\overline{z}_k,$$

et deuxièmement sur des (p,q)-formes générales :

$$\partial\eta \,:=\, \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\;\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n}\;\sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}}{\partial z_k}\,dz_k\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q},$$

$$\overline{\partial}\eta \,:=\, \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_p\leqslant n}\;\sum_{1\leqslant j_1<\cdots<j_q\leqslant n}\;\sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1\cdots i_p j_1\cdots j_q}}{\partial \overline{z}_k}\,d\overline{z}_k\wedge dz_{i_1}\wedge\cdots\wedge dz_{i_p}\wedge d\overline{z}_{j_1}\wedge\cdots\wedge d\overline{z}_{j_q}.$$

La commutativité de Schwarz donne :

$$0 = \partial \circ \partial = \overline{\partial} \circ \overline{\partial},$$

et puisque :

$$d = \partial + \overline{\partial},$$

il vient :

$$\partial \circ \overline{\partial} = -\,\overline{\partial} \circ \partial.$$

7. Espaces tangents complexes à une hypersurface réelle lisse $M^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$

Soit à nouveau $M = \partial\Omega = \{r = 0\}$ une hypersurface de $\mathbb{C}^n$ qui est le bord lisse de classe $\mathscr{C}^\kappa$ d'un domaine $\Omega = \{r < 0\}$. En un point $p \in M$, l'espace tangent réel à M s'écrit :

$$T_pM = \Big\{(v', v'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \colon\ 0 = \sum_i v_i' \, \tfrac{\partial r}{\partial x_i}(p) + \sum_i v_i'' \, \tfrac{\partial r}{\partial y_i}(p)\Big\}.$$

Comme la différentielle $dr(p) \neq 0$ ne s'annule pas, il existe au moins un indice i tel que $\frac{\partial r}{\partial x_i}(p) \neq 0$ ou $\frac{\partial r}{\partial y_i}(p) \neq 0$, donc cette équation est celle d'un hyperplan réel non-dégénéré $\cong \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Avec l'observation simple :

$$2\,\mathsf{Re}\Big[\big(v_i' + \sqrt{-1}\,v_i''\big)\Big(\tfrac{1}{2}\,\tfrac{\partial r}{\partial x_i}(p) - \tfrac{\sqrt{-1}}{2}\,\tfrac{\partial r}{\partial y_i}(p)\Big)\Big] = v_i' \, \tfrac{\partial r}{\partial x_i}(p) + v_i'' \, \tfrac{\partial r}{\partial y_i}(p),$$

nous pouvons aussi récrire l'équation de cet espace tangent comme :

$$0 = 2\,\mathsf{Re} \sum_i \tfrac{\partial r}{\partial z_i}(p)\, v_i,$$

ce qui motive de supprimer cette partie réelle.

Définition 7.1. L'*espace tangent complexe* en un point $p \in M$ de l'hypersurface M est :

$$T_p^{\mathbb{C}}M := \big\{v \in \mathbb{C}^n \colon\ 0 = \sum_i \tfrac{\partial r}{\partial z_i}(p)\, v_i\big\}.$$

Comme il existe un indice i tel que $\frac{\partial r}{\partial z_i}(p) \neq 0$, il est clair que $T_p^{\mathbb{C}}M \cong \mathbb{C}^{n-1}$ est un hyperplan complexe non-dégénéré de $\mathbb{C}^n$. Quand nous écrirons $v \in T^{\mathbb{C}}M$, nous sous-entendrons le point de base de v.

Nous affirmons que cet espace tangent complexe est un vrai concept mathématique, à savoir qu'il ne dépend pas du choix de la fonction définissante r et qu'il est invariant par biholomorphismes.

Lemme 7.2. *Si $s = \lambda\, r$ avec $\lambda > 0$ sur $M = \partial\Omega$ est une autre fonction définissante de $\Omega = \{r < 0\} = \{s < 0\}$, alors en tout point $p \in M$:*

$$\big\{v \in \mathbb{C}^n \colon\ 0 = \sum_i \tfrac{\partial s}{\partial z_i}(p)\, v_i\big\} = \big\{v \in \mathbb{C}^n \colon\ 0 = \sum_i \tfrac{\partial r}{\partial z_i}(p)\, v_i\big\}.$$

Démonstration. Puisque $r(p) = 0$, quand on différentie $s = \lambda\, r$ par rapport à z_i, le premier terme disparaît :

$$\tfrac{\partial s}{\partial z_i}(p) = \tfrac{\partial \lambda}{\partial z_i}(p)\, \underline{r(p)}_{\circ} + \lambda(p)\, \tfrac{\partial r}{\partial z_i}(p),$$

et comme $\lambda(p) > 0$ est non nul, l'ensemble des zéros est le même. $\square$

Lemme 7.3. *Si $h\colon w \longmapsto h(w) =: z$ est un biholomorphisme local $\mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$:*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "s:=r\circ h"'] & h(N) = M \arrow[d, "r"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

qui transforme l'hypersurface réelle $M = \{r = 0\}$ en l'hypersurface :

$$h^{-1}M \,=\, \big\{s := r \circ h = 0\big\},$$

alors sa matrice jacobienne holomorphe dh fait se correspondre les espaces tangents complexes :

$$dh\big(T^{\mathbb{C}} h^{-1}M\big) \,=\, T^{\mathbb{C}}M.$$

Démonstration. À nouveau, la vérification est simple. Grâce à la règle de la chaîne, une différentiation de $s(w) = r\big(h(w)\big)$ par rapport à w_i donne :

$$\frac{\partial s}{\partial w_i} \,=\, \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j}\frac{\partial h_j}{\partial w_i} + \sum_j \frac{\partial r}{\partial \overline{z}_j}\frac{\partial \overline{h}_j}{\partial w_i}.$$

Pour $u \in T^{\mathbb{C}}N$ quelconque, nous pouvons donc insérer, réorganiser :

$$0 \,=\, \sum_i \frac{\partial s}{\partial w_i}\, u_i \,=\, \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j}\Big(\sum_i \frac{\partial h_j}{\partial w_i}\, u_i\Big) \,=:\, \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j}\, v_j,$$

et reconnaître le vecteur $v := dh(u)$ transformé de u par la jacobienne holomorphe de h. □

8. Forme de Levi de bords lisses $M = \partial\Omega$ de domaines $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Maintenant que la structure différentielle du bord à l'ordre 1 est comprise grâce la conceptualisation des espaces tangents complexes $T^{\mathbb{C}}\partial\Omega$, il s'agit d'étudier la structure différentielle à l'ordre 2 des bords lisses de domaines dans $\mathbb{C}^n$.

Soit donc un ouvert $\Omega = \{r < 0\}$ représenté par une inéquation définissante locale ou globale. Sur le bord $M = \{r = 0\}$, la différentielle de r s'annule :

$$0 \,=\, dr\big|_M \,=\, \big(\partial r + \overline{\partial} r\big)\big|_M,$$

simplement parce que r y vaut constamment zéro ! Une correction par le facteur multiplicatif $-\sqrt{-1}$ fait alors voir que la forme différentielle intrinsèque :

$$-\sqrt{-1}\,\partial r\big|_M \,=\, \sqrt{-1}\,\overline{\partial} r\big|_M$$

est *réelle*.

Cette forme différentielle est définie à multiplication par une fonction réelle > 0 près, puisqu'en remplaçant r par une autre fonction définissante $s = \lambda\, r$ avec $\lambda > 0$ comme précédemment, il vient :

$$-\sqrt{-1}\,\partial s\big|_M \,=\, \lambda\,\big(-\sqrt{-1}\,\partial r\big|_M\big).$$

Pour atteindre l'ordre 2, prenons-en la différentielle extérieure :

$$d\big(-\sqrt{-1}\,\partial r\big) \,=\, (\partial + \overline{\partial})\,\big(-\sqrt{-1}\,\partial r\big) \,=\, \sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial} r.$$

Définition 8.1. Sur un vecteur tangent complexe $v \in T^{\mathbb{C}}\partial\Omega$, la *forme (hermitienne) de Levi* a pour valeur :

$$\sqrt{-1}\,\partial\overline{\partial}r\big(-\sqrt{-1}\,v\wedge\overline{v}\big) \,=\, \partial\overline{\partial}r\big(v\wedge\overline{v}\big).$$

Un simple calcul :

$$\partial\overline{\partial}r \,=\, \partial\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial\overline{z}_k}\,d\overline{z}_k\right) \,=\, \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,dz_j\wedge d\overline{z}_k,$$

agrémenté d'une connaissance de géométrie différentielle :

$$\begin{aligned} dz_j\wedge d\overline{z}_k\,\big(v\wedge\overline{v}\big) \,&=\, dz_j(v)\,d\overline{z}_k(\overline{v}) - \underline{d\overline{z}_k(v)}_{\circ}\,\underline{dz_j(\overline{v})}_{\circ} \\ &=\, v_j\,\overline{v}_k, \end{aligned}$$

conduit à la formule fondamentale :

$$\boxed{\partial\overline{\partial}r\big(v\wedge\overline{v}\big) \,=\, \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,v_j\,\overline{v}_k.}$$

Lemme 8.2. *Le changement de fonction définissante $s = \lambda\,r$ donne, en un point $p \in M = \partial\Omega$ et pour tout vecteur tangent complexe $v \in T_p^{\mathbb{C}}M$:*

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(p)\,v_j\,\overline{v}_k \,=\, \lambda(p)\,\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(p)\,v_j\,\overline{v}_k.$$

Preuve. Comme $v \in T_p^{\mathbb{C}}M$, il vient après conjugaison :

$$0 \,=\, \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}\,v_j \qquad\text{et}\qquad 0 \,=\, \sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial\overline{z}_k}\,\overline{v}_k.$$

