



Géométrie Complexe

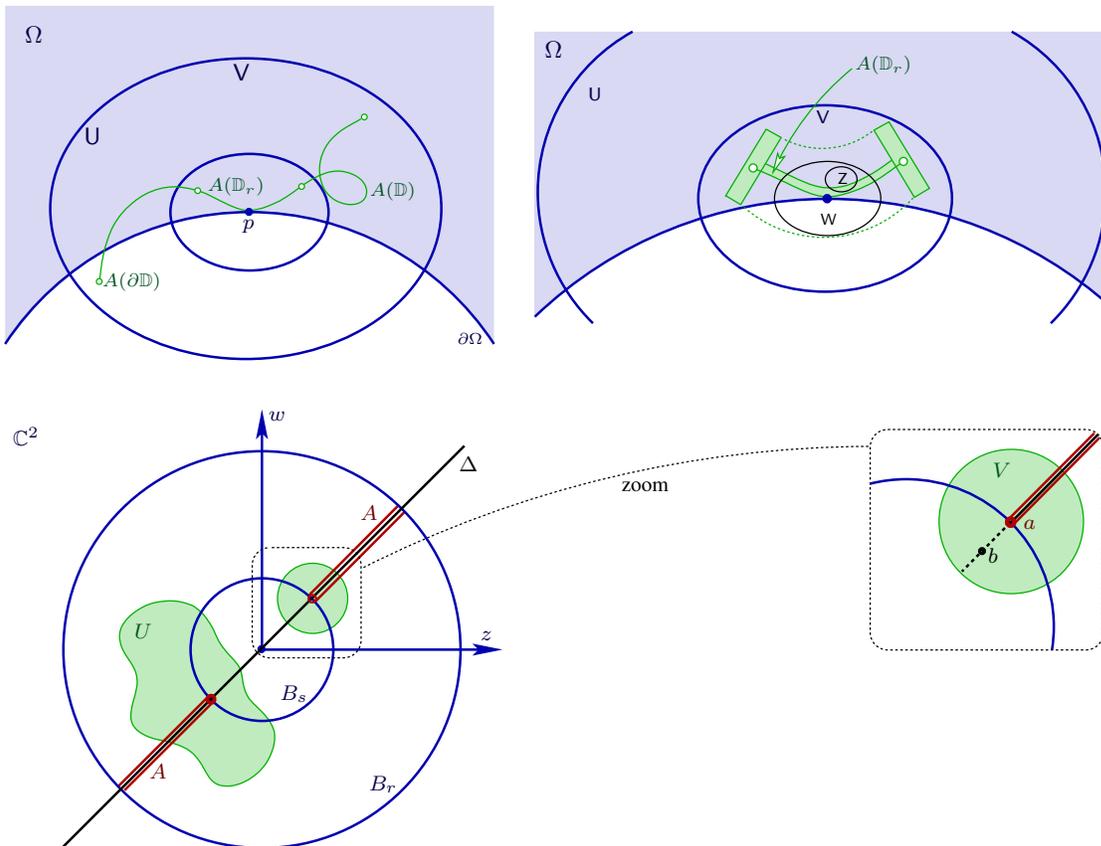
François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France



« Comme le degré de liberté (nombre de dimensions) est beaucoup plus élevé au monde subjectif qu'au monde objectif, on ne peut généralement pas changer le texte original, sans changer le *contenu subjectif*. »

Kiyoshi OKA.



α	β	γ	δ	ϵ	ζ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
ν	ξ	\omicron	π	ρ	σ
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Table des matières

I. Fonctions holomorphes d'une variable complexe	7
1. Introduction	7
2. Préliminaires	7
3. Formule intégrale de Cauchy et applications	8
4. Théorème d'approximation de Runge	17
5. Théorème de Mittag-Leffler	27
6. Théorème de Weierstrass	33
7. Domaines d'holomorphie en dimension 1	35
8. Théorème de représentation de Riesz, Théorème de Hahn-Banach	36
9. Lemme de Schwarz	38
10. Exercices	40
II. Fonctions harmoniques	42
1. Lien avec les fonctions holomorphes	42
2. Propriétés fondamentales	45
3. Problème de Dirichlet sur un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$	49
4. Caractérisation des fonctions harmoniques et applications	53
5. Fonctions harmoniques positives : théorèmes de Harnack	56
6. Pseudodistance de Harnack	59
7. Exercices	60
III. Fonctions sous-harmoniques	63
1. Introduction	63
2. Analogie avec la théorie réelle	63
3. Fonctions semi-continues	64
4. Définition des fonctions sous-harmoniques	70
5. Principe du maximum	73
6. Principe de Phragmén-Lindelöf sous-harmonique	74
7. Critères pour la sous-harmonicité	79
8. Théorèmes de convergence	82
9. Intégrabilité des fonctions sous-harmoniques	84

10. Lieux polaires des fonctions sous-harmoniques	87
11. Convexité et sous-harmonicité	94
12. Régularisation des fonctions sous-harmoniques	100
13. Formule de Jensen complexe	103
14. Théorème de Hartogs sous-harmonique	109
15. Exercices	111
IV. Phénomène de Hartogs et domaines d'holomorphic	116
1. Phénomène et figure de Hartogs	116
2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes	125
3. Formule intégrale de Cauchy et applications	127
4. Démonstration du Théorème de Hartogs sur l'holomorphic séparée	133
5. Séries entières multiples	141
6. Domaines de Reinhardt	144
7. Phénomène de prolongement holomorphic universel automatique ..	148
8. Équation $\bar{\partial}$ à support compact	151
9. Domaines d'holomorphic	155
10. Théorie de Cartan-Thullen	158
11. Enveloppes de domaines de Reinhardt	168
12. Enveloppes de domaines tubes	173
13. Enveloppes convexes d'unions finies de quadrants dans \mathbb{R}^n	178
14. Exercices	181
V. Domaines pseudoconvexes, Fonctions pluri-sous-	183
harmoniques	
1. Introduction	183
2. Domaines à bords lisses dans \mathbb{R}^d	183
3. Inéquation locale pour un bord de domaine dans \mathbb{C}^n	185
4. Phénomène d'extension de Levi	187
5. Champs de vecteurs et formes différentielles sur \mathbb{R}^d	188
6. Champs de vecteurs et formes différentielles sur \mathbb{C}^n	189
7. Espaces tangents complexes à une hypersurface réelle lisse $M^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$	191
8. Forme de Levi de bords lisses $M = \partial\Omega$ de domaines $\Omega \subset \mathbb{C}^n$	192
9. Plurisousharmonicité de la fonction $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega)$	195
10. Pseudoconvexité de domaines à bords lisses au sens de Levi et Oka	198
11. Propriétés des fonctions plurisousharmoniques	200
12. Ouverts pseudoconvexes et enveloppes plurisousharmoniques	203

13. Exercices	212
VI. Résolution d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants	213
1. Rappels (sans démonstrations) sur la transformée de Fourier	213
2. Équation $L(u) = f$	215
3. Solutions faibles	217
4. Théorème d'existence principal	221
5. Démonstration de l'estimée-clé	224
6. Exercices	230
VII. Estimées L^2 de Hörmander	232
1. Espaces de Hilbert à poids pour l'équation $\bar{\partial}u = f$	232
2. Théorie élémentaire des opérateurs non bornés de Von Neumann .	239
3. Un théorème d'existence abstrait	243
4. Densité en norme du graphe pour trois poids	247
5. Normes de (p, q) -formes et expression de T^*f	252
6. Inégalité fondamentale pour les (p, q) -formes	260
7. Théorèmes d'existence dans des domaines pseudoconvexes	264
8. Appendice : Sous-ensembles faiblement bornés d'un espace de Hilbert	267
9. Exercices	269
VIII. Faisceaux	271
1. Introduction	271
2. Préfaisceaux, faisceaux, et leurs morphismes	272
3. Collection des germes d'un préfaisceau	277
4. Topologie sur l'espace des germes d'un préfaisceau	279
5. Faisceautisation des préfaisceaux	283
6. Définition du concept de faisceau comme espace étalé	290
7. Exercices	293
IX. Faisceaux analytiques cohérents	297
1. Définition des faisceaux cohérents	297
2. Exercices	304
X. Théorème de préparation de Weierstrass et théorème de division de Stickelberger	305
1. Théorème de préparation de Weierstrass	305
2. Théorème de division de Stickelberger	311
3. Exercices	313

XI. Géométrie locale des hypersurfaces complexes	316
1. Revêtement ramifié local associé à un polynôme de Weierstrass ...	316
2. Exercices	321
XII. Propriétés algébriques de l'anneau local \mathcal{O}_n des germes de fonctions holomorphes.....	322
1. Préliminaires algébriques	322
2. Factorialité et noethérianité de \mathcal{O}_n	332
3. Exercices	313
XIII. Théorème de cohérence d'Oka.....	340
1. Historique succinct	340
2. Énoncé.....	340
3. Fin de la démonstration [Erreur dans les livres]	347
4. Arguments corrects.....	349
5. Exercices	350
XIV. Théorie des ensembles analytiques complexes.....	351
1. Sous-ensembles analytiques : propriétés élémentaires.....	351
2. Applications propres et finies	354
3. Germes d'ensembles analytiques complexes.....	355
4. Quotient d'un idéal premier $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,0}$	357
5. Théorème de paramétrisation locale	365
6. Exercices	368

Fonctions holomorphes d'une variable complexe

François DE MARÇAY
 Département de Mathématiques d'Orsay
 Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

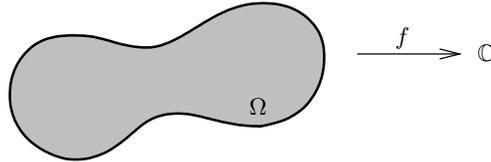
L'objectif de ce chapitre est de résumer efficacement la théorie élémentaire des fonctions d'une variable complexe afin de présenter quelques résultats avancés qui seront utiles au développement de la théorie des fonctions de *plusieurs* variables complexes.

2. Préliminaires

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, à savoir un ouvert connexe, et soit une fonction de classe \mathcal{C}^1 à valeurs complexes :

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C},$$

que l'on peut représenter graphiquement de manière schématique comme suit.



On identifie $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ au plan réel, tous deux munis des coordonnées :

$$z = x + iy,$$

de telle sorte que $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ et $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$.

La différentielle réelle de f est définie par :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

En introduisant les notations standard :

$$\begin{aligned} dz &:= dx + i dy & \text{et} & & d\bar{z} &:= dx - i dy, \\ \frac{\partial f}{\partial z} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y} & \text{et} & & \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}, \end{aligned}$$

cette différentielle peut aussi s'exprimer comme (exercice) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

Définition 2.1. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$ est dite *holomorphe* dans Ω si elle satisfait :

$$0 \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

ce qui équivaut à demander que df est proportionnelle à dz .

Souvent, la dérivée $\frac{\partial f}{\partial z}$ est notée f' pour abrégier, et donc $df = f' dz$ lorsque f est holomorphe.

La théorie élémentaire des formes différentielles réelles sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sera supposée connue. Rappelons toutefois que le produit extérieur est anticommutatif :

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx \quad \text{et} \quad 0 = dx \wedge dx = dy \wedge dy,$$

ce dont découlent (exercice) :

$$i dz \wedge d\bar{z} = 2 dx \wedge dy \quad \text{et} \quad 0 = dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z}.$$

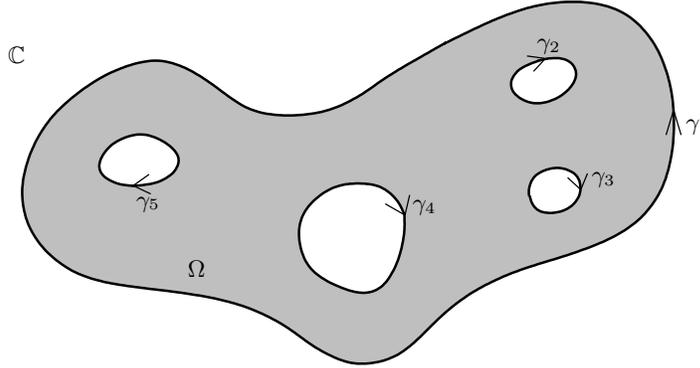
Ainsi, après multiplication par $\frac{i}{2}$, on retrouve la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

3. Formule intégrale de Cauchy et applications

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert *borné* dont le bord :

$$\partial\Omega = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$$

consiste en un nombre fini de courbe fermées γ_i simples (de Jordan) de classe \mathcal{C}^1 — éventuellement \mathcal{C}^1 par morceaux. De telles courbes seront toujours orientées de telle sorte que Ω se trouve ‘à gauche’ de $\partial\Omega$ quand on les parcourt.



La *Formule de Riemann-Green* énonce alors que pour toutes fonctions P, Q de classe \mathcal{C}^1 dans un ouvert contenant la fermeture $\bar{\Omega} = \Omega \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$, on a :

$$\int_{\partial\Omega} (P dx + Q dy) = \iint_{\Omega} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$

L'énoncé est vrai plus généralement en supposant P, Q de classe \mathcal{C}^1 sur $\bar{\Omega}$, mais surtout, sa vraie signification géométrique s'exprime en termes grassmanniens, à l'aide de la 2-forme d'aire $dx \wedge dy$, plutôt qu'avec la mesure de surface $dx dy$ des physiciens.

En effet, la 1-forme différentielle :

$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

admet comme différentielle extérieure :

$$\begin{aligned} d\omega &= dP \wedge dx + dQ \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \right) \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy \right) \wedge dy \\ &= \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

et donc, l'écriture mathématique adéquate du Théorème de Green-Riemann est la

Formule de Stokes bidimensionnelle. *Pour toute 1-forme ω de classe \mathcal{C}^1 sur la fermeture d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ à bord \mathcal{C}^1 par morceaux, on a :*

$$\int_{\partial\Omega} \omega = \iint_{\Omega} d\omega. \quad \square$$

Ces formules, censés être connues, ne seront pas redémontrées ici.

Maintenant, après ce petit prologue tout aussi astreignant que ceux qui précèdent chaque étape du Tour de France cycliste, nous atteignons (enfin !) le point départ de ce chapitre, *i.e.* avec $\omega := f(z) dz$, nous obtenons le

Lemme 3.1. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, on a :*

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \iint_{\Omega} df \wedge dz. \quad \square$$

De plus, puisque :

$$\begin{aligned} df \wedge dz &= \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz \\ &= 2i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy, \end{aligned}$$

ce théorème s'exprime de manière équivalente par :

$$\int_{\partial\Omega} f dz = \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z} \wedge dz = 2i \iint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} dx \wedge dy.$$

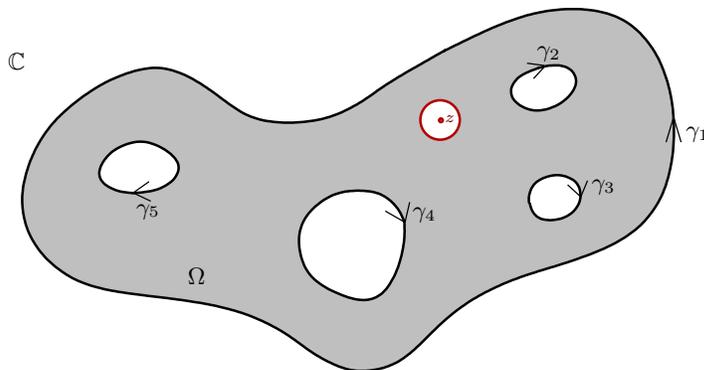
Corollaire 3.2. *Pour toute fonction holomorphe :*

$$f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{O}(\Omega),$$

on a :

$$0 = \int_{\partial\Omega} f dz. \quad \square$$

En fait, le théorème le plus général et le plus utile dans la théorie élémentaire des fonctions holomorphes d'une seule variable complexe est le suivant, dans lequel on suppose seulement que f est \mathcal{C}^1 .



Théorème 3.3. [Cauchy-Green-Pompeiu] Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$, on a en tout point $z \in \Omega$:

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \iint_{\Omega} \frac{\partial f / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Démonstration. Pour un $\varepsilon > 0$ assez petit satisfaisant :

$$\varepsilon < \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

excisons de Ω le disque fermé de rayon ε centré en z comme sur la figure, *i.e.* introduisons le sous-ouvert :

$$\Omega_\varepsilon := \{\zeta \in \Omega : |\zeta - z| > \varepsilon\},$$

dont le bord orienté ajoute à celui de Ω juste un petit cercle :

$$\partial\Omega_\varepsilon = \partial\Omega \cup \{\zeta : |\zeta - z| = \varepsilon\}.$$

Puisque la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est alors de classe \mathcal{C}^1 — et même holomorphe — dans Ω_ε , le Théorème de Stokes bidimensionnel s'applique à la fonction \mathcal{C}^1 :

$$\zeta \mapsto \frac{f(\zeta)}{\zeta - z},$$

et il donne ici :

$$\iint_{\Omega_\varepsilon} \frac{\partial f / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \int_{\partial\Omega} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \int_0^{2\pi} f(z + \varepsilon e^{i\theta}) i d\theta.$$

Mais comme on se convainc aisément en coordonnées polaires que la fonction $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$ est intégrable dans \mathbb{R}^2 par rapport à la mesure bidimensionnelle $d\bar{\zeta} \wedge d\zeta$ sur \mathbb{R}^2 , on voit que lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la limite du membre de gauche tend simplement vers \iint_{Ω} , tandis que la deuxième intégrale $\int_0^{2\pi}$ du membre de droite tend vers $2i\pi f(z)$. \square

Rappelons qu'un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *relativement compact*, ce qu'on note parfois :

$$E \Subset \Omega,$$

lorsque son adhérence \overline{E} dans Ω reste contenue dans Ω .

Corollaire 3.4. [Formule de Cauchy] Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ et tout disque :

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \Subset \Omega$$

centré en un point $z_0 \in \Omega$ et relativement compact dans Ω , on a :

$$f(z) = \int_{\partial \mathbb{D}_r(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Démonstration. L'intégrale double dans la formule de Cauchy-Green-Pompeiu s'évanouit. \square

Comme énoncé essentiellement réciproque du théorème, on a le :

Théorème 3.5. *Étant donné une mesure μ sur \mathbb{C} à support compact, l'intégrale :*

$$u(z) := \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta)$$

définit une fonction \mathcal{C}^∞ et même holomorphe pour z variant en dehors du support de μ .

Démonstration. Le caractère \mathcal{C}^∞ de cette fonction pour $z \notin \text{supp}(\mu)$ provient du fait que la fonction de deux variables :

$$(\zeta, z) \mapsto \frac{1}{\zeta - z}$$

est clairement \mathcal{C}^∞ pour $\zeta \in \text{supp}(\mu)$ et $z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp}(\mu)$. De plus, puisque l'on a évidemment :

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{\zeta - z} \right)$$

lorsque $z \neq \zeta$, l'holomorphie de u découle de théorèmes classiques sur les intégrales dépendant de paramètres. \square

Dans certaines références, on appelle *transformée de Cauchy de la mesure μ* la fonction u ci-dessus.

Théorème 3.6. *Sous les mêmes hypothèses, dans tout sous-ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$ sur lequel la mesure μ s'écrit :*

$$d\mu(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

pour une certaine fonction $\varphi \in \mathcal{C}^k(\omega)$ avec $k \in \mathbb{N}$, la fonction :

$$u(z) = \int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

est aussi de classe \mathcal{C}^k sur ω et elle satisfait :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z) = \varphi(z) \quad (\forall z \in \omega),$$

lorsque $k \geq 1$.

Démonstration. Supposons pour commencer que $\omega = \mathbb{C}$. Le changement de variable involutif classique des intégrales de convolution :

$$\zeta \mapsto z - \zeta$$

donne ici :

$$u(z) = -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi(z - \zeta)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Mais comme $\zeta \mapsto \frac{1}{\zeta}$ est localement intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 , il est autorisé de différentier sous le signe intégral jusqu'à l'ordre k , toutes les intégrales

obtenues étant alors continues. Ainsi, cette fonction u est \mathcal{C}^k sur \mathbb{C} et sa dérivée par rapport à \bar{z} vaut :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= -\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial \varphi(z - \zeta)}{\partial \bar{z}} \frac{1}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ \text{[Changement de variable]} \quad &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \varphi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Une application du Théorème 3.3 de Cauchy-Green-Pompeiu dans lequel on remplace f par φ et Ω par un grand disque contenant le support de μ dans son intérieur, de telle sorte que l'intégrale sur le bord de ce grand disque s'annule, donne alors la valeur annoncée de cette dernière intégrale double :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \varphi.$$

Ensuite, supposons que l'ouvert $\omega \subset \mathbb{C}$ est arbitraire. Pour tout point $z_0 \in \omega$, on peut choisir une fonction-plateau de classe \mathcal{C}^k à support compact :

$$\psi \in \mathcal{C}_c^k(\omega)$$

égale à 1 dans un petit voisinage $V_{z_0} \subset \omega$ de z_0 . Posons alors :

$$\mu_1 := \psi \mu = \frac{1}{2i\pi} \psi \varphi d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

puis :

$$\mu_2 := (1 - \psi) \mu,$$

de telle sorte que $\mu = \mu_1 + \mu_2$, et introduisons aussi les deux transformées de Cauchy :

$$u_1(z) := \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{\zeta - z} d\mu_1(\zeta), \quad u_2(z) := \frac{1}{2i\pi} \int \frac{1}{\zeta - z} d\mu_2(\zeta),$$

de somme :

$$u_1 + u_2 = u.$$

Comme la fonction $\psi \varphi \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{C})$ est définie sur \mathbb{C} tout entier, la première partie de la démonstration assure que $u_1 \in \mathcal{C}^k$ et elle offre aussi :

$$\frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} = \psi \varphi,$$

d'où en restriction au voisinage V_{z_0} :

$$\left. \frac{\partial u_1}{\partial \bar{z}} \right|_{V_{z_0}} = \varphi.$$

Mais comme $d\mu_2(\zeta)$ s'annule dans V_{z_0} , la fonction u_2 est \mathcal{C}^k pour $z \in V_{z_0}$ et même holomorphe d'après le Théorème 3.5, et donc :

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial \bar{z}} \right|_{V_{z_0}} = 0,$$

ce qui donne immédiatement la conclusion (exercice visuel). \square

Corollaire 3.7. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^k(\mathbb{C})$ à support compact de classe \mathcal{C}^k sur \mathbb{C} avec $1 \leq k \leq \infty$, il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^k(\mathbb{C})$ solution de :*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f.$$

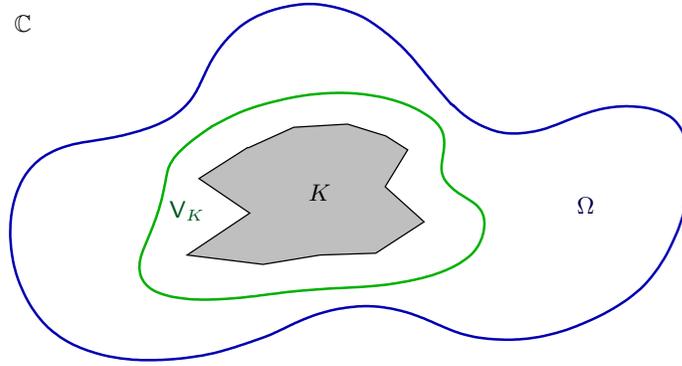
Démonstration. Le Théorème 3.6 qui précède s'applique sur l'ouvert $\omega := \mathbb{C}$ à la mesure $d\mu(\zeta) := \frac{1}{2i\pi} f(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$. Noter que u n'est pas forcément à support compact. \square

Les théorèmes fondamentaux qui précèdent sont assez puissants et généraux pour entraîner aisément les résultats marquants de la théorie des fonctions à une variable complexe.

Corollaire 3.8. *Toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est indéfiniment différentiable, i.e. $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, d'où $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$ aussi.*

Démonstration. Il suffit (exercice de compréhension) d'appliquer les Théorèmes 3.3 et 3.5 à des disques ouverts $\mathbb{D} \subset \Omega$ satisfaisant $\bar{\mathbb{D}} \subset \Omega$. \square

Des informations quantitatives plus précises sont en fait accessibles.



Théorème 3.9. [Inégalités de Cauchy] *Pour tout sous-ensemble compact $K \Subset \Omega$, et pour tout voisinage ouvert :*

$$K \Subset V_K \subset \Omega,$$

il existe une suite infinie de constantes $(C_j)_{j=0}^\infty$ telles que :

$$\sup_{z \in K} |f^{(j)}(z)| \leq C_j \|f\|_{L^1(V_K)} \quad (\forall j \geq 0),$$

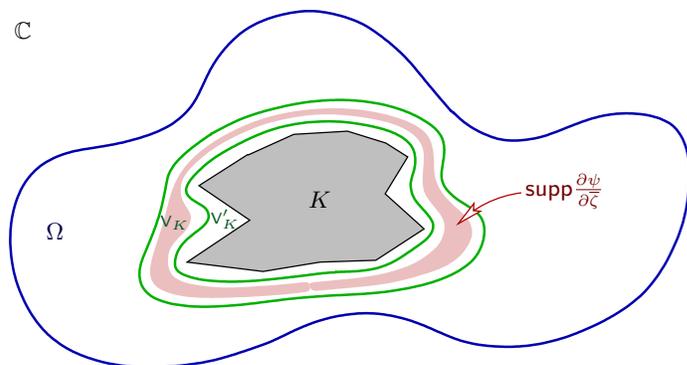
uniformément pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. On peut supposer, quitte à le rétrécir, que V_K est bordé par un nombre fini de courbes de classe \mathcal{C}^1 . Choisissons alors une fonction-plateau $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(V_K)$ avec $\psi = 1$ dans un voisinage ouvert V'_K de K . Pour $f \in \mathcal{O}(V_K)$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\psi f) = f \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}},$$

et donc le Théorème 3.3 de Cauchy-Green-Pompeiu dans lequel l'intégrale de bord s'anule alors donne :

$$f(z) = \psi(z) f(z) = \frac{1}{2i\pi} \iint_{V_K} \frac{f(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad (\forall z \in K).$$



Mais comme $\psi = 1$ dans un voisinage ouvert $V'_K \subset V_K$ de K , le support de $\frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}$ est contenu dans $V_K \setminus V'_K$, donc avec un entier $j \geq 0$ quelconque, on déduit une majoration valable uniformément pour tout $z \in K$ et tout $\zeta \in \text{supp } \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}$:

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{j+1}} \leq \frac{1}{[\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus V'_K)]^{j+1}} < \infty.$$

Après j différentiations (justifiées par ce contrôle uniforme !) de la formule précédente sous le signe d'intégration, on obtient :

$$f^{(j)}(z) = \frac{j!}{2i\pi} \iint_{V_K \setminus V'_K} \frac{f(\zeta) \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^{j+1}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \quad (\forall z \in K),$$

donc des constantes appropriées sont par exemple :

$$C_j = \frac{j!}{2\pi} \left\| \frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}} \right\|_{L^\infty(\mathbb{C})} \frac{1}{[\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus V'_K)]^{j+1}} \quad (j \geq 0),$$

ce qui termine. \square

Théorème 3.10. [Cauchy-Montel] *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge uniformément, sur les compacts de Ω , vers une certaine fonction-limite continue $f_\infty \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors $f_\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$ est en fait holomorphe.*

Démonstration. En appliquant les inégalités de Cauchy que nous venons d'établir aux différences $f_{n_1} - f_{n_2}$, nous voyons que la suite des dérivées $\partial f_n / \partial z$ converge elle aussi uniformément sur les compacts de Ω . Or comme $\partial f_n / \partial \bar{z} = 0$, il vient par les équations de Cauchy-Riemann réelles (exercice de révision) que $\partial f_n / \partial x$ et $\partial f_n / \partial y$ convergent aussi uniformément. Donc $f_\infty \in \mathcal{C}^1$ et :

$$\frac{\partial f_\infty}{\partial \bar{z}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial f_n}{\partial \bar{z}} = 0,$$

ce qui conclut. \square

Théorème 3.11. [Stieltjes-Vitali] *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$ a des modules :*

$$|f_n| \leq C_K < \infty,$$

uniformément bornés sur tout compact $K \Subset \Omega$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty =: (g_k)_{k=1}^\infty$ qui converge uniformément, sur les compacts de Ω , vers une fonction-limite $g_\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. À nouveau, les inégalités de Cauchy garantissent que la suite des dérivées $(f'_n)_{n=1}^\infty$ est elle aussi uniformément bornée sur les compacts de Ω . Par conséquent, la suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ est équicontinue sur les compacts, et le Théorème d'Ascoli¹ garantit l'existence d'une sous-suite qui converge vers une certaine fonction-limite *continue*, dont on se convainc (exercice) qu'elle est en fait holomorphe. \square

Corollaire 3.12. *La somme de toute série entière :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

est holomorphe à l'intérieur de son disque de convergence.

Démonstration. La convergence est uniforme dans tout sous-disque ouvert strict. \square

Théorème 3.13. *Si une fonction f est holomorphe dans un disque :*

$$\mathbb{D}_r := \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$$

de rayon $r > 0$, alors elle coïncide avec son développement de Taylor infini au centre de ce disque :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!},$$

la convergence de la série étant uniforme et normale sur tout sous-ensemble compact $K \Subset \mathbb{D}_r$.

Démonstration. Soient deux autres rayons auxiliaires :

$$0 < r_1 < r_2 < r,$$

censés être proches de r . Grâce à la formule de Cauchy, on a :

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\forall |z| \leq r_1).$$

Mais comme on peut développer sous forme normalement convergente (exercice de révision) :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\zeta^{n+1}} \quad (\forall |z| \leq r_1, \forall |\zeta| = r_2),$$

1. Soit (E, d) un espace métrique et soit $K \subset E$ un sous-ensemble compact. On dit qu'une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ de fonctions est *relativement compacte* si, de toute suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathcal{F}$, on peut extraire une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty =: (g_k)_{k=1}^\infty$ qui converge *uniformément* pour la norme $\max_K |\cdot|$, lorsque $k \rightarrow \infty$, vers une certaine fonction-limite continue $g_\infty \in \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$. On dit que \mathcal{F} est *compacte* si toutes les fonctions-limites possibles lui appartiennent encore. Le Théorème d'Ascoli énonce alors que : *Une famille $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}^0(K, \mathbb{C})$ est relativement compacte si et seulement si elle satisfait les deux conditions suivantes :*

[Précompactité] *pour tout élément $x \in K$, l'ensemble des valeurs $\{f(x) : f \in \mathcal{F}\}$ est relativement compact dans \mathbb{C} , i.e. borné ;*

[Équicontinuité]

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \left(\forall x \in K \quad \forall y \in K \quad d(x, y) \leq \delta \implies \forall f \in \mathcal{F} \quad |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon \right).$$

il suffit d'intégrer terme à terme en tenant compte de :

$$f^{(n)}(0) = \frac{n!}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta,$$

pour conclure (exercice). \square

Corollaire 3.14. [Principe d'unicité] *Si une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ a toutes ses dérivées nulles :*

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

en un point $z_0 \in \Omega$ d'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors f est identiquement nulle dans Ω tout entier.

Démonstration. Le sous-ensemble Ω° des points $z \in \Omega$ en lesquels toutes les dérivées de f s'annulent, non vide par hypothèse, est trivialement fermé. Mais il est aussi ouvert, grâce au théorème de développabilité locale en série entière. Comme Ω est connexe, $\Omega^\circ = \Omega$. \square

Corollaire 3.15. *Si une fonction f non identiquement nulle est holomorphe dans un disque $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$, alors il existe un unique entier $k = k_f \geq 0$ et une unique fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $g(0) \neq 0$ tels que :*

$$f(z) = z^k g(z).$$

Démonstration. Développer f en série entière et factoriser par la puissance maximale possible de z . \square

Théorème 3.16. *Si une fonction f est holomorphe dans un disque ouvert non vide :*

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad (r > 0),$$

et si elle satisfait pour tout $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$:

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|,$$

alors f est constante dans $\mathbb{D}_r(z_0)$.

Démonstration. On peut supposer que $f(z_0) \neq 0$. Puisque l'on a par la formule de Cauchy pour tout $0 < \rho < r$:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta,$$

il vient après réorganisation :

$$0 = \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{f(z_0)}\right) d\theta.$$

Or l'hypothèse implique que la partie réelle de l'intégrande est toujours ≥ 0 , et qu'elle ne s'annule que lorsque $f(z_0 + \rho e^{i\theta}) = f(z_0)$. Ceci permet de conclure. \square

Corollaire 3.17. [Principe du Maximum] *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine borné, et soit une fonction holomorphe :*

$$f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

qui est continue jusqu'au bord :

$$\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega.$$

Alors le maximum de son module est atteint sur le bord :

$$\max_{z \in \overline{\Omega}} |f| = \max_{z \in \partial\Omega} |f|.$$

Démonstration. Si le maximum est atteint en un point intérieur $z_0 \in \Omega$, le théorème qui précède implique que f est localement constante, donc constante partout puisque Ω est connexe (exercice mental), et alors le maximum est atteint partout. \square

Corollaire 3.18. [Principe d'unicité au bord] *Sur un domaine borné $\Omega \Subset \mathbb{C}$, si deux fonctions holomorphes continues jusqu'au bord :*

$$f, g \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$$

coïncident au bord :

$$f|_{\partial\Omega} = g|_{\partial\Omega},$$

alors elles sont identiquement égales $f = g$ dans $\overline{\Omega}$. \square

Enfin, voici un dernier rappel élémentaire.

Théorème 3.19. [Riemann] *Si une fonction est holomorphe et localement bornée au voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$:*

$$f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus \{z_0\}) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega),$$

alors elle se prolonge holomorphiquement à travers ce point.

Démonstration. Soit la fonction :

$$g(z) := \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{pour } z \neq z_0, \\ 0 & \text{pour } z = z_0. \end{cases}$$

Sa dérivée en $z = z_0$ est nulle :

$$g'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(z - z_0)^2 f(z) - 0}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0,$$

puisque f est bornée au voisinage de z_0 . Comme f est holomorphe en tout point $z \neq z_0$, cette fonction g est donc \mathbb{C} -dérivable en *tout* point de Ω . Par définition de l'holomorphicité, g est ainsi holomorphe dans Ω .

Par conséquent, dans un disque ouvert centré en z_0 , elle admet un développement en série entière convergente :

$$g(z) = g_0 + g_1(z - z_0) + g_2(z - z_0)^2 + g_3(z - z_0)^3 + \dots,$$

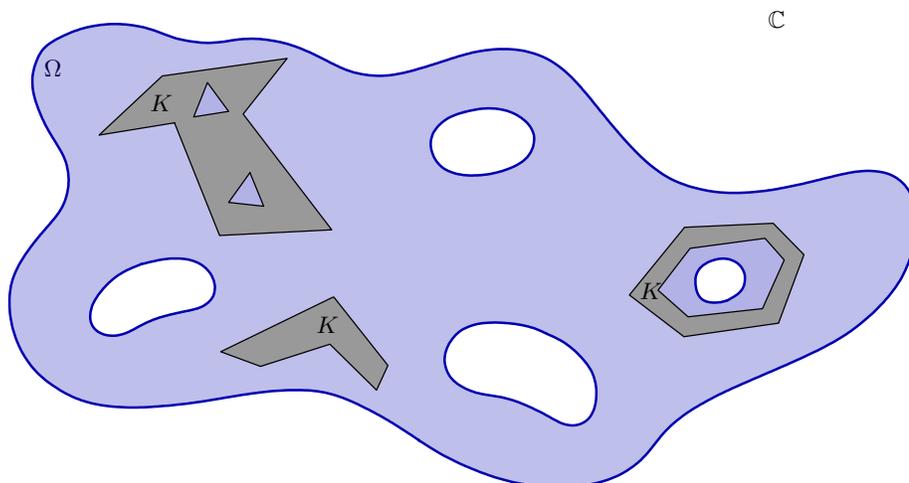
dont les deux premiers coefficients $g_0 = g(z_0) = 0$ et $g_1 = g'(z_0) = 0$ s'annulent. Donc la fonction :

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^2} = g_2 + g_3(z - z_0) + \dots$$

est bel et bien holomorphe autour de z_0 . \square

4. Théorème d'approximation de Runge

Grâce au Théorème 3.13 de développabilité locale en série entière, on voit (exercice) que toute fonction qui est holomorphe dans un disque ouvert non vide peut être approximée uniformément par des polynômes sur tout sous-disque strict. Un théorème beaucoup plus général est le suivant, qui se spécifie à l'approximation polynomiale lorsque $\Omega = \mathbb{C}$, mais qui, dans le cas général, 'découvre' une caractérisation topologique nette et frappante.



Théorème 4.1. [Runge] *Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et un sous-ensemble compact $K \Subset \Omega$ quelconque, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Toute fonction qui est holomorphe :*

$$f \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_K)$$

dans un voisinage ouvert \mathcal{V}_K de K peut être approximée uniformément sur K par des fonctions holomorphes dans Ω :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists g = g_\varepsilon \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \max_{z \in K} |f(z) - g_\varepsilon(z)| \leq \varepsilon.$$

(ii) *L'ouvert :*

$$\Omega \setminus K = \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus K)$$

ne possède aucune composante connexe ω qui est relativement compacte dans Ω , à savoir dont la fermeture $\bar{\omega}$ dans \mathbb{C} est bornée et satisfait $\bar{\omega} \subset \Omega$.

(iii) *Pour tout point $z \in \Omega \setminus K$, il existe une fonction $f = f_z \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :*

$$|f_z(z)| > \max_K |f_z|.$$

La condition topologique (ii) mérite d'être éclairée.

Lemme 4.2. *Le bord $\partial\omega$ de toute composante connexe ω de $\Omega \setminus K$ satisfait :*

$$\partial\omega \subset \partial\Omega \cup K.$$

En particulier, si $\bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega \subset \Omega$, alors :

$$\partial\omega \subset K.$$

Démonstration. Si $\zeta \in \partial\omega$ est un point quelconque, il existe une suite $(z_n)_{n=1}^\infty$ de points $z_n \in \omega \subset \Omega \setminus K$ telle que $z_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$ pour la topologie métrique de \mathbb{C} . Alors on a :

$$\zeta \notin \Omega \setminus K,$$

sinon, $\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \Omega \setminus K$ pour un $\varepsilon > 0$, d'où $z_n \in \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta)$ pour $n \geq N_\varepsilon \gg 1$, donc $z_n \in \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \omega$, contredisant $\zeta \in \partial\omega$.

Ainsi, on a :

$$\zeta \in \mathbb{C} \setminus (\Omega \setminus K) = (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup K,$$

et comme il est clair que $\zeta \in \overline{\Omega}$, il vient :

$$\zeta \in \left((\mathbb{C} \setminus \Omega) \cup K \right) \cap \overline{\Omega} = \partial\Omega \cup K,$$

et — *darling!* — c'est tout à fait le bijou qu'il te fallait ! \square

Après la démonstration du Théorème 4.1, nous établirons que **(ii)** équivaut à une hypothèse topologique exprimant en quelque sorte que :

« Chaque trou de K dans Ω contient au moins un trou de Ω dans $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, »

laquelle s'exprime plus rigoureusement sur la sphère de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ comme suit.

(ii') Pour toute composante connexe ω de $\Omega \setminus K$, si ω' est l'unique composante connexe de $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$ contenant ω , alors :

$$\omega' \setminus \omega \neq \emptyset.$$

Autrement dit, on « remplit » la composante connexe ω de $\Omega \setminus K$ dans $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$, et le résultat, ω' doit contenir au moins un point *hors* de Ω . Se rapporter à la figure aide à construire une représentation mentale.

Un cas spécial unique se produira : celui d'une composante connexe ω de $\Omega \setminus K$ qui est non bornée et satisfait simultanément $\overline{\omega} \subset \Omega$, cas spécial où $\omega = \omega'_{\infty}$ s'identifiera nécessairement à la composante connexe non bornée ω'_{∞} de $\mathbb{C} \setminus K$, ce qui forcera Ω à contenir cette composante, mais alors sur la sphère de Riemann, la composante connexe $\omega' := \{\infty\} \cup \omega'_{\infty}$ contiendra bien un point hors de ω (voir les détails dans l'Assertion 4.8).

Dans le cas spécifique intéressant où $\Omega = \mathbb{C}$, les polynômes sont denses dans l'espace $\mathcal{O}(\mathbb{C})$ des fonctions holomorphe entières, et le théorème de Runge devient le :

Corollaire 4.3. Toute fonction qui est holomorphe dans un voisinage d'un compact $K \Subset \mathbb{C}$ peut être approximée uniformément sur K par des polynômes si et seulement si l'ouvert :

$$\mathbb{C} \setminus K$$

est connexe. \square

Démonstration. Puisque $\Omega = \mathbb{C}$, les composantes connexes ω de $\Omega \setminus K$ et ω' de $\mathbb{C} \setminus K$ coïncident. L'unique composante connexe non bornée de $\Omega \setminus K$ ne compte pas, tandis que chaque autre composante connexe ω de $\mathbb{C} \setminus K$ — nécessairement bornée ! — satisfait $\overline{\omega} \subset \Omega = \mathbb{C}$, donc constitue une obstruction à l'approximation, d'après l'équivalence **(i)** \iff **(ii)**. \square

Démonstration du Théorème 4.1 de Runge. Nous allons d'abord établir les *contraposées* des deux implications :

$$\textbf{(iii)} \implies \textbf{(ii)} \quad \text{et} \quad \textbf{(i)} \implies \textbf{(ii)}.$$

Supposons donc que **(ii)** n'est pas satisfaite, à savoir que $\Omega \setminus K$ possède une composante connexe ω d'adhérence compacte :

$$\overline{\omega} \Subset \Omega.$$

Alors nécessairement grâce au Lemme 4.2 :

$$\partial\omega \subset K,$$

et le principe du maximum implique pour toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$(4.4) \quad \max_{\bar{\omega}} |f| = \max_{\partial\omega} |f| \leq \max_K |f|,$$

ce qui est l'opposé (la négation) de **(iii)**.

Ensuite, toujours en supposant l'opposée de **(ii)**, si, en raisonnant par l'absurde, l'opposée de **(i)** n'était pas satisfaite, *i.e.* si **(i)** était vraie, pour toute fonction f holomorphe dans un voisinage ouvert de K , on pourrait trouver une suite de fonctions :

$$(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$$

telle que $f_n \rightarrow f$ uniformément sur K . Mais alors l'inégalité de contrôle du maximum (4.4) ci-dessus garantirait que f_n converge aussi vers une certaine limite F continue sur $\bar{\omega}$, qui serait holomorphe dans ω par le Théorème 3.10 de Cauchy-Montel. Bien entendu, on aurait aussi :

$$F|_{\partial\omega} = f.$$

Toutefois, comme on pourrait choisir :

$$f(z) := \frac{1}{z - \zeta_0}$$

avec un point quelconque $z_0 \in \omega$, on déduirait que :

$$(z - \zeta_0) F(z) \Big|_{\partial\omega} \equiv 1,$$

et donc par principe d'unicité au bord (Corollaire 3.18) :

$$(z - \zeta_0) F(z) \equiv 1,$$

pour *tout* $z \in \bar{\omega}$. Mais ceci est radicalement impossible pour $z = \zeta_0$!

Maintenant, nous pouvons entamer l'implication principale **(ii)** \implies **(i)**. À cet effet, grâce au Théorème de Hahn-Banach, il suffit d'après les rappels de la Section 8, de montrer que toute mesure μ sur K qui est orthogonale à $\mathcal{O}(\Omega)$, à savoir qui satisfait :

$$0 = \int_K f(z) d\mu(z) \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)),$$

est aussi orthogonale à toutes les fonctions qui sont holomorphes seulement dans un voisinage de K :

$$0 = \int_K g(z) d\mu(z) \quad (\forall g \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_K)).$$

Introduisons alors la fonction convolant la mesure μ avec le noyau de Cauchy :

$$\varphi(z) := \int_K \frac{1}{\zeta - z} d\mu(\zeta),$$

définie pour $z \in \mathbb{C} \setminus K$ et holomorphe dans $\mathbb{C} \setminus K$, d'après le Théorème 3.5.

Assertion 4.5. *On a $\varphi(z) \equiv 0$ dans $\mathbb{C} \setminus \Omega$.*

Preuve. En effet, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ fixé, le noyau de Cauchy :

$$\zeta \longmapsto \frac{1}{\zeta - z}$$

est une fonction appartenant à $\mathcal{O}(\Omega)$, donc par hypothèse d'orthogonalité $\mu \perp \mathcal{O}(\Omega)$, il vient :

$$0 = \varphi(z) \quad (\forall z \in \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

ce qui aurait pu être considéré comme clair sans nécessité d'explicitation. \square

Assertion 4.6. On a $\varphi(z) \equiv 0$ dans l'unique composante connexe non bornée de l'ouvert $\mathbb{C} \setminus K$.

Précisément, cette composante connexe est celle qui contient le complémentaire d'un grand disque fermé contenant K .

Preuve. Soit un point $z \in \mathbb{C} \setminus K$ fixé avec :

$$|z| > 2 \max_{\zeta \in K} |\zeta|.$$

Alors on peut développer en série entière normalement convergente :

$$\varphi(z) = \int_K \frac{1/z}{\frac{\zeta}{z} - 1} d\mu(\zeta) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \int_K \zeta^n d\mu(\zeta),$$

et déduire l'annulation $\varphi(z) = 0$, puisque les fonctions-monômes $\zeta \mapsto \zeta^n$ appartiennent à $\mathcal{O}(\Omega)$. Par prolongement analytique, $\varphi = 0$ dans l'unique composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$. \square

Assertion 4.7. On a $\varphi(z) \equiv 0$ dans $\mathbb{C} \setminus K$.

Démonstration. Soit ω une composante connexe quelconque de $\mathbb{C} \setminus K$.

- Si $\omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) \neq \emptyset$, alors l'Assertion 4.5 et le principe du prolongement analytique donnent $\varphi|_{\omega} \equiv 0$.
- Si ω est non bornée, à savoir non contenue dans un disque assez grand, c'est l'Assertion 4.6 qui prend le relai pour donner aussi $\varphi|_{\omega} \equiv 0$.

Il reste à considérer l'éventualité d'une composante connexe ω de $\mathbb{C} \setminus K$ ne rentrant dans aucun de ces deux cas :

$$\omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Omega) = \emptyset \quad \text{et} \quad \omega \text{ bornée.}$$

Si ω satisfaisait ces deux conditions, alors $\omega \subset \Omega$, d'où $\omega \subset \Omega \setminus K$, et puisque ω est connexe, ω devrait être une composante connexe de $\Omega \setminus K$. De plus, $\omega \subset \Omega$ implique :

$$\partial\omega \subset \partial\omega \cup \omega = \bar{\omega} \subset \bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega.$$

Comme l'hypothèse topologique **(ii)** est satisfaite, on ne peut avoir $\bar{\omega} \subset \Omega$, i.e. on ne peut avoir $\partial\omega \subset \Omega$, d'où en tenant compte de ce qui vient d'être vu :

$$\partial\omega \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Or ceci est exclu, car un disque ouvert $\mathbb{D}_{\varepsilon}(z)$ de rayon $\varepsilon > 0$ assez petit centré en point $z \in \partial\omega \cap \partial\Omega$ serait contenu dans $\mathbb{C} \setminus K$ puisque K est compact dans Ω , et il contiendrait des points de ω , donc un tel disque serait en fait entièrement contenu dans ω , parce que ω était une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$, contredisant $z \in \partial\omega$.

En conclusion, toutes les composantes connexes ω de $\mathbb{C} \setminus K$ rentrent dans l'un des deux cas ci-dessus, lieux où l'on sait $\varphi \equiv 0$, donc $\varphi \equiv 0$ partout dans $\mathbb{C} \setminus K$. \square

Maintenant, afin d'atteindre **(i)**, soit une fonction $f \in \mathcal{O}(V_K)$ qui est holomorphe dans un voisinage ouvert V_K de K , que l'on peut supposer, quitte à le rétrécir, bordé par un nombre fini de courbes \mathcal{C}^1 . Choisissons une fonction-plateau $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(V_K)$ valant 1 sur un certain voisinage ouvert V'_K de K avec :

$$K \subset V'_K \Subset V_K,$$

donc valant 0 sur ∂V_K , avec de plus :

$$\text{supp } \frac{\partial \psi}{\partial \bar{\zeta}} \subset V_K \setminus V'_K.$$

Grâce au Théorème 3.3 de Cauchy-Green-Pompeiu, on a pour tout $z \in K$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \psi(z) f(z) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial V_K} \frac{f(\zeta) \psi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2i\pi} \iint_{V_K \setminus V'_K} \frac{f(\zeta) \partial \psi(\zeta) / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \end{aligned}$$

Alors en intervertissant de manière justifiée l'ordre d'intégration entre une intégrale simple et une intégrale double, on obtient l'annulation :

$$\begin{aligned} \int_K f(z) d\mu(z) &= \frac{1}{2i\pi} \int_K \left(\iint_{V_K \setminus V'_K} \frac{f(\zeta) \partial \psi(\zeta) / \partial \bar{\zeta}}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right) d\mu(z) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \iint_{V_K \setminus V'_K} \left(\underbrace{\int_K \frac{1}{\zeta - z} d\mu(z)}_{= -\varphi(\zeta) = 0 \text{ dans } \mathbb{C} \setminus K} \right) f(\zeta) \frac{\partial \psi(\zeta)}{\partial \bar{\zeta}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= 0, \end{aligned}$$

qui montre bien que μ est orthogonale à f , ce qui donne **(i)** grâce à Hahn-Banach.

Pour terminer, vérifions que **(ii)** \implies **(iii)**. En supposant donc **(ii)**, soit $z \in \Omega \setminus K$, et choisissons un disque fermé $\bar{\mathbb{D}}_r$ centré en z de rayon $r > 0$ assez petit pour que $\bar{\mathbb{D}}_r(z) \subset \Omega \setminus K$. Alors les composantes connexes de :

$$\Omega \setminus (K \cup \bar{\mathbb{D}}_r)$$

sont les mêmes que celles de $\Omega \setminus K$, à ceci près que le disque $\bar{\mathbb{D}}_r$ a été excisé de l'une d'entre elles. Ainsi, le nouveau compact $K \cup \bar{\mathbb{D}}_r$ vérifie encore la condition topologique **(ii)**. Comme on a déjà établi l'équivalence avec **(i)**, la fonction qui vaut 0 dans un petit voisinage ouvert de K et qui vaut 1 dans un petit voisinage ouvert de $\bar{\mathbb{D}}_r$ peut donc être approximée uniformément sur $K \cup \bar{\mathbb{D}}_r$ par des fonctions appartenant à $\mathcal{O}(\Omega)$. Donc on peut trouver $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfaisant :

$$|f| < \frac{1}{2} \quad \text{dans } K \quad \text{et} \quad |f - 1| < \frac{1}{2} \quad \text{dans } \bar{\mathbb{D}}_r,$$

et ceci donne **(iii)**. □

*Démonstration de l'équivalence **(ii)** \iff **(ii')**.* Partons de **(ii)**. Toute composante connexe ω de $\Omega \setminus K$ satisfait alors :

$$\bar{\omega} \text{ est non borné} \quad \text{ou} \quad \bar{\omega} \not\subset \Omega,$$

ces deux circonstances n'étant pas exclusives.

Dans la deuxième, on a $\partial\omega \not\subset \Omega$, mais comme le Lemme 4.2 a fait voir que $\partial\omega \subset \partial\Omega \cup K$ et comme $K \subset \Omega$, il vient :

$$\partial\omega \cap \partial\Omega \neq \emptyset.$$

Soit donc un point $\zeta \in \partial\omega \cap \partial\Omega$. Comme $\text{dist}(K, \partial\Omega) > 0$, il existe $\varepsilon > 0$ assez petit pour que :

$$\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \mathbb{C} \setminus K.$$

Si donc ω' est l'unique composante connexe de $\mathbb{C} \setminus K$ qui contient ω , nous obtenons $\mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) \subset \omega'$, et puisque $\zeta \in \partial\Omega$, il existe une suite de points :

$$w'_n \in (\mathbb{C} \setminus \Omega) \cap \mathbb{D}_\varepsilon(\zeta) \quad (n \geq 1),$$

avec $w'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \zeta$, ce qui montre que (ii') est satisfaite.

Il ne reste plus qu'à examiner le cas spécial d'une composante connexe ω de $\Omega \setminus K$ qui n'entre pas dans ce raisonnement, à savoir qui satisfait $\bar{\omega} \subset \Omega$, donc doit être non bornée.

Assertion 4.8. Alors $\omega = \omega'_\infty$ coïncide avec la composante connexe non bornée de $\mathbb{C} \setminus K$.

Démonstration. En effet, soit $R > \max_{z \in K} |z|$. Comme ω est non bornée, il existe un point $z_0 \in \omega \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_R)$. Le Lemme 4.2 a fait voir que $\partial\omega \subset \partial\Omega \cup K$, d'où $\partial\omega \subset K$ puisque $\bar{\omega} \subset \Omega$, donc $\partial\omega \cap (\mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_R) = \emptyset$, ce qui montre que :

$$\omega \supset \mathbb{C} \setminus \bar{\mathbb{D}}_R.$$

À nouveau parce que $\partial\omega \subset K$, cette composante connexe ω doit contenir la composante connexe non bornée ω'_∞ de $\mathbb{C} \setminus K$, et comme l'inclusion $\omega \subset \omega'_\infty$ est triviale, nous obtenons bien $\omega = \omega'_\infty$. \square

Comme anticipé dans les commentaires explicatifs qui suivaient l'énoncé du Théorème 4.1 de Runge, puisque $\omega' := \{\infty\} \cup \omega'_\infty$ est la composante connexe de $\{\infty\}$ dans $(\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus K$, le point $\{\infty\} \in \omega' \setminus \omega$ montre que (ii') est satisfaite y compris dans ce cas spécial.

La réciproque (ii') \implies (ii) est implicite dans les raisonnements qui précèdent (exercice). \square

Le Théorème de Runge justifie l'introduction d'un concept qui va s'avérer être absolument central dans la théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Définition 4.9. Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, étant donné un compact arbitraire $K \Subset \Omega$, l'enveloppe holomorphe de K est le sous-ensemble :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} := \left\{ z \in \Omega : |f(z)| \leq \max_K |f| \text{ pour toute } f \in \mathcal{O}(\Omega) \right\},$$

qui contient K . Cette définition s'applique aussi à un sous-ensemble arbitraire $E \subset \Omega$. On abrège souvent \widehat{K} ou \widehat{E} .

Comme $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$, de telles enveloppes \widehat{K} ou \widehat{E} sont toujours fermées dans Ω . De plus, la compacité est préservée à cause du lemme suivant, propriété qui ne sera absolument plus satisfaite dans certains domaines $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$.

Lemme 4.10. L'enveloppe de tout compact $K \Subset \Omega$ reste à distance > 0 du bord :

$$0 < \text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \text{dist}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Démonstration. Comme $K \subset \widehat{K}$, il suffit d'établir l'inégalité ' \leq '.

Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ quelconque fixé, on a :

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \leq \min_{z \in K} |z - \zeta|.$$

Clairement, la fonction $z \mapsto \frac{1}{z - \zeta} \Big|_{\Omega}$ est holomorphe dans Ω . Si donc $w \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ est un point quelconque, cette fonction permet d'estimer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{|w - \zeta|} &\leq \max_{z \in K} \frac{1}{|z - \zeta|} \\ &= \frac{1}{\min_{z \in K} |z - \zeta|} \\ &\leq \frac{1}{\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)}, \end{aligned}$$

d'où par inversion :

$$\text{dist}(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) \leq |w - \zeta| \quad (\forall \zeta \in \mathbb{C} \setminus \Omega, \forall w \in \widehat{K}),$$

ce qui prouve l'inégalité ' \leq '. □

Corollaire 4.11. *L'enveloppe \widehat{K} de tout compact $K \Subset \Omega$ est aussi compacte.* □

En choisissant $f(z) = e^{az}$ pour des constantes $a \in \mathbb{C}$, on voit aussi (exercice) que :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \text{enveloppe convexe de } K.$$

De plus, on se convainc aisément que :

$$\widehat{\widehat{K}} = \widehat{K}.$$

Ainsi, pour tout compact $K \subset \Omega$, son enveloppe holomorphe $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ est un sous-ensemble compact contenant K qui vérifie les hypothèses du théorème d'approximation de Runge.

Un corollaire du Théorème 4.1 de Runge mérite d'être mis en exergue.

Proposition 4.12. *L'enveloppe d'un compact $K \Subset \Omega$ vaut :*

$$(4.13) \quad \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = K \cup \bigcup_{\substack{\omega \subset \Omega \setminus K \\ \text{composante connexe} \\ \text{avec } \bar{\omega} \Subset \Omega}} \omega.$$

Démonstration. Soit un ouvert connexe $\omega \subset \Omega \setminus K$ avec $\bar{\omega} \Subset \Omega$, d'où $\partial\omega \subset K$. Le principe du maximum appliqué sur $\bar{\omega}$ à toute fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\max_{\bar{\omega}} |f| = \max_{\partial\omega} |f| \leq \max_K |f|,$$

montre facilement que tout point $z \in \omega$ est dans $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$.

Ainsi :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \supset K \cup \underbrace{\bigcup_{\substack{\omega \subset \Omega \setminus K \\ \text{composante connexe} \\ \text{avec } \bar{\omega} \Subset \Omega}} \omega}_{=: K'}.$$

Or ce K' est fermé et contenu dans le compact $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$, donc il est compact.

De plus *per definitionem*, $\Omega \setminus K'$ n'a plus aucune composante connexe relativement compacte dans Ω . Nous pouvons donc appliquer le Théorème 4.1 de Runge (iii), qui, pour tout $z \in \Omega \setminus K'$, fournit alors une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfaisant :

$$|f(z)| > \max_{K'} |f| \geq \max_K |f|,$$

d'où $z \notin \widehat{K}$, ce qui donne $\Omega \setminus K' \subset \Omega \setminus \widehat{K}$, à savoir l'inclusion inverse conclusive $K' \supset \widehat{K}$. \square

Des arguments purement topologiques permettent aussi retrouver la compacité de l'enveloppe d'un compact.

Théorème 4.14. *Soit E un sous-ensemble quelconque d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors les deux propriétés suivantes sont satisfaites par son enveloppe holomorphe $\widehat{E} = \widehat{E}_{\mathcal{O}(\Omega)}$:*

(i) E est fermé $\implies \widehat{E}$ est fermé ;

(ii) E est compact $\implies \widehat{E}$ est compact.

Démonstration. (i) Soient C_j toutes les composantes connexes de $\Omega \setminus E$, pour $j \in J$ variant dans un certain ensemble d'indices. Puisque $\Omega \setminus E$ est ouvert, elles sont ouvertes. Si donc on introduit le sous-ensemble d'indices :

$$J_c := \{j \in J : \overline{C_j} \in \Omega \text{ compacte}\},$$

où la fermeture est prise dans Ω , on a par (4.13) :

$$\Omega \setminus \widehat{E} = \bigcup_{j \in J \setminus J_c} C_j.$$

Clairement, cette réunion d'ouverts est un ouvert, donc \widehat{E} est bien fermé dans Ω .

(ii) On peut supposer que $E \neq \emptyset$. Soit $V = V_E$ un voisinage ouvert de E :

$$E \subset V,$$

de fermeture $\overline{V} \subset \Omega$ compacte, et introduisons à nouveau les composantes connexes ouvertes C_j de $\Omega \setminus E$, avec $j \in J$.

Assertion 4.15. *Chaque C_j intersecte \overline{V} .*

Preuve. Sinon, si l'une d'entre elle, disons C_{j_0} , était entièrement contenue dans $\Omega \setminus \overline{V}$, alors on aurait en prenant son adhérence :

$$\overline{C_{j_0}} \subset \Omega \setminus V \subset \Omega \setminus E.$$

Mais souvenons-nous (Exercice 2) que l'adhérence d'un ensemble connexe dans un espace topologique quelconque est toujours connexe. Ainsi, $\overline{C_{j_0}} \supset C_{j_0}$ est aussi connexe. Mais puisque C_{j_0} est une composante connexe de $\Omega \setminus E$, cette inclusion $\overline{C_{j_0}} \subset \Omega \setminus E$ impliquerait que $\overline{C_{j_0}} = C_{j_0}$, donc $\overline{C_{j_0}} = C_{j_0} = \Omega$ à cause de la connexité de Ω , en contradiction avec la supposition $E \neq \emptyset$. \square

Assertion 4.16. *Seulement un nombre fini de C_j intersectent ∂V .*

Preuve. En effet, le bord :

$$\partial V \subset \Omega \setminus E = \bigcup_{j \in J} C_j$$

est compact et il est recouvert par les ouverts *disjoints* C_j , donc via Borel-Lebesgue un recouvrement fini existe sans extraction. \square

Nous pouvons maintenant achever la démonstration de **(ii)**. Nous savons que :

$$\widehat{E} = E \cup \bigcup_{j \in J_c} C_j,$$

mais dans cette réunion infinie, la compacité pourrait être perdue !

Introduisons alors :

$$C_{j_1}, \dots, C_{j_m} \quad (j_1, \dots, j_m \in J_c)$$

les composantes, en nombre fini, qui à la fois intersectent ∂V et sont relativement compactes. Grâce aux deux assertions qui précèdent, toutes les autres composantes relativement compactes :

$$C_j \quad \text{avec } j \in J_c \text{ et } j \neq j_1, \dots, j_m,$$

sont alors nécessairement entièrement contenues dans V — là est le point-clé de l'argument !

En effet, le compact \overline{V} enferme alors ces composantes en nombre éventuellement infini :

$$\begin{aligned} \widehat{E} &= E \cup \bigcup_{j \in J_c} C_j \\ &= E \cup \bigcup_{\substack{j \in J_c \\ C_j \subset V}} C_j \cup \bigcup_{\substack{j \in J_c \\ C_j \cap \partial V \neq \emptyset}} C_j \\ &\subset E \cup V \cup C_{j_1} \cup \dots \cup C_{j_m} \\ &\subset \overline{V} \cup \overline{C}_{j_1} \cup \dots \cup \overline{C}_{j_m}, \end{aligned}$$

donc \widehat{E} est compact. □

Définition 4.17. Un compact $K \Subset \Omega$ d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est dit *holomorphiquement convexe* lorsque :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} = K.$$

Grâce à de tels remplissages topologiques qui rendent holomorphiquement convexes les compacts, on peut démontrer l'énoncé suivant, très utile aussi dans la théorie des surfaces de Riemann.

Théorème 4.18. [Exhaustion par des compacts holomorphiquement convexes] Dans tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, il existe une suite $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ de sous-ensembles compacts $K_j \subset \Omega$ satisfaisant :

- (i) $K_j = \widehat{K}_j$ pour tout $j \geq 1$;
- (ii) $K_j \subset \text{Int } K_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$;
- (iii) $\bigcup_{j=1}^{\infty} K_j = \Omega$.

Démonstration. Pour tout entier $j \geq 1$, introduisons les sous-ensembles de Ω :

$$K'_j := \left\{ z \in \Omega : |z| \leq j \text{ et } \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{j} \right\}.$$

Ils sont compacts, emboîtés $K'_j \subset \text{Int } K'_{j+1}$ et remplissent $\Omega = \bigcup K'_j$ — mais ils ne sont pas nécessairement holomorphiquement convexes !

Posons alors :

$$K_1 := \widehat{K}'_1,$$

et supposons par récurrence sur un entier $j \geq 1$ que K_1, \dots, K_j avec $K_1 \supset K'_1, \dots, K_j \supset K'_j$ ont déjà été construits tels qu'il satisfait toutes les conditions voulues, notamment $\widehat{K}_l = K_l$ pour $1 \leq l \leq j$.

Choisissons ensuite n'importe quel compact $L_{j+1} \subset \Omega$ satisfaisant :

$$K_j \cup K'_{j+1} \subset \text{Int } L_{j+1},$$

et prenons son enveloppe :

$$K_{j+1} := \widehat{L_{j+1}}.$$

Alors K_{j+1} est un compact grâce au Théorème 4.14 qui précède, et il est *per definitionem* holomorphiquement convexe.

De plus :

$$\text{Int } K_{j+1} = \text{Int } \widehat{L_{j+1}} \supset \text{Int } L_{j+1} \supset K_j.$$

Enfin, la suite complète $(K_j)_{j=1}^\infty$ remplit Ω , puisque $K_j \supset K'_j$. \square

5. Théorème de Mittag-Leffler

Avant toute chose, rappelons le concept classique de *fonction méromorphe* dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Définition 5.1. Une fonction $F: \Omega \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ est dite *méromorphe* s'il existe un sous-ensemble discret $D \subset \Omega$ (éventuellement vide) tel que :

- (1) sa restriction au complémentaire $F|_{\Omega \setminus D}$ est holomorphe dans $\Omega \setminus D$ (donc à valeurs $\in \mathbb{C}$ finies);
- (2) $F(p) = \infty$ en tout point (*pôle*) $p \in D$;
- (3) dans un voisinage ouvert $\omega_p \subset \Omega$ assez petit de tout point $p \in D$ avec $\{p\} = \omega_p \cap D$, la fonction $F(z) \neq 0$ ne s'annule pas et la fonction « inverse » :

$$z \mapsto \begin{cases} \frac{1}{F(z)} & \text{si } z \in \omega_p \setminus \{p\}, \\ 0 & \text{si } z = p, \end{cases}$$

est *holomorphe* dans ω_p (et non nulle dans $\omega_p \setminus \{p\}$).

Autrement dit, une fonction est *méromorphe* si elle est localement holomorphe ou localement égale à l'inverse d'une fonction holomorphe non identiquement nulle.

En particulier, les quotients $\frac{f(z)}{g(z)} =: F(z)$ de deux fonctions holomorphes $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec $g(z) \not\equiv 0$ non identiquement nulle dans chaque composante connexe de Ω , sont des fonctions méromorphes.

L'ensemble des fonctions méromorphes sera noté :

$$\mathcal{M}(\Omega) \supset \mathcal{O}(\Omega).$$

Quand Ω est connexe, $\mathcal{O}(\Omega)$ est un anneau intègre, et $\mathcal{M}(\Omega)$ est un corps (exercice de révision).

Maintenant, nous allons présenter une définition plus élaborée du concept de fonction méromorphe, qui sera en fait équivalente à la notion classique. Cette nouvelle définition est inspirée de la théorie des faisceaux, et elle se généralisera mieux aux fonctions holomorphes de plusieurs variables.

Commençons par introduire la notion de *germe ponctuel* de fonction holomorphe. En tout point $z \in \mathbb{C}$, soit \mathcal{O}_z l'ensemble des fonctions holomorphes f définies dans un voisinage ouvert $U_f \ni z$ non vide de z quotienté par la relation d'équivalence :

$$f \sim g$$

si $f = g$ dans un certain sous-ouvert non vide :

$$z \in V \subset U_f \cap U_g.$$

Autrement dit, on considère les fonctions holomorphes près de z , dans des voisinage arbitrairement petits.

Lorsque f est holomorphe dans un ouvert $\omega \ni z$ contenant un point z , on note f_z la classe d'équivalence de f dans \mathcal{O}_z , souvent appelée *germe* de f en z . Il est clair que \mathcal{O}_z est un anneau intègre, de telle sorte qu'on peut former son corps des fractions :

$$\mathcal{M}_z := \text{Frac } \mathcal{O}_z.$$

Définition 5.2. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, une *fonction méromorphe* f est une application :

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \bigcup_{z \in \Omega} \mathcal{M}_z,$$

telle que $\varphi(z) \in \mathcal{M}_z$ quel que soit $z \in \Omega$, et telle que, autour de tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert connexe $\omega_0 \ni z_0$ et deux fonctions holomorphes :

$$f, g \in \mathcal{O}(\omega_0) \quad \text{avec} \quad g_{z_0} \neq 0$$

telles que :

$$\varphi(z) = \frac{f_z}{g_z} \quad (\forall z \in \omega_0).$$

L'ensemble des fonctions méromorphes dans Ω est noté $\mathcal{M}(\Omega)$.

En particulier, si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans Ω , l'application $z \mapsto f_z$ est une fonction méromorphe en ce sens. De plus, puisque des fonctions holomorphes différentes conduisent ainsi à des fonctions méromorphes différentes, nous pouvons identifier $\mathcal{O}(\Omega)$ à un sous-ensemble de $\mathcal{M}(\Omega)$. Il est pratique d'utiliser aussi la notation $\varphi_z = \frac{f_z}{g_z}$ pour désigner le germe en z d'une fonction méromorphe, et de noter \mathcal{M}_z l'ensemble des germes en z de fonctions méromorphes.

L'ensemble des fonctions méromorphes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ constitue un anneau intègre au sein duquel tout élément qui ne s'annule pas identiquement possède un inverse (exercice).

Lemme 5.3. À tout germe $\varphi_{z_0} \in \mathcal{M}_{z_0}$ de fonction méromorphe en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, il est possible d'assigner une valeur bien définie unique :

$$\varphi_{z_0}(z_0) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Démonstration. Choisissons deux fonctions holomorphes $f, g \in \mathcal{O}(\omega_0)$ définies dans un ouvert $\omega_0 \ni z_0$ telles que $\varphi_{z_0} = \frac{f_{z_0}}{g_{z_0}}$.

Si $f \equiv 0$ près de z_0 , on pose $\varphi_{z_0}(z_0) := 0$.

Si $f \not\equiv 0$ près de z_0 , sachant que $g \neq 0$ aussi, on factorise :

$$f(z) = (z - z_0)^n f_1(z) \quad \text{et} \quad g(z) = (z - z_0)^m g_1(z),$$

avec deux entiers maximaux $n, m \geq 0$, et avec deux fonctions f_1, g_1 holomorphes près de z_0 ne s'annulant pas en z_0 . On se convainc (exercice) que $n - m$ et que $\frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}$ dépendent seulement du germe φ_{z_0} , et non du choix de f, g . Donc on peut définir la valeur :

$$\varphi_{z_0}(z_0) := \begin{cases} \infty & \text{lorsque } n < m, \\ \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)} & \text{lorsque } n = m, \\ 0 & \text{lorsque } n > m, \end{cases}$$

qui appartient bien à $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. \square

Assertion 5.4. *La deuxième Définition 5.2 est équivalente à la première Définition 5.1.*

Démonstration. Grâce au Lemme 5.3, pour toute fonction méromorphe $\varphi \in \mathcal{M}(\Omega)$ au sens de la deuxième Définition 5.2, nous obtenons une application :

$$z \mapsto \varphi_z(z) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

qui est à valeurs finies $\in \mathbb{C}$ en tout point du complémentaire du sous-ensemble discret $D \subset \Omega$ où $\varphi_z(z) = \infty$, donc holomorphe dans $\Omega \setminus D$. Mais alors en revenant aux factorisations qui précèdent, $\frac{1}{\varphi}$ est holomorphe au voisinage des points de D , si on convient que $\frac{1}{\infty} = 0$.

Réciproquement, lorsqu'on a une fonction méromorphe au sens classique de la Définition 5.1, à savoir une fonction $F \in \mathcal{O}(\Omega \setminus D)$ holomorphe en dehors d'un certain sous-ensemble discret $D = D_F \subset \Omega$ telle que $\frac{1}{F}$ est holomorphe au voisinage des points de D , on peut lui associer :

$$\varphi_z := \begin{cases} F_z & \text{lorsque } z \notin D, \\ \frac{1}{\left(\frac{1}{F}\right)_z} & \text{lorsque } z \in D, \end{cases}$$

qui est une fonction méromorphe au sens de la Définition 5.2, et qui satisfait $\varphi_z(z) = F(z)$ en tout point $z \in \Omega$. \square

En définitive, les deux définitions de fonction méromorphe s'accordent, et on peut travailler avec l'une ou avec l'autre.