Différentions une première fois $s = \lambda\,r$:

$$\frac{\partial s}{\partial\overline{z}_k} \,=\, \frac{\partial\lambda}{\partial\overline{z}_k}\,\underline{r}_{\circ} + \lambda\,\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_k},$$

puis une deuxième fois :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z_j\partial\overline{z}_k} \,=\, \frac{\partial^2\lambda}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,\underline{r}_{\circ} + \frac{\partial\lambda}{\partial\overline{z}_k}\,\frac{\partial r}{\partial z_j} + \frac{\partial\lambda}{\partial z_j}\,\frac{\partial r}{\partial\overline{z}_k} + \lambda\,\frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}.$$

Comme $r = 0$ au point $p \in M$, observons que le premier terme disparaît, sommons, et constatons l'annulation conclusive :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,v_j\,\overline{v}_k \,=\, &\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial\lambda}{\partial\overline{z}_k}\,\overline{v}_k\right)\underline{\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j}\,v_j\right)}_{\circ} + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial\lambda}{\partial z_j}\,v_j\right)\underline{\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial\overline{z}_k}\,\overline{v}_k\right)}_{\circ} + \\ &+ \lambda\,\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,v_j\,\overline{v}_k,. \end{aligned}$$

□

Cette *forme de Levi* est clairement une forme hermitienne sur $T_p^{\mathbb{C}}M \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et le fait que l'ambiguïté $r \longmapsto \lambda\,r$ respecte, via $\lambda > 0$, le fait que Ω est d'un côté bien défini de l'hypersurface $M = \partial\Omega$ garantit que l'on peut parler de son nombre de valeurs propres > 0, et de son nombre de valeurs propres > 0. Redéfinissons-la concrètement.

Définition 8.3. La *forme de Levi* d'un domaine $\Omega = \{r < 0\}$ à bord de classe au moins $\mathscr{C}^2$ est :

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p), v_j\, \overline{v}_k \qquad\qquad (p\in M,\ v\in T_p^{\mathbb{C}}M).$$

Il est aussi possible de la polariser, en prenant deux vecteurs tangents complexes quelconques $v, w \in T_p^{\mathbb{C}} M$:

$$\begin{aligned}\partial\overline{\partial} r\big(v \wedge \overline{w}\big) &:= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\, v_j \overline{w}_k \\ &= \big(\overline{w}_1 \ \cdots \ \overline{w}_n\big) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{z}_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{z}_1 \partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{z}_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \overline{z}_n \partial z_n}\end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Comme $T_p^{\mathbb{C}} M \cong \mathbb{C}^{n-1}$, ceci doit plutôt être entendu comme une forme hermitienne à $(n-1)$ variables, ce qui devient plus transparent en revenant à l'équation normalisée locale du bord.

Observation 8.4. *Si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathscr{C}^2$ a pour inéquation normalisée :*

$$0 \ > \ r \ := \ -y_n + \varepsilon_1 |z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1}|z_{n-1}|^2 + \mathrm{O}_{x',y'}(3) + x_n\, \mathrm{O}_{x',y',x_n}(1),$$

alors à l'origine $T_0^{\mathbb{C}}\partial\Omega = \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ et sur des vecteurs $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$, la forme de Levi a pour matrice hermitienne réduite :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varepsilon_{n-1}\end{pmatrix}.$$

Preuve. Puisque $v_n = 0$, il suffit de connaître au point-origine $p = 0$ les dérivées croisées $\frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(0)$ pour $1 \leqslant j, k \leqslant n-1$, et leurs valeurs sont immédiatement visibles. □

La forme de Levi jouit d'une invariance remarquable vis-à-vis des transformations biholomorphes de $\mathbb{C}^n$.

Lemme 8.5. *Sous les mêmes hypothèses que le Lemme 7.3, la forme de Levi de l'ouvert $h^{-1}(\Omega) = \{s = r \circ h < 0\}$ en un vecteur tangent complexe quelconque $u \in T^{\mathbb{C}} h^{-1} M$ coïncide avec la forme de Levi de l'ouvert $\Omega = \{r < 0\}$ en le vecteur $v := dh(u)$ transformé par la matrice jacobienne holomorphe :*

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}(w)\ u_j \overline{u}_k \ = \ \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\big(h(w)\big)\ v_j \overline{v_k}.$$

Démonstration. En effet, différentions $s(w) \equiv r\big(h(w)\big)$ une fois puis une deuxième fois :

$$\frac{\partial s}{\partial \overline{w}_k} = \sum_i \frac{\partial r}{\partial \overline{z}_i} \frac{\partial \overline{h}_i}{\partial \overline{w}_k}, \qquad\qquad \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \overline{w}_k} = \sum_i \sum_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial z_\ell \partial \overline{z}_i} \frac{\partial h_\ell}{\partial w_j} \frac{\partial \overline{h}_i}{\partial \overline{w}_k},$$

afin de sommer :

$$\begin{aligned}\sum_j \sum_k \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \overline{w}_k}\, u_j \overline{u}_k &= \sum_i \sum_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial z_\ell \partial \overline{z}_i} \sum_j \frac{\partial h_\ell}{\partial w_j}\, u_j \sum_k \frac{\partial \overline{h}_i}{\partial \overline{w}_k}\, \overline{u}_k \\ &= \sum_i \sum_\ell \frac{\partial^2 r}{\partial z_\ell \partial \overline{z}_i}\, v_\ell \overline{v}_i,\end{aligned}$$

pour reconnaître le vecteur transformé $v = dh(u)$ ainsi que son conjugué. □

Ainsi, l'hypothèse d'existence d'une valeur propre strictement négative $\varepsilon_{j_*} = -1$ dans le Théorème 4.1 était invariante et concernait la forme de Levi au point de référence.

Définition 8.6. Un domaine $\Omega = \{r < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathscr{C}^2$ lisse au moins deux fois continûment différentiable est dit *pseudoconvexe au sens de Levi* lorsque sa forme de Levi est $\geqslant 0$ en tout point $p \in \partial\Omega$:

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} v_j \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(p)\, v_j \overline{v}_k \geqslant 0 \qquad (\forall\, p \in \partial\Omega).$$

Par un argument simple, Levi a donc établi en 1909 que la *non*-pseudoconvexité ouvrait la porte de Pandore à un phénomène d'extension de Hartogs. Au contraire, lorsque $\partial\Omega$ est pseudoconvexe, l'argument de contrôle par termes quadratiques dans l'inégalité (4.2) *échoue*. D'ailleurs, on démontre qu'il est impossible de placer des disques holomorphes locaux analogues à ceux de Levi — voire plus généraux, non plats, courbés — de manière à prolonger toutes les fonctions holomorphes au-delà de $\partial\Omega$ au moyen de la formule de Cauchy.

Problème de Levi 8.7. *Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathscr{C}^2$ pseudoconvexe, existe-t-il une fonction holomorphe $f^\wr \in \mathscr{O}(\Omega)$ qui ne se prolonge holomorphiquement au-delà de $\partial\Omega$ en aucun point $p \in \partial\Omega$* **?**

Autrement dit :

Problème 8.8. *Tout domaine Levi-pseudoconvexe est-il un domaine d'holomorphie* **?**

9. Plurisousharmonicité de la fonction $z \longmapsto -\log \operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$

Dans le chapitre sur les fonctions sous-harmoniques, nous avons démontré qu'une fonction semi-continue supérieurement $u \colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est sous-harmonique si et seulement si :

$$\forall\, z_0 \in \Omega \quad \forall\, r > 0 \text{ avec } \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega \quad \forall\, p \in \mathbb{C}[z]$$
$$\Big(u(z_0 + \tau) \leqslant \operatorname{Re} p\,(z_0 + \tau)\ \ \forall\, |\tau| = r\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(u(z_0 + \tau) \leqslant \operatorname{Re} p\,(z_0 + \tau)\ \ \forall\, |\tau| \leqslant r\Big).$$

Nous allons maintenant utiliser ce critère, lequel présente l'avantage de ne requérir que des polynômes, holomorphes dans $\mathbb{C}$ entier — donc dans Ω.

Par ailleurs, dans le chapitre sur les domaines d'holomorphie, nous avons démontré que dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ qui est d'holomorphie, pour tout compact $K \subset \Omega$, si une fonction $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ satisfait :

$$\big|f(z)\big| \leqslant \operatorname{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big) \qquad (\forall\, z \in K),$$

alors elle satisfait aussi en tout point de l'enveloppe holomorphe $\widehat{K}_{\mathscr{O}(\Omega)}$ de K :

$$\big|f(\zeta)\big| \leqslant \operatorname{dist}\big(\zeta, \complement\,\Omega\big) \qquad (\forall\, \zeta \in \widehat{K}_{\mathscr{O}(\Omega)}).$$

Ici, la fonction distance $\operatorname{dist} = \operatorname{dist}_{\mathbb{D}^n}$ est calculée par rapport à la norme standard :

$$|z| := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |z_i|.$$

Une grande contribution d'Oka fut de découvrir la sous-harmonicité de la restriction à toutes les droites affines complexes de la fonction :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto -\log \operatorname{dist}\big(z, \partial\Omega\big) \;=\; -\log \operatorname{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big), \end{aligned}$$

qui est continue (exercice).