Théorème 5.5. *Si une fonction F est méromorphe dans un voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors :*

$$F(z) = \sum_{k=K}^1 \frac{a_k}{(z - z_0)^k} + G(z),$$

pour certaines constantes $a_K, \dots, a_1 \in \mathbb{C}$, $a_K \neq 0$, et une certaine fonction G holomorphe près de z_0 , déterminées de manière unique, non toutes nulles si et seulement si $F_{z_0} \neq 0$. \square

Lorsque $K = 0$, la somme de fractions n'existe pas, ce qui correspond au cas où $F = G$ est holomorphe près de z_0 .

Corollaire 5.6. *Lorsque $F_{z_0} \neq 0$, la fonction méromorphe locale F se représente aussi sous la forme :*

$$F(z) = (z - z_0)^K G(z),$$

avec $G \in \mathcal{O}_{z_0}$ holomorphe près de z_0 telle que $G(z_0) \neq 0$, et avec un entier $K \in \mathbb{Z}$, déterminés de manière unique. \square

Bien entendu, lorsque $\kappa \geq -1$, on dit que F a un pôle d'ordre κ en z_0 , et lorsque $\kappa \geq 1$, qu'elle a un zéro d'ordre κ .

Les fonctions méromorphes d'une variable complexe jouissent de deux représentations : l'une, additive, due à Mittag-Leffler, et l'autre, multiplicative, due à Weierstrass. Les démonstrations qui suivront sont des illustrations de techniques centrales dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Théorème 5.7. [de Mittag-Leffler] *Pour toute suite discrète de points distincts $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et toute suite $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ de fonctions méromorphes locales définies dans des voisinages des z_j :*

$$f_j(z) = \sum_{k_j=\kappa_j}^1 \frac{a_{j,k_j}}{(z - z_j)^{k_j}} + \text{reste holomorphe} \quad (z \text{ près de } z_j),$$

il existe une fonction méromorphe globale :

$$f \in \mathcal{M}(\Omega) \cap \mathcal{O}(\Omega \setminus \cup \{z_j\})$$

holomorphe en dehors des z_j telle que $f - f_j$ est holomorphe dans un voisinage de z_j pour tout $j \geq 1$.

Démonstration. On peut supposer que les restes holomorphes locaux sont nuls, de telle sorte que les f_j sont des parties principales rationnelles pures, et elles sont alors définies dans $\mathbb{C} \supset \Omega$ tout entier, ce qui va être exploité.

Nous allons chercher f sous la forme d'une série :

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} (f_j(z) - g_j(z)),$$

avec des termes correctifs holomorphes $g_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ globalement définis dans Ω et suffisamment proches en un certain sens des f_j pour qu'il y ait convergence normale.

À cette fin, choisissons une suite croissante de compacts $K_j \subset \Omega$ holomorphiquement convexes $\widehat{K}_j = K_j$ qui remplissent, comme au Théorème 4.18, $\Omega = \cup K_j$. Grâce au fait que la suite $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ est discrète, l'Exercice 3 propose d'établir qu'on peut supposer de surcroît que les K_j n'absorbent pas trop vite les points z_j :

$$z_k \notin K_j \quad (\forall k \geq j \geq 1).$$

En particulier, l'unique pôle z_j de f_j n'appartient pas à K_j , ce qui veut dire que f_j est holomorphe dans un certain voisinage ouvert de K_j .

Comme $\widehat{K}_j = K_j$, le Théorème 4.1 de Runge nous fournit alors des fonctions approximantes globales $g_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que :

$$\max_{z \in K_j} |f_j(z) - g_j(z)| \leq \frac{1}{2^j} \quad (\forall j \geq 1).$$

Fixons maintenant $k \geq 1$. Pour $j \geq k$, les f_j n'ont pas de pôle sur K_k . Grâce à la finesse de l'approximation en $\frac{1}{2^j}$, la série de fonctions holomorphes :

$$\sum_{j=k}^{\infty} (f_j(z) - g_j(z)) \Big|_{\text{Int } K_k}$$

converge alors, grâce au Théorème 3.10 de Cauchy-Montel, vers une fonction holomorphe sur $\text{Int } K_k$.

Puisque l'entier $k \geq 1$ était quelconque, ceci montre bien que la série définissant $f(z)$ constitue une fonction méromorphe globale sur $\Omega = \cup_k \text{Int } K_k$, et le fait que $f - f_j$ est holomorphe au voisinage de chaque z_j est satisfait par construction. \square

Le caractère « additif » de ce théorème est justifié par l'Exercice 4, qui ré-exprime le résultat dans un langage inspiré de la théorie des faisceaux.

Une autre version du même énoncé, vue dans le prisme de Hörmander *via* la résolution de l'équation $\bar{\partial}$, est la suivante.

Théorème 5.8. [Résolubilité du $\bar{\partial}$ en dimension 1] *Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ lisse dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, il existe une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ à l'équation :*

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f.$$

Notons que u ne peut être unique : pour toute fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$, la fonction $u + g$ est encore solution, et c'est d'ailleurs la solution générale.

Démonstration. Soit une suite $(K_j)_{j=1}^\infty$ croissante de compacts $K_j \subset \text{Int } K_{j+1} \Subset \Omega$ holomorphiquement convexes $\widehat{K}_j = K_j$ qui remplissent $\Omega = \cup K_j$. Pour tout $j \geq 1$, soit $\psi_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ une fonction-plateau telle que :

$$\psi_j|_{K_j} \equiv 1 \quad \text{et} \quad \psi_j|_{\Omega \setminus \text{Int } K_{j+1}} \equiv 0.$$

On pose $\varphi_1 := \psi_1$, puis, pour tout $j \geq 2$:

$$\varphi_j := \psi_j - \psi_{j-1}.$$

Alors $\varphi_j \equiv 0$ en tout point de K_{j-1} ainsi qu'en tout point hors de $\text{Int } K_{j+1}$, et de plus $\sum_1^\infty \varphi_j \equiv 1$ partout dans Ω .

Grâce au Corollaire 3.7, puisque les fonctions $\varphi_j f$ sont à support compact, nous pouvons trouver des fonctions $u_j \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C})$ telles que :

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = \varphi_j f \quad (\forall j \geq 1).$$

Ceci implique en particulier que u_j est holomorphe en tout point de K_{j-1} .

Ensuite, puisque $\widehat{K_{j-1}} = K_{j-1}$, le Théorème 4.1 de Runge fournit des fonctions holomorphes $v_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telles que :

$$\max_{K_{j-1}} |u_j - v_j| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Alors la somme infinie :

$$u := \sum_{j=1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

est uniformément convergente sur tout compact de Ω .

Or pour un entier fixé $k \geq 1$, la somme tronquée :

$$\sum_{j=k+1}^{\infty} (u_j - v_j)$$

est constituée de termes qui sont tous holomorphes dans l'intérieur de K_k . Comme il y a convergence uniforme, le Théorème 3.10 de Cauchy-Montel montre que cette somme

définit alors une fonction *holomorphe* dans $\text{Int } K_k$, qui plus est indéfiniment dérivable terme à terme d'après l'Exercice 1.

Or les k premiers termes $\sum_{j=1}^k$ sont \mathcal{C}^∞ , donc $u \in \mathcal{C}^\infty(\text{Int } K_k)$, puis $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ car l'entier k était quelconque.

Enfin, comme cette série peut être dérivée terme à terme, nous obtenons :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} - 0 \right) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j f = f,$$

ce qui conclut. \square

Grâce à ce théorème, nous pouvons énoncer une version « *faisceautique* » renforcée du Théorème 5.7 de Mittag-Leffler.

Théorème 5.9. Soit $\Omega = \cup_1^\infty \Omega_j$ une réunion d'ouverts $\Omega_j \subset \mathbb{C}$, et soit une famille de fonctions holomorphes indexées par deux entiers :

$$g_{jk} \in \mathcal{O}(\Omega_j \cap \Omega_k) \quad (\forall j, k \geq 1),$$

satisfaisant dans les intersections de leurs domaines :

$$(5.10) \quad g_{jk} = -g_{kj} \quad \text{et} \quad g_{jk} + g_{kl} + g_{lj} = 0$$

pour tous $j, k, l \geq 1$. Alors il existe des fonctions holomorphes $g_j \in \mathcal{O}(\Omega_j)$ telles que :

$$(5.11) \quad g_{jk} = g_k - g_j$$

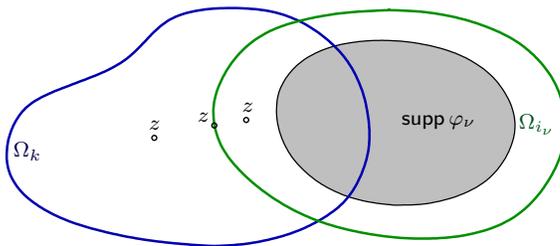
dans $\Omega_j \cap \Omega_k$, pour tous $j, k \geq 1$.

Démonstration. Choisissons une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $\{\Omega_j\}$, à savoir une suite de fonctions :

$$\varphi_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega_{i_\nu}) \quad (\nu \geq 1),$$

chacunes lisses à support compact dans un certain ouvert Ω_{i_ν} telles que sur tout compact $K \subset \Omega$, seul un nombre fini de φ_ν ne sont pas identiquement nulles, et telles que :

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu \equiv 1 \quad (\text{partout dans } \Omega).$$



Assertion 5.12. Pour tout $\nu \geq 1$ et tout $k \geq 1$, la fonction :

$$\varphi_\nu g_{i_\nu k} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k)$$

prolongée par 0 dans $\Omega_k \setminus \Omega_{i_\nu}$ devient une fonction $\in \mathcal{C}^\infty(\Omega_k)$.

Démonstration. Il est naturel de prolonger φ_ν par 0 hors de Ω_{i_ν} , d'où $\varphi_\nu \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, et ceci conduit en effet au prolongement :

$$\varphi_\nu g_{i_\nu k}(z) := \begin{cases} \varphi_\nu(z) g_{i_\nu k}(z) & \text{lorsque } z \in \Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k, \\ 0 & \text{lorsque } z \in \Omega_k \setminus \Omega_{i_\nu}. \end{cases}$$

Au voisinage d'un point $z \in \Omega_{i_\nu} \cap \Omega_k$, le caractère \mathcal{C}^∞ est clair. Au voisinage d'un point $z \in \Omega_k \setminus \Omega_{i_\nu}$, la fonction φ_ν prolongée à l'avance s'annule identiquement, donc le caractère \mathcal{C}^∞ est encore plus clair! \square

Pour tout $k \geq 1$, introduisons alors la fonction définie sur Ω_k :

$$h_k := \sum_{\nu=1}^{\infty} \varphi_\nu g_{i_\nu k}.$$

Comme la somme est localement finie près de tout point $z \in \Omega_k$, on a $h_k \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_k)$.

Ensuite, grâce à l'hypothèse $g_{ki_\nu} + g_{i_\nu j} + g_{jk} = 0$, la différence entre deux telles fonctions :

$$h_k - h_j = \sum \varphi_\nu (g_{i_\nu k} - g_{i_\nu j}) = \sum \varphi_\nu g_{jk} = g_{jk}$$

est holomorphe dans $\Omega_j \cap \Omega_k$. Ceci implique que :

$$\frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial h_j}{\partial \bar{z}} \quad (\text{dans } \Omega_j \cap \Omega_k).$$

Par conséquent, ces différentes fonctions lisses se recollent en une fonction globale $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ satisfaisant pour tout $k \geq 1$:

$$\psi = \frac{\partial h_k}{\partial \bar{z}} \quad (\text{dans } \Omega_k).$$

Grâce au Théorème 5.8, nous pouvons trouver une solution $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = -\psi,$$

qui nous permet de *corriger* les fonctions h_k de manière à les rendre *holomorphes* :

$$g_k := h_k + u \quad (k \geq 1).$$

Pour conclure, on vérifie aisément que ces fonctions holomorphes $g_k \in \mathcal{O}(\Omega_k)$ satisfont effectivement $g_k - g_j = g_{jk}$. \square

6. Théorème de Weierstrass

Dans tout domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, on peut construire des fonctions méromorphes à zéros et pôles prescrits arbitrairement, pourvu seulement que les seuls points d'accumulation possibles dans \mathbb{C} se trouvent sur $\partial\Omega$.

Théorème 6.1. [de Weierstrass] *Pour toute suite discrète $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ de points distincts dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ affectés de multiplicités entières quelconques $n_j \in \mathbb{Z}$, il existe une fonction méromorphe globale $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que :*

- f est holomorphe et $\neq 0$ sur $\Omega \setminus \cup \{z_j\}_{j=1}^{\infty}$;
- $f(z) (z - z_j)^{-n_j}$ est holomorphe et $\neq 0$ au voisinage de z_j , pour tout $j \geq 1$.

Démonstration. Comme dans les preuves qui précèdent, soit une suite $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ de compacts holomorphiquement convexes $\widehat{K}_j = K_j$ de $\Omega = \cup K_j$ tels que $K_j \subset \text{Int } K_{j+1}$.

Nous allons construire successivement des fonctions rationnelles $f_j(z) = \frac{P_j(z)}{Q_j(z)}$ quotients de polynômes qui ont exactement les zéros et les pôles souhaités sur K_j (et peut-être d'autres zéros et pôles dans $\Omega \setminus K_j$), ainsi que des fonctions holomorphes « correctrices » $g_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfaisant pour tout $j \geq 1$:

$$(6.2) \quad \max_{K_j} \left| \frac{f_{j+1}}{f_j} e^{g_j} - 1 \right| \leq \varepsilon_j,$$

pour une suite de ε_j de somme finie $\sum \varepsilon_j < \infty$, par exemple $\varepsilon_j := \frac{1}{2^j}$. On notera que $\frac{f_{j+1}}{f_j}$ est holomorphe dans un voisinage ouvert de K_j .

Une fois que cela aura été effectué, le produit infini :

$$f_1 \prod_{j=1}^{\infty} \frac{f_{j+1}}{f_j} e^{g_j}$$

convergera et définira une fonction méromorphe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ satisfaisant les conditions requises, parce que, pour tout $k \geq 1$ fixé, le produit-reste $\prod_{j \geq k}$ convergera normalement dans $\text{Int } K_k$ grâce à $\sum_{j \geq k} \varepsilon_j < \infty$ vers une fonction holomorphe puisque les $\frac{f_{j+1}}{f_j}$ n'ont plus de pôles, tandis que les $(k-1)$ premiers termes :

$$f_1 \prod_{j=1}^{k-1} \frac{f_{j+1}}{f_j} e^{g_j} = f_k e^{g_1 + \dots + g_{k-1}}$$

auront manifestement les pôles et zéros adéquats sur K_k .

Pour réaliser (6.2), raisonnons par récurrence en supposant f_1, \dots, f_j et g_1, \dots, g_{j-1} déjà construites. Soit $h_{j+1} = \frac{R_{j+1}(z)}{S_{j+1}(z)}$ un quotient de polynômes qui possède exactement les zéros et les pôles voulus en tout point de K_{j+1} , et rien d'autre. Alors le quotient de fractions rationnelles :

$$\frac{h_{j+1}}{f_j} = c \prod_{\substack{\nu \\ \text{fini}}} (z - w_\nu)^{m_\nu}$$

a un certain nombre fini de zéros et de pôles w_ν de multiplicités $m_\nu \in \mathbb{Z}$ qui sont tous situés dans $\Omega \setminus K_j$.

Assertion 6.3. *Pour tout ν , il existe un point auxiliaire w'_ν situé dans $\Omega \setminus K_{j+1}$ qui se trouve dans la même composante connexe de $\Omega \setminus K_j$ que w_ν .*

Preuve. On peut supposer que $w_\nu \in K_{j+1} \setminus K_j$. Comme $\widehat{K}_j = K_j$, aucune composante connexe de $\Omega \setminus K_j$ n'est relativement compacte dans Ω . Il existe donc, pour tout ν , une courbe continue $\gamma_\nu : [0, 1] \rightarrow \Omega \cup \partial\Omega$ avec :

$$\gamma_\nu([0, 1]) \subset \Omega \setminus K_j,$$

qui joint le point $\gamma_\nu(0) = w_\nu$ à certain un point du bord $\gamma_\nu(1) \in \partial\Omega$. Puisque $K_{j+1} \Subset \Omega$ est compact, le long de cette courbe, on peut donc trouver un point :

$$w'_\nu = \gamma_\nu(t'_\nu) \in \Omega \setminus K_{j+1} \quad (\exists t'_\nu \in]0, 1[).$$

La connexité de la courbe-image $\gamma_\nu([0, 1])$ garantit que w'_ν se trouve effectivement dans la même composante connexe de $\Omega \setminus K_j$ que w_ν . \square

Alors la fonction rationnelle :

$$f_{j+1} := h_{j+1} \prod_{\substack{\nu \\ \text{fini}}} (z - w'_\nu)^{-m_\nu}$$

possède les zéros et les pôles adéquats sur K_{j+1} . De plus le logarithme :

$$\log\left(\frac{f_{j+1}(z)}{f_j(z)}\right) = \log c + \sum_{\nu} m_\nu \log\left(\frac{z - w_\nu}{z - w'_\nu}\right)$$

peut être défini comme une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert de K_j , puisque w_ν et w'_ν sont dans la même composante connexe de $\Omega \setminus K_j$, voir l'Exercice 6. En appliquant alors le Théorème 4.1 de Runge, il existe une fonction holomorphe globale $g_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :

$$\max_{K_j} \left| \log \frac{f_{j+1}}{f_j} + g_j \right| \leq \log(1 + \varepsilon_j),$$

ce qui conclut (6.2). □

Corollaire 6.4. *Toute fonction méromorphe $h \in \mathcal{M}(\Omega)$ dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ s'écrit comme quotient $h = \frac{f}{g}$ de deux fonctions holomorphes globales $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$.*

Démonstration. Soient $z_1, z_2, \dots \in \Omega$ les pôles de h d'ordres $n_1, n_2, \dots \geq 1$. Le Théorème 6.1 de Weierstrass fournit une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ayant des zéros d'ordres n_1, n_2, \dots en ces points z_1, z_2, \dots et $\neq 0$ partout ailleurs. Alors le produit $hg =: f$ n'a plus de pôles, il est holomorphe dans Ω . □

7. Domaines d'holomorphic en dimension 1

Une application importante du Théorème de Weierstrass montre, dans la terminologie de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, que tout domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un *domaine d'holomorphic*, au sens suivant.

Théorème 7.1. *Dans tout domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ il existe une fonction holomorphe $\hat{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui ne peut être prolongée ni holomorphiquement, ni méromorphiquement, à un ouvert plus grand.*

Plus précisément, pour tout disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ centré en un point $z_0 \in \Omega$ de rayon $r > 0$, si une fonction méromorphe $g \in \mathcal{M}(\mathbb{D}_r(z_0))$ coïncide avec \hat{f} près de z_0 , alors nécessairement $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$.

Démonstration. Numérotons tous les points de $\Omega \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ à coordonnées rationnelles comme une suite $(z_j)_{j=1}^\infty$ telle que chaque point apparaisse répété un nombre infini de fois, et posons :

$$r_j := \text{dist}(z_j, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Choisissons ensuite une suite croissante de compacts $K_j \subset K_{j+1}$ quelconque telle que $\Omega = \cup K_j$, et indexée par le même entier j que $(z_j)_{j=1}^\infty$. Alors les z_j re-visitent chacun de ces compacts une infinité de fois.

Mais comme $K_j \Subset \Omega$, nous pouvons pour tout $j \geq 1$ choisir un autre point $w_j \in \Omega \setminus K_j$ tel que :

$$|w_j - z_j| < r_j.$$

Alors comme $w_j \notin K_j$, et comme $\cup_j K_j = \Omega$, la suite $(w_j)_{j=1}^\infty$ ne peut avoir de point d'accumulation dans Ω , *i.e.* est nécessairement *discrète dans Ω* , tout à l'opposé de $(z_j)_{j=1}^\infty$!

Le Théorème 6.1 de Weierstrass s'applique donc et fournit une fonction $\widehat{f} \in \mathcal{O}(\Omega)$ ayant tous les points de la suite $(w_j)_{j=1}^\infty$ comme zéros d'ordre 1, avec $\widehat{f} \neq 0$ ailleurs.

Soit maintenant $a \in \Omega \cap (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ un point à coordonnées rationnelles, et soit $r := \text{dist}(a, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Puisque $z_j = a$ pour une infinité d'entiers j , le disque :

$$\mathbb{D}_r(a) = \{w \in \mathbb{C} : |w - a| < r\}$$

contient aussi une infinité de points w_j — exercice non nécessaire pour terminer l'argument : les points d'accumulation de ces w_j appartiennent tous à $\partial\Omega \cap \partial\mathbb{D}_r(z)$.

Alors \widehat{f} ne peut pas être prolongée holomorphiquement ou méromorphiquement dans un disque ouvert contenant $\mathbb{D}_r(a)$, sinon, à cause du principe des zéros isolés, son prolongement serait identiquement nul. \square

8. Théorème de représentation de Riesz, Théorème de Hahn-Banach

Dans la démonstration du Théorème de Runge, on a considéré un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et un sous-ensemble compact $K \Subset \Omega$. Pour établir l'implication principale

$$\text{(ii)} \implies \text{(i)},$$

on a affirmé :

Grâce au Théorème de Hahn-Banach, il suffit de montrer que toute mesure μ sur K qui est orthogonale à $\mathcal{O}(\Omega)$, à savoir qui satisfait :

$$0 = \int f(z) d\mu(z) \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)),$$

est aussi orthogonale à toutes les fonctions qui sont holomorphes seulement dans un voisinage de K .

Les paragraphes qui suivent sont destinés à fournir des explications et à justifier cette affirmation.

Notation 8.1. Étant donné un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}$, on note :

$$\mathcal{O}(F)$$

l'anneau des fonctions qui sont holomorphes dans un voisinage de F .

Plus précisément, un élément $f \in \mathcal{O}(F)$ est la donnée d'un certain voisinage *ouvert* (parfois très resserré) :

$$F \subset V_f \subset \mathbb{C}$$

et d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(V_f)$. L'addition et la multiplication de deux éléments $f, g \in \mathcal{O}(F)$ doit alors tenir compte du fait que les domaines de définition ne coïncident pas forcément, et il suffit en fait de tout restreindre aux intersections de domaines :

$$f + g := f|_{V_f \cap V_g} + g|_{V_f \cap V_g} \quad \text{et} \quad fg := f|_{V_f \cap V_g} g|_{V_f \cap V_g}.$$

Alors en partant d'un compact $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}$, les morphismes de restriction donnent les inclusions inverses :

$$\mathcal{O}(\Omega)|_K \subset \mathcal{O}(K)|_K \subset \mathcal{C}^0(K).$$

On munit ces trois espaces de la norme du supremum sur K :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0(K)} := \max_{z \in K} |f(z)|.$$

Observation. La propriété (i) d'approximation dans le Théorème de Runge équivaut alors à ce que :

$$\overline{\mathcal{O}(\Omega)|_K} \supset \mathcal{O}(K)|_K,$$

la fermeture étant prise pour cette norme.

Or le *dual* de l'espace des fonctions continues sur un espace topologique localement compact est connu : il consiste en les *mesures*, d'après le ² :

Théorème de représentation de Riesz. Sur un espace localement compact séparé (Hausdorff) X , toute fonctionnelle linéaire complexe :

$$L: \mathcal{C}_c^0(X) \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui est continue (bounded) :

$$\|L\| := \sup_{f \neq 0} \frac{|L(f)|}{\|f\|} < \infty,$$

peut être représentée comme intégrale contre une certaine mesure de Borel complexe unique μ définie sur X :

$$L(f) = \int_X f d\mu \quad (\forall f \in \mathcal{C}_c^0(X)).$$

De plus, la norme de L est la variation totale de μ :

$$\|L\| = |\mu|(X). \quad \square$$

Dans notre contexte où $K \Subset \Omega \subset \mathbb{C}$, les fonctionnelles linéaires complexes continues sur l'espace de Banach (= espace vectoriel normé complet) :

$$\left(\mathcal{C}^0(K), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0(K)} \right)$$

sont donc représentées par des mesures sur K :

$$f \longmapsto \int_K f(z) d\mu(z).$$

Puisque donc nous souhaitons obtenir :

$$\overline{\mathcal{O}(\Omega)|_K} \supset \mathcal{O}(K)|_K,$$

il suffit d'appliquer le Théorème de Hahn-Banach, sous la version suivante ³ :

Théorème. Dans un espace vectoriel complexe normé :

$$(E, \|\cdot\|_E),$$

on suppose donnés deux sous-espaces linéaires :

$$G \subset F \subset E.$$

Alors :

$$\overline{G} \supset F,$$

2. Voir par exemple pages 129–130 du livre : W. RUDIN, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 3rd Ed., 1986, xiv+416 pp.

3. Voir par exemple page 107 du même livre : W. RUDIN, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 3rd Ed., 1986, xiv+416 pp.

si et seulement si, pour toute fonctionnelle linéaire continue sur E :

$$L: E \longrightarrow \mathbb{C}, \quad \|L\| < \infty,$$

on a :

$$L|_G \equiv 0 \implies L|_F \equiv 0. \quad \square$$

Ici, la correspondance entre les espaces s'écrit :

$$\begin{array}{ccccc} G & \subset & F & \subset & E \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ \mathcal{O}(\Omega)|_K & & \mathcal{O}(K)|_K & & \mathcal{C}^0(K) \end{array} .$$

9. Lemme de Schwarz

L'énoncé et la preuve du Lemme de Schwarz sont simples, mais les conséquences sont très nombreuses dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, puisqu'il permet de contrôler la croissance et les dérivées d'une fonction en connaissant seulement une borne supérieure sur son image.

Lemme 9.1. [de Schwarz normalisé] Soit une fonction holomorphe $f: \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ du disque unité à valeurs dans lui-même qui satisfait $f(0) = 0$. Alors :

- (i) $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$;
- (ii) si en un point non nul $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ on a $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f(z) \equiv e^{i\theta} z$ est une rotation.
- (iii) on a toujours $|f'(0)| \leq 1$, avec égalité seulement lorsque f est une rotation.

Démonstration. Développons f en série entière convergente dans \mathbb{D} :

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots \quad (a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}).$$

Puisque $f(0) = 0$, on a $a_0 = 0$, d'où $\frac{f(z)}{z}$ est holomorphe dans \mathbb{D} (singularité éliminable).

En tout point $z \in \partial\mathbb{D}_r(0)$ d'un cercle de rayon $0 < r < 1$ centré en 0, on a grâce à l'hypothèse $|f(z)| \leq 1$:

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{r}.$$

Du principe du maximum appliqué à $\frac{f(z)}{z}$, on déduit que cette inégalité est vraie pour tout $|z| \leq r$. En faisant tendre $r \longrightarrow 1$, on obtient (i).

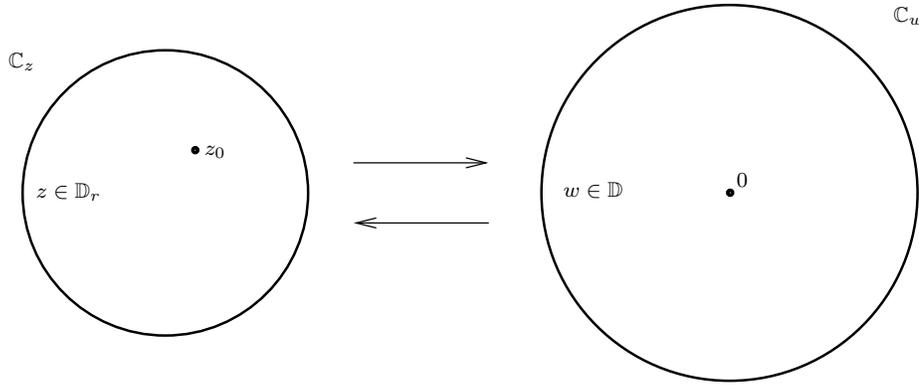
Pour (ii), on voit que $\left| \frac{f(z)}{z} \right|$ atteint son maximum en le point intérieur $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$, donc $f(z) = cz$ pour une certaine constante $c \in \mathbb{C}$, nécessairement de module $|c| = 1$ puisque $|f(z_0)| = |z_0|$.

Enfin, pour (iii), la fonction $g(z) := \frac{f(z)}{z}$ satisfait $|g(z)| \leq 1$ partout dans \mathbb{D} , et de plus évidemment :

$$g(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = f'(0).$$

Donc si $|f'(0)| = 1$, on a $|g(0)| = 1$, et à nouveau grâce au principe du maximum, g est constante, ce qui implique $f(z) = cz$ avec $|c| = 1$. \square

La forme la plus générale du Lemme de Schwarz (i), bien qu'essentiellement équivalente par transformation conforme, est la suivante.



Lemme 9.2. [de Schwarz généralisé] Sur le disque $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ de rayon $r > 0$, si une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r)$ s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}_r$ et est bornée :

$$f(z_0) = 0 \quad \text{et} \quad |f(z)| \leq M < \infty \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r),$$

alors elle satisfait :

$$|f(z)| \leq M \cdot r \cdot \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|} \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r).$$

À partir d'un contrôle sur la norme supérieure, on obtient l'information que la croissance est linéaire.

Démonstration. Pour se ramener à la situation normalisée, il convient d'utiliser l'application :

$$z \mapsto r \cdot \frac{z - z_0}{r^2 - \bar{z}_0 z} =: w,$$

holomorphe pour $z \in \mathbb{D}_r$ puisque son dénominateur ne peut s'annuler, qui envoie le point $z_0 \in \mathbb{D}_r$ sur l'origine $0 \in \mathbb{D} = \mathbb{D}_1$ du disque unité, et qui établit même un *biholomorphisme* — application holomorphe bijective dont l'inverse est aussi holomorphe — de \mathbb{D}_r sur \mathbb{D}_1 , dont l'inverse (résoudre algébriquement z par rapport à w) :

$$w \mapsto r \cdot \frac{z_0 + rw}{r + \bar{z}_0 w}$$

possède aussi un dénominateur jamais nul, donc est holomorphe.

Alors la fonction holomorphe composée :

$$\varphi(w) := \frac{1}{M} f\left(r \cdot \frac{z_0 + rw}{r + \bar{z}_0 w}\right)$$

satisfait manifestement les hypothèses :

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad |\varphi(w)| \leq 1 \quad (\forall w \in \mathbb{D})$$

qui permettent d'appliquer le Lemme 9.1 de Schwarz normalisé, d'où :

$$|\varphi(w)| \leq |w| \quad (\forall w \in \mathbb{D}),$$

inégalité qui, en revenant à f et en remplaçant $w = w(z)$ pour revenir à la variable z :

$$\left| \frac{1}{M} f(z) \right| \leq r \cdot \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|}$$

est exactement celle annoncée. \square

Corollaire 9.3. Si une fonction $g \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r)$ bornée $|g(z)| \leq N$ ne s'annule pas forcément en un point $z_0 \in \mathbb{D}_r$, on obtient quand même une inégalité de type Schwarz utile :

$$|g(z) - g(z_0)| \leq 2N \cdot r \cdot \frac{|z - z_0|}{|r^2 - \bar{z}_0 z|}.$$

Démonstration. Appliquer le Lemme 9.2 à la fonction :

$$f(z) := g(z) - g(z_0),$$

avec le majorant $M := 2N$. □

10. Exercices

Exercice 1. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ holomorphes dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui convergent normalement sur les compacts $K \subset \Omega$ vers une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:

$$\max_{z \in K} |f_n(z) - f(z)| \leq c_{K,n},$$

avec $\sum_n c_{K,n} < \infty$. Montrer que la suite $(f'_n)_{n=1}^\infty$ des fonctions dérivées converge aussi normalement sur les compacts vers $f' \in \mathcal{O}(\Omega)$. Indication: Utiliser les inégalités de Cauchy pour f'_n .

Exercice 2. Dans un espace topologique X , soit $A \subset X$ une partie connexe (pour la topologie induite). Montrer que si $B \subset X$ vérifie $A \subset B \subset \bar{A}$, alors B est connexe aussi. Indication: Sinon, il existerait deux ouverts $U, V \subset X$ avec :

$$\emptyset = U \cap B = V \cap B = U \cap V \cap B,$$

tandis que :

$$B = (U \cap B) \cup (V \cap B).$$

Exercice 3. Adapter la démonstration du Théorème 4.18, pour établir que dans tout domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour toute suite discrète $(z_j)_{j=1}^\infty$ de points $z_j \in \Omega$, il existe une suite $(K_j)_{j=1}^\infty$ de sous-ensembles compacts $K_j \subset \Omega$ satisfaisant :

- (i) $K_j = \widehat{K_j}$ pour tout $j \geq 1$;
- (ii) $K_j \subset \text{Int } K_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$;
- (iii) $\bigcup_{j=1}^\infty K_j = \Omega$;
- (iv) $z_k \notin K_j$ pour tout $k \geq j \geq 1$.

Exercice 4. (a) Montrer que le Théorème 5.7 de Mittag-Leffler est équivalent à l'énoncé suivant. Si $\Omega = \bigcup_{j=1}^\infty \Omega_j$ avec $\Omega_j \subset \Omega$ ouverts de \mathbb{C} , si $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j)$ satisfont $f_j - f_k \in \mathcal{O}(\Omega_j \cap \Omega_k)$ pour tous j, k , alors il existe $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ telle que $f - f_j \in \mathcal{O}(\Omega)$ pour tout j .

(b) Montrer ensuite que le Théorème 5.9 implique ce dernier énoncé.

Exercice 5. Donner une reformulation « faisceautique » du Théorème 6.1 de Weierstrass analogue au Théorème 5.9.

Exercice 6. Soit $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une courbe de classe \mathcal{C}^1 injective et immersive : $\gamma'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, 1]$, d'extrémités $z_0 := \gamma(0)$ et $z_1 := \gamma(1)$. Montrer que la fonction :

$$z \mapsto \log \frac{z - z_0}{z - z_1}$$

peut être définie comme fonction holomorphe univalente dans le complémentaire $\mathbb{C} \setminus \gamma([0, 1])$.

Exercice 7. Soit une suite $(z_j)_{j=1}^\infty$ discrète de points d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, soient f_j des fonctions holomorphes dans des voisinages ouverts des z_j , et soient des entiers $n_j \geq 0$. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ telle que :

$$f(z) - f_j(z) = \mathcal{O}(|z - z_j|^{1+n_j}),$$

lorsque $z \rightarrow z_j$, pour tout $j \geq 1$.

Exercice 8. EE

Fonctions harmoniques

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Lien avec les fonctions holomorphes

Commençons par effectuer quelques rappels sur les fonctions harmoniques définies sur des ouverts de \mathbb{R}^2 , qui satisfont par définition $\Delta u = 0$ où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ est l'opérateur laplacien. Dans la théorie plus générale des fonctions sous-harmoniques satisfaisant $\Delta u \geq 0$ et qui sera développée dans le chapitre suivant, le lecteur pourra reconnaître de nombreux arguments qui redonnent les preuves de résultats classiques pour les fonctions harmoniques.

Dans le plan complexe $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ muni des coordonnées réelles $(x, y) \cong z = x + iy$, soit Ω un ouvert, pas nécessairement supposé connexe.

Définition 1.1. Une fonction de classe \mathcal{C}^2 à valeurs réelles :

$$u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$$

est dite *harmonique* lorsqu'elle est annulée par l'opérateur $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ de Laplace :

$$0 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On notera :

$$\text{Harm}(\Omega)$$

l'espace des fonctions \mathcal{C}^2 harmoniques dans Ω . Par anticipation, l'un des résultats centraux de la théorie établit que toute fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ localement intégrable au sens de Lebesgue qui satisfait $\Delta u = 0$ au sens faible, à savoir :

$$0 = \int_{\Omega} u \cdot \Delta(\varphi),$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ lisse à support compact — voire même toute distribution $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ satisfaisant cela — est en fait une fonction \mathcal{C}^∞ sur Ω , après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle.

C'est pourquoi la régularité \mathcal{C}^2 des fonctions u que l'on appelle *harmoniques* dans la Définition initiale 1.1 n'est pas déterminante, seul compte l'opérateur Δ .

Dans le formalisme de la théorie des fonctions holomorphes, l'opérateur de Laplace peut aussi s'écrire en termes des opérateurs de dérivée par rapport à z et par rapport à \bar{z} :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

Proposition 1.2. *Les parties réelle et imaginaire de toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$\operatorname{Re} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f$$

sont des fonctions harmoniques.

Démonstration. Rappelons que :

$$2 \operatorname{Re} f = f + \bar{f} \quad \text{et} \quad 2i \operatorname{Im} f = f - \bar{f}.$$

La fonction holomorphe f et sa conjuguée antiholomorphe \bar{f} sont localement développables en série entière convergente, donc \mathcal{C}^∞ . Comme $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ commutent, on trouve :

$$\frac{1}{2} \Delta(\operatorname{Re} f) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 + 0 = 0,$$

par définition de l'holomorphicité et de l'antiholomorphicité. Pour $f - \bar{f}$, c'est $0 - 0 = 0$. \square

Réciproquement, toute fonction harmonique est localement partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe.

Proposition 1.3. *Si $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$ est une fonction harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, alors au voisinage de tout point $(x_0, y_0) = z_0 \in \Omega$, par exemple dans un disque ouvert $\mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon assez petit pour qu'il soit contenu dans l'ouvert :*

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$$

il existe une fonction holomorphe :

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$$

telle que :

$$u|_{\mathbb{D}_r(z_0)} = \operatorname{Re} f.$$

Démonstration. Soit la 1-forme différentielle :

$$\omega := -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Le calcul (détaillé !) de sa différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}d\omega &= -d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \wedge dy \\ &= -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dy\right) \wedge dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) dx \wedge dy \\ &= 0,\end{aligned}$$

montre qu'elle est fermée par harmonicité de u . En appliquant alors le Lemme de Poincaré dans le disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ qui est étoilé en z_0 , cette forme est *exacte*, à savoir il existe une fonction v de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{D}_r(z_0)$ telle que $\omega = dv$.

En fait, la théorie standard des formes différentielles sur \mathbb{R}^2 fournit la formule agréable :

$$v(z) = v(x, y) = \int_{z_0}^z \omega = \int_{z_0}^z \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right),$$

dans laquelle l'intégration s'effectue le long de n'importe quel chemin \mathcal{C}^1 par morceaux allant de z_0 à un point $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$ — et la valeur obtenue ne dépend pas du chemin grâce à la fermeture $d\omega = 0$.

En remplaçant (x, y) par $(x + \varepsilon, y)$ puis par $(x, y + \varepsilon)$, on se convainc aisément, que les dérivées partielles de cette intégrale valent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

relations qui s'obtenaient d'ailleurs plus directement à partir de $\omega = dv$ sans qu'on l'ait dit !

Mais ces deux équations aux dérivées partielles ne sont autres que les *équations de Cauchy-Riemann* montrant que la fonction :

$$f := u + iv$$

est holomorphe dans Ω . □

Sous une hypothèse topologique naturelle, la réciproque globale est le :

Théorème 1.4. *Si le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est simplement connexe, pour toute fonction $u \in \text{Harm}(\Omega)$, il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, unique à une constante près, telle que :*

$$u = \text{Re } f.$$

Terminologie 1.5. Une fonction v telle que $u + iv$ est holomorphe est appelée une *conjugué harmonique* de $u \in \text{Harm}(\Omega)$.

Démonstration. À nouveau, soit la 1-forme différentielle $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$, soit $z_0 \in \Omega$ un point de référence fixé, et soit la 'primitive' :

$$v(z) = \int_{z_0}^z \omega = \int_{z_0}^z \left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Puisque Ω est simplement connexe, tous les chemins \mathcal{C}^1 par morceaux allant de z_0 à z dans Ω peuvent être déformés continûment l'un vers l'autre en demeurant dans Ω . Il en découle que l'intégrale ne dépend pas du chemin. La fonction v est alors définie globalement et uniquement en tout point $z \in \Omega$. Le même argument que précédemment conclut alors que $f := u + iv$ satisfait les équations de Cauchy-Riemann, donc est holomorphe.

Pour ce qui est de l'unicité à une constante près, soit $u = \text{Re } f = \text{Re } g$ avec $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Alors la fonction $h := f - g$ holomorphe dans Ω satisfait $\text{Re } h \equiv 0$. Autrement dit :

$$h(z) + \overline{h(z)} \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad h'(z) + 0 \equiv 0$$

en dérivant par rapport à z puisque $\overline{h(z)} = \overline{h(\bar{z})}$ est une fonction holomorphe de \bar{z} et puisque $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$ (exercice), donc h est une constante imaginaire pure. □

Sans l'hypothèse que Ω est simplement connexe, la représentation des fonctions harmoniques comme parties réelles de fonctions holomorphes n'est pas toujours vraie. Soit en effet le disque unité épointé :

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}.$$

La fonction :

$$u := \log |z| = \frac{1}{2} \log (z\bar{z})$$

est harmonique dans \mathbb{D}^* :

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log z + \log \bar{z}) = 0 + 0,$$

mais la conjuguée harmonique (à une constante près) de u ne pourrait être (exercice) que :

$$v = \arg z,$$

laquelle est multivalente sur \mathbb{D}^* .

2. Propriétés fondamentales

Une première propriété fondamentale des fonctions harmoniques est leur régularité élevée, beaucoup mieux que \mathcal{C}^2 , encore mieux que \mathcal{C}^∞ , à savoir *analytique réelle*, notée \mathcal{C}^ω . Cette notation \mathcal{C}^ω est classiquement utilisée pour les anneaux de fonctions *analytiques réelles*, elle prolonge la hiérarchie des fonctions continues puis différentiables :

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{C}^2 \supset \dots \supset \mathcal{C}^k \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty \supset \mathcal{C}^\omega,$$

la lettre ω désignant, dans la théorie cantorienne des ensembles, le premier ordinal infini.

Théorème 2.1. *Toute fonction harmonique $u \in \text{Harm}(\Omega)$ est en fait \mathcal{C}^∞ dans Ω , et même analytique réelle, au sens où elle est localement développable, au voisinage de tout point $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$, en série de Taylor :*

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} (x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{(y - y_0)^l}{l!}$$

convergeant dans tout disque ouvert $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$ de rayon $r \leq \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$.

Démonstration. Quand on prend la partie réelle $u = \text{Re } f$ d'une fonction holomorphe, on conserve la lissité, et même la propriété d'être développable en série entière convergente.

Il découle d'ailleurs de ce qu'on sait pour les fonctions holomorphes que la convergence de la série de Taylor de u est alors valide dans le disque de rayon maximal possible :

$$r_{\max} := \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

tel que le disque reste entièrement contenu dans Ω . □

Phénomène majeur, les fonctions harmoniques jouissent d'une remarquable *propriété d'équilibre*.

Théorème 2.2. [de la Moyenne] *Étant donné une fonction harmonique $u \in \text{Harm}(\Omega)$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon :*

$$r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

la valeur de u en z_0 est égale à la moyenne intégrale de ses valeurs sur le cercle de rayon r :

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta}_{\text{moyenne sur le cercle } S_r(z_0) = \partial\mathbb{D}_r(z_0)} . \quad \square$$

Démonstration. Rappelons tout d'abord la formule de la moyenne pour une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Soit $z_0 \in \Omega$ et soit un rayon :

$$r < \delta := \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Pour tout $z \in \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$, on a le développement normalement convergent :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Assertion 2.3. *La formule de la moyenne est satisfaite par la fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$:*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Preuve. En effet, en appliquant le développement en série entière qui précède à des points $z = z_0 + r e^{i\theta}$ avec $0 \leq \theta < 2\pi$, la convergence uniforme (car normale) permet d'invertir sommation et intégration :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} r^k e^{ik\theta} \right) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{1}{2\pi} r^k \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = f(z_0),$$

et le résultat suit, car dans cette dernière somme, tous les termes pour $k \geq 1$ s'évanouissent, en vertu de $\left[\frac{e^{ik\theta}}{ik} \right]_0^{2\pi} = 0$. \square

Étant donné une fonction $u \in \text{Harm}(\Omega)$, le Théorème 1.4 a montré que sa restriction au disque de rayon maximal $\mathbb{D}_\delta(z_0) \subset \Omega$ est la partie réelle $\text{Re } f = u$ d'une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\delta(z_0))$. Mais alors le résultat voulu :

$$u(z_0) = \text{Re } f(z_0) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

découle (trop ?) simplement de l'Assertion 2.3 qui vient d'être vue ! \square

Théorème 2.4. [de la Moyenne bis] *Sous les mêmes hypothèses :*

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) s ds d\theta}_{\text{moyenne sur le disque } \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)}.$$

Démonstration. Il suffit d'intégrer $\int_0^r s ds (\cdot)$ la formule de la moyenne qui précède sur des cercles de rayons $0 \leq s \leq r$:

$$\int_0^r s ds u(z_0) = \int_0^r s ds \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta,$$

et de réorganiser (visuellement) cette formule. \square

Ce qui est encore plus remarquable, c'est que la réciproque est vraie, et elle sera établie ultérieurement dans un contexte plus général.

Théorème 2.5. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) u est harmonique ;

(ii) u est égale à sa valeur moyenne sur tout cercle qui est contenu dans Ω et dont le disque intérieur est aussi contenu dans Ω ;

(iii) u est égale à sa valeur moyenne sur tout disque fermé contenu dans Ω . \square

Rappelons que dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction holomorphe valant 0 sur une suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ayant un point d'accumulation $z_{\infty} \in \Omega$ est alors identiquement nulle. L'exemple de la fonction harmonique non nulle $2 \operatorname{Re} z = z + \bar{z}$ sur \mathbb{C} qui vaut 0 sur l'axe des y montre qu'une hypothèse plus forte est nécessaire.

Théorème 2.6. [d'unicité] Si deux fonctions harmoniques $u_1, u_2 \in \operatorname{Harm}(\Omega)$ coïncident sur un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'intérieur $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$ non vide :

$$u_1|_E = u_2|_E,$$

alors elles sont partout égales $u_1 = u_2$. \square

Démonstration. La fonction harmonique $u := u_1 - u_2$ satisfait $u|_E \equiv 0$. Introduisons l'ensemble :

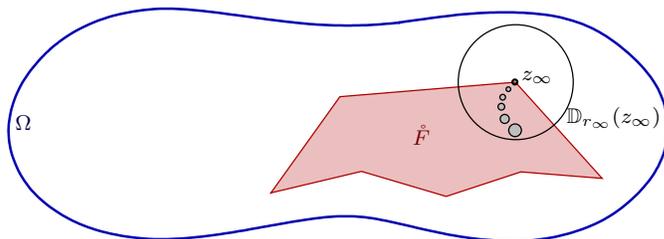
$$F := \{z \in \Omega : u(z) = 0\},$$

fermé car $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$ est \mathcal{C}^2 , voire \mathcal{C}^{∞} , voire \mathcal{C}^{ω} , dont l'intérieur est non vide :

$$\overset{\circ}{F} \supset \overset{\circ}{E} \neq \emptyset.$$

Assertion 2.7. Cet intérieur $\overset{\circ}{F} \subset \Omega$ est un sous-ensemble fermé de Ω .

Preuve. En effet, soit un point $z_{\infty} \in \Omega$ appartenant à la fermeture F de $\overset{\circ}{F}$ dans Ω , ce qui veut dire qu'il existe une suite $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ d'éléments $z_n \in \overset{\circ}{F}$ telle que $z_n \rightarrow z_{\infty}$.



Soit un disque ouvert $\mathbb{D}_{r_{\infty}}(z_{\infty}) \subset \Omega$ de rayon $r_{\infty} < \operatorname{dist}(z_{\infty}, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Il s'agit de montrer que $z_{\infty} \in \overset{\circ}{F}$, c'est-à-dire que u est nulle dans un voisinage de z_{∞} , et nous allons faire voir précisément que $u \equiv 0$ dans $\mathbb{D}_{r_{\infty}}(z_{\infty})$.

Quitte à supprimer des termes, on peut supposer que tous les z_n appartiennent à $\mathbb{D}_{r_{\infty}}(z_{\infty})$. Soit alors une suite $(r_n)_{n=0}^{\infty}$ de rayons $r_n > 0$ assez petits pour que :

$$\mathbb{D}_{r_n}(z_n) \subset \overset{\circ}{F} \cap \mathbb{D}_{r_{\infty}}(z_{\infty}) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Soit $v \in \operatorname{Harm}(\mathbb{D}_{r_{\infty}}(z_{\infty}))$ une conjuguée harmonique de u , construite au Théorème 1.4. La fonction $u + iv$ étant holomorphe, elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann qui, en restriction à cette petite suite de disques :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{sur chaque } \mathbb{D}_{r_n}(z_n)),$$

montrent que v est constante sur chaque $\mathbb{D}_{r_n}(z_n)$. Comme $u = 0$ aussi, la fonction holomorphe $u + iv$ est alors constante dans les $\mathbb{D}_{r_n}(z_n)$, puis par le théorème d'unicité pour

les fonctions holomorphes, sa constance se propage dans le « grand » disque $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$ — observons d'ailleurs qu'un seul disque $\mathbb{D}_{r_n}(z_n) \subset \mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$ suffirait pour cela. Enfin, $u = \operatorname{Re}(u + iv)$ est constante dans $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$, et cette constante ne peut être que 0. \square

Comme le sous-ensemble non vide $\overset{\circ}{F} \subset \Omega$ ouvert par définition est aussi fermé dans l'ouvert connexe Ω , on a nécessairement $\overset{\circ}{F} = F = \Omega$, d'où $u_1 = u_2$ partout. \square

Toutefois, deux analogies fortes et utiles avec les fonctions holomorphes existent.

Théorème 2.8. [Principe du maximum] *Si une fonction harmonique $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$ atteint son maximum global en un point intérieur $z_0 \in \Omega$:*

$$u(z_0) = \max_{z \in \Omega} u(z),$$

alors elle est constante. \square

Le résultat vaut aussi pour le minimum, et c'est un corollaire direct en considérant la fonction opposée $-u$ qui est aussi harmonique.

Démonstration. Soit un disque ouvert $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$ avec $r > 0$. Le Théorème 1.4 fournit une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$ telle que $\operatorname{Re} f = u$.

La fonction exponentiée e^f est holomorphe, et elle possède un module $|e^f| = e^u$ qui atteint alors son maximum en z_0 . D'après le principe du maximum du module pour les fonctions holomorphes, f est constante, donc $u|_{\mathbb{D}_r(z_0)}$ est constante, et enfin u est constante partout dans Ω grâce au Théorème 2.6 d'unicité. \square

Théorème 2.9. [de Liouville] *Si une fonction harmonique $u \in \operatorname{Harm}(\mathbb{C})$ définie sur \mathbb{C} tout entier est bornée supérieurement :*

$$u \leq M < \infty,$$

alors elle est constante.

En considérant $-u$, l'énoncé avec une hypothèse de bornitude inférieure est tout aussi vrai.

Démonstration. Quitte à remplacer u par $-u + M + 1$, on peut supposer que $u > 0$. Puisque \mathbb{C} est simplement connexe, le Théorème 1.4 fournit une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ définie sur \mathbb{C} tout entier telle que $u = \operatorname{Re} f$.

La transformation homographique :

$$h: z \mapsto \frac{z-1}{z+1} =: w$$

envoie le demi-plan $\{\operatorname{Re} z > 0\}$ biholomorphiquement sur le disque unité $\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$.

Alors quand on compose $h \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$, on obtient une fonction holomorphe sur \mathbb{C} bornée, laquelle est constante grâce au Théorème de Liouville classique, donc f est constante, donc u est constante. \square

Par ailleurs, la notion de fonction harmonique est invariante par changement de coordonnée holomorphe.

Théorème 2.10. [Invariance conforme] *Soit une fonction harmonique $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$ et soit un biholomorphisme :*

$$h: \Omega' \xrightarrow{\sim} \Omega$$

de Ω sur un autre ouvert $\Omega' \subset \mathbb{C}'$. Alors la fonction composée $u \circ h$:

$$\Omega' \xrightarrow{h} \Omega \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

est elle aussi harmonique dans Ω' .

Démonstration. Au voisinage d'un point $z \in \Omega$, soit une fonction holomorphe f telle que $u = \operatorname{Re} f$. Alors $u \circ h = \operatorname{Re} f \circ h$ est partie réelle d'une fonction holomorphe au voisinage du point $z' := h^{-1}(z)$, donc $u \circ h$ est harmonique. \square

3. Problème de Dirichlet sur un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$

Les fonctions harmoniques ont de remarquables propriétés d'équilibre qui leur confèrent une grande flexibilité pour résoudre le problème dit de Dirichlet dans des domaines à bord suffisamment 'régulier' en un certain sens.

Définition 3.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine à bord $\partial\Omega$ quelconque. On dit que le *problème de Dirichlet* est résoluble pour $(\Omega, \partial\Omega)$ si, pour toute fonction continue à valeurs réelles définie sur le bord :

$$\phi: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

il existe une fonction :

$$h \in \operatorname{Harm}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega \cup \partial\Omega)$$

harmonique à l'intérieur et continue sur la fermeture telle que :

$$h|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Dans cette section, nous allons nous contenter de traiter le cas où $\Omega = \Delta$ est un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, l'existence dans le cas général pouvant être délicate (théorie de Perron ; fonctions-barrière). En tout cas, l'unicité de la solution pour un domaine quelconque est facile.

Lemme 3.2. *Il existe au plus une solution au problème de Dirichlet pour $(\Omega, \partial\Omega)$.*

Démonstration. En effet, soient h_1 et h_2 deux solutions. Alors $h_1 - h_2$ est harmonique dans Ω , continue sur $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, et égale à 0 sur $\partial\Omega$. En appliquant le principe du maximum Théorème 2.8 à $h_1 - h_2$ puis à $h_2 - h_1$, on se convainc aisément que $h_1 - h_2 \equiv 0$. \square

Soit comme précédemment $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$ le disque unité dans \mathbb{C} de bord $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$ le cercle unité.

Définition 3.3. Le *noyau de Poisson* est la fonction :

$$P: \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left(\frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (|z| < 1, |\zeta| = 1).$$

L'*intégrale de Poisson* ou *transformée de Poisson* d'une fonction réelle Lebesgue-intégrable sur le cercle :

$$\phi \in L^1(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$$

est la fonction définie pour $|z| < 1$ par :

$$(3.4) \quad (P_{\mathbb{D}}\phi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) \phi(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \phi(e^{i\theta}) d\theta.$$

Plus généralement, si $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$ est un disque ouvert de \mathbb{C} centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$, le noyau de Poisson associé est une renormalisation de celui du disque unité :

$$P\left(\frac{z-z_0}{r}, e^{i\theta}\right),$$

et l'intégrale de Poisson associée est alors définie similairement pour $z \in \Delta$ par :

$$(P_\Delta \phi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-z_0}{r}, e^{i\theta}\right) \phi(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Nous devons parfois examiner cette formule en détail, et en un point quelconque :

$$z = z_0 + s e^{it} \in \Delta,$$

avec $0 \leq s < r$, elle s'écrit explicitement (exercice) :

$$(3.5) \quad P_\Delta(z_0 + s e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} \phi(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Maintenant, la magie harmonique peut commencer à se dévoiler.

Proposition 3.6. *Pour tout disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, la transformée de Poisson d'une fonction $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$ est une fonction harmonique de $z \in \Delta$.*

Démonstration. Quitte à effectuer un changement affine de variables, on peut supposer (exercice) que $z_0 = 0$ et que $r = 1$, à savoir que $\Delta = \mathbb{D}$. Alors la formule (3.4) astucieusement ré-écrite :

$$(P_{\mathbb{D}}\phi)(z) = \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \phi(e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

montre instantanément que la fonction $z \mapsto P_{\mathbb{D}}\phi(z)$, partie réelle d'une intégrale qui dépend holomorphiquement de $z \in \mathbb{D}$, est harmonique ! \square

Comme on l'aura deviné, c'est la transformée de Poisson qui résout le problème de Dirichlet sur un disque.

Théorème 3.7. *Pour tout disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$, étant donné une fonction intégrable $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$ qui est continue en un point $\zeta_0 \in \partial\Delta$, on a :*

$$\phi(\zeta_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in \Delta}} (P_{\mathbb{D}}\phi)(z).$$

En particulier, si $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$ est partout continue, la fonction :

$$h(z) := \begin{cases} (P_{\mathbb{D}}\phi)(z) & \text{lorsque } z \in \Delta, \\ \phi(z) & \text{lorsque } z \in \partial\Delta, \end{cases}$$

résout le problème de Dirichlet pour $(\Delta, \partial\Delta)$.

Démonstration. À nouveau, on peut supposer que $\Delta = \mathbb{D}$. Tout repose sur la proposition fondamentale suivante, qui exprime que le noyau de Poisson est une approximation de l'unité.

Proposition 3.8. *Le noyau de Poisson $P(z, \zeta)$ sur $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$ jouit des trois propriétés suivantes :*

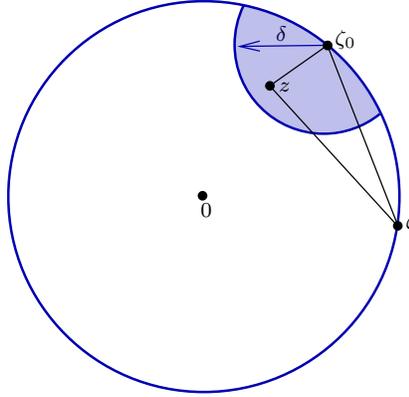
(i) *pour tout $|z| < 1$, fixé $P(z, e^{i\theta}) > 0$ sur $\partial\mathbb{D}$;*

(ii) pour tout $|z| < 1$ fixé :

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta;$$

(iii) en tout point $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, quel que soit $\delta > 0$ arbitrairement petit donné à l'avance :

$$0 = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \left(\sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) \right).$$



Autrement dit, lorsque z tend vers un point du bord $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$, la propriété (iii) exprime que toute la « masse » constante égale à 1 par (i) du noyau de Poisson se concentre autour et très proche de ζ_0 : en dehors d'une zone de sécurité de longueur $\delta > 0$, la norme supérieure de P s'écrase vers zéro.

Démonstration. Il est clair que $P(z, \zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} > 0$, ce qui donne (i).

Pour ce qui est de (ii), exprimons l'intégrale de $P(z, e^{i\theta})$ comme intégrale d'une fonction holomorphe à laquelle le Théorème des résidus s'applique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \left(\frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} (2 - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Enfin, établissons (iii). Comme sur la figure, soit $z \in \mathbb{D}$ avec $|z - \zeta_0| < \delta$. Soit aussi $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ avec $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta$. De l'inégalité du triangle :

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\geq |\zeta - \zeta_0| - |z - \zeta_0| \\ &\geq \delta - |z - \zeta_0|, \end{aligned}$$

nous déduisons :

$$\sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) = \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \leq \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} \frac{1 - |z|^2}{(\delta - |z - \zeta_0|)^2}$$

et la limite du majorant à droite, quand $z \rightarrow \zeta_0$ d'où $1 - |z|^2 \rightarrow 0$, est égale à 0. \square

De retour à la démonstration du théorème, en notant $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$, on peut écrire grâce à **(i)** et **(ii)** :

$$\begin{aligned} |P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0)| &= |P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0) \cdot 1| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) (\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta. \end{aligned}$$

Soit maintenant un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par continuité de ϕ en ζ_0 , il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$|\zeta - \zeta_0| \leq \delta \implies |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| \leq \varepsilon.$$

Si donc nous découpons l'intégrale majorante en les deux morceaux :

$$\int_0^{2\pi} = \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} + \int_{|\zeta - \zeta_0| > \delta},$$

le premier morceau est petit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} P(z, e^{i\theta}) \cdot \varepsilon d\theta \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Quant au second morceau, afin d'assurer qu'il soit lui aussi petit, grâce à **(iii)**, il existe aussi un $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$|z - \zeta_0| \leq \delta' \implies \sup_{|\zeta - \zeta_0|} P(z, \zeta) \leq \varepsilon.$$

Alors pour $|z - \zeta_0| < \delta'$, on peut effectivement le majorer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| > \delta} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta \\ &\leq \varepsilon \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})| d\theta + |\phi(\zeta_0)| \right) \\ &= \varepsilon (\|\phi\|_{L^1(\partial\mathbb{D})} + |\phi(\zeta_0)|) \end{aligned}$$

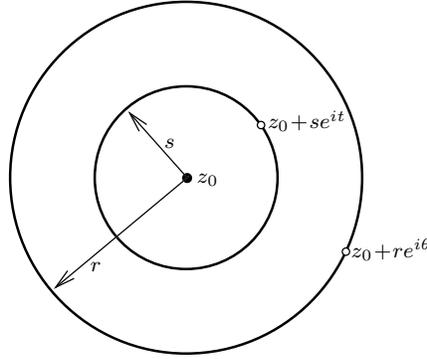
par une quantité qui tend vers 0 avec ε .

Au final, les majorants obtenus pour ces deux morceaux :

$$|P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon (\|\phi\|_{L^1(\partial\mathbb{D})} + |\phi(\zeta_0)|),$$

restent petits en s'additionnant, ce qui conclut. \square

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons un analogue de la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions harmoniques.



Corollaire 3.9. [Formule intégrale de Poisson] Si une fonction h est harmonique dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$, avec $z_0 \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, alors pour tout $0 \leq s < r$ et tout $0 \leq t < 2\pi$, on a :

$$h(z_0 + s e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} h(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. Considérons le problème de Dirichlet sur le disque $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$ avec la valeur au bord $h|_{\partial\Delta}$. D'après ce qui précède, h elle-même et aussi la transformée de Poisson $P_\Delta(h|_{\partial\Delta})$ sont toutes deux solutions. Grâce au Lemme 3.2 d'unicité, $h = P_\Delta h$ sur Δ , ce qui est la formule écrite en des points $z = z_0 + s e^{it} \in \Delta$. \square

Faisons remarquer que cette formule généralise la formule de la moyenne, qu'on retrouve en posant $r = 0$. Ainsi, les valeurs de h en un point $z \in \Delta$ quelconque peuvent être « capturées » à partir de la seule connaissance de ses valeurs sur le bord $\partial\Delta$. L'Exercice 8 produit encore une autre formule pour la fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Delta)$ essentiellement unique satisfaisant $h = \operatorname{Re} f$.

4. Caractérisation des fonctions harmoniques et applications

Dans la Définition 1.1 des fonctions harmoniques, on a supposé dès le départ que $u \in \mathcal{C}^2$ est suffisamment lisse pour pouvoir lui appliquer l'opérateur de Laplace, et on a vu qu'en fait, la fonction est alors beaucoup plus régulière que \mathcal{C}^2 , à savoir \mathcal{C}^∞ , voire \mathcal{C}^ω . Depuis le XIX^{ème} siècle, ce phénomène fondamental a été considérablement exploré et généralisé, et dans la théorie des fonctions harmoniques, on a par exemple un énoncé célèbre qui, partant d'une fonction *a priori* très irrégulière comme peuvent l'être les fonctions Lebesgue-intégrables, déduit l'harmonicité à partir d'une propriété d'équilibre.

Théorème 4.1. Soit une fonction localement intégrable :

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Si, en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon :

$$r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega),$$

avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, la fonction u satisfait la propriété d'équilibre :

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}_r(z_0)} u(\xi, \eta) d\xi d\eta}_{\text{moyenne bidimensionnelle de } u \text{ sur le disque } \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)},$$

alors en fait, u est de classe \mathcal{C}^2 , et elle est harmonique dans Ω . \square

Un théorème analogue existe en supposant que pour *presque* tout rayon $r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, la fonction u est égale à sa valeur moyenne sur le cercle de rayon r :

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Ces résultats seront d'ailleurs conséquences d'énoncés plus généraux dans la théorie des fonctions *sous-harmoniques*, et dont les démonstrations seront présentées et étudiées en détail ultérieurement.

Toutefois, au niveau que nous venons d'atteindre, nous pouvons énoncer et démontrer une caractérisation des fonctions harmoniques *continues*.

Théorème 4.2. [Caractérisation de l'harmonicité par la propriété de la moyenne] *Soit $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Si h satisfait la propriété locale de la moyenne dans Ω , à savoir si, pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que pour tout $0 \leq s \leq r$:*

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta$$

alors h est harmonique dans Ω .

En particulier, la propriété locale de la moyenne possède un effet suprenant de rendre les fonctions continues plus régulières, \mathcal{C}^2 , \mathcal{C}^∞ , \mathcal{C}^ω . De plus, un aspect important très utile pour les applications est que cette propriété n'a à être vérifiée que sur des petits cercles centrés en z_0 .

Démonstration. Il suffit de faire voir que h est harmonique dans tout disque fermé $\bar{\Delta} \subset \Omega$. Fixons un tel disque, et définissons une fonction $k: \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$ au moyen de l'opérateur de Poisson P_Δ par :

$$k := \begin{cases} h - P_\Delta(h|_{\partial\Delta}) & \text{sur } \Delta, \\ 0 & \text{sur } \partial\Delta. \end{cases}$$

Cette fonction k est continue sur $\bar{\Delta}$, et puisque h et la fonction harmonique $P_\Delta(h|_{\partial\Delta})$ satisfont la propriété locale de la moyenne dans Δ , il en va de même de k .

Comme $\bar{\Delta}$ est compact, k y atteint une certaine valeur maximale :

$$\max_{\bar{\Delta}} k =: M \geq 0.$$

Lemme 4.3. *Cette valeur vaut $M = 0$.*

Démonstration. Décomposons Δ en deux sous-ensembles :

$$E := \{z \in \Delta: k(z) < M\} \quad \text{et} \quad F := \{z \in \Delta: k(z) = M\}.$$

Clairement, E est ouvert puisque k est continue.

Assertion 4.4. *L'ensemble F est lui aussi ouvert.*

Preuve. En un point $z \in F \subset \Delta$, on a $k(z) = M$. La propriété de la moyenne sur des petits cercles centrés en z contenus dans Δ , écrite sous la forme :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{M - k(z + s e^{i\theta})}_{\text{toujours } \geq 0 \text{ car } M = \max k} \right] d\theta,$$

force alors toutes les valeurs $k(z + s e^{i\theta}) = M$ à être égales à M , sinon l'intégrale serait > 0 . Ainsi, $k \equiv M$ dans un voisinage ouvert de z . \square

Par connexité de l'union disjointe $\Delta = E \cup F$, on a :

- soit $\Delta = E$, i.e. $k < M$ partout sur Δ , auquel cas :

$$M = \max_{\Delta \cup \partial\Delta} k = \max_{\partial\Delta} k = 0;$$

- soit $\Delta = F$, i.e. $k \equiv M$ partout sur Δ , et par continuité de k jusqu'à $\partial\Delta$, on obtient à nouveau :

$$M = 0,$$

ce qui termine le lemme. \square

En procédant de manière analogue, on montre que :

$$m := \min_{\Delta} k \leq 0$$

vaut aussi $m = 0$, donc $k = 0$!

Ainsi, la fonction $h = P_{\Delta}(h|_{\partial\Delta})$ qui coïncide avec la transformée de Poisson de sa restriction à $\partial\Delta$ est bel et bien harmonique dans Δ ! \square

Comme première application, nous déduisons un analogue du Théorème de Cauchy d'après lequel les limites uniformes de fonctions holomorphes sont encore holomorphes.

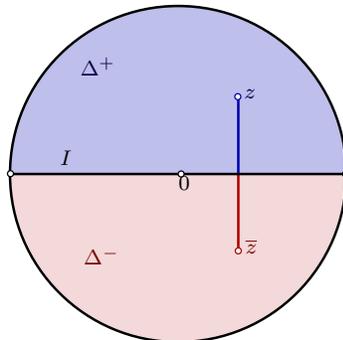
Corollaire 4.5. *Si $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite de fonctions harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts $K \subset \Omega$ vers une certaine fonction continue h , alors h est harmonique dans Ω .*

Démonstration. Par convergence uniforme, les formules de la moyenne passent à la limite :

$$\begin{aligned} h(z_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

et grâce au théorème qui précède, h est effectivement harmonique. \square

Comme deuxième application, nous énonçons un principe de réflexion pour les fonctions harmoniques qui est analogue à celui de Schwarz pour les fonctions holomorphes.



Théorème 4.6. [Principe de réflexion] Soit $\Delta := \mathbb{D}_R(0)$ un disque de centre $0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$, et soient ses parties supérieure et inférieure :

$$\Delta^\pm := \{z \in \Delta : \pm \operatorname{Im} z > 0\},$$

en contact le long du segment réel :

$$I := \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Si une fonction harmonique dans Δ^+ se prolonge continûment jusqu'à I et s'y annule :

$$h^+ \in \operatorname{Harm}(\Delta^+) \cap \mathcal{C}^0(\Delta^+ \cap I) \quad \text{avec} \quad h^+|_I \equiv 0,$$

alors elle se prolonge comme fonction harmonique au disque Δ tout entier par :

$$h(z) := -h^+(\bar{z}) \quad (\forall z \in \Delta^-).$$

Démonstration. Soit $f^+ \in \mathcal{O}(\Delta^+)$ une fonction holomorphe telle que $h^+ = \operatorname{Re} f^+$. Alors la fonction :

$$-\operatorname{Re} f^+(\bar{z}),$$

définie pour $z \in \Delta^-$ est partie réelle d'une fonction antiholomorphe, donc harmonique dans Δ^- .

A-t-on encore harmonicité dans des voisinages de points $x_0 \in I$?

En tout cas, on a manifestement continuité sur Δ tout entier de la fonction globale :

$$h(z) := \begin{cases} h^+(z) & \text{lorsque } z \in \Delta^+, \\ 0 & \text{lorsque } z \in I, \\ -h^+(\bar{z}) & \text{lorsque } z \in \Delta^-. \end{cases}$$

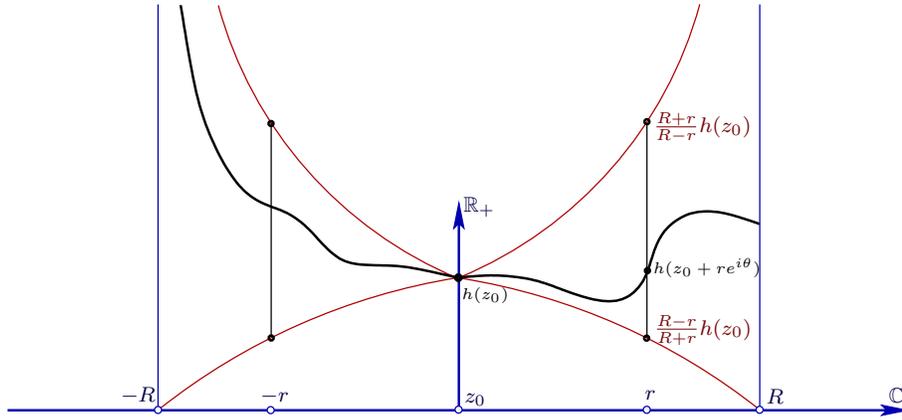
Grâce au Théorème 4.2, il suffit pour conclure de vérifier pour $0 \leq s < \operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbb{D})$ que :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi h(x_0) \stackrel{?}{=} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + s e^{i\theta}) d\theta \\ &\stackrel{?}{=} \int_{-\pi}^0 -h^+(x_0 + s e^{-i\theta}) d\theta + \int_0^{\pi} h^+(x_0 + s e^{i\theta}) d\theta \stackrel{\text{OUI}}{=} 0, \end{aligned}$$

mais cela avait évidemment été prévu à l'avance ! □

5. Fonctions harmoniques positives : théorèmes de Harnack

Dans cette section, nous allons exploiter la formule intégrale de Poisson pour en déduire des inégalités sur les fonctions harmoniques à valeurs *positives*, surprenantes car elles permettent d'encadrer leurs graphes par valeurs inférieures et supérieures.



Théorème 5.1. [Inégalités de Harnack] Si h est une fonction harmonique définie sur un disque ouvert $\mathbb{D}_R(z_0)$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $R > 0$ qui est positive :

$$h(z) \geq 0 \quad (\forall z \in \Delta),$$

alors pour tout rayon inférieur $0 \leq r < R$ et tout $0 \leq \theta < 2\pi$:

$$\frac{R-r}{R+r} h(z_0) \leq h(z_0 + r e^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} h(z_0).$$

Ces inégalités expriment un contrôle très contraignant et très utile des valeurs de h lorsqu'on s'éloigne d'un point central : la fonction $r \mapsto \frac{R+r}{R-r}$ et son inverse encadrent le graphe de h par deux hyperboloïdes.