Plus précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout vecteur complexe tangent non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega \cong \mathbb{C}^n$, soit la droite affine :

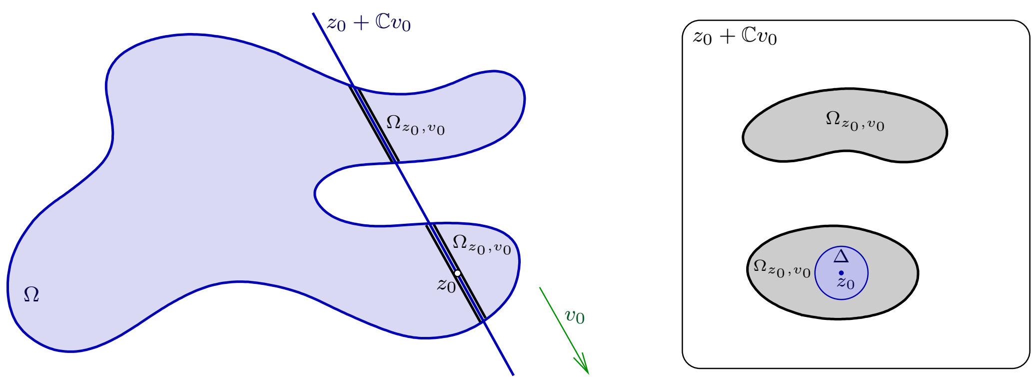
$$z_0 + \mathbb{C}\, v_0 \;:=\; \big\{z_0 + \tau\, v_0 \colon\; \tau \in \mathbb{C}\big\} \;\cong\; \mathbb{C}.$$

Elle intersecte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ en un certain sous-ouvert non vide de $\mathbb{C}$:

$$\Omega_{z_0,v_0} \;:=\; \Omega \cap \big(z_0 + \mathbb{C}\, v_0\big).$$

Même lorsque Ω est connexe, ces Ω_{z_0,v_0} ne sont pas forcément connexes. Comme on peut changer librement de centre sur une droite affine :

$$\forall\, z_1 \;\in\; \Omega_{z_0,v_0} \qquad \Omega_{z_1,v_0} \;=\; \Omega_{z_0,v_0}.$$



Théorème 9.1. [Oka 1942] *Si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout vecteur non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$, la fonction :*

$$\begin{aligned} \Omega_{z_0,v_0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto -\log \operatorname{dist}\big(z,\, \complement\,\Omega\big) \end{aligned}$$

est continue et sous-harmonique *dans Ω_{z_0,v_0}.*

Démonstration. La continuité étant laissée en exercice, on peut, quitte à recentrer en un point quelconque $z_1 \in \Omega_{z_0,v_0}$, supposer que $z_1 = z_0$, et chercher à vérifier le critère rappelé ci-dessus.

Soit donc $r > 0$ tel que le disque fermé de rayon r *dans la droite complexe* $z_0 + \mathbb{C}\, v_0$ est contenu dans Ω_{z_0,v_0} :

$$\overline{\Delta} \;:=\; \big\{z_0 + \tau\, v_0 \colon\; |\tau| \leqslant r\big\} \;\subset\; \Omega_{z_0,v_0} \;\subset\; \Omega.$$

Comme la restriction à ce disque Δ de toute fonction holomorphe $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $\tau \in \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Delta}$ qui satisfait le principe du maximum au bord :

$$\max_{|\tau| \leqslant r} \big|f(z_0 + \tau\, v_0)\big| \;=\; \max_{|\tau| = r} \big|f(z_0 + \tau\, v_0)\big|,$$

il est clair que :

$$\widehat{\partial\Delta}_{\mathscr{O}(\Omega)} \supset \overline{\Delta}.$$

En direction du critère, soit un polynôme $p \in \mathbb{C}[\tau]$ satisfaisant sur le bord de Δ :

$$-\log \operatorname{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \partial\Omega\big) \leqslant \operatorname{Re} p(\tau) \qquad (\forall\, |\tau| = r).$$

Puisqu'on peut trouver (exercice) un polynôme $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ à n variables tel que :

$$P\big(z_0 + \tau\, v_0\big) \equiv p(\tau) \qquad (\text{dans}\, \mathbb{C}[\tau]),$$

en exponentiant, il vient :

$$\big|e^{-P(z)}\big| \leqslant \operatorname{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big) \qquad (\forall\, z \in \partial\Delta),$$

donc la fonction holomorphe $e^{-P(z)} \in \mathscr{O}(\Omega)$ dans le domaine d'holomorphie Ω satisfait la même inégalité dans l'enveloppe :

$$\big|e^{-P(\zeta)}\big| \leqslant \operatorname{dist}\big(\zeta, \complement\,\Omega\big) \qquad (\forall\, \zeta \in \overline{\Delta}),$$

ce qui équivaut à :

$$-\log \operatorname{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \complement\,\Omega\big) \leqslant \operatorname{Re} p(\tau) \qquad (\forall\, |\tau| \leqslant r),$$

et achève l'argumentation. □

Rappelons qu'étant donné une famille quelconque $(u_a)_{a \in A}$ de fonctions continues ou même semi-continues supérieurement $u_a \colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$, la fonction-infimum :

$$u := \inf_{a \in A} u_a \colon \quad \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$$

est toujours semi-continue supérieurement. Ceci est vrai en particulier pour des suites $(u_n)_{n=1}^{\infty}$, et comme on doit souvent, en Analyse, prendre des limites — inférieures ou supérieures — de suites, la découverte d'Oka motive une définition qui introduit un concept central en Analyse Complexe à plusieurs variables.

Définition 9.2. **[Oka 1942]** Une fonction définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$:

$$u \colon \quad \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[,$$

la valeur $-\infty$ étant autorisée, est dite *plurisousharmonique* lorsque :

(1) u est semi-continue supérieurement ;

(1) pour tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout vecteur tangent non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$, la restriction de u au sous-ouvert $\Omega_{z_0, v_0} := \Omega \cap \big(z_0 + \mathbb{C}\, v_0\big)$ de $\mathbb{C}$ est sous-harmonique.

En particulier, la fonction $u \equiv -\infty$ est plurisousharmonique.

Bien que dans ce chapitre et ceux qui suivront, nous n'aurons en fait affaire qu'à des fonctions plurisousharmoniques *continues* à valeurs dans $]-\infty, \infty[$, la théorie générale demande seulement la semi-continuité supérieure pour plus de flexibilité.

Terminologie 9.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est appelé *pseudoconvexe* lorsque la fonction continue :

$$\Omega \ni z \longmapsto -\log \operatorname{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$$

est plurisousharmonique

De plus, l'intérêt de cette définition est qu'aucune régularité n'est supposée sur le bord de Ω, contrairement à la définition de Levi.

L'observation fondamentale d'Oka se résume alors :

$$\boxed{\text{ouvert d'holomorphie} \quad \Longrightarrow \quad \text{ouvert pseudoconvexe.}}$$

Historiquement, c'est l'implication inverse qui a constitué le difficile

Problème de Levi 9.4. *Établir l'implication inverse :*

$$\text{ouvert d'holomorphie} \quad \stackrel{?}{\Longleftarrow} \quad \text{ouvert pseudoconvexe.}$$

Pour en donner une solution, il est nécessaire de développer de nombreux concepts et théorèmes. Avant de commencer, achevons d'éclaircir le lien entre la pseudoconvexité au sens de Levi, et celle au sens d'Oka, plus générale.

10. Pseudoconvexité de domaines à bords lisses au sens de Levi et au sens d'Oka

Maintenant, tous les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ n'ont pas un bord lisse. Peut-on alors conceptualiser une notion de pseudoconvexité qui généralise celle de Levi et qui se dispense de toute hypothèse de régularité ? Oui nous dit Oka, car sa découverte de la plurisousharmonicité de la fonction $z \longmapsto -\log \mathrm{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$ dans les domaines d'holomorphie offre le bon concept.

Théorème 10.1. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n\geqslant 2}$ à bord $\partial\Omega \in \mathscr{C}^2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Omega = \{r < 0\}$ *est pseudoconvexe au sens de Levi, à savoir la forme de Levi de son bord $\partial\Omega$ est positive :*

$$0 \;\leqslant\; \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\, v_j \overline{v}_k \qquad\qquad (\forall\, z \in \partial\Omega,\ \forall\, r_{z_1} v_1 + \cdots + r_{z_n} v_n = 0).$$

(ii) Ω *est pseudoconvexe au sens d'Oka près de son bord, à savoir il existe un voisinage ouvert $\mathscr{V}$ de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{C}^n$ tel que la fonction continue :*

$$\Omega \cap \mathscr{V} \ni z \;\longmapsto\; -\log \mathrm{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$$

est plurisousharmonique.

Démonstration. Commençons par **(ii)** $\Longrightarrow$ **(i)**. En calculant les distances au moyen de la métrique euclidienne, abrégeons :

$$d(z) \;:=\; \mathrm{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big).$$

Comme la condition **(i)** de Levi que nous devons atteindre ne dépend pas de la fonction définissante, nous pouvons choisir la *distance signée :*

$$r(z) \;:=\; \begin{cases} -\ \mathrm{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big) & \text{pour } z \in \Omega \cup \partial\Omega, \\ +\ \mathrm{dist}\big(z, \Omega\big) & \text{pour } z \in \complement\,\Omega. \end{cases}$$

L'Exercice 3 propose de se convaincre de la véracité du

Lemme 10.2. *Dans un voisinage ouvert assez petit $\mathscr{V} \supset \partial\Omega$, la fonction distance signée $r \colon \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$.* □

Supposons donc que la fonction $-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}$ de classe $\mathscr{C}^2$ est plurisousharmonique dans $\Omega \cap \mathscr{V}$. En calculant à l'avance :

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\big(-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}\big) = -\frac{\boldsymbol{d}_{\overline{z}_k}}{\boldsymbol{d}} \qquad\qquad \text{puis} \qquad\qquad \frac{\partial}{\partial z_j}\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}\big(-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}\big) = -\frac{\boldsymbol{d}_{z_j\overline{z}_k}}{\boldsymbol{d}} + \frac{\boldsymbol{d}_{z_j}\boldsymbol{d}_{\overline{z}_k}}{\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{d}},$$

sa plurisousharmonicité s'exprime en tout point $z \in \Omega \cap \mathscr{V}$ et pour tout vecteur tangent $v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \cong \mathbb{C}^n$ par la positivité :

$$0 \leqslant \frac{1}{\boldsymbol{d}}\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \big(-\boldsymbol{d}\big)_{z_j\overline{z}_k}\,v_j\overline{v}_k + \frac{1}{\boldsymbol{d}\,\boldsymbol{d}}\bigg(\sum_{j=1}^n \boldsymbol{d}_{z_j}\,v_j\bigg)\bigg(\sum_{k=1}^n \boldsymbol{d}_{\overline{z}_k}\,\overline{v}_k\bigg).$$

Alors si nous choisissons des vecteurs v qui annulent $0 = \sum_i \boldsymbol{d}_{z_i}\,v_i$, le deuxième terme s'évanouit, et comme $\boldsymbol{d} > 0$, sachant que $-\boldsymbol{d} = r$ dans $\Omega \cup \partial\Omega$, nous obtenons :

$$0 \leqslant \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\,v_j\,\overline{v}_k.$$

Un passage à la limite en faisant tendre $z \longrightarrow \partial\Omega$ montre que la condition **(i)** de pseudoconvexité au sens de Levi est satisfaite.

Traitons maintenant **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Comme la condition de Levi ne dépend pas du choix d'équation définissante, nous pouvons supposer que $\Omega = \{r < 0\}$ avec $r =$ la distance signé, de classe $\mathscr{C}^2$ dans un voisinage ouvert $\mathscr{V} \supset \Omega$.

Supposons par l'absurde que $-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}$ n'est *pas* plurisousharmonique dans $\mathscr{V}$, c'est-à-dire que $-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}$ restreinte à une droite affine complexe centrée en un certain point $z \in \Omega \cap \mathscr{V}$ n'est *pas* sous-harmonique. Comme $\boldsymbol{d} \in \mathscr{C}^2$, cela veut dire qu'un laplacien est < 0, donc il existe $z \in \Omega \cap \mathscr{V}$ et il existe $v \in \mathbb{C}^n$ tels que la constante réelle suivante est strictement négative :

$$-c := \frac{\partial^2\tau}{\partial\tau\partial\overline{\tau}}\big(-\mathsf{log}\,\boldsymbol{d}\big)\,(z+\tau v)\bigg|_{\tau=0} < 0.$$

Un développement de Taylor à l'ordre 2 par rapport à τ donne, au moyen de certaines constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \mathsf{log}\,\boldsymbol{d}\,\big(z+\tau v\big) &= \mathsf{log}\,\boldsymbol{d}(z) + \mathsf{Re}\,\big(\alpha\tau + \beta\tau^2\big) + c\,\tau\overline{\tau} + \mathrm{o}_\tau(2) \\ \Longleftrightarrow \qquad \boldsymbol{d}(z+\tau v) &= \boldsymbol{d}(z)\,\big|e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}\big|\,e^{c\tau\overline{\tau}+\mathrm{o}_\tau(2)}. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ qui réalise la distance au bord :

$$|w| = \boldsymbol{d}(z) = \mathsf{dist}\,\big(z, \complement\,\Omega\big) = \mathsf{dist}\,\big(z, \partial\Omega\big),$$

d'où $z + w \in \partial\Omega$, et introduisons le disque holomorphe en $\tau \in \mathbb{C}$:

$$z(\tau) := z + \tau\,v + w\,e^{\alpha\tau+\beta\tau^2},$$

dont le centre $z(0) = z + w$ est au bord. Alors l'inégalité triangulaire nous permet de minorer pour $\tau \sim 0$ petit :

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}\big(z(\tau)\big) &\geqslant \boldsymbol{d}(z+\tau v) - |w|\,\big|e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}\big| \\ &= |w|\,\big|e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}\big|\,\Big(e^{c\tau\overline{\tau}+\mathrm{o}_\tau(2)}-1\Big) \\ &\geqslant |w|\,\big|e^{\alpha\tau+\beta\tau^2}\big|\,\Big(e^{\frac{1}{2}\,c\tau\overline{\tau}}-1\Big) \\ &\geqslant C\,\tau\overline{\tau}. \qquad\qquad (C>0) \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\tau}\,\boldsymbol{d}\big(z(\tau)\big)\bigg|_{\tau=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial\overline{\tau}}\,\boldsymbol{d}\big(z(\tau)\big)\bigg|_{\tau=0} &> 0. \end{aligned}$$

Avec $r = -\boldsymbol{d}$ dans Ω, un calcul simple tenant compte du fait que $\tau \longmapsto z(\tau)$ est holomorphe réexprime (exercice) tout ceci au point $\zeta := z + w \in \partial\Omega$ sous une forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i}(\zeta)\,z_i'(0) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(\zeta)\,z_j'(0)\,\overline{z}_k'(0) &< 0, \end{aligned}$$

qui contredit **(i)** de manière flagrante. □

11. Propriétés des fonctions plurisousharmoniques

Comment comprendre intuitivement les fonctions plurisousharmoniques ? Rappelons que les fonctions lisses *sous-harmoniques* sont caractérisées par la positivité de leur laplacien. Si donc $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un point, si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n\backslash\{0\}$ est un vecteur non nul, si $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{PSH}(\Omega)$, la sous-harmonicité de la fonction :

$$\zeta \longmapsto u\big(z+\zeta\,v\big),$$

définie pour ζ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ entraîne la positivité :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\overline{\zeta}}\bigg|_{\zeta=0} u\big(z+\zeta\,v\big) \\ &= \sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}\,u(z)\,v_j\,\overline{v_k}. \end{aligned}$$

L'énoncé suivant montre qu'une telle positivité dans toutes les directions *caractérise* la plurisousharmonicité des fonctions lisses $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$.

Théorème 11.1. *Une fonction $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ est plurisousharmonique si et seulement si :*

$$\sum_{j=1}^n\sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)\,v_j\,\overline{v}_k \;\geqslant\; 0 \qquad (\forall\,z\in\Omega,\ \forall\,v\in T_z^{\mathbb{C}}\Omega).$$

Démonstration. Effectivement, il suffit que $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$ pour que le calcul précédent ait un sens.

La réciproque découle de la caractérisation connue des fonctions sous-harmoniques $\mathscr{C}^2$ définies dans des ouverts de $\mathbb{C}$. □

Exemple 11.2. Pour $f \in \mathscr{O}(\Omega)$, y compris $f = 0$, et pour $c > 0$ réel, on a (exercice) :

$$\log|f| \in \mathrm{PSH}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad |f|^c \in \mathrm{PSH}(\Omega),$$

puisque — solution de l'exercice — cela découle du cas connu en une variable.

En tout point $z \in \Omega$, on considère donc la matrice hermitienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \overline{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \overline{z}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \overline{z}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \overline{z}_n} \end{pmatrix}.$$

Pour la fonction norme euclidienne au carré :

$$\|z\|^2 := |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2,$$

— à ne pas confondre avec la norme de polydisque $|z| = \max\big(|z_1|, \dots, |z_n|\big)$! — ainsi que pour les deux autres fonctions :

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \qquad \text{et} \qquad y_1^2 + \cdots + y_n^2,$$

on vérifie aisément (exercice) que cette matrice est définie positive.

Définition 11.3. Une fonction $u \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *strictement plurisousharmonique* lorsque :

(1) $u \in \mathscr{C}^2(\Omega)$;

(2) en tout point $z \in \Omega$ et pour tout vecteur tangent non nul $v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \backslash \{0\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k} v_j \overline{v}_k > 0.$$

Ce dernier concept strict :

$$u \in \mathrm{SPSH}(\Omega),$$

sera central dans les prochains chapitres. Mais pour développer la théorie, revenons maintenant à la Définition 9.2 générale qui ne suppose que la semi-continuité supérieure. Tout d'abord :

Théorème 11.4. *Si $(u_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ est une suite décroissante $u_{\nu+1} \leqslant u_\nu$ de fonctions $u_\nu \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ définies dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, alors :*

$$\lim_{\nu \to \infty} u_\nu \in \mathrm{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Découle de l'énoncé connu à une variable, en examinant ce qui se produit sur les intersections de Ω avec des droites affines complexes. Le point-clé, c'est que l'inégalité de sous-moyenne qui caractérise les fonctions sous-harmoniques passe à la limite, et que la continuité (ou la semi-continuité) des u_ν 'dégénère' en semi-continuité supérieure à la limite. □

En fait, la sous-harmonicité de $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ revient à des inégalités de sous-moyenne sur les droites affine complexes, comme suit. En tout point $z_0 \in \Omega$, pour tout vecteur $v_0 \in T_{z_0}\Omega$ avec $\|v_0\| < \mathrm{dist}\,\big(z_0, \partial\Omega\big)$:

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u\big(z_0 + v_0\, e^{i\theta}\big)\, d\theta.$$

Théorème 11.5. *Étant donné un nombre fini* $\mathrm{M} \geqslant 1$ *de fonctions* $u_1, \dots, u_{\mathrm{M}} \in \mathrm{PSH}(\Omega)$*, et des réels* $c_1, \dots, c_{\mathrm{M}} \geqslant 0$*, on a :*

$$\max\,\big(u_1, \dots, u_{\mathrm{M}}\big) \in \mathrm{PSH}(\Omega) \qquad \text{et} \qquad c_1 u_1 + \cdots + c_{\mathrm{M}} u_{\mathrm{M}} \in \mathrm{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable. L'intérêt de cet énoncé, c'est qu'il manifeste une flexibilité de $\mathrm{PSH}(\Omega)$ qui s'avérera très souvent utile, notamment la prise de $\max\,\big(u_1, \dots, u_{\mathrm{M}}\big)$. □