Pour mieux mentaliser le diagramme ci-dessus, il faudrait plutôt s'imaginer que la base est réellement un disque contenu dans le plan 2-dimensionnel \mathbb{C} (non un segment), et que le graphe de h est une nappe ondulée, s'élevant éventuellement vers l'infini lorsque $r \rightarrow R$.

Démonstration. Choisissons un rayon intermédiaire $r < s < R$. La formule intégrale de Poisson du Corollaire 3.9 appliquée ici à la fonction h qui est harmonique dans un voisinage de $\mathbb{D}_s(z_0)$ s'écrit :

$$h(z_0 + r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr \cos(t - \theta) + r^2} h(z_0 + s e^{it}) dt.$$

Or pour tout $t - \theta \in \mathbb{R}$ on a :

$$s^2 - 2sr \cos(t - \theta) + r^2 \geq s^2 - 2sr + r^2 = (s - r)^2,$$

donc comme h est positive on peut majorer l'intégrande :

$$\begin{aligned} h(z_0 + r e^{i\theta}) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{(s - r)^2} h(z_0 + s e^{it}) dt \\ &\leq \frac{s + r}{s - r} h(z_0), \end{aligned}$$

et appliquer l'égalité de la moyenne. En faisant $s \rightarrow R$, on obtient la deuxième inégalité, tandis que la première se démontre d'une manière fort similaire (exercice). \square

L'application la plus fréquente concerne les théorèmes de convergence, dont de nombreux avatars existeront dans les chapitres suivant consacrés aux fonctions sous-harmoniques et pluri-sous-harmoniques. Bien méditer le principe dans le cas standard des fonction harmoniques anticipera la joie de comprendre en profondeur de tout ce qui suivra.

Théorème 5.2. [de convergence de Harnack] Si $(h_n)_{n=1}^\infty$ est une suite croissante de fonctions harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \cdots \leq h_n \leq h_{n+1} \cdots ,$$

alors :

- ou bien $h_n \rightarrow \infty$ uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$;
- ou bien h_n converge vers une certaine fonction harmonique finie $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$, uniformément sur tout compact $K \subset \Omega$.

Démonstration. En remplaçant $h_n \mapsto h_n - h_1$, on se ramène à une suite croissante de fonctions harmoniques positives.

Assertion 5.3. S'il existe un point $z_0 \in \Omega$ en lequel $h_n(z_0) \rightarrow \infty$, alors $h_n(z) \rightarrow \infty$ en tout point $z \in \Omega$.

Preuve. En effet, l'ensemble incriminé :

$$E_\infty := \{z \in \Omega : h_n(z) \rightarrow \infty\}$$

est ouvert grâce à l'inégalité inférieure de Harnack, parce que si $z_0 \in E_\infty$, si $\mathbb{D}_R(z_0) \subset \Omega$ avec $R > 0$, si $z \in \mathbb{D}_R(z_0)$, alors :

$$\underbrace{\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} h_n(z_0)}_{\rightarrow \infty} \leq h_n(z).$$

Ensuite, l'inégalité supérieure de Harnack appliquée d'une manière fort similaire montre (exercice) que son complémentaire $\Omega \setminus E_\infty$ est lui aussi ouvert. Par connexité et non-vacuité, $E_\infty = \Omega$. \square

La circonstance significative est donc celle où la suite croissante $(h_n)_{n=1}^\infty$ prend des valeurs finies en *tous* les points $z \in \Omega$.

Qui plus est, l'inégalité de Harnack supérieure — laquelle n'a pas encore dévoilé tout son secret ! — montre, lorsqu'on l'applique aux fonctions harmoniques positives $h_n - h_m$ pour $1 \ll m \leq n \rightarrow \infty$:

$$(h_n - h_m)(z) \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} (h_n - h_m)(z_0),$$

que la convergence est *uniforme* sur tout sous-disque $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \mathbb{D}_R(z_0)$ de rayon $0 < r < R$. Grâce au Corollaire 4.5, la fonction-limite $h := \lim h_n$ est alors harmonique dans Ω . \square

Toute la force de l'inégalité supérieure de Harnack qui vient de garantir une convergence uniforme était d'ailleurs implicitement devinable dans la figure d'encadrements par hyperboles.

Corollaire 5.4. [de Harnack] Soit une suite $(u_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions harmoniques $u_k \in \text{Harm}(\Omega)$ qui est décroissante :

$$\cdots \leq u_{k+1} \leq u_k \leq \cdots \leq u_1.$$

Alors la limite :

$$u(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z)$$

ou bien est $\equiv -\infty$, ou bien constitue une fonction harmonique (finie) dans Ω .

Démonstration. Soit $\omega \subset \Omega$ un sous-ouvert de fermeture compacte $\bar{\omega} \subset \Omega$. Après soustraction d'une constante :

$$u_1 \longmapsto u_1 - \max_{\bar{\omega}} u_1,$$

on peut supposer que $u_1 \leq 0$. Le théorème précédent s'applique alors à la suite croissante $(-u_n|_{\omega})_{n=1}^{\infty}$ de fonctions harmoniques positives sur ω . \square

6. Pseudodistance de Harnack

Soit maintenant $\mathbb{C}_{\infty} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ le plan complexe auquel on ajoute un point à l'infini, muni de la topologie pour laquelle une base de voisinages de $\{\infty\}$ est :

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \quad (R > 0).$$

Il s'agit de la sphère de Riemann, biholomorphe à l'espace projectif complexe de dimension 1 :

$$P^1(\mathbb{C}) = \{[Z_0 : Z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus [0 : 0]\} / \left([Z_0 : Z_1] \sim [\lambda Z_0 : \lambda Z_1] \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \right).$$

L'intérieur, le bord, la fermeture d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$ seront pris relativement à cette topologie, équivalente à celle définie par la *distance de corde* sur la sphère :

$$\text{dist}(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{lorsque } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{lorsque } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty. \end{cases}$$

Autour de $\{\infty\}$, la topologie est la même qu'autour de $0 \in \mathbb{C}$ en remplaçant z par $\frac{1}{z}$.

L'inégalité de Harnack sur des disques implique un résultat analogue beaucoup plus général.

Proposition 6.1. *Étant donné un domaine quelconque $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$ et deux points $z_1, z_2 \in \Omega$, il existe un nombre :*

$$\tau = \tau(\Omega, z_1, z_2)$$

tel que pour toute fonction harmonique positive $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$:

$$\tau^{-1}h(z_2) \leq h(z_1) \leq \tau h(z_2).$$

Démonstration. Écrivons $z_1 \sim z_2$ lorsqu'il existe un nombre $\tau \geq 1$ satisfaisant cela. On vérifie qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Ensuite, les inégalités de Harnack montrent (exercice) que les classes d'équivalence sont des sous-ensembles *ouverts* de Ω . Comme Ω est connexe, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence. \square

Définition 6.2. La *distorsion de Harnack* entre deux points z_1, z_2 d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$ est la constante *minimale* :

$$\tau_{\Omega}(z_1, z_2) \geq 1$$

satisfaisant pour *toute* fonction harmonique positive $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$:

$$\tau_{\Omega}(z_1, z_2)^{-1} h(z_2) \leq h(z_1) \leq \tau_{\Omega}(z_1, z_2) h(z_2).$$

Bien entendu, ces distorsions peuvent être difficiles à calculer explicitement pour des domaines quelconques, mais pour un disque, ce qui précède avait déjà implicitement fait le travail.

Théorème 6.3. Sur $\Delta = \mathbb{D}_R(z_0) \subset \mathbb{C}$, on a :

$$\tau_\Delta(z_1, z_0) = \frac{R + |z_1 - z_0|}{R - |z_1 - z_0|} \quad (\forall z_1 \in \Delta).$$

Démonstration. Les inégalités de Harnack offrent au moins une constante supérieure à la minimale possible :

$$\tau_\Delta(z_1, z_0) \leq \frac{R + |z_1 - z_0|}{R - |z_1 - z_0|}.$$

Pour faire voir qu'il y a égalité, avec $z_0 \neq z_1 \in \Delta$ et $r_1 := |z_1 - z_0|$, en écrivant $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, et en considérant la fonction harmonique positive :

$$h(z) := \operatorname{Re} \left(\frac{R e^{i\theta_1} + (z - z_0)}{R e^{i\theta_1} - (z - z_0)} \right)$$

qui satisfait $h(z_0) = 1$, l'inégalité de Harnack supérieure devient égalité en $z = z_1$:

$$h(z_1) = \frac{R e^{i\theta_1} + r_1 e^{i\theta_1}}{R e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{R + r_1}{R - r_1} \cdot h(z_0)$$

ce qui montre que $\tau_\Delta(z_1, z_0)$ a bien la valeur annoncée. \square

Fill ??

7. Exercices

Exercice 1. Montrer que la fonction $h(x + iy) := e^x (x \cos y - y \sin y)$ est harmonique sur \mathbb{C} , et trouver une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ telle que $h = \operatorname{Re} f$.

Exercice 2. Soit h une fonction harmonique dans l'anneau $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$, avec $0 < r_1 < r_2 < \infty$. En utilisant le fait que $2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = h_x - i h_y$ est holomorphe, montrer qu'il existe des constantes uniques $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ et b avec $a_0, b \in \mathbb{R}$ telles que :

$$h(z) = \operatorname{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n + b \log |z| \quad (r_1 < |z| < r_2).$$

Exercice 3. Soient h et k deux fonctions qui sont harmoniques et non constantes dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que hk est harmonique si et seulement si il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $h + i c k$ est holomorphe. Indication: Pour le 'seulement si', considérer $\frac{f}{g}$, où $f := h_x - i h_y$ et $g := k_x - i k_y$.

Exercice 4. En utilisant la propriété qu'ont les fonctions harmoniques d'être analytiques réelles, trouver une autre démonstration du Théorème 2.6 d'unicité.

Exercice 5. Soit \mathbb{D} le disque unité et soit $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction $\phi(\zeta) := \bar{\zeta}$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe continue jusqu'au bord $f \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^0(\Delta \cup \partial\Delta)$ telle que $f|_{\partial\mathbb{D}} = \phi$. Interpréter cela vis-à-vis du problème de Dirichlet.

Exercice 6. (a) Montrer que le noyau de Poisson pour $z = r e^{it} \in \mathbb{D}$ et $\zeta = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ est donné par :

$$P(r e^{it}, e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}.$$

Utiliser cette formule pour donner une autre preuve de la Proposition 3.8 (i).

(b) Montrer que si $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction Lebesgue-intégrable, alors :

$$(P_{\mathbb{D}}\phi)(r e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{int},$$

où les a_n sont certains coefficients dont on donnera une interprétation.

(c) On suppose maintenant que $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$ est continue. Montrer que $P_{\mathbb{D}}\phi(r e^{it})$ converge uniformément vers ϕ sur $\partial\mathbb{D}$ lorsque $r \nearrow 1$.

(d) Montrer que toute fonction continue $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$ peut être approximée uniformément sur $\partial\mathbb{D}$ de manière arbitrairement proche par des *polynômes trigonométriques réels*, à savoir des expressions de la forme $\sum_{-N}^N c_n e^{in\theta}$ avec des constantes $c_n \in \mathbb{C}$ satisfaisant $c_{-n} = \overline{c_n}$.

Exercice 7. Soit $(h_n)_{n=0}^\infty$ une suite de fonctions harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui converge uniformément sur les compacts $K \subset \Omega$ vers une fonction harmonique $h \in \text{Harm}(\Omega)$. Montrer que les deux suites de dérivées partielles $(\frac{\partial h_n}{\partial x})_{n=0}^\infty$ et $(\frac{\partial h_n}{\partial y})_{n=0}^\infty$ convergent aussi uniformément sur les compacts $K \subset \Omega$ vers h_x et h_y .

Exercice 8. Montrer que si une fonction f est holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(0)$ de centre $0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, et si $h := \text{Re } f$, alors on a :

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{r e^{i\theta} - z} h(r e^{i\theta}) d\theta,$$

pour tout $|z| < r$. Indication: Commencer par voir que les parties réelles coïncident.

Exercice 9. Dédurre de l'inégalité de Harnack du Théorème 5.1 une démonstration alternative du Théorème 2.9 de Liouville. Indication: Dans \mathbb{C} , considérer deux disques $0 \in \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$ et faire $R \rightarrow \infty$.

Exercice 10. (a) Montrer que si h est une fonction harmonique positive sur un disque $\mathbb{D}_r(0)$ de rayon $r > 0$, alors :

$$|\nabla h| := (h_x^2 + h_y^2)^{1/2} \leq \frac{2}{r} h(0).$$

(b) En déduire que :

$$|\nabla h(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2} h(z) \quad (\forall |z| < r).$$

Exercice 11. Soit $(h_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions harmoniques positives sur le disque unité \mathbb{D} . Montrer que si elle converge ponctuellement en tout point $z \in \omega \subset \mathbb{D}$ d'un ouvert non vide, alors elle converge uniformément sur tous les compacts $K \subset \mathbb{D}$.

Exercice 12. Montrer que si une fonction f holomorphe dans un disque $\mathbb{D}_r(0)$ de rayon $r > 0$ satisfait $0 < |f| < 1$, alors :

$$|f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{r-|z|}{r+|z|}} \quad (\forall |z| < r).$$

Exercice 13. Montrer que la distorsion de Harnack en deux points quelconques $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ du disque unité satisfait :

$$\tau_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|}.$$

Indication: Utiliser une homographie du disque qui envoie z_1 sur 0.

Exercice 14. Soit h une fonction harmonique dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$ de rayon $R > 0$. Pour tout $0 \leq r \leq R$, on considère :

$$M_h(r) := \sup_{|z|=r} h(z).$$

(a) Établir l'inégalité :

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{R+r} M_h(R) + \frac{R-r}{R+r} h(0) \quad (\forall 0 \leq r \leq R).$$

(b) En déduire la généralisation suivante du Théorème de Liouville : si une fonction h est harmonique dans \mathbb{C} tout entier et satisfait :

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M_h(\rho)}{\rho} \leq 0,$$

alors h est constante.

Exercice 15. Soit h une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$. Pour $0 \leq r \leq R$, on définit :

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{et} \quad A_f(r) := \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

Établir l'*inégalité de Borel-Carathéodory* :

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (0 \leq r < R).$$

Indication: Appliquer le résultat de l'Exercice 8 à la fonction :

$$A_f(R) - f.$$

Exercice 16. EE

Fonctions sous-harmoniques

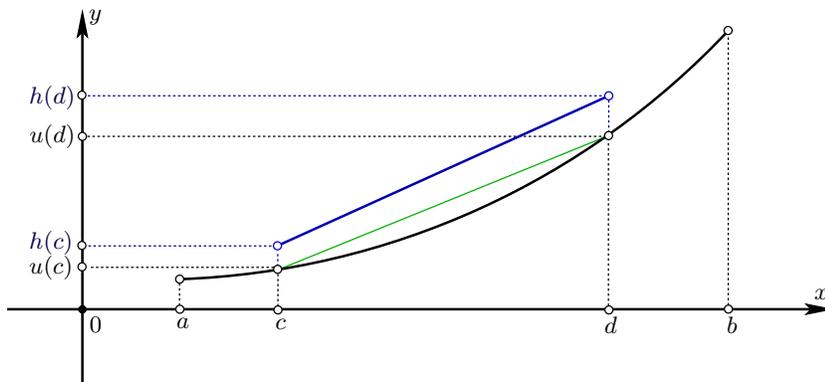
François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Analogie avec la théorie réelle

Les analogues unidimensionnels des fonctions harmoniques sont les fonctions affines $h(x) = \lambda x + \mu$, satisfaisant donc $\frac{d^2 h}{dx^2} = 0$. Ces fonctions affines essentiellement triviales permettent d'ailleurs de définir la notion de fonction convexe.



En effet, une fonction $u: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est *convexe* si, pour tout intervalle $[c, d] \subset [a, b]$ et pour toute fonction affine $h(x)$, les inégalités aux extrémités :

$$u(c) \leq h(c) \quad \text{et} \quad u(d) \leq h(d)$$

impliquent l'inégalité :

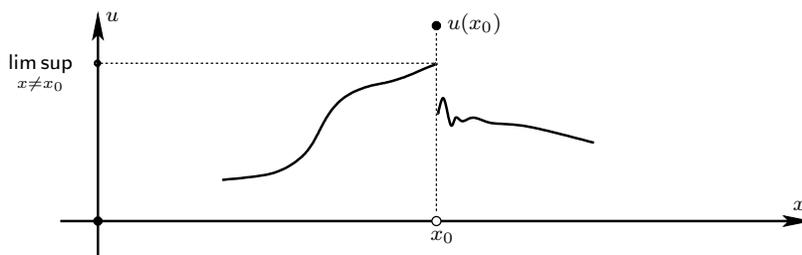
$$u(x) \leq h(x)$$

pour *tout* $x \in [c, d]$. Cette condition peut être comparée (exercice) à une condition classique concernant la *corde* entre deux points quelconque du graphe de u .

Les fonctions sous-harmoniques que nous allons étudier sont les analogues *bidimensionnels* des fonctions convexes. Elles ne sont pas nécessairement partout continues, et on doit se contenter de leur semi-continuité, concept général indépendant qui fera d'abord l'objet d'un paragraphe préliminaire.

3. Fonctions semi-continues

Soit (X, d) un espace métrique, par exemple $X = \mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne, ou plus généralement $X =$ un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ou encore $X =$ un ouvert O de (X, d) . Certaines des notions générales qui suivent ont aussi un sens dans les espaces topologiques quelconques. Les fonctions réelles considérées seront autorisées à prendre la valeur $-\infty$, mais pas $+\infty$.



Définition 3.1. Une fonction u à valeurs réelles :

$$-\infty \leq u < +\infty,$$

définie au voisinage d'un point $x_0 \in X$, est dite *semi-continue supérieurement* en ce point si :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0),$$

à savoir plus précisément si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$d(x, x_0) \leq \delta \implies \begin{cases} u(x) \leq u(x_0) + \varepsilon & \text{lorsque } u(x_0) \neq -\infty, \\ u(x) \leq -\frac{1}{\varepsilon} & \text{lorsque } u(x_0) = -\infty. \end{cases}$$

Il importe de noter qu'avec cette définition, la fonction identiquement égale à :

$$-\infty$$

est semi-continue supérieurement. Bien entendu, ce concept se globalise.

Définition 3.2. Une fonction :

$$u: X \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R}$$

est dite *semi-continue supérieurement* lorsqu'elle l'est en tout point.

Les trois volets de la caractérisation suivante s'avéreront utiles dans les démonstrations ultérieures.

Proposition 3.3. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) u est semi-continue supérieurement, à savoir :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0) \quad (\forall x_0 \in X);$$

(ii) pour toute valeur $u_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :

$$\{x \in X : u(x) < u_0\}$$

est ouvert ;

(iii) le sur-graphe de u :

$$\{(x, u) \in X \times [-\infty, \infty[: u > u(x)\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $X \times [-\infty, \infty[$.

Démonstration. **(i) \implies (ii).** Soit $x_0 \in X$ avec $u(x_0) < u_0$. L'hypothèse que :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0)$$

interprétée avec $\varepsilon := \frac{u_0 - u(x_0)}{2} > 0$ donne $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} d(x, x_0) \leq \delta &\implies u(x) \leq u(x_0) + \frac{u_0 - u(x_0)}{2} \\ &= u_0 - \frac{u_0 - u(x_0)}{2} \\ &< u_0, \end{aligned}$$

ce qui montre que la boule ouverte de rayon $\delta > 0$ centrée en x_0 est contenue dans l'ensemble de sous-niveau $\{u(x) < u_0\}$. Ce dernier est donc bien ouvert.

(ii) \implies (iii). Soit $x_0 \in X$, et soit $(x_0, u(x_0))$ le point correspondant du graphe de u . Soit (x_0, u_0) un point quelconque du sur-graphe de u , à savoir :

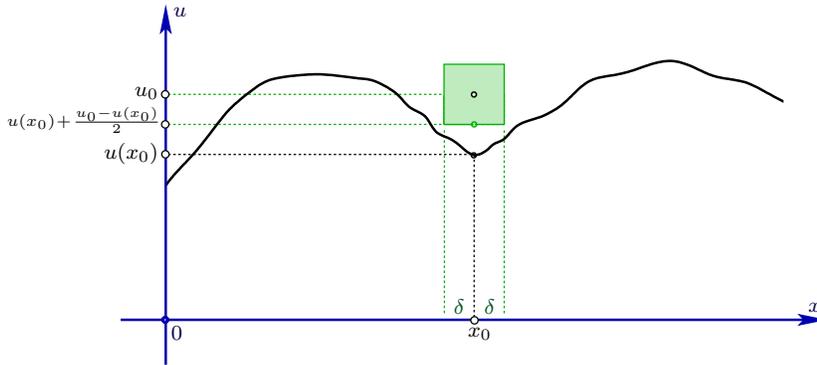
$$u_0 > u(x_0).$$

Par hypothèse, l'ensemble :

$$\left\{x \in X : u(x) < u(x_0) + \frac{u_0 - u(x_0)}{2}\right\} \ni x_0$$

est ouvert, et x_0 lui appartient clairement. Donc il existe $\delta > 0$ tel :

$$d(x, x_0) < \delta \implies u(x) < u(x_0) + \frac{u_0 - u(x_0)}{2}.$$



Géométriquement, *tout* le graphe de la fonction u restreinte à la δ -boule ouverte en x_0 est en-dessous de ce plafond.

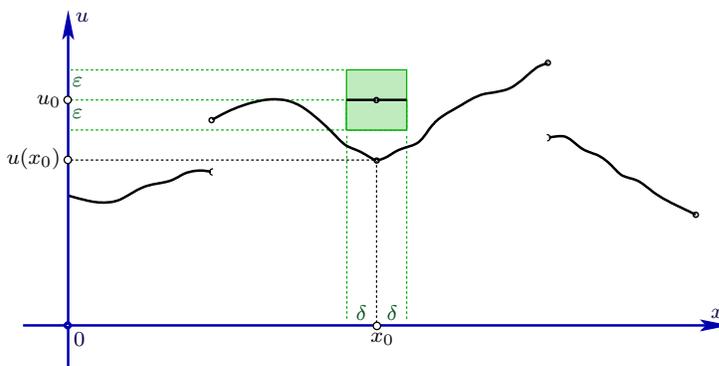
Alors par inégalité triangulaire, l'ouvert-rectangle centré en (x_0, u_0) et posé sur ce plafond :

$$\left\{(x, u) : d(x, x_0) < \delta, |u - u_0| < \frac{u_0 - u(x_0)}{2}\right\}$$

est entièrement contenu dans le sur-graphe, ce qui montre que ce dernier est bel et bien ouvert.

(iii) \implies (i). Soit (x_0, u_0) un point quelconque du sur-graphe, *i.e.* avec $u_0 > u(x_0)$. Sachant que ce dernier est ouvert, il existe $\delta > 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tels que :

$$\left\{(x, u) : d(x, x_0) < \delta, |u - u_0| < \varepsilon\right\} \subset \text{sur-graphe} = \{(x, u) : u > u(x)\}.$$



En particulier, le segment horizontal :

$$\{(x, u_0) : |x - x_0| < \delta\} \subset \text{sur-graphe.}$$

Par définition du sur-graphe, ceci garantit que le graphe se trouve localement en-dessous :

$$u(x) < u_0 \quad (\forall |x - x_0| < \delta).$$

Grâce à cette inégalité de contrôle, il vient :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) < u_0,$$

et comme $u_0 > u(x_0)$ pouvait être choisi arbitrairement proche de $u(x_0)$, on atteint **(i)** ! \square

La notion duale de fonction *semi-continue inférieurement*, moins utilisée dans ce qui suivra, se devine en changeant $\lim \sup$ en $\lim \inf$, ou en remplaçant u par $-u$.

Corollaire 3.4. Pour une fonction $u : X \rightarrow]-\infty, \infty]$, les trois caractérisations suivantes de la semi-continuité inférieure sont équivalentes :

(i) en tout point $x_0 \in X$:

$$u(x_0) \leq \liminf_{x \rightarrow x_0} u(x);$$

(ii) pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble de surniveau :

$$\{x \in X : u(x) > u_0\}$$

est ouvert ;

(iii) le sous-graphe de u :

$$\{(x, u) \in X \times]-\infty, \infty] : u < u(x)\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $X \times]-\infty, \infty]$. \square

On se convainc aisément qu'une fonction est continue en un point lorsque, et seulement lorsqu'elle y est à la fois semi-continue inférieurement, et semi-continue supérieurement.

Nous ferons aussi usage fréquent de l'énoncé de compacité élémentaire suivant, valable pour le maximum, mais pas en général pour l'infimum.

Proposition 3.5. Si une fonction $u : X \rightarrow [-\infty, \infty[$ est semi-continue supérieurement, alors pour tout sous-ensemble compact $K \subset X$, il existe une constante $N_K < \infty$ telle que :

$$\sup_{x \in K} u(x) \leq N_K.$$

De plus, u atteint son supremum sur K :

$$\sup_{x \in K} u(x) = u(x_K) \quad (\exists x_K \in K).$$

Démonstration. Pour des entiers $n \geq 1$, les ensembles :

$$O_n := \{x \in X : u(x) < n\}$$

sont ouverts et ces O_n forment un recouvrement de X , puisque $u(x) < \infty$ pour tout $x \in X$. Par Borel-Lebesgue, du recouvrement ouvert du compact :

$$K = \bigcup_{1 \leq n} (O_n \cap K),$$

on peut extraire un sous-recouvrement *fini* $\cup_{1 \leq n \leq N_K}$, et alors :

$$\sup_{x \in K} u(x) \leq N_K < \infty.$$

Ensuite, les ensembles ouverts :

$$\left\{x \in X : u(x) < \sup_{x \in K} u(x) - \frac{1}{n}\right\} \quad (n \geq 1)$$

ne peuvent recouvrir K , sinon, encore par Borel-Lebesgue, un nombre fini d'entre eux le recouvriraient, ce qui contredirait la définition de $\sup_K u$. Donc on a bien $\sup_K u = u(x_K)$ pour au moins un $x_K \in K$. \square

Voici enfin un dernier énoncé, plus coûteux en effort neuronal pour l'exercitation estudiantine — voir aussi l'Exercice 6 qui le complémente.

Théorème 3.6. Si $u : X \rightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction semi-continue supérieurement bornée :

$$u \leq M < \infty$$

définie sur un espace métrique (X, d) , alors il existe une suite décroissante :

$$\phi_1 \geq \phi_2 \geq \dots \geq \phi_n \geq \phi_{n+1} \geq \dots \geq u$$

de fonctions continues $\phi_n \in \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ qui convergent ponctuellement vers :

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \quad (\forall x \in X).$$

De plus, si $\mu \geq 0$ est une mesure de Borel positive finie à support compact dans X , alors :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X u_k d\mu = \int_X u d\mu.$$

Démonstration. Lorsque $u \equiv -\infty$, il suffit de prendre $\phi_n \equiv -n$.

Nous pouvons donc supposer qu'en au moins un point $y_0 \in X$, on a $u(y_0) > -\infty$.

Pour $n \geq 1$ entier, définissons alors les fonctions $\phi_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ qui vont réaliser notre objectif par :

$$\phi_n(x) := \sup_{y \in X} (u(y) - n d(x, y)) \quad (x \in X).$$

En faisant $y = y_0$, nous voyons que $\phi_n(x) > -\infty$ pour tout $x \in X$. De plus, en faisant $y = x$:

$$\phi_n(x) \geq u(x).$$

On se convainc aisément que cette suite de fonctions est décroissante et qu'elle tend ponctuellement vers u . D'ailleurs, ces fonctions ϕ_n sont mieux que continues, elles sont lipschitziennes (avec une constante de Lipschitz qui explose) :

Lemme 3.7. *Pour tous $x, x' \in X$, on a :*

$$|\phi_n(x) - \phi_n(x')| \leq n d(x, x').$$

Démonstration. Par symétrie, on peut supposer que $\phi_n(x) \leq \phi_n(x')$. Soit alors $y' \in X$ qui réalise 'presque' le deuxième supremum :

$$\phi_n(x') = u(y') - n d(x', y') - \varepsilon',$$

à une erreur arbitrairement petite $\varepsilon' \geq 0$. Bien entendu :

$$\phi_n(x) \geq u(y') - n d(x, y').$$

Mais alors par soustraction et par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 0 &\leq -\phi_n(x) + \phi_n(x') \leq -\underbrace{u(y')}_o + n d(x, y') + \underbrace{u(y')}_o - n d(x', y') - \varepsilon' \\ &= n [d(x, y') - d(x', y')] - \varepsilon' \\ &\leq n d(x, x') + \varepsilon'. \quad \square \end{aligned}$$

Ensuite, en notant la boule ouverte de centre x et de rayon $r > 0$:

$$\mathbb{B}_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\},$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned} \phi_n(x) &= \sup_{y \in X} (u(y) - n d(x, y)) \\ &= \max \left(\sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} (\cdot), \sup_{y \in X \setminus \mathbb{B}_r(x)} (\cdot) \right) \\ &\leq \max \left(\sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} u(y), \underbrace{\sup_{y \in X \setminus \mathbb{B}_r(x)} (u(y) - n r)}_{\substack{\rightarrow -\infty \text{ lorsque } n \rightarrow \infty \\ \text{puisque } u \leq M < \infty}} \right). \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \leq \sup_{y \in \mathbb{B}_r(x)} u(y).$$

En faisant tendre $r \rightarrow 0$, la semi-continuité de u donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(x) \leq u(x),$$

et comme l'inégalité inverse était satisfaite, les ϕ_n convergent bien ponctuellement vers u .

La dernière affirmation est une conséquence du Théorème de convergence monotone en théorie de la mesure et de l'intégration. \square

Un des intérêts de la semi-continuité supérieure est la stabilité suivante.

Proposition 3.8. *L'infimum :*

$$u := \inf_{\alpha \in A} u_\alpha$$

d'une famille quelconque de fonctions semi-continues supérieurement $u_\alpha : X \rightarrow [-\infty, \infty)$ est toujours semi-continu supérieurement.

Démonstration. En effet, pour tout $\beta \in A$ fixé, on a :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} \left(\inf_{\alpha \in A} u_\alpha(x) \right) &\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} (u_\beta(x)) \\ &\leq u_\beta(x_0). \end{aligned}$$

Mais alors, en prenant l'infimum à droite sur tous les $\beta \in A$:

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} \left(\inf_{\alpha \in A} u_\alpha(x) \right) \leq \inf_{\beta \in A} u_\beta(x_0),$$

ce qui démontre bien que la fonction $u = \inf u_\alpha$ est semi-continue supérieurement. \square

En général, lorsqu'on part d'une famille infinie dénombrable de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui sont continues, la fonction $\inf u_n$ perd la continuité : seule la semi-continuité supérieure est préservée, et ceci justifie l'intérêt de ce concept.

Lemme 3.9. *La somme et le maximum :*

$$u_1 + \cdots + u_K \quad \text{et} \quad \max(u_1, \dots, u_K)$$

d'un nombre fini de fonctions semi-continues supérieurement u_1, \dots, u_K sont encore semi-continues supérieurement.

Démonstration. Par une récurrence évidente, il suffit de traiter le cas $K = 2$. Soient donc u et v deux fonctions semi-continues supérieurement en un point $x_0 \in X$. Pour leur somme $u + v$, il existe une suite de points $(x_n)_{n=1}^\infty$ tendant vers x_0 qui réalise :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} (u + v)(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u(x_n) + v(x_n)) \\ &\leq \limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) + \limsup_{x \rightarrow x_0} v(x) \\ &\leq (u + v)(x_0), \end{aligned}$$

ce qui aboutit avec peu d'efforts.

De même, pour une suite $(x_n)_{n=1}^\infty$ bien choisie :

$$\begin{aligned} \limsup_{x \rightarrow x_0} (\max(u(x), v(x))) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{(\max(u, v))(x_n)}_{u(x_n) \text{ ou } v(x_n)} \\ &\leq \max \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} u(x_n), \limsup_{n \rightarrow \infty} v(x_n) \right) \\ &\leq \max \left(\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x), \limsup_{x \rightarrow x_0} v(x) \right) \\ &\leq \max(u(x_0), v(x_0)), \end{aligned}$$

ces nombreuses inégalités finissant par être concluantes ! \square

Toutefois, étant donné une famille *infinie* de fonctions semi-continues supérieurement :

$$(u_\alpha)_{\alpha \in A} : X \longrightarrow [-\infty, \infty[,$$

la fonction :

$$u(x) := \sup_{\alpha \in A} u_\alpha(x)$$

n'est *pas* nécessairement semi-continue supérieurement, même lorsque les u_α sont continues et lorsque $u(x) < \infty$ en tout point x . Il suffit en effet de penser à la suite croissante de fonctions :

$$[0, 1] \ni t \longmapsto \sqrt[n]{t} \in [0, 1]$$

qui converge vers la fonction *non* semi-continue supérieurement en 0 :

$$t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t = 0, \\ 1 & \text{lorsque } 0 < t \leq 1. \end{cases}$$

4. Définition des fonctions sous-harmoniques

Dans son essence différentielle, une fonction u est *sous-harmonique* lorsque son laplacien $\Delta u \geq 0$ est positif, vision proche de l'harmonicité $\Delta u = 0$.

Toutefois, ce n'est pas cette manière de voir qui est la plus générale. Comme cela transparaîtra ultérieurement, l'intérêt majeur des fonctions sous-harmoniques est leur grande flexibilité, laquelle serait trop contrainte par l'hypothèse que $u \in \mathcal{C}^2$ soit d'emblée différentiable. *A posteriori*, l'inégalité $\Delta u \geq 0$ sera effectivement toujours satisfaite, pourvu qu'elle soit interprétée au sens des distributions.

En fait, une analogie profonde avec les fonctions convexes sur \mathbb{R} peut servir de guide précieux à la compréhension. Par exemple, une fonction $\psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ est convexe si et seulement si $\psi'' \geq 0$. Toutefois, ce n'est pas ainsi que la convexité est définie dans le cadre le plus général possible, c'est au moyen de l'*inégalité de sous-moyenne* :

$$\psi(\lambda s + (1 - \lambda)t) \leq \lambda \psi(s) + (1 - \lambda)\psi(t) \quad (\forall s \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \forall 0 \leq \lambda \leq 1),$$

qui exprime que le graphe de ψ se situe toujours en-dessous de ses cordes. Notons que cette définition de la convexité admet des fonctions non lisses, par exemple la fonction $\psi(t) := |t|$, qui est convexe.

Nous allons maintenant transférer cette inégalité aux fonctions définies sur des domaines bidimensionnels $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Mais l'analogie intuitive entre les fonctions convexes et les fonctions sous-harmoniques ne sera pas un parallèle exact. Nous pourrions requérir dans leur définition que les fonctions sous-harmoniques soient continues, mais ce serait se priver de la flexibilité précieuse que représentent les nombreux passages à la limite dénombrables que les applications théoriques feront surgir comme nécessaires, notamment lorsqu'on aura à prendre l'infimum d'une famille de fonctions. Rappelons-nous que la Proposition 3.8 énonçait une stabilité de ce type pour la semi-continuité supérieure. C'est en partie en vertu de cette proposition que nous exigerons des fonctions sous-harmoniques la seule 'tenue correcte minimale' qu'est la semi-continuité inférieure.

Nous pouvons maintenant présenter deux définitions initiales.

Rappelons les notations pour les disques ouverts et les cercles de \mathbb{C} , centrés en un point $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$:

$$\mathbb{D}_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad \text{et} \quad S_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\},$$

les disques fermés étant leur réunion :

$$\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) = \mathbb{D}_r(z_0) \cup S_r(z_0).$$

À nouveau, les fonctions considérées seront autorisées à prendre la valeur $-\infty$, mais pas la valeur $+\infty$. La première formulation explique et justifie la terminologie « *sous-harmonique* ».

Définition 4.1. Une fonction définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$:

$$u: \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$$

est dite *sous-harmonique* si :

- (i) elle est semi-continue supérieurement ;
- (ii) en tout point $z_0 \in \Omega$, il existe $0 < r_0 < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ tel que pour tout disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ centré en z_0 de rayon $0 \leq r \leq r_0$, et pour toute fonction h harmonique dans $\mathbb{D}_r(z_0)$ continue sur $\overline{\mathbb{D}_r(z_0)}$, elle satisfait :

$$u|_{S_r(z_0)} \leq h|_{S_r(z_0)} \implies u|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \leq h.$$

Une telle fonction h est parfois appelée *majorant harmonique* de la fonction u , *la majoration se transférant du bord vers l'intérieur*. Être *sous-harmonique*, c'est alors tout simplement être « *en-dessous* » des fonctions harmoniques.

Toutefois, ce n'est pas par cette définition que nous allons commencer ce cours, mais par une autre, *plus concrète et plus intuitive*, et nous démontrerons ultérieurement que les deux définitions sont équivalentes. Soit à nouveau $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine.

Définition 4.2. Une fonction $u: \Omega \longrightarrow [-\infty, \infty[$ est dite *sous-harmonique* si :

- (i) elle est semi-continue supérieurement ;
- (ii) elle satisfait la *propriété locale de la sous-moyenne*, à savoir, en tout point $z_0 \in \Omega$, il existe $0 < r_0 < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ tel que pour tout disque $\mathbb{D}_r(z_0)$ centré en z_0 de rayon $0 \leq r \leq r_0$, elle satisfait :

$$(4.3) \quad u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Autrement dit, u est inférieure en tout point à ses moyennes sur des petits cercles centrés. Observons que $u \equiv -\infty$ est sous-harmonique. L'ensemble des fonctions sous-harmoniques dans Ω sera noté :

$$\text{SH}(\Omega).$$

Cette définition appelle plusieurs commentaires visant à l'éclairer.

Premièrement, une fonction définie dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ est sous-harmonique si elle l'est dans chaque composante connexe de U .

Deuxièmement, en décomposant $u = u^+ - u^-$ avec :

$$u^+ := + \max(0, u(x)) \geq 0 \quad \text{et} \quad u^-(x) := - \min(u(x), 0) \geq 0,$$

la théorie de l'intégration nous dit que l'intégrale sur le cercle $S_r(z_0)$ doit être interprétée comme :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^+(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u^-(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Grâce à la Proposition 3.5, u^+ est bornée sur le compact $S_r(z_0)$, donc son intégrale est certainement positive finie ! À l'inverse, l'intégrale de u^- peut être finie ou infinie, car u est autorisée à prendre la valeur $-\infty$. Mais dans tous les cas, la valeur de l'intégrale de u est un nombre appartenant à $[-\infty, \infty[$. Plus tard, nous verrons que si cette intégrale vaut $-\infty$

pour un seul rayon $0 < r \leq r_0$, d'où $u(z_0) = -\infty$ aussi par (4.3), alors $u \equiv -\infty$ partout dans Ω .

Troisièmement, l'inégalité de sous-moyenne (4.3) est proprement *locale* : on ne demande sa validité que pour des rayons $r_0 > 0$ assez petits qui dépendent *a priori* du point z_0 . Elle implique (exercice) que si $(\omega_\alpha)_{\alpha \in A}$ est un recouvrement ouvert de Ω , alors u est sous-harmonique dans Ω si et seulement si toutes ses restrictions $u|_{\omega_\alpha}$ sont sous-harmoniques. Nous verrons ultérieurement que la sous-harmonicité locale implique une inégalité de sous-moyenne *globale*, à savoir que (4.3) est satisfaite pour *tout* $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$.

Lemme 4.4. Une fonction sous-harmonique $u \in \text{SH}(\Omega)$ atteint sa limite supérieure en tout point $z_0 \in \Omega$:

$$u(z_0) = \limsup_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z).$$

Démonstration. Comme u est semi-continue supérieurement :

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z) \leq u(z_0),$$

mais il y a plus, comme elle satisfait l'inégalité de sous-moyenne en z_0 , il existe $r_0 > 0$ tel que, pour tout $0 < r \leq r_0$:

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Par l'absurde, si on avait :

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \neq z_0}} u(z) =: u_0 < u(z_0),$$

alors il existerait $0 < r_1 \leq r_0$ assez petit pour que :

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbb{D}_{r_1}(z_0) \setminus \{z_0\}} u(z) &\leq u_0 + \frac{u(z_0) - u_0}{2} \\ &= \frac{u(z_0) + u_0}{2}, \end{aligned}$$

et on aboutirait alors à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{u(z_0) + u_0}{2} < u(z_0). \quad \square$$

Définition 4.5. Une fonction $v: \Omega \rightarrow]-\infty, \infty]$ est dite *sur-harmonique* lorsque $-v$ est sous-harmonique.

Observons (exercice d'assimilation) qu'une fonction est harmonique si et seulement si elle est à la fois sous-harmonique et sur-harmonique.

Le premier exemple canonique de fonction sous-harmonique est le suivant.

Proposition 4.6. Si $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\log |f|$ est sous-harmonique dans Ω .

Démonstration. Si $f \equiv 0$, on obtient $-\infty \in \text{SH}(\Omega)$.

On peut donc supposer $f \not\equiv 0$. Sur $\Omega \setminus \{f = 0\}$, la fonction $\log |f|$ est continue, et puisqu'elle prend la valeur $-\infty$ en les points discrets où $f = 0$, elle est gratuitement semi-continue supérieurement sur la totalité de Ω .

Au voisinage de tout point $z_0 \in \Omega \setminus \{f = 0\}$, la fonction :

$$\log |f| = \frac{1}{2} (\log f + \log \bar{f})$$

est harmonique, donc elle y satisfait l'inégalité de la moyenne locale.

En un point z_0 où $f(z_0) = 0$, l'inégalité (4.3) est trivialement satisfaite. \square

D'autres exemples de fonctions sous-harmoniques peuvent être engendrés en appliquant des procédés élémentaires, qui sont conséquences immédiates de la Définition 4.2 (cf. aussi le Lemme 3.9).

Proposition 4.7. *Soient u et v deux fonctions sous-harmoniques définies dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Alors :*

(i) $\max(u, v)$ est sous-harmonique dans Ω ;

(ii) $\alpha u + \beta v$ est sous-harmonique dans Ω pour tous réels $\alpha, \beta \geq 0$. \square

Ainsi, les fonctions sous-harmoniques peuvent très bien ne pas être lisses. L'Exercice 8 montre qu'elles peuvent même être discontinues.

5. Principe du maximum

Nous avons déjà constaté que la propriété locale de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques, et qu'alors, elles satisfont aussi la propriété globale de la moyenne :

$$h \in \text{Harm}(\Omega) \implies \forall z_0 \in \Omega, \forall 0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega), \quad h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Afin de généraliser la globalisation de la propriété de sous-moyenne locale que satisfont les fonctions sous-harmoniques, nous aurons besoin d'un nouveau principe du maximum, lui aussi très puissant.

Théorème 5.1. [Principe du maximum] *Si une fonction $u \in \text{SH}(\Omega)$ sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ atteint son maximum global en un point intérieur :*

$$u(z_{\max}) = \max_{z \in \Omega} u(z) \quad (\exists z_{\max} \in \Omega),$$

alors $u \equiv u(z_{\max})$ est constante.

Contrairement aux fonctions harmoniques, aucun énoncé concernant le minimum global ne peut avoir lieu, comme le montre la fonction $u(z) := \max(0, \text{Re } z)$ sous-harmonique dans \mathbb{C} . Et même, cette fonction $\max(0, \text{Re } z)$ montre aussi que l'existence de maxima locaux n'implique pas non plus la constance.

Il y a bien un principe du minimum global, mais ce sont seulement les fonctions *sur-harmoniques* qui le satisfont, par un corollaire direct.

Démonstration. Supposons donc l'existence d'un tel $z_{\max} \in \Omega$ en lequel u est maximale, posons :

$$u_{\max} := u(z_{\max}),$$

et décomposons Ω en les deux sous-ensembles disjoints :

$$E := \{z \in \Omega : u(z) < u_{\max}\} \quad \text{et} \quad F := \{z \in \Omega : u(z) = u_{\max}\}.$$

Comme u est semi-continue supérieurement, E est ouvert.

Assertion 5.2. *L'ensemble F est lui aussi ouvert.*

Preuve. Soit un point $z \in F$. Sur des cercles de rayon $0 < s \leq r$ assez petit, on a :

$$u_{\max} = u(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + s e^{it}) dt.$$

Mais si on avait $u(z + s e^{it_*}) < u_{\max}$ pour un angle t_* , alors par semi-continuité supérieure $u(z + s e^{it})$ serait toujours $< u_{\max}$ pour t dans un voisinage de t_* , et alors l'intégrale-moyenne à droite serait elle aussi $< u_{\max}$, ce qui est impossible.

Donc on a $u(z + s e^{it}) \equiv u_{\max}$ sur tous ces cercles, ce qui établit l'ouverture de F en z . \square

Comme $F \neq \emptyset$, la connexité de $\Omega = E \cup F$ force $\Omega = F$. \square

Convention 5.3. Le point à l'infini $\infty \in \partial\Omega$ appartient au bord de tout domaine *non borné* $\Omega \subset \mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Théorème 5.4. [Principe du maximum au bord] Si une fonction $u \in \text{SH}(\Omega)$ sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfait pour tout point $\zeta \in \partial\Omega$:

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0,$$

alors $u \leq 0$ dans Ω .

Démonstration. Prolongeons tout d'abord u à $\partial\Omega$ par :

$$u(\zeta) := \limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \quad (\forall \zeta \in \partial\Omega),$$

y compris, donc, en $\zeta = \infty$ lorsque Ω est non-borné. On se convainc alors aisément que la fonction ainsi prolongée u est semi-continue supérieurement dans $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. De plus par hypothèse :

$$(5.5) \quad u|_{\partial\Omega} \leq 0.$$

Or puisque $\bar{\Omega}$ est compact — il *fallait* pour cela compactifier Ω lorsqu'il est non-borné en lui ajoutant ∞ —, la Proposition 3.5 garantit que ce prolongement u atteint son maximum :

$$u_{\max} := u(z_{\max}) = \max_{z \in \bar{\Omega}} u(z),$$

en un certain point $z_{\max} \in \bar{\Omega}$.

• Lorsque $z_{\max} \in \partial\Omega$, on a $u(z_{\max}) \leq 0$ par (5.5), puis $u(z) \leq u(z_{\max}) \leq 0$ pour tout $z \in \bar{\Omega}$.

• Lorsque $z_{\max} \in \Omega$, le Théorème 5.1 donne $u \equiv u_{\max}$ constante dans Ω , donc son prolongement au bord est tout aussi constant, et enfin (5.5) donne $u \equiv u_{\max} \leq 0$. \square

6. Principe de Phragmén-Lindelöf sous-harmonique

Dans les domaines $\Omega \subset \mathbb{C}$ *non-bornés*, on aimerait avoir un principe du maximum en ne connaissant le comportement de u qu'aux points du bord situés à distance finie, à l'exclusion de $\infty \in \partial\Omega$. Ceci est possible en demandant que u ne croisse pas trop vite à l'infini. Voici un résultat très général, dont se déduiront plusieurs théorèmes classique d'Analyse Complexe à une variable.

Théorème 6.1. [Principe général de Phragmén-Lindelöf] Soit $u \in \text{SH}(\Omega)$ une fonction sous-harmonique dans un domaine non-borné $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfaisant :

$$(6.2) \quad \limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0, \quad \forall \zeta \in \partial\Omega \setminus \{\infty\}.$$

S'il existe une fonction sur-harmonique à valeurs finies :

$$v: \Omega \longrightarrow]-\infty, \infty[$$

telle que :

$$(6.3) \quad \liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) > 0 \quad \text{et} \quad \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0,$$

alors $u \leq 0$ partout dans Ω .

L'illustration principale de (6.3) est une fonction $v \in \text{Harm}(\Omega)$ harmonique satisfaisant :

$$\infty = \lim_{z \rightarrow \infty} v(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} u(z) \quad \text{tandis que :} \quad 0 = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)}.$$

Démonstration. Supposons pour commencer que $v > 0$ dans Ω , ce qui est un cas spécial significatif. Pour $\varepsilon > 0$, introduisons :

$$u_\varepsilon := u - \varepsilon v.$$

Comme $-v$ est sous-harmonique, u_ε est sous-harmonique dans Ω .

Assertion 6.4. En tout point du bord $\zeta \in \partial\Omega$, y compris en $\zeta = \infty$, on a :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u_\varepsilon(z) \leq 0.$$

Preuve. En un point fini $\zeta \in \partial\Omega \setminus \{\infty\}$, il suffit d'ajouter l'hypothèse (6.2) avec :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (-\varepsilon v(z)) \leq 0.$$

En le point $\zeta = \infty$, on a bien :

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} (u - \varepsilon v) = \limsup_{z \rightarrow \infty} v \left(\frac{u}{v} - \varepsilon \right) \leq 0,$$

puisque le facteur $v > 0$ ne change pas le signe négatif de l'hypothèse (6.3). \square

Alors les hypothèses du Théorème 5.4 sont satisfaites, donc $u_\varepsilon \leq 0$ partout dans Ω et enfin $u \leq 0$ dans Ω en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$.

Traisons à présent le cas d'une fonction v générale. Pour $\eta > 0$, introduisons l'ensemble :

$$F_\eta := \{z \in \Omega: u(z) \geq \eta\},$$

dont on veut montrer qu'il est vide. Puisque $\{u < \eta\}$ est ouvert, F_η est fermé dans Ω . De plus, par (6.2), aucun point de $\partial\Omega \setminus \{\infty\}$ ne peut être limite de points de F_η . Autrement dit, F_η ne touche pas le bord fini de Ω , mais peut tout à fait s'en aller vers l'infini comme le fait Ω .

Comme la fonction sur-harmonique v est semi-continue inférieurement, la version opposée de la Proposition 3.5 montre qu'elle est bornée inférieurement sur tout compact. Or à l'infini par hypothèse $\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) > 0$, donc même lorsque F_η est non borné, $v|_{F_\eta}$ est bornée inférieurement.

Après addition éventuelle à v d'une constante $c > 0$, on peut supposer que :

$$v|_{F_\eta} > 0.$$

Affirmation 6.5. *Pour toute constante $c > 0$, le remplacement $v(z) \mapsto v(z) + c$ n'altère pas les deux hypothèses (6.3).*

Preuve. Premièrement, on a toujours $\liminf_{z \rightarrow \infty} (v(z) + c) > 0$. Deuxièmement, si on décompose :

$$\Omega = \{u \leq 0\} \cup \{u > 0\},$$

alors on a gratuitement puisque $v > 0$ au voisinage de ∞ :

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \{u \leq 0\}}} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0,$$

et donc la deuxième hypothèse (6.3) concerne seulement la limite supérieure pour les $z \in \{u > 0\}$ proches de ∞ . Mais alors comme $v(z) > 0$ dans un voisinage de ∞ , on a :

$$\frac{1}{v(z) + c} < \frac{1}{v(z)} \quad (z \rightarrow \infty),$$

et donc en multipliant par $u(z) > 0$, on obtient l'inégalité :

$$\limsup_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \{u > 0\}}} \frac{u(z)}{v(z) + c} \leq \limsup_{\substack{z \rightarrow \infty \\ z \in \{u > 0\}}} \frac{u(z)}{v(z)} \leq 0,$$

ce qu'il fallait vérifier. □

Après addition d'une telle constante, introduisons maintenant l'ensemble ouvert :

$$\begin{aligned} V &:= \{z \in \Omega : v(z) > 0\} \\ &\supset F_\eta. \end{aligned}$$

Assertion 6.6. *On a $u - \eta \leq 0$ sur V .*

Preuve. Nous allons appliquer à la fonction $z \mapsto u(z) - \eta$ définie sur V la version spéciale du théorème démontrée au début, où nous avons supposé la fonction $v > 0$, ce qui est dorénavant vrai sur chaque composante connexe de notre nouvel ouvert $V = \{v > 0\}$; comme $\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) > 0$, toutes les composantes connexes de V sont non-bornées.

Il faut vérifier les hypothèses (6.2) et (6.3).

En tout point $\zeta \in \partial V \setminus \{\infty\}$, nous pouvons estimer en distinguant deux cas :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u(z) - \eta) \leq \begin{cases} 0 - \eta < 0 & \text{lorsque } \zeta \in \partial \Omega \cap \partial V \setminus \{\infty\}, \\ u(\zeta) - \eta & \text{lorsque } \zeta \in \Omega \cap \partial V \setminus \{\infty\}. \end{cases}$$

Or comme $V \supset F_\eta = \{u \geq \eta\}$, on a :

$$\Omega \cap \partial V \subset \{u \leq \eta\},$$

et donc dans le premier, comme dans le deuxième cas :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u(z) - \eta) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial V \setminus \{\infty\}).$$

Ceci confirme (6.2).

Quant à (6.3), c'est plus simple et cela s'améliore un peu :

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z) - \eta}{v(z)} = \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} - \frac{\eta}{\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z)} < 0.$$

Donc le cas spécial déjà démontré s'applique, et donne $u - \eta \leq 0$ sur V . \square

Comme $F_\eta \subset V$, on obtient donc $u \leq \eta$ sur $F_\eta = \{u \geq \eta\}$, donc en fait $u \equiv \eta$ sur F_η ! Mais sur $\Omega \setminus F_\eta$, on a par définition $u < \eta$, et au final on a *partout* :

$$u(z) \leq \eta \quad (\forall z \in \Omega).$$

En faisant $\eta \xrightarrow{>} 0$, on conclut que $u \leq 0$ dans Ω . \square

Corollaire 6.7. *Si une fonction u est sous-harmonique dans un domaine non-borné $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ et satisfait en tout point du bord fini :*

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial\Omega \setminus \{\infty\}),$$

ainsi que :

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{\log |z|} \leq 0,$$

alors $u \leq 0$ partout dans Ω .

Démonstration. Il suffit de choisir sur le bord un point quelconque à distance finie $\zeta_0 \in \partial\Omega \neq \emptyset$ et d'appliquer le théorème qui précède avec la fonction $v(z) := \log |z - \zeta_0|$ (sur-)harmonique dans Ω . \square

Corollaire 6.8. [Théorème de Liouville raffiné] *Si une fonction u sous-harmonique sur \mathbb{C} tout entier satisfait :*

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{\log |z|} \leq 0,$$

alors u est constante sur \mathbb{C} . En particulier, toute fonction sous-harmonique sur \mathbb{C} qui est bornée supérieurement doit être constante.

Démonstration. Lorsque $u \equiv -\infty$, il n'y a rien à vérifier. Nous pouvons donc supposer qu'il existe $\zeta_0 \in \mathbb{C}$ tel que $u(\zeta_0) > -\infty$. Or une application du corollaire qui précède à la fonction $u - u(\zeta_0)$ vue sur $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$ donne $u \leq u(\zeta_0)$ sur $\mathbb{C} \setminus \{\zeta_0\}$, puis $u \leq u(\zeta_0)$ partout. Alors u qui atteint un maximum global en ζ_0 doit être constante, d'après le Théorème 5.1. \square

Pour des domaines ayant une forme spécifique, des hypothèses précises sur la croissance à l'infini suffisent. Du Théorème très général 6.1, nous pouvons maintenant déduire deux formulations classiques du principe de Phragmén-Lindelöf.

Théorème 6.9. [Phragmén-Lindelöf sur une bande] *Pour $\gamma > 0$ réel, soit la bande ouverte :*

$$B_\gamma := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2\gamma} \right\}.$$

Si une fonction u sous-harmonique dans B_γ a une croissance à l'infini majorée par :

$$u(x + iy) \leq A e^{\alpha|y|} \quad (x + iy \in B_\gamma),$$

pour des constantes $A < \infty$ et $\alpha < \gamma$, et si en tout point du bord fini elle satisfait :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial B_\gamma \setminus \{\infty\}),$$

alors $u \leq 0$ partout dans B_γ .

La fonction :

$$u(z) := \operatorname{Re}(\cos(\gamma z)) = \cos(\gamma x) \cosh(\gamma y)$$

montre que le résultat n'est plus vrai lorsque $\alpha = \gamma$.

Démonstration. Choisissons un nombre intermédiaire $\alpha < \beta < \gamma$, et introduisons la fonction harmonique $v: S_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$v(z) := \operatorname{Re}(\cos(\beta z)) = \cos(\beta x) \cosh(\beta y).$$

À l'infini, on a :

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) \geq \liminf_{|y| \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right) \cosh(\beta y) = \infty,$$

ainsi que :

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq \limsup_{|y| \rightarrow \infty} \frac{A e^{\alpha|y|}}{\cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right) \cosh(\beta y)} = 0.$$

Alors le résultat découle du Théorème 6.1. \square

Corollaire 6.10. [Théorème des trois droites] Soit u une fonction sous-harmonique sur la bande verticale $B = \{0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ ayant une croissance à l'infini majorée par :

$$u(x + iy) \leq A e^{\alpha|y|},$$

pour des constantes $A < \infty$ et $\alpha < \pi$. Si :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq \begin{cases} M_0 & \text{lorsque } \operatorname{Re} \zeta = 0, \\ M_1 & \text{lorsque } \operatorname{Re} \zeta = 1, \end{cases}$$

alors pour tout $x + iy \in B$:

$$u(x + iy) \leq M_0(1 - x) + M_1 x.$$

Démonstration. Introduisons la fonction $\tilde{u}: B \rightarrow [-\infty, \infty[$ définie par :

$$\tilde{u}(z) := u(z) - \operatorname{Re}(M_0(1 - z) + M_1 z).$$

Alors une application d'une version translatée du Théorème 6.9 avec $\gamma = \pi$ donne $\tilde{u} \leq 0$ sur B . \square

Théorème 6.11. [Phragmén-Lindelöf sur un secteur] Pour $\gamma > \frac{1}{2}$, soit le secteur angulaire :

$$S_\gamma := \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : |\arg z| < \frac{\pi}{2\gamma}\}.$$

Si une fonction u sous-harmonique dans S_γ ayant une croissance à l'infini majorée par :

$$u(z) \leq A + B|z|^\alpha,$$

pour des constantes $A, B < \infty$ et $\alpha < \gamma$, et si en tout point du bord fini :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial S_\gamma \setminus \{\infty\}),$$

alors $u \leq 0$ partout dans S_γ .

Démonstration. Choisissons un nombre intermédiaire $\alpha < \beta < \gamma$, et définissons une fonction harmonique $v: S_\gamma \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$v(z) := \operatorname{Re}(z^\beta) = r^\beta \cos(\beta t) \quad (z = re^{it} \in S_\gamma).$$

À l'infini, on a :

$$\liminf_{z \rightarrow \infty} v(z) \geq \liminf_{r \rightarrow \infty} r^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right) = \infty,$$

ainsi que :

$$\limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{u(z)}{v(z)} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{A + B r^\alpha}{r^\beta \cos\left(\frac{\beta\pi}{2\gamma}\right)} = 0.$$

À nouveau, le résultat découle donc du Théorème 6.1. \square

La fonction $u(z) := \operatorname{Re}(z^\gamma)$ montre qu'il n'y a pas extension au cas-limite $\alpha = \gamma$.

7. Critères pour la sous-harmonicité

Maintenant que le principe du maximum a été soigneusement présenté, nous pouvons entamer les aspects les plus centraux de la théorie des fonctions sous-harmoniques, notamment la *globalisation* de l'inégalité locale (4.3) de sous-moyenne.

Un rappel préliminaire s'impose, issu du chapitre consacré aux fonctions harmoniques.

Sur un disque ouvert $\Delta = \mathbb{D}_r(z_0)$ de rayon $r > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$, dont le bord $\partial\Delta$ est paramétré comme :

$$\zeta = z_0 + r e^{i\theta} \quad (0 \leq \theta < 2\pi),$$

lorsqu'une fonction intégrable $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$ est donnée, son *prolongement harmonique* au disque Δ a, en un point quelconque $z = z_0 + s e^{it} \in \Delta$ avec $0 \leq s < r$, une valeur fournie par la formule suivante de type convolution avec le noyau de Poisson :

$$\begin{aligned} (P_\Delta \phi)(z) &:= \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{|\zeta - z_0|^2 - |z - z_0|^2}{|(\zeta - z_0) - (z - z_0)|^2} u(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{|\zeta - z|^2} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Alors les fonctions sous-harmoniques obéissent à une inégalité absolument fondamentale qui fait intervenir le prolongement harmonique de leurs restrictions à des cercles.

Théorème 7.1. *Pour une fonction semi-continue supérieurement :*

$$u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$$

définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) u est sous-harmonique dans Ω ;

(ii) pour tout $z_0 \in \Omega$, tout $0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega)$, tout point $z \in \mathbb{D}_r(z_0) =: \Delta$, on a :

$$u(z) \leq P_\Delta(u|_{\partial\Delta})(z),$$

à savoir plus précisément, pour tout $0 \leq s < r$, tout $0 \leq t < 2\pi$, on a :

$$u(z_0 + s e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta;$$

(iii) pour tout sous-domaine relativement compact $\omega \Subset \Omega$, et toute fonction harmonique $h \in \text{Harm}(\omega)$ satisfaisant :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u - h)(z) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial\omega),$$

on a $u \leq h$ partout dans ω .

Démonstration. **(i)** \implies **(iii)**. Étant donné ω et $h \in \text{Harm}(\omega)$, la fonction $u - h$ est sous-harmonique dans ω (exercice) car (indication) $-h$ satisfait l'égalité de la moyenne, donc le Principe du Maximum 5.4 s'applique.

(iii) \implies **(ii)**. Soit un disque fermé $\bar{\Delta} := \bar{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Grâce au Théorème 3.6, il existe une suite décroissante de fonctions continues $\phi_n \geq \phi_{n+1} \geq u$ définies sur le cercle $\partial\Delta$ qui tendent ponctuellement vers $u|_{\partial\Delta}$. Leurs prolongements de Poisson $P_\Delta(\phi_n)$ sont alors harmoniques dans Δ . De plus, comme les ϕ_n sont continues, un théorème classique vu dans le chapitre sur les fonctions harmoniques assure qu'en tout point $\zeta \in \partial\Delta$:

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (P_\Delta \phi_n)(z) = \phi_n(\zeta).$$

Conséquemment et par semi-continuité supérieure de u :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta \in \partial\Delta} (u - P_\Delta \phi_n)(z) \leq u(\zeta) - \phi_n(\zeta) \leq 0.$$

Grâce à l'hypothèse **(iii)**, nous déduisons que $u \leq P_\Delta \phi_n$ dans Δ .

Enfin, $P_\Delta(\cdot)$ étant un opérateur intégral, le Théorème de convergence monotone — soustraire une constante pour se ramener à des fonctions toutes ≤ 0 — conclut :

$$u(z) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P_\Delta(\phi_n)(z) = P_\Delta\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n\right)(z) = P_\Delta(u|_{\partial\Delta})(z).$$

(ii) \implies **(i)**. Poser $s = 0$ offre l'inégalité de sous-moyenne de la Définition 4.2 initiale, satisfaite dorénavant non seulement pour $0 \leq r \leq r_0$ assez petit, mais encore pour *tous* les rayons r tels que $\bar{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. \square

Ceci mérite bien de mettre en exergue un bon petit

Corollaire 7.2. [Inégalité de sous-moyenne globale] Si une fonction u est sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, on a :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

$$u(z_0) \leq \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}_r(z_0)} u(x, y) dx dy.$$

Démonstration. La première inégalité coïncide avec **(ii)** du théorème précédent pour $s = 0$.

La deuxième inégalité en découle alors par intégration :

$$\int_0^r s ds \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta \leq \int_0^r s ds \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta,$$

suivie d'une réorganisation visuelle. \square

Corollaire 7.3. Si $f: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega' = f(\Omega)$ est un biholomorphisme entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}$, alors :

$$u' \in \text{SH}(\Omega') \implies u \circ f \in \text{SH}(\Omega).$$

Démonstration. Le critère (iii) de sous-harmonicité est invariant, puisque nous savons déjà que l'harmonie est invariante ! \square

Ainsi, il est possible d'étendre la définition de la sous-harmonicité aux domaines de la sphère de Riemann $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, et, plus généralement, aux ouverts quelconques des surfaces de Riemann arbitraires.

Une autre application donne la caractérisation concrète des fonctions de classe \mathcal{C}^2 qui sont sous-harmoniques, comme cela a été annoncée en début de chapitre.

Théorème 7.4. *Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ est sous-harmonique si et seulement si :*

$$\Delta u \geq 0.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\Delta u \geq 0$ sur Ω . Soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact, et soit une fonction harmonique $h \in \text{Harm}(\Omega)$ telle que, en tout point du bord $\zeta \in \partial\omega$:

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} (u - h)(z) \leq 0.$$

Grâce à la caractérisation (iii) de la sous-harmonicité, il suffit de faire voir que $u \leq h$ dans ω .

Pour $\varepsilon > 0$, introduisons à cette fin la fonction :

$$v_\varepsilon(z) := \begin{cases} u(z) - h(z) + \varepsilon |z|^2 & \text{lorsque } z \in \omega, \\ \varepsilon |z|^2 & \text{lorsque } z \in \partial\omega. \end{cases}$$

Comme v_ε est semi-continue supérieurement sur $\bar{\omega}$ (exercice mental), elle y atteint, par la Proposition 3.5, son maximum en au moins un point $z_0 \in \bar{\omega}$.

Mais z_0 ne peut pas appartenir à l'intérieur ω , à cause de :

$$\Delta v_\varepsilon = \Delta u - 0 + 4\varepsilon > 0 \quad (\text{sur } \omega),$$

car cette positivité implique que la dérivée seconde en tout point $z_0 = x_0 + iy_0 \in \omega$, soit de la fonction $x \mapsto v_\varepsilon(x, y_0)$, soit de la fonction $y \mapsto v_\varepsilon(x_0, y)$, est > 0 , ce qui rend au moins l'une de ces fonctions paraboliquement croissante, et contredit la maximalité en z_0 .

Donc le maximum de v_ε est atteint en un point $z_0 \in \partial\omega$, ce qui donne :

$$(u - h)(z) \leq \max_{z \in \partial\omega} \varepsilon |z|^2 \quad (\forall z \in \omega).$$

En faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, nous obtenons bien $u \leq h$ dans ω .

Réciproquement, supposons que $u \in \text{SH}(\Omega)$ est sous-harmonique. Dans un voisinage d'un point $z_0 \in \Omega$ avec $\varepsilon > 0$ très petit, développons alors u au second ordre taylorien :

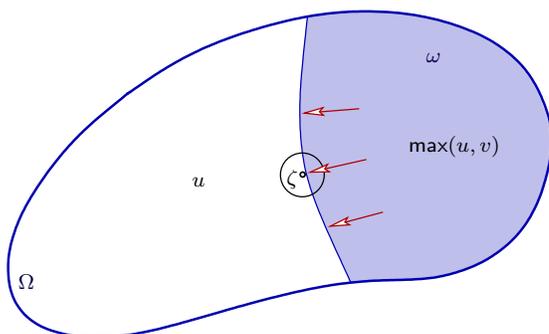
$$\begin{aligned} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) &= u(z_0) + \frac{\partial u}{\partial z}(z_0) \varepsilon e^{i\theta} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}}(z_0) \varepsilon e^{-i\theta} + \\ &+ \varepsilon^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(z_0) e^{2i\theta} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}(z_0) + \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z}^2}(z_0) e^{-2i\theta} \right) + \varepsilon^2 o(1). \end{aligned}$$

Intégrons ensuite par rapport à θ pour prendre la valeur moyenne de cela :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + \varepsilon e^{i\theta}) d\theta = u(z_0) + \varepsilon^2 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}(z_0) + \varepsilon^2 o(1).$$

L'inégalité de sous-moyenne (4.3) nécessite alors que $\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}}(z_0) \geq 0$. \square

Le résultat suivant illustre parfaitement la flexibilité des fonctions sous-harmoniques.



Théorème 7.5. [de recollement] Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et v une fonction sous-harmonique dans un sous-ouvert $\omega \subset \Omega$ satisfaisant, en tout point ζ de l'interface $\partial\omega \cap \Omega$:

$$\limsup_{\omega \ni z \rightarrow \zeta} v(z) \leq u(\zeta).$$

Alors la fonction :

$$\tilde{u} := \begin{cases} \max(u, v) & \text{sur } \omega, \\ u & \text{sur } \Omega \setminus \omega, \end{cases}$$

est sous-harmonique dans Ω .

Démonstration. La condition à l'interface garantit que \tilde{u} est semi-continue supérieurement dans Ω .

Ensuite, la Proposition 4.7 dit que $\max(u, v)$ satisfait l'inégalité de sous-moyenne locale en tout point de ω . Donc \tilde{u} est sous-harmonique dans $\Omega \setminus \partial\omega$.

Enfin, en un point $\zeta \in \partial\omega \cap \Omega$, sur des cercles $S_r(\zeta)$ de rayons $0 \leq r < \text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega)$, on a aussi :

$$\tilde{u}(\zeta) = u(\zeta) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\zeta + r e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(\zeta + r e^{i\theta}) d\theta,$$

simplement parce que $u \leq \tilde{u}$ partout. □

8. Théorèmes de convergence

Le premier résultat de convergence, pour les suites décroissantes, est simple, mais important. Il explique en partie pourquoi il est naturel de demander que les fonctions sous-harmoniques soient seulement semi-continues supérieurement : en effet, c'est la seule propriété qui est conservée lorsqu'on prend des limites décroissantes de fonctions continues, tandis que l'inégalité de sous-moyenne, elle, va s'avérer facilement préservée dans la démonstration.

Théorème 8.1. Soit $(u_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions sous-harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ qui est décroissante :

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq \dots$$

Alors la fonction-limite :

$$u := \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$$

est sous-harmonique dans Ω .

Démonstration. Pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble réunion dénombrable d'ouverts :

$$\{z \in \Omega : u(z) < c\} = \bigcup_{n \geq 1} \{u_n < c\}$$

est ouvert, donc u est semi-continue supérieurement.

Ensuite, si $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, alors pour tout $n \geq 1$:

$$u_n(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Grâce au théorème de convergence monotone, lorsque $n \rightarrow \infty$, on déduit que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne (globale), donc u sous-harmonique. \square

Il ne faut pas (du tout!) s'imaginer qu'il pourrait exister un énoncé analogue pour les suites croissantes de fonctions sous-harmoniques. Par exemple, la suite $u_n(z) := \frac{1}{n} \log |z|$ sur le disque unité \mathbb{D} a pour limite une fonction :

$$u(z) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } 0 < |z| < 1, \\ -\infty & \text{en } z = 0, \end{cases}$$

qui n'est même pas semi-continue supérieurement en 0!

Le résultat suivant généralise la Proposition 4.7 (i) pour un supremum pris sur un espace non forcément fini ou discret.

Théorème 8.2. Soit T un espace topologique compact, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, et soit $v : \Omega \times T \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction satisfaisant :

- v est semi-continue supérieurement sur $\Omega \times T$;
- $z \mapsto v(z, t)$ est sous-harmonique dans Ω , pour tout $t \in T$ fixé.

Alors la fonction :

$$u(z) := \sup_{t \in T} v(z, t)$$

est sous-harmonique dans Ω .

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ et soit $c \in \mathbb{R}$ telle que $u(z) < c$. Ainsi, pour tout $t \in T$, on a $v(z, t) < c$, et comme v est semi-continue supérieurement, il existe un voisinage V_t de t et un rayon $r_t > 0$ tels que :

$$v < c \quad \text{sur } \mathbb{D}_{r_t}(z) \times V_t \quad (\forall t \in T).$$

Par compacité de T , il y a un sous-recouvrement fini :

$$V_{t_1} \cup \dots \cup V_{t_k} \supset T.$$

Avec le rayon strictement positif :

$$s := \min(r_{t_1}, \dots, r_{t_k}) > 0,$$

on a donc $u < c$ sur $\mathbb{D}_s(z)$, ce qui établit la semi-continuité supérieure de u .

Ensuite, soit un disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Alors pour tout $t \in T$, on a :

$$v(z_0, t) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + r e^{i\theta}, t) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Il suffit de prendre le supremum sur $t \in T$ pour conclure que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne. \square

Le résultat suivant généralise la Proposition 4.7 (ii) pour une combinaison linéaire à coefficients positifs prise sur un espace non forcément fini ou discret.

Théorème 8.3. Soit (\mathcal{M}, μ) un espace mesuré de mesure $\mu(\mathcal{M}) < \infty$ finie, soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un domaine, et soit $v : \Omega \times \mathcal{M} \rightarrow [-\infty, \infty]$ une fonction satisfaisant :

- v est mesurable sur $\Omega \times \mathcal{M}$;
- $z \mapsto v(z, m)$ est sous-harmonique dans Ω , pour tout $m \in \mathcal{M}$ fixé ;
- $z \mapsto \sup_{m \in \mathcal{M}} v(z, m)$ est bornée supérieurement sur les compacts de Ω .

Alors la fonction :

$$u(z) := \int_{\mathcal{M}} v(z, m) d\mu(m)$$

est sous-harmonique dans Ω .

Démonstration. Il suffit de montrer que u est sous-harmonique dans tout sous-domaine relativement compact $\omega \Subset \Omega$.

Par la troisième hypothèse, $\sup_{m \in \mathcal{M}} v(z, m)$ est bornée supérieurement sur $\bar{\omega}$, donc après soustraction éventuelle d'une constante, on peut supposer que $v \leq 0$ sur $\omega \times \mathcal{M}$. Ceci légitimera l'utilisation du lemme de Fatou et du théorème de Fubini-Tonelli dans ce qui va suivre.

Si $z_0 \in \omega$, et si $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ est une suite arbitraire de points de ω telle que $z_n \rightarrow z_0$, Fatou puis la semi-continuité supérieure de $z \mapsto v(z, m)$ donnent :

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} u(z_n) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{M}} v(z_n, m) d\mu(m) \leq \int_{\mathcal{M}} \limsup_{n \rightarrow \infty} v(z_n, m) d\mu(m) \\ &\leq \int_{\mathcal{M}} v(z_0, m) d\mu(m) = u(z_0), \end{aligned}$$

ce qui est la semi-continuité supérieure de u en $z_0 \in \omega$.

Ensuite, pour tout disque $\bar{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \omega$, Fubini-Tonelli puis la sous-harmonicité de $z \mapsto v(z, m)$ donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathcal{M}} v(z_0 + r e^{i\theta}, m) d\mu(m) \right) d\theta \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + r e^{i\theta}, m) d\theta \right) d\mu(m) \\ &\geq \int_{\mathcal{M}} v(z_0, m) d\mu(m) = u(z_0), \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité de sous-moyenne pour u en z_0 . □

9. Intégrabilité des fonctions sous-harmoniques

D'après la Proposition 3.5, les fonctions sous-harmoniques sont bornées supérieurement sur les compacts. Un phénomène extrêmement important est qu'elles ne peuvent pas être « trop infinies inférieurement », au sens de la mesure. Rappelons l'expression de la mesure de Lebesgue comme 2-forme différentielle :

$$d\lambda = dx \wedge dy = \frac{i}{2} dz \wedge d\bar{z}.$$

Théorème 9.1. [SH $\subset L^1_{\text{loc}}$] Toute fonction sous-harmonique $u \not\equiv -\infty$ dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est localement intégrable au sens de Lebesgue :

$$\int_K |u| d\lambda < \infty \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compact}).$$

Démonstration. Par un argument direct de compacité, il suffit de montrer que pour tout $z_0 \in \Omega$, il existe $r > 0$ avec $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$ tel que :

$$\int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u(x, y)| dx \wedge dy < \infty.$$

À cet effet, décomposons $\Omega = E \cup F$ en les deux sous-ensembles disjoints :

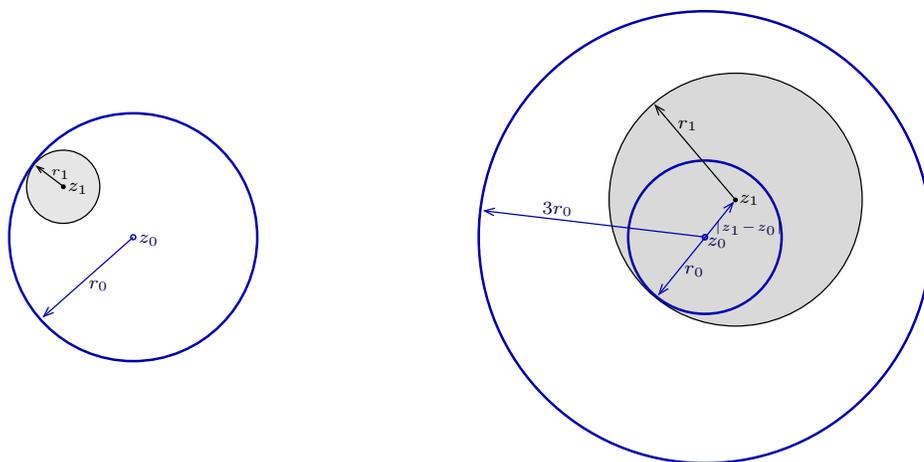
$$E := \{z_0 \in \Omega : \exists r > 0, \int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u| < \infty\},$$

et :

$$F := \{z_0 \in \Omega : \forall r > 0, \int_{\mathbb{D}_r(z_0)} |u| = \infty\}.$$

L'objectif est d'établir que $E = \Omega$.

Assertion 9.2. E est ouvert.



Preuve. Cette affirmation est tout à fait naturelle en théorie de l'intégration : soit $z_0 \in E$ et soit $r_0 > 0$ tel que $\int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u| < \infty$. Soit $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ et soit :

$$r_1 := r_0 - |z_1 - z_0| > 0,$$

comme sur la partie gauche de la figure. Alors puisque $\mathbb{D}_{r_1}(z_1) \subset \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ (avec point de tangence), on majore trivialement :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} |u| d\lambda \leq \int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u| d\lambda < \infty.$$

Ainsi, $z_1 \in E$ pour tout $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$ lorsque $z_0 \in E$. □

Assertion 9.3. F est aussi ouvert et de plus :

$$u|_F \equiv -\infty.$$

L'ouverture de F , « non-évidente », est le point-clé, et elle utilise réellement la sous-harmonicité de u .

Preuve. Soit $z_0 \in F$, et soit un rayon $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathbb{D}}_{3r_0}(z_0) \subset \Omega$, comme sur la partie droite de la figure. Puisque $z_0 \in F$:

$$\int_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} |u| d\lambda = \infty.$$

Ensuite, soit $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$, et soit :

$$r_1 := r_0 + |z_1 - z_0| < 2r_0.$$

Par inégalité triangulaire, on a :

$$\mathbb{D}_{r_0}(z_0) \subset \mathbb{D}_{r_1}(z_1) \subset \mathbb{D}_{3r_0}(z_0) \Subset \Omega,$$

le cercle $S_{r_1}(z_1)$ étant d'ailleurs tangent au cercle $S_{r_0}(z_0)$. Bien entendu :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} |u| d\lambda = \infty.$$

Maintenant, la Proposition 3.5 garantit que $u = u^+ - u^-$ avec $u^+ = \max(0, u) \geq 0$ et $u^- = -\min(u, 0) \geq 0$, est bornée supérieurement sur $\overline{\mathbb{D}}_{r_1}(z_1)$, à savoir u^+ l'est, donc $0 \leq \int u^+ < \infty$, et par conséquent, on a en fait :

$$\int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} u d\lambda = -\infty.$$

Rappelons que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne globale :

$$u(z_1) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_1 + s e^{it}) dt \quad (\forall 0 \leq s \leq r_1).$$

Multiplions cela par $2\pi s$ et intégrons de $s = 0$ à $s = r_1$:

$$\pi r_1^2 u(z_1) \leq \int_{\mathbb{D}_{r_1}(z_1)} u d\lambda = -\infty.$$

Cette inégalité étant valable quel que soit le choix initial de $z_1 \in \mathbb{D}_{r_0}(z_0)$, nous déduisons :

$$u|_{\mathbb{D}_{r_0}(z_0)} \equiv -\infty$$

Ceci montre bien que F est ouvert, et que de plus $u|_F \equiv -\infty$. \square

L'ouvert connexe $\Omega = E \cup F$ est réunion disjointe de deux ouverts, donc ou bien $\Omega = E$ (l'objectif annoncé), ou bien $\Omega = F$, mais dans ce dernier cas, l'assertion qui précède a de surcroît montré que $u|_F = u|_\Omega = u \equiv -\infty$, ce qui était exclu à l'avance par une hypothèse du théorème. \square

De $\text{SH}(\Omega) \subset L_{\text{loc}}^1(\Omega)$, nous allons déduire que les fonctions sous-harmoniques non identiquement égales à $-\infty$ sont intégrables sur tout cercle.

Corollaire 9.4. *Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, si $u \in \text{SH}(\Omega) \setminus \{-\infty\}$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, on a :*

$$-\infty < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta < \infty.$$

Démonstration. L'inégalité supérieure provenant du fait que u est bornée supérieurement sur tout compact, c'est l'inégalité inférieure qui compte. Après soustraction éventuelle d'une constante, on peut donc supposer que $u \leq 0$ sur $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$.

D'après le Théorème 7.1 (ii), pour tout $0 \leq s < r$ et tout $0 \leq t < 2\pi$, le prolongement harmonique de la restriction de u au cercle $S_r(z_0)$ majore u :

$$u(z_0 + s e^{it}) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Effectuons alors une majoration de type Harnack pour le noyau (exercice) :

$$\frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} \cdot (-1) \leq \frac{r - s}{r + s} \cdot (-1),$$

ce qui donne :

$$u(z_0 + s e^{it}) \leq \frac{r - s}{r + s} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Maintenant, si l'intégrale du membre de droite était égale à $-\infty$, ceci impliquerait :

$$u|_{\mathbb{D}_r(z_0)} \equiv -\infty,$$

puis, grâce au Théorème 9.1 fondamental qui précède, $u \equiv -\infty$ dans Ω , ce qui n'est pas !

Donc on a bien :

$$-\infty < \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \leq 0,$$

pour tout disque fermé $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. □

Une autre conséquence de ce théorème fondamental est que les fonctions sous-harmoniques ne peuvent pas être égales à $-\infty$ sur des ensembles trop substantiels.

Définition 9.5. Le lieu polaire d'une fonction $u \in \text{SH}(\Omega)$ est :

$$\{z \in \Omega : u(z) = -\infty\}.$$

Corollaire 9.6. Si une fonction $u \not\equiv -\infty$ est sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors son lieu polaire est de mesure de Lebesgue égale à 0.

Démonstration. Soit $(K_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite croissante $K_j \subset K_{j+1}$ de compacts qui remplit $\Omega = \cup K_j$. On a grâce au Théorème 9.1 :

$$\int_{K_j} |u| d\lambda < \infty \quad (\forall j \geq 1),$$

donc par un théorème élémentaire de théorie de l'intégration :

$$0 = \text{mesure}(\{u = -\infty\} \cap K_j) \quad (\forall j \geq 1),$$

et enfin on obtient la nullité de la mesure de $\{u = -\infty\}$ comme réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle. □

10. Lieux polaires des fonctions sous-harmoniques

Bien entendu, lorsque $u = \log |f|$ pour une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ non identiquement nulle, le lieu polaire $\{u = -\infty\} = \{f = 0\}$ est discret, dénombrable.

Toutefois, cet exemple n'est pas représentatif de la vraie généralité des fonctions sous-harmoniques. En fait, il en existe qui sont égales à $-\infty$ sur des sous-ensembles (non-ouverts) non dénombrables, comme nous allons le voir.

En guise de préliminaire, quelques rappels s'imposent sur les ensembles parfaits et sur les théorèmes catégoriques de Baire. Soit (X, d) un espace métrique complet muni d'une distance d , par exemple \mathbb{R}^N avec $N \geq 1$, muni de la distance euclidienne.

Pour $x \in X$ et $r > 0$, soient les boules ouvertes et fermées :

$$B_r(x) := \{y \in X : d(x, y) < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}_r(x) := \{y \in X : d(x, y) \leq r\}.$$

Définition 10.1. Un sous-ensemble $P \subset X$ est dit *parfait* lorsqu'il satisfait l'une des conditions équivalentes suivantes :

- pour tout point $p \in P$, on a $p \in \overline{P \setminus \{p\}}$, à savoir, aucun point de p n'est *isolé* dans P ;
- pour tout point $p \in P$, il existe une suite $(p_n)_{n=1}^\infty$ de points $p_n \in P$ tous distincts de p telle que $p_n \rightarrow p$;
- l'ensemble dérivé de P :

$$P' := \{p' \in X : \exists (p_n)_{n=1}^\infty, p_n \in P, p_n \neq p', p_n \rightarrow p'\} = P$$

coïncide avec lui-même.

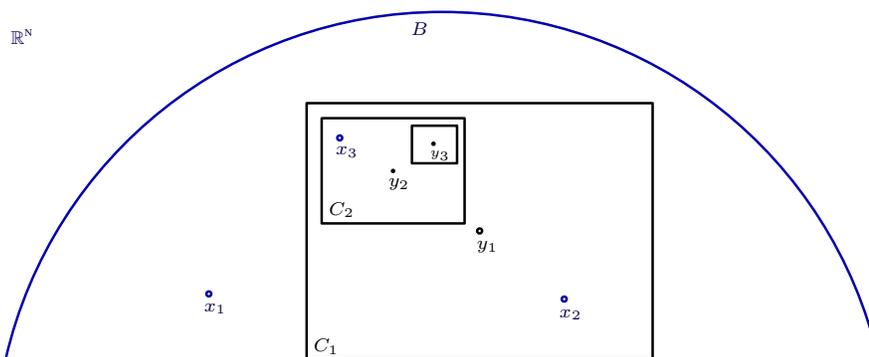
En particulier, tout ensemble parfait est fermé. Le cas de la dimension $N = 2$ dans l'énoncé suivant nous sera utile.

Théorème 10.2. *Tout sous-ensemble parfait non vide $P \subset \mathbb{R}^N$ est de cardinal non dénombrable.*

Démonstration. Si on avait $\text{Card } P < \infty$, son ensemble dérivé $P' = \emptyset$ serait vide (exercice mental), ce qui n'est pas. Donc $\text{Card } P = \infty$.

En raisonnant par l'absurde, supposons donc que $\text{Card } P = \text{Card } \mathbb{N}^*$ soit infini dénombrable. Via une bijection entre \mathbb{N}^* et P , énumérons alors tous les points de P sous forme d'une suite :

$$P = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}.$$



Pour commencer, soit $B \in \mathbb{R}^N$ une boule ouverte non vide relativement compacte contenant x_1 . Comme P est parfait, x_1 n'est pas isolé, donc il existe un point :

$$y_1 \in P \cap B,$$

tel que :

$$y_1 \neq x_1.$$

Choisissons alors un cube ouvert $C_1 \subset B$ centré en y_1 de côté assez petit pour que :

$$x_1 \notin \overline{C_1}.$$

Ensuite et à nouveau parce que P est parfait, $y_1 \in P$ n'est pas isolé, donc il existe un point :

$$y_2 \in P \cap C_1.$$

tel que :

$$y_2 \neq y_1 \quad \text{et de plus :} \quad y_2 \neq x_2.$$

On choisit alors un cube ouvert non vide C_2 centré en y_2 de côté assez petit pour que :

$$x_2, y_1 \notin \overline{C_2}.$$

On se convainc alors (exercice) qu'il est possible de construire par induction une suite infinie de points $(y_n)_{n=1}^\infty$ distincts deux à deux et une suite de cubes ouverts $(C_n)_{n=1}^\infty$ centrés en les y_n satisfaisant, pour tout $n \geq 1$:

- (i) $C_{n+1} \subset C_n \subset B$;
- (ii) $y_n \in P \cap C_n$;
- (iii) $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_{n-1} \notin \overline{C_n}$.

Ainsi les sous-ensembles fermés de \mathbb{R}^N :

$$K_n := \overline{C_n} \cap P \quad (n \geq 1)$$

sont compacts, puisque tous contenus dans $\overline{B} \Subset \mathbb{R}^N$, et emboîtés :

$$K_n \subset K_{n+1} \quad (\forall n \geq 1).$$

Un théorème classique de topologie métrique assure alors que l'intersection infinie :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset$$

est un sous-ensemble *non vide* de P .

Mais comme par construction on a arrangé pour tout $n \geq 1$ que :

$$x_1, \dots, x_n \notin \overline{C_n} \cap P = K_n,$$

aucun point de $P = \{x_1, \dots, x_n, \dots\}$ ne peut rester dans $\bigcap_n K_n$, ce qui est la contradiction conclusive montrant que P est non dénombrable. \square

Bien entendu, ce théorème est tout aussi vrai dans un espace métrique complet (X, d) quelconque.

Définition 10.3. Dans un espace métrique (X, d) , un sous-ensemble $D \subset X$ est dit *dense* lorsque tout point de X lui est adhérent :

$$\overline{D} = X.$$

Observation 10.4. On a équivalence entre :

- $D \subset X$ est dense ;
- $D \cap B_r(x) \neq \emptyset$ pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$;
- $D \cap U \neq \emptyset$ pour tout ouvert non vide $U \subset X$.

Démonstration. La vérification complète est laissée en exercice ; s'inspirer du raisonnement de l'Observation 10.7. \square

Définition 10.5. Dans un espace métrique (X, d) , un sous-ensemble $A \subset X$ est dit *nulle part dense* lorsque l'intérieur de son adhérence est vide :

$$\text{Int}(\overline{A}) = \emptyset.$$

Lemme 10.6. Pour tout ouvert $O \subset X$, on a :

$$X \setminus \overline{O} = \text{Int}(X \setminus O).$$

Démonstration. Tout d'abord, $\overline{O} \supset O$ donne $X \setminus \overline{O} \subset X \setminus O$, d'où en prenant les intérieurs :

$$X \setminus \overline{O} \subset \text{Int}(X \setminus O).$$

Pour l'inclusion inverse, un énoncé élémentaire sera utile.

Observation 10.7. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide, et soit $G \subset X$ un sous-ensemble quelconque. Alors :

$$U \cap G = \emptyset \implies U \cap \overline{G} = \emptyset.$$

Démonstration. En effet, tout point $g_\infty \in \overline{G} \setminus G$ est limite $g_\infty = \lim g_n$ d'une suite convergente de points $g_n \in G$. Si on avait $g_\infty \in U$, alors à partir d'un certain rang $n \geq N \gg 1$, tous les g_n , proches de g_∞ , devraient se trouver dans l'ouvert U , mais $g_n \in U \cap G = \emptyset$ est impossible. \square

Soit $x \in \text{Int}(X \setminus O)$ quelconque, c'est-à-dire qu'il existe $r > 0$ tel que la boule ouverte :

$$B_r(x) \subset X \setminus O,$$

donc $B_r(x) \cap O = \emptyset$. L'observation qui précède donne $B_r(x) \cap \overline{O} = \emptyset$. En particulier, le centre $x \in X \setminus \overline{O}$, et ceci établit l'inclusion inverse :

$$\text{Int}(X \setminus O) \subset X \setminus \overline{O}$$

conclusive. \square

Lemme 10.8. Un ouvert $O \subset X$ d'un espace métrique (X, d) est dense dans X si et seulement si le fermé complémentaire $F := X \setminus O$ est d'intérieur vide.

Démonstration. Il s'agit de montrer que :

$$\overline{O} = X \iff \text{Int}(X \setminus O) = \emptyset,$$

ou, de manière équivalente, d'établir la contraposée :

$$\overline{O} \subsetneq X \iff \text{Int}(X \setminus O) \neq \emptyset,$$

qui est un corollaire (visuel) du Lemme 10.6. \square

Lemme 10.9. Étant donné un nombre fini $\kappa \geq 2$ d'ouverts denses O_1, \dots, O_κ dans un espace métrique (X, d) , leur intersection :

$$O_1 \cap \dots \cap O_\kappa$$

est encore un ouvert dense de X .

Démonstration. Pour de simples raisons logiques, le cas $\kappa = 2$ implique trivialement le cas général $\kappa \geq 2$. Traitons donc le cas $\kappa = 2$.

Soit $x \in X$ un point quelconque, et soit $B_r(x)$ une boule centrée en x de rayon $r > 0$ arbitrairement petit. Il s'agit de trouver, dans cette boule, au moins un point :

$$y_2 \in O_2 \cap O_1 \cap B_r(x).$$

Mais O_1 est dense, donc il existe $y_1 \in O_1 \cap B_r(x)$. Qui plus est, O_1 est ouvert, donc il existe une boule :

$$B_{s_1}(y_1) \subset O_1 \cap B_r(x) \quad (\exists s_1 > 0).$$

Mais O_2 est dense, donc il existe :

$$y_2 \in O_2 \cap B_{s_1}(y_1),$$

et alors un tel y_2 fait parfaitement l'affaire ! \square

Bien entendu, quand on passe à un nombre infini dénombrable d'ouverts denses $\overline{O}_k = X$, $k \geq 1$, l'intersection $\bigcap_k O_k$ cesse en général d'être ouverte. Mais le célèbre *Théorème de Baire* dont la démonstration est si élémentaire et dont les applications à l'Analyse et à la Topologie sont si fantastiques, montre qu'on conserve la densité.

Théorème 10.10. [de Baire] Dans un espace métrique complet (X, d) :

(i) toute intersection infinie dénombrable $\bigcap_{k \geq 1} O_k$ d'ouverts $O_k \subset X$ denses $\overline{O}_k = X$ est encore dense :

$$\overline{\bigcap_{k \geq 1} O_k} = X;$$

(ii) toute réunion infinie dénombrable $\bigcup_{k \geq 1} F_k$ de sous-ensembles fermés $F_k \subset X$ d'intérieur $\text{Int } F_k = \emptyset$ vide est encore d'intérieur vide :

$$\text{Int } \bigcup_{k \geq 1} F_k = \emptyset.$$

Démonstration. Eu égard au Lemme 10.8 et à la correspondance :

$$F_k = X \setminus O_k \iff O_k = X \setminus F_k \quad (k \geq 1),$$

les deux énoncés (i) et (ii) sont équivalents entre eux.

Focalisons-nous donc sur (i). Soit $U \subset X$ un ouvert non vide quelconque. Le but est de montrer que :

$$\emptyset \neq U \cap \left(\bigcap_{k \geq 1} O_k \right).$$

Comme O_1 est dense, il existe $x_1 \in U \cap O_1$, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une certaine boule ouverte centrée en x_1 :

$$U \cap O_1 \supset B_{2r_1}(x_1),$$

de rayon $2r_1$ avec $0 < r_1 \leq \frac{1}{2}$; ici, $2r_1$ est une marge de sécurité qui sera utile plus tard.

Ensuite, comme O_2 est dense, il existe $x_2 \in B_{r_1}(x_1) \cap O_2$ — noter qu'on passe à une sous-boule —, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une boule ouverte centrée en x_2 :

$$B_{r_1}(x_1) \cap O_2 \supset B_{2r_2}(x_2).$$

de rayon $2r_2$, avec $0 < r_2 \leq \frac{1}{2^2}$, quitte à rapetisser le rayon. Par construction :

$$U \cap O_1 \cap O_2 \supset B_{2r_2}(x_2).$$

Affirmation 10.11. Il existe une suite infinie $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ de points $x_k \in X$ et des rayons $0 < r_k \leq \frac{1}{2^k}$ tels que :

$$B_{r_k}(x_k) \cap O_{k+1} \supset B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}) \quad (\forall k \geq 1).$$

Preuve. Par récurrence, supposons x_k et r_k déjà construits. Comme O_{k+1} est dense, il existe $x_{k+1} \in B_{r_k}(x_k) \cap O_{k+1}$, et comme cette intersection est ouverte, elle contient une boule ouverte centrée en x_k :

$$B_{r_k}(x_k) \cap O_{k+1} \supset B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}),$$

de rayon $2r_{k+1}$, avec $0 < r_{k+1} \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. □

Il découle de cette construction gigogne que :

$$U \cap O_1 \cap \cdots \cap O_k \supset B_{2r_k}(x_k) \quad (\forall k \geq 1).$$

Le doublage des rayons comme marge de sécurité sert maintenant à garantir que les boules fermées :

$$\overline{B}_{r_{k+1}}(x_{k+1}) \subset B_{2r_{k+1}}(x_{k+1}) \subset B_{r_k}(x_k) \subset \overline{B}_{r_k}(x_k) \quad (k \geq 1)$$

sont emboîtées les unes dans les autres. D'après un théorème classique de topologie métrique, comme X est complet, leur intersection infinie :

$$\bigcap_{k \geq 1} \overline{B}_{r_k}(x_k) = \{p\}$$

est *non vide*, constituée d'ailleurs d'un point unique. Or comme :

$$U \cap O_1 \cap \cdots \cap O_k \supset \overline{B}_{r_k}(x_k) \quad (\forall k \geq 1),$$

il vient :

$$U \cap \left(\bigcap_{k \geq 1} O_k \right) \supset \{p\} = \bigcap_{k \geq 1} \overline{B}_{r_k}(x_k),$$

ce qui montre bien que cette intersection est non vide. \square

Voici une conséquence très souvent utilisée de ce résultat.

Théorème 10.12. [de Baire bis] *Si un espace métrique complet (X, d) non vide s'écrit comme réunion dénombrable de fermés :*

$$X = \bigcup_{k \geq 1} F_k,$$

alors l'un au moins F_{k_} de ces fermés possède un intérieur non vide :*

$$\emptyset \neq \text{Int } F_{k_*} \quad (\exists k_* \geq 1).$$

Qui plus est, la réunion des intérieurs de ces fermés :

$$\overline{\bigcup_{k \geq 1} \text{Int } F_k} = X$$

est dense dans X .

Démonstration. Soit $U \subset X$ un ouvert non vide quelconque. Sa fermeture \overline{U} est alors un espace métrique complet.

Introduisons les ouverts relatifs de \overline{U} :

$$O_k := \overline{U} \setminus F_k \quad (k \geq 1).$$

L'hypothèse $\bigcup_k F_k = X$ se traduit en passant aux complémentaires par :

$$\bigcap_{k \geq 1} O_k = \emptyset \quad (\text{dans } \overline{U}).$$

Or ces O_k peuvent-ils être *tous* denses ? Ah que non ! Car le Théorème 10.10 impliquerait la non-vacuité de leur intersection.

L'un, au moins, disons O_{k_*} , de ces ouverts, n'est donc pas dense dans \overline{U} , c'est-à-dire qu'il existe un ouvert non vide $V \subset \overline{U}$ tel que :

$$O_{k_*} \cap V = \emptyset.$$

Mais comme U est ouvert, on a de plus $U \cap V \neq \emptyset$. Nous pouvons donc trouver un point $x \in V \cap U$ et une boule de rayon $r > 0$ centrée en x tels que :

$$B_r(x) \subset U \cap V,$$

d'où :

$$B_r(x) \cap O_{k_*} = \emptyset.$$

Nous avons donc trouvé une boule ouverte entièrement contenue dans le fermé :

$$F_{k_*} = \bar{U} \setminus O_{k_*},$$

lequel est donc d'intérieur non vide !

De plus, comme l'ouvert de départ U était arbitraire, nous avons montré que la réunion des intérieurs des F_k rencontre tout U , donc que cette réunion est dense. \square

Voici enfin l'énoncé promis qui révèle une complexité intéressante des fonctions sous-harmoniques.

Théorème 10.13. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble compact qui est parfait, à savoir sans point isolé, soit $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dénombrable dense de points $z_n \in K$, et soit $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de nombres $a_n > 0$ tels que $\sum_n a_n < \infty$. Alors la fonction $u: \mathbb{C} \rightarrow [-\infty, \infty[$ définie par :*

$$u(z) := \sum_{n \geq 1} a_n \log |z - z_n| \quad (z \in \mathbb{C})$$

satisfait :

- (i) u est sous-harmonique dans \mathbb{C} et $u \not\equiv -\infty$;
- (ii) $u = -\infty$ sur un sous-ensemble dense non dénombrable de K ;
- (iii) u est non continue en presque tout point de K .

Démonstration. (i). Avec les notations du Théorème 8.3, sur l'espace $\mathcal{M} := \mathbb{N}^*$ muni de la mesure $\mu(\{n\}) := a_n$ pour $n \geq 1$ telle que $\mu(\mathcal{M}) < \infty$, introduisons la fonction :

$$v: \mathbb{C} \times \mathbb{N}^* \rightarrow [-\infty, \infty[, \\ (z, n) \mapsto \log |z - z_n|.$$

Alors d'après ledit théorème, la fonction :

$$\int_{\mathbb{N}^*} v(z, n) d\mu(n) = \sum_{n \geq 1} a_n \log |z - z_n| =: u(z)$$

est sous-harmonique dans \mathbb{C} tout entier. De plus, il est clair (exercice mental) que $u(z) > -\infty$ pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus K$, d'où $u \not\equiv -\infty$.

(ii). Examinons donc l'ensemble polaire :

$$\{u = -\infty\}.$$

Nous venons de dire que $\{u = -\infty\} \subset K$. De plus, chaque élément $z_n \in K$ de la suite dense appartient à $\{u = -\infty\}$, à cause du terme $a_n \log |z_n - z_n| = -\infty$, donc on a la densité :

$$\overline{\{u = -\infty\}} = K.$$

Ensuite, son complémentaire dans K :

$$(10.14) \quad K \setminus \{u = -\infty\} = \bigcup_{j \geq 1} \{z \in K: u(z) \geq -j\},$$

s'écrit comme réunion dénombrable de sous-ensembles *fermés*, car u est sous-harmonique, et d'intérieur vide dans K , car la collection $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \{u = -\infty\}$ est dense dans K (exercice mental).

Notons que K , muni de la topologie euclidienne induite de celle de $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$, est un espace métrique complet, et puisque K est parfait, le Théorème 10.2 assure qu'il est de cardinal non dénombrable.

Affirmation 10.15. *L'ensemble polaire $\{u = -\infty\}$ est non-dénombrable.*

Preuve. Sinon, s'il était dénombrable, il serait (trivialement) réunion dénombrable de fermés (singletons) d'intérieur vide, et alors en revenant à (10.14) :

$$K = \{u = -\infty\} \cup \left(\bigcup_{j \geq 1} \{z \in K : u(z) \geq -j\} \right),$$

l'espace métrique complet K lui-même serait réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide, en contradiction flagrante avec le Théorème 10.12 de Baire bis. \square

Donc $\{u = -\infty\}$ est bien non-dénombrable.

(iii). Il est instantané que la fonction u est non-continue en tout point de :

$$\overline{\{u = -\infty\}} \setminus \{u = -\infty\}.$$

Or nous avons vu que :

$$\overline{\{u = -\infty\}} = K,$$

et comme le Corollaire 9.6 nous a informé qu'un ensemble polaire tel que $\{u = -\infty\}$ est toujours de mesure de Lebesgue égale à 0, nous concluons bien que u est non-continue en presque tout point de K . \square

11. Convexité et sous-harmonicité

Comme nous l'avons déjà notifié, il existe des analogies profondes entre les fonctions convexes sur \mathbb{R} et les fonctions sous-harmoniques sur \mathbb{C} .

Rappelons qu'une fonction $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe si, pour tout $0 < \mu_1, \dots, \mu_k < 1$ avec $1 = \mu_1 + \dots + \mu_k$, pour tous $t_1, \dots, t_k \in \mathbb{R}$, elle satisfait l'inégalité :

$$\psi(\mu_1 t_1 + \dots + \mu_k t_k) \leq \mu_1 \psi(t_1) + \dots + \mu_k \psi(t_k) \quad (k \geq 2).$$

Les fonctions convexes sont continues (exercice de révision). Pour application aux fonctions sous-harmoniques, nous aurons besoin d'une version continue classique de cette inégalité discrète.

Théorème 11.1. [Inégalité de Jensen réelle] *Soient deux nombres réels $-\infty \leq a < b \leq \infty$, et soit $\psi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Soit aussi (\mathcal{M}, μ) un espace mesuré de mesure $\mu(\mathcal{M}) = 1$, et soit $f: \mathcal{M} \rightarrow]a, b[$ une fonction Lebesgue-intégrable. Alors :*

$$\psi \left(\int_{\mathcal{M}} f d\mu \right) \leq \int_{\mathcal{M}} \psi \circ f d\mu.$$

Démonstration. Abrégeons :

$$c := \int_{\mathcal{M}} f d\mu.$$

Puisque $a < f(m) < b$ pour tout $m \in \mathcal{M}$ et puisque $\mu(\mathcal{M}) = 1$, il est clair que $a < c < b$. Comme la fonction ψ est convexe, pour tout couple de points :

$$a < t_1 < c < t_2 < b,$$

avec la combinaison linéaire à coefficients (strictement) positifs :

$$c = \frac{t_2 - c}{t_2 - t_1} t_1 + \frac{c - t_1}{t_2 - t_1} t_2 = \mu_1 t_1 + \mu_2 t_2 \quad (\mu_1 + \mu_2 = 1),$$

on a :

$$\psi(c) \leq \frac{t_2 - c}{t_2 - t_1} \psi(t_1) + \frac{c - t_1}{t_2 - t_1} \psi(t_2).$$

Mais après réorganisation, ceci devient (exercice) :

$$\frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leq \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c},$$

puis, en prenant supremum et infimum :

$$\sup_{t_1 \in]a, c[} \frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leq \inf_{t_2 \in]c, b[} \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c}.$$

Par conséquent, pour un nombre réel quelconque $\sup(\cdot) \leq M \leq \inf(\cdot)$ coincé entre ce supremum et cet infimum — et dorénavant fixé —, et pour tous $a < t_1 < c < t_2 < b$, on a :

$$\frac{\psi(c) - \psi(t_1)}{c - t_1} \leq M \leq \frac{\psi(t_2) - \psi(c)}{t_2 - c},$$

d'où découle, après réorganisation, l'inégalité uniforme (exercice) :

$$\psi(t) \geq \psi(c) + M(t - c) \quad (\forall t \in]a, b[).$$

Or maintenant, tout est presque fini : en insérant $t := f(m)$ et en intégrant par rapport à μ , il vient :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{M}} \psi(f(m)) d\mu(m) &\geq \int_{\mathcal{M}} \psi(c) d\mu(m) + M \int_{\mathcal{M}} (f(m) - c) d\mu(m) \\ &= \psi(c) + 0, \end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité qui était ardemment désirée. \square

Ceci nous permet d'engendrer par composition une grande quantité de fonctions sous-harmoniques nouvelles.

Théorème 11.2. Soient deux nombres réels $-\infty \leq a < b \leq \infty$, soit $u: \Omega \rightarrow]a, b[$ une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\psi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe croissante. Alors :

$$\psi \circ u$$

est sous-harmonique dans Ω , où $\psi(a) := \lim_{t \rightarrow a} \psi(t)$.

Noter que u est à valeurs dans $]a, b[$, mais que ψ est définie seulement sur $]a, b[$, ce qui se produit réellement lorsque $a = -\infty$.

Démonstration. Pour commencer, soit $(a_n)_{n=1}^\infty$ une suite de réels $a_n \in]a, b[$ qui tend en décroissant vers $a_n \downarrow a$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction :

$$u_n := \max(u, a_n)$$

est sous-harmonique.

Lemme 11.3. Soient deux réels $-\infty \leq c < d \leq \infty$, soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $v: \Omega \rightarrow]c, d[$ une fonction semi-continue supérieurement, soit $\chi:]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue croissante. Alors :

$$\chi \circ v$$

est semi-continue supérieurement.

Démonstration. En tout point $z_0 \in \Omega$, on a par hypothèse :

$$\limsup_{z \rightarrow z_0} v(z) \leq v(z_0).$$

Autrement dit :

$$\forall \delta > 0 \quad \forall (z_n)_{n=1}^\infty \rightarrow z_0, \quad \exists N \gg 1 \quad (n \geq N \implies v(z_n) \leq v(z_0) + \delta).$$

Mais la croissance de χ préserve cette inégalité :

$$\chi(v(z_n)) \leq \chi(v(z_0) + \delta),$$

et comme χ est de plus continue, lorsque $\delta \rightarrow 0$, le membre de droite tend vers $\chi(v(z_0))$. \square

Grâce à ce lemme, comme toute fonction convexe est continue, les $\psi \circ u_n$ sont semi-continues supérieurement. Notons qu'il était d'une certaine façon nécessaire de tronquer u en u_n pour travailler avec des fonctions à valeurs dans $]a, b[$.

Ensuite, pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, l'inégalité de sous-moyenne (globale) satisfaite par u_n composée avec ψ croissante donne :

$$\begin{aligned} \psi \circ u_n(z_0) &\leq \psi \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi \circ u_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

la seconde inégalité provenant de l'inégalité de Jensen réelle 11.1 appliquée à la mesure de probabilité $\frac{d\theta}{2\pi}$ sur le cercle unité.

Ceci montre que $\psi \circ u_n$ est sous-harmonique, pour tout $n \geq 1$.

Enfin, comme $\psi \circ u_n \downarrow \psi \circ u$ tend en décroissant vers $\psi \circ u$, le Théorème 8.1 achève de montrer que $\psi \circ u \in \text{SH}(\Omega)$. \square

Corollaire 11.4. Si une fonction u est sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\exp u$ l'est aussi. \square

Corollaire 11.5. Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, $f \neq 0$, et pour tout exposant réel $\alpha > 0$, on a :

$$|f|^\alpha \in \text{SH}(\Omega).$$

Démonstration. La fonction sous-harmonique $u := \alpha \log |f|$ a pour exponentielle $|f|^\alpha$. \square

À l'opposé d'une fonction convexe (croissante), la fonction logarithme est concave. Néanmoins, voici un énoncé qui garantit que le logarithme d'une fonction est sous-harmonique.

Théorème 11.6. *Si $u: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ est une fonction définie sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors on a équivalence entre :*

- (i) $\log u$ est sous-harmonique dans Ω ;
- (ii) $u |e^q|$ est sous-harmonique dans Ω , pour tout polynôme complexe $q \in \mathbb{C}[z]$.

Démonstration. Si $\log u$ est sous-harmonique, alors $\log u + \operatorname{Re} q$ l'est aussi, puis en prenant l'exponentielle, $u |e^q|$ aussi grâce au Corollaire pénultième.

Réciproquement, supposons (ii). Avec $q = 0$, on voit que u est sous-harmonique, donc en particulier semi-continue supérieurement. Le Lemme 11.3 donne que $\log u$ est encore semi-continue supérieurement.

Pour établir que $\log u$ satisfait l'inégalité de sous-moyenne, soit un disque $\Delta = \overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Le Théorème 3.6 fournit une suite de fonctions continues $\phi_n: \partial\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ qui tendent en décroissant vers $\log u$ sur le bord :

$$\phi_n \downarrow \log u|_{\partial\Delta}.$$

Le Théorème de Stone-Weierstrass montre par ailleurs que pour tout $n \geq 1$, il existe un polynôme $q_n \in \mathbb{C}[z]$ tel que :

$$0 \leq \operatorname{Re} q_n - \phi_n \leq \frac{1}{n} \quad (\text{sur } \partial\Delta).$$

Alors de $u \leq e^{\phi_n}$, nous déduisons en tout point $\zeta \in \partial\Delta$:

$$\begin{aligned} \limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) |e^{-q_n(z)}| &\leq \limsup_{z \rightarrow \zeta} e^{\phi_n(z)} |e^{-q_n(z)}| \\ &\leq e^{\phi_n(\zeta)} e^{-\operatorname{Re} q_n(\zeta)} \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Mais comme $u |e^{-q_n}|$ est supposée sous-harmonique, le Principe du Maximum 5.4 au bord donne à l'intérieur :

$$u(z) |e^{-q_n(z)}| \leq 1 \quad (\forall z \in \Delta).$$

Alors en prenant les logarithmes au point central z_0 et en utilisant l'harmonicité de $\operatorname{Re} q_n(z)$:

$$\begin{aligned} \log u(z_0) \leq \operatorname{Re} q_n(z_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} q_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \phi_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire $n \rightarrow \infty$ et à appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir l'inégalité :

$$\log u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

de sous-moyenne ainsi satisfaite par $\log u$. □

Lorsqu'une fonction est radiale, *i.e.* ne dépend que de la distance à l'origine, la sous-harmonicité revient à la convexité réelle standard.

Théorème 11.7. Soit $v: \mathbb{D}_R(0) \longrightarrow [-\infty, \infty[$, $R > 0$, une fonction radiale, $v(z) = v(|z|)$, avec $v \not\equiv -\infty$. Alors on a équivalence entre :

- (i) v est sous-harmonique dans $\mathbb{D}_R(0)$;
- (ii) $r \longmapsto v(r)$ est une fonction convexe croissante de $\log r$ pour $0 < r < R$, qui est continue à l'origine $v(0) = \lim_{r \searrow 0} v(r)$.

Démonstration. Dans le sens (ii) \implies (i), il suffit d'appliquer le Théorème 11.2 aux fonctions $u(z) := \log |z|$ et $\psi(t) := v(e^t)$.

Réciproquement, soit v radiale sous-harmonique dans $\mathbb{D}_R(0)$. Pour deux rayons intermédiaires :

$$0 \leq r_1 < r_2 < R,$$

le principe du maximum appliqué à v sur $\mathbb{D}_{r_2}(0)$ et la radialité de v donnent :

$$v(r_1) \leq \sup_{\partial \mathbb{D}_{r_2}(0)} v = v(r_2),$$

ce qui montre que v est croissante sur $[0, R[$.

Pour ce qui est de la continuité en 0, cette croissance implique :

$$\liminf_{r \rightarrow 0} v(r) \geq v(0),$$

tandis que la semi-continuité supérieure n'est autre que :

$$\limsup_{r \rightarrow 0} v(r) \leq v(0),$$

donc v est continue en 0 !

Il reste à faire voir que $v(r)$ est une fonction convexe de $\log r$. Comme $v \not\equiv -\infty$ est radiale, son intégrale sur tout cercle centré à l'origine est constante. Alors le Corollaire 9.4 garantit que :

$$-\infty < v(r) \quad (\forall 0 < r < R).$$

Ensuite, soient deux rayons intermédiaires :

$$0 < r_1 < r_2 < R.$$

Par résolution linéaire, il existe deux constantes réelles α, β uniques telles que :

$$\begin{aligned} \alpha + \beta \log r_1 &= v(r_1), \\ \alpha + \beta \log r_2 &= v(r_2), \end{aligned}$$

et il n'est pas nécessaire d'écrire les formules explicites de Cramér pour α et β . Alors le principe du maximum appliqué à la fonction $v(z) - \alpha - \beta \log |z|$ qui s'annule sur les deux composantes du bord de l'anneau $\{r_1 < |z| < r_2\}$ donne :

$$v(r) \leq \alpha + \beta \log r \quad (\forall r_1 < r < r_2).$$

Fixons maintenant un rayon r avec $r_1 < r < r_2$. Si $0 < \lambda < 1$ est l'unique réel qui réalise la combinaison barycentrique — à nouveau, la formule explicite n'est pas nécessaire — :

$$\log r = (1 - \lambda) \log r_1 + \lambda \log r_2,$$

un remplacement et une réorganisation :

$$\begin{aligned} v(r) &\leq \alpha + \beta \log r \\ &= (1 - \lambda) (\alpha + \beta \log r_1) + \lambda (\alpha + \beta \log r_2) \\ &= (1 - \lambda) v(r_1) + \lambda v(r_2) \end{aligned}$$

conduisent à une inégalité qui montre que $\log r \mapsto v(\log r)$ est bel est bien convexe ! \square

Terminons cette section par l'étude de diverses invariants qui permettent de quantifier la croissance des fonctions sous-harmoniques.

Définition 11.8. Soit $u \not\equiv -\infty$ une fonction sous-harmonique dans un disque $\Delta_R(0)$ de rayon $R > 0$ centré à l'origine. Pour tout rayon $0 < r < R$, soient :

$$\begin{aligned} M_u(r) &:= \sup_{|z|=r} u(z), \\ C_u(r) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r e^{i\theta}) d\theta, \\ B_u(r) &:= \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}_r(0)} u(s e^{i\theta}) s ds d\theta. \end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.5, le Théorème 9.1 et le Corollaire 9.4, nous savons déjà que ces trois quantités sont bornées supérieurement :

$$M_u(r) < \infty, \quad C_u(r) < \infty, \quad B_u(r) < \infty.$$

De plus, $C_u(r)$ et $B_u(r)$ sont visiblement reliées entre elles par la relation :

$$(11.9) \quad B_u(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r C_u(s) s ds.$$

Théorème 11.10. Les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

- (i) $M_u(r)$, $C_u(r)$, $B_u(r)$ sont des fonctions convexes croissantes de $\log r$;
- (ii) pour tout $0 < r < R$, on a :

$$u(0) \leq B_u(r) \leq C_u(r) \leq M_u(r);$$

- (iii) en $r = 0$:

$$u(0) = \lim_{r \rightarrow 0} M_u(r) = \lim_{r \rightarrow 0} C_u(r) = \lim_{r \rightarrow 0} B_u(r).$$

Démonstration. (i). Pour tout $0 < r < R$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} M_u(r) = v_M(r) & \quad \text{avec} \quad v_M(z) := \sup_{\theta \in [0, 2\pi[} u(z e^{i\theta}), \\ C_u(r) = v_C(r) & \quad \text{avec} \quad v_C(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z e^{i\theta}) d\theta, \\ B_u(r) = v_B(r) & \quad \text{avec} \quad v_B(z) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 u(z s e^{i\theta}) s ds d\theta. \end{aligned}$$

Affirmation 11.11. Ces trois fonctions v_M , v_C , v_B sont sous-harmoniques dans $\mathbb{D}_R(0)$.

Démonstration. Pour v_M , appliquer le Théorème 8.2, tandis que pour v_C , v_B , c'est le Théorème 8.3 qui s'applique. \square

Manifestement, ces trois fonctions v_M, v_C, v_B sont radiales ! Or nous venons de démontrer par le Théorème 11.7 que leur sous-harmonicité équivaut à **(i)** !

(ii). La dernière inégalité $C_u(r) \leq M_u(r)$ est claire.

Ensuite, grâce à **(i)** qui vient d'être établi, on a pour $0 \leq s \leq r < R$:

$$u(0) \leq C_u(s) \leq C_u(r).$$

Multiplions alors ces inégalités par $\frac{2s}{r^2}$ et intégrons de $s = 0$ à $s = r$, ce qui donne :

$$u(0) \leq \frac{2}{r^2} \int_0^r C_u(s) s ds \leq C_u(r).$$

En combinant cela à l'équation (11.9), nous obtenons bien :

$$u(0) \leq B_u(r) \leq C_u(r).$$

(iii). Grâce aux inégalités **(ii)** qui viennent d'être démontrées, il suffirait d'avoir :

$$\limsup_{r \rightarrow 0} M_u(r) \leq u(0),$$

mais ceci est gratuit par semi-continuité supérieure de u en 0 !

□

12. Régularisation des fonctions sous-harmoniques

Bien que les fonctions sous-harmoniques soient parfois loin d'être régulières, elles peuvent néanmoins être approximées à volonté par des fonctions sous-harmoniques \mathcal{C}^∞ , grâce à l'opération standard — et magique ! — de convolution.

Notation 12.1. Étant donné un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, pour tout $r > 0$, on note :

$$\Omega_r := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \partial\Omega) > r\}.$$

Soit maintenant $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction localement intégrable au sens de Lebesgue, par exemple une fonction sous-harmonique, puisqu'on sait d'après le Théorème 9.1 que :

$$\text{SH}(\Omega) \subset L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Soit aussi :

$$\phi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

une fonction continue avec $\text{supp } \phi \subset \mathbb{D}_r(0)$, pour un $r > 0$.

Définition 12.2. La *convolution* entre u et ϕ est la fonction :

$$u * \phi : \Omega_r \rightarrow \mathbb{R}$$

définie par l'intégrale :

$$u * \phi(z) := \int_{\mathbb{C}} u(z - w) \phi(w) d\lambda(w) \quad (z \in \Omega_r).$$

On considère donc :

$$L^1_{\text{loc}} * \mathcal{C}_c^0.$$

On vérifie (exercice de révision) que $*$ est associatif (utiliser Fubini-Tonelli). Le changement de variable $w' := z - w$ transforme :

$$u * \phi(z) = \int_{\mathbb{C}} u(w) \phi(z - w) d\lambda(w) = \phi * u(z),$$

ce qui est la commutativité du produit de convolution. Grâce à cette seconde représentation, on se convainc (révisions !) que $u * \phi(z)$ est indéfiniment différentiable lorsque $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty$, avec des dérivées partielles obtenues en dérivant sous le signe d'intégration :

$$\partial_x^i \partial_y^j (u * \phi)(z) = \int_{\mathbb{C}} u(w) \partial_x^i \partial_y^j \phi(z - w) d\lambda(w) \quad (i, j, \in \mathbb{N}).$$

Théorème 12.3. [de régularisation] Soit $u \not\equiv -\infty$ une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, soit $\chi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction satisfaisant :

- $\chi \in \mathcal{C}^\infty$;
- $\chi \geq 0$;
- $\chi(z) = \chi(|z|)$;
- $\text{supp } \chi \subset \mathbb{D} = \mathbb{D}_1(0)$;
- $\int_{\mathbb{C}} \chi d\lambda = 1$;

et pour $r > 0$, soient les fonctions renormalisées \mathcal{C}_c^∞ se concentrant en 0 lorsque $r \xrightarrow{>} 0$:

$$\chi_r(z) := \frac{1}{r^2} \chi\left(\frac{z}{r}\right) \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Alors les convolées :

$$(u * \chi_r)_{r>0}$$

forment une famille de fonctions \mathcal{C}^∞ sous-harmoniques dans Ω_r qui tendent vers u :

$$u(z) = \lim_{r \xrightarrow{>} 0} u * \chi_r(z) \quad (\forall z \in \Omega)$$

en décroissant :

$$u(z) \leq u * \chi_s(z) \leq u * \chi_r(z) \quad (0 < s \leq r; z \in \Omega_r).$$

Un exemple d'une telle fonction χ (révision !) est :

$$\chi(z) := \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-4|z|^2}} & \text{lorsque } |z| < \frac{1}{2}. \\ 0 & \text{lorsque } |z| \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

où la constante $c := \frac{1}{\int e^{-1/(1-4|z|^2)}} dz$ est choisie pour normaliser $\int \chi = 1$.

Démonstration. Le Théorème 9.1 a fait voir que $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega) \supset \text{SH}(\Omega)$, ce qui garantit que le produit de convolution $u * \chi_r$ a un sens. De plus, comme χ_r est \mathcal{C}^∞ et à support dans $\{|z| < r\}$, on a $u * \chi_r \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_r)$.

Ensuite, le Théorème 8.3, appliqué avec :

$$(\mathcal{M}, \mu) := (\mathbb{C}, \chi_r d\lambda),$$

et avec $v(z, m) := u(z - m)$, montre sans effort que $u * \chi_r$ est sous-harmonique.

Maintenant, fixons $z_0 \in \Omega$. Pour $0 < r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, en passant aux coordonnées polaires, on peut développer le produit de convolution comme :

$$u * \chi_r(z_0) = \int_0^{2\pi} \int_0^r u(z_0 - s e^{it}) \frac{1}{r^2} \chi\left(\frac{s}{r}\right) s ds dt.$$

Effectuons alors le changement de variable $q := \frac{s}{r}$, posons $v(z) := u(z_0 - z)$, et souvenons-nous de la Définition 11.8 avec :

$$C_v(qr) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(qr e^{it}) dt,$$

pour ré-écrire ce qui précède comme :

$$u * \chi_r(z_0) = 2\pi \int_0^1 C_v(qr) \chi(q) q dq.$$

Grâce au Théorème 11.10 (iii), $C_v(qr)$ décroît vers $v(0)$ lorsque $r \downarrow 0$. Ainsi, par le théorème de convergence monotone, $u * \chi_r(z_0)$ décroît vers :

$$2\pi \int_0^1 v(0) \chi(q) q dq = u(z_0) \int_{\mathbb{C}} \chi d\lambda = u(z_0),$$

ce qu'il fallait. \square

Corollaire 12.4. *Soit u une fonction sous-harmonique dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact. Alors il existe une suite décroissante de fonctions :*

$$(u_n)_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{C}^{\infty}(\omega) \cap \text{SH}(\omega)$$

satisfaisant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \leq \dots \leq u_3 \leq u_2 \leq u_1 \quad (\text{dans } \omega).$$

Démonstration. Quand $u \equiv -\infty$ dans ω , il suffit de prendre $u_n := -\infty$.

Sinon, on choisit $r > 0$ assez petit pour que $\omega \subset \Omega_r$, et il suffit de prendre les convolées :

$$u_n := u * \chi_{\frac{r}{n}} \Big|_{\omega} \quad (n \geq 1),$$

en application du théorème qui précède. \square

Comme autre application, voici un résultat qui généralise le Corollaire 7.3 à des fonctions holomorphes pas forcément inversibles.

Théorème 12.5. *Si $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ est une application holomorphe entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}$, alors :*

$$u' \in \text{SH}(\Omega') \implies u \circ f \in \text{SH}(\Omega).$$

Démonstration. Soit $\omega \Subset \Omega$ un sous-domaine relativement compact. Il suffit de faire voir que $u' \circ f$ est sous-harmonique dans ω .

Posons $\omega' := f(\omega)$. Choisissons une suite $(u'_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions sous-harmoniques \mathcal{C}^{∞} dans ω' telles que $u'_n \downarrow u'$ sur ω' . La caractérisation de la sous-harmonicité lisse donnée par le Théorème 7.4 dit que $\Delta u'_n \geq 0$ dans ω' , et ce, pour tout $n \geq 1$.

Ensuite, un calcul direct utilisant l'holomorphicité de f donne (exercice) :

$$\Delta(u'_n \circ f) = ((\Delta u'_n) \circ f) \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 \quad (\text{dans } \omega).$$

Donc on a $\Delta(u'_n \circ f) \geq 0$ dans ω , et en réappliquant (dans l'autre sens) le Théorème 7.4, il vient que $u'_n \circ f$ est sous-harmonique dans ω .

Pour conclure que $u' \circ f$ est sous-harmonique, il suffit de faire tendre $n \rightarrow \infty$, cf. le Théorème 8.1. \square

Enfin, pour terminer cette section, le Théorème 12.3 de régularisation permet d'obtenir un principe d'identité pour les fonctions sous-harmoniques qui s'avère parfois utile.

Théorème 12.6. [Principe d'identité faible] *Si deux fonctions u et v sous-harmoniques dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sont presque partout égales, alors $u = v$ partout.*

Démonstration. Supposons d'abord que u et v sont bornées inférieurement sur Ω . En convolant avec une famille de fonctions χ_r comme ci-dessus, on obtient l'identité :

$$u * \chi_r = v * \chi_r$$

valable dans Ω_r , et en faisant $r \rightarrow 0$, on déduit grâce au Théorème 12.3 que $u = v$ partout dans Ω .

Le cas général suit aisément en appliquant cela aux deux suites de fonctions :

$$u_n := \max(u, -n) \quad \text{et} \quad v_n := \max(v, -n),$$

puis en faisant $n \rightarrow \infty$. □

Un dernier commentaire. Pour les fonctions sous-harmoniques, on ne peut pas espérer avoir un principe d'identité aussi fort que pour les fonctions harmoniques : égalité dans un sous-ouvert $\emptyset \neq \omega \subset \Omega$ implique égalité partout dans le domaine Ω . En effet :

$$u(z) := \max(\operatorname{Re} z, 0) \quad \text{et} \quad v(z) := 0$$

coïncident sur $\omega := \{\operatorname{Re} z < 0\} \subset \mathbb{C} = \Omega$.

À un niveau élevé de compréhension interne de la théorie, ce sont justement leurs 'défauts' d'unicité et de rigidité qui rendent les fonctions sous-harmoniques si utiles et si puissantes.

13. Formule de Jensen complexe

Pour effectuer une variation thématique, nous allons maintenant présenter la *formule de Jensen*, qui permet de redémontrer différemment l'inégalité de sous-moyenne globale du Corollaire 7.2. Commençons par quelques rappels standard.

Lorsqu'une fonction $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ est de classe \mathcal{C}^1 , en introduisant l'opérateur de différentiation standard :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy,$$

on a (exercice) :

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z},$$

en termes des opérateurs :

$$\partial\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz := \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) (dx + i dy) \quad \text{et} \quad \bar{\partial}\varphi := \frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} d\bar{z} := \left(\frac{1}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial\varphi}{\partial y} \right) (dx - i dy).$$

De manière abrégée :

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

et on vérifie la relation d'anticommutation (exercice) :

$$\bar{\partial} \circ \partial = -\partial \circ \bar{\partial},$$

ainsi que les relations d'annulation (exercice) :

$$0 = \partial \circ \partial = \bar{\partial} \circ \bar{\partial},$$

dues au fait que $dz \wedge dz = 0$ et que $d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$.

Introduisons maintenant aussi l'opérateur :

$$d^c := \frac{1}{2i\pi} (\partial - \bar{\partial}),$$

le facteur de normalisation étant justifié par diverses nécessités contextuelles, voir *infra* le commentaire de la Formule de Jensen 13.5. On vérifie que cet opérateur d^c est réel, au sens où $d^c\varphi$ est encore une fonction à valeurs réelles lorsque φ l'est (exercice) :

$$2\pi d^c\varphi = i(\bar{\partial} - \partial)\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dy - \frac{\partial\varphi}{\partial y} dx.$$

Lemme 13.1. Lorsque $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe au moins \mathcal{C}^2 , on a :

$$dd^c\varphi = \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi = \frac{i}{\pi} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy.$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned} dd^c\varphi &= \frac{i}{2\pi} (\partial + \bar{\partial})(-\partial + \bar{\partial})\varphi \\ &= \frac{i}{2\pi} (-\partial\bar{\partial}_o + \partial\bar{\partial} - \bar{\partial}\partial + \bar{\partial}\bar{\partial}_o)\varphi \\ &= \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \\ &= \frac{i}{\pi} \partial\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} d\bar{z}\right) \\ &= \frac{i}{\pi} \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} dz \wedge d\bar{z} \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Définition 13.2. Pour $\varphi \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$, la notation $dd^c\varphi \geq 0$, respectivement > 0 , signifie la positivité de son laplacien :

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial\bar{z}} = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} \right) \geq 0 \quad (> 0).$$

Maintenant, le passage des coordonnées cartésiennes aux coordonnées polaires :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (r \neq 0, 0 \leq \theta < 2\pi),$$

transfère, d'après l'Exercice 2, les dérivations fondamentales de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

Si on note en indice les dérivées partielles pour les contracter, il vient alors :

$$\begin{aligned} i(\bar{\partial} - \partial)\varphi &= \varphi_x dy - \varphi_y dx = \left(\cos \theta \varphi_r - \frac{\sin \theta}{r} \varphi_\theta \right) (\sin \theta dr + r \cos \theta d\theta) - \\ &\quad - \left(\sin \theta \varphi_r + \frac{\cos \theta}{r} \varphi_\theta \right) (\cos \theta dr - r \sin \theta d\theta) \\ &= \left(-\frac{1}{r} \varphi_\theta \right) dr + \left(r \varphi_r \right) d\theta. \end{aligned}$$

On obtient donc la formule utile :

$$d^c\varphi = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} dr + r \frac{\partial\varphi}{\partial r} d\theta \right),$$

laquelle, appliquée à la fonction $\varphi = \log r = \log|z|$, donne :

$$(13.3) \quad d^c \log|z| = \frac{1}{2\pi} d\theta.$$

Lemme 13.4. *Pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{C})$, on a :*

$$d\varphi \wedge d^c\psi = -d^c\varphi \wedge d\psi.$$

Démonstration. En utilisant $dz \wedge dz = d\bar{z} \wedge d\bar{z} = 0$, on développe et on recontracte :

$$\begin{aligned} 2i\pi d\varphi \wedge d^c\psi &= (\partial\varphi + \bar{\partial}\varphi) \wedge (\partial\psi - \bar{\partial}\psi) \\ &= \underline{\partial\varphi \wedge \partial\psi}_\circ - \partial\varphi \wedge \bar{\partial}\psi + \bar{\partial}\varphi \wedge \partial\psi - \underline{\bar{\partial}\varphi \wedge \bar{\partial}\psi}_\circ \\ &= -(\partial\varphi - \bar{\partial}\varphi) \wedge (\partial\psi + \bar{\partial}\psi) \\ &= -2i\pi d^c\varphi \wedge d\psi, \end{aligned}$$

calcul qui aurait pu être laissé en exercice. □

Théorème 13.5. [Formule de Jensen complexe] *Soit φ une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un voisinage ouvert d'un disque fermé $\bar{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \mathbb{C}$ de rayon $r > 0$ centré en un point $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors pour tout rayon $0 \leq s \leq r$, on a :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} \frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} dd^c\varphi. \end{aligned}$$

Lisons et expliquons cette formule.

À droite, on intègre la 2-forme différentielle $\frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$ sur des disques de rayons croissants $s \leq \rho \leq r$, et on intègre ensuite les résultats obtenus par rapport à la mesure $\frac{d\rho}{\rho}$. Le facteur $\frac{i}{\pi}$ dans $\frac{i}{\pi} \partial\bar{\partial}\varphi$ est inévitable, et la deuxième ligne ci-dessus explique en partie pourquoi on a inscrit le facteur de normalisation $\frac{1}{2i\pi}$ dans la définition de $d^c(\cdot)$.

Démonstration. Après une translation, on peut supposer que $z_0 = 0$. Eu égard à l'équation (13.3), le théorème de Stokes transforme le terme de gauche de la formule à démontrer en l'intégrale d'une 2-forme sur un anneau :

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \varphi(z) d^c \log|z| - \int_{|z|=s} \varphi(z) d^c \log|z| &= \int_{s < |z| < r} d\left(\varphi(z) d^c \log|z|\right) \\ &= \int_{s < |z| < r} d\varphi(z) \wedge d^c \log|z| + \int_{s < |z| < r} \varphi(z) \underline{dd^c \log|z|}_\circ, \end{aligned}$$

le second morceau s'annulant car, sur \mathbb{C}^* qui contient l'anneau en question, en écrivant $\log|z| = \frac{1}{2} \log(z\bar{z})$, on constate l'harmonicité (exercice) :

$$0 = \partial\bar{\partial} \log|z| = \frac{\pi}{i} dd^c \log|z|.$$

Ensuite, en appliquant le Lemme 13.4 spécialement préparé à l'avance, il vient :

$$\begin{aligned} \int_{|z|=r} \varphi(z) d^c \log |z| - \int_{|z|=s} \varphi(z) d^c \log |z| &= \int_{s < |z| < r} d \log |z| \wedge d^c \varphi \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{|z|=\rho} d^c \varphi \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(0)} dd^c \varphi, \end{aligned}$$

en réappliquant à la fin le Théorème de Stokes pour atterrir en douceur à la destination désirée ! \square

Cette formule de Jensen complexe fournit une démonstration particulièrement éclairante de l'inégalité de sous-moyenne satisfaite par les fonctions sous-harmoniques lisses.

Corollaire 13.6. [Inégalité de sous-moyenne globale] Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, si une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ satisfait $\Delta u \geq 0$, alors pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout $0 \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, on a :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

et plus généralement, pour tous $0 \leq s \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Démonstration. La formule de Jensen semble n'avoir été créée par Dieu que pour établir cette croissance des moyennes sur des disques concentriques, puisqu'en effet la différence :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} dd^c u \\ &= \int_s^r \frac{d\rho}{\rho} \int_{\mathbb{D}_\rho(z_0)} \frac{1}{2\pi} \Delta u \end{aligned}$$

est une intégrale avec poids logarithmique de l'intégrale d'aire d'une fonction positive ! \square

Voici un énoncé qui aura des répercussions dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Théorème 13.7. Si $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ est une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, on a équivalence entre :

(i) u est sous-harmonique ;

(ii) pour tout disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$, et pour tout polynôme $p \in \mathbb{C}[z]$:

$$\left(u(z_0 + r e^{i\theta}) \leq \text{Re} p(z_0 + r e^{i\theta}) \quad (\forall 0 \leq \theta < 2\pi) \right) \implies u(z_0) \leq \text{Re} p(z_0).$$

Démonstration. (i) \implies (ii). Supposons $u \in \text{SH}(\Omega)$ et soit un disque $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$. Comme $\text{Re} p$ est harmonique, la fonction $u - \text{Re} p$ est sous-harmonique. Or elle satisfait :

$$(u - \text{Re} p)(\zeta) \leq 0 \quad (\forall \zeta \in \partial\mathbb{D}_r(z_0)),$$

donc le Principe du Maximum 5.4 assure que

$$(u - \text{Re} p)(z) \leq 0 \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r(z_0)),$$

et en $z = z_0$, c'est justement **(ii)** !

(ii) \implies **(i)**. L'objectif est d'établir que u satisfait l'inégalité de sous-moyenne :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}).$$

Pour abrégier, notons $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$. Le Théorème 3.6 fournit une suite de fonctions continues $(u_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{C}^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$ qui tendent en décroissant :

$$u \leq u_{n+1} \leq u_n \quad (n \geq 1)$$

vers :

$$u|_{\partial\Delta} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \quad (\text{sur } \partial\Delta).$$

Au moyen de l'opérateur de Poisson $P_\Delta(\cdot)$, introduisons leurs prolongements harmoniques :

$$(P_\Delta u_n)(z) \quad (z \in \Delta),$$

continus jusqu'au bord :

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} (P_\Delta u_n)(z) = u_n(\zeta) \quad (\forall \zeta \in \partial\Delta).$$

À une constante près que l'on fixe égale à 0, ces fonctions harmoniques $P_\Delta u_n$ possèdent une unique conjuguée harmonique, disons $h_n \in \text{Harm}(\Delta)$, de telle sorte que :

$$f_n := P_\Delta u_n + i h_n \in \mathcal{O}(\Delta)$$

est holomorphe.

Fixons temporairement un entier $n \geq 1$ quelconque, et prenons un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par continuité au bord uniforme du prolongement harmonique, il existe $0 \ll r_\varepsilon < r$ assez proche de r tel que pour tout $r_\varepsilon \leq s < r$, on a :

$$\begin{aligned} (P_\Delta u_n)(z_0 + s e^{it}) - \varepsilon &< u_n(z_0 + r e^{it}) < (P_\Delta u_n)(z_0 + s e^{it}) + \varepsilon \\ &= \text{Re } f_n(z_0 + s e^{it}) + \varepsilon, \end{aligned}$$

uniformément quel que soit $0 \leq t < 2\pi$. Fixons à présent un s avec $r_\varepsilon \leq s < r$.

Maintenant, puisque la fonction holomorphe $f_n \in \mathcal{O}(\Delta)$ peut être développée au point central z_0 en série entière :

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{d^k f_n}{dz^k}(z_0) (z - z_0)^k,$$

qui converge normalement sur les compacts de $\Delta = \mathbb{D}_r(z_0)$, notamment sur $\overline{\mathbb{D}}_s(z_0) \Subset \mathbb{D}_r(z_0)$, en tronquant cette série à un ordre suffisamment élevé, on obtient un polynôme $q_n(z)$ avec bien sûr :

$$q_n(z_0) = f_n(z_0)$$

tel que :

$$\max_{|z-z_0| \leq s} |f_n(z) - q_n(z)| \leq \varepsilon,$$

d'où :

$$\text{Re } f_n(z_0 + s e^{it}) \leq \text{Re } q_n(z_0 + s e^{it}) + \varepsilon,$$

puis en revenant à ce qui précède — noter le petit jeu dérangeant entre r et s — :

$$u(z_0 + r e^{it}) \leq u_n(z_0 + r e^{it}) \leq \text{Re } q_n(z_0 + s e^{it}) + 2\varepsilon.$$

Afin de neutraliser ce petit jeu perturbateur, avec les variables :

$$w = z_0 + s e^{it} \quad \text{et} \quad z = z_0 + r e^{it},$$

d'où :

$$w = z_0 + \frac{s}{r} (z - z_0),$$

en introduisant le nouveau polynôme :

$$p_n(z) := q_n\left(z_0 + \frac{s}{r} (z - z_0)\right),$$

satisfaisant donc :

$$p_n(z_0 + r e^{it}) = q_n(z_0 + s e^{it}) \quad (\forall 0 \leq t < 2\pi),$$

ainsi que :

$$p_n(z_0) = q_n(z_0) = f_n(z_0),$$

cette dernière inégalité se ré-écrit comme :

$$u(z) \leq \operatorname{Re} p_n(z) + 2\varepsilon \quad (\forall z \in \partial\mathbb{D}_r(z_0)).$$

L'hypothèse **(ii)** s'applique alors pour donner :

$$u(z_0) \leq \operatorname{Re} p_n(z_0) + 2\varepsilon.$$

Mais comme $\operatorname{Re} p_n(z)$ est une fonction harmonique, elle satisfait l'égalité de la moyenne :

$$\operatorname{Re} p_n(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Nous pouvons donc remplacer et estimer :

$$\begin{aligned} u(z_0) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} p_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta + 2\varepsilon \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} q_n(z_0 + s e^{it}) dt + 2\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f_n(z_0 + s e^{it}) dt + 3\varepsilon \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_\Delta u_n)(z_0 + s e^{it}) dt + 3\varepsilon \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + r e^{it}) dt + 4\varepsilon \end{aligned}$$

Or $\varepsilon > 0$ était arbitraire, donc :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_n(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Pour terminer, il ne reste plus qu'à faire $n \rightarrow \infty$ pour obtenir grâce au théorème de convergence monotone :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta,$$

ce qui est l'inégalité de sous-moyenne visée. □

14. Théorème de Hartogs sous-harmonique

Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. L'espace des fonctions sous-harmoniques dans Ω est noté :

$$\text{SH}(\Omega).$$

La motivation du théorème suivant est un théorème exceptionnel de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, que nous verrons ultérieurement.

Théorème 14.1. [Hartogs sous-harmonique] Soit $(v_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite de fonctions sous-harmoniques $v_j \in \text{SH}(\Omega)$ uniformément bornées supérieurement sur les compacts de Ω :

$$\forall K \Subset \Omega \quad \exists M_K < \infty \quad v_j \leq M_K \quad \forall j \geq 1.$$

On suppose qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que :

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} v_j(z) \leq C \quad (\forall z \in \Omega).$$

Alors pour tout compact $K \Subset \Omega$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $j_0 = j_0(K, \varepsilon)$ assez grand pour que :

$$j \geq j_0 \implies v_j(z) \leq C + \varepsilon \quad (\forall z \in K).$$

Ici, pour comprendre l'énoncé, les constantes M_K dont on suppose l'existence au début peuvent fort bien être très supérieures $\gg C$ à la constante C des limites 'sup', mais à ε près, le théorème dit que $C + \varepsilon$ majorera uniformément sur les compacts les termes assez grands de la suite.