Théorème 11.6. *Si, en un point intérieur* $z_0 \in \Omega$*, une fonction* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ *atteint :*

$$\sup_{\Omega} u = u(z_0),$$

alors $u \equiv u(z_0)$ *est constante dans la composante connexe* ω_0 *de* Ω *contenant* z_0*.*

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable, en remplaçant Ω par ω_0, et en faisant varier le vecteur $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega \backslash \{0\}$. □

Théorème 11.7. *Soit* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$*. Si, en un point* $z_0 \in \Omega$ *:*

$$-\infty < u(z_0),$$

alors $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\omega_0)$ *est localement intégrable dans la composante connexe* $\omega_0 \ni z_0$ *de* Ω*.*

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable, au prix d'une adaptation qui ne sera pas détaillé ici. □

Théorème 11.8. *Soit* $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$*. Si* $\psi \colon [\inf u, \sup u[\longrightarrow \mathbb{R}$ *est convexe croissante, alors :*

$$\psi \circ u \in \mathrm{PSH}(\Omega),$$

en définissant $\psi(-\infty) := \lim_{-\infty \leftarrow t} \psi(t)$ *lorsque* $-\infty = \inf u$*.*

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable. □

Théorème 11.9. *Soit* $u \in \mathrm{SPSH}(\Omega) = \mathscr{C}^2(\Omega) \cap \mathrm{PSH}(\Omega)$ *une fonction strictement plurisousharmonique. Si* ψ *est une fonction* $\mathscr{C}^2$ *réelle définie dans un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *contenant l'image* $u(\Omega) \subset \mathbb{R}$ *qui satisfait :*

$$\psi'(t) > 0 \qquad \text{et} \qquad \psi''(t) \geqslant 0,$$

alors $\psi \circ u \in \mathrm{SPSH}(\Omega)$ *est strictement plurisousharmonique.*

Démonstration. En un point quelconque $z \in \Omega$, pour un vecteur tangent non nul arbitraire $v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \backslash \{0\}$, il suffit de calculer et de réorganiser :

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2(\psi\circ u)}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\,\overline{v}_k\,v_j
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial z_j}\Big[\psi'\big(u(z)\big)\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}(z)\,\overline{v}_k\Big]\,v_j \\
&= \psi''\big(u(z)\big)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial z_j}(z)\,v_j\,\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial \overline{z}_k}(z)\,\overline{v}_k + \psi'\big(u(z)\big)\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)\,v_j\,\overline{v_k} \\
&= \psi''\big(u(z)\big)\bigg|\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial z_i}(z)\,v_i\bigg|^2 + \underbrace{\psi'\big(u(z)\big)}_{>0}\underbrace{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}(z)\,v_j\,\overline{v_k}}_{>0},
\end{aligned}
$$

pour voir la positivité stricte. □

Théorème 11.10. *Soient $u_1,\dots,u_{\rm M} \in {\rm PSH}(\Omega)$. Si $\varphi\colon \mathbb{R}^{\rm M} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante par rapport à chacune de ses variables, alors $\varphi\big(u_1,\dots,u_{\rm M}\big)$ est plurisousharmonique dans Ω.*

En particulier :

$$
u_1+\cdots+u_{\rm M}, \qquad \max\big(u_1,\dots,u_{\rm M}\big), \qquad \log\big(e^{u_1}+\cdots+e^{u_{\rm M}}\big)
$$

sont plurisousharmoniques.

Démonstration. Analogue au cas de une variable. □

Soit maintenant une fonction-régularisante $\chi = \chi\big(|z_1|,\dots,|z_n|\big)$ définie sur $\mathbb{C}^n$ à valeurs dans $[0,1]$ lisse à support compact contenu dans la boule unité euclidienne $\{\|z\|\leqslant 1\}$ qui ne dépend que des modules des variables complexes et dont l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^n}\chi\,d\lambda = 1$ est normalisée. Pour $\varepsilon>0$, posons :

$$
\omega_\varepsilon(z) := \tfrac{1}{\varepsilon^{2n}}\,\chi\big(\tfrac{z}{\varepsilon}\big).
$$

Théorème 11.11. *Si $u \in {\rm PSH}(\Omega)$ est plurisousharmonique dans un domaine $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ avec $u \not\equiv -\infty$, alors pour $\varepsilon>0$, les convolées :*

$$
\begin{aligned}
u_\varepsilon(z) := u*\omega_\varepsilon(z) &= \int u\big(z-\varepsilon\,\zeta\big)\,\chi(\zeta)\,d\lambda(\zeta) \\
&\geqslant u(z)
\end{aligned}
$$

sont $\mathscr{C}^\infty$ plurisousharmoniques dans le sous-ouvert :

$$
\Omega_\varepsilon := \big\{z\in\Omega\colon\ {\rm dist}\big(z,\complement\,\Omega\big)>\varepsilon\big\},
$$

et tendent en décroissant vers u en tout point $z\in\Omega$:

$$
u_\varepsilon(z) \searrow u(z) \qquad\qquad (\varepsilon\searrow 0,\ z\in\Omega).
$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. □

Théorème 11.12. *Si $h\colon \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega' = h(\Omega)$ est un biholomorphisme entre deux ouverts $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ et $\Omega'\subset\mathbb{C}^n$, alors :*

$$
u' \in {\rm PSH}(\Omega') \implies u\circ h \in {\rm PSH}(\Omega).
$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. □

Théorème 11.13. *Si $\{u_a\}_{a\in A}$ est une famille localement uniformément bornée quelconque de fonctions $u_a \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, et si la fonction :*

$$u(z) := \sup_{a\in A} u_a(z) \qquad\qquad (z\in\Omega)$$

est semi-continue supérieurement, alors $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$.

Démonstration. Analogue au cas de une variable. □

Le fait est que $\sup_{a\in A} u_a(z)$ n'est pas forcément semi-continue supérieurement. En la corrigeant, tout se passe bien.

Théorème 11.14. *Si $\{u_a\}_{a\in A}$ est une famille localement uniformément bornée quelconque de fonctions $u_a \in \mathrm{PSH}(\Omega)$, alors la régularisée supérieure :*

$$u^*(z) := \limsup_{w\to z}\Big(\sup_{a\in A} u_a(w)\Big) \geqslant u(z) \qquad\qquad (z\in\Omega),$$

est la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui est $\geqslant u$, est presque partout égale à $\sup_{a\in A} u$, et est plurisousharmonique :

$$u^* \in \mathrm{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. □

12. Ouverts pseudoconvexes et enveloppes plurisousharmoniques

Définition 12.1. L'*enveloppe plurisousharmonique* d'un compact $K \subset \Omega$ dans un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est :

$$\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} := \Big\{z\in\Omega\colon\ u(z) \leqslant \sup_K u \text{ pour toutes } u\in \mathrm{PSH}(\Omega)\Big\}.$$

En prenant $u := \log|f(z)|$ avec $f\in\mathscr{O}(\Omega)$, on constate (exercice) que :

$$\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \subset \widehat{K}_{\mathscr{O}(\Omega)}.$$

Toutefois, puisqu'il n'est pas clair *a priori* que cette enveloppe $\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$ soit relativement fermée dans Ω, nous le démontrerons plus tard.

Dans les ouverts pseudoconvexes, l'analogue du Théorème de Cartan-Thullen pour les domaines d'holomorphie s'exprime en termes de ce nouveau concept d'enveloppe.

Théorème 12.2. [Caractérisations de la pseudoconvexité] *Pour un ouvert $\Omega\subset\mathbb{C}^{n\geqslant 1}$, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *La fonction continue $z\longmapsto -\log \mathrm{dist}\big(z,\partial\Omega\big)$ est plurisousharmonique dans Ω.*

(ii) *Il existe une fonction continue plurisousharmonique $u\in\mathrm{PSH}(\Omega)\cap\mathscr{C}^0(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $c\in\mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :*

$$\big\{z\in\Omega\colon\ u(z)\leqslant c\big\}$$

est compact dans Ω.

(iii) *Tout compact $K\subset\Omega$ a une enveloppe plurisousharmonique $\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}\subset\Omega$ dont l'adhérence dans $\mathbb{C}^n$:*

$$\overline{\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}} \subset \Omega$$

est aussi compacte, contenue dans Ω.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**. Comme $z \longrightarrow |z|^2$ est plurisousharmonique et à ensembles de sous-niveaux bornés — de simples polydisques ! —, la fonction continue :

$$u(z) := |z|^2 - \log \operatorname{dist}\big(z, \partial\Omega\big),$$

qui est plurisousharmonique et qui tend vers l'infini au voisinage de $\partial\Omega$, convient.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)**. Soit un compact quelconque $K \subset \Omega$. Pour $c \gg 1$ assez grand, on a $K \subset L_c := \{u \leqslant c\}$, d'où :

$$\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \subset \widehat{L_c}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} = L_c,$$

cette dernière égalité, élémentaire, se vérifiant en revenant à la définition :

$$\widehat{L_c}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} = \Big\{z \in \Omega\colon\; u(z) \leqslant \sup_{L_c} u \text{ pour toutes } u \in \mathrm{PSH}(\Omega)\Big\},$$

puis en prenant $u = v$, d'où $\widehat{L_c}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \subset L_c$, l'inclusion inverse étant triviale.