Démonstration. Soit donc un compact $K \Subset \Omega$. On peut trouver un sous-domaine le contenant :

$$K \Subset \Omega' \Subset \Omega,$$

lui-même compactement contenu dans Ω , à savoir $\overline{\Omega'} \subset \Omega$. Par hypothèse :

$$v_j|_K \leq v_j|_{\overline{\Omega'}} \leq M_{\overline{\Omega'}} < \infty,$$

et donc, en remplaçant Ω par Ω' , que l'on notera de nouveau Ω , on peut supposer dès le départ que :

$$v_j \leq M_{\Omega} < \infty \quad (\forall j \geq 1).$$

Au-delà, en remplaçant v_j par $v_j - M_{\Omega}$ que l'on notera de nouveau v_j , on peut aussi supposer que :

$$v_j \leq 0 \quad (\forall j \geq 1).$$

Soit maintenant $r > 0$ assez petit pour que le sous-ouvert :

$$\begin{aligned} \Omega_{3r} &:= \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 3r\} \\ &\supset K \end{aligned}$$

contienne le compact. Comme les fonctions v_j sont sous-harmoniques, le Corollaire 7.2 montre qu'elles satisfont l'inégalité bidimensionnelle de la moyenne sur tous les disques de rayon r centrés en les points de K :

$$\pi r^2 v_j(z) \leq \int_{|\zeta-z| \leq r} v_j(\zeta) d\xi \wedge d\eta \quad (z \in K, j \geq 1),$$

où $\zeta = \xi + i\eta$ et $d\xi \wedge d\eta$ est la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . C'est à ce moment-là qu'on utilise le :

Lemme de Fatou en version Limite Supérieure. Sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^n$, soit une suite $(f_j)_{j=1}^\infty$ de fonctions mesurables négatives :

$$f_j \leq 0$$

intégrables pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n restreinte à E . Alors on a :

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \int_E f_j \leq \int_E \limsup_{j \rightarrow \infty} f_j. \quad \square$$

Comme la limite supérieure des v_j est par hypothèse $\leq C$, on obtient donc :

$$\pi r^2 v_j(z) \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \int_{|\zeta-z| \leq r} v_j(\zeta) d\xi \wedge d\eta \leq \pi C r^2 \quad (z \in K, j \geq 1).$$

Pour $z \in K$ fixé, il existe donc $j_0(z) \gg 1$ assez grand pour que l'on ait :

$$j \geq j_0(z) \implies \int_{|\zeta-z| \leq r} v_j(\zeta) d\xi \wedge d\eta \leq \pi \left(C + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^2.$$

Alors pour tout autre point w proche de z satisfaisant $|z - w| < \delta < r$, on a inclusion des disques :

$$\mathbb{D}_{r+\delta}(w) \supset \mathbb{D}_r(z),$$

et comme $v_j \leq 0$, on obtient :

$$\pi (r+\delta)^2 v_j(w) \stackrel{\text{sous-harmonicité}}{\leq} \int_{|\zeta-w| \leq r+\delta} v_j(\zeta) d\xi \wedge d\eta \stackrel{\text{utiliser } v_j \leq 0}{\leq} \int_{|\zeta-z| \leq r} v_j(\zeta) d\xi \wedge d\eta \leq \pi \left(C + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^2,$$

et ce, *uniformément* pour :

$$\forall w \in \mathbb{D}_\delta(z) \quad \forall j \geq j_0(z).$$

Si maintenant $0 < \delta \ll r$ est très petit, l'inégalité qui s'en déduit entre les deux extrêmes :

$$\begin{aligned} v_j(w) &\leq \frac{\left(C + \frac{\varepsilon}{2}\right) r^2}{(r + \delta)^2} \\ &\leq C + \varepsilon \end{aligned} \quad (\forall w \in \mathbb{D}_\delta(z), \forall j \geq j_0(z)),$$

permet de conclure en utilisant le lemme de recouvrement dit *de Borel-Lebesgue* du compact K par un nombre fini de tels disques ouverts :

$$\mathbb{D}_{\delta_1}(z_1) \cup \dots \cup \mathbb{D}_{\delta_n}(z_n) \supset K,$$

en choisissant bien sûr :

$$j_0 := \max(j_0(z_1), \dots, j_0(z_n)),$$

ce qui conclut. □

15. Exercices

Exercice 1. Trouver un exemple de suite de fonctions continues $f_n \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}_+)$, $n \in \mathbb{N}$, croissante $f_n \leq f_{n+1}$ dont la limite ponctuelle $f := \lim f_n$ existe en tout point $x \in [0, 1]$, mais qui n'est pas semi-continue supérieurement sur un certain sous-ensemble dense de $[0, 1]$.

Exercice 2. Dans le plan complexe \mathbb{C} , un point $z = x + iy = r e^{i\theta}$ distinct de l'origine ($r \neq 0$) se représente au moyen soit des coordonnées cartésiennes (x, y) , soit des coordonnées polaires (r, θ) , avec $0 \leq \theta < 2\pi$. Établir les formules de transfert de dérivations :

$$\begin{aligned} r \frac{\partial}{\partial r} &= x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta}, \\ \frac{\partial}{\partial \theta} &= -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Indication: Étant donné une fonction $F = F(x, y)$, dériver $F(x, y) = F(r \cos \theta, r \sin \theta)$.

Exercice 3. Avec les notations qui précèdent, établir le transfert suivant entre opérateurs du second ordre :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & 2 \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Démontrer qu'une fonction $u: U \rightarrow [-\infty, \infty[$ définie sur un espace topologique X (pas forcément métrique) satisfaisant :

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} u(x) \leq u(x_0)$$

pour tout $x_0 \in X$ est bornée supérieurement sur tout sous-ensemble compact $K \subset X$.

Exercice 5. Soit E un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) . Montrer que la fonction caractéristique 1_E de E est semi-continue supérieurement si et seulement si E est fermé dans X .

Exercice 6. L'objectif est de démontrer que le Théorème 3.6 reste vrai sans l'hypothèse que la fonction u est bornée supérieurement.

Sur un espace métrique (X, d) , soit donc $u: X \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction semi-continue supérieurement. Pour $n \geq 0$ entier, on introduit les sous-ensembles :

$$F_n := \{x \in X : u(x) \geq n\},$$

ainsi que les fonctions :

$$\psi_n(x) := \max(0, 1 - n \operatorname{dist}(x, F_n)) \quad (x \in X).$$

(a) Montrer que $\sum_{n \geq 0} \psi_n$ converge uniformément sur les compacts de X vers une fonction $\psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $\psi \geq u$ sur X .

(b) En considérant la fonction bornée supérieurement $u - \psi$, déduire le résultat souhaité.

Exercice 7. L'objectif est de démontrer qu'une fonction semi-continue supérieurement sur un espace métrique complet est en fait continue en tout point d'un sous-ensemble dense.

Soient deux espaces topologiques métriques (X, d) et (X', d') , et soit une application arbitraire $f: X \rightarrow X'$. En un point $x \in X$, l'oscillation de f est définie comme :

$$\omega_f(x) := \lim_{r \searrow 0} \left(\sup_{y, z \in \mathbb{B}_r(x)} d'(f(y), f(z)) \right).$$

(a) Vérifier que f est continue en un point $x \in X$ lorsque, et seulement lorsque, $0 = \omega_f(x)$.

(b) Montrer, pour $c > 0$ quelconque, que les ensembles $\{x : \omega_f(x) < c\}$ sont ouverts dans X .

(c) Montrer que l'ensemble des points en lesquels f est continue est un G_δ de X , à savoir une intersection dénombrable de certains ouverts de X , que l'on précisera.

(d) On suppose dorénavant que (X, d) est complet et que f est limite ponctuelle d'une suite d'applications $f_n: X \rightarrow X'$ continues. Montrer, pour $c > 0$ quelconque, que l'ensemble $\{x : \omega_f(x) < c\}$ est dense dans X .

(e) En appliquant le Théorème de Baire, montrer que l'ensemble des points en lesquels f est continue forme un G_δ dense de X .

(f) Conclure dans ce contexte que la semi-continuité supérieure implique la continuité sur un G_δ dense.

Exercice 8. Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour montrer que si une fonction h est harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors h^2 est encore harmonique dans Ω .

Exercice 9. (a) Étant donné $\zeta \in \mathbb{C}$, calculer pour tout $r \geq 0$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |r e^{it} - \zeta| dt = \begin{cases} \log |\zeta| & \text{lorsque } r \leq |\zeta|, \\ \log r & \text{lorsque } r > |\zeta|. \end{cases}$$

(b) Utiliser cela pour montrer que la fonction :

$$u(z) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2^n} \log \left| z - \frac{1}{2^n} \right|$$

est sous-harmonique dans \mathbb{C} .

(c) Vérifier que u n'est pas continue en $z = 0$.

Exercice 10. Soient u_1, \dots, u_k des fonctions sous-harmoniques dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que leur somme $u_1 + \dots + u_k$ atteint un maximum en un certain point de Ω . Montrer que toutes les fonctions u_1, \dots, u_k sont alors harmoniques.

Exercice 11. Soit u une fonction sous-harmonique dans le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ qui y est < 0 . Pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D}$, établir le Lemme de Hopf :

$$\limsup_{r \rightarrow 1} \frac{u(r\zeta)}{1-r} < 0.$$

$\varepsilon \xrightarrow{>} 0$. *Indication:* Appliquer le principe du maximum à la fonction $u(z) + c \log |z|$ sur l'ensemble $\{\frac{1}{2} < |z| < 1\}$ pour une constante appropriée c .

Exercice 12. Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ le disque unité, et soit $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ une fonction holomorphe satisfaisant, lorsque $z \rightarrow 1$:

$$f(z) = z + o(|1-z|^3).$$

(a) On introduit $\phi(z) := \frac{1+z}{1-z}$ ainsi que :

$$u(z) := \operatorname{Re}(\phi(z) - \phi(f(z))).$$

Montrer, pour tout $\zeta \in \partial\mathbb{D} \setminus \{1\}$, que :

$$\limsup_{z \rightarrow \zeta} u(z) \leq 0.$$

(b) Montrer que $u(z) = o(|1-z|)$ lorsque $z \rightarrow 1$.

(c) En utilisant le principe du maximum, montrer que $u \leq 0$, puis, grâce à l'Exercice 11, que $u \equiv 0$.

(d) Conclure que $f(z) \equiv z$.

(e) Donner un exemple montrant que cette conclusion échouerait si on supposait seulement que $f(z) = z + O(|1-z|^3)$.

Exercice 13. Soit u une fonction sous-harmonique sur le disque unité D satisfaisant :

$$u(z) \leq -\log |\operatorname{Im} z| \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Montrer que :

$$u(z) \leq -\log \left| \frac{1-z^2}{2} \right| \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Indication: Appliquer le principe du maximum à la fonction :

$$u(z) + \log \left| \frac{r^2 - z^2}{2r} \right|,$$

définie sur $\mathbb{D}_r(0)$, où $0 < r < 1$, et faire $r \rightarrow 1$.

Exercice 14. Soit u une fonction semi-continue supérieurement dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfaisant, en tout point $z_0 \in \Omega$ où $u(z_0) > -\infty$:

$$0 \leq \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta - u(z_0) \right).$$

Montrer que u est sous-harmonique dans Ω . **Indication:** Pour $\varepsilon > 0$, introduire $u_\varepsilon := u + \varepsilon|z|^2$. Imiter les arguments successifs qui ont conduit au Corollaire 7.2 pour établir que u_ε satisfait l'inégalité de sous-moyenne.

Exercice 15. (a) Montrer que si une fonction $u(z)$ est sous-harmonique dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$, alors $u(z^k)$ l'est aussi pour tout entier $k \geq 1$.

(b) Montrer que si f est holomorphe dans un voisinage d'un point $z_0 \in \mathbb{C}$, et si $f(z) - f(z_0)$ s'annule à un ordre précisément égal à un entier $k \geq 1$ en z_0 , alors il existe une application holomorphe injective g définie dans un voisinage de z_0 telle que :

$$f(z) - f(z_0) = (g(z))^k.$$

(c) Montrer que si $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ est une application holomorphe entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}$, alors :

$$u' \in \text{SH}(\Omega') \implies u \circ f \in \text{SH}(\Omega),$$

ce qui généralise le Corollaire 7.3.

Exercice 16. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}$ un sous-ensemble ouvert quelconque. Montrer que la fonction :

$$z \mapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega)$$

est sous-harmonique dans Ω .

Exercice 17. Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. L'objectif est de démontrer que si u vaut $-\infty$ sur un segment de droite ouvert $L \subset \Omega$ de longueur > 0 , alors $u \equiv -\infty$ dans Ω .

(a) On choisit un disque ouvert Δ centré en un point de L de rayon assez petit pour que $L \cap \Delta$ soit un diamètre de Δ , le découpant en deux demi-disques ouverts Δ^- et Δ^+ . Montrer que la fonction :

$$v(z) := \begin{cases} -\infty & \text{lorsque } z \in \Delta^- \cup L, \\ u(z) & \text{lorsque } z \in \Delta^+, \end{cases}$$

est sous-harmonique dans Δ .

(b) Montrer que $v \equiv -\infty$ dans Δ , et conclure.

Exercice 18. Est-il possible qu'une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$ soit non-continue en tout point de Ω ? **Indication:** Penser à un exercice qui précède.

Exercice 19. Soit $u: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur le disque unité $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ telle que $x \mapsto u(x + iy)$ et $y \mapsto u(x + iy)$ sont convexes.

(a) Montrer que u est sous-harmonique.

(b) Trouver un contre-exemple à la réciproque.

Exercice 20. Soit $-\infty \leq a < b \leq \infty$, soit $\Omega \rightarrow]a, b[$ une fonction harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $\psi:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe (pas forcément croissante). Montrer que $\psi \circ h$ est sous-harmonique dans Ω .

Exercice 21. Soit $u: \Omega \rightarrow [0, \infty[$ une fonction définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montre que $\log u$ est sous-harmonique dans Ω si et seulement si u^α est sous-harmonique dans Ω pour tout $\alpha > 0$. **Indication:** Pour le 'si', utiliser le fait que $\frac{u^\alpha - 1}{\alpha}$ décroît vers $\log u$ lorsque $\alpha \downarrow 0$.

Exercice 22. Montrer que si $\log u$ et $\log v$ sont sous-harmoniques dans $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\log(u + v)$ l'est aussi.

Exercice 23. (a) Montrer que toute fonction convexe sur \mathbb{R} qui est bornée supérieurement est nécessairement constante.

(b) Re-démontrer le Théorème de Liouville pour les fonctions sous-harmoniques (Corollaire 6.8).

Exercice 24. Avec les notations de la Définition 11.8, montrer que l'on a :

$$B_u(r) \geq C_u\left(\frac{r}{\sqrt{e}}\right) \quad (\forall 0 < r < R).$$

Indication: Écrire $C_u(r)$ sous la forme $\psi(\log r)$, avec ψ convexe, et appliquer l'inégalité de Jensen réelle 11.1 à la relation 11.9, i.e. à $B_u(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r C_u(s) s ds$.

Exercice 25. Montrer que si $\log u$ est sous-harmonique dans un disque $\mathbb{D}_R(0)$ avec $R > 0$, alors les trois fonctions :

$$\log M_u(r), \quad \log C_u(r), \quad \log B_u(r)$$

sont des fonctions convexes de $\log r$. **Indication:** S'inspirer des démonstrations des Théorèmes 11.6 et 11.10.

Exercice 26. Soient $(a_j)_{j=0}^\infty$ et $(b_j)_{j=0}^\infty$ deux suites infinies de nombres $a_j, b_j \geq 0$. Pour $k \geq 0$, on introduit :

$$c_k := \sum_{0 \leq j \leq k} a_j b_{k-j}.$$

(a) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k^2}{k+1} \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^2 \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} b_j^2 \right).$$

(b) Soient f et g deux fonctions holomorphes dans un disque $\mathbb{D}_R(0)$ de rayon $R > 0$ muni de la mesure de Lebesgue $d\lambda$. Montrer, pour tout $0 < r < R$, que :

$$\frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathbb{D}_r(0)} |f|^2 |g|^2 d\lambda \leq \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|^2 d\theta \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g(re^{i\theta})|^2 d\theta \right).$$

(c) Si $u \geq 0$ et $v \geq 0$ sont deux fonctions sur $\mathbb{D}_R(0)$, $R > 0$, telles que $\log u$ et $\log v$ sont sous-harmoniques, montrer que :

$$B_{uv}(r) \leq C_u(r) C_v(r) \quad (\forall 0 < r < R).$$

Indication: Adapter les idées de la démonstration du Théorème 11.6.

(d) Donner une interprétation géométrique de cette dernière inégalité dans le cas $u = v = |f'|$, où $f: \mathbb{D}_R(0) \xrightarrow{\sim} \Omega$ est un biholomorphisme.

Exercice 27. Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ une fonction mesurable qui est bornée inférieurement et supérieurement sur tout compact $K \Subset \Omega$, et qui satisfait l'inégalité locale de sous-moyenne. On ne suppose pas que u est semi-continue supérieurement.

(a) Avec une fonction χ comme dans le Théorème 12.3, montrer pour tout $r > 0$ que $u * \chi_r$ est sous-harmonique dans Ω_r .

(b) On introduit la régularisée semi-continue supérieure de u :

$$u^*(z) := \lim_{r \rightarrow 0} \left(\sup_{w \in \mathbb{D}_r(z)} u(w) \right) \quad (z \in \Omega).$$

Vérifier que u^* est semi-continue supérieurement dans Ω .

(c) Montrer que :

$$\lim_{r \rightarrow 0} u * \chi_r = u^*.$$

(d) Pour $r, s > 0$, montrer que l'on a sur Ω_{r+s} :

$$(u * \chi_r) * \chi_s = (u * \chi_s) * \chi_r.$$

(e) Dédire que $u * \chi_r$ décroît avec $0 \leftarrow r$ et que l'on a :

$$u * \chi_r = u^* * \chi_r,$$

ceci sur Ω_r , pour tout $r > 0$.

(f) Montrer que u^* est sous-harmonique dans Ω , et que $u^* = u$ presque partout.

(g) En tronquant pour $n \geq 1$:

$$u_n := \max(u, -n),$$

montrer que ces conclusions restent vraies sans supposer que u soit bornée inférieurement sur les compacts.

Exercice 28. Soit u une fonction sous-harmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit v une fonction semi-continue supérieurement dans Ω telle que :

$$u \leq v$$

presque partout. Montrer qu'on a en fait $u \leq v$ partout.

Exercice 29. EE

Phénomène de Hartogs, domaines d'holomorphic, séries de Reinhardt, théorie de Cartan-Thullen

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

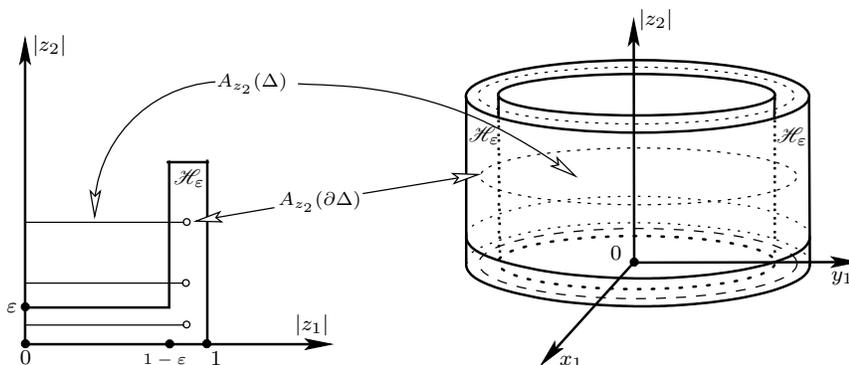
1. Phénomène et figure de Hartogs

En dimension 1 dans \mathbb{C} , il existe toute une théorie des singularités (*effaçables, méromorphes, essentielles*) pour les fonctions holomorphes définies dans un voisinage épointé $U^* = U \setminus \{0\}$ de l'origine, avec $0 \in U \subset \mathbb{C}$ ouvert.

Mais dès que la dimension devient $n \geq 2$, Hurwitz a découvert en 1897 que *toutes* les fonctions holomorphes définies dans $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, ou même dans un voisinage épointé $U^* = U \setminus \{0\}$ de l'origine, se prolongent holomorphiquement à travers l'origine. Les singularités réduites à un point sont donc *toujours illusoires* : elles n'existent pas — alors qu'elles sont au *centre* de la théorie de Cauchy à une variable ! C'est ce *phénomène*, plus que tout autre, qui distingue, qui singularise, qui illustre l'*Analyse à Plusieurs Variables Complexes*.

Avant d'en débiter la théorie générale, nous admettrons temporairement qu'une *fonction holomorphe de plusieurs variables* $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ est une fonction de classe \mathcal{C}^∞ qui est holomorphe par rapport à chacune de ses variables z_i , lorsque les autres sont fixées. En fait, un théorème profond de la théorie montre que les fonctions qui sont seulement séparément holomorphes par rapport à chacune des variables z_i sont \mathcal{C}^∞ , ce qui n'est pas vrai pour des fonctions de variables réelles.

Hartogs, élève de Hurwitz, a ensuite exploré et approfondi cette découverte dans un article de synthèse paru en 1906. Depuis, on parle beaucoup de la *figure de Hartogs*, que l'on peut dessiner de deux manières (au moins).



Parce qu'il est difficile de se représenter la quatrième dimension de $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$, et encore plus difficile de la dessiner, on peut alternativement ou simultanément convenir dans les figures que :

- l'axe des z_1 et l'axe des z_2 sont des axes de dimension 1 ;
- l'axe des $z_1 = x_1 + i y_1$ est de dimension réelle 2, tandis que l'axe des z_2 est de dimension 1.

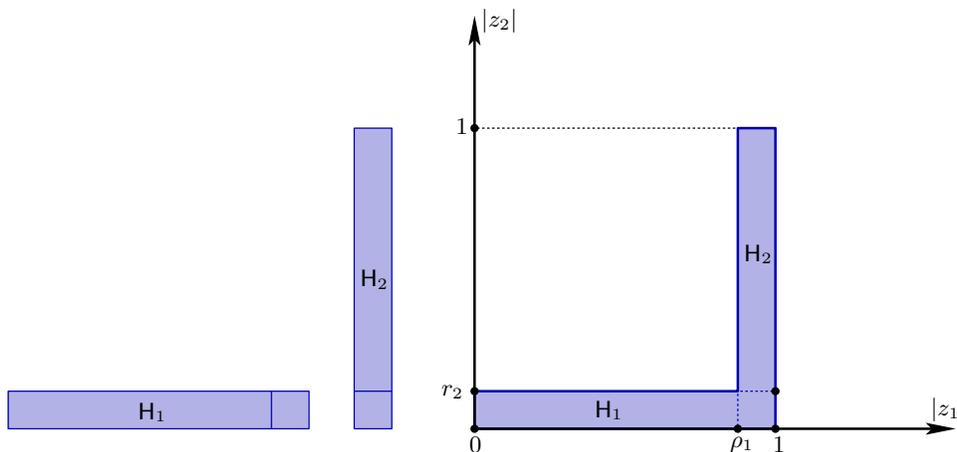
Parfois même, classiquement, on dessine en représentation modulaire, avec les axes *vraiment* réels $|z_1|$ et $|z_2|$, à savoir si $E \subset \mathbb{C}^2$ est un sous-ensemble, on représente son image-module :

$$|E| := \{ (|z_1|, |z_2|) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ : (z_1, z_2) \in E \}.$$

Géométriquement donc, la *figure de Hartogs* dans les deux représentations esquissées ci-dessus ressemblerait à une casserole en verre traversable (assez épais). Pour acquérir et anticiper l'intuition de ce qui va suivre, il faudrait même s'imaginer un cylindre de lait fantôme montant dans la casserole de verre tout en imprégnant sa paroi verticale jusqu'à la moitié de son épaisseur.

Dans \mathbb{C}^2 , avec $\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$, soit le polydisque unité :

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} \ni (z_1, z_2).$$



Définition 1.1. Pour un rayon $0 < \rho_1 < 1$ et un rayon $0 < r_2 < 1$, la *figure de Hartogs* :

$$H = H_{\rho_1, r_2}$$

est le sous-ouvert du polydisque unité défini par :

$$H := \underbrace{\{ |z_1| < 1, |z_2| < r_2 \}}_{=: H_1} \cup \underbrace{\{ \rho_1 < |z_1| < 1, |z_2| < 1 \}}_{=: H_2}.$$

Ces deux parties, H_1 et H_2 , d'intersection non vide, peuvent être dessinées en coordonnées $(|z_1|, |z_2|)$. On peut d'ailleurs s'imaginer que :

$$\rho_1 \approx 1 \quad \text{et que :} \quad r_1 \approx 0,$$

car ce qui va suivre sera vrai quelle que soit la finesse de H .

En dimension complexe $n \geq 2$, on munit l'espace \mathbb{C}^n des coordonnées :

$$z = (z_1, \dots, z_n)$$

décomposées en parties réelle et imaginaire comme $z_k = x_k + \sqrt{-1} y_k$ pour $k = 1, \dots, n$:

$$z = x + \sqrt{-1} y.$$

Sur un ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ — par exemple $\Omega = \mathbb{H} \subset \mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$ —, soit alors une fonction de classe \mathcal{C}^∞ :

$$f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Aux opérateurs $d, \frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial y_k}$ de différentiation réels :

$$df := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} dx_k + \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_k} dy_k,$$

correspondent les opérateurs complexes :

$$\partial f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_k} dz_k \quad \text{et} \quad \bar{\partial} f := \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k$$

avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z_k} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} & \text{et} & & dz_k &:= dx_k + \sqrt{-1} dy_k, \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} &:= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial}{\partial y_k} & \text{et} & & d\bar{z}_k &:= dx_k - \sqrt{-1} dy_k. \end{aligned}$$

Définition 1.2. Une fonction $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^∞ est dite *holomorphe* si :

$$0 \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} \equiv \dots \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n} \quad (\text{dans } \Omega).$$

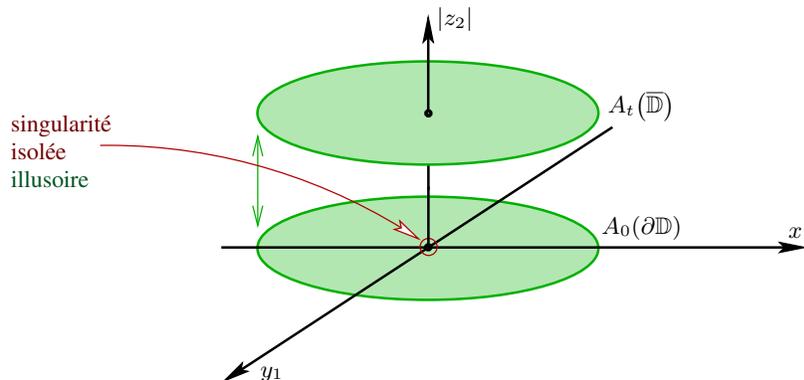
En dimension $n = 2$, formulons maintenant en deux temps le résultat spectaculaire qui signa l'acte de naissance de la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Notation 1.3. Étant donné deux ouverts $V \subset U \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 1$, on symbolisera la propriété de prolongement holomorphe unique du petit ouvert V vers l'ouvert plus grand U par :

$$\forall g \in \mathcal{O}(V) \quad \exists! f \in \mathcal{O}(U) \quad f|_V = g,$$

ou alternativement et de manière équivalente par :

$$\mathcal{O}(U)|_V = \mathcal{O}(V).$$



Théorème 1.4. [Hurwitz 1897] Pour tout ouvert non vide $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ et toute suite $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ de points de Ω qui est discrète, on a :

$$\mathcal{O}(\Omega \setminus \{a_k\}_{k=1}^{\infty}) = \mathcal{O}(\Omega) \Big|_{\Omega \setminus \{a_k\}_{k=1}^{\infty}}.$$

Démonstration. Par récurrence, on se ramène au cas d'un seul point $a \in \mathbb{C}^2$ avec un voisinage ouvert non vide $\Omega \supset a$, éventuellement arbitrairement petit. Si l'on centre les coordonnées $z = (z_1, z_2)$ en $a = 0$, alors pour $\rho > 0$ assez petit et pour $z_2 \in \mathbb{C}$ fixé assez petit, les applications holomorphes :

$$\begin{aligned} A_{z_2} : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z &\longmapsto (\rho z, z_2) \end{aligned}$$

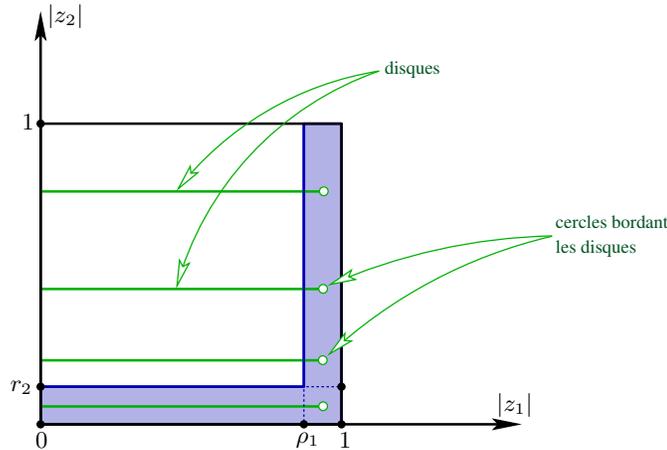
envoient le cercle unité $\partial\mathbb{D}$ sans jamais toucher le point $a = 0$:

$$\begin{aligned} A_{z_2}(\partial\mathbb{D}) &= A_{z_2}(\{\rho e^{i\theta} : \theta \in \mathbb{R}\}) \\ &\subset \Omega \setminus \{0\}. \end{aligned}$$

De plus, dès que $z_2 \neq 0$, le disque fermé entier s'échappe de la singularité prétendue :

$$A_{z_2}(\overline{\mathbb{D}}) \subset \Omega \setminus \{0\}.$$

Alors la formule de Cauchy à une variable effectuée sur ces disques $A_{z_2}(\overline{\mathbb{D}})$ permet de conclure, comme nous allons le voir dans un cadre plus général. \square



Théorème 1.5. [Hartogs 1906] Les fonctions holomorphes dans la figure de Hartogs se prolongent holomorphiquement et uniquement au polydisque unité :

$$\forall f \in \mathcal{O}(H_{\rho_1, r_2}) \quad \exists! F \in \mathcal{O}(\mathbb{D} \times \mathbb{D}) \quad F|_H = f.$$

Démonstration. Ici, des disques appropriés s'écrivent, pour un choix quelconque de rayon intermédiaire $\rho_1 < \sigma_1 < 1$:

$$A_{z_2}(z) := (\sigma_1 z, z_2) \quad (z \in \mathbb{D}).$$

Lorsque :

$$|z_2| < r_2,$$

le disque fermé entier est contenu dans le domaine de Hartogs H :

$$A_{z_2}(\overline{\mathbb{D}}) \subset H,$$

donc f est complètement holomorphe au voisinage de ce disque, et alors la formule de Cauchy standard à une variable donne la valeur de f en un point quelconque (z_1, z_2) avec $|z_1| < \sigma_1$:

$$f(z_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_1|=\sigma_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Ensuite — et c'est là le point-clé — lorsque le disque commence à s'élever, son bord reste toujours dans le domaine :

$$A_{z_2}(\partial\mathbb{D}) \subset H \quad (\forall |z_2| < 1),$$

tandis que son intérieur s'en échappe ! Mais alors, comme la formule de Cauchy conserve toujours un sens puisqu'elle intègre en n'utilisant les valeurs de la fonction f que sur la partie verticale de H où f est définie, on peut *prolonger* les valeurs de f simplement au moyen de cette formule :

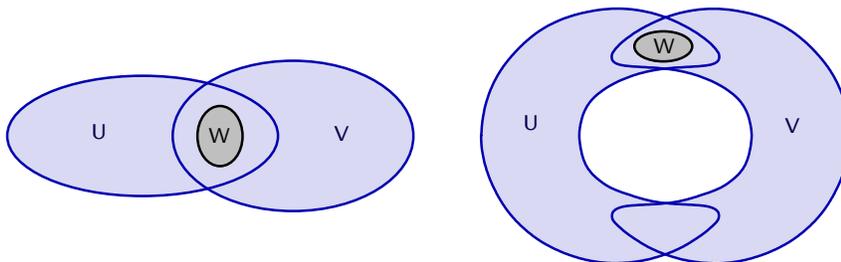
$$F(z_1, z_2) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_1|=\sigma_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \quad (\forall |z_1| < \sigma_1, \forall |z_2| < 1).$$

Les théorèmes standard de différentiation sous le signe intégral assurent maintenant que la fonction F ainsi définie est bel et bien holomorphe par rapport à toutes ses variables (z_1, z_2) dans le polydisque :

$$\mathbb{D}_{\sigma_1} \times \mathbb{D}.$$

En résumé, nous avons :

- $f \in \mathcal{O}(H)$;
- $F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{\sigma_1} \times \mathbb{D})$;
- $F = f$ dans $\{|z_1| < \sigma_1, |z_2| < r_2\}$ par la formule de Cauchy standard.



Principe du prolongement analytique. Étant donné deux fonctions holomorphes $f_u \in \mathcal{O}(U)$ et $f_v \in \mathcal{O}(V)$ définies dans deux ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ et $V \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 1$, qui sont égales dans un certain sous-ouvert non vide $W \subset U \cap V$:

$$f_u|_W = f_v|_W,$$

si de plus :

$$U \cap V \text{ est connexe,}$$

alors :

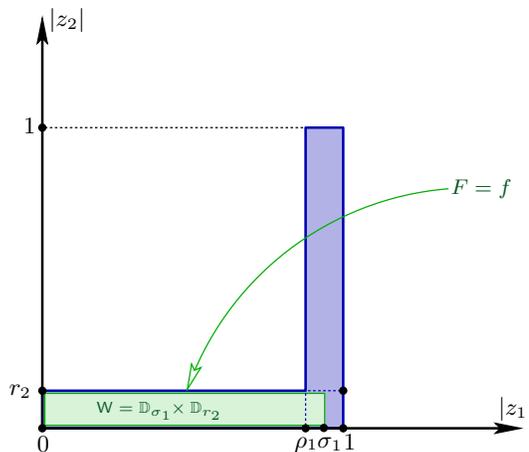
$$f_u = f_v \text{ partout dans } U \cap V,$$

et la fonction :

$$U \cup V \ni z \mapsto \begin{cases} f_u(z) & \text{lorsque } z \in U, \\ f_v(z) & \text{lorsque } z \in V, \end{cases}$$

est bien définie, holomorphe dans la réunion des deux ouverts. □

Sans l'hypothèse que $U \cap V$ est *connexe*, la conclusion est en général fautive — penser à la fonction logarithme !



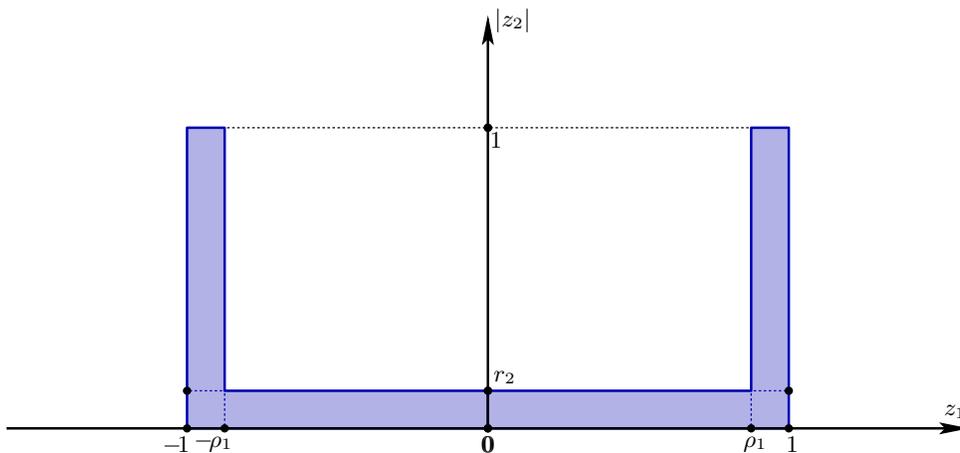
Ici donc, avec :

$$U := H, \quad V := \mathbb{D}_{\sigma_1} \times \mathbb{D}, \quad W := \mathbb{D}_{\sigma_1} \times \mathbb{D}_{r_2},$$

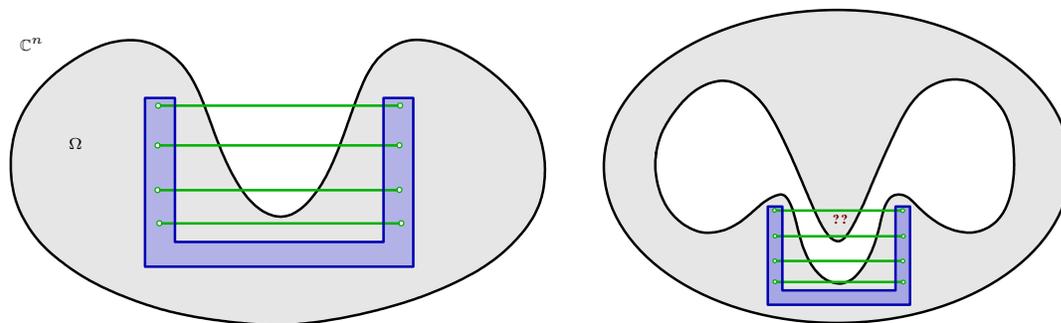
nous vérifions (visuellement et rigoureusement : exercice !) que :

$$H \cap (\mathbb{D}_{\sigma_1} \cap \mathbb{D}) \text{ est connexe,}$$

ce qui nous donne bien un unique prolongement holomorphe au bidisque unité $\mathbb{D} \times \mathbb{D}$, encore noté F dans l'énoncé du théorème. \square



Une autre représentation de la figure de Hartogs encore plus parlante consiste à travailler en coordonnées z_1 , symbolisées comme coordonnées réelles négatives et positives, et en coordonnées $|z_2|$.



Lorsqu'on peut 'mettre' une figure de Hartogs dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ qui présente une forme de 'creux', les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, restreintes à une telle figure, se prolongent alors holomorphiquement au bidisque rempli concerné, puisqu'on peut à nouveau employer la formule de Cauchy.

Mais attention ! Il n'y a aucune raison qu'après remplissage de la figure, l'intersection avec l'ouvert Ω soit connexe. Et en général, les valeurs prolongées de la fonction au bidisque rempli n'ont aucune raison d'être les mêmes que celles de la fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ sur les autres composantes connexes que celle qui se situe 'autour' de la figure de Hartogs. Nous insistons sur ce point parce qu'historiquement, certaines démonstrations erronées d'une version plus générale du théorème de Hartogs (Théorème 8.3) ont paru dans la littérature mathématique.

En s'assurant de bien employer l'hypothèse de connexité, on démontre (exercice) l'énoncé suivant.

Théorème 1.6. *Étant donné un polydisque ouvert non vide $P \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$, et étant donné un voisinage ouvert V_P de son bord ∂P tel que :*

$$V_P \cap P \text{ est connexe,}$$

on a :

$$\forall f \in \mathcal{O}(V_P) \quad \exists! F \in \mathcal{O}(P) \quad F|_{P \cap V_P} = f|_{P \cap V_P}. \quad \square$$

Maintenant, que se passe-t-il en dimension $n \geq 2$? Dans \mathbb{C}^n , il suffit de regarder un produit de la figure de Hartogs 2-dimensionnelle avec un polydisque ouvert de \mathbb{C}^{n-2} .

Définition 1.7. Pour un rayon $0 < \rho_1 < 1$, pour un rayon $0 < r_2 < 1$, et pour des réels $s_3 > 0, \dots, s_n > 0$, soit la figure de Hartogs n -dimensionnelle :

$$H = H_{\rho_1, r_2, s_3, \dots, s_n} := H_{\rho_1, r_2} \times \mathbb{D}_{s_3} \times \dots \times \mathbb{D}_{s_n} \subset \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C},$$

définie comme réunion :

$$H := H_1 \cup H_2,$$

$$H_1 := \{(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1| < 1, |z_2| < r_2, |z_3| < s_3, \dots, |z_n| < s_n\},$$

$$H_2 := \{(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \rho_1 < |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < s_3, \dots, |z_n| < s_n\}.$$

Une généralisation aisée des arguments qui précèdent permet alors d'établir une version n -dimensionnelle du Théorème 1.5 de prolongement de Hartogs.

Théorème 1.8. [Hartogs bis] *On a prolongement holomorphe unique :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(H) \quad \exists! F \in \mathcal{O}(\mathbb{D}^n) \quad F|_H = f. \quad \square$$

Évidemment, la disposition de cette figure dans \mathbb{C}^n peut être changée, par exemple au moyen de transformations affines quelconques :

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z'_1, \dots, z'_n),$$

de la forme :

$$z'_i := b_i + a_{i,1} z_1 + \dots + a_{i,n} z_n \quad (1 \leq i \leq n).$$

Puisque la taille et l'épaisseur des figures de Hartogs est alors modifiable à volonté, nous pouvons normaliser leur partie en z_3, \dots, z_n .

Définition 1.9. Dans $\mathbb{C}^{n \geq 2}$, une *figure de Hartogs normalisée* est, pour $0 < \rho_1 < 1$ et pour $0 < r_2 < 1$, l'ouvert :

$$\begin{aligned} H := & \{ |z_1| < 1, |z_2| < r_2, |z_3| < 1, \dots, |z_n| < 1, \\ & \cup \{ \rho_1 < |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1, \dots, |z_n| < 1 \}, \end{aligned}$$

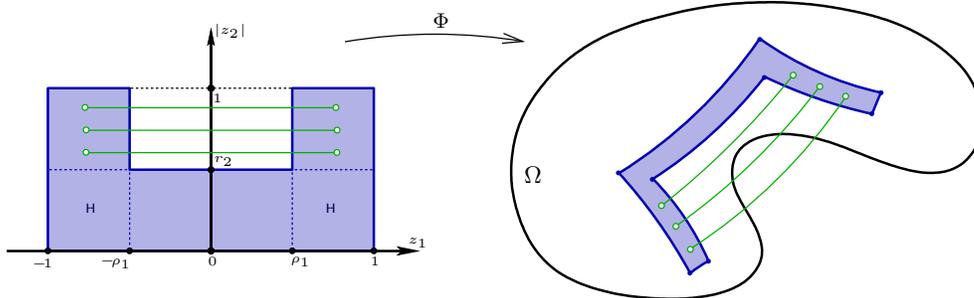
et la *figure de Hartogs remplie* est le polydisque unité ouvert :

$$\hat{H} := \{ |z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_3| < 1, \dots, |z_n| < 1 \}.$$

En fait il sera utile, plus généralement, de considérer des *biholomorphismes* quelconques de \mathbb{C}^n , à savoir des difféomorphismes \mathcal{C}^∞ :

$$\Phi: U \longrightarrow U' = \Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$$

d'ouverts $U \subset \mathbb{C}^n$ sur leurs images $\Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$, dont les n composantes $\Phi_1, \dots, \Phi_n \in \mathcal{O}(U)$ sont des fonctions holomorphes dans U .



En effet, lorsqu'on considère des fonctions holomorphes dans un ouvert « compliqué » $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, il faut s'adapter à sa géométrie, et notamment, *courber* les figures de Hartogs.

Théorème 1.10. *S'il existe un biholomorphisme $\Phi: U \longrightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$ défini dans un voisinage ouvert $U \supset \hat{H}$ de la figure de Hartogs remplie tel que l'image de la figure non remplie :*

$$\Phi(H) \subset \Omega$$

est contenue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 2}$, alors :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(\Phi(\hat{H})) \quad g|_{\Phi(H)} = f|_{\Phi(H)}.$$

Démonstration. Avec un choix de σ_1 tel que $\rho_1 < \sigma_1 < 1$, et avec la famille de disques holomorphes définis pour $|z| < 1$ par :

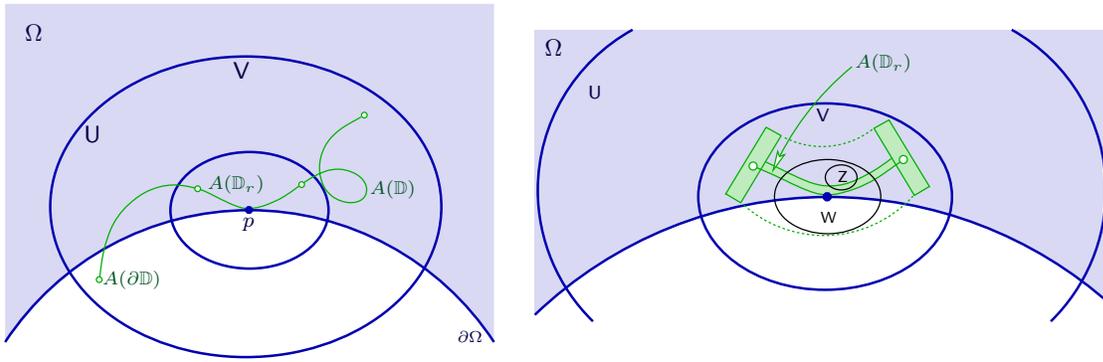
$$\begin{aligned} A_{z_2, z_3, \dots, z_n}: \mathbb{D} & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ z & \longmapsto (\sigma_1 z, z_2, z_3, \dots, z_n), \end{aligned}$$

à paramètres $|z_2| < 1, |z_3| < 1, \dots, |z_n| < 1$ dont les bords $A_{z_2, z_3, \dots, z_n}(\partial\mathbb{D}) \subset \mathbb{H}$ sont contenus dans la figure, l'argument consiste de nouveau à appliquer la formule de Cauchy sur ces disques pour définir le prolongement :

$$g \circ \Phi(z_1, z_2, z_3, \dots, z_n) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_1|=\sigma_1} \frac{g(\Phi(\zeta_1, z_2, z_3, \dots, z_n))}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1,$$

le fait que Φ soit un biholomorphisme garantissant l'holomorphicité par rapport aux paramètres. \square

Lorsque $\Phi(\hat{\mathbb{H}}) \not\subset \Omega$, ce théorème montre que *toutes* les fonctions holomorphes dans Ω se prolongent au-delà de Ω . Toutefois, il faut prendre garde au fait qu'il n'y a pas en général extension dans la réunion $\Omega \cup \Phi(\hat{\mathbb{H}})$, notamment lorsque l'intersection $\Omega \cap \Phi(\hat{\mathbb{H}})$ n'est pas connexe, circonstance qui a déjà été illustrée plus haut.



Maintenant, présentons une manière naturelle de construire de telles figures de Hartogs $\Phi(\mathbb{H}) \subset \Omega$ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 2}$. Soit une application :

$$A = (A_1, \dots, A_n): \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}^n,$$

dont les composantes $A_i \in \mathcal{O}(\mathbb{D})$ sont holomorphe dans le disque unité \mathbb{D} , ce qui justifie l'appellation *disque holomorphe*. Supposons que :

$$A(0) =: p \in \partial\Omega,$$

que l'image $A(\mathbb{D})$ est contenue dans un voisinage ouvert $U \ni p$, et qu'il existe $r > 0$ assez petit pour que l'image par A du sous-disque $\mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}$ soit contenue dans Ω , en restriction à un sous-voisinage ouvert $p \in V \subset U$:

$$A(\mathbb{D}_r \setminus \{0\}) \cap V \subset \Omega \cap V.$$

Supposons aussi que $A'(0) \neq 0$, ce qui implique l'existence d'un rayon $r > 0$ assez petit pour que la restriction :

$$A|_{\mathbb{D}_r}: \mathbb{D}_r \xrightarrow{\sim} A(\mathbb{D}_r) \subset \mathbb{C}^n$$

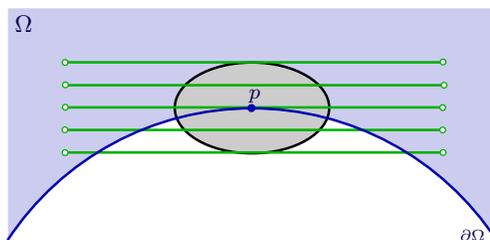
soit un difféomorphisme sur son image, qui est une 2-surface réelle lisse plongée dans $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, et même une sous-variété holomorphe de dimension 1 de \mathbb{C}^n . Quitte à rapetisser $r > 0$:

$$A(\mathbb{D}_r \setminus \{0\}) \subset \Omega \cap V.$$

L'image du bord de ce sous-disque :

$$A(\partial\mathbb{D}_r) = A(\{|z| = r\})$$

est alors un compact contenu dans Ω , compact que l'on peut « bouger » quelque peu sans quitter Ω , de manière à former par épaississement une figure de Hartogs, dont le remplissage contient un ouvert $W \ni p$.



En particulier, si $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$ est *strictement concave* en $p \in \partial\Omega$ au sens où son ordre de contact avec son plan tangent :

$$T_p\partial\Omega \cong \mathbb{R}^{2n+1} \cong \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

vaut exactement 2 dans toutes les directions tangentes réelles, localement contenues dans Ω , nous vérifierons dans le prochain chapitre que des petits disques contenus dans des droites complexes tangentes à $\partial\Omega$ satisfont ces hypothèses.

En déplaçant ces disques dans toutes les directions transverses, et en appliquant la formule de Cauchy, on peut alors à nouveau produire des prolongements holomorphes au-delà de $\partial\Omega$ en p .

L'Exercice 7 propose de détailler la démonstration du résultat général suivant, qui découle essentiellement du Théorème 1.10.

Théorème 1.11. *Sous ces hypothèses, si le bord $\partial\Omega$ est une hypersurface réelle de classe \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{C}^n près de p , alors il existe un voisinage ouvert $p \in W$ et un ouvert non vide $Z \subset \Omega \cap W$ tels que :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! g \in \mathcal{O}(W) \quad g|_Z = f|_Z. \quad \square$$

Pour conceptualiser les situations où ce phénomène ne se produit pas, on demande au contraire qu'aucune figure de Hartogs ne « déborde » de Ω .

Définition 1.12. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit *Hartogs-pseudoconvexe* si, pour tout biholomorphisme $\Phi: U \rightarrow \Phi(U) \subset \mathbb{C}^n$ défini dans un voisinage ouvert $U \supset \widehat{H}$ de la figure de Hartogs remplie tel que l'image de la figure non remplie :

$$\Phi(H) \subset \Omega$$

est contenue dans Ω , l'image $\Phi(\widehat{H}) \subset \Omega$ est aussi contenue dans l'ouvert.

Les Exercices 5 et 6 proposent d'établir quelques propriétés élémentaires des domaines Hartogs-pseudoconvexes.

2. Fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes

Maintenant, demandons seulement que les fonctions holomorphes soient \mathcal{C}^1 au départ, et non \mathcal{C}^∞ comme dans la Définition 1.2.

Définition 2.1. Une fonction :

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$$

est dite (complètement) *holomorphe* si elle est de classe \mathcal{C}^1 et si elle satisfait $\bar{\partial}f = 0$, i.e. :

$$0 \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} \equiv \cdots \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n}.$$

Un théorème célèbre et profond dû à Hartogs en 1910 montre qu'il n'est pas nécessaire de supposer, dans la définition, que f soit de classe \mathcal{C}^1 , ni qu'elle soit continue, ni même qu'elle soit localement bornée, par rapport à toutes les variables $(x_1 + \sqrt{-1}y_1, \dots, x_n + \sqrt{-1}y_n) \in \Omega$.

Théorème 2.2. [de Hartogs 1910 sur l'holomorphie séparée] *Si une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est séparément holomorphe par rapport à chacune des variables lorsque les $(n-1)$ autres variables sont fixées, à savoir si, pour tout entier $1 \leq j \leq n$, et pour tous nombres complexes fixés :*

$$\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_n \in \mathbb{C}$$

la fonction d'une variable complexe :

$$z_j \mapsto f(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_n)$$

est holomorphe dans l'ouvert-tranche :

$$\Omega \cap \left(\{\zeta_1\} \times \cdots \times \{\zeta_{j-1}\} \times \mathbb{C} \times \{\zeta_{j+1}\} \times \cdots \times \{\zeta_n\} \right),$$

alors, progressivement :

(1) f est localement bornée dans Ω ;

(2) f est continue dans Ω ;

(2) f est \mathcal{C}^1 dans Ω et elle est complètement holomorphe par rapport à toutes les variables au sens de la Définition 2.1.

Comme dans la théorie des fonctions d'une variable complexe, on démontre qu'alors, toute fonction holomorphe f est \mathcal{C}^∞ et même localement développable en série entière multidimensionnelle convergente dans un petit voisinage de tout point $z_0 \in \Omega$, ce que nous verrons ultérieurement.

Le théorème de Hartogs est d'autant plus spectaculaire qu'il serait faux pour les fonctions analytiques de variables réelles.

Exemple 2.3. Soit la fonction $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^4 + y^4} & \text{lorsque } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{lorsque } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Alors pour tout $a \in \mathbb{R}$ fixé, et pour tout $b \in \mathbb{R}$ fixé, nous affirmons que les deux fonctions séparées :

$$y \mapsto f(a, y),$$

$$x \mapsto f(x, b),$$

sont \mathcal{C}^∞ , et même analytiques réelles (\mathcal{C}^ω). En effet, par symétrie, il suffit de traiter la première fonction.

Pour $a \neq 0$, le caractère \mathcal{C}^∞ de :

$$y \mapsto \frac{ay}{a^4 + y^4}$$

provient du fait que le dénominateur est toujours > 0 . Observons, et c'est important pour la cohérence globale, que ce raisonnement ne serait plus vrai pour la fonction $\frac{z_1 z_2}{z_1^4 + z_2^4}$ définie sur le corps des nombres complexes, puisque le polynôme $z_2 \mapsto a^4 + z_2^4$ possède toujours 4 racines, comptées avec multiplicité.

Pour $a = 0$, et pour $y \neq 0$, on voit aussi que $\frac{0 \cdot y}{0 + y^4} \equiv 0$ est \mathcal{C}^∞ , y compris en $y = 0$ où par définition la fonction vaut 0.

Avec cette fonction, les hypothèses similaires à celles du Théorème de Hartogs sont donc satisfaites.

Toutefois, cette fonction réelle (pathologique) n'est pas localement bornée au voisinage de $(0, 0)$.

En effet, en restriction aux droites $\{y = cx\}$ de pente $c \neq 0$ et pour $x \neq 0$, ses valeurs :

$$f(x, cx) = \underbrace{\frac{c}{1+c^4}}_{\text{constante } \neq 0} \cdot \frac{1}{x^2},$$

divergent visiblement ! □

3. Formule intégrale de Cauchy et applications

Bien que les ouverts typiques de $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ soient des boules euclidiennes, lorsqu'on tient compte de la structure complexe de \mathbb{C}^n , il s'avère plus naturel de considérer des produits de disques.

Définition 3.1. Dans \mathbb{C}^n , un *polydisque ouvert* est un sous-ensemble ouvert de la forme :

$$\mathbb{D}_r(a) := \mathbb{D}_{r_1, \dots, r_n}(a_1, \dots, a_n) := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1 - a_1| < r_1, \dots, |z_n - a_n| < r_n\},$$

de rayons quelconques strictement positifs :

$$r_1 > 0, \dots, r_n > 0,$$

et centré en un point quelconque $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Lorsque le centre est l'origine $(0, \dots, 0)$, on abrégera parfois :

$$\mathbb{D}_r(0) \equiv \mathbb{D}_r.$$

L'adhérence topologique d'un tel polydisque ouvert est bien entendu le produit correspondant des disques fermés :

$$\overline{\mathbb{D}_r(a)} := \overline{\mathbb{D}_{r_1, \dots, r_n}(a_1, \dots, a_n)} := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |z_n - a_n| \leq r_n\}.$$

Comme l'ensemble des boules euclidiennes, l'ensemble des polydisques ouverts constitue une base pour la topologie usuelle de $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$.

Théorème 3.2. [Formule de Cauchy] Si une fonction à valeurs complexes :

$$f \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}_{r_1}(a_1)} \times \dots \times \overline{\mathbb{D}_{r_n}(a_n)}) \quad (a \in \mathbb{C}^n, r \in \mathbb{R}_+^{*n})$$

est continue sur un polydisque fermé :

$$\overline{\mathbb{D}_r(a)} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1 - a_1| \leq r_1, \dots, |z_n - a_n| \leq r_n\},$$

et si elle est séparément holomorphe par rapport à chaque variable z_j lorsque les autres sont fixées, au sens précis où, pour tout entier $1 \leq j \leq n$, et pour tous nombres complexes fixés :

$$\zeta_1 \in \mathbb{D}_{r_1}(a_1), \dots, \zeta_{j-1} \in \mathbb{D}_{r_{j-1}}(a_{j-1}), \zeta_{j+1} \in \mathbb{D}_{r_{j+1}}(a_{j+1}), \dots, \zeta_n \in \mathbb{D}_{r_n}(a_n),$$

la fonction d'une seule variable complexe :

$$z_j \longmapsto f(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, z_j, \zeta_{j+1}, \dots, \zeta_n)$$

est holomorphe dans le disque ouvert $\mathbb{D}_{r_j}(a_j)$, alors en tout point intérieur au polydisque :

$$z \in \mathbb{D}_r(a),$$

la valeur de cette fonction est donnée par les intégrales itérées :

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Observons que dans cette *formule de Cauchy*, l'intégration ne s'effectue *pas* sur le bord topologique du polydisque :

$$\partial \mathbb{D}_r(a) = \bigcup_{j=1}^n \overline{\mathbb{D}}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{r_{j-1}}(a_{j-1}) \times \underbrace{S_{r_j}(a_j)}_{\substack{\text{cercle} \\ \{|\zeta_j - a_j| = r_j\}}} \times \overline{\mathbb{D}}_{r_{j+1}}(a_{j+1}) \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{r_n}(a_n),$$

qui est de dimension réelle $2n - 1$, mais sur le produit de cercles :

$$S_{r_1}(a_1) \times \cdots \times S_{r_n}(a_n),$$

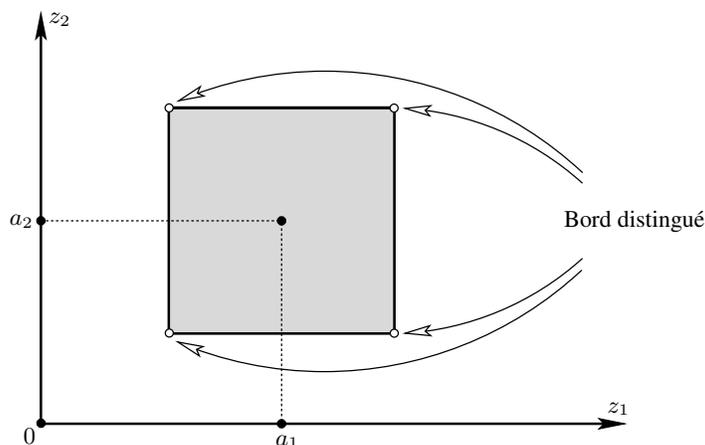
qui est de dimension réelle n . Citons en passant la

Définition 3.3. Le *bord distingué* d'un polydisque :

$$\mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n)$$

est le produit des cercles bordant ses composantes :

$$\partial^* \mathbb{D}_r(a) := S_{r_1}(a_1) \times \cdots \times S_{r_n}(a_n).$$



En fait, le bord distingué présente aussi l'intérêt que le principe du maximum à plusieurs variables s'exprime comme suit.

Assertion 3.4. Si une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\mathbb{D}}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{r_n}(a_n))$ est séparément holomorphe dans $\mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n)$, alors :

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{r_n}(a_n)} |f| = \max_{S_{r_1}(a_1) \times \cdots \times S_{r_n}(a_n)} |f|.$$

Démonstration. Après une translation, on peut supposer $a = 0$. Traitons seulement le cas $n = 2$, puisque le cas général est similaire.

En considérant des suites $(z_{2,n})_{n=1}^{\infty}$ avec $|z_{2,n}| < r_2$ qui convergent vers un ζ_2 avec $|\zeta_2| = r_2$ quelconque, le théorème de Cauchy-Montel à une variable montre que toutes les fonctions $z_1 \mapsto f(z_1, \zeta_2)$ sont holomorphes dans $\{|z_1| < r_1\}$, et continues dans $\{|z_1| \leq r_1\}$.

Donc le principe du maximum au bord s'applique deux fois :

$$\max_{|z_1| \leq r_1} \max_{|z_2| \leq r_2} |f(z_1, z_2)| = \max_{|z_1| \leq r_1} \max_{|\zeta_2|=r_2} |f(z_1, \zeta_2)| = \max_{|\zeta_1|=r_1} \max_{|\zeta_2|=r_2} |f(\zeta_1, \zeta_2)|. \quad \square$$

Démonstration du Théorème 3.2. Nous pouvons supposer $a = 0$ et nous limiter au cas $n = 2$.

Fixons z_2 avec $|z_2| < r_2$. Pour z_1 quelconque avec $|z_1| < r_1$, la fonction $z_2 \mapsto f(z_1, z_2)$ est holomorphe dans $\{|z_2| < r_2\}$ et continue dans $\{|z_2| \leq r_2\}$. Lorsque z_1 tend vers un ζ_1 avec $|\zeta_1| = r_1$ quelconque, le théorème de Cauchy-Montel montre que $z_2 \mapsto f(\zeta_1, z_2)$ est à nouveau holomorphe dans $\{|z_2| < r_2\}$ et toujours continue dans $\{|z_2| \leq r_2\}$.

Donc la formule de Cauchy à une variable s'applique :

$$\forall |z_2| < r_2 \quad \forall |\zeta_1| = r_1 \quad f(\zeta_1, z_2) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{\zeta_2 - z_2} d\zeta_2.$$

Ensuite, fixons aussi z_1 avec $|z_1| < r_1$. À nouveau par Cauchy :

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_1|=r_1} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^2} \int_{|\zeta_1|=r_1} \int_{|\zeta_2|=r_2} \frac{f(\zeta_1, \zeta_2)}{(\zeta_1 - z_1)(\zeta_2 - z_2)} d\zeta_1 d\zeta_2. \end{aligned} \quad \square$$

Corollaire 3.5. Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, alors :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),$$

et de plus, toutes les dérivées de f sont aussi holomorphes dans Ω .

Démonstration. En tout point $a \in \Omega$, on peut centrer un polydisque ouvert $\mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n)$ de rayons $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ assez petits pour que son adhérence reste contenue dans l'ouvert :

$$\overline{\mathbb{D}_{r_1}(a_1)} \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}_{r_n}(a_n)} \subset \Omega.$$

Alors la restriction de f à ce polydisque fermé satisfait les hypothèses du théorème précédent. Comme le noyau :

$$(z_1, \dots, z_n, \zeta_1, \dots, \zeta_n) \mapsto \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{1}{\zeta_n - z_n}$$

dépend de manière \mathcal{C}^∞ de toutes ses variables lorsqu'on astreint (z_1, \dots, z_n) à varier dans un sous-polydisque strict fermé :

$$\overline{\mathbb{D}_{\rho_1}(a_1)} \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}_{\rho_n}(a_n)} \Subset \mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n)$$

de rayons :

$$0 < \rho_1 < r_1, \dots, 0 < \rho_n < r_n,$$

les théorèmes classiques de dérivation sous le signe intégral s'appliquent aisément à la formule de Cauchy :

$$f(z) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

Pour être plus précis, si on abrège les dérivées partielles d'une fonction g de classe \mathcal{C}^∞ :

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta g = \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n + \beta_1 + \cdots + \beta_n} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n} \partial y_1^{\beta_1} \cdots \partial y_n^{\beta_n}},$$

où $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}^n$ sont des multi-indices quelconque, et si on introduit aussi :

$$\partial_z^\alpha g := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} g}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}},$$

$$\partial_{\bar{z}}^\alpha g := \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} g}{\partial \bar{z}_1^{\alpha_1} \cdots \partial \bar{z}_n^{\alpha_n}},$$

l'holomorphic par rapport à $z = (z_1, \dots, z_n)$ du noyau $\frac{1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{1}{\zeta_n - z_n}$ montre instantanément pour tout $k = 1, \dots, n$ comme dans le cas d'une seule variable que :

$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left[\text{formule de Cauchy} \right],$$

tandis que :

$$\partial_z^\alpha f(z) = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1| = r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n| = r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{1+\alpha_1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{1+\alpha_n}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

toujours pour $|z_k - a_k| \leq \rho_k < r_k$. \square

D'ailleurs, puisque toutes les dérivées par rapport à \bar{z} d'une fonction holomorphe s'anulent, on pourra noter simplement sans indice inférieur \bullet_z :

$$\partial^\alpha f \equiv \partial_z^\alpha f.$$

Introduisons aussi au passage les deux notations abrégées :

$$\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n! \quad \text{et} \quad |\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

Théorème 3.6. [Développabilité en série entière convergente] *Si une fonction f est holomorphe dans un polydisque ouvert :*

$$\mathbb{D}_r(a) = \mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n) \quad (r_1 > 0, \dots, r_n > 0),$$

alors elle est développable en série entière de plusieurs variables :

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \partial^\alpha f(a) \frac{(z - a)^\alpha}{\alpha!} \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \frac{\partial^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} f(0)}{\partial z_1^{\alpha_1} \cdots \partial z_n^{\alpha_n}} \frac{(z_1 - a_1)^{\alpha_1}}{\alpha_1!} \cdots \frac{(z_n - a_n)^{\alpha_n}}{\alpha_n!}, \end{aligned}$$

avec convergence normale lorsque z est astreint à varier dans tout sous-polydisque strict :

$$z \in \overline{\mathbb{D}}_\rho(a) \subset \mathbb{D}_r(a) \quad (0 < \rho_k < r_k).$$

Ce qu'on entend ici par *convergence normale* correspond à l'intuition et s'exprime généralement par la :

Définition 3.7. Une série infinie multiple de fonctions a_α continues définies dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$:

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha(z) = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}(z)$$

est dite *converger normalement* dans Ω lorsque, pour tout compact $K \Subset \Omega$, la série à termes positifs :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \max_{z \in K} |a_\alpha(z)| < \infty$$

converge.

Par souci de complétude dans la pensée, rappelons qu'une série numérique multiple :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} c_\alpha$$

à coefficients $c_\alpha \geq 0$ est dite *converger* lorsque :

$$\sup_{\substack{\Lambda \subset \mathbb{N}^n \\ \text{partie finie}}} \sum_{\alpha \in \Lambda} c_\alpha < \infty.$$

Démonstration du Théorème 3.6. Après une translation du système de coordonnées, on peut supposer que $(a_1, \dots, a_n) = (0, \dots, 0)$. Or pour (z_1, \dots, z_n) variant dans un tel sous-polydisque strict :

$$\overline{\mathbb{D}}_{\rho_1} \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{\rho_n} \Subset \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n},$$

et pour $|\zeta_1| = r_1, \dots, |\zeta_n| = r_n$, il est possible de développer le noyau de Cauchy multidimensionnel en série formelle multiple :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta_1 - z_1} \cdots \frac{1}{\zeta_n - z_n} &= \frac{1}{\zeta_1} \frac{1}{1 - \frac{z_1}{\zeta_1}} \cdots \frac{1}{\zeta_n} \frac{1}{1 - \frac{z_n}{\zeta_n}} \\ &= \frac{1}{\zeta_1} \left(\sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1} \right)^{\alpha_1} \right) \cdots \frac{1}{\zeta_n} \left(\sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\frac{z_n}{\zeta_n} \right)^{\alpha_n} \right) \\ &= \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_n} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n}{\zeta_n} \right)^{\alpha_n}, \end{aligned}$$

qui est en fait *normalement convergente* (exercice), propriété qui justifie alors les calculs suivants :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1) \cdots (\zeta_n - z_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\ &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_n|=r_n} f(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \frac{1}{\zeta_1 \cdots \zeta_n} \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \left(\frac{z_1}{\zeta_1} \right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{z_n}{\zeta_n} \right)^{\alpha_n} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n \\ &= \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} (z_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n)^{\alpha_n} \underbrace{\frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1)^{1+\alpha_1} \cdots (\zeta_n)^{1+\alpha_n}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n}_{\text{coefficients complexes}}, \end{aligned}$$

toujours avec convergence normale pour $|z_1| \leq \rho_1, \dots, |z_n| \leq \rho_n$ grâce à un résultat connu. Mais la valeur de ces coefficients complexes a déjà été dévoilée plus haut lorsqu'on a différencié la formule de Cauchy, en l'appliquant au centre pour $z = a = 0$:

$$\partial^\alpha f(0) = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - 0)^{1+\alpha_1} \cdots (\zeta_n - 0)^{1+\alpha_n}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

ce qui établit bien que la formule de Taylor complexe pour f est normalement convergente dans $\overline{\mathbb{D}}_\rho$. \square

Corollaire 3.8. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, pour tout point $a \in \Omega$ et tous rayons $r_1, \dots, r_n > 0$ tels que :*

$$\overline{\mathbb{D}}_r(a) \subset \Omega,$$

on a la convergence normale en chaque $z \in \mathbb{D}_r(a)$ de la série entière :

$$f(z) = T_a^\infty(f)(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \partial^\alpha f(a) \frac{(z - a)^\alpha}{\alpha!}. \quad \square$$

Théorème 3.9. [Inégalités de Cauchy] *Si une fonction f est holomorphe dans un polydisque ouvert :*

$$\mathbb{D}_r(a) = \mathbb{D}_{r_1}(a_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n}(a_n) \quad (r_1 > 0, \dots, r_n > 0),$$

et si elle y est partout bornée :

$$|f(z)| \leq M < \infty \quad (\forall z \in \mathbb{D}_r(a)),$$

alors pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$|\partial_{z_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{z_n}^{\alpha_n} f(a)| \leq \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}} M.$$

Démonstration. En effet, une majoration simple dans la formule de Cauchy différenciée déjà vue :

$$\partial_z^\alpha f(z) = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - a_1|=r_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n|=r_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - z_1)^{1+\alpha_1} \cdots (\zeta_n - z_n)^{1+\alpha_n}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

appliquée à un sous-polydisque $\overline{\mathbb{D}}_\rho(a) \subset \mathbb{D}_r(a)$ quelconque :

$$\begin{aligned} \frac{|\partial^\alpha f(a)|}{\alpha_1! \cdots \alpha_n!} &\leq \int_{|\zeta_1 - a_1|=\rho_1} \cdots \int_{|\zeta_n - a_n|=\rho_n} \frac{|f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)|}{|\zeta_1 - a_1|^{1+\alpha_1} \cdots |\zeta_n - a_n|^{1+\alpha_n}} \frac{d|\zeta_1|}{2\pi} \cdots \frac{d|\zeta_n|}{2\pi} \\ &\leq \frac{M}{\rho_1^{1+\alpha_1} \cdots \rho_n^{1+\alpha_n}} \frac{2\pi\rho_1}{2\pi} \cdots \frac{2\pi\rho_n}{2\pi}, \end{aligned}$$

donne instantanément le résultat en faisant ensuite croître $\rho_1 \rightarrow r_1, \dots, \rho_n \rightarrow r_n$. \square

Théorème 3.10. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, pour tout sous-ensemble compact $K \Subset \Omega$, pour tout voisinage ouvert relativement compact :*

$$K \Subset V_K \Subset \Omega,$$

et pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, il existe des constantes :

$$C_\alpha = C_{K, V_K, \alpha} < \infty$$

telles que :

$$\max_K |\partial^\alpha f| \leq C_\alpha \sup_{V_K} |f| \quad (< \infty),$$

pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$.

Démonstration. Par compacité de K , il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall a \in K \quad \{|z_1 - a_1| \leq \varepsilon, \dots, |z_n - a_n| \leq \varepsilon\} \in \mathbf{V}_K.$$

Alors une application du théorème précédent conclut :

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha f(a)| &\leq \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{\varepsilon^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}} \max_{|z_i - a_i| \leq \varepsilon} |f| \\ &\leq \frac{\alpha!}{\varepsilon^{|\alpha|}} \sup_{\mathbf{V}_K} |f|. \end{aligned} \quad \square$$

Comme dans la théorie des fonctions holomorphes d'une variable complexe, on en déduit aisément (exercice) le :

Théorème 3.11. [Cauchy-Montel à plusieurs variables] *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions holomorphes $f_n \in \mathcal{O}(\Omega)$ converge, uniformément sur les compacts de Ω , vers une certaine fonction-limite continue $f_\infty \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, alors $f_\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$ est en fait holomorphe.* \square

On déduit aussi (exercice) le :

Théorème 3.12. [Stieltjes-Vitali à plusieurs variables] *Si une suite $(f_n)_{n=1}^\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$ a des modules :*

$$|f_n| \leq C_K < \infty,$$

uniformément bornés sur tout compact $K \Subset \Omega$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty =: (g_k)_{k=1}^\infty$ qui converge, uniformément sur les compacts de Ω , vers une fonction-limite $g_\infty \in \mathcal{O}(\Omega)$. \square

4. Démonstration du Théorème de Hartogs sur l'holomorphic séparée

Certainement, le théorème de Hartogs renforce l'idée que les fonctions holomorphes sont « encore plus magiques » à plusieurs variables qu'elles ne le sont à une seule variable, puisque, rappelons-le, il prétend au sujet d'une fonction que :

$$\begin{aligned} \text{séparément holomorphe} &\implies \text{localement bornée} \\ &\implies \text{continue} \\ &\implies \text{continûment différentiable} \\ &\implies \text{développable en série convergente.} \end{aligned}$$

Démonstration du Théorème 2.2. Établir que $|f|$ est localement bornée constitue la tâche principale, et elle sera effectuée ultérieurement.

Lemme 4.1. *Toute fonction séparément holomorphe $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ qui est localement bornée est continue.*

Démonstration. Soit un point quelconque $z_0 \in \Omega$. Après une simple translation du système de coordonnées, on peut supposer que $z_0 = 0$ est l'origine.

Soit alors un polydisque ouvert :

$$\mathbb{D}_r = \mathbb{D}_{r_1, \dots, r_n} = \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < r_1, \dots, |z_n| < r_n\}$$

de rayons $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$ suffisamment petits pour que sa fermeture :

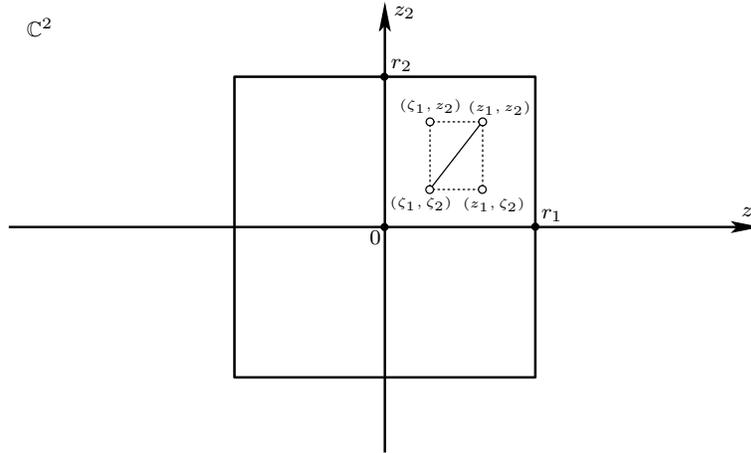
$$\overline{\mathbb{D}}_r = \{|z_1| \leq r_1, \dots, |z_n| \leq r_n\}$$

reste contenue dans l'ouvert :

$$\overline{\mathbb{D}}_r \subset \Omega.$$

Par hypothèse :

$$|f(z)| \leq M < \infty \quad (\forall z \in \overline{\mathbb{D}}_r).$$



Maintenant, pour toute paire de points :

$$z \in \mathbb{D}_r \quad \text{et} \quad \zeta \in \mathbb{D}_r,$$

en déployant un télescope géométrique de la différence :

$$f(z) - f(\zeta) = \sum_{j=1}^n \left(f(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \underline{z}_j, z_{j+1}, \dots, z_n) - f(\zeta_1, \dots, \zeta_{j-1}, \underline{\zeta}_j, z_{j+1}, \dots, z_n) \right),$$

on réalise qu'il suffit de traiter le cas de fonctions d'une seule variable complexe, celles qui sont soulignées au centre.

Pour déduire la continuité du caractère borné, le *Lemme de Schwarz* vient à la rescousse, car il dit qu'étant donné une fonction g holomorphe dans un disque :

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| < r\}$$

qui est de plus bornée :

$$|g| \leq N < \infty,$$

alors pour toute paire de points $|w'| < r$ et $|w''| < r$, on a :

$$|g(w') - g(w'')| \leq 2N \cdot r \cdot \frac{|w' - w''|}{|rr - \overline{w'}w''|}.$$

Appliqué à chaque terme de la somme ci-dessus :

$$|f(z) - f(\zeta)| \leq 2M \cdot \sum_{j=1}^n r_j \cdot \frac{|z_j - \zeta_j|}{|r_j r_j - \overline{z}_j \zeta_j|},$$

Schwarz nous montre que la fonction séparément holomorphe bornée f est non seulement continue, mais aussi 1-lipschitzienne ! □

Maintenant que l'on sait que f est au moins continue — sous réserve d'établir plus tard qu'elle est localement bornée! —, on peut appliquer la formule élémentaire de Cauchy à plusieurs variables donnée par le Théorème 3.2. Ensuite, comme dans la théorie classique à une variable complexe, la représentation intégrale de Cauchy implique, grâce au Théorème 3.6 que f est non seulement continue, mais aussi développable en série entière localement convergente en (z_1, \dots, z_n) , donc *a fortiori* \mathcal{C}^1 et satisfaisant :

$$0 \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_1} \equiv \dots \equiv \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_n},$$

ce qui conclut que f est *holomorphe* au sens de la Définition 2.1.

En définitive, il reste à démontrer — et c'est là l'affaire principale — que *toute fonction séparément holomorphe est localement bornée*.

Le premier argument-clé repose sur le Théorème de Baire, énoncé ici sans rappel de démonstration.

Théorème 4.2. [de Baire] *Dans un espace métrique complet (E, d) , l'intersection d'un nombre infini dénombrable :*

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$$

d'ouverts denses $O_n \subset E$ est encore un sous-ensemble dense de E . □

Bien entendu, une telle intersection n'est en général pas un ouvert. En passant aux complémentaires fermés :

$$F_n := E \setminus O_n,$$

on a une formulation essentiellement équivalente, plus utile ici.

Théorème 4.3. [de Baire bis] *Si un espace métrique complet (E, d) est représenté comme union infinie dénombrable :*

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

de sous-ensembles fermés $F_n \subset E$, alors l'un d'entre eux au moins est d'intérieur non vide :

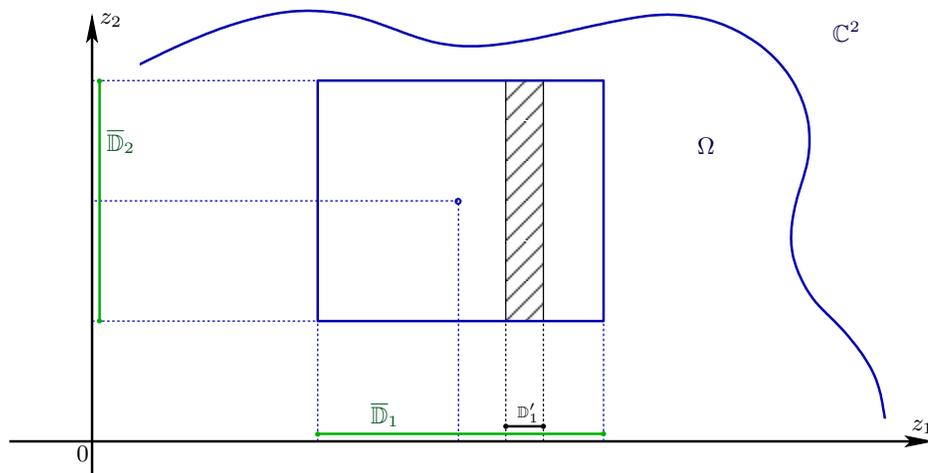
$$\text{Int } F_{n_0} \neq \emptyset \quad (\exists n_0 \geq 1). \quad \square$$

Pour établir que toute fonction séparément holomorphe est localement bornée, il s'avère en fait naturel de raisonner par récurrence sur la dimension $n \geq 1$ en démontrant par récurrence simultanément le caractère borné *et* le Théorème de Hartogs.

Ainsi, nous raisonnerons comme suit :

- pour $n = 1$, le théorème de Hartogs est trivial ;
- en supposant que le Théorème de Hartogs a été démontré pour toutes les fonctions séparément holomorphes de $n - 1$ variables, il s'agit de montrer que toute fonction séparément holomorphe de n variables est localement bornée ;
- enfin, les raisonnements déjà vus qui précèdent — Lemme de Schwarz et formule de Cauchy — terminent l'induction $n - 1 \rightarrow n$ dans le Théorème de Hartogs.

Voici alors le premier argument-clé.



Lemme 4.4. *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soit une fonction séparément holomorphe par rapport à chaque variable qui est de plus complètement holomorphe par rapport aux $(n - 1)$ premières variables :*

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, \zeta_n),$$

et ce, pour tout $\zeta_n \in \mathbb{C}$ quelconque fixé, sur l'ouvert-tranche de dimension $n - 1$:

$$\Omega \cap (\mathbb{C} \times \dots \times \mathbb{C} \times \{\zeta_n\}).$$

Alors pour tout produit de disques ouverts non vides :

$$\mathbb{D}_1 \times \dots \times \mathbb{D}_{n-1} \times \mathbb{D}_n$$

dont la fermeture est contenue dans Ω :

$$\bar{\mathbb{D}}_1 \times \dots \times \bar{\mathbb{D}}_{n-1} \times \bar{\mathbb{D}}_n \subset \Omega,$$

il existe des sous-disques ouverts non vides :

$$\mathbb{D}'_1 \subset \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}'_{n-1} \subset \mathbb{D}_{n-1}$$

tels que f est bornée sur le produit de ces disques avec le dernier disque non rapetissé :

$$\mathbb{D}'_1 \times \dots \times \mathbb{D}'_{n-1} \times \bar{\mathbb{D}}_n,$$

à savoir :

$$|f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)| \leq M < \infty \quad (\forall (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) \in \mathbb{D}'_1 \times \dots \times \mathbb{D}'_{n-1} \times \bar{\mathbb{D}}_n).$$

Démonstration. Pour tout $0 \leq M < \infty$, on introduit les ensembles :

$$\mathcal{B}_M := \left\{ (z_1, \dots, z_{n-1}) \in \bar{\mathbb{D}}_1 \times \dots \times \bar{\mathbb{D}}_{n-1} : |f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)| \leq M \text{ pour tout } z_n \in \bar{\mathbb{D}}_n \right\}.$$

Assertion 4.5. *Ces ensembles \mathcal{B}_M sont fermés.*

Démonstration. Si on prend une suite quelconque d'éléments :

$$\mathcal{B}_M \ni (z_1^k, \dots, z_{n-1}^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} (z_1^\infty, \dots, z_{n-1}^\infty)$$

convergeant vers une certaine limite dans le polydisque fermé $\overline{\mathbb{D}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{n-1}$, il s'agit de faire voir que $(z_1^\infty, \dots, z_{n-1}^\infty)$ appartient encore à \mathcal{B}_M . Mais comme par hypothèse pour tout $z_n \in \overline{\mathbb{D}}_n$ fixé l'application :

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \longmapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$$

est complètement holomorphe, donc continue, on voit que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \underbrace{f(z_1^k, \dots, z_{n-1}^k, z_n)}_{\text{toujours } |\cdot| \leq M} = \underbrace{f(z_1^\infty, \dots, z_{n-1}^\infty, z_n)}_{\text{donc } |\cdot| \leq M \text{ aussi}},$$

ce qui conclut. □

Maintenant, puisque f est supposée à valeurs dans \mathbb{C} , donc ne prendre que des valeurs finies en tout point :

$$\forall z \in \Omega \quad |f(z)| < \infty,$$

on se convainc (exercice) que :

$$\bigcup_{0 \leq M < \infty} \mathcal{B}_M = \overline{\mathbb{D}}_1 \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{n-1}.$$

D'ailleurs, cette réunion est même croissante :

$$0 \leq M' \leq M'' < \infty \implies \mathcal{B}_{M'} \subset \mathcal{B}_{M''}.$$

Le Théorème de Baire (bis) assure alors qu'il existe un réel M_0 assez grand pour que :

$$\text{Int } \mathcal{B}_{M_0} \neq \emptyset.$$

Mais comme les polydisques ouverts forment une base (évidente) pour la topologie de \mathbb{C}^{n-1} , il existe en définitive bien des polydisques ouverts :

$$\mathbb{D}'_1 \subset \mathbb{D}_1, \dots, \mathbb{D}'_{n-1} \subset \mathbb{D}_{n-1}$$

avec :

$$\mathbb{D}'_1 \times \cdots \times \mathbb{D}'_{n-1} \subset \text{Int } \mathcal{B}_{M_0},$$

ce qui veut exactement dire que :

$$\left| f \Big|_{\mathbb{D}'_1 \times \cdots \times \mathbb{D}'_{n-1} \times \overline{\mathbb{D}}_n} \right| \leq M < \infty$$

— yahoo c'est gagné! □

Or ce premier argument-‘clé’ n’a pas encore réellement utilisé la magie de l’Analyse Complexe. En effet, on se convainc par la réflexion que le lemme précédent est tout aussi vrai pour les fonctions de plusieurs variables réelles qui sont séparément continues, voire mêmes séparément analytiques réelles. D’ailleurs, un examen simple de l’exemple $\frac{xy}{x^4+y^4}$ discuté plus haut montre qu’il satisfait les conclusions du lemme précédent. Donc pour l’instant, rien de ce qui explique l’implication mystérieuse :

$$\text{séparément holomorphe} \implies \text{localement borné}$$

n’a encore réellement été dévoilé!

C’est alors sur le deuxième et dernier argument-clé dû à Hartogs que tout va reposer.

Proposition 4.6. [principale] Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, si une fonction $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ satisfait :

(1) f est complètement holomorphe par rapport aux $(n - 1)$ premières variables (z_1, \dots, z_{n-1}) lorsque la dernière $z_n = \zeta_n$ est fixée;

(2) f est aussi holomorphe par rapport à z_n lorsque les $(n - 1)$ premières variables $z_1 = \zeta_1, \dots, z_{n-1} = \zeta_{n-1}$ sont fixées;

alors cette fonction est localement bornée dans Ω .

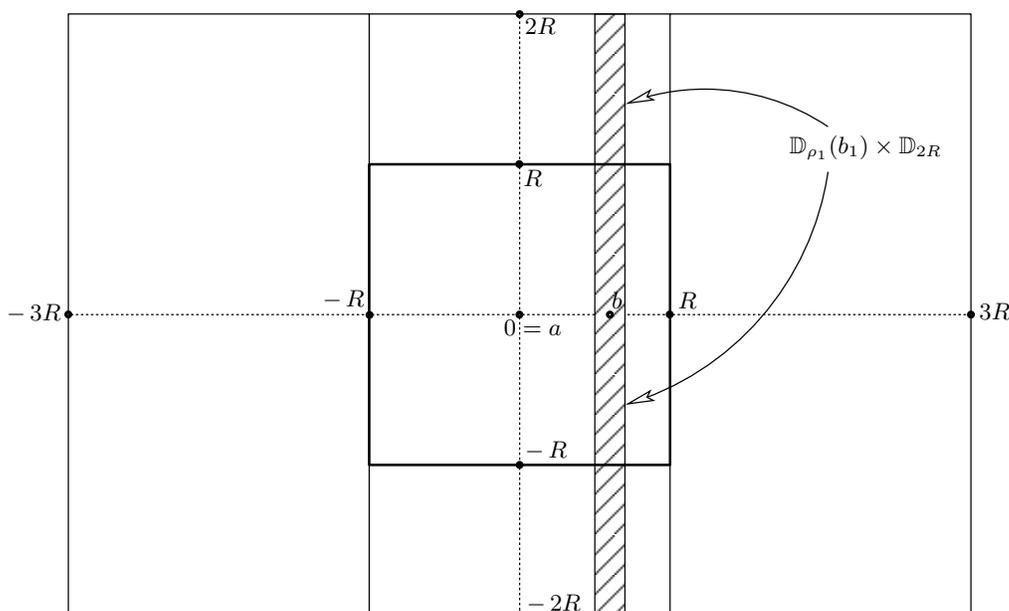
Démonstration. Il s'agit de faire voir que f est bornée dans un petit voisinage ouvert de tout point quelconque :

$$a = (a_1, \dots, a_{n-1}, a_n) \in \Omega.$$

Autour d'un tel point, on peut tracer un polydisque fermé légèrement allongé de rayons $(3R, \dots, 3R, 2R)$ avec $R > 0$ assez petit pour que :

$$\overline{\mathbb{D}}_{3R}(a_1) \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{3R}(a_{n-1}) \times \overline{\mathbb{D}}_{2R}(a_n) \in \Omega.$$

Par une translation, on fait $a = 0$.



Une application du lemme précédent de type Baire au *sous*-polydisque fermé :

$$\overline{\mathbb{D}}_R \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_R \times \overline{\mathbb{D}}_{2R}$$

fournit alors un certain point :

$$(b_1, \dots, b_{n-1}) \in \mathbb{D}_R \times \cdots \times \mathbb{D}_R,$$

et des rayons éventuellement très petits $\rho_1 > 0, \dots, \rho_{n-1} > 0$ avec :

$$\mathbb{D}_{\rho_1}(b_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{\rho_{n-1}}(b_{n-1}) \subset \mathbb{D}_R \times \cdots \times \mathbb{D}_R,$$

tels que f est bornée sur le cylindre fin correspondant :

$$\left| f \Big|_{\mathbb{D}_{\rho_1}(b_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{\rho_n}(b_n) \times \overline{\mathbb{D}}_{2R}} \right| \leq M < \infty,$$

sans perdre de hauteur verticale. L'inégalité du triangle garantit alors les deux inclusions entre trois polydisques :

$$\begin{aligned} a &\in \mathbb{D}_R \times \cdots \times \mathbb{D}_R \times \mathbb{D}_R \subset \\ &\subset \mathbb{D}_{2R}(b_1) \times \cdots \times \mathbb{D}_{2R}(b_{n-1}) \times \mathbb{D}_{2R} \\ &\subset \mathbb{D}_{3R} \times \cdots \times \mathbb{D}_{3R} \times \mathbb{D}_{2R}. \end{aligned}$$

En recentrant alors les coordonnées de \mathbb{C}^{n-1} de telle sorte que $b_{n-1} = 0$, le lemme suivant appliqué avec $r := 2R$ va montrer que f est effectivement bornée sur le polydisque situé au milieu, qui contient un voisinage de a , ce qui terminera la démonstration de la proposition principale. \square

Lemme 4.7. [principal] Soient trois rayons quelconques :

$$0 < \rho < r \quad \text{et} \quad R > 0,$$

et soit une fonction f définie sur le polydisque centré en l'origine :

$$\mathbb{D}_r \times \cdots \times \mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_{2R}$$

satisfaisant :

(1) f est complètement holomorphe dans le sous-polydisque :

$$\mathbb{D}_\rho \times \cdots \times \mathbb{D}_\rho \times \mathbb{D}_{2R}$$

et elle y est bornée :

$$\left| f \Big|_{\mathbb{D}_\rho \times \cdots \times \mathbb{D}_\rho \times \mathbb{D}_{2R}} \right| \leq M < \infty;$$

(2) pour tout $|z_n| < 2R$ fixé, la fonction :

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \mapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$$

est complètement holomorphe dans le polydisque $\mathbb{D}_r \times \cdots \times \mathbb{D}_r$.

Alors f est bornée et complètement holomorphe dans le polydisque entier $\mathbb{D}_r \times \cdots \times \mathbb{D}_r \times \mathbb{D}_{2R}$.

Démonstration. Choisissons trois autres rayons intermédiaires auxiliaires :

$$0 < \rho < r_1 < r_2 < r_3 < r,$$

très proches de r . Pour $|z_n| < 2R$ quelconque fixé, puisque f est holomorphe par rapport à ses $(n-1)$ premières variables, le Théorème 3.6 développe f en série entière :

$$f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = \sum_{\gamma_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\gamma_{n-1}=0}^{\infty} a_{\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}}(z_n) \cdot z_1^{\gamma_1} \cdots z_{n-1}^{\gamma_{n-1}},$$

normalement convergente sur $\overline{\mathbb{D}}_{r_3} \times \cdots \times \overline{\mathbb{D}}_{r_3}$, les coefficients, dépendant de z_n , étant donnés, en notation abrégée, par :

$$a_\gamma(z_n) := \frac{1}{\gamma!} \partial^\gamma f(0, \dots, 0, z_n).$$

D'une manière analogue à ce qui est bien connu dans la théorie des fonctions d'une variable complexe — voir aussi ce qui va suivre —, cette convergence normale s'exprime en disant que :

$$\limsup_{|\gamma| \rightarrow \infty} \sqrt[|\gamma|]{|a_\gamma(z_n)|} \leq \frac{1}{r_3},$$

et ce, toujours pour *tout* $|z_n| < R$ fixé.

Par ailleurs, les inégalités de Cauchy du Théorème 3.9 prises aux points :

$$a = (0, \dots, 0, z_n)$$

avec $|z_n| < R$ et appliquées à chacune des fonctions *holomorphes bornées* :

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \longmapsto f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$$

sur le polydisque :

$$\mathbb{D}_\rho \times \dots \times \mathbb{D}_\rho \times \mathbb{D}_\rho(z_n) \subset \mathbb{D}_\rho \times \dots \times \mathbb{D}_\rho \times \mathbb{D}_{2R}$$

donnent :

$$|a_\gamma(z_n)| \rho^{|\gamma|} \leq M \quad (\forall \gamma \in \mathbb{N}^{n-1}).$$

C'est maintenant — enfin ! — que l'on peut appliquer le théorème de Hartogs sur les suites de fonctions sous-harmoniques.

En effet, la famille de fonctions :

$$(v_\gamma(z_n))_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{n-1} \\ |\gamma| \geq 1}} := \left(z_n \longmapsto \frac{1}{|\gamma|} \log |a_\gamma(z_n)| \right)_{\substack{\gamma \in \mathbb{N}^{n-1} \\ |\gamma| \geq 1}}$$

peut naturellement être réorganisée en une *suite* indexée par les entiers $1, 2, 3, 4, 5, \dots$, par exemple en utilisant l'*ordre lexicographique gradué* sur les multi-indices de \mathbb{N}^k avec $k = n - 1$:

$$(\gamma, \dots, \gamma_k) \prec_{\text{grlex}} (\delta, \dots, \delta_k) \iff \begin{cases} \gamma_1 + \dots + \gamma_k < \delta_1 + \dots + \delta_k \\ \text{ou} \\ \gamma_1 + \dots + \gamma_k = \delta_1 + \dots + \delta_k \text{ et } \gamma_1 = \delta_1, \dots, \gamma_j = \delta_j \text{ mais } \gamma_{j+1} < \delta_{j+1}. \end{cases}$$

Cette suite est alors constituée de *fonctions sous-harmoniques* — puisque le logarithme du module d'une fonction holomorphe est toujours sous-harmonique — définies sur le disque :

$$\mathbb{D}_R,$$

et elle vérifie les *deux* hypothèses du Théorème de Hartogs sous-harmonique :

- elle est uniformément bornée supérieurement :

$$\begin{aligned} v_\gamma(z_n) &\leq \frac{\log M}{|\gamma|} - \log \rho \\ &\leq \text{constante} < \infty \end{aligned} \quad (\forall |\gamma| \geq 1);$$

- la constante $\log\left(\frac{1}{r_3}\right)$ contrôle ses limites supérieures :

$$\limsup_{|\gamma| \rightarrow \infty} v_\gamma(z_n) \leq \log\left(\frac{1}{r_3}\right) \quad (\forall |z_n| < R).$$

Comme la différence $\log\frac{1}{r_2} - \log\frac{1}{r_3}$ est un $\varepsilon > 0$, le Théorème de Hartogs pour les suites de fonctions sous-harmoniques garantit alors qu'il existe une constante $\gamma_0 = \gamma_0(\varepsilon) \gg 1$ assez grande telle que :

$$|\gamma| \geq \gamma_0 \implies \frac{1}{|\gamma|} \log |a_\gamma(z_n)| \leq \log \frac{1}{r_2},$$

et ce, *uniformément* par rapport à $|z_n| < R$. Autrement dit (exercice) :

$$|a_\gamma(z_n)| \cdot r_1^{|\gamma|} \leq \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{|\gamma|} \quad (\forall |\gamma| \geq \gamma_0, \forall |z_n| < R),$$

et alors, pour tous :

$$(z_1, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{D}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{D}_{r_1},$$

la série donnant f ci-dessus converge *absolument, normalement, uniformément* :

$$\begin{aligned} |f(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)| &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{n-1}} |a_\gamma(z_n)| \cdot |z^\gamma| \\ &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{n-1}} |a_\gamma(z_n)| \cdot r_1^{|\gamma|} \\ &\leq \sum_{\gamma \in \mathbb{N}^{n-1}} \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{|\gamma|} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

[Exercice !]

ce qui, grâce au Théorème 3.11 de Cauchy-Montel, achève de démontrer que f est holomorphe dans le ‘grand’ polydisque $\mathbb{D}_{r_1} \times \dots \times \mathbb{D}_{r_1} \times \mathbb{D}_R$, sachant que r_1 avait été choisi arbitrairement proche de r . \square

Ainsi, ce Lemme principal termine la démonstration du célèbre Théorème 2.2 de Hartogs sur l’holomorphie séparée. \square

5. Séries entières multiples

Dans \mathbb{C}^n muni des coordonnées $z = (z_1, \dots, z_n)$, on considère une série entière multiple à coefficients complexes :

$$\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} \underbrace{a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}}_{\in \mathbb{C}} (z_1)^{\alpha_1} \dots (z_n)^{\alpha_n}.$$

Question. Que peut-on dire au sujet de son domaine de convergence ?

Rappelons qu’en dimension $n = 1$ pour :

$$\sum_{k \geq 0} a_k z^k,$$

tout s’articule autour de la notion de *rayon de convergence*, dont l’expression est donnée par la formule :

$$R = \frac{1}{\limsup_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|}} \quad (0 \leq R \leq \infty),$$

et nous nous proposons de voir qu’en dimension $n \geq 2$, lorsqu’il doit être question de *multirayons* de convergence, un phénomène simple et spectaculaire apparaît.

Définition 5.1. Le *domaine de convergence* d’une telle série entière multiple $\sum a_\alpha z^\alpha$ est :

$$\begin{aligned} D := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \text{pour tout } w \in \mathbb{C}^n \text{ dans un petit voisinage de } z \right. \\ \left. \text{on a la convergence absolue } \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha w^\alpha| < \infty \right\}. \end{aligned}$$

Clairement, D est un ouvert, et on va constater plus loin qu'il est toujours connexe.

Définition 5.2. Soit aussi l'ensemble des points z pour lesquels *tous* les termes de la série sont bornés :

$$B := \left\{ z \in \mathbb{C}^n : \sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha z^\alpha| < \infty \right\}.$$

Pour commencer, on se convainc mentalement que :

$$D \subset \text{Int}(B).$$

Lemme 5.3. [d'Abel multidimensionnel] Si $z = (z_1, \dots, z_n) \in B$, alors la série entière $\sum a_\alpha z^\alpha$ converge normalement pour tout $w = (w_1, \dots, w_n)$ avec :

$$|w_1| < |z_1|, \dots, |w_n| < |z_n|.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe une constante $C < \infty$ telle que :

$$|a_\alpha z^\alpha| \leq C \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n).$$

Soit donc $w = (w_1, \dots, w_n)$ avec :

$$|w_j| \leq k_j |z_j| \quad (j=1 \dots n),$$

pour des constantes $0 \leq k_j < 1$. On a facilement :

$$\begin{aligned} |a_\alpha w^\alpha| &\leq |a_\alpha k^\alpha z^\alpha| \\ &\leq C k^\alpha, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} |a_\alpha w^\alpha| &\leq C \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} k^\alpha \\ &= C \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \dots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} (k_1)^{\alpha_1} \dots (k_n)^{\alpha_n} \\ &= C \frac{1}{1-k_1} \dots \frac{1}{1-k_n} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Théorème 5.4. Le domaine de convergence D est l'intérieur de B :

$$D = \text{Int}(B),$$

la série entière $\sum a_\alpha z^\alpha$ converge normalement dans D , et sa somme continue définit une fonction holomorphe dans D .

Démonstration. Si $z \in B$ et si $|w_j| < |z_j|$ pour $1 \leq j \leq n$, d'où $w \in B$ et même mieux (exercice mental) :

$$w \in \text{Int}(B).$$

le Lemme d'Abel donne :

$$w \in D,$$

ce qui fournit l'inclusion inverse $\text{Int}(B) \subset D$ de celle vue plus haut.

Ensuite, la convergence de $\sum a_\alpha z^\alpha$ pour tout $z \in D$ assure d'abord que la fonction obtenue est continue, puis, grâce au Théorème de Cauchy-Montel, qu'elle est holomorphe. □

En comparaison avec le cas des séries entières d'une variable complexe, un aspect nouveau apparaît en dimension $n \geq 2$, par exemple pour $n = 2$, si :

$$|a_{\alpha_1, \alpha_2} z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}| \leq C < \infty \quad \text{et si :} \quad |a_{\alpha_1, \alpha_2} w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}| \leq C < \infty,$$

alors facilement pour tout réel $0 \leq t \leq 1$ en prenant la combinaison convexe on a aussi :

$$|a_{\alpha_1, \alpha_2}|^{t+1-t} \cdot |z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2}|^t \cdot |w_1^{\alpha_1} w_2^{\alpha_2}|^{1-t} \leq C^{t+1-t} = C < \infty,$$

observation qui motive la :

Définition 5.5. L'image logarithmique du domaine de convergence D d'une série entière multiple $\sum a_\alpha z^\alpha$ est l'ouvert de \mathbb{R}^n :

$$\begin{aligned} \log |D^*| &:= \left\{ (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|) \in \mathbb{R}^n : (z_1, \dots, z_n) \in D \setminus (\cup_j \{z_j = 0\}) \right\} \\ &= \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in D\}. \end{aligned}$$

De manière similaire :

$$\log |B^*| := \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in B\}.$$

Par rapport au cas d'une variable, les domaines de convergence des séries entières multiples jouissent de deux propriétés fondamentales nouvelles.

Théorème 5.6. Si $D \subset \mathbb{C}^n$ est le domaine de convergence d'une certaine série entière $\sum a_\alpha z^\alpha$, alors :

(1) $\log |D^*|$ est un sous-ensemble ouvert convexe de \mathbb{R}^n ;

(2) pour tout $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \log |D^*|$, tout autre $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n$ quelconque avec :

$$\eta_1 \leq \xi_1, \dots, \eta_n \leq \xi_n,$$

appartient encore à l'image logarithmique :

$$\eta \in \log |D^*|.$$

Démonstration. Puisque nous savons maintenant que $D = \text{Int}(B)$, on vérifie (exercice) que :

$$\log |D^*| = \text{Int}(\log |B^*|),$$

ce qui fait voir le caractère ouvert.

Ensuite, soient deux points quelconques :

$$\xi \in \log |D^*| \quad \text{et} \quad \eta \in \log |D^*|,$$

à savoir il existe une constante $C < \infty$ telle que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$|a_\alpha| e^{\alpha_1 \xi_1 + \dots + \alpha_n \xi_n} \leq C \quad \text{et} \quad |a_\alpha| e^{\alpha_1 \eta_1 + \dots + \alpha_n \eta_n} \leq C.$$

Comme nous l'avons anticipé plus haut, pour tout réel $0 \leq t \leq 1$, la combinaison t -convexe entre ces deux inégalités :

$$|a_\alpha|^{t+1-t} e^{\alpha_1 [t\xi_1 + (1-t)\eta_1] + \dots + \alpha_n [t\xi_n + (1-t)\eta_n]} \leq C < \infty,$$

fait voir le caractère convexe :

$$t\xi + (1-t)\eta \in \log |D^*|.$$

La propriété (2), quant à elle, est laissée au lecteur-étudiant. \square

Corollaire 5.7. Si $D \subset \mathbb{C}^n$ est le domaine de convergence d'une série entière $\sum a_\alpha z^\alpha$, on a l'équivalence :

$$z \in D \iff \left(\exists \xi \in \log |D^*| \quad |z_j| \leq e^{\xi_j} \quad (1 \leq j \leq n) \right).$$

Démonstration. Effectuer une synthèse mentale de ce qui a été dit. \square

6. Domaines de Reinhardt

La structure des domaines de convergence est maintenant bien comprise, elle comporte deux aspects.

Définition 6.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit *logarithmiquement convexe* lorsque son image logarithmique :

$$\log |\Omega^*| = \{ (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : (e^{\xi_1}, \dots, e^{\xi_n}) \in \Omega \}$$

est un sous-ensemble convexe de \mathbb{R}^n .

Définition 6.2. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit *de Reinhardt complet* lorsque :

$$(z_1, \dots, z_n) \in \Omega \implies \left(\forall |w_1| \leq |z_1|, \dots, \forall |w_n| \leq |z_n|, \quad (w_1, \dots, w_n) \in \Omega \right).$$

Lorsqu'il est non vide, un tel ouvert est connexe, puisqu'il contient l'origine en lequel il est étoilé. Ce que dit le précédent Théorème 5.6 se reformule alors comme suit.

Théorème 6.3. Le domaine de convergence D d'une série entière multiple $\sum a_\alpha z^\alpha$ est un domaine de Reinhardt complet logarithmiquement convexe, éventuellement vide. \square

Réciproquement, étant donné un sous-ensemble quelconque $R \subset \mathbb{R}^n$ ouvert satisfaisant :

$$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in R \implies \left(\forall \eta_1 \leq \xi_1, \dots, \forall \eta_n \leq \xi_n, \quad (\eta_1, \dots, \eta_n) \in R \right),$$

et qui est de plus convexe, il est naturel de se demander s'il existe une série entière multiple $\sum a_\alpha z^\alpha$ dont le domaine de convergence D a pour image logarithmique $\log |D^*| = R$. Nous verrons que tel est bien le cas, mais auparavant, il nous faut poursuivre les raisonnements théoriques.

Théorème 6.4. Si le domaine de convergence D d'une série entière :

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha = \sum_{\alpha_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{\alpha_n=0}^{\infty} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} (z_1)^{\alpha_1} \cdots (z_n)^{\alpha_n}$$

est non vide, alors pour tout multi-indice $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ fixé, sa β -ème dérivée partielle :

$$(\partial^\beta f)(z) = \sum_{\alpha \geq \beta} a_\alpha \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} z^{\alpha-\beta} = \sum_{\alpha_1 \geq \beta_1} \cdots \sum_{\alpha_n \geq \beta_n} a_{\alpha_1, \dots, \alpha_n} \frac{\alpha_1!}{(\alpha_1 - \beta_1)!} \cdots \frac{\alpha_n!}{(\alpha_n - \beta_n)!} z_1^{\alpha_1 - \beta_1} \cdots z_n^{\alpha_n - \beta_n}$$

converge aussi normalement sur les compacts de D , et en particulier à l'origine, on a :

$$\partial^\alpha f(0) = \alpha! a_\alpha.$$

Démonstration. Comme dans la théorie à une variable, on constate (exercice) que pour β fixé, les poids $\frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}$ polynomiaux en α dont deviennent affectés les coefficients a_α sont de toute façon absorbés dans les puissances fortement décroissantes :

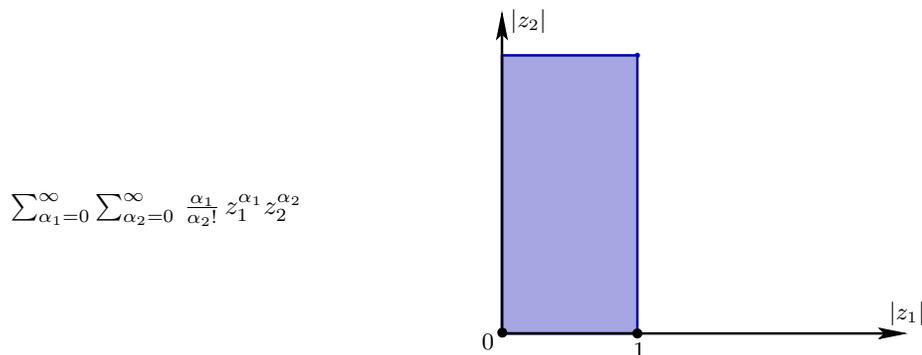
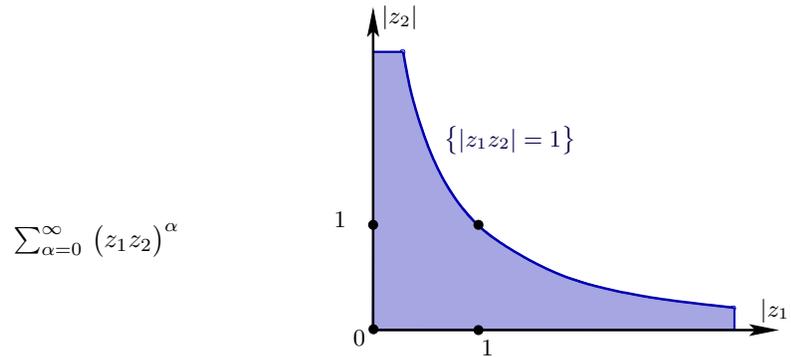
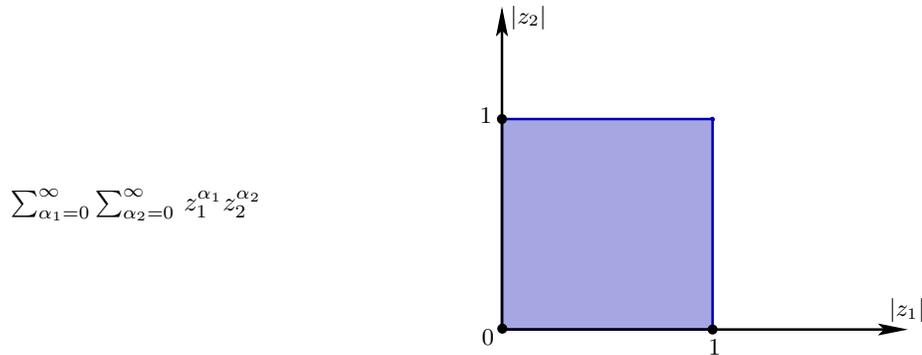
$$k^\alpha = k_1^{\alpha_1} \cdots k_n^{\alpha_n}$$

de nombres réels $0 \leq k_j < 1$ qui interviennent dans l'argument de convergence d'Abel. \square

Les domaines de convergence de séries entières à plusieurs variables exhibent une bien plus grande diversité géométrique qu'à une seule variable, où ce ne sont que des disques. Dans les diagrammes suivants, on représente en coordonnées réelles $(|z_1|, |z_2|)$ l'image, par l'application :

$$(z_1, z_2) \mapsto (|z_1|, |z_2|),$$

de trois domaines de convergence distincts.



Une notion plus générale que celle d'ouvert de Reinhardt complet est la suivante.

Définition 6.5. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit *de Reinhardt* (simple) lorsque :

$$(z_1, \dots, z_n) \in \Omega \implies \left((e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega \quad \forall \theta_1 \in \mathbb{R} \dots \forall \theta_n \in \mathbb{R} \right).$$

Un ouvert de Reinhardt n'est pas forcément connexe — penser à des anneaux emboîtés. Mais le fait que par chaque point passe un produit n -dimensionnel de cercles $S^1 \times \cdots \times S^1$ entièrement contenu dans l'ouvert s'avère être une condition d'invariance naturelle utile lorsqu'on cherche à développer une fonction holomorphe en série entière normalement convergente.

Théorème 6.6. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe de Reinhardt (simple) contenant l'origine :

$$0 \in \Omega.$$

Alors toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ admet un unique développement en série entière :

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha$$

normalement convergente sur les compacts de Ω .

Démonstration. Contrairement aux apparences, cet énoncé n'est pas élémentaire, car, en dimension ≥ 2 , la topologie de Ω peut fort bien être plus complexe que celle d'un polydisque.

L'unicité du développement provient simplement d'une différentiation terme à terme, qui, grâce au Théorème 6.4, fournit :

$$a_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n).$$

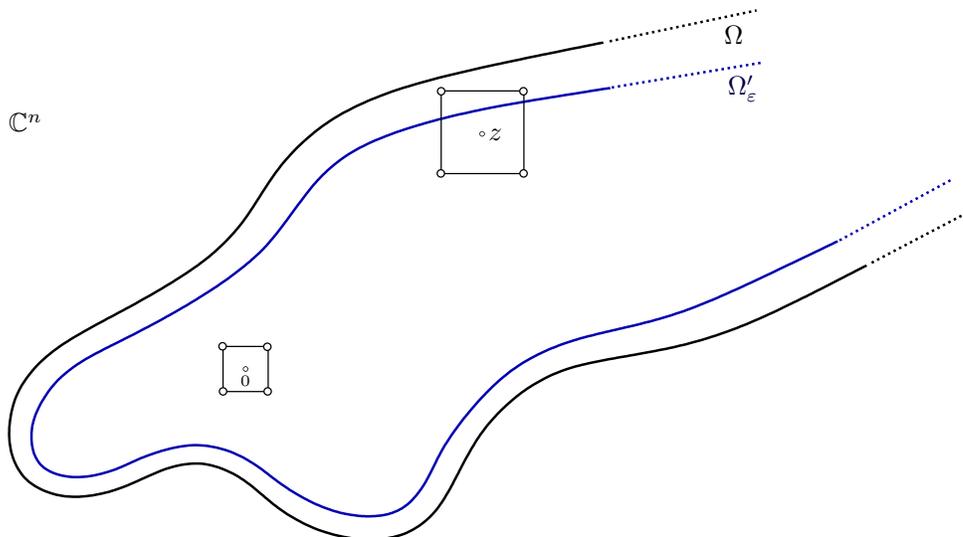
Pour établir l'existence, prenons $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, et en termes de la norme euclidienne standard :

$$|z| := (|z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2)^{1/2},$$

introduisons l'ensemble ouvert :

$$\Omega_\varepsilon := \left\{ z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) > \varepsilon |z| \right\},$$

constitué des points situés à une petite distance de sécurité du bord, distance qui croît linéairement à l'infini lorsque Ω est non-borné. Clairement, Ω_ε est ouvert.



Mais puisque Ω_ε n'est pas nécessairement connexe (exercice ! faire des dessins !), considérons plutôt :

$$\Omega'_\varepsilon := \text{la composante connexe de } 0 \text{ dans } \Omega_\varepsilon.$$

Assertion 6.7. Pour tout $0 < \varepsilon_2 \leq \varepsilon_1$, on a :

$$\Omega'_{\varepsilon_2} \supset \Omega'_{\varepsilon_1},$$

et de plus :

$$\bigcup_{\varepsilon > 0} \Omega'_\varepsilon = \Omega.$$

Démonstration. Pour vérifier la deuxième partie, soit un point quelconque $z \in \Omega$. Puisque Ω est connexe (par arcs !), il existe une courbe \mathcal{C}^1 :

$$\gamma: [0, 1] \longrightarrow \Omega \quad \text{avec} \quad \gamma(0) = 0 \quad \text{et} \quad \gamma(1) = z.$$

Bien entendu, elle est compacte :

$$\gamma([0, 1]) \Subset \Omega.$$

Ainsi, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on aura :

$$\gamma([0, 1]) \subset \Omega_\varepsilon,$$

et puisque cette courbe a été introduite pour qu'on bénéficie de sa connexité, elle est en fait entièrement contenue dans la composante connexe Ω'_ε de $\gamma(0)$, et donc $z = \gamma(1) \in \Omega'_\varepsilon$. \square

Maintenant, pour $z = (z_1, \dots, z_n) \in \Omega'_\varepsilon$, introduisons l'intégrale multiple :

$$g(z) := \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \cdots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \frac{dt_1}{t_1 - 1} \cdots \frac{dt_n}{t_n - 1}.$$

Bien entendu, ce choix d'un point :

$$z \in \Omega'_\varepsilon \subset \Omega_\varepsilon$$

garantit lorsqu'on le dilate un peu que :

$$(1 + \varepsilon)z \in \Omega,$$

et l'hypothèse que Ω est de Reinhardt garantit à son tour que tous les points du produit n -dimensionnel de cercles associé :

$$((1 + \varepsilon)e^{i\theta_1} z_1, \dots, (1 + \varepsilon)e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega \quad (\forall \theta_1 \dots \forall \theta_n)$$

appartiennent encore au domaine d'existence de la fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, ce qui montre que l'intégrale définissant g a un sens.

De plus, des différentiations par rapport à $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ sous les signes intégraux montrent que $z \mapsto g(z)$ est holomorphe lorsque z varie dans Ω'_ε .

Mais encore, pour z suffisamment proche de l'origine, comme on a :

$$(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \in \Omega$$

pour tous $|t_1| \leq 1 + \varepsilon, \dots, |t_n| \leq 1 + \varepsilon$, la formule (multidimensionnelle) de Cauchy d'intégration sur le bord distingué d'un polydisque montre — exercice d'application — que :

$$g(z) = f(z) \quad \text{pour tout } z \text{ dans un voisinage de } 0.$$

Par connexité de Ω'_ε , on conclut grâce au principe d'identité que :

$$g(z) = f(z) \quad (\forall z \in \Omega'_\varepsilon),$$

et pour terminer la démonstration, il ne reste plus qu'à faire voir que g elle-même est développable en série entière convergente.

À cet effet, comme $|t_j| = 1 + \varepsilon$ pour $1 \leq j \leq n$, on peut développer :

$$\frac{1}{(t_1 - 1) \cdots (t_n - 1)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{t_1^{\alpha_1+1}} \cdots \frac{1}{t_n^{\alpha_n+1}},$$

la convergence étant normale. Ici, lorsque $z \in K' \Subset \Omega'_\varepsilon$ varie dans un compact et lorsque $|t_j| = 1 + \varepsilon$, les points $(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$ restent dans un compact de Ω . Par conséquent, pour tout $z \in \Omega'_\varepsilon$, on peut intervertir intégration et sommation infinie :

$$\begin{aligned} f(z) = g(z) &= \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \cdots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n) \left(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{t_1^{\alpha_1+1}} \cdots \frac{1}{t_n^{\alpha_n+1}} \right) dt_1 \cdots dt_n \\ &= \underbrace{\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|t_1|=1+\varepsilon} \cdots \int_{|t_n|=1+\varepsilon} \frac{f(t_1 z_1, \dots, t_n z_n)}{t_1^{\alpha_1+1} \cdots t_n^{\alpha_n+1}} dt_1 \cdots dt_n}_{=: f_\alpha(z)} \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} f_\alpha(z), \end{aligned}$$

la convergence étant alors normale sur les compacts de Ω'_ε . Mais comme la formule de Cauchy exprime — exercice d'application — que pour tout z dans un voisinage ouvert de 0 de type polydisque contenu dans Ω on a :

$$f_\alpha(z) = z^\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n),$$

ces identités se propagent dans tout l'ouvert connexe Ω'_ε :

$$f_\alpha(z) = z^\alpha \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial z^\alpha}(0) \quad (\forall \alpha \in \mathbb{N}^n),$$

ce qui achève de démontrer qu'on a bien un développement entier :

$$f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} z^\alpha a_\alpha \quad (a_\alpha := \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha f(0)),$$

avec convergence normale sur les compacts de Ω'_ε . □

7. Phénomène de prolongement holomorphe universel automatique

Résumons les considérations qui précèdent afin d'y (re)découvrir une découverte magnifique, historiquement fondatrice de l'Analyse à Plusieurs Variables Complexe.

□ Dans les domaines de Reinhardt (simples), grâce au Théorème 6.6 qui précède, les fonctions holomorphes se développent en une unique série entière convergente.

□ Mais les domaines de convergence des séries entières sont des domaines de Reinhardt *complets*, qui sont de plus *logarithmiquement convexes*, comme nous l'a fait voir le Théorème 6.3.

□ Bien sûr, la *Reine de l'Intuition Mathématique* qu'est la *Géométrie* peut nous montrer en une infinité de figures que la plupart des ouverts de Reinhardt (simples) ne sont ni complets ni logarithmiquement convexes !

□ On peut donc prévoir la découverte surprenante, en partant d'un domaine de Reinhardt simple $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ qui n'est pas forcément Reinhardt complet et qui n'est pas forcément logarithmiquement convexe, que *toutes* les fonctions holomorphes dans Ω se prolongeront holomorphiquement à un certain ouvert plus grand :

$$\tilde{\Omega} \supsetneq \Omega$$

qui sera de Reinhardt complet et logarithmiquement convexe.

□ Ainsi contrairement à la dimension $n = 1$ où dans tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, il existe des fonctions holomorphes $f^l \in \mathcal{O}(\Omega)$ explosant au bord :

$$|f^l(z)| \xrightarrow{z \rightarrow \partial\Omega} \infty,$$

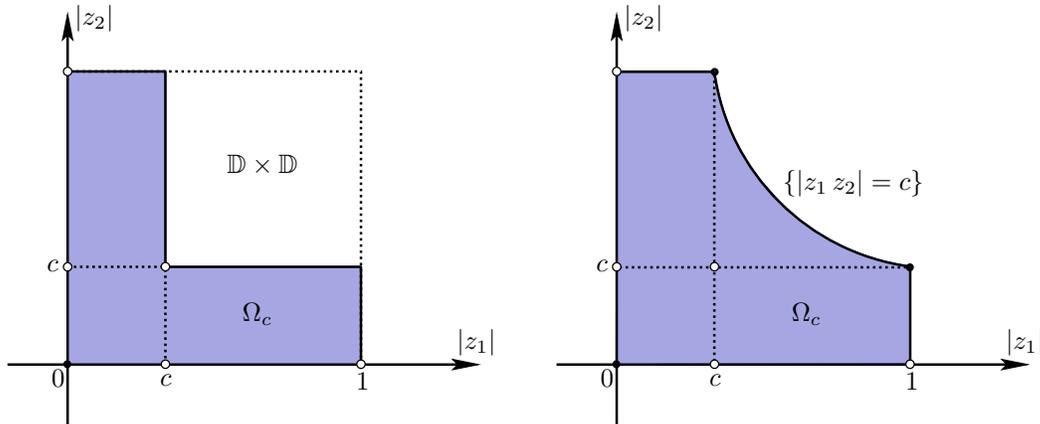
et donc ne se prolongeant jamais holomorphiquement au-delà du bord, dès que le nombre de variables z_1, \dots, z_n devient ≥ 2 , un phénomène entièrement nouveau de prolongement holomorphe universel automatique à des ouverts plus grands se produit.

Soit par exemple dans le bidisque unité de \mathbb{C}^2 :

$$\mathbb{D} \times \mathbb{D} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1\},$$

pour une constante fixée $0 < c < 1$, le sous-ouvert :

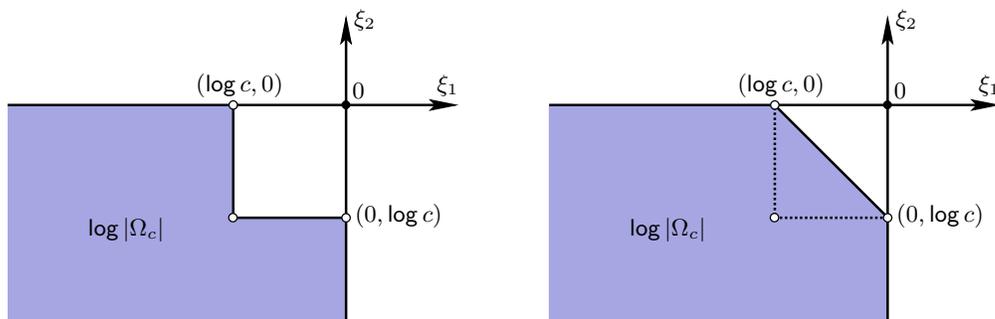
$$\Omega_c := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1| < 1, |z_2| < 1, \min(|z_1|, |z_2|) < c\}.$$



Visuellement, on constate que Ω_c est de Reinhardt complet, mais son image logarithmique dans \mathbb{R}^2 :

$$\log |\Omega_c^*| = \{(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}_- \times \mathbb{R}_- : \xi_1 < \log c \text{ ou } \xi_2 < \log c\}$$

n'est pas convexe.



Une fois que l'on a déterminé (visuellement !) son enveloppe convexe, on obtient (exercice) que le plus petit ouvert de Reinhardt complet logarithmiquement convexe $\tilde{\Omega}_c$ contenant Ω s'écrit, comme anticipé sur la partie droite de la figure pénultième :

$$\tilde{\Omega}_c := \{|z_1| < 1, |z_2| < 1, |z_1 z_2| < c\}.$$

Théorème 7.1. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert connexe de Reinhardt simple avec $0 \in \Omega$, et soit :

$$\tilde{\Omega} \supset \Omega$$

le plus petit ouvert de Reinhardt complet logarithmiquement convexe contenant Ω . Alors :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! \tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \quad \tilde{f}|_{\Omega} = f.$$

Démonstration. Tout d'abord, étant donné une famille quelconque :

$$(\Omega_\ell)_{\ell \in \Lambda}$$

d'ouverts de Reinhardt complets logarithmiquement convexes paramétrée par un ensemble d'indices Λ quelconque, on vérifie (exercice) que l'intérieur de leurs intersections :

$$\text{Int} \left(\bigcap_{\ell \in \Lambda} \Omega_\ell \right)$$

est encore de Reinhardt complet logarithmiquement convexe.

Par le Théorème 6.6, toute $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ se développe en série entière $f(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$ convergeant sur Ω . Chaque telle série entière possède alors un certain domaine de convergence D_f qui, par le Théorème 6.3, est de Reinhardt complet logarithmiquement convexe. Sans scrupule, prenons alors :

$$\Lambda := \mathcal{O}(\Omega),$$

observons ensuite que :

$$\underbrace{\text{Int} \left(\bigcap_{f \in \mathcal{O}(\Omega)} D_f \right)}_{=: D} \supset \tilde{\Omega} \supset \Omega.$$

et constatons enfin par la logique ensembliste idiote que *toutes* les fonctions holomorphes dans Ω se prolongent holomorphiquement à D , donc à $\tilde{\Omega}$! \square

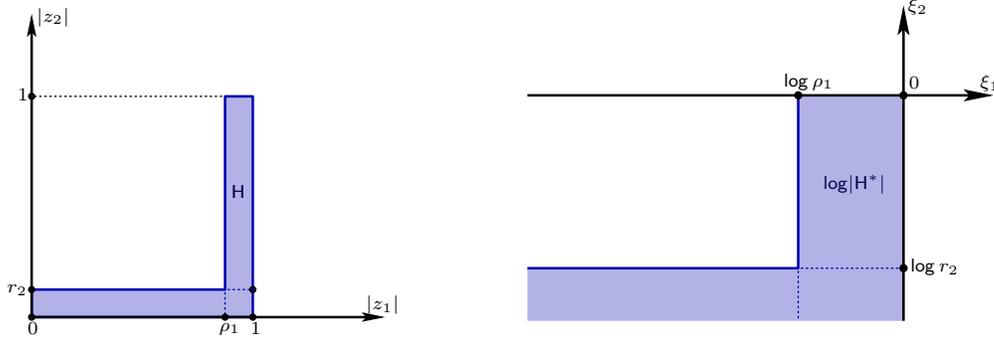
Voici une illustration plaisante de ce théorème abstrait. Constatons sans délai qu'une figure de Hartogs dans \mathbb{C}^2 :

$$H = H_{\rho_1, r_2} = \{|z_1| < 1, |z_2| < r_2\} \cup \{\rho_1 < |z_1| < 1, |z_2| < 1\}$$

est un domaine de Reinhardt, puisque $|e^{i\theta_1} z_1| = |z_1|$ et $|e^{i\theta_2} z_2| = |z_2|$, pour tous $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$.

Affirmation 7.2. *Le plus petit ouvert de Reinhardt complet logarithmiquement convexe contenant $H = H_{\rho_1, r_2}$ est :*

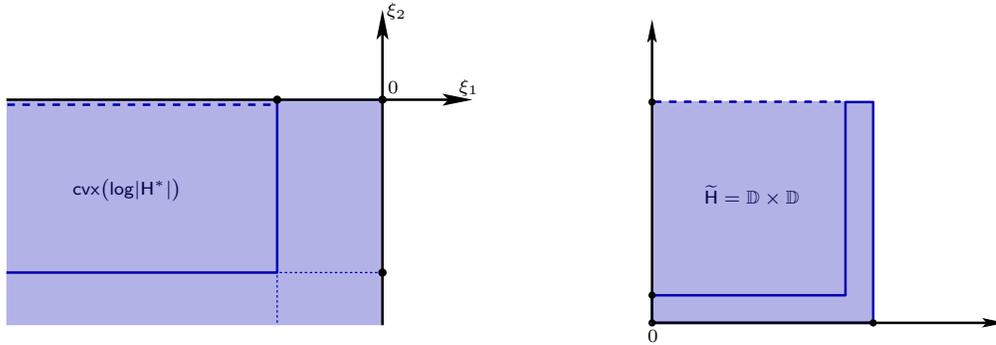
$$\tilde{H} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$



En particulier, nous retrouvons le fait que les fonctions holomorphes dans H se prolongent holomorphiquement à \mathbb{D}^2 !

Preuve. En effet, l'image logarithmique de H est :

$$\log |H_{\rho_1, r_2}^*| = \{ \xi_1 < 0, \xi_2 < \log r_2 \} \cup \{ \log \rho_1 < \xi_1 < 0, \xi_2 < 0 \}.$$



Visiblement, son enveloppe convexe est :

$$\text{cvx}(\log |H^*|) = \{ \xi_1 < 0, \xi_2 < 0 \},$$

et l'on retrouve $\tilde{H} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}$ via l'exponentielle. □

8. Équation $\bar{\partial}$ à support compact

Pour commencer, rappelons qu'étant donné une fonction $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C})$, une solution à l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = v,$$

est donnée par la formule intégrale de Cauchy-Green-Pompeiu :

$$u(z) := \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

laquelle est \mathcal{C}^∞ dans \mathbb{C} , mais en général, n'est pas à support compact. Autrement dit :

$$(8.1) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{v(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \right) = v(z).$$

Comme cela a déjà été illustré plusieurs fois dans les paragraphes qui précèdent, le passage à plusieurs variables révèle des phénomènes nouveaux. Ici, des solutions g à support compact existent pour l'équation $\bar{\partial}g = \varphi$.

Théorème 8.2. *Dans \mathbb{C}^n avec $n \geq 2$, soit une $(0, 1)$ -forme différentielle lisse :*

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i d\bar{z}_i = \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,1}T^*\mathbb{C}^n),$$

à coefficients $\varphi_i \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ dont les supports sont compacts qui est $\bar{\partial}$ -fermée :

$$\begin{aligned} 0 = \bar{\partial}\varphi &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial\varphi_j}{\partial\bar{z}_k} d\bar{z}_k \right) \wedge d\bar{z}_j \\ &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(-\frac{\partial\varphi_j}{\partial\bar{z}_k} + \frac{\partial\varphi_k}{\partial\bar{z}_j} \right) d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k. \end{aligned}$$

Alors il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^n)$ lisse à support compact telle que :

$$\bar{\partial}g = \varphi.$$

Évidemment, la relation de Poincaré $0 = \bar{\partial} \circ \bar{\partial}$ montre que l'hypothèse est nécessaire :

$$0 = \bar{\partial}\bar{\partial}g = \bar{\partial}\varphi.$$

Démonstration. Nous affirmons que la solution est :

$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) := \frac{1}{2i\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1.$$

Tout d'abord, grâce au rappel :

$$\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_1} = \varphi_1,$$

mais il ne semble pas clair que $\frac{\partial g}{\partial\bar{z}_h} = \varphi_h$ pour $h = 2, \dots, n$. Or en tout cas, dans cette intégrale de convolution, le changement de variable $\zeta_1 \mapsto \zeta_1 + z_1$ donne :

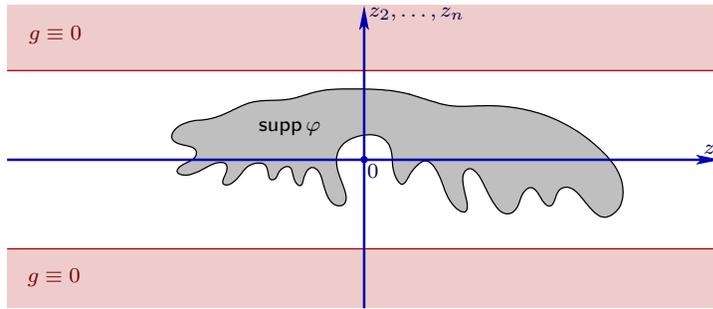
$$g(z_1, z_2, \dots, z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_1(z_1 + \zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1.$$

Un passage en coordonnées polaires $\zeta_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ montre que la « singularité » $\frac{1}{\zeta_1} = \frac{1}{\rho_1} e^{-i\theta_1}$ est annihilée par $d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 = -2i \rho_1 d\rho_1 \wedge d\theta_1$, et alors g est \mathcal{C}^∞ en toutes ses variables (z_1, z_2, \dots, z_n) .

Pour $2 \leq h \leq n$ fixé, calculons à présent :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g}{\partial \bar{z}_h} &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_1}{\partial \bar{z}_h}(z_1 + \zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \\
 [\bar{\partial}\varphi = 0] \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_h}{\partial \bar{z}_1}(z_1 + \zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \\
 [\zeta_1 \mapsto \zeta_1 - z_1] \quad &= \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\frac{\partial \varphi_h}{\partial \bar{z}_1}(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \\
 &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\mathbb{C}} \frac{\varphi_h(\zeta_1, z_2, \dots, z_n)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 \wedge d\bar{\zeta}_1 \right) \\
 [\text{Rappel (8.1)}] \quad &= \varphi_h(z_1, z_2, \dots, z_n),
 \end{aligned}$$

ce qui établit $\bar{\partial}g = \varphi$.



Qu'en est-il du support de g ? Tout d'abord, puisque :

$$\text{supp } \varphi_1 \in \mathbb{C}^n,$$

si $|z'| = \max(|z_2|, \dots, |z_n|) \gg 1$ est assez grand, on a :

$$\varphi_1(\zeta_1, z_2, \dots, z_n) = 0 \quad (\forall \zeta_1 \in \mathbb{C}),$$

d'où par intégration $g(z_1, z_2, \dots, z_n) = 0$, ce qui signifie que g est au moins à support compact dans les directions z_2, \dots, z_n — mais est-elle aussi à support compact dans la direction z_1 ?

Oui, car de l'holomorphicité de g en dehors du support (compact) de φ :

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}_i}(z) = \varphi_i(z) = 0 \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \text{supp } \varphi, 1 \leq i \leq n),$$

comme $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } \varphi \supset \{|z| > R\}$ pour $R \gg 1$, on déduit grâce au principe d'identité :

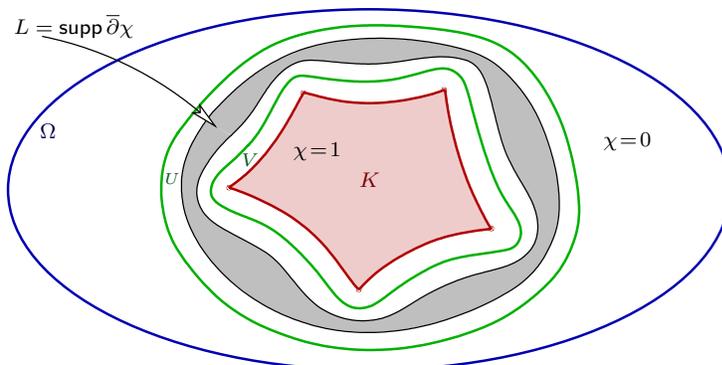
$$g \equiv 0$$

dans l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C}^n \setminus \text{supp } \varphi$ — vue comme composante connexe du point à l'infini ∞ —, laquelle contient l'extérieur $\{|z| > R\}$ d'un grand polydisque. \square

Le phénomène de Hartogs suivant exhibe un contraste frappant avec la théorie des fonctions d'une (seule) variable complexe. Sa version la plus générale élimine des compacts qui peuvent être d'intérieur non vide.

Théorème 8.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 2$ un domaine, et soit $K \Subset \Omega$ un compact avec $\Omega \setminus K$ connexe. Alors :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega \setminus K) \quad \exists! F \in \mathcal{O}(\Omega) \quad F|_{\Omega \setminus K} = f.$$



Démonstration. Prenons deux voisinages ouverts relativement compacts emboîtés :

$$K \Subset V \Subset U \Subset \Omega,$$

ainsi qu'une fonction-plateau $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, [0, 1])$ satisfaisant :

$$\chi \equiv \begin{cases} 1 & \text{dans } V, \\ 0 & \text{dans } \Omega \setminus U. \end{cases}$$

Prolongeons $\chi := 1$ dans K et $\chi := 0$ dans $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$, ce qui donne une fonction lisse $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{C}^n, [0, 1])$ définie partout.

Une fonction-candidate à l'extension de f pourrait être :

$$\widehat{F} := (1 - \chi) f,$$

mais cette \widehat{F} n'est pas holomorphe partout, comme le montre un calcul de son $\bar{\partial}$:

$$\begin{aligned} \varphi &:= \bar{\partial}\widehat{F} = \bar{\partial}f - \bar{\partial}\chi \cdot f - \chi \cdot \bar{\partial}f \\ &= -f \bar{\partial}\chi. \end{aligned}$$

Cette $(0, 1)$ -forme φ est donc non nulle dans l'intérieur (non vide !) du sous-ensemble compact :

$$L := \text{supp } \bar{\partial}\chi \Subset \Omega,$$

avec en fait $L \subset \bar{U} \setminus V$. Or on peut voir $\varphi = -f \bar{\partial}\chi$ comme une forme différentielle \mathcal{C}_c^∞ de type $(0, 1)$ définie partout dans \mathbb{C}^n , et de support compact.

Par conséquent, nous pouvons appliquer le Théorème 8.2 qui précède :

$$\exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \bar{\partial}g = \varphi = \bar{\partial}\widehat{F},$$

de manière à corriger la non-annulation de $\bar{\partial}\widehat{F}$ en introduisant :

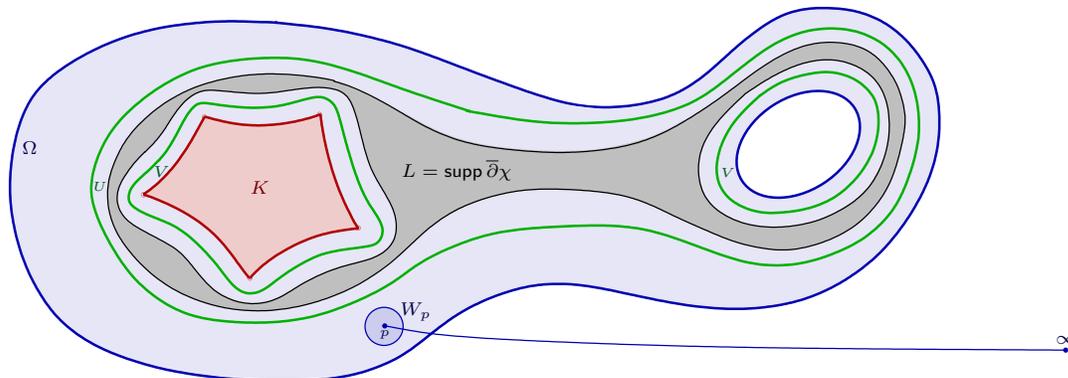
$$F := \widehat{F} - g,$$

fonction qui s'avère être holomorphe partout dans Ω :

$$\bar{\partial}F = \bar{\partial}\widehat{F} - \bar{\partial}g = 0.$$

Cependant, on doit encore s'assurer que $F|_{\Omega \setminus K} = f$ partout dans $\Omega \setminus K$!

L'argument est le suivant. Puisque $\bar{\partial}g = 0$ hors de L , la fonction g de classe \mathcal{C}^∞ est en fait holomorphe dans $\mathbb{C}^n \setminus L$. De plus, comme g est à support compact, le principe d'identité implique que $g \equiv 0$ dans l'unique composante connexe non bornée D_∞ de $\mathbb{C}^n \setminus L$, celle qui contient le point ∞ à l'infini.



Affirmation 8.4. D_∞ intersecte $\Omega \setminus U \subset \Omega \setminus K$.

Preuve. Prenons en effet une courbe continue du point ∞ jusqu'à un certain point de K , et attendons qu'elle entre dans Ω pour trouver un point p sur cette courbe ainsi qu'un ouvert $W_p \ni p$ avec :

$$p \in W_p \subset \Omega \setminus U \quad \text{d'où} \quad W_p \subset D_\infty. \quad \square$$

Ensuite, le principe d'identité le long d'une telle courbe offre :

$$g|_{W_p} \equiv 0,$$

d'où :

$$F = (1 - 0)f - g = f - 0 = f \quad (\text{dans } W_p).$$

Pour terminer, puisque $\Omega \setminus K \supset W_p$ a été choisi connexe, le principe d'identité — encore lui ! — nous permet de conclure que $F = f$ partout dans $\Omega \setminus K$. \square

Dans ces arguments, un aspect topologique subtil, illustré par la figure, s'interpose, à savoir le fait que l'ensemble :

$$\Omega \setminus L = \Omega \setminus \text{supp } \bar{\partial}\chi$$

n'est en général pas connexe, et à cause de cela, il est impossible d'affirmer que $g = 0$ dans un ouvert complet de la forme $\mathcal{V}(\partial\Omega) \cap \Omega$, où $\mathcal{V}(\partial\Omega)$ est un voisinage ouvert de $\partial\Omega$ dans \mathbb{C}^n .

Sans compter que $\partial\Omega$ n'est pas forcément connexe !

9. Domaines d'holomorphic

Classiquement, un *domaine* est un ouvert connexe. Mais ici, la terminologie « *domaine d'holomorphic* » accepte des ouverts quelconques.

Définition 9.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$ est un *domaine d'holomorphic* s'il n'existe pas de paire d'ouverts *connexes* :

$$\emptyset \neq \varpi \subset \omega \subset \mathbb{C}^n,$$

avec :

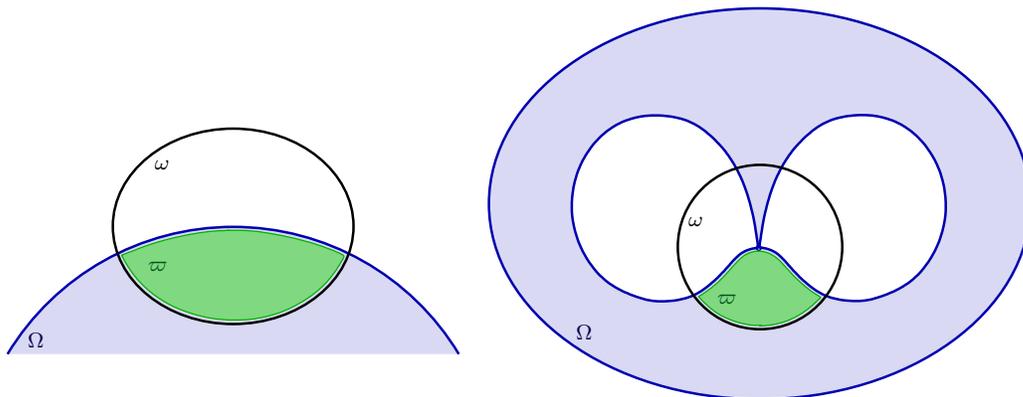
$$\omega \not\subset \Omega, \quad \varpi = \text{une composante connexe de } \omega \cap \Omega,$$

tels que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(\omega) \quad g|_{\omega} = f|_{\omega}.$$

L'Exercice 9 propose de se convaincre que cette condition concerne en fait les composantes connexes de Ω .

Intuitivement, on demande qu'il n'existe pas d'ouvert plus vaste que Ω auquel *toutes* les fonctions holomorphes se prolongent.