(iii) $\Longrightarrow$ **(i)**. Soit un point quelconque $z_0 \in \Omega$, soit un vecteur non nul quelconque $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$ et soit $r > 0$ tel que le disque fermé :

$$\overline{\Delta} = \big\{z_0 + \tau\, v_0\colon\; |\tau| \leqslant r\big\} \subset \Omega$$

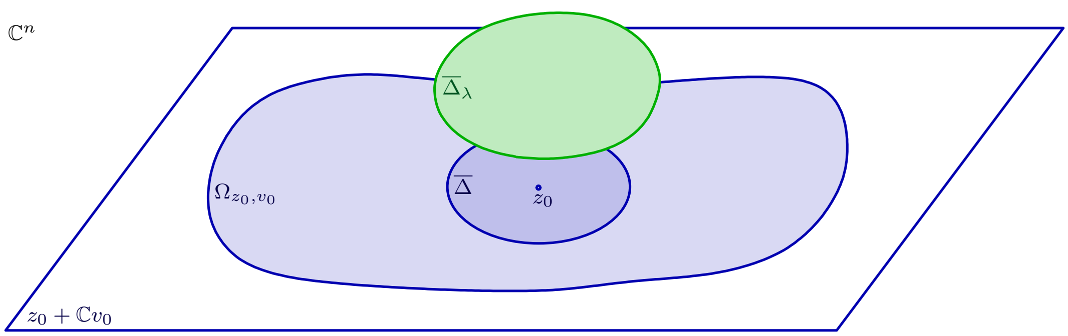
est contenu dans l'ouvert. Pour tout polynôme $p(\tau) \in \mathbb{C}[\tau]$ majorant sur le bord de $\overline{\Delta}$:

$$-\log \operatorname{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \partial\Omega\big) \leqslant \operatorname{Re} p(\tau) \qquad {\scriptstyle (\forall\, |\tau| = r)},$$

l'objectif est d'obtenir la même inégalité en tout point de $\overline{\Delta}$, c'est-à-dire pour tout $|\tau| \leqslant r$, ce qui établira la plurisousharmonicité.

Récrivons cette hypothèse comme :

$$\operatorname{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \partial\Omega\big) \geqslant \big|e^{-p(\tau)}\big| \qquad \text{pour tout } |\tau| = r. \tag{12.3}$$



Prenons un autre vecteur non nul $w_0 \in \mathbb{C}^n$ de norme $0 < |w_0| < 1$ et, pour $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, introduisons les disques holomorphes paramétrés :

$$\begin{aligned} A_\lambda\colon \quad \overline{\mathbb{D}}_r &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \tau &\longmapsto z_0 + \tau\, v_0 + \lambda\, w_0\, e^{-p(\tau)}. \end{aligned}$$

Lorsque $\lambda = 0$, nous retrouvons le disque « plat » :

$$A_0\colon \quad \tau \longmapsto z_0 + \tau\, v_0.$$

Notons alors leurs images dans $\mathbb{C}^n$:

$$\overline{\Delta}_\lambda := A_\lambda\big(\overline{\mathbb{D}}_r\big) \qquad {\scriptstyle (0 \leqslant \lambda \leqslant 1)},$$

avec bien sûr :

$$\overline{\Delta}_0 = \overline{\Delta} \subset \Omega.$$

Jusqu'à quel moment ces $\overline{\Delta}_\lambda$ restent-ils contenus dans Ω ? Introduisons donc :

$$\Lambda \;:=\; \big\{\lambda \in [0,1]\colon\; \overline{\Delta}_{\lambda'} \subset \Omega \text{ pour tous } 0 \leqslant \lambda' \leqslant \lambda\big\}.$$

Clairement, $\Lambda \ni 0$ est ouvert non vide. Posons :

$$\lambda_* \;:=\; \sup_{\lambda\in\Lambda} \lambda.$$

Assertion 12.4. *Λ est fermé.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que $\Lambda = [0, \lambda_*[$. Introduisons l'ensemble :

$$K \;:=\; \bigcup_{0\leqslant\lambda\leqslant 1} A_\lambda\big(\partial\mathbb{D}_r\big),$$

réunion des bords de ces disques, qui est compact dans $\mathbb{C}^n$. Explicitement :

$$\begin{aligned} K \;&=\; \big\{z_0 + \tau\, v_0 + \lambda\, w_0\, e^{-p(\tau)}\colon\; |\tau| = r,\; 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\big\} \\ &\subset\; \Omega \end{aligned}$$

et comme $|w_0| < 1$, une simple inégalité triangulaire montre grâce à l'hypothèse (12.3) que ce compact est entièrement contenu dans l'ouvert.

Prenons maintenant une fonction quelconque $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$. Puisque pour tout $\lambda < \lambda_*$ arbitrairement proche de λ_*, le disque $A_\lambda\big(\overline{\mathbb{D}}_r\big) = \overline{\Delta}_\lambda \subset \Omega$ est contenu dans l'ouvert, nous pouvons composer :

$$\tau \;\longrightarrow\; u \circ A_\lambda(\tau),$$

ce qui, d'après l'Exercice 1, fournit une fonction sous-harmonique dans un certain voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}_r$.

Mais alors le principe du maximum donne, en un point quelconque $\tau_0 \in \overline{\mathbb{D}}_r$:

$$\begin{aligned} u\big(A_\lambda(\tau_0)\big) \;&\leqslant\; \sup_{|\tau|=r} u\big(A_\lambda(\tau)\big) \\ &\leqslant\; \sup_K u, \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$A_\lambda(\tau_0) \;\in\; \widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \;\subset\; \Omega,$$

et ce, uniformément quelle que soit la proximité à λ_* de $\lambda < \lambda_*$, puisque par l'hypothèse **(iii)**, l'ensemble $\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \subset \Omega$ est un compact fixe contenu dans l'ouvert. Ainsi à la limite par continuité :

$$A_{\lambda_*}\big(\overline{\mathbb{D}}_r\big) \;\subset\; \widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)} \;\subset\; \Omega,$$

ce qui montre que $\lambda_* \in \Lambda$ — contradiction ! □

Le sous-ensemble $\Lambda \subset [0,1]$ non vide, ouvert et fermé, ne peut qu'être $\Lambda = [0,1]$, *i.e.* $\lambda_* = 1$, donc :

$$A_1\big(\overline{\mathbb{D}}_r\big) \;\subset\; \Omega,$$

c'est-à-dire :

$$z_0 + \tau\, v_0 + w_0\, e^{-p(\tau)} \;\in\; \Omega \qquad\qquad (\forall\, |\tau| \leqslant r),$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$\mathrm{dist}\,\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \complement\,\Omega\big) \;\geqslant\; |w_0|\, \big|e^{-p(\tau)}\big| \qquad\qquad (\forall\, |\tau| \leqslant r).$$

Or comme $w_0 \in \mathbb{C}^n$ avec $|w_0| < 1$ pouvait être choisi de norme arbitrairement proche de 1, nous déduisons :

$$\mathsf{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \complement\,\Omega\big) \;\geqslant\; \big|e^{-p(\tau)}\big| \qquad\qquad (\forall\, |\tau| \leqslant r),$$

et enfin, en prenant le logarithme :

$$-\log \mathsf{dist}\big(z_0 + \tau\, v_0,\, \partial\Omega\big) \;\leqslant\; \mathsf{Re}\, p(\tau) \qquad\qquad (\forall\, |\tau| \leqslant r),$$

nous atteignons notre objectif. □

Théorème 12.5. *Si* $\big(\Omega_a\big)_{a\in A}$ *est une famille quelconque d'ouverts pseudoconvexes* $\Omega_a \subset \mathbb{C}^n$*, alors :*

$$\mathsf{Int}\bigg(\bigcap_{a\in A} \Omega_a\bigg) =:\; \Omega$$

est encore un ouvert pseudoconvexe.

Démonstration. Pour tout $a \in A$, la fonction continue :

$$z \longmapsto -\log \mathsf{dist}\big(z, \partial\Omega_a\big)$$

et plurisousharmonique dans Ω_a. Mais puisqu'un supremum quelconque de fonctions plurisousharmoniques est encore plurisousharmonique lorsqu'il est continu l'égalité :

$$-\log \mathsf{dist}\big(z, \partial\Omega\big) \;=\; \sup_{a\in A}\; -\;\log \mathsf{dist}\big(z, \partial\Omega_a\big),$$

dans laquelle le membre de gauche *est* continu dans Ω, conclut. □

Faisons maintenant voir que la pseudoconvexité est une propriété locale.

Théorème 12.6. *Pour un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}^{n\geqslant 1}$ *:*

$$\begin{pmatrix} \forall\, \zeta \in \partial\Omega \quad \exists\, \omega \ni \zeta \text{ ouvert tel que} \\ \Omega \cap \omega \text{ est pseudoconvexe} \end{pmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \Omega \text{ est pseudoconvexe}.$$

Autrement dit, la pseudoconvexité est une propriété locale du bord.

Démonstration. En un point quelconque $\zeta \in \partial\Omega$, prenons un voisinage ouvert $\omega \ni \zeta$ tel que $\Omega \cap \omega$ est pseudoconvexe. Dans un sous-voisinage ouvert $\zeta \in \varpi \subset \omega$ assez petit, on a (exercice) :

$$\mathsf{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big) \;=\; \mathsf{dist}\big(z, \complement\,(\Omega \cap \omega)\big) \qquad\qquad (\forall\, z \in \varpi).$$

Ainsi, la fonction $z \longmapsto -\log \mathsf{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$ est plurisousharmonique dans un certain voisinage ouvert $\varpi_\zeta \ni \zeta$ de tout point $\zeta \in \partial\Omega$. En prenant le complémentaire, dans Ω, de la réunion de ces ϖ_ζ, nous déduisons qu'il existe un fermé $F \subset \Omega$ tel que $z \longmapsto -\log \mathsf{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$ est plurisousharmonique dans $\Omega\backslash F$.