En effet, l'hypothèse que Ω est un domaine d'holomorphie *implique* — mais n'est pas équivalente à — la condition qu'il n'existe *pas* d'ouvert plus grand $\tilde{\Omega} \supsetneq \Omega$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists \tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \quad \tilde{f}|_{\Omega} = f.$$

Toutefois, dans la définition, on prend bien garde au fait que $\omega \cap \Omega$ peut consister en *plusieurs* composantes connexes, même une infinité (exercice mental). Ainsi, la définition naïve :

il n'existe pas d'ouvert connexe $\omega \not\subset \Omega$ tel que

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(\omega) \quad g|_{\omega \cap \Omega} = f|_{\omega \cap \Omega}$$

ne conviendrait pas, car elle demande une coïncidence sur *toutes* les composantes de $\omega \cap \Omega$, alors que l'on cherche à conceptualiser la non-prolongeabilité *locale* au-delà de $\partial\Omega$ depuis Ω .

Autrement dit, on veut conceptualiser la non-prolongeabilité au-delà du bord, depuis l'intérieur, ce qu'éclaircit la

Proposition 9.2. Pour un ouvert quelconque $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Ω est un domaine d'holomorphie ;

(ii) en tout point $z \in \Omega$, s'il existe un polydisque ouvert centré :

$$\Delta := \{w \in \mathbb{C}^n : |w_1 - z_1| < r_1, \dots, |w_n - z_n| < r_n\} \quad (r_1, \dots, r_n > 0),$$

tel que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(\Delta) \quad g = f \quad \text{près de } z,$$

alors en fait :

$$\Delta \subset \Omega.$$

Le principe d'identité donne alors $g = f$ dans la composante connexe $\tilde{\Delta}$ de $\Delta \cap \Omega$ contenant z . Ainsi, cette proposition montre que l'on peut « tester » si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie simplement avec des ouverts $\omega = \Delta$ qui sont des polydisques.

Démonstration. Établissons la contraposée :

$$\left(\Omega \text{ n'est pas un domaine d'holomorphic} \right) \iff \left(\begin{array}{l} \exists z \in \Omega \exists \Delta \ni z \Delta \not\subset \Omega \\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \exists g \in \mathcal{O}(\Delta) \\ g = f \text{ près de } z \end{array} \right).$$

L'implication \Leftarrow est évidente avec $\omega := \Delta$ et $\varpi := \tilde{\Delta}$ = la composante connexe de $\omega \cap \Omega$ contenant z .

\Rightarrow Par hypothèse, il existe deux ouverts connexes $\emptyset \neq \varpi \subset \omega \subset \mathbb{C}^n$, avec $\omega \not\subset \Omega$, où ϖ est une composante connexe de $\omega \cap \Omega$, tels que :

$$(9.3) \quad \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(\omega) \quad g|_{\varpi} = f|_{\varpi}.$$

Il s'agit de « remplacer » ω par un polydisque. Évidemment :

$$\varpi \neq \omega,$$

car sinon, si $\varpi = \omega$, il vient $\omega \subset \Omega$. Appliquons alors le lemme suivant à :

$$V := \varpi \quad \text{et} \quad U := \omega.$$

Lemme 9.4. *Étant donné deux ouverts connexes non vides :*

$$\emptyset \neq V \subset U \subset \mathbb{C}^n,$$

on a :

$$V = U \iff (\overline{V} \setminus V) \cap U = \emptyset.$$

Preuve. L'implication \Rightarrow est triviale.

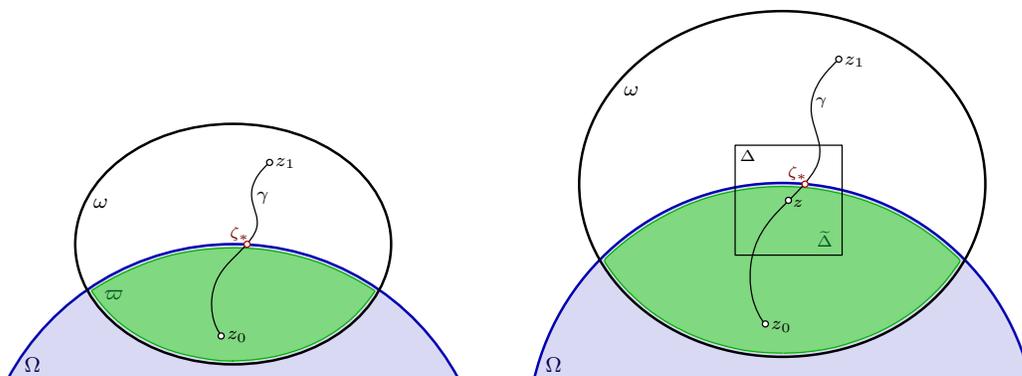
\Leftarrow Par l'absurde, supposons $U \setminus V \neq \emptyset$, prenons $z_1 \in U \setminus V$ ainsi que $z_0 \in V$, et traçons une courbe continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow V$ allant de $z_0 = \gamma(0)$ jusqu'à $\gamma(1) = z_1$. Repérons alors son premier point de sortie :

$$\gamma(t) \in V \text{ pour } 0 \leq t < t_*, \quad \gamma(t_*) \notin V,$$

pour un unique $0 < t_* < 1$. Mais ce point :

$$\gamma(t_*) \in (\overline{V} \setminus V) \cap U \neq \emptyset$$

contredit l'hypothèse faite ! □



Ainsi, d'un point $z_0 \in \varpi$ à un point $z_1 \in \omega \setminus \varpi$, le long d'une courbe continue $\gamma: [0, 1] \rightarrow \omega$ avec $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z_1$, il existe un point :

$$\gamma(t_*) =: \zeta_* \in \partial \varpi \cap \omega$$

appartenant au bord de ϖ relatif à ω .

Assertion 9.5. *On a aussi $\zeta_* \in \partial\Omega$.*

Preuve. Sinon, si $\zeta_* \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert *connexe* $\zeta_* \in W \subset \Omega$, et alors $W \cap \varpi \neq \emptyset$, donc $W \subset \varpi$ car ϖ est une composante connexe de $\omega \cap \Omega$, donc $\zeta_* \notin \partial\varpi$ — contradiction. \square

Pour terminer la démonstration, choisissons un point :

$$z = \gamma(t), \quad t < t_* \text{ proche de } t_*,$$

et choisissons un polydisque ouvert centré :

$$z \in \Delta \subset \omega \quad \text{avec} \quad \Delta \ni \zeta_*.$$

Comme $\zeta_* \in \partial\Omega$, on a $\zeta_* \notin \Omega$, donc :

$$\Delta \not\subset \Omega.$$

Enfin, puisqu'on a supposé (9.3), et puisque γ est un chemin continu de z_0 à z dans ϖ , on déduit :

$$g = f \quad \text{près de } z$$

— d'où $g = f$ dans la composante connexe $\tilde{\Delta}$ de $\Delta \cap \Omega$ contenant z —, ce qui conclut la démonstration de \implies . \square

10. Théorie de Cartan-Thullen

Dans $\mathbb{C}^{n \geq 1}$, pour des rayons fixés $r_1 > 0, \dots, r_n > 0$, choisissons un polydisque ouvert de référence :

$$\Delta := \{z \in \mathbb{C}^n : |z_1| < r_1, \dots, |z_n| < r_n\},$$

et associons-lui la norme :

$$|z|_{\Delta} := \max_{1 \leq i \leq n} \frac{|z_i|}{r_i}.$$

Le cas spécial $r_1 = \dots = r_n = 1$ avec $\Delta = \mathbb{D} \times \dots \times \mathbb{D}$ redonne la norme standard :

$$|z| = |z|_{\mathbb{D}^n} = \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un ouvert. Pour $w \in \Omega$, la distance au complémentaire est égale à la distance au bord :

$$\text{dist}_{\Delta}(w, \mathbb{C}^n \setminus \Omega) = \text{dist}_{\Delta}(w, \partial\Omega) = \inf_{\zeta \in \partial\Omega} |w - \zeta|_{\Delta}.$$

Lorsque $\Delta = \mathbb{D}^n$, on abrégera parfois :

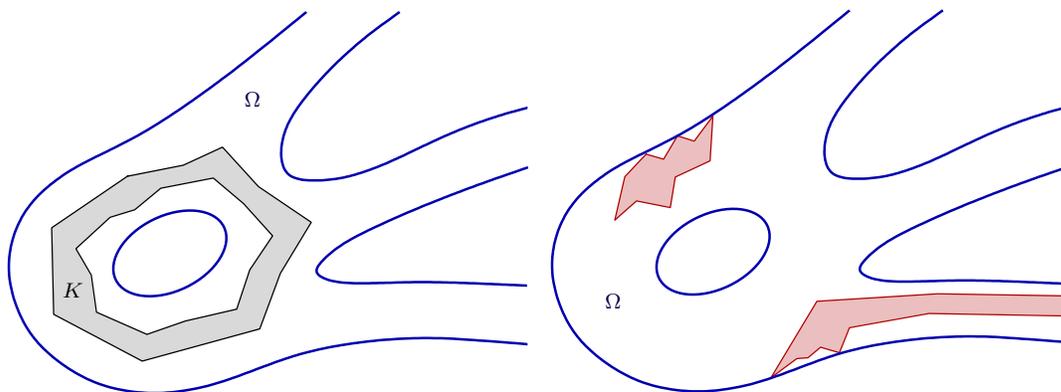
$$\text{dist}(\cdot, \cdot) := \text{dist}_{\mathbb{D}^n}(\cdot, \cdot).$$

Il est bien connu qu'un sous-ensemble $K \subset \mathbb{C}^n$ est compact si et seulement si il est borné et fermé. Mais nous aurons souvent besoin de vérifier qu'un sous-ensemble $K \subset \Omega$ de l'ouvert est *compact* (en lui-même). Comment voir cela ?

Si $K \subset \Omega$ est compact, il est en particulier impossible qu'il existe une suite convergente $(z_j)_{j=1}^{\infty}$ de points $z_j \in K$ avec $z_j \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \zeta \in \partial\Omega$, puisqu'alors $\zeta \in K$, ce qui contredit $K \subset \Omega$.

Critère de compacité 10.1. *Un sous-ensemble $K \subset \Omega$ d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est compact si et seulement si :*

- ① K est borné dans \mathbb{C}^n ;
- ② K est fermé dans Ω , i.e. tous les points-limites de suites de Cauchy d'éléments de K qui convergent dans Ω appartiennent encore à K ;
- ③ $\text{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) > 0$. □



L'un des concepts les plus fondamentaux de toute la théorie provient d'une abstraction de ce que signifie le remplissage d'une figure de Hartogs $H_{\rho_1, r_2} \subset \mathbb{C}^2$.

Définition 10.2. *L'enveloppe holomorphe d'un compact $K \subset \Omega$ est :*

$$\widehat{K} = \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} := \left\{ \zeta \in \Omega : |f(\zeta)| \leq \sup_{z \in K} |f(z)| \text{ pour toutes } f \in \mathcal{O}(\Omega) \right\}.$$

Grâce au principe du maximum sur des disques horizontaux, on vérifie en effet (exercice) que :

$$\widehat{H_{\rho_1, r_2, \mathcal{O}(\Omega)}} = \mathbb{D} \times \mathbb{D}.$$

Généralement, le fait que $\mathcal{O}(\Omega) \subset \mathcal{C}^0(\Omega)$ garantit que :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega \quad \text{est fermé dans } \Omega;$$

de plus, en appliquant la définition à toutes les fonctions-coordonnées $f := z_i$ pour $i = 1, \dots, n$, on se convainc aisément que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \mathbb{C}^n$ est bornée.

Ainsi, c'est seulement la condition ③ qui peut être mise en défaut :

$$\text{dist}_\Delta(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathbb{C} \setminus \Omega) \stackrel{?}{>} 0,$$

et les figures de Hartogs dont le remplissage *déborde* de Ω montrent (exercice) que tel n'est pas toujours le cas ! L'objectif de la théorie de Cartan-Thullen est alors de déterminer sous quelles conditions $\widehat{K} \subset \Omega$ est aussi compact, lorsque $K \subset \Omega$ l'est.

Lemma 10.3. *L'enveloppe holomorphe d'un compact $K \subset \Omega$ est toujours contenue dans son enveloppe convexe :*

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \text{cvx}(K) \subset \mathbb{C}^n.$$

Preuve. Envisageons $K \subset \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{C}^n$. Toute forme linéaire réelle s'écrit :

$$\begin{aligned}\Lambda(x, y) &= c + a_1 x_1 + b_1 y_1 + \cdots + a_n x_n + b_n y_n \\ &= \operatorname{Re} (c + (a_1 - \sqrt{-1} b_1) z_1 + \cdots + (a_n - \sqrt{-1} b_n) z_n) \\ &=: \operatorname{Re} H(z).\end{aligned}$$

Il est connu que l'enveloppe convexe de K est l'intersection de tous les demi-espaces fermés contenant K :

$$\operatorname{cvx}(K) = \bigcap_{\substack{\Lambda \text{ avec} \\ K \subset \{\Lambda \leq 0\}}} \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : \Lambda(x, y) \leq 0\}.$$

Alors pour $\zeta = \xi + i\eta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$, puisque la fonction $z \mapsto e^{H(z)}$ est holomorphe dans Ω , nous avons :

$$\begin{aligned}\exp(\Lambda(\xi, \eta)) &= |\exp H(\zeta)| \leq \sup_{z \in K} |\exp H(z)| \\ &= \sup_{(x, y) \in K} \exp(\Lambda(x, y)) \\ &\leq e^0 = 1,\end{aligned}$$

d'où $\Lambda(\xi, \eta) \leq 0$, ce qui signifie $\zeta \in \operatorname{cvx}(K)$. \square

Voici un théorème préliminaire qui nous conduira plus tard vers la caractérisation suivante des domaines d'holomorphicité :

$$\operatorname{dist}_{\Delta}(K, \partial\Omega) = \operatorname{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega) \quad (\forall K \subset \Omega \text{ compact}).$$



Théorème 10.4. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$ un ouvert quelconque, et soit $K \subset \Omega$ un compact. On suppose qu'il existe une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui satisfait :

$$(10.5) \quad |f(w)| \leq \operatorname{dist}_{\Delta}(w, \partial\Omega), \quad \text{pour tout } w \in K.$$

Alors en tout point $\zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$, toutes les fonctions holomorphes $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ont un développement en série entière :

$$T_{\zeta}^{\infty}(g)(z) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(z - \zeta)^{\alpha}}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|} g}{\partial z^{\alpha}}(\zeta)$$

qui converge normalement pour tout z dans le polydisque ouvert :

$$z \in \zeta + |f(\zeta)| \Delta.$$

Observons que la conclusion est gratuite lorsque $\zeta = w \in K \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$, puisque l'hypothèse :

$$|f(w)| \leq \operatorname{dist}_{\Delta}(w, \partial\Omega) \quad (\forall w \in K)$$

garantit que $w + |f(w)| \Delta \subset \Omega$, et il découle alors de la formule de Cauchy multidimensionnelle — comme l'exprime le Corollaire 3.8 — que la convergence de $T_w^\infty(g)(z)$ vaut pour tout z avec :

$$|z - w|_\Delta \leq t |f(w)|,$$

quelque soit la proximité à 1 de $0 \leq t < 1$.

Démonstration. Fixons $0 < t < 1$ et introduisons :

$$\begin{aligned} L_t &:= \bigcup_{w \in K} L_{t,w}, \\ L_{t,w} &:= \{z \in \Omega : |z - w|_\Delta \leq t |f(w)|\}. \end{aligned}$$

Affirmation 10.6. *Cet ensemble $L_t \subset \Omega$ est compact.*

Preuve. De retour au Critère de Compacité 10.1, les conditions ① et ② sont clairement satisfaites (exercice mental), et pour vérifier la troisième ③, en utilisant l'hypothèse 10.5, nous avons :

$$\begin{aligned} L_t &= \bigcup_{w \in K} \{z \in \Omega : |z - w|_\Delta \leq t |f(w)|\} \\ &\subset \bigcup_{w \in K} \{z \in \Omega : |z - w|_\Delta \leq t \operatorname{dist}_\Delta(w, \partial\Omega)\} \\ &=: \tilde{L}_t. \end{aligned}$$

Alors pour tout $z \in \tilde{L}_t$ avec $z \in \tilde{L}_{t,w}$ pour un certain $w \in K$, et pour tout $\zeta \in \partial\Omega$, l'inégalité du triangle et des calculs simples :

$$\begin{aligned} |\zeta - z|_\Delta &\geq |\zeta - w|_\Delta - |w - z|_\Delta \\ &\geq \operatorname{dist}_\Delta(\partial\Omega, w) - t \operatorname{dist}_\Delta(w, \partial\Omega) \\ &= (1 - t) \operatorname{dist}_\Delta(w, \partial\Omega) \\ &\geq (1 - t) \operatorname{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) \end{aligned}$$

montrent la positivité stricte de :

$$\operatorname{dist}_\Delta(L_t, \partial\Omega) \geq \operatorname{dist}_\Delta(\tilde{L}_t, \partial\Omega) \geq (1 - t) \operatorname{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) > 0. \quad \square$$

Maintenant, soit $g \in \mathcal{O}(\Omega)$. Puisque $L_t \subset \Omega$ est compact, il existe une constante $0 \leq C_t < \infty$ avec :

$$\sup_{L_t} |g| \leq C_t.$$

Soit $w \in K$, supposons temporairement que $f(w) \neq 0$, et abrégeons :

$$\rho_i := t r_i |f(w)| \quad (1 \leq i \leq n).$$

De la formule intégrale de Cauchy multidimensionnelle :

$$g(w) = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - w_1| = \rho_1} \cdots \int_{|\zeta_n - w_n| = \rho_n} \frac{g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - w_1) \cdots (\zeta_n - w_n)} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n,$$

découle par différentiation, pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$\partial^\alpha g(w) = \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1 - w_1| = \rho_1} \cdots \int_{|\zeta_n - w_n| = \rho_n} \frac{g(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{(\zeta_1 - w_1)^{1+\alpha_1} \cdots (\zeta_n - w_n)^{1+\alpha_n}} d\zeta_1 \cdots d\zeta_n.$$

Une majoration $|\int f h| \leq \int |h|$ donne :

$$\begin{aligned} |\partial^\alpha g(w)| &\leq \frac{\alpha_1! \cdots \alpha_n!}{(2\pi)^n} \frac{C_t}{(t r_1 |f(w)|)^{1+\alpha_1} \cdots (t r_n |f(w)|)^{1+\alpha_n}} (2\pi\rho_1) \cdots (2\pi\rho_n) \\ &= \alpha! \frac{C_t}{t^{|\alpha|} r^\alpha |f(w)|^{|\alpha|}}, \end{aligned}$$

où $r^\alpha = r_1^{\alpha_1} \cdots r_n^{\alpha_n}$. De manière équivalente :

$$|f(w)^{|\alpha|} \partial^\alpha g(w)| \leq \frac{\alpha! C_t}{t^{|\alpha|} r^\alpha} \quad (\forall w \in K),$$

inégalité qui est aussi trivialement valide lorsque $f(w) = 0$.

Mais puisque la fonction $w \mapsto f(w)^{|\alpha|} \partial^\alpha g(w)$ est holomorphe dans Ω , la définition de $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ montre que :

$$\begin{aligned} |f(\zeta)^{|\alpha|} \partial^\alpha g(\zeta)| &\leq \sup_{w \in K} |f(w)^{|\alpha|} \partial^\alpha g(w)| \\ &\leq \frac{\alpha! C_t}{t^{|\alpha|} r^\alpha} \quad (\forall \zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}). \end{aligned}$$

Ces inégalités garantissent alors que la série entière $T_\zeta^\infty(g)(z)$ converge normalement pour tout :

$$z \in \zeta + t |f(\zeta)| \Delta.$$

En faisant $t \xrightarrow{\leq} 1$, nous concluons ! □

Corollaire 10.7. *Soit $K \subset \Omega$ est un compact dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et soit :*

$$d := \text{dist}_\Delta(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0.$$

Alors en tout point $\zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$, toutes les fonctions holomorphes $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ont une série entière $T_\zeta^\infty(g)(z)$ qui converge dans $\{|z - \zeta|_\Delta < d\}$.

Démonstration. Dans le théorème, il suffit de choisir la constante $f := d \in \mathcal{O}(\Omega)$ — qui est une fonction holomorphe ! □

À présent, que se passe-t-il lorsque Ω est un domaine d'holomorphic ? Puisque les fonctions holomorphes dans Ω ne peuvent pas toutes être prolongées holomorphiquement au-delà de $\partial\Omega$, il est alors *nécessaire*, dans ce Théorème 10.4, que tous ces polydisques $\zeta + |f(\zeta)| \Delta$ d'extension automatique soient *entièrement contenus* dans Ω , eu égard à la Proposition 9.2.

Corollaire 10.8. *Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$ qui est un domaine d'holomorphic, et soit $K \subset \Omega$ un compact. Si une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfait :*

$$|f(w)| \leq \text{dist}_\Delta(w, \partial\Omega) \quad (\forall w \in K),$$

alors aussi :

$$|f(\zeta)| \leq \text{dist}_\Delta(\zeta, \partial\Omega) \quad (\forall \zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}). \quad \square$$

De plus, en appliquant ce résultat à la fonction constante :

$$f := \text{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) \in \mathcal{O}(\Omega),$$

nous obtenons :

$$\text{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) \leq \text{dist}_\Delta(\zeta, \partial\Omega) \quad (\forall \zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}),$$

puis en prenant l'infimum sur ζ :

$$(10.9) \quad \text{dist}_\Delta(K, \partial\Omega) \leq \text{dist}_\Delta(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega).$$

Nous pouvons maintenant formuler le résultat qui exprime deux caractérisations du concept de domaine d'holomorphic.

Théorème 10.10. [Cartan-Thullen] *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Ω est un domaine d'holomorphic.

(ii) Tout compact $K \subset \Omega$ a une enveloppe holomorphic $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega$ qui est aussi compacte, située à même distance du complémentaire :

$$(0 <) \quad \text{dist}_\Delta(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \text{dist}_\Delta(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

(iii) Il existe une fonction $f^l \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui ne se prolonge nulle part au-delà de $\partial\Omega$:

$$\left(\begin{array}{l} \forall w \in \Omega \quad \forall D \ni w \text{ polydisque ouvert} \\ \exists g \in \mathcal{O}(D) \text{ avec } g = f^l \text{ près de } w \end{array} \right) \implies D \subset \Omega.$$

Terminologie 10.11. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ satisfaisant la condition (ii) — et donc les deux autres — :

$$K \subset \Omega \text{ compact} \implies \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega \text{ compact},$$

est dit *holomorphicquement convexe*.

Démonstration. On peut supposer Ω connexe (exercice).

(i) \implies (ii). Nous avons quasiment achevé l'argumentation, puisque l'inégalité inverse \geq dans (10.9) est triviale — rappelons que $\text{dist}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega) > 0$ est la chose principale à obtenir.

(ii) \implies (iii). Par l'absurde, supposons que Ω n'est pas un domaine d'holomorphic, à savoir :

$$\begin{array}{l} \exists w \in \Omega \quad \exists D \ni w \text{ polydisque ouvert centré avec } D \not\subset \Omega \text{ tels que} \\ \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists g \in \mathcal{O}(D) \quad g = f \text{ près de } w. \end{array}$$

Comme précédemment, fixons un polydisque de référence :

$$\Delta := \mathbb{D}_{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}_{r_n} \quad (r_1 > 0, \dots, r_n > 0).$$

Pour $\zeta \in \Omega$, posons :

$$s_\zeta := \max \{s > 0 : \zeta + s \Delta \subset \Omega\},$$

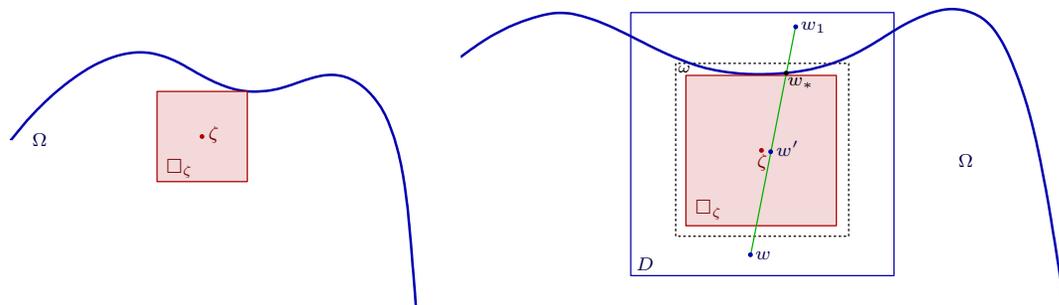
puis :

$$\square_\zeta := \zeta + s_\zeta \Delta.$$

Conséquemment, $\partial\square_\zeta \cap \partial\Omega \neq \emptyset$.

Regardons maintenant le sous-ensemble dénombrable dense :

$$\Omega_{\mathbb{Q}} := \Omega \cap (\mathbb{Q} + \sqrt{-1}\mathbb{Q})^n.$$



Assertion 10.12. *Il existe $\zeta \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ et il existe un voisinage ouvert connexe $\omega \supset \square_{\zeta}$ tels que :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists h \in \mathcal{O}(\omega) \quad h = f \text{ près de } \zeta.$$

Preuve. Prenons $w_1 \in D \setminus \Omega$ et considérons le segment :

$$\gamma(t) := w + t(w_1 - w) \quad (0 \leq t \leq 1),$$

compact, contenu dans le convexe D . Il existe un unique $0 < t_* < 1$ avec :

$$\gamma([0, t_*[) \subset \Omega, \quad \text{tandis que } w_* := \gamma(t_*) \notin \Omega.$$

Prenons alors $t' < t_*$ très proche de t_* auquel est associé :

$$w' := w + t'(w_1 - w),$$

observons que :

$$\text{dist}_{\Delta}(w', \partial\Omega) \leq \text{dist}_{\Delta}(w', w_*) \ll \text{dist}_{\Delta}(w', \partial D),$$

pour obtenir :

$$\overline{\square}_{w'} \subset D.$$

Par densité de $\Omega_{\mathbb{Q}} \subset \Omega$, choisissons $\zeta \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ très proche de w' , toujours avec :

$$\overline{\square}_{\zeta} \subset D,$$

prenons aussi un voisinage ouvert connexe :

$$\overline{\square}_{\zeta} \subset \omega \subset \bar{\omega} \subset D,$$

et définissons :

$$h := g|_{\omega}.$$

Alors la coïncidence $g = f$ près de w se propage le long du segment continu $\gamma([0, t']) \subset \Omega \cap D$ jusqu'à $g = h = f$ près de w' et aussi près de ζ . \square

Le but est maintenant de construire une fonction :

$$f^l \in \mathcal{O}(\Omega)$$

qui va contredire l'existence, dans cette Assertion 10.12, de $\zeta \in \Omega_{\mathbb{Q}}$, de $\omega \supset \overline{\square}_{\zeta}$, et de $h^l \in \mathcal{O}(\omega)$ avec $h^l = f^l$ près de ζ .

À cet effet, soit $(\zeta_j)_{j=1}^{\infty}$ une suite, dense dans Ω , d'éléments de $\Omega_{\mathbb{Q}}$ qui répète (visite) une infinité de fois *chaque* $\zeta \in \Omega_{\mathbb{Q}}$.

Aussi, introduisons la suite de compacts :

$$K_j := \left\{ z \in \Omega : |z|_{\Delta} \leq j, \text{dist}_{\Delta}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geq \frac{1}{j} \right\},$$

satisfaisant :

$$K_j = \overline{\text{Int } K_j} \subset \text{Int } K_{j+1} \subset K_{j+1} \quad (\forall j \geq 1),$$

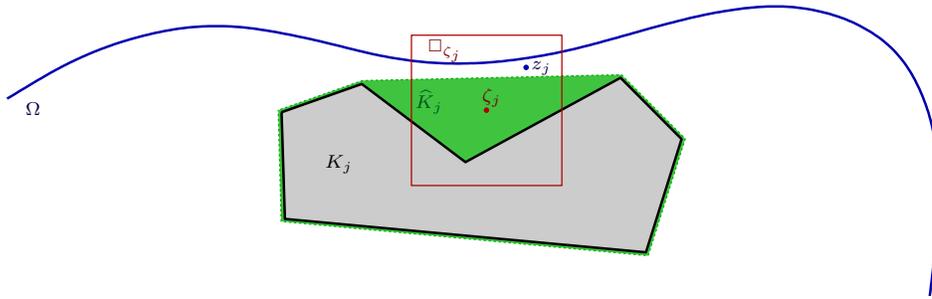
et qui remplit :

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j.$$

Après une translation et une dilatation de \mathbb{C}^n , on peut assurer que :

$$0 \in \Omega \quad \text{et} \quad 0 \in K_1,$$

d'où $K_j \neq \emptyset$ pour tout $j \geq 1$. Rappelons que Ω est supposé connexe.



Alors par l'hypothèse (ii), on a compacité de :

$$\widehat{K}_{j \cap \Omega} \subset \Omega \quad (\forall j \geq 1).$$

Par conséquent :

$$\exists z_j \in \square_{\zeta_j} \quad \text{avec} \quad z_j \notin \widehat{K}_{j \cap \Omega} \quad (\forall j \geq 1),$$

et donc, par définition de l'enveloppe holomorphe :

$$\exists f_j \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} f_j(z_j) = 1 & \text{tandis que} \\ \sup_{K_j} |f_j| < 1. \end{cases}$$

En élevant $f_j \mapsto (f_j)^{M_j}$ à une puissance assez grande, on a même :

$$\sup_{K_j} |f_j| \leq \frac{1}{2^j}.$$

Puisque $\emptyset \neq K_1 \subset K_j$, et puisque Ω est connexe, il vient $f_j \neq 1$ pour tout $j \geq 1$.

De plus, comme $\sum j 2^{-j} < \infty$ converge, en prenant un logarithme, on voit que le produit infini de fonctions holomorphes :

$$f^\ell := \prod_{j=1}^{\infty} (1 - f_j)^j$$

converge uniformément sur tout compact fixé $K_\ell \subset \Omega$ avec $\ell \geq 1$ quelconque, donc ce produit définit une fonction $f^\ell \in \mathcal{O}(\Omega)$ avec :

$$(10.13) \quad f^\ell \neq 0,$$

puisque toutes les $f_j \neq 1$.

Observation 10.14. En chaque point $z_j \in \Omega$, toutes les dérivées partielles de f^ℓ d'ordres $\leq j - 1$ s'annulent. □

De retour au point $\zeta \in \Omega_{\mathbb{Q}}$ de l'Assertion 10.12, on a :

$$\zeta = \zeta_{j_1} = \zeta_{j_2} = \cdots = \zeta_{j_\nu} = \cdots,$$

pour une infinité de $j_1 < j_2 < \cdots < j_\nu < \cdots$ avec $j_\nu \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} \infty$. À ces points ζ_{j_ν} , nous avons associé une suite $(z_{j_\nu})_{\nu=1}^\infty$ de points satisfaisant :

$$z_{j_\nu} \in \square_\zeta \quad \text{tandis que} \quad z_{j_\nu} \notin \widehat{K}_{j_\nu, \mathcal{O}(\Omega)},$$

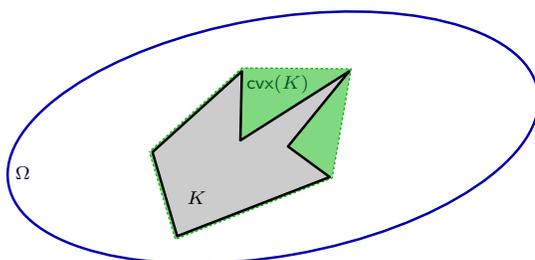
d'où z_{j_ν} tend vers $\partial\Omega$, puisque la suite $(K_{j_\nu} \subset \widehat{K}_{j_\nu, \mathcal{O}(\Omega)})_{\nu=1}^\infty$ remplit Ω . En extrayant une sous-suite si nécessaire, nous avons convergence vers un certain point du bord :

$$z_{j_\nu} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} p \in \partial\Omega \cap \partial\square_\zeta.$$

Alors la fonction $h^l \in \mathcal{O}(\omega \supset \square_\zeta)$ associée à f^l par l'Assertion 10.12 qui satisfait $h^l = f^l$ dans \square_ζ doit s'annuler à des ordres $\geq j_\nu - 1$ en tous les points z_{j_ν} , et puisqu'elle est holomorphe dans un voisinage ouvert assez petit $p \in W_p \subset \omega$, elle doit alors s'annuler à l'ordre ∞ en p , d'où $h^l \equiv 0$ dans ω (connexe), puis $f^l \equiv 0$ dans \square_ζ , et enfin $f^l \equiv 0$ dans Ω (connexe), ce qui contredit (10.13). \square

C'est le critère (ii) qui est le plus utile pour déterminer si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphie. En fait, pour $K \subset \Omega$ compact, puisque $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ est toujours borné dans \mathbb{C}^n et relativement fermé dans Ω , répétons que le point-clé est d'établir l'inégalité :

$$\text{dist}_\Delta(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega) > 0.$$



Corollaire 10.15. Si $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un ouvert convexe, alors Ω est un domaine d'holomorphie.

Preuve. Pour tout compact $K \subset \Omega$, le Lemme 10.3 donne :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \text{cvx}(K) \subset \Omega$$

puisque Ω est convexe (exercice). \square

Corollaire 10.16. Si $(\Omega_a)_{a \in A}$ est une famille quelconque de domaines d'holomorphie dans \mathbb{C}^n , alors :

$$\text{Int} \left(\bigcap_{a \in A} \Omega_a \right) =: \Omega$$

est encore un domaine d'holomorphie.

Preuve. Pour un compact arbitraire $K \subset \Omega$, il s'agit de faire voir que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ est encore compact. Puisque $K \subset \Omega \subset \Omega_a$ pour tout $a \in A$, et puisque Ω_a est un domaine d'holomorphie on a compacité de :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_a)} \subset \Omega_a \quad (\forall a \in A),$$

et même :

$$\text{dist}_\Delta(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_a)}, \partial\Omega_a) = \text{dist}_\Delta(K, \partial\Omega_a).$$

Ensuite, $\Omega \subset \Omega_a$ implique (exercice) :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_a)} \quad (\forall a \in A),$$

d'où :

$$\begin{aligned} \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega_a) &\geq \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega_a)}, \partial\Omega_a) \\ &= \text{dist}_{\Delta}(K, \partial\Omega_a) \\ [\Omega \subset \Omega_a] &\geq \text{dist}_{\Delta}(K, \partial\Omega) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $a \in A$:

$$(10.17) \quad \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \mathcal{C}\Omega_a) = \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega_a) \geq c > 0.$$

Affirmation 10.18. *Alors aussi :*

$$\text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega) \geq c \quad (> 0).$$

Preuve. Sinon, il existerait un point $w \in \partial\Omega$ et un point $\zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ avec :

$$|w - \zeta|_{\Delta} \leq c - 2\varepsilon,$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit, et alors pour tout z dans le polydisque ouvert :

$$D_w := \{z \in \mathbb{C}^n : |z - w|_{\Delta} < \varepsilon\},$$

on aurait par inégalité triangulaire :

$$\text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, z) \leq |\zeta - z|_{\Delta} \leq c - \varepsilon,$$

ce qui entraînerait d'après (10.17) :

$$D_w \subset \Omega_a \quad (\forall a \in A),$$

signifiant $w \in \text{Int}(\cap \Omega_a)$, donc contredisant $w \in \partial\Omega$. \square

En conclusion, cette affirmation montre que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega$ est bel et bien compact. \square

Corollaire 10.19. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine d'holomorphic, soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, et soit $c > 0$. Alors l'ouvert :*

$$\Omega_c := \{z \in \Omega : |f(z)| < c\}$$

est aussi un domaine d'holomorphic.

En particulier, avec $f(z) := z - a$, toutes les intersections $\Omega \cap \{|z - a|_{\Delta} < c\}$ avec des polydisques ouverts sont des domaines d'holomorphic.

Preuve. Prenons un compact $K \subset \Omega_c$. Alors :

$$\sup_K |f| =: e < c,$$

et d'après la définition même d'enveloppe holomorphic, il vient :

$$\sup_{\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}} |f| = e < c.$$

En utilisant alors (exercice) :

$$\partial\Omega_c = \partial(\{|f| < c\}) \subset \partial\Omega \cup \{|f| = c\},$$

de :

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{\sigma(\Omega_c)} \subset \widehat{K}_{\sigma(\Omega)} \subset \Omega \text{ compact} &\implies \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(\Omega_c)}, \partial\Omega) > 0, \\ \widehat{K}_{\sigma(\Omega_c)} \subset \{|f| \leq c\} \text{ compact} &\implies \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(\Omega_c)}, \{|f| = c\}) > 0, \end{aligned}$$

nous concluons :

$$\text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(\Omega_c)}, \partial\Omega_c) > 0. \quad \square$$

Corollaire 10.20. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine d'holomorphie avec $0 \in \Omega$. Alors pour tout entier $j \geq 1$, la composante connexe $\Omega_j^{\circ} \ni 0$ contenant l'origine de :*

$$\Omega_j := \{z \in \Omega : |z|_{\Delta} < j, \text{dist}_{\Delta}(z, \partial\Omega) < \frac{1}{j}\},$$

est à nouveau un domaine d'holomorphie.

L'intérêt est de remplir :

$$\Omega = \bigcup_{j \geq 1} \Omega_j^{\circ}, \quad \overline{\Omega_j^{\circ}} \subset \Omega_{j+1}^{\circ} \subset \Omega,$$

par des domaines d'holomorphie connexes, tous bornés dans \mathbb{C}^n et relativement compacts dans Ω .

Preuve. Il suffit de montrer que chaque :

$$D_j := \{z \in \Omega : \text{dist}_{\Delta}(z, \partial\Omega) > \frac{1}{j}\}$$

est un domaine d'holomorphie, puisqu'alors $\Omega_j = D_j \cap \{|z|_{\Delta} < j\}$, le sera d'après ce qui précède, ainsi que toutes ses composantes connexes.

Soit un compact $K \subset D_j$. Grâce à (ii) du Théorème 10.10 de Cartan-Thullen :

$$\frac{1}{j} < \text{dist}_{\Delta}(K, \partial\Omega) = \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(\Omega)}, \partial\Omega) =: \delta,$$

d'où $\widehat{K}_{\sigma(\Omega)} \subset D_j$. En utilisant $\partial D_j = \{\text{dist}_{\Delta}(z, \partial\Omega) = \frac{1}{j}\}$ et une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} 0 < \delta - \frac{1}{j} &\leq \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(\Omega)}, \partial D_j) \\ &\leq \text{dist}_{\Delta}(\widehat{K}_{\sigma(D_j)}, \partial D_j), \end{aligned}$$

cette dernière inégalité provenant de l'inclusion $\widehat{K}_{\sigma(D_j)} \subset \widehat{K}_{\sigma(\Omega)}$. □

11. Enveloppes de domaines de Reinhardt

Le Théorème 10.10 de Cartan-Thullen possède une autre application aux domaines de Reinhardt $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$, et va permettre de déterminer précisément s'ils sont des domaines d'holomorphie. Lorsqu'on prend leur image logarithmique $\log |\Omega^*|$, il faut éviter les lieux où certaines coordonnées s'annulent, ce qui motive le préliminaire suivant.

Pour toute partition :

$$\{1, \dots, n\} = I \cup J, \quad I \cap J = \emptyset,$$

considérons les intersections :

$$\begin{aligned} \Omega_I &:= \Omega \cap \{z_j = 0, \forall j \in J\} \cong \mathbb{C}^{\text{Card } I}, \\ \Omega_I^* &:= \Omega_I \cap \{z_i \neq 0, \forall i \in I\} \cong \mathbb{C}^{*\text{Card } I}. \end{aligned}$$

Lemme 11.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine de Reinhardt complet logarithmiquement convexe — d'où $0 \in \Omega$. Alors toutes ses intersections Ω_I sont aussi de Reinhardt complètes logarithmiquement convexes.*

Preuve. Traitons le cas $n = 2$, déléguant à l'Exercice 10 (facile) le soin d'écrire la généralisation.

Par symétrie, nous pouvons supposer $I = \{1\}$, $J = \{2\}$. Au lieu de (z_1, z_2) , écrivons $(z, w) \in \mathbb{C}^2$.

Soit $(z, 0) \in \Omega_I$. Puisque tout $(z', 0)$ avec $|z'| \leq |z|$ appartient au domaine de Reinhardt complet Ω , nous voyons que Ω_I est aussi de Reinhardt complet.

Pour vérifier la convexité logarithmique de Ω_I , i.e. celle de Ω_I^* , prenons $(z_1, 0) \in \Omega$ et $(z_2, 0) \in \Omega$ avec $z_1 \neq 0 \neq z_2$, d'où $\log |z_1| \in \log |\Omega_I^*|$ et $\log |z_2| \in \log |\Omega_I^*|$. Par ouverture, $(z_1, w_1) \in \Omega$ et $(z_2, w_2) \in \Omega$, pour $w_1 \neq 0 \neq w_2$ suffisamment proches de $0 \in \mathbb{C}$. Par convexité de $\log |\Omega^*|$, pour tout $0 \leq t \leq 1$, on a :

$$t(\log |z_1|, \log |w_1|) + (1-t)(\log |z_2|, \log |w_2|) \in \log |\Omega^*|,$$

c'est-à-dire :

$$(|z_1|^t |z_2|^{1-t}, |w_1|^t |w_2|^{1-t}) \in |\Omega^*|.$$

Mais comme Ω est de Reinhardt complet, il vient :

$$(|z_1|^t |z_2|^{1-t}, 0) \in |\Omega|,$$

d'où nous déduisons en prenant le logarithme :

$$t \log |z_1| + (1-t) \log |z_2| \in \log |\Omega_I^*|. \quad \square$$

Théorème 11.2. *Pour un domaine de Reinhardt $0 \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ contenant l'origine, les quatre conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) Ω est holomorphiquement convexe, i.e. :

$$K \subset \Omega \text{ compact} \implies \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega \text{ compact.}$$

(ii) Ω est un domaine d'holomorphic.

(iii) Il existe une série entière $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha =: f^l(z)$ possédant $\Omega = D(f^l)$ comme domaine de convergence.

(iv) Ω est de Reinhardt complet et logarithmiquement convexe.

Démonstration. (i) \implies (ii). Implication déjà vue dans le Théorème 10.10 de Cartan-Thullen !

(ii) \implies (iii). Grâce audit Théorème 10.10, il existe $f^l \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui n'est nulle part prolongeable au-delà de $\partial\Omega$. Mais puisque Ω est de Reinhardt, le Théorème 6.6 la développe comme série entière $f^l(z) = \sum a_\alpha z^\alpha$ convergeant dans Ω . Évidemment, f^l se prolonge alors holomorphiquement à $D(\sum a_\alpha z^\alpha)$, domaine de convergence qui ne peut pas déborder de Ω , puisque ce dernier est un domaine d'holomorphic.

(iii) \implies (iv). Le Théorème 6.3 a déjà démontré que $\Omega = D(f^l)$ est de Reinhardt complet et logarithmiquement convexe.

(iv) \implies (i). À chaque point $w \in \mathbb{C}^{*n}$, associons le polydisque ouvert :

$$\Delta^w := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : |z_i| < |w_i|, 1 \leq i \leq n\},$$

ayant pour adhérence :

$$\overline{\Delta}^w = \{|z_i| \leq |w_i|\}.$$

On se convainc aisément (exercice) que l'hypothèse de Reinhardt complétude de Ω permet de le représenter comme :

$$\Omega = \bigcup_{w \in \Omega^*} \Delta^w.$$

Pour établir la convexité holomorphe de Ω , étant donné un compact quelconque $K \subset \Omega$, l'objectif est de faire voir que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \Omega$ est aussi compact.

D'après Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini de points $w_1, \dots, w_M \in \Omega^*$ tels que :

$$K \subset \bigcup_{1 \leq m \leq M} \Delta^{w_m} \subset \bigcup_{1 \leq m \leq M} \overline{\Delta}^{w_m} \subset \Omega,$$

cette dernière réunion finie étant compacte dans Ω . Abrégeons-là comme :

$$L := \bigcup_{1 \leq m \leq M} \overline{\Delta}^{w_m}.$$

Des inclusions $K \subset L \subset \mathbb{C}^n$, nous déduisons :

$$\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \widehat{L}_{\mathcal{O}(\Omega)} \subset \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}.$$

Clairement, $\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)} \subset \text{cvx}(\mathbb{C}^n)$ est compact dans \mathbb{C}^n . Donc comme nous savons que $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ est relativement fermé dans Ω , il suffit de démontrer que :

$$(11.3) \quad \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)} \subset \Omega,$$

puisque ceci impliquera :

$$0 < \text{dist}_{\mathbb{D}^n}(\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}, \partial\Omega) \leq \text{dist}_{\mathbb{D}^n}(\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}, \partial\Omega).$$

En fait, pour éviter de prendre $\log 0 = -\infty$, il est nécessaire de traiter séparément toutes les intersections de Ω avec les plans de coordonnées.

Ainsi, pour tout $J \subset \{1, \dots, n\}$, y compris $J = \emptyset$, avec :

$$I := \{1, \dots, n\} \setminus J,$$

introduisons :

$$\mathbb{C}_I := \mathbb{C}^n \cap \{z_j = 0, \forall j \in J\} \cong \mathbb{C}^{\text{Card } I},$$

$$\mathbb{C}_I^* := \mathbb{C}_I \cap \{z_i \neq 0, \forall i \in I\} \cong \mathbb{C}^{*\text{Card } I}.$$

Pour tout ensemble $E \subset \mathbb{C}^n$, généralisant :

$$E^* = E \cap \{z_1 \neq 0, \dots, z_n \neq 0\},$$

notons :

$$E_I := E \cap \mathbb{C}_I \quad \text{et} \quad E_I^* := E \cap \mathbb{C}_I^*,$$

en convenant pour $I = \emptyset$ que $\mathbb{C}_I^* := \{0\}$. Dans ces conditions :

$$E = \bigcup_I E_I^*.$$

Rappelons que le Lemme 11.1 a démontré que chaque Ω_I est aussi de Reinhardt complet et logarithmiquement convexe.

Proposition 11.4. *Pour toute partition $I \amalg J = \{1, \dots, n\}$:*

$$(\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^* \subset \Omega_I^* \subset \Omega,$$

et de plus :

$$\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)} \subset \Omega.$$

Cette deuxième assertion — notre but (11.3) — découle de la première :

$$\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)} = \bigcup_I (\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^* \subset \Omega.$$

Démonstration de la Proposition 11.4. Traitons d'abord le cas $J = \emptyset$, c'est-à-dire montrons que :

$$(11.5) \quad (\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_{\{1, \dots, n\}}^* = \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^* \subset \Omega^* \subset \Omega.$$

Assertion 11.6. *Pour atteindre (11.5), il suffit de montrer :*

$$(11.7) \quad \log |\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*| \subset \log |\Omega^*|.$$

Preuve. En effet, prenons un point quelconque $\zeta \in \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*$, donc avec $\log |\zeta| \in \log |\Omega^*|$, de telle sorte qu'il existe $z \in \Omega^*$ avec :

$$(\log |\zeta_1|, \dots, \log |\zeta_n|) = (\log |z_1|, \dots, \log |z_n|).$$

Conséquemment, il existe $\theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R}$ tels que — puisque Ω^* est de Reinhardt :

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in \Omega^*. \quad \square$$

Maintenant, résumons la manière dont l'inclusion (11.7) sera atteinte. Introduisons :

$$L^* := \bigcup_{1 \leq m \leq M} \Delta^{w_m^*},$$

ainsi que son image logarithmique, qui est une réunion de $M \geq 1$ quadrants réels fermés $Q_m \subset \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} \log |L^*| &= \bigcup_{1 \leq m \leq M} \{(\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \leq \log |w_{m,1}|, \dots, \xi_n \leq \log |w_{m,n}|\} \\ &=: \bigcup_{1 \leq m \leq M} Q_m \\ &=: Q. \end{aligned}$$

Affirmation 11.8. *On a un diagramme d'inclusions-égalités basé sur deux lemmes qui suivent :*

$$\begin{aligned} \log |\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*| &\stackrel{\text{LM}}{\subset} \mathcal{C}(\log |L^*|) \stackrel{\text{LM}}{=} \text{cvx}(\log |L^*|) \\ &\subset \text{cvx}(\log |\Omega^*|) \stackrel{\text{HYP}}{=} \log |\Omega^*|. \end{aligned}$$

Un premier lemme, issu de la théorie de la convexité réelle, décrit l'enveloppe convexe d'une famille finie quelconque de quadrants fermés. Sa démonstration, qui n'utilise aucun concept « complexe », est repoussée à l'Appendice 13.

Lemme 11.9. *L'enveloppe convexe de $\log |L^*|$ est égale à :*

$$\begin{aligned} \text{cvx}(\log |L^*|) &= \mathcal{C}(\log |L^*|) \\ &:= \{(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \text{pour tous } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ avec } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1, \\ &\quad \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \eta_n \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \lambda_n \log |w_{m,n}|)\}. \quad \square \end{aligned}$$

Explicions alors la première inclusion de cette affirmation.

Lemme 11.10. *On a :*

$$\log |\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*| \subset \mathcal{C}(\log |L^*|).$$

Preuve. Pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ quelconque avec $|\alpha| \geq 1$, considérons la fonction holomorphe monomiale :

$$f(z) := z^\alpha = z_1^{\alpha_1} \dots z_n^{\alpha_n}.$$

Puisque $\overline{\Delta}^{w_m} = \{|z| \leq |w_m|\}$, il vient sur la réunion $L = \bigcup_{1 \leq m \leq M} \overline{\Delta}^{w_m}$:

$$\max_{z \in L} |f(z)| = \max_{1 \leq m \leq M} \max_{z \in \overline{\Delta}^{w_m}} |z^\alpha| \leq \max_{1 \leq m \leq M} |w_m^\alpha|.$$

Maintenant, prenons $\zeta \in \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*$ quelconque. D'après la définition d'enveloppe holomorphe :

$$|\zeta^\alpha| = |f(\zeta)| \leq \max_L |f| \leq \max_{1 \leq m \leq M} |w_m^\alpha|.$$

En passant au logarithme :

$$\alpha_1 \log |\zeta_1| + \dots + \alpha_n \log |\zeta_n| \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\alpha_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \alpha_n \log |w_{m,n}|).$$

Divons alors par $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ et posons $\lambda_i := \frac{\alpha_i}{|\alpha|} \in \mathbb{Q}_+$ pour obtenir :

$$\lambda_1 \log |\zeta_1| + \dots + \lambda_n \log |\zeta_n| \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \lambda_n \log |w_{m,n}|).$$

L'ensemble de tels $\lambda = \frac{\alpha}{|\alpha|} \in \mathbb{Q}_+^n$ étant dense dans $\mathbb{R}_+^n \cap \{x_1 + \dots + x_n = 1\}$, en prenant des limites de suites de Cauchy, nous déduisons que cette inégalité (faible) reste vraie pour tous $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}_+^n$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.

En d'autres termes, l'élément quelconque $\zeta \in \widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)}^*$ a pour image logarithmique :

$$\begin{aligned} (\log |\zeta_1|, \dots, \log |\zeta_n|) &\in \{(\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \text{pour tous } \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0 \text{ avec } \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1 \\ &\quad \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \eta_n \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \lambda_n \log |w_{m,n}|)\} \\ &= \mathcal{C}(\log |L^*|). \end{aligned} \quad \square$$

Grâce à ces deux lemmes, les deux premières inclusion et égalité de l'Affirmation 11.8 sont maintenant justifiées, tandis que la dernière égalité :

$$\text{cvx}(\log |\Omega^*|) \stackrel{\text{HYP}}{=} \log |\Omega^*|.$$

est satisfaite d'après l'hypothèse que Ω est logarithmiquement convexe. Ceci conclut la preuve de (11.7), et simultanément aussi, de (11.5).

Il reste encore à traiter le cas général $1 \leq \text{Card } J \leq n$ de la Proposition 11.4.

Soit donc $J \neq \emptyset$. Le cas $J = \{1, \dots, n\}$ est dégénéré, réduit à $\mathbb{C}_J = \{0\}$, donc supposons $1 \leq \text{Card } J \leq n - 1$. Identifions $\mathbb{C}_J \subset \mathbb{C}^n$ avec $\mathbb{C}^{\text{Card } J}$. La remplaçante de l'Affirmation 11.8 s'énonce alors comme suit.

Affirmation 11.11. Dans $\mathbb{C}_J \cong \mathbb{C}^{\text{Card } J}$, on a le diagramme d'inclusions-égalités :

$$\begin{aligned} \log |(\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_J^*| &\stackrel{\text{LM}}{\subset} \mathcal{C}(\log |L_J^*|) \stackrel{\text{LM}}{=} \text{cvx}(\log |L_J^*|) \\ &\subset \text{cvx}(\log |\Omega_J^*|) \stackrel{\text{HYP}}{=} \log |\Omega_J^*|. \end{aligned}$$

Cette dernière égalité a déjà été anticipée par le Lemme 11.1 qui a fait voir que $\Omega_J \subset \mathbb{C}_J$ est logarithmiquement convexe.

La première égalité est à nouveau le Lemme 11.9 de convexité, mais dans un espace de dimension inférieure $\mathbb{R}^{\text{Card } J}$. Ainsi, il reste seulement à établir la première inclusion. Bien que la démonstration se limite à une répétition, imposons-nous la discipline de l'exécuter.

Lemme 11.12. *On a :*

$$|(\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^*| \subset \mathcal{C}(\log |L_I^*|).$$

Preuve. Après une permutation, on peut supposer que $I = \{1, \dots, \kappa\}$ avec $1 \leq \kappa \leq n$. Prenons alors un point quelconque :

$$\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_\kappa, 0, \dots, 0) \in (\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^*,$$

avec $\zeta_1 \neq 0, \dots, \zeta_\kappa \neq 0$. Abrégeons $z_I := (z_1, \dots, z_\kappa)$, et, pour $1 \leq m \leq M$, notons $w_{m,I} := (w_{m,1}, \dots, w_{m,\kappa})$. Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa) \in \mathbb{N}^\kappa$ avec $|\alpha| \geq 1$, considérons la fonction holomorphe monomiale :

$$f(z) := z_I^\alpha = z_1^{\alpha_1} \cdots z_\kappa^{\alpha_\kappa},$$

vue comme fonction $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$. Rappelons que $w_{m,i} \neq 0$ pour tous $1 \leq m \leq M$ et tous $1 \leq i \leq n$. Sur la réunion $L = \cup_{1 \leq m \leq M} \overline{\Delta}^m$, nous avons :

$$\max_{z \in L} |f(z)| = \max_{1 \leq m \leq M} \max_{z \in \overline{\Delta}^m} |z_I^\alpha| \leq \max_{1 \leq m \leq M} |w_{m,I}^\alpha|.$$

Soit $\zeta_I \in (\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^*$ quelconque, d'où :

$$|\zeta_I^\alpha| \leq \max_L |z_I^\alpha| \leq \max_{1 \leq m \leq M} |w_{m,I}^\alpha|.$$

Logarithmons, divisons, prenons des limites de suites de Cauchy, et déduisons pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_\kappa \in \mathbb{R}_+$ avec $\lambda_1 + \dots + \lambda_\kappa = 1$ que :

$$\lambda_1 \log |\zeta_1| + \dots + \lambda_\kappa \log |\zeta_\kappa| \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \lambda_\kappa \log |w_{m,\kappa}|),$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} (\log |\zeta_1|, \dots, \log |\zeta_\kappa|) &\in \{(\eta_1, \dots, \eta_\kappa) \in \mathbb{R}^\kappa : \text{pour tous } \lambda_1, \dots, \lambda_\kappa \geq 0 \text{ avec } \lambda_1 + \dots + \lambda_\kappa = 1, \\ &\lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_\kappa \eta_\kappa \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 \log |w_{m,1}| + \dots + \lambda_\kappa \log |w_{m,\kappa}|)\} \\ &= \mathcal{C}(\log |L_I^*|). \end{aligned} \quad \square$$

Pour terminer la démonstration de la Proposition 11.4, l'Affirmation 11.11 fournit, pour tout $(\zeta_1, \dots, \zeta_\kappa, 0, \dots, 0) \in (\widehat{L}_{\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)})_I^*$ un élément $(z_1, \dots, z_\kappa, 0, \dots, 0) \in \Omega_I^*$ avec :

$$(\log |\zeta_1|, \dots, \log |\zeta_\kappa|, 0, \dots, 0) = (\log |z_1|, \dots, \log |z_\kappa|, 0, \dots, 0),$$

d'où pour certains $\theta_1, \dots, \theta_\kappa \in \mathbb{R}$ — et puisque Ω_I est de Reinhardt :

$$(\zeta_1, \dots, \zeta_\kappa, 0, \dots, 0) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_\kappa} z_\kappa, 0, \dots, 0) \in \Omega_I. \quad \square$$

Ceci termine la démonstration de la dernière implication (iv) \implies (i) du Théorème 11.2. \square

12. Enveloppes de domaines tubes

Définition 12.1. Un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est appelé *tube* lorsqu'il est de la forme :

$$\Omega = \omega + i\mathbb{R}^n = \{z \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z \in \omega\},$$

pour un certain ouvert connexe $\omega \subset \mathbb{R}^n$.

Le tube associé à un domaine de \mathbb{R}^n sera toujours noté avec la même lettre, mais capitale.

Puisque de nombreux $\omega \subset \mathbb{R}^n$ ne sont pas convexes, le résultat suivant illustre encore de manière frappante le phénomène de prolongeabilité « compulsive » des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes.

Théorème 12.2. *Toutes les fonctions holomorphes dans un domaine tube $\Omega = \omega + i\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^{n \geq 2}$ se prolongent holomorphiquement et uniquement au tube enveloppe convexe :*

$$\tilde{\Omega} = \tilde{\omega} + i\mathbb{R}^n := \text{cvx}(\Omega) = \text{cvx}(\omega) + i\mathbb{R}^n,$$

c'est-à-dire :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! \tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \quad \tilde{f}|_{\Omega} = f.$$

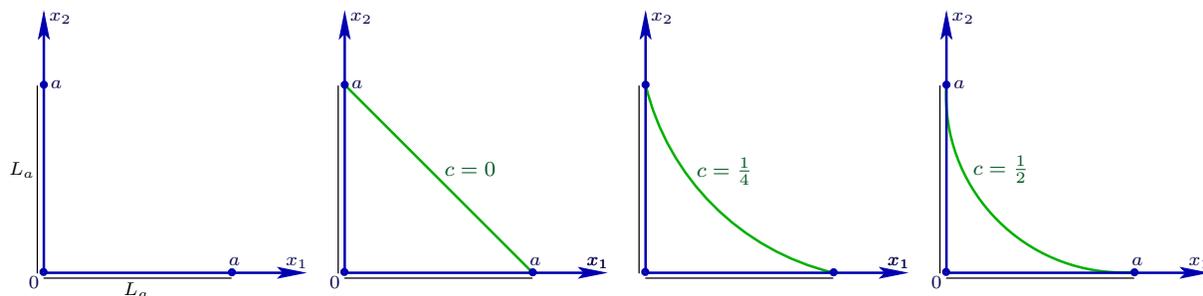
Démonstration. Fixons $a > 0$. Comme prototype d'ensemble non convexe, introduisons deux segments :

$$L_a := \{(x_1, 0, 0, \dots, 0) : 0 \leq x_1 \leq a\} \cup \{(0, x_2, 0, \dots, 0) : 0 \leq x_2 \leq a\},$$

ayant pour enveloppe convexe le triangle :

$$T_a := \text{cvx}(L_a) = \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq a\}.$$

Abrégeons $z' := (z_3, \dots, z_n)$.



Ensuite, pour $0 \leq c \leq \frac{1}{2}$, introduisons dans $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2)$ les cercles $C_{a,c}$ d'équations :

$$a(x_1 + x_2) - c(x_1^2 + x_2^2) = a^2(1 - c),$$

où $C_{a,0}$ dégénère en l'hypothénuse de T_a , et où $C_{a,\frac{1}{2}}$ est tangent aux axes de coordonnées.

Pour $0 < c < \frac{1}{2}$, considérons leur intersection avec le triangle T_a , vu dans $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-2}$:

$$K_{a,c} := \{(x_1, x_2, 0') \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x_1, 0 \leq x_2, x_1 + x_2 \leq a, \\ a(x_1 + x_2) - c(x_1^2 + x_2^2) = a^2(1 - c)\}.$$

Ces $K_{a,c}$ sont des arcs de cercles contenus dans l'intérieur du triangle, excepté les deux extrémités $(1, 0, 0')$ et $(0, 1, 0')$.

Ensuite, introduisons l'élongation suivante de L_a dans les deux premières directions imaginaires :

$$L_{a,c} := \{x + iy \in \mathbb{C}^n : x \in L_a, y_1^2 + y_2^2 \leq \frac{a^2}{c}, y_3 = \dots = y_n = 0\},$$

qui constitue un compact $L_{a,c} \subset \Omega$, lorsque $L_a \subset \omega$.

Lemme 12.3. *Si $\omega \supset T_a = \text{cvx}(L_a)$, alors pour tout $0 < c < \frac{1}{2}$, l'enveloppe Ω -holomorphe de $L_{a,c}$ contient $K_{a,c}$:*

$$\widehat{L_{a,c} \cap \Omega} \supset K_{a,c}.$$

Démonstration. Pour faire voir qu'en tout point $\zeta \in K_{a,c}$, on a :

$$|f(\zeta)| \leq \sup_{L_{a,c}} |f| \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)),$$

l'idée-clé est d'introduire l'ensemble suivant, défini par une équation holomorphe dans le tube au-dessus du triangle T_a :

$$S_{a,c} := \{(z_1, z_2, 0') \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} z_1 \geq 0, \operatorname{Re} z_2 \geq 0, \operatorname{Re} z_1 + z_2 \leq a, \\ a(z_1 + z_2) - c(z_1^2 + z_2^2) = a^2(1 - c)\},$$

lequel est une partie d'une surface de Riemann — variété complexe de dimension 1 — sise dans $\mathbb{C}^2 \times \{0'\}$. Observons au passage que :

$$S_{a,c} \cap \{y_1 = y_2 = 0\} = K_{a,c}.$$

Montrons que $S_{a,c}$ est compact. En effet, des inéquations $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq a$, il découle $0 \leq x_1, x_2 \leq a$, et en prenant la partie réelle de cette équation holomorphe, réécrite comme :

$$c(y_1^2 + y_2^2) = a^2(1 - c) - a(x_1 + x_2) + c(x_1^2 + x_2^2) \\ \leq a^2 - a^2c - 0 + ca^2,$$

il vient $y_1^2 + y_2^2 \leq \frac{a^2}{c}$.

De plus, comme $0 < c < \frac{1}{2}$ et comme $0 \leq x_2^* \leq a$, en tout point $p^* = (z_1^*, z_2^*, 0') \in S_{a,c}$, nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial z_2} \left[a(z_1 + z_2) - c(z_1^2 + z_2^2) \right] \Big|_{p^*} = a - 2cz_2^* \neq 0.$$

Cette non-annulation permet donc d'appliquer le théorème des fonctions implicites holomorphes pour déduire que z_2 est, localement près de p^* , une fonction holomorphe de z_1 .

Alors le principe du maximum montre que $|f|$ ne peut pas atteindre — à moins d'être constante — une valeur maximale en de tels p^* . Par conséquent, dans tous les cas, $|f|$ doit atteindre son maximum sur le bord $\partial S_{a,c}$ de cette surface de Riemann $S_{a,c}$, lequel est contenu dans notre compact (exercice) :

$$\partial S_{a,c} \subset L_{a,c}.$$

En résumé, nous avons établi que :

$$\sup_{\zeta \in S_{a,c}} |f(\zeta)| \leq \sup_{L_{a,c}} |f| \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)),$$

ce qui fait effectivement voir que :

$$\widehat{L_{a,c} \cap \mathcal{O}(\Omega)} \supset S_{a,c} \supset S_{a,c} \cap \{y_1 = y_2 = 0\} = K_{a,c}. \quad \square$$

Revenons maintenant à la démonstration du théorème, qui sera réalisée en deux temps :

- (a) en supposant d'abord la base ω de Ω étoilée par rapport à l'un de ses points ;
- (b) en éliminant ensuite cette hypothèse simplificatrice.

(a). Faisons $0 \in \omega$ après une translation, et supposons que ω est étoilé par rapport à l'origine — donc connexe ! —, c'est-à-dire $x \in \omega$ et $0 \leq t \leq 1$ impliquent $tx \in \omega$. Observons que tout domaine tube $\Omega = \omega + i\mathbb{R}^n$ dont la base ω est 0-étoilée est lui aussi 0-étoilé.

Introduisons :

$$\mathcal{W} := \{\omega_1 \supset \omega \text{ étoilé en } 0 \text{ tel que } \forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! f_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1) \quad f_1|_{\Omega} = f\},$$

ainsi que l'ouvert 0-étoilé :

$$\tilde{\omega} := \bigcup_{\omega_1 \in \mathcal{W}} \omega_1.$$

Assertion 12.4. *Alors :*

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! \tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \quad \tilde{f}|_{\tilde{\Omega}} = f.$$

Démonstration. Étant donné deux ouverts $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{W}$ ainsi que deux fonctions holomorphes $f_1 \in \mathcal{O}(\Omega_1)$ et $f_2 \in \mathcal{O}(\Omega_2)$ qui satisfont :

$$f_1|_{\Omega} = f = f_2|_{\Omega},$$

le fait que $\Omega_1 \cap \Omega_2 \supset \Omega$ est connexe — parce qu'il est étoilé en 0! — garantit, grâce au principe d'identité, que $f_1 = f_2$ dans $\Omega_1 \cap \Omega_2$, ce qui permet de produire une fonction holomorphe bien définie $f_{12} \in \mathcal{O}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ dans la réunion. \square

Proposition 12.5. *L'ouvert $\tilde{\omega} \supset \text{cvx}(\omega)$ est convexe.*

Démonstration. Pour deux vecteurs linéairement indépendants quelconques $v_1, v_2 \in \tilde{\omega} \subset \mathbb{R}^n$, le but est de faire voir que $\tilde{\omega}$ contient aussi le segment $[v_1, v_2]$.

Choisissons des coordonnées $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans lesquelles $v_1 = (1, 0, 0')$ et $v_2 = (0, 1, 0')$ sont les vecteurs unité le long des axes x_1 et x_2 . En fait, nous allons montrer que tout le triangle $T_1 \subset \tilde{\omega}$. En tout cas, puisque $\tilde{\omega}$ est 0-étoilé, les deux côtés-axes L_1 de T_1 issus de 0 sont dans $\tilde{\Omega}$, donc :

$$d := \text{dist}(L_1, \partial\tilde{\Omega}) > 0.$$

Introduisons alors l'ensemble :

$$A := \{0 \leq a \leq 1 : T_a \subset \tilde{\omega}\}.$$

Il est non vide, puisqu'il contient $[0, d[$. Évidemment, il est ouvert dans $[0, 1]$, et comme $T_a \subset T_{a'}$ pour $a \leq a'$, c'est nécessairement un segment, ou bien $[0, a_*[$ ou bien $[0, a_*]$.

Assertion 12.6. *Le réel $a_* := \sup_A a$ appartient à A .*

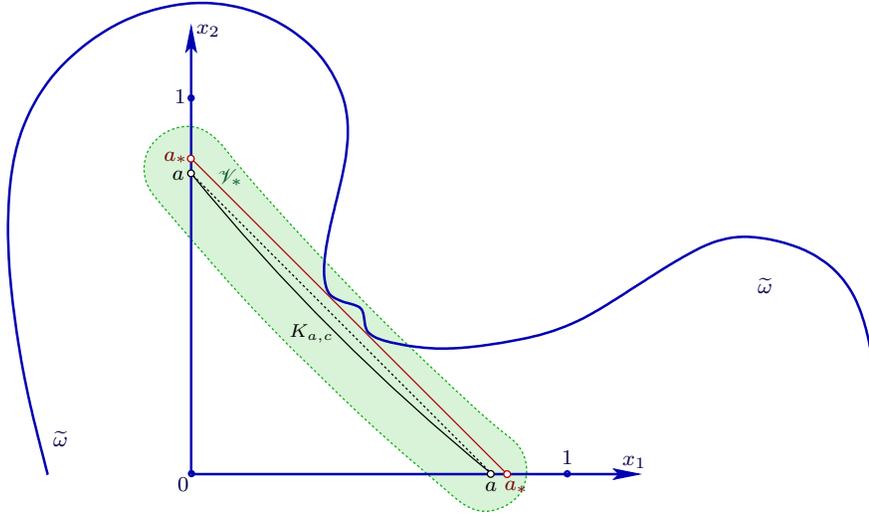
Preuve. Soit $a < a_*$ arbitrairement proche de a_* , et soit $c > 0$ arbitrairement proche de 0. Comme $T_a \subset \tilde{\omega}$, le Lemme 12.3 s'applique :

$$\widehat{L}_{a,c}^{\mathcal{O}(\tilde{\Omega})} \supset K_{a,c}.$$

Ensuite, en observant que :

$$\text{dist}(L_a, \partial\tilde{\Omega}) \geq \text{dist}(L_1, \partial\tilde{\Omega}) = d > 0,$$

le Corollaire 10.7 donne, en tout point $\zeta \in K_{a,c}$, de la forme $\zeta = \xi + i\eta$ avec $\zeta = (\xi_1, \xi_2, 0')$ et $\eta = 0$, la convergence de la série entière $T_{\zeta}^{\infty}(f)(z)$ pour tout z dans le polydisque $\{|z - \zeta| < d\}$ de toutes les fonctions holomorphes $f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$.



Enfin, puisque $a \sim a_*$ et $c \sim 0$, indépendamment de $d > 0$, le voisinage ouvert :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{a,c} &:= \bigcup_{\xi \in K_{a,c}} \{(x_1, x_2, x') : \max(|x_1 - \xi_1|, |x_2 - \xi_2|, |x'|) < d\} \\ &\supset \mathcal{V}_* \supset \{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 = a_*, x' = 0\}, \end{aligned}$$

contient un voisinage ouvert régulier \mathcal{V}_* dans \mathbb{R}^n de la diagonale-limite. Toutes les constructions étant invariantes par translation verticale le long des directions imaginaires, la réunion :

$$\tilde{\Omega} \cup \bigcup_{\eta \in \mathbb{R}^n} (\mathcal{V}_* + i\eta),$$

encore étoilée par rapport à l'origine, contient *strictement* $\tilde{\Omega}$, contredisant sa maximalité. \square

Ainsi, $A = [0, a_*]$. Puisque A est aussi ouvert dans $[0, 1]$, il est nécessaire par connexité de $[0, 1]$ que $a_* = 1$, d'où la conclusion $T_1 \subset \tilde{\omega}$, qui clôt la proposition et le cas simplifié **(a)** du théorème. \square

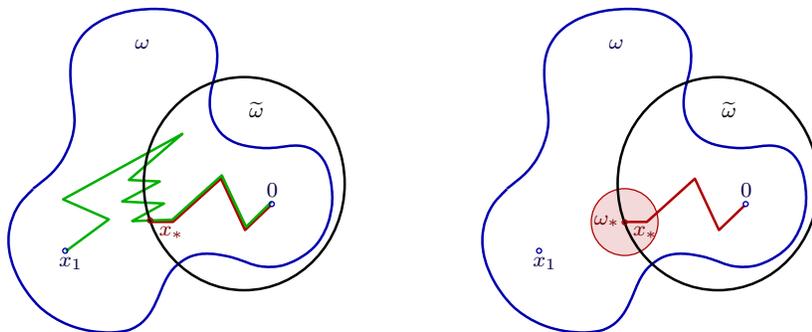
(b) Soit maintenant $\omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert non vide quelconque. On peut supposer $0 \in \omega$. Désignons par $\tilde{\Omega}$ le plus grand domaine tube à base $\tilde{\omega}$ étoilée par rapport à 0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists! \tilde{f} \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega}) \quad \tilde{f} = f \text{ près de } 0.$$

Grâce à la partie **(a)** de la démonstration, $\tilde{\omega}$ doit être convexe.

Assertion 12.7. $\tilde{\omega} \supset \omega$.

Preuve. Sinon, il existe un point $x_1 \in \omega \setminus \tilde{\omega}$.



Puisque ω est connexe, nous pouvons joindre x_1 à 0 au moyen d'une courbe continue polygonale (finie) contenue dans ω . Soit alors $x_* \in \partial\tilde{\omega} \cap \omega$ sa dernière intersection avec $\partial\tilde{\omega}$.

En repartant de 0 vers x_1 , nous obtenons que x_* est connecté à 0 au moyen d'une courbe continue qui, excepté x_* , est entièrement contenue dans $\tilde{\omega} \cap \omega$.

Ensuite, soit $\omega_* \ni x_*$ un voisinage ouvert *convexe* de x_* dans \mathbb{R}^n avec $\omega_* \subset \omega$. Alors la fonction :

$$g := \begin{cases} \tilde{f} & \text{dans } \tilde{\Omega}, \\ f & \text{dans } \Omega_*, \end{cases}$$

est définie de manière unique et est holomorphe dans $\tilde{\Omega} \cap \Omega_*$, le domaine tube de base $\tilde{\omega} \cup \omega_*$.

Astuce renversante et magique ! La convexité assure (exercice mental) que la réunion $\tilde{\omega} \cup \omega_*$ est étoilée par rapport à x_* !

Alors la partie (a) de la démonstration offre la conclusion que g se prolonge holomorphiquement au tube de base $\text{cvx}(\tilde{\omega} \cup \omega_*)$, lequel est non seulement étoilé par rapport à x_* , mais aussi (exercice mental) par rapport à 0 ! Double magie ! Back is magical !

Tout ceci contredit manifestement la définition par maximalité de $\tilde{\Omega}$. □

En définitive, $\tilde{\Omega} \supset \Omega$. Pour terminer, comme $\tilde{f} = f$ près de 0, le principe d'identité nous offre $\tilde{f} = f$ partout dans Ω , ce qui conclut le théorème. □

13. Appendice : Enveloppes convexes d'unions finies de quadrants dans \mathbb{R}^n

Rappelons que l'enveloppe convexe d'un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est :

$$\text{cvx}(E) := \bigcap_{\substack{C \supset E \\ \text{convexe}}} C.$$

On démontre que cette enveloppe consiste en toutes les combinaisons barycentriques d'un nombre fini de points de E :

$$\text{cvx}(E) = \left\{ \mu_1 \xi_1 + \cdots + \mu_H \xi_H : H \geq 1, \xi_1, \dots, \xi_H \in E, \mu_1, \dots, \mu_H \in \mathbb{R}_+, \mu_1 + \cdots + \mu_H = 1 \right\}.$$

Lorsque $E = K \subset \mathbb{R}^n$ est compact, il est connu que $\text{cvx}(K)$ est aussi compact, et qu'elle coïncide avec l'intersection de tous les demi-sous-espaces fermés contenant K :

$$\text{cvx}(K) = \bigcap_{\Lambda \neq \emptyset} \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \sup_K \Lambda \right\},$$

où les $\Lambda \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ sont des formes linéaires $\Lambda(\eta) = \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_n \eta_n$, à coefficients $\lambda_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls.

Toutefois, comme propose de s'en convaincre l'Exercice 11, il n'est *pas* toujours vrai que $\text{cvx}(E)$ est fermée lorsque $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé, ce qui conduit à prendre l'adhérence $\overline{\text{cvx}(E)}$. Alors un théorème connu montre que :

$$\overline{\text{cvx}(E)} = \bigcap_{\Lambda \neq 0} \{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \sup_E \Lambda \},$$

où à nouveau $\Lambda \in \text{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Pour des domaines de Reinhardt, le cas spécial utile est celui où E consiste en une réunion finie de $M \geq 1$ quadrants réels allant vers $-\infty$ dans toutes les directions d'axes :

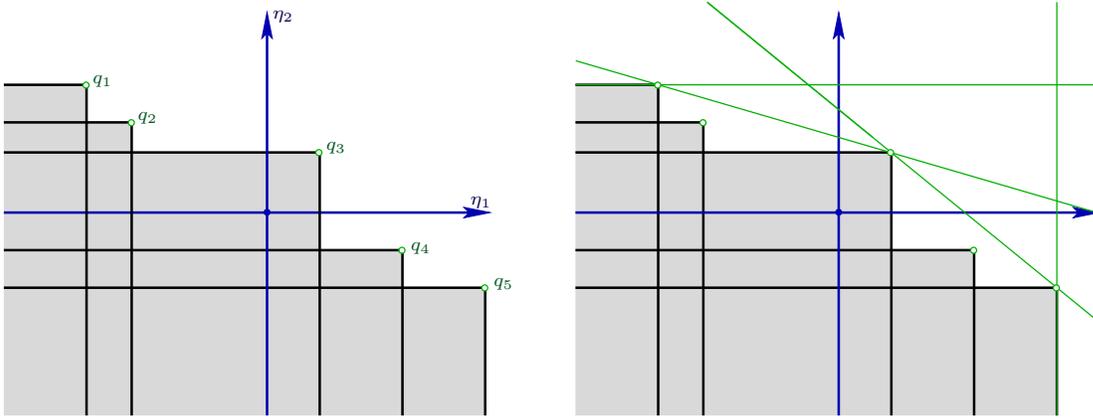
$$E = Q := \bigcup_{1 \leq m \leq M} Q_m = \bigcup_{1 \leq m \leq M} \{ \xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \leq q_{m,1}, \dots, \xi_n \leq q_{m,n} \},$$

avec certains sommets $q_1, \dots, q_M \in \mathbb{R}^n$.

Le même Exercice 11, propose de montrer que l'enveloppe convexe de tels Q est toujours *fermée* :

$$(13.1) \quad \text{cvx}(Q) = \overline{\text{cvx}(Q)} = \bigcap_{\Lambda \neq 0} \{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \sup_Q \Lambda \}.$$

De plus, la proposition suivante montre que les coefficients λ_i des formes linéaires Λ employées pour déterminer $\overline{\text{cvx}(Q)}$ peuvent être supposés tous ≥ 0 .



Proposition 13.2. L'enveloppe convexe d'une réunion finie $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_M$ de quadrants $Q_m \subset \mathbb{R}^n$ de sommets $q_m \in \mathbb{R}^n$:

$$Q = \bigcup_{1 \leq m \leq M} \{ \xi_1 \leq q_{m,1}, \dots, \xi_n \leq q_{m,n} \},$$

est fermée et égale à :

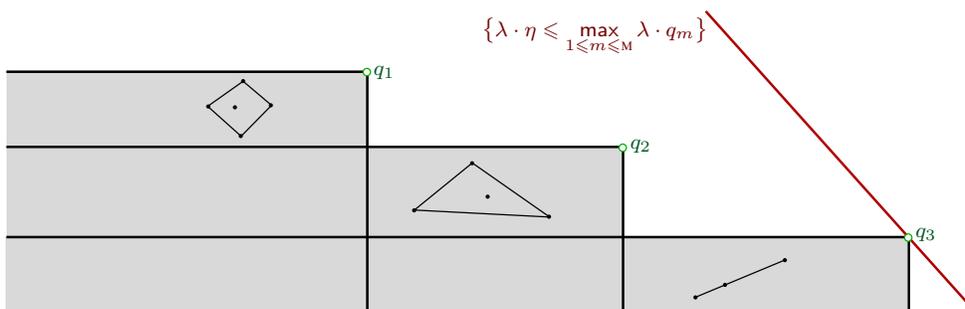
$$\text{cvx}(Q) = \mathcal{C}(Q) = \{ (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbb{R}^n : \text{pour tous } \lambda_1, \dots, \lambda_n \text{ avec } \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1, \\ \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_n \eta_n \leq \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 q_{m,1} + \cdots + \lambda_n q_{m,n}) \}.$$

Dès que l'on sait la positivité de tous les $\lambda_i \geq 0$, en revenant à (13.1), observons pour expliquer la proposition que :

$$\begin{aligned} \sup_Q \Lambda &= \max_{1 \leq m \leq M} \sup_{Q_m} \Lambda \\ &= \max_{1 \leq m \leq M} \sup \{ \lambda_1 \xi_{m,1} + \cdots + \lambda_n \xi_{m,n} : \xi_{m,1} \leq q_{m,1}, \dots, \xi_{m,n} \leq q_{m,n} \} \\ &= \max_{1 \leq m \leq M} (\lambda_1 q_{m,1} + \cdots + \lambda_n q_{m,n}). \end{aligned}$$

Démonstration. Commençons par établir l'inclusion $\text{cvx}(Q) \subset \mathcal{C}(Q)$.

Soit $\eta = \mu_1 \xi_1 + \cdots + \mu_H \xi_H \in \text{cvx}(Q)$, avec $H \geq 1$ et avec $\mu_1, \dots, \mu_H \geq 0$ satisfaisant $\mu_1 + \cdots + \mu_H = 1$. On peut supposer tous les $\mu_h > 0$.



Après renumérotation, avec $H = h_1 + \cdots + h_M$, on a :

$$\xi_1^1, \dots, \xi_{h_1}^1 \in Q_1, \dots, \xi_1^M, \dots, \xi_{h_M}^M \in Q_M.$$

Alors si nous récrivons :

$$\eta = (\mu_1^1 + \cdots + \mu_{h_1}^1) \left[\frac{\mu_1^1 \xi_1^1 + \cdots + \mu_{h_1}^1 \xi_{h_1}^1}{\mu_1^1 + \cdots + \mu_{h_1}^1} \right] + \cdots + (\mu_1^M + \cdots + \mu_{h_M}^M) \left[\frac{\mu_1^M \xi_1^M + \cdots + \mu_{h_M}^M \xi_{h_M}^M}{\mu_1^M + \cdots + \mu_{h_M}^M} \right],$$

cette combinaison s'abrège comme :

$$\eta = \underline{\mu}_1 \underline{\xi}_1 + \cdots + \underline{\mu}_M \underline{\xi}_M,$$

avec $\underline{\mu}_1, \dots, \underline{\mu}_M \geq 0$ satisfaisant $\underline{\mu}_1 + \cdots + \underline{\mu}_M = 1$, et avec des $\underline{\xi}_m \in Q_m$ qui appartiennent aux quadrants correspondants, puisque ces derniers sont convexes.

Par conséquent, nous pouvons supposer que $H = M$, que $\xi_m \in Q_m$, que $\mu_m \geq 0$ avec $\mu_1 + \cdots + \mu_M = 1$, à savoir :

$$\eta = \mu_1 \xi_1 + \cdots + \mu_M \xi_M.$$

Bien entendu :

$$\xi_{m,1} \leq q_{m,1}, \dots, \xi_{m,n} \leq q_{m,n} \quad (1 \leq m \leq M)$$

Pour achever de montrer que $\eta \in \mathcal{C}(Q)$, calculons :

$$\begin{aligned} \lambda_1 \eta_1 + \cdots + \lambda_n \eta_n &= \lambda_1 (\mu_1 \xi_{1,1} + \cdots + \mu_M \xi_{M,1}) + \cdots + \lambda_n (\mu_1 \xi_{1,n} + \cdots + \mu_M \xi_{M,n}) \\ &= \mu_1 [\lambda_1 \xi_{1,1} + \cdots + \lambda_n \xi_{1,n}] + \cdots + \mu_M [\lambda_1 \xi_{M,1} + \cdots + \lambda_n \xi_{M,n}] \\ &\leq \max \left\{ \lambda_1 \xi_{1,1} + \cdots + \lambda_n \xi_{1,n}, \dots, \lambda_1 \xi_{M,1} + \cdots + \lambda_n \xi_{M,n} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \lambda_1 q_{1,1} + \cdots + \lambda_n q_{1,n}, \dots, \lambda_1 q_{M,1} + \cdots + \lambda_n q_{M,n} \right\}. \end{aligned}$$

Établissons maintenant l'inégalité inverse $\text{cvx}(Q) \supset \mathcal{C}(Q)$.

Pour tout $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \notin \text{cvx}(Q)$, le but est de montrer que $\zeta \notin \mathcal{C}(Q)$. Grâce au critère de séparation par un hyperplan — qui s'applique car l'enveloppe $\text{cvx}(Q) = \overline{\text{cvx}(Q)}$ est fermée (Exercice 11) —, il existe une forme linéaire non nulle $\Lambda(\eta) = \lambda_1 \eta_1 + \dots + \lambda_n \eta_n$ à coefficients $\lambda_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls telle que :

$$\zeta \notin \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \sup_Q \Lambda \right\},$$

c'est-à-dire :

$$\sup_Q \Lambda < \Lambda(\zeta).$$

Certains $\lambda_i < 0$ peuvent-ils être strictement négatifs ? Non ! parce que, en tenant compte du fait que Q est une réunion de quadrants $\cong \mathbb{R}_-^n$, si on fait $-\infty \leftarrow \eta_i$, d'où $\lambda_i \eta_i \rightarrow \infty$ si on avait $\lambda_i < 0$, ceci contredirait $\sup_Q \Lambda < \Lambda(\zeta) < \infty$.

Ainsi, tous les $\lambda_i \geq 0$. Mais si nous remplaçons $\lambda_i \mapsto \frac{\lambda_i}{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}$, de somme égale à 1, nous parvenons à :

$$\begin{aligned} \zeta \notin \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \sup_Q \Lambda \right\} \\ = \left\{ \eta \in \mathbb{R}^n : \Lambda(\eta) \leq \max_{1 \leq m \leq M} \Lambda(q_m) \right\}, \end{aligned}$$

ce qui veut bien dire $\zeta \notin \mathcal{C}(Q)$. □

14. Exercices

Exercice 1. Par le calcul, vérifier que :

$$\begin{aligned} d &= \partial + \bar{\partial}, \\ 0 &= \partial \circ \partial, \\ 0 &= \bar{\partial} \circ \bar{\partial}, \\ 0 &= \partial \circ \bar{\partial} + \bar{\partial} \circ \partial. \end{aligned}$$

Exercice 2. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, pour tout compact $K \Subset \Omega$, pour tout ouvert $K \Subset V_K \Subset \Omega$, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, montrer qu'il existe des constantes $B_\alpha = B_{K, V_K, \alpha} < \infty$ telles que :

$$\max_K |\partial^\alpha f| \leq B_\alpha \|f\|_{L^1(V_K)} \quad (\forall f \in \mathcal{O}(\Omega)).$$

Exercice 3. Trouver une figure de Hartogs bien placée pour déduire le Théorème de Hurwitz du Théorème de Hartogs.

Exercice 4. Dans \mathbb{C}^n avec $n \geq 1$, pour des rayons $0 < R_j < \infty$ et $0 < r_j < R_j$ avec $1 \leq j \leq n$ on considère l'ouvert produit d'anneaux :

$$A_{r,R} := \{z \in \mathbb{C}^n : r_j < |z_j| < R_j\}.$$

Montrer que toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(A_{r,R})$ admet un développement de Laurent :

$$f(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n} c_\nu z^\nu,$$

qui converge uniformément sur les compacts $K \Subset A_{r,R}$, et dont les coefficients sont donnés, quel que soit le choix de rayons intermédiaires $r_j < \rho_j < R_j$, par :

$$c_\nu = \frac{1}{(2i\pi)^n} \int_{|\zeta_1|=\rho_1} \dots \int_{|\zeta_n|=\rho_n} \frac{f(\zeta_1, \dots, \zeta_n)}{\zeta_1^{\nu_1+1} \dots \zeta_n^{\nu_n+1}} d\zeta_1 \dots d\zeta_n,$$

Exercice 5. Montrer que l'intersection d'un nombre fini d'ouverts Hartogs-pseudoconvexes dans \mathbb{C}^n est encore Hartogs-pseudoconvexe.

Exercice 6. Soit $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots \subset \Omega_j \subset \dots$ une suite croissante d'ouverts Hartogs-pseudoconvexes dans \mathbb{C}^n . Montrer que $\bigcup_j \Omega_j$ est encore Hartogs-pseudoconvexe.

Exercice 7. Détailler la démonstration du Théorème 1.11. **Indication:** Quitte à rapetisser $r > 0$, le fait que $\partial\Omega$ soit de classe \mathcal{C}^∞ permet de translater légèrement $A(\mathbb{D}_r) + v$, où $v \in \mathbb{R}^{2n}$ est un vecteur de norme $|v| \ll r$, afin d'avoir $A(\overline{\mathbb{D}}_r) + v \Subset \Omega$. Un épaississement adéquat permet alors de produire une figure de Hartogs entièrement contenue dans Ω .

Exercice 8. Dans \mathbb{C}^2 , soit $f(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^2} c_\alpha z^\alpha$ une série entière qui converge dans des voisinages ouverts de $(\frac{1}{2}, 1)$ et de $(1, \frac{1}{2})$. Montrer que $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ appartient au domaine de convergence $D(f)$ de f . **Indication:** Regarder deux points dans $\log |D^*|$.

Exercice 9. Montrer qu'un ouvert $\Omega = \bigcup_{a \in A} \Omega_a$ de \mathbb{C}^n décomposé en ses composantes connexes Ω_a est un domaine d'holomorphic, au sens de la Définition 9.1, si et seulement si toutes les Ω_a le sont.

Exercice 10. Traiter le cas général de la dimension $n \geq 2$ du Lemme 11.1.

Exercice 11. (a) Trouver un exemple d'ensemble fermé $E \subset \mathbb{R}^2$ dont l'enveloppe convexe $\text{cvx}(E)$ n'est pas fermée.

(b) Montrer que l'enveloppe convexe d'une réunion finie $Q = \bigcup_{1 \leq m \leq M} Q_m$ de quadrants $Q_m = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \xi_1 \leq q_{m,1}, \dots, \xi_n \leq q_{m,n}\}$ ayant pour sommets des points $q_1, \dots, q_M \in \mathbb{R}^n$, est fermée.

Exercice 12. Dans un ouvert de Reinhardt, montrer que l'enveloppe holomorphe $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ d'un compact de Reinhardt $K \subset \Omega$, à savoir satisfaisant :

$$(z_1, \dots, z_n) \in K \implies \left((e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n) \in K, \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_n \in \mathbb{R} \right),$$

est encore un sous-ensemble (relativement fermé) de Reinhardt de Ω .

Exercice 13. EE

Domaines pseudoconvexes, Fonctions pluri-sous-harmoniques

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Domaines à bords lisses dans \mathbb{R}^d

Soit $d \geq 1$ un entier, et soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées canoniques sur \mathbb{R}^d . Rappelons que le *bord* d'un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ est par définition l'ensemble des points qui 'hésitent' entre E et son complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus E$, i.e. dont tout voisinage intersecte E et $\mathbb{R}^d \setminus E$. Autrement dit (exercice) :

$$\partial E := \overline{E} \setminus \text{Int } E.$$

Pour $E = \Omega \subset \mathbb{R}^d$ égal à un ouvert :

$$\partial \Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega.$$

Pour un entier $1 \leq \kappa \leq \infty$, la classe \mathcal{C}^κ désigne les fonctions κ fois continûment différentiables. Par convention, pour $\kappa = \omega$, elle désigne la classe des fonctions analytiques réelles, c'est-à-dire partout localement développables en série entière convergente.

Définition 2.1. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à *bord lisse* de classe \mathcal{C}^κ avec $1 \leq \kappa \leq \infty, \omega$ en un point $p \in \partial \Omega$ s'il existe un voisinage ouvert $U \ni p$ de p dans \mathbb{R}^d , et une fonction de classe \mathcal{C}^κ :

$$r: U \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{avec } dr(p) \neq 0,$$

tels que :

$$\begin{aligned} \Omega \cap U &= \{x \in U: r(x) < 0\}, \\ \partial \Omega \cap U &= \{x \in U: r(x) = 0\}. \end{aligned}$$

Une telle fonction r est appelée *fonction définissante locale* de $\partial \Omega$ en p .

Sans démonstrations, rappelons quelques énoncés de géométrie différentielle élémentaire. Par convention, $\infty - 1 = \infty$ et $\omega - 1 = \omega$.

Lemme 2.2. Si $s: V \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $V \ni p$ ouvert est une autre fonction \mathcal{C}^κ avec $ds(p) \neq 0$ et $\Omega \cap V = \{s < 0\}$ ainsi que $\partial \Omega \cap V = \{s = 0\}$, alors il existe un sous-voisinage ouvert $p \in W \subset U \cap V$ et une fonction $\lambda: W \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lambda(p) > 0$ de classe $\mathcal{C}^{\kappa-1}$ telle que :

$$s(x) = \lambda(x) r(x) \quad (\forall x \in W). \quad \square$$

Le théorème des fonctions implicites montre alors que $\partial\Omega$ est une hypersurface réelle de classe \mathcal{C}^κ dans un voisinage assez petit de p .

Définition 2.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est dit à *bord lisse de classe \mathcal{C}^κ* s'il l'est en tout point $p \in \partial\Omega$.

Grâce à des partitions de l'unité, il est alors possible de recoller des fonctions définissantes locales en des points de $\partial\Omega$, puis de globaliser la fonction définissante.

Théorème 2.4. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *Le bord $\partial\Omega$ est \mathcal{C}^κ -lisse en chacun de ses points $p \in \partial\Omega$.*

(ii) *Il existe une fonction \mathcal{C}^κ globale :*

$$r: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x \in \mathbb{R}^d: r(x) < 0\}, \\ \partial\Omega &= \{x \in \mathbb{R}^d: r(x) = 0\} \quad \text{et} \quad dr(p) \neq 0 \quad \forall p \in \partial\Omega. \end{aligned} \quad \square$$

Cette dernière condition de non-annulation de la différentielle de r en tout point du bord est *essentielle*, parce qu'elle garantit, grâce au théorème des fonctions implicites, que $\partial\Omega$ est une *hypersurface lisse* — sous-variété de codimension 1 — de classe $\mathcal{C}^{\kappa-1}$ de \mathbb{R}^d .

La géométrie différentielle élémentaire nous apprend alors qu'en un point quelconque $p \in \partial\Omega$, l'espace tangent s'écrit :

$$T_p\partial\Omega = \left\{v \in \mathbb{R}^n: 0 = dr(p)(v) = \frac{\partial r}{\partial x_1}(p) v_1 + \cdots + \frac{\partial r}{\partial x_d}(p) v_d\right\}.$$

Si $\Omega = \{s < 0\}$ avec $\partial\Omega = \{s = 0\}$ pour une autre telle fonction globale $s: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$, une version globale du lemme qui précède fournit une fonction $\lambda: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\lambda(p) \neq 0$ pour tout $p \in \partial\Omega$ telle que :

$$s(x) = \lambda(x) \cdot r(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d),$$

d'où par différentiation en un point quelconque $p \in \partial\Omega = \{r = 0\}$:

$$ds(p) = d\lambda(p) \cdot \underline{r(p)} + \lambda(p) \cdot dr(p),$$

ce qui montre que cette définition de l'espace tangent ne dépend pas de la fonction définissante globale choisie :

$$T_p\partial\Omega = \{\partial r(p)(v) = 0\} = \{\partial s(p)(v) = 0\}.$$

Lemme 2.5. *En tout point $p \in \partial\Omega$ du bord d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ à bord lisse de classe \mathcal{C}^κ , il existe des coordonnées affines centrées $x = (x_1, \dots, x_{d-1}, x_d)$ avec $x(p) = 0$, avec $T_p\partial\Omega = \{x_d = 0\}$, et il existe une fonction $h = h(x_1, \dots, x_{d-1})$ de classe $\mathcal{C}^{\kappa-1}$ définie dans un voisinage ouvert de l'origine dans \mathbb{R}^{d-1} telle que, près de p :*

$$\begin{aligned} \Omega &= \{x_d < h(x_1, \dots, x_{d-1})\}, \\ \partial\Omega &= \{x_d = h(x_1, \dots, x_{d-1})\}. \end{aligned} \quad \square$$

3. Inéquation locale pour un bord de domaine dans \mathbb{C}^n

Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord lisse $\partial\Omega \in \mathcal{C}^{\kappa \geq 1}$, et soit un point quelconque :

$$p_0 \in M := \partial\Omega.$$

Après une transformation affine, nous pouvons supposer que les coordonnées $(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ sont centrées en $p_0 = 0$ qui devient l'origine et telles que :

$$T_{p_0}M = \{y_n = 0\}.$$

Le théorème des fonctions implicites permet alors de représenter localement le bord M de ce domaine comme graphe au-dessus de son espace tangent horizontal $T_{p_0}M$:

$$\begin{aligned} M: & \quad \{y_n = F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)\}, \\ \Omega: & \quad \{0 > -y_n + F(x_1, \dots, x_{n-1}, y_1, \dots, y_{n-1}, x_n)\}, \end{aligned}$$

au moyen d'une certaine fonction locale F de classe \mathcal{C}^κ par rapport à ses $(2n-1)$ variables réelles. Comme l'espace tangent à l'origine a été redressée en $\{y_n = 0\}$, il vient :

$$0 = F(0) = F_{x_1}(0) = \dots = F_{x_{n-1}}(0) = F_{y_1}(0) = \dots = F_{y_{n-1}}(0) = F_{x_n}(0).$$

Il sera utile d'abrégier :

$$z' := (z_1, \dots, z_{n-1}), \quad x' := (x_1, \dots, x_{n-1}), \quad y' := (y_1, \dots, y_{n-1}),$$

et il est alors naturel de prendre pour fonction définissante implicite locale de $\Omega = \{r < 0\}$:

$$r(x, y) := -y_n + F(x', y', x_n).$$

Le lemme suivant montre que l'on peut toujours *normaliser* les termes d'ordre 2 en (x', y') dans la fonction graphante F de manière à ce qu'il ne reste qu'une forme hermitienne diagonale en (z_1, \dots, z_{n-1}) . Cette forme hermitienne, que nous redéfinirons plus tard et que nous appellerons *forme de Levi*, jouera un rôle absolument fondamental dans la théorie des fonctions de plusieurs variables complexes.

Théorème 3.1. *Il existe des coordonnées holomorphes locales $(z', z_n) = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n)$ centrées en $p_0 = 0 \in M$ dans lesquelles Ω est localement représenté par l'inéquation :*

$$0 > -y_n + \varepsilon_1 |z_1|^2 + \dots + \varepsilon_{n-1} |z_{n-1}|^2 + O_{x', y'}(3) + x_n O_{x', y', x_n}(1),$$

où :

$$\varepsilon_j \in \{-1, 0, +1\} \quad (1 \leq j \leq n-1).$$

Ici, la notation $O_{x', y'}(3)$ désigne une fonction-reste qui ne dépend que des variables (x', y') et est d'ordre ≥ 3 à l'origine. En négligeant les restes, le bord de Ω s'identifie à une simple quadrique d'équation :

$$y_n = \varepsilon_1 |z_1|^2 + \dots + \varepsilon_{n-1} |z_{n-1}|^2.$$

Quand tous les $\varepsilon_j = 1$, le domaine $\{y_n > |z_1|^2 + \dots + |z_{n-1}|^2\}$ est strictement convexe dans toutes les directions z_j .

Démonstration. En spécifiant la forme générale des termes d'ordre 2 en (x', y') , nous pouvons écrire l'équation du bord $M = \partial\Omega$ comme :

$$y_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(4a_{i,j} x_j x_k + 4b_{i,j} x_j y_k + 4c_{j,k} y_j y_k \right) + O_{x', y'}(3) + x_n O_{x', y', x_n}(1),$$

au moyen de certaines constantes réelles $a_{j,k}, b_{j,k}, c_{j,k} \in \mathbb{R}$, avec par exemple $b_{j,k} := \frac{1}{4} \frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y_k}(0)$, et il n'est pas nécessaire pour la suite d'arranger les symétries $a_{k,j} = a_{j,k}$ et $c_{k,j} = c_{j,k}$. Le facteur 4 est placé à l'avance pour disparaître lorsqu'on exprime cette partie quadratique en fonction des z_\bullet et des \bar{z}_\bullet :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(a_{j,k} (z_j + \bar{z}_j) (z_k + \bar{z}_k) - b_{j,k} \sqrt{-1} (z_j + \bar{z}_j) (z_k - \bar{z}_k) - c_{j,k} (z_j - \bar{z}_j) (z_k - \bar{z}_k) \right) = \\ & = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \left(z_j z_k [a_{j,k} - \sqrt{-1} b_{j,k} - c_{j,k}] + \right. \\ & \quad \left. + \bar{z}_j z_k [a_{j,k} + a_{k,j} + \sqrt{-1} b_{j,k} - \sqrt{-1} b_{k,j} + c_{j,k} + c_{k,j}] + \right. \\ & \quad \left. + \bar{z}_j \bar{z}_k [a_{j,k} + \sqrt{-1} b_{j,k} - c_{j,k}] \right), \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître de nouvelles constantes complexes $\alpha_{j,k} \in \mathbb{C}$ et $\varepsilon_{j,k} \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\frac{z_n - \bar{z}_n}{2\sqrt{-1}} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{j,k} z_j z_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{j,k} \bar{z}_j z_k + \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\alpha_{j,k}} \bar{z}_j \bar{z}_k + O_{x',y'}(3) + x_n O_{x',y',x_n}(1).$$

Il n'est pas nécessaire d'assurer les symétries $\alpha_{k,j} = \alpha_{j,k}$, mais il importe d'observer (exercice visuel) l'hermitianité :

$$\overline{\varepsilon_{k,j}} = \varepsilon_{j,k} \quad (1 \leq j, k \leq n).$$

Pour faire disparaître du membre de droite les termes quadratiques holomorphes purs en $z_\bullet z_\bullet$, en les déplaçant à gauche :

$$\frac{z_n - 2\sqrt{-1} \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} z_j z_k - (\bar{z}_n + 2\sqrt{-1} \sum_j \sum_k \overline{\alpha_{j,k}} \bar{z}_j \bar{z}_k)}{2\sqrt{-1}} = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{j,k} \bar{z}_j z_k + \text{restes}$$

nous voyons qu'il suffit d'effectuer le biholomorphisme quadratique :

$$\underline{z}_1 := z_1, \dots, \underline{z}_{n-1} := z_{n-1}, \underline{z}_n := z_n - 2\sqrt{-1} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{j,k} z_j z_k,$$

pour atteindre :

$$\underline{y}_n = \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_{j,k} \bar{\underline{z}}_j \underline{z}_k + \text{restes}.$$

Mais quelle est alors la forme de ces nouveaux restes ? Puisqu'il est tout d'abord évident que :

$$O_{x',y'}(3) = O_{\underline{x}',\underline{y}'}(3),$$

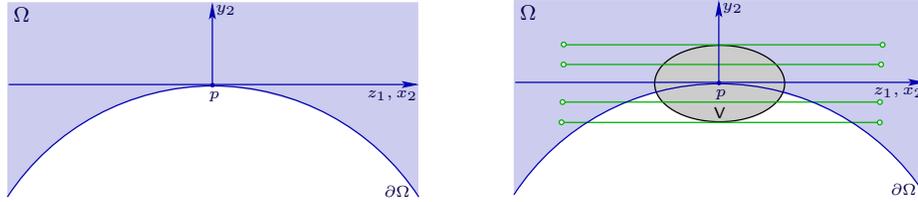
un calcul simple pour le deuxième reste montre qu'il conserve aussi la même forme :

$$\begin{aligned} x_n O_{x',y',x_n}(1) &= (\underline{x}_n + O_{\underline{x}',\underline{y}'}(2)) (O_{\underline{x}',\underline{y}'}(1) + \underline{x}_n O_{\underline{x}',\underline{y}',\underline{x}_n}(0)) \\ &= O_{\underline{x}',\underline{y}'}(3) + \underline{x}_n O_{\underline{x}',\underline{y}',\underline{x}_n}(1). \end{aligned}$$

Pour terminer, une transformation \mathbb{C} -linéaire appropriée $\underline{z}' \mapsto H' \cdot \underline{z}'$ normalise la forme hermitienne $\sum_j \sum_k \varepsilon_{j,k} \bar{\underline{z}}_j \underline{z}_k$ de manière à la rendre diagonale. \square

4. Phénomène d'extension de Levi

Nous avons déjà vu qu'une figure de Hartogs bien placée permettait de prolonger toutes les fonctions holomorphes au-delà du bord de certains domaines.



Quand l'un des $\varepsilon_j = -1$ du Théorème 3.1 qui précède est strictement négatif, il est alors possible de placer un petit disque tangentielllement au bord du domaine de manière à ce qu'il soit contenu — excepté l'unique point de contact qui est son centre — dans le domaine, et alors des épaissements appropriés de ce petit disque produisent un analogue de la figure de Hartogs.

Théorème 4.1. [Levi 1909] Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 2}$ à bord lisse $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$, localement représenté en un des points de son bord par l'inéquation :

$$y_n > \varepsilon_1 |z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} |z_{n-1}|^2 + O_{x',y'}(3) + x_n O_{x',y',x_n}(1).$$

S'il y a un entier $1 \leq j_* \leq n-1$ avec :

$$\varepsilon_{j_*} = -1,$$

alors il existe un voisinage ouvert $V \ni 0$ tel que :

$$\forall f \in \mathcal{O}(\Omega) \quad \exists ! F \in \mathcal{O}(\Omega \cup V) \quad F|_{\Omega} = f.$$

Plus tard, ces ε_j seront réinterprétés comme des valeurs propres d'une certaine forme hermitienne intrinsèque sur l'espace tangent complexe $T_0^{\mathbb{C}} \partial\Omega$, mais avant d'en venir à cette conceptualisation, il est préférable de transmettre les idées géométriques concrètes.

L'énoncé et les arguments de preuve sont tout aussi vrais en supposant seulement $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, car il suffit de remplacer partout $O_{x',y'}(3)$ par $o_{x',y'}(2)$.

Démonstration. Détaillons seulement le cas $n = 2$, puisque le cas général $n \geq 2$ s'en déduit par modifications symboliques mineures. Ainsi Ω est défini par l'inéquation :

$$y_2 > -|z_1|^2 + O_{x_1,y_1}(3) + x_2 O_{x_1,y_1}(1) + O_{x_2}(2).$$

Pour $r > 0$ petit, nous affirmons alors que les disques holomorphes définis, pour $z \in \mathbb{D}$ dans le disque unité, par :

$$A_{z_2}(z) := (rz, z_2)$$

ont un bord $A_{z_2}(\partial\mathbb{D}) \subset \Omega$ entièrement contenu dans le domaine, pour tout $z_2 \in \mathbb{C}$ assez petit. En effet, demandons pour fixer les idées que :

$$|x_2| < \frac{1}{2} r^2, \quad |y_2| < \frac{1}{2} r^2,$$

et constatons que l'inégalité, pour $|z| = 1$, donc pour $|z_1| = r$:

$$(4.2) \quad y_2 + |z_1|^2 = y_2 + r^2 > \frac{1}{2} r^2 \stackrel{?}{>} O(r^3) + O(r^2) O(r) + O(r^4),$$

est effectivement satisfaite par $r > 0$ assez petit.

Comme dans la démonstration du théorème de Hartogs, la formule de Cauchy permet alors de prolonger holomorphiquement :

$$f(z_1, z_2) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta, z_2)}{\zeta - z_1} d\zeta,$$

cela dans l'ouvert :

$$\{|z_1| < r, |x_2| < \frac{1}{2} r^2, |y_2| < \frac{1}{2} r^2\} =: V. \quad \square$$

Les paragraphes qui suivent sont alors consacrés à des rappels préliminaires à une conceptualisation plus intrinsèque de cette hypothèse spéciale « $\varepsilon_{j_*} = -1$ ».

5. Champs de vecteurs et formes différentielles sur \mathbb{R}^d

Soit $d \geq 1$ un entier, soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées réelles canoniques sur \mathbb{R}^d et soit un ouvert $U \subset \mathbb{R}^d$. Les champs de vecteurs réels et les formes différentielles réelles de classe $\mathcal{C}^{\kappa \geq 1}$ sur U s'écrivent :

$$L = \sum_{i=1}^d \ell_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \omega = \sum_{i=1}^d \omega_i(x) dx_i,$$

avec des fonctions-coefficients $\ell_i, \omega_i \in \mathcal{C}^{\kappa}(U, \mathbb{R})$.

Évidemment :

$$\omega(L) = \sum \omega_i \ell_i.$$

Complexifions la situation, *i.e.* tensorisons avec \mathbb{C} pour obtenir $TU \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ et $T^*U \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, avec des coefficients à valeurs complexes, décomposés en parties réelles et imaginaires :

$$\ell_i(x) = \ell'_i(x) + \sqrt{-1} \ell''_i(x) \quad \text{et} \quad \omega_i(x) = \omega'_i(x) + \sqrt{-1} \omega''_i(x),$$

d'où :

$$L = L' + \sqrt{-1} L'' \quad \text{et} \quad \omega = \omega' + \sqrt{-1} \omega''.$$

Évidemment :

$$\omega(L) = \omega'(L') - \omega''(L'') + \sqrt{-1} (\omega'(L'') + \omega''(L')).$$

En particulier, $\sqrt{-1}$ est une constante librement déplaçable :

$$\omega(\sqrt{-1} L) = \sqrt{-1} \omega(L).$$

De plus l'opérateur de différentiation extérieure satisfait :

$$d(\omega' + \sqrt{-1} \omega'') = d\omega' + \sqrt{-1} d\omega''.$$

Tout ceci vaut aussi pour des formes différentielles de degrés supérieurs.

Rappelons que pour $0 \leq k \leq d$ entier, une k -forme différentielle de classe $\mathcal{C}^{\kappa \geq 1}$ sur $U \subset \mathbb{R}^d$ ouvert s'écrit :

$$\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \omega_{i_1, \dots, i_k}(x) dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k},$$

et souvenons-nous qu'elle a pour différentielle extérieure :

$$d\omega := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq d} \sum_{j=1}^d \frac{\partial \omega_{i_1, \dots, i_k}}{\partial x_j}(x) dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}.$$

La commutativité de Schwarz donne (calcul de révision) :

$$d \circ d = 0.$$

Ensuite, soit un autre ouvert $V \subset \mathbb{R}^d$ muni de coordonnées $y = (y_1, \dots, y_d)$, et soit une application de classe \mathcal{C}^κ :

$$\begin{aligned} \phi: V &\longrightarrow U \\ y &\longmapsto x = \phi(y). \end{aligned}$$

La *tirée en arrière* $\phi^*(\omega)$ d'une 1-forme différentielle $\omega = \omega(x, dx)$ sur U est par définition la 1-forme différentielle :

$$\phi^*(\omega) := \sum_{i=1}^d \omega_i(\phi(y)) d(\phi_i(y)) = \sum_{i=1}^d \omega_i(\phi(y)) \sum_{j=1}^d \frac{\partial \phi_i}{\partial y_j}(y) dy_j,$$

et il y a une formule analogue pour les k -formes différentielles.

L'extension aux formes à valeurs complexes est simple :

$$\phi^*(\omega' + \sqrt{-1}\omega'') = \phi^*(\omega') + \sqrt{-1}\phi^*(\omega'').$$

Par conséquent, la conjugaison complexe commute avec l'opération de tirer en arrière :

$$\begin{aligned} \overline{\phi^*(\omega' + \sqrt{-1}\omega'')} &= \overline{\phi^*(\omega') + \sqrt{-1}\phi^*(\omega'')} \\ &= \phi^*(\omega') - \sqrt{-1}\phi^*(\omega'') \\ &= \phi^*(\omega' - \sqrt{-1}\omega''). \end{aligned}$$

Souvenons-nous que la barre de conjugaison ne touche ni $\phi^*(\cdot)$ ni $d(\cdot)$.

6. Champs de vecteurs et formes différentielles sur \mathbb{C}^n

Maintenant, en dimension $d = 2n$ soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ à bord $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\kappa$ au moins deux fois continûment différentiable. D'après ce qui précède, il existe une fonction $r: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\Omega = \{r < 0\}$ avec $\partial\Omega = \{r = 0\}$ et avec $dr(p) \neq 0$ quel que soit $r(p) = 0$.

Il s'agit maintenant d'analyser l'interaction de la géométrie complexe ambiante de \mathbb{C}^n avec la géométrie réelle de de l'hypersurface \mathcal{C}^κ :

$$M := \partial\Omega.$$

Commençons par analyser la structure complexe du fibré tangent de \mathbb{C}^n lui-même. Les paragraphes qui vont suivre ont beau sembler élémentaires et simples, nous conseillons de les étudier en profondeur.

Pour $i = 1, \dots, n$, notons $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ les coordonnées complexes canoniques de \mathbb{C}^n , de telle sorte que x_i, y_i sont des coordonnées réelles sur $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$. Aussi, notons $T\mathbb{C}^n \cong T\mathbb{R}^{2n}$ le fibré tangent *réel* à \mathbb{C}^n .

Par définition, la structure complexe standard de $T\mathbb{C}^n$ agit sur les champs de vecteurs unitaires le long des axes comme le ferait une multiplication par $\sqrt{-1}$:

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) := \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{et} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) := -\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Après extension de J par \mathbb{R} -linéarité, nous obtenons un automorphisme de fibré $J: T\mathbb{C}^n \rightarrow T\mathbb{C}^n$ qui satisfait $J^2 = -\text{Id}$.

Introduisons aussi le fibré vectoriel *complexe* $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^n$. On vérifie (exercice) que c'est une somme directe :

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} T\mathbb{C}^n = T^{1,0}\mathbb{C}^n \oplus T^{0,1}\mathbb{C}^n,$$

de deux fibrés complexes fondamentaux ayant pour fibres respectives, en un point quelconque $p \in \mathbb{C}^n$:

$$T_p^{1,0}\mathbb{C}^n := \{X_p - \sqrt{-1}J(X_p) : X_p \in T_p\mathbb{C}^n\},$$

$$T_p^{0,1}\mathbb{C}^n := \{X_p + \sqrt{-1}J(X_p) : X_p \in T_p\mathbb{C}^n\},$$

d'où par conjugaison $\overline{T^{1,0}\mathbb{C}^n} = T^{0,1}\mathbb{C}^n$, et de plus $\{0\} = T^{1,0}\mathbb{C}^n \cap T^{0,1}\mathbb{C}^n$.

Pour $1 \leq i \leq n$, introduisons les champs de vecteurs :

$$\frac{\partial}{\partial z_i} := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} := \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial}{\partial y_i},$$

ainsi que les différentielles :

$$dz_i := dx_i + \sqrt{-1} dy_i, \quad d\bar{z}_i := dx_i - \sqrt{-1} dy_i.$$

Les sections locales de $T^{1,0}\mathbb{C}^n$ et de $T^{0,1}\mathbb{C}^n$ s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n \ell_i(x, y) \frac{\partial}{\partial z_i} \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n b_i(x, y) \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i},$$

avec des fonctions-coefficients ℓ_i et b_i de classe \mathcal{C}^κ dans leurs domaines de définition. Les sections locales de $T^{*1,0}\mathbb{C}^n$ et de $T^{*0,1}\mathbb{C}^n$ s'écrivent :

$$\sum_{i=1}^n \omega_i(x, y) dz_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n \varpi_i(x, y) d\bar{z}_i.$$

Puisque les transformations biholomorphes locales de \mathbb{C}^n :

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (h_1(z_1, \dots, z_n), \dots, h_n(z_1, \dots, z_n)) =: (z'_1, \dots, z'_n)$$

stabilisent les dz_\bullet et les $d\bar{z}_\bullet$:

$$dz'_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial h_i}{\partial z_k} dz_k \quad \text{et} \quad d\bar{z}'_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

les formes différentielles avec p fois dz_\bullet et q fois $d\bar{z}_\bullet$:

$$\eta := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} \omega_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_q}(x, y) dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}$$

conservent une invariante, et sont appelées pour cette raison des (p, q) -formes.

Sur des fonctions $\chi = \chi(x, y)$, définissons premièrement :

$$\partial\chi := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial z_k} dz_k \quad \text{et} \quad \bar{\partial}\chi := \sum_{k=1}^n \frac{\partial \chi}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k,$$

et deuxièmement sur des (p, q) -formes générales :

$$\begin{aligned} \partial\eta &:= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial z_k} dz_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}, \\ \bar{\partial}\eta &:= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_q \leq n} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \omega_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_q}. \end{aligned}$$

La commutativité de Schwarz donne :

$$0 = \partial \circ \bar{\partial} = \bar{\partial} \circ \partial,$$

et puisque :

$$d = \partial + \bar{\partial},$$

il vient :

$$\partial \circ \bar{\partial} = -\bar{\partial} \circ \partial.$$

7. Espaces tangents complexes à une hypersurface réelle lisse $M^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$

Soit à nouveau $M = \partial\Omega = \{r = 0\}$ une hypersurface de \mathbb{C}^n qui est le bord lisse de classe \mathcal{C}^κ d'un domaine $\Omega = \{r < 0\}$. En un point $p \in M$, l'espace tangent réel à M s'écrit :

$$T_p M = \left\{ (v', v'') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : 0 = \sum_i v'_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(p) + \sum_i v''_i \frac{\partial r}{\partial y_i}(p) \right\}.$$

Comme la différentielle $dr(p) \neq 0$ ne s'annule pas, il existe au moins un indice i tel que $\frac{\partial r}{\partial x_i}(p) \neq 0$ ou $\frac{\partial r}{\partial y_i}(p) \neq 0$, donc cette équation est celle d'un hyperplan réel non-dégénéré $\cong \mathbb{R}^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Avec l'observation simple :

$$2 \operatorname{Re} \left[(v'_i + \sqrt{-1} v''_i) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial r}{\partial x_i}(p) - \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{\partial r}{\partial y_i}(p) \right) \right] = v'_i \frac{\partial r}{\partial x_i}(p) + v''_i \frac{\partial r}{\partial y_i}(p),$$

nous pouvons aussi réécrire l'équation de cet espace tangent comme :

$$0 = 2 \operatorname{Re} \sum_i \frac{\partial r}{\partial z_i}(p) v_i,$$

ce qui motive de supprimer cette partie réelle.

Définition 7.1. L'espace tangent complexe en un point $p \in M$ de l'hypersurface M est :

$$T_p^{\mathbb{C}} M := \left\{ v \in \mathbb{C}^n : 0 = \sum_i \frac{\partial r}{\partial z_i}(p) v_i \right\}.$$

Comme il existe un indice i tel que $\frac{\partial r}{\partial z_i}(p) \neq 0$, il est clair que $T_p^{\mathbb{C}} M \cong \mathbb{C}^{n-1}$ est un hyperplan complexe non-dégénéré de \mathbb{C}^n . Quand nous écrivons $v \in T_p^{\mathbb{C}} M$, nous sous-entendons le point de base de v .

Nous affirmons que cet espace tangent complexe est un vrai concept mathématique, à savoir qu'il ne dépend pas du choix de la fonction définissante r et qu'il est invariant par biholomorphismes.

Lemme 7.2. Si $s = \lambda r$ avec $\lambda > 0$ sur $M = \partial\Omega$ est une autre fonction définissante de $\Omega = \{r < 0\} = \{s < 0\}$, alors en tout point $p \in M$:

$$\left\{ v \in \mathbb{C}^n : 0 = \sum_i \frac{\partial s}{\partial z_i}(p) v_i \right\} = \left\{ v \in \mathbb{C}^n : 0 = \sum_i \frac{\partial r}{\partial z_i}(p) v_i \right\}.$$

Démonstration. Puisque $r(p) = 0$, quand on différentie $s = \lambda r$ par rapport à z_i , le premier terme disparaît :

$$\frac{\partial s}{\partial z_i}(p) = \frac{\partial \lambda}{\partial z_i}(p) \underline{r(p)}_o + \lambda(p) \frac{\partial r}{\partial z_i}(p),$$

et comme $\lambda(p) > 0$ est non nul, l'ensemble des zéros est le même. \square

Lemme 7.3. Si $h: w \mapsto h(w) =: z$ est un biholomorphisme local $\mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$:

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{h} & h(N) = M \\ & \searrow^{s:=r \circ h} & \downarrow r \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

qui transforme l'hypersurface réelle $M = \{r = 0\}$ en l'hypersurface :

$$h^{-1}M = \{s := r \circ h = 0\},$$

alors sa matrice jacobienne holomorphe dh fait se correspondre les espaces tangents complexes :

$$dh(T^{\mathbb{C}}h^{-1}M) = T^{\mathbb{C}}M.$$

Démonstration. À nouveau, la vérification est simple. Grâce à la règle de la chaîne, une différentiation de $s(w) = r(h(w))$ par rapport à w_i donne :

$$\frac{\partial s}{\partial w_i} = \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j} \frac{\partial h_j}{\partial w_i} + \sum_j \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial \bar{h}_j}{\partial w_i}.$$

Pour $u \in T^{\mathbb{C}}N$ quelconque, nous pouvons donc insérer, réorganiser :

$$0 = \sum_i \frac{\partial s}{\partial w_i} u_i = \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j} \left(\sum_i \frac{\partial h_j}{\partial w_i} u_i \right) =: \sum_j \frac{\partial r}{\partial z_j} v_j,$$

et reconnaître le vecteur $v := dh(u)$ transformé de u par la jacobienne holomorphe de h . \square

8. Forme de Levi de bords lisses $M = \partial\Omega$ de domaines $\Omega \subset \mathbb{C}^n$

Maintenant que la structure différentielle du bord à l'ordre 1 est comprise grâce la conceptualisation des espaces tangents complexes $T^{\mathbb{C}}\partial\Omega$, il s'agit d'étudier la structure différentielle à l'ordre 2 des bords lisses de domaines dans \mathbb{C}^n .

Soit donc un ouvert $\Omega = \{r < 0\}$ représenté par une inéquation définissante locale ou globale. Sur le bord $M = \{r = 0\}$, la différentielle de r s'annule :

$$0 = dr|_M = (\partial r + \bar{\partial} r)|_M,$$

simplement parce que r y vaut constamment zéro ! Une correction par le facteur multiplicatif $-\sqrt{-1}$ fait alors voir que la forme différentielle intrinsèque :

$$-\sqrt{-1} \partial r|_M = \sqrt{-1} \bar{\partial} r|_M$$

est *réelle*.

Cette forme différentielle est définie à multiplication par une fonction réelle > 0 près, puisqu'en remplaçant r par une autre fonction définissante $s = \lambda r$ avec $\lambda > 0$ comme précédemment, il vient :

$$-\sqrt{-1} \partial s|_M = \lambda (-\sqrt{-1} \partial r|_M).$$

Pour atteindre l'ordre 2, prenons-en la différentielle extérieure :

$$d(-\sqrt{-1} \partial r) = (\partial + \bar{\partial})(-\sqrt{-1} \partial r) = \sqrt{-1} \partial \bar{\partial} r.$$

Définition 8.1. Sur un vecteur tangent complexe $v \in T^{\mathbb{C}}\partial\Omega$, la *forme (hermitienne) de Levi* a pour valeur :

$$\sqrt{-1} \partial \bar{\partial} r(-\sqrt{-1} v \wedge \bar{v}) = \partial \bar{\partial} r(v \wedge \bar{v}).$$

Un simple calcul :

$$\partial\bar{\partial}r = \partial \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} dz_j \wedge d\bar{z}_k,$$

agrémenté d'une connaissance de géométrie différentielle :

$$\begin{aligned} dz_j \wedge d\bar{z}_k (v \wedge \bar{v}) &= dz_j(v) d\bar{z}_k(\bar{v}) - \underline{d\bar{z}_k(v)} \cdot \underline{dz_j(\bar{v})} \\ &= v_j \bar{v}_k, \end{aligned}$$

conduit à la formule fondamentale :

$$\partial\bar{\partial}r(v \wedge \bar{v}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k.$$

Lemme 8.2. *Le changement de fonction définissante $s = \lambda r$ donne, en un point $p \in M = \partial\Omega$ et pour tout vecteur tangent complexe $v \in T_p^{\mathbb{C}}M$:*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) v_j \bar{v}_k = \lambda(p) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) v_j \bar{v}_k.$$

Preuve. Comme $v \in T_p^{\mathbb{C}}M$, il vient après conjugaison :

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} v_j \quad \text{et} \quad 0 = \sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k} \bar{v}_k.$$

Différentions une première fois $s = \lambda r$:

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{z}_k} = \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} r_{\circ} + \lambda \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k},$$

puis une deuxième fois :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} = \frac{\partial^2 \lambda}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} r_{\circ} + \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} \frac{\partial r}{\partial z_j} + \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k} + \lambda \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}.$$

Comme $r = 0$ au point $p \in M$, observons que le premier terme disparaît, sommons, et constatons l'annulation conclusive :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial \bar{z}_k} \bar{v}_k \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} v_j \right) + \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda}{\partial z_j} v_j \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_k} \bar{v}_k \right) + \\ &+ \lambda \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k. \quad \square \end{aligned}$$

Cette *forme de Levi* est clairement une forme hermitienne sur $T_p^{\mathbb{C}}M \cong \mathbb{C}^{n-1}$, et le fait que l'ambiguïté $r \mapsto \lambda r$ respecte, via $\lambda > 0$, le fait que Ω est d'un côté bien défini de l'hypersurface $M = \partial\Omega$ garantit que l'on peut parler de son nombre de valeurs propres > 0 , et de son nombre de valeurs propres < 0 . Redéfinissons-la concrètement.

Définition 8.3. La *forme de Levi* d'un domaine $\Omega = \{r < 0\}$ à bord de classe au moins \mathcal{C}^2 est :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p), v_j \bar{v}_k \quad (p \in M, v \in T_p^{\mathbb{C}}M).$$

Il est aussi possible de la polariser, en prenant deux vecteurs tangents complexes quelconques $v, w \in T_p^{\mathbb{C}}M$:

$$\begin{aligned} \partial\bar{\partial}r(v \wedge \bar{w}) &:= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{w}_k \\ &= (\bar{w}_1 \ \cdots \ \bar{w}_n) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_1 \partial z_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial z_1} & \cdots & \frac{\partial^2 r}{\partial \bar{z}_n \partial z_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $T_p^{\mathbb{C}}M \cong \mathbb{C}^{n-1}$, ceci doit plutôt être entendu comme une forme hermitienne à $(n-1)$ variables, ce qui devient plus transparent en revenant à l'équation normalisée locale du bord.

Observation 8.4. Si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ a pour inéquation normalisée :

$$0 > r := -y_n + \varepsilon_1 |z_1|^2 + \cdots + \varepsilon_{n-1} |z_{n-1}|^2 + O_{x',y'}(3) + x_n O_{x',y',x_n}(1),$$

alors à l'origine $T_0^{\mathbb{C}}\partial\Omega = \mathbb{C}^{n-1} \times \{0\}$ et sur des vecteurs $v = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0)$, la forme de Levi a pour matrice hermitienne réduite :

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \varepsilon_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Preuve. Puisque $v_n = 0$, il suffit de connaître au point-origine $p = 0$ les dérivées croisées $\frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(0)$ pour $1 \leq j, k \leq n-1$, et leurs valeurs sont immédiatement visibles. \square

La forme de Levi jouit d'une invariance remarquable vis-à-vis des transformations bi-holomorphes de \mathbb{C}^n .

Lemme 8.5. Sous les mêmes hypothèses que le Lemme 7.3, la forme de Levi de l'ouvert $h^{-1}(\Omega) = \{s = r \circ h < 0\}$ en un vecteur tangent complexe quelconque $u \in T^{\mathbb{C}}h^{-1}M$ coïncide avec la forme de Levi de l'ouvert $\Omega = \{r < 0\}$ en le vecteur $v := dh(u)$ transformé par la matrice jacobienne holomorphe :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \bar{w}_k}(w) u_j \bar{u}_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(h(w)) v_j \bar{v}_k.$$

Démonstration. En effet, différentions $s(w) \equiv r(h(w))$ une fois puis une deuxième fois :

$$\frac{\partial s}{\partial \bar{w}_k} = \sum_i \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{w}_k}, \quad \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \bar{w}_k} = \sum_i \sum_{\ell} \frac{\partial^2 r}{\partial z_{\ell} \partial \bar{z}_i} \frac{\partial h_{\ell}}{\partial w_j} \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{w}_k},$$

afin de sommer :

$$\begin{aligned} \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 s}{\partial w_j \partial \bar{w}_k} u_j \bar{u}_k &= \sum_i \sum_{\ell} \frac{\partial^2 r}{\partial z_{\ell} \partial \bar{z}_i} \sum_j \frac{\partial h_{\ell}}{\partial w_j} u_j \sum_k \frac{\partial \bar{h}_i}{\partial \bar{w}_k} \bar{u}_k \\ &= \sum_i \sum_{\ell} \frac{\partial^2 r}{\partial z_{\ell} \partial \bar{z}_i} v_{\ell} \bar{v}_i, \end{aligned}$$

pour reconnaître le vecteur transformé $v = dh(u)$ ainsi que son conjugué. \square

Ainsi, l'hypothèse d'existence d'une valeur propre strictement négative $\varepsilon_{j_*} = -1$ dans le Théorème 4.1 était invariante et concernait la forme de Levi au point de référence.

Définition 8.6. Un domaine $\Omega = \{r < 0\} \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ lisse au moins deux fois continûment différentiable est dit *pseudoconvexe au sens de Levi* lorsque sa forme de Levi est ≥ 0 en tout point $p \in \partial\Omega$:

$$0 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_j} v_j \implies \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(p) v_j \bar{v}_k \geq 0 \quad (\forall p \in \partial\Omega).$$

Par un argument simple, Levi a donc établi en 1909 que la *non*-pseudoconvexité ouvrait la porte de Pandore à un phénomène d'extension de Hartogs. Au contraire, lorsque $\partial\Omega$ est pseudoconvexe, l'argument de contrôle par termes quadratiques dans l'inégalité (4.2) *échoue*. D'ailleurs, on démontre qu'il est impossible de placer des disques holomorphes locaux analogues à ceux de Levi — voire plus généraux, non plats, courbés — de manière à prolonger toutes les fonctions holomorphes au-delà de $\partial\Omega$ au moyen de la formule de Cauchy.

Problème de Levi 8.7. *Étant donné un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à bord $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ pseudoconvexe, existe-t-il une fonction holomorphe $f^i \in \mathcal{O}(\Omega)$ qui ne se prolonge holomorphiquement au-delà de $\partial\Omega$ en aucun point $p \in \partial\Omega$?*

Autrement dit :

Problème 8.8. *Tout domaine Levi-pseudoconvexe est-il un domaine d'holomorphicité ?*

9. Plurisousharmonicité de la fonction $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega)$

Dans le chapitre sur les fonctions sous-harmoniques, nous avons démontré qu'une fonction semi-continue supérieurement $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est sous-harmonique si et seulement si :

$$\forall z_0 \in \Omega \quad \forall r > 0 \text{ avec } \mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega \quad \forall p \in \mathbb{C}[z] \\ \left(u(z_0 + \tau) \leq \text{Re } p(z_0 + \tau) \quad \forall |\tau| = r \right) \implies \left(u(z_0 + \tau) \leq \text{Re } p(z_0 + \tau) \quad \forall |\tau| \leq r \right).$$

Nous allons maintenant utiliser ce critère, lequel présente l'avantage de ne requérir que des polynômes, holomorphes dans \mathbb{C} entier — donc dans Ω .

Par ailleurs, dans le chapitre sur les domaines d'holomorphicité, nous avons démontré que dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ qui est d'holomorphicité, pour tout compact $K \subset \Omega$, si une fonction $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ satisfait :

$$|f(z)| \leq \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad (\forall z \in K),$$

alors elle satisfait aussi en tout point de l'enveloppe holomorphe $\widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}$ de K :

$$|f(\zeta)| \leq \text{dist}(\zeta, \mathbb{C} \setminus \Omega) \quad (\forall \zeta \in \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}).$$

Ici, la fonction distance $\text{dist} = \text{dist}_{\mathbb{D}^n}$ est calculée par rapport à la norme standard :

$$|z| := \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|.$$

Une grande contribution d'Oka fut de découvrir la sous-harmonicité de la restriction à toutes les droites affines complexes de la fonction :

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega) = -\log \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega), \end{aligned}$$

qui est continue (exercice).

Plus précisément, pour tout $z_0 \in \Omega$ et tout vecteur complexe tangent non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega \cong \mathbb{C}^n$, soit la droite affine :

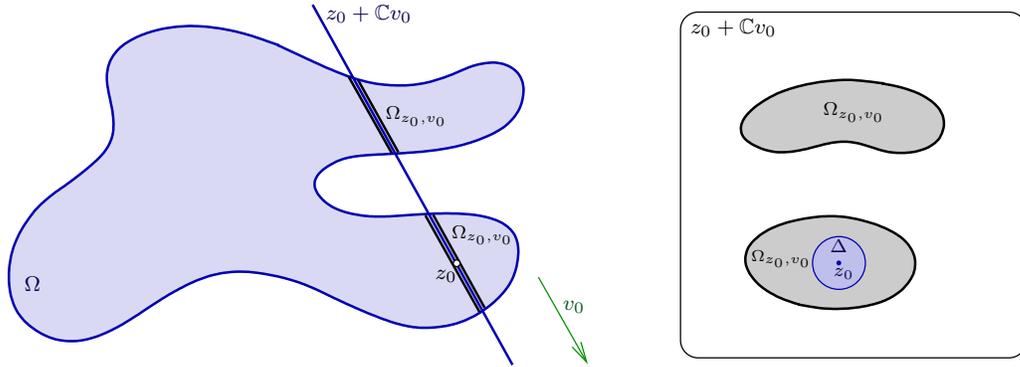
$$z_0 + \mathbb{C}v_0 := \{z_0 + \tau v_0 : \tau \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{C}.$$

Elle intersecte l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ en un certain sous-ouvert non vide de \mathbb{C} :

$$\Omega_{z_0, v_0} := \Omega \cap (z_0 + \mathbb{C}v_0).$$

Même lorsque Ω est connexe, ces Ω_{z_0, v_0} ne sont pas forcément connexes. Comme on peut changer librement de centre sur une droite affine :

$$\forall z_1 \in \Omega_{z_0, v_0} \quad \Omega_{z_1, v_0} = \Omega_{z_0, v_0}.$$



Théorème 9.1. [Oka 1942] Si un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un domaine d'holomorphic, alors en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout vecteur non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$, la fonction :

$$\begin{aligned} \Omega_{z_0, v_0} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) \end{aligned}$$

est continue et sous-harmonique dans Ω_{z_0, v_0} .

Démonstration. La continuité étant laissée en exercice, on peut, quitte à recentrer en un point quelconque $z_1 \in \Omega_{z_0, v_0}$, supposer que $z_1 = z_0$, et chercher à vérifier le critère rappelé ci-dessus.

Soit donc $r > 0$ tel que le disque fermé de rayon r dans la droite complexe $z_0 + \mathbb{C}v_0$ est contenu dans Ω_{z_0, v_0} :

$$\overline{\Delta} := \{z_0 + \tau v_0 : |\tau| \leq r\} \subset \Omega_{z_0, v_0} \subset \Omega.$$

Comme la restriction à ce disque Δ de toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ est une fonction holomorphe de la variable complexe $\tau \in \mathbb{C}$ continue sur $\overline{\Delta}$ qui satisfait le principe du maximum au bord :

$$\max_{|\tau| \leq r} |f(z_0 + \tau v_0)| = \max_{|\tau| = r} |f(z_0 + \tau v_0)|,$$

il est clair que :

$$\widehat{\partial\Delta}_{\mathcal{O}(\Omega)} \supset \overline{\Delta}.$$

En direction du critère, soit un polynôme $p \in \mathbb{C}[\tau]$ satisfaisant sur le bord de Δ :

$$-\log \text{dist}(z_0 + \tau v_0, \partial\Omega) \leq \text{Re } p(\tau) \quad (\forall |\tau| = r).$$

Puisqu'on peut trouver (exercice) un polynôme $P \in \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ à n variables tel que :

$$P(z_0 + \tau v_0) \equiv p(\tau) \quad (\text{dans } \mathbb{C}[\tau]),$$

en exponentiant, il vient :

$$|e^{-P(z)}| \leq \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) \quad (\forall z \in \partial\Delta),$$

donc la fonction holomorphe $e^{-P(z)} \in \mathcal{O}(\Omega)$ dans le domaine d'holomorphic Ω satisfait la même inégalité dans l'enveloppe :

$$|e^{-P(\zeta)}| \leq \text{dist}(\zeta, \mathbb{C}\Omega) \quad (\forall \zeta \in \bar{\Delta}),$$

ce qui équivaut à :

$$-\log \text{dist}(z_0 + \tau v_0, \mathbb{C}\Omega) \leq \text{Re } p(\tau) \quad (\forall |\tau| \leq r),$$

et achève l'argumentation. □

Rappelons qu'étant donné une famille quelconque $(u_a)_{a \in A}$ de fonctions continues ou même semi-continues supérieurement $u_a : \Omega \rightarrow]-\infty, \infty[$, la fonction-infimum :

$$u := \inf_{a \in A} u_a : \Omega \rightarrow]-\infty, \infty[$$

est toujours semi-continue supérieurement. Ceci est vrai en particulier pour des suites $(u_n)_{n=1}^\infty$, et comme on doit souvent, en Analyse, prendre des limites — inférieures ou supérieures — de suites, la découverte d'Oka motive une définition qui introduit un concept central en Analyse Complexe à plusieurs variables.

Définition 9.2. [Oka 1942] Une fonction définie dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$:

$$u : \Omega \rightarrow]-\infty, \infty[,$$

la valeur $-\infty$ étant autorisée, est dite *plurisousharmonique* lorsque :

(1) u est semi-continue supérieurement ;

(1) pour tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout vecteur tangent non nul $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$, la restriction de u au sous-ouvert $\Omega_{z_0, v_0} := \Omega \cap (z_0 + \mathbb{C}v_0)$ de \mathbb{C} est sous-harmonique.

En particulier, la fonction $u \equiv -\infty$ est plurisousharmonique.

Bien que dans ce chapitre et ceux qui suivront, nous n'aurons en fait affaire qu'à des fonctions plurisousharmoniques *continues* à valeurs dans $] - \infty, \infty[$, la théorie générale demande seulement la semi-continuité supérieure pour plus de flexibilité.

Terminologie 9.3. Un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est appelé *pseudoconvexe* lorsque la fonction continue :

$$\Omega \ni z \longmapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega)$$

est plurisousharmonique

De plus, l'intérêt de cette définition est qu'aucune régularité n'est supposée sur le bord de Ω , contrairement à la définition de Levi.

L'observation fondamentale d'Oka se résume alors :

ouvert d'holomorphic	\implies	ouvert pseudoconvexe.
----------------------	------------	-----------------------

Historiquement, c'est l'implication inverse qui a constitué le difficile

Problème de Levi 9.4. *Établir l'implication inverse :*

$$\text{ouvert d'holomorphic} \stackrel{?}{\longleftarrow} \text{ouvert pseudoconvexe.}$$

Pour en donner une solution, il est nécessaire de développer de nombreux concepts et théorèmes. Avant de commencer, achevons d'éclaircir le lien entre la pseudoconvexité au sens de Levi, et celle au sens d'Oka, plus générale.

10. Pseudoconvexité de domaines à bords lisses au sens de Levi et au sens d'Oka

Maintenant, tous les ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ n'ont pas un bord lisse. Peut-on alors conceptualiser une notion de pseudoconvexité qui généralise celle de Levi et qui se dispense de toute hypothèse de régularité ? Oui nous dit Oka, car sa découverte de la plurisousharmonicité de la fonction $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ dans les domaines d'holomorphic offre le bon concept.

Théorème 10.1. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 2}$ à bord $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, les deux conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) $\Omega = \{r < 0\}$ est pseudoconvexe au sens de Levi, à savoir la forme de Levi de son bord $\partial\Omega$ est positive :

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \quad (\forall z \in \partial\Omega, \forall r_{z_1} v_1 + \dots + r_{z_n} v_n = 0).$$

(ii) Ω est pseudoconvexe au sens d'Oka près de son bord, à savoir il existe un voisinage ouvert \mathcal{V} de $\partial\Omega$ dans \mathbb{C}^n tel que la fonction continue :

$$\Omega \cap \mathcal{V} \ni z \mapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$$

est plurisousharmonique.

Démonstration. Commençons par (ii) \implies (i). En calculant les distances au moyen de la métrique euclidienne, abrégeons :

$$d(z) := \text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Comme la condition (i) de Levi que nous devons atteindre ne dépend pas de la fonction définissante, nous pouvons choisir la *distance signée* :

$$r(z) := \begin{cases} -\text{dist}(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) & \text{pour } z \in \Omega \cup \partial\Omega, \\ +\text{dist}(z, \Omega) & \text{pour } z \in \mathbb{C} \setminus \Omega. \end{cases}$$

L'Exercice 3 propose de se convaincre de la véracité du

Lemme 10.2. *Dans un voisinage ouvert assez petit $\mathcal{V} \supset \partial\Omega$, la fonction distance signée $r: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^2 .* \square

Supposons donc que la fonction $-\log d$ de classe \mathcal{C}^2 est plurisousharmonique dans $\Omega \cap \mathcal{V}$. En calculant à l'avance :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} (-\log d) = -\frac{d_{\bar{z}_k}}{d} \quad \text{puis} \quad \frac{\partial}{\partial z_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} (-\log d) = -\frac{d_{z_j \bar{z}_k}}{d} + \frac{d_{z_j} d_{\bar{z}_k}}{d^2},$$

sa plurisousharmonicité s'exprime en tout point $z \in \Omega \cap \mathcal{V}$ et pour tout vecteur tangent $v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega \cong \mathbb{C}^n$ par la positivité :

$$0 \leq \frac{1}{d} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-d)_{z_j \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k + \frac{1}{d^2} \left(\sum_{j=1}^n d_{z_j} v_j \right) \left(\sum_{k=1}^n d_{\bar{z}_k} \bar{v}_k \right).$$

Alors si nous choisissons des vecteurs v qui annulent $0 = \sum_i d_{z_i} v_i$, le deuxième terme s'évanouit, et comme $d > 0$, sachant que $-d = r$ dans $\Omega \cup \partial\Omega$, nous obtenons :

$$0 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k.$$

Un passage à la limite en faisant tendre $z \rightarrow \partial\Omega$ montre que la condition (i) de pseudo-convexité au sens de Levi est satisfaite.

Traisons maintenant (i) \implies (ii). Comme la condition de Levi ne dépend pas du choix d'équation définissante, nous pouvons supposer que $\Omega = \{r < 0\}$ avec $r =$ la distance signé, de classe \mathcal{C}^2 dans un voisinage ouvert $\mathcal{V} \supset \Omega$.

Supposons par l'absurde que $-\log d$ n'est pas plurisousharmonique dans \mathcal{V} , c'est-à-dire que $-\log d$ restreinte à une droite affine complexe centrée en un certain point $z \in \Omega \cap \mathcal{V}$ n'est pas sous-harmonique. Comme $d \in \mathcal{C}^2$, cela veut dire qu'un laplacien est < 0 , donc il existe $z \in \Omega \cap \mathcal{V}$ et il existe $v \in \mathbb{C}^n$ tels que la constante réelle suivante est strictement négative :

$$-c := \frac{\partial^2 \tau}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} (-\log d)(z + \tau v) \Big|_{\tau=0} < 0.$$

Un développement de Taylor à l'ordre 2 par rapport à τ donne, au moyen de certaines constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \log d(z + \tau v) &= \log d(z) + \operatorname{Re}(\alpha\tau + \beta\tau^2) + c\tau\bar{\tau} + o_\tau(2) \\ \iff d(z + \tau v) &= d(z) |e^{\alpha\tau + \beta\tau^2}| e^{c\tau\bar{\tau} + o_\tau(2)}. \end{aligned}$$

Maintenant, choisissons un vecteur $v \in \mathbb{C}^n$ qui réalise la distance au bord :

$$|w| = d(z) = \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) = \operatorname{dist}(z, \partial\Omega),$$

d'où $z + w \in \partial\Omega$, et introduisons le disque holomorphe en $\tau \in \mathbb{C}$:

$$z(\tau) := z + \tau v + w e^{\alpha\tau + \beta\tau^2},$$

dont le centre $z(0) = z + w$ est au bord. Alors l'inégalité triangulaire nous permet de minorer pour $\