Ensuite, prenons une fonction $\varphi = \varphi(|z|^2)$ positive convexe strictement croissante de $|z|^2$, donc plurisousharmonique, avec $\varphi(|z|^2) \longrightarrow \infty$ quand $|z|^2 \longrightarrow \infty$ et suffisamment grande pour que :

$$\varphi(|z|^2) \;>\; -\log \mathsf{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big) \qquad\qquad (\forall\, z \in F).$$

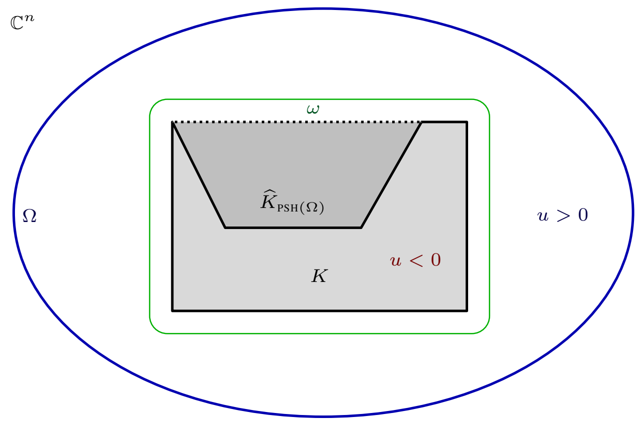
Alors la fonction continue :

$$u(z) \;:=\; \max\Big(\varphi(|z|^2),\, -\log \mathsf{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)\Big),$$

toujours plurisousharmonique d'après un théorème élémentaire déjà vu, satisfait (exercice) la condition **(ii)** du Théorème 12.2, donc Ω est pseudoconvexe d'après **(ii)** $\Longleftrightarrow$ **(i)**.

D'ailleurs *a posteriori*, grâce à ce théorème, la fonction $z \longmapsto -\log\text{dist}\big(z, \complement\,\Omega\big)$ elle-même — sans avoir à la corriger en $u(z)$! — est continue plurisousharmonique dans Ω. □

Maintenant, pour la théorie des estimées L^2 de Hörmander, nous aurons besoin de munir les ouverts pseudoconvexes de fonctions plurisousharmoniques lisses d'exhaustion. Voici un énoncé très général dont se déduira aisément le Théorème 12.10 utile.



Théorème 12.7. *Dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soit un compact $K \subset \Omega$ et soit un voisinage ouvert :*

$$\omega \supset \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}.$$

Alors il existe une fonction $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dotée des trois qualités suivantes.

(1) *$u < 0$ dans K tandis que $u > 0$ dans $\Omega \backslash \omega$.*

(2) *Pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau $\big\{z \in \Omega \colon\; u(z) \leqslant c\big\}$ est compact, contenu dans Ω.*

(3) *u est partout strictement plurisousharmonique, c'est-à-dire :*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\, v_j\, \overline{v}_k \;>\; 0 \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega,\ \forall\, v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \setminus \{0\}).$$

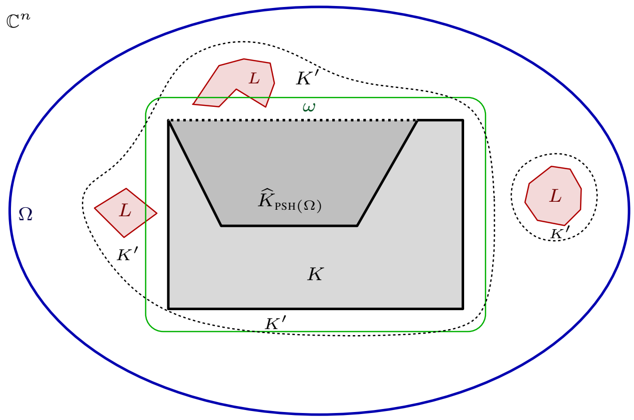
Démonstration. Commençons par construire une fonction continue $v \in \text{PSH}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\Omega)$ qui satisfait **(1)** et **(2)**, avant de la régulariser pour atteindre **(3)**.

Puisque Ω est pseudoconvexe, il existe, d'après le Théorème 12.2, une fonction $\mathscr{C}^0$ plurisousharmonique :

$$u_0 \colon\quad \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec $\{u_0 \leqslant c\} \subset \Omega$ compact, pour tout $c \in \mathbb{R}$. En soustrayant une constante assez grande de u_0, nous pouvons supposer que :

$$u_0\big|_K \leqslant -\,\delta_0 \;<\; 0 \qquad\qquad (\delta_0 > 0).$$



Maintenant, avec $\omega \supset \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$ ouvert, le problème évident, c'est que u_0 peut prendre des valeurs négatives hors de ω, contrairement à ce que vise **(1)**, et c'est pourquoi nous introduisons le compact :

$$L := \big\{z \in \Omega \backslash \omega \colon\ u_0(z) \leqslant 0\big\},$$

que nous supposons non vide. De plus, introduisons un ensemble de sous-niveau de u_0 assez grand pour contenir le lieu de travail :

$$K' := \big\{z \in \Omega \colon\ u_0(z) \leqslant 2\big\}.$$

Comme ω est un voisinage ouvert de $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$, il est clair que $L \subset \Omega \backslash \omega$ est à distance > 0 de $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$. Alors par définition de l'enveloppe, nous avons :

$$\forall\, z \in L \quad \exists\, g_z \in \text{PSH}(\Omega) \quad g_z(z) > 0 \quad \text{tandis que } g_z\big|_K < 0.$$

Régularisons chacune de ces g_z, pour obtenir des fonctions lisses plurisousharmoniques $h_z \in \mathscr{C}^\infty(\Omega_{\varepsilon_z}) \cap \text{PSH}(\Omega_{\varepsilon_z})$ de la forme convolée $h_z = g_z * \omega_{\varepsilon_z}$ définies dans des sous-ouverts $\Omega_{\varepsilon_z} \subset \Omega$ avec $\varepsilon_z > 0$ suffisamment petit pour que, quel que soit $z \in L$:

- $\Omega_{\varepsilon_z} \supset K'$;
- $h_z\big|_K < 0$;
- $h_z(w) > 0$ en tout point $w \in \varpi_z$ d'un certain petit voisinage ouvert $\varpi_z \ni z$.

Grâce au lemme de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini $\text{M} \geqslant 1$ de points $z_1, \dots, z_{\text{M}} \in L$ tels que :

$$L \subset \bigcup_{1 \leqslant m \leqslant \text{M}} \varpi_{z_m}.$$

Alors la fonction continue plurisousharmonique :

$$u_1 := \max\big(h_{z_1}, \dots, h_{z_{\text{M}}}\big),$$

définie dans un voisinage ouvert de K' dans Ω, satisfait toujours $u_1\big|_K < 0$, tandis que par construction $u_1 > 0$ dans un voisinage ouvert de L. Il reste à « *recoller* » cette fonction u_1, qui n'est pas définie partout dans Ω, à la fonction u_0.

À cet effet, avec la constante :

$$\big(0 <\big) \quad C := \max_{K'} u_1 < \infty,$$

introduisons la fonction définie pour $z \in \Omega$ de manière non unique par :

$$v(z) := \begin{cases} \max\big(u_1(z),\, C\,u_0(z)\big) & \text{lorsque } u_0(z) \leqslant 2, \\ C\,u_0(z) & \text{lorsque } u_0(z) > 1; \end{cases}$$

en fait, en des points $z \in \Omega$ tels que $1 < u_0(z) \leqslant 2$, ces deux définitions s'accordent, puisque sur $K' = \{u_0 \leqslant 2\}$, on a :

$$\left.\begin{matrix} u_1 \leqslant C \\ 1 < u_0(z) \end{matrix}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \max\big(u_1(z),\, C\,u_0(z)\big) = C\,u_0(z).$$

De plus, cette même vérification montre que $v \equiv u_0$ dans $\{u_0 > 1\}$, et donc, même si u_1 n'est définie que dans un voisinage de K', la fonction continue plurisousharmonique v est définie partout dans Ω, et elle exhauste Ω, puisque u_0 le fait. Enfin :

$$v\big|_K = \max\big(u_1,\, C\,u_0\big)\Big|_K < 0.$$

Ensuite, il s'agit de *régulariser* cette fonction $v \in \mathrm{PSH}(\Omega) \cap \mathscr{C}^0(\Omega)$ qui satisfait **(1)** et **(2)**. Toutefois, lorsqu'on régularise par convolution, on perd en général une petite partie du domaine de définition de la fonction. Il faut donc inventer un nouveau procédé, qui va découper Ω en *couronnes*.

Pour $j \in \mathbb{N}$, introduisons deux compacts :

$$\begin{aligned} L_j &:= \big\{z \in \Omega\colon\ v(z) \leqslant j\big\}, & \delta_j &:= \operatorname{dist}\big(L_j,\, \complement\,\Omega\big) > 0, \\ L_j' &:= \big\{z \in \Omega\colon\ \operatorname{dist}(z, L_j) \leqslant \tfrac{1}{3}\,\delta_j\big\}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{3}\,\delta_j$ assez petit, introduisons les fonctions définies pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ par :

$$v_j(z) := \int_{\substack{\zeta \in L_j' \\ \|\zeta - z\| \leqslant \varepsilon_j}} v(\zeta)\,\chi\Big(\frac{z-\zeta}{\varepsilon_j}\Big)\,\frac{d\lambda(\zeta)}{\varepsilon_j^{2n}} + \varepsilon_j\,\|z\|^2 + \varepsilon_j\,|z_1 - 1|^2,$$

où la fonction χ est comme dans le Théorème 11.11. D'après ce théorème, les fonctions v_j sont $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ et strictement plurisousharmoniques dans $\mathbb{C}^n$ grâce au terme $\varepsilon_j\,\|z\|^2$; en outre, puisque la partie intégrale est $\geqslant v(z)$ lorsque $z \in L_j$ et puisque le reste additionnel $\varepsilon_j\,\big(\|z\|^2 + |z_1 - 1|^2\big)$ est > 0 en tout point — y compris en l'origine $z = 0$ —, nous obtenons la minoration :

$$v_j > v \qquad \text{(dans } L_j,\ \forall\, j \geqslant 0).$$

En choisissant $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ assez petits, on garantit :

$$v_0\big|_K < 0 \qquad \text{et} \qquad v_1\big|_K < 0,$$

puis en choisissant tous les $\varepsilon_j > 0$ pour $j \geqslant 1$ assez petits, on garantit :

$$v_j < v + 1 \qquad \text{(dans } L_j',\ \forall\, j \geqslant 1).$$

Affirmation 12.8. *Pour tout $j \geqslant 1$, il existe un voisinage ouvert U_j dans Ω de la couronne compacte $C_j := \{j - 1 \leqslant v \leqslant j\}$ dans lequel :*

$$v_j(z) - (j - 1) > 0 \qquad (\forall\, z \in U_j).$$

Preuve. En effet, si $j-1 \leqslant v(z) \leqslant j$, la minoration sur L_j donne :

$$v_j(z) - (j-1) \;>\; v(z) - (j-1) \;\geqslant\; j-1-j+1 \;=\; 0,$$

Cette inégalité étant stricte sur un compact, l'existence d'un voisinage ouvert U_j découle de la continuité de v_j. □

Ensuite, prenons une fonction $\psi \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec $\psi \equiv 0$ sur $\mathbb{R}_-$ qui, sur $\mathbb{R}_+^*$, est strictement croissante $\psi' > 0$ et strictement convexe $\psi'' > 0$. Alors pour tout $j \geqslant 1$ les fonctions composées :

$$\psi\big(v_j - (j-1)\big)$$

sont > 0 et strictement plurisous-harmoniques dans U_j.

Puisque la réunion de L_0 avec toutes les couronnes remplit :

$$\Omega \;=\; L_0 \bigcup_{j\geqslant 1} C_j,$$

et puisque $v_0 > v$ dans L_0, en choisissant successivement les $a_j \gg 0$ positifs assez grands pour être toujours $> v$ sur toutes les couronnes, la fonction :

$$\begin{aligned} u(z) \;&:=\; v_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j\, \psi\big(v_j(z) - j + 1\big) \\ &> v(z), \end{aligned}$$

de classe $\mathscr{C}^\infty$ parce que la somme est localement finie (exercice), est strictement plurisousharmonique partout dans Ω, et comme elle est supérieure à la fonction d'exhaustion v, elle satisfait aussi (exercice) la condition **(2)**.

Enfin par construction :

$$u\big|_K \;=\; v_0\big|_K + 0 \;<\; 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad u\big|_{\Omega\backslash\omega} \;>\; v\big|_{\Omega\backslash\omega} \;>\; 0. \qquad \square$$

Avant d'énoncer *le* théorème fondamental de la théorie, conceptualisons la propriété **(2)** ci-dessus.

Définition 12.9. [Fonctions d'exhaustion] Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, une fonction $\boldsymbol{u}\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est dite *d'exhaustion* lorsque l'adhérence dans Ω de tous ses ensembles de sous-niveau :

$$\overline{\big\{z \in \Omega\colon\ \boldsymbol{u}(z) < c\big\}}^{\Omega} \;=\; \overline{\big\{\boldsymbol{u} < c\big\}}^{\mathbb{C}^n} \bigcap \Omega \qquad\qquad {\scriptstyle (\forall\, c \in \mathbb{R})},$$

sont des ensembles *compacts*, contenus dans Ω. On dit que ces $\{\boldsymbol{u} < c\}$ sont *relativement compacts dans* Ω.

Autrement dit, toutes ces adhérences relatives $\overline{\{\boldsymbol{u} < c\}}^{\Omega}$ sont fermées bornées dans $\mathbb{C}^n$ *et* à distance > 0 de $\partial\Omega$, d'après une caractérisation de la compacité déjà exprimée dans le chapitre consacré aux domaines d'holomorphie.

Pour une fonction arbitraire $\boldsymbol{u}\colon \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$, on a toujours :

$$\Omega \;=\; \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \big\{u < c\big\},$$

mais ces ensembles $\{\boldsymbol{u} < c\}$ ou leur adhérence $\overline{\{\boldsymbol{u} < c\}}$ peuvent en général aller jusqu'à $\partial\Omega$. L'intérêt d'une vraie fonction d'exhaustion est donc de remplir Ω par des ensembles de sous-niveau relativement compacts.

Lorsque la fonction $u\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, puisque pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\overline{\{u < c\}} \subset \{u \leqslant c\} \subset \{u < c+\varepsilon\} \subset \overline{\{u < c+\varepsilon\}}$$

— la première et la troisième inclusions pouvant être strictes ! —, il revient au même de demander la compacité de chaque :

$$\big\{z \in \Omega\colon\ u(z) \leqslant c\big\}.$$

Le résultat suivant, corollaire de ce qui précède, est très important pour toute la théorie.

Théorème 12.10. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, on a équivalence entre :*
(i) *Ω est pseudoconvexe ;*
(ii) *il existe une fonction lisse $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ strictement plurisousharmonique :*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}\, v_j\, \overline{v}_k \ > \ 0 \qquad\qquad (\forall\, z \in \Omega,\ \forall\, v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \setminus \{0\}),$$

qui est d'exhaustion, i.e. *telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :*

$$\big\{z \in \Omega\colon\ u(z) \leqslant c\big\}$$

est compact dans Ω.

Démonstration. Effectuer la synthèse entre le Théorème 12.2 et le Théorème 12.7 dans lequel $K := \emptyset$ et $\omega = \Omega$. □

Rappelons que la caractérisation de la pseudoconvexité offerte par la propriété **(iii)** du Théorème 12.2 incorporait les *adhérences* des enveloppes plurisousharmoniques des compacts $K \subset \Omega$, mais en fait, ces enveloppes sont fermées.

Proposition 12.11. *Dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ l'enveloppe $\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$ de tout compact $K \subset \Omega$ est fermée, et compacte.*

Preuve. Soit un point quelconque $\zeta \in \widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$. Alors le 'gros' ouvert $\omega := \Omega \backslash \{\zeta\}$ *est* un voisinage ouvert de $\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}$ auquel le Théorème 12.7 s'applique. Ainsi, il existe $u \in \mathscr{C}^\infty(\Omega) \cap \mathrm{SPSH}(\Omega)$ avec $u\big|_K < 0$ d'où aussi $u\big|_{\widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}} < 0$ telle que $u\big|_{\Omega\backslash\omega} = u(\zeta) > 0$. Comme u est *continue :*

$$\zeta \notin \widehat{K}_{\mathrm{PSH}(\Omega)}.$$

□

13. Exercices

Exercice 1. Si $h\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{C}^{n'}$ est une application holomorphe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n'}$, et si $u' \in \mathrm{PSH}(\Omega')$ est plurisousharmonique dans un ouvert $\Omega' \supset h(\Omega)$, montrer que la composée $u := u' \circ h$ est plurisousharmonique dans Ω. Indication: Traiter d'abord le cas où $u' \in \mathscr{C}^2(\Omega')$.

Exercice 2. Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soient $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $z_i = x_i + \sqrt{-1}\, y_i$ les coordonnées canoniques, et soit la norme euclidienne $\|z\|^2 := |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$ par rapport à laquelle on calcule :

$$\mathsf{dist}\,\big(z, \partial\Omega\big) := \mathsf{inf}\,\big\{\|z - \zeta\|\colon\ \zeta \in \partial\Omega\big\}.$$

Avec les deux opérateurs réels $d = \partial + \overline{\partial}$ et $d^c := \frac{1}{2i\pi}\,\big(\partial - \overline{\partial}\big)$, introduisons les formes différentielles :

$$\begin{aligned}
\alpha &:= \tfrac{1}{2}\, dd^c\, \|z\|^2, \\
\beta &:= dd^c \log \|z\|^2, \\
\gamma &:= d^c \log \|z\|^2 \wedge \beta^{n-1}.
\end{aligned}$$

(a) Pour toute fonction plurisousharmonique $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ montrer qu'en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon $0 < r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$, on a l'inégalité de sous-moyenne :

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{r^{2n}} \int_{\|z-z_0\|<r} u(z)\,\alpha^n(w).$$

(b) Pour toute fonction plurisousharmonique $u \in \mathrm{PSH}(\Omega)$ avec $u \not\equiv -\infty$, montrer qu'en tout point $z_0 \in \Omega$, pour toute paire de rayons $0 < s \leqslant r < \mathsf{dist}\,(z_0, \partial\Omega)$, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$-\infty < \int_{\|z\|=s} u\big(z_0 + z\big)\,\gamma(z) \leqslant \int_{\|z\|=r} u\big(z_0 + z\big)\,\gamma(z) < \infty.$$

Exercice 3. Après avoir vérifié que la distance signée à un bord lisse a une différentielle jamais nulle, démontrer le Lemme 10.2. Indication: Utiliser le théorème des fonctions implicites.

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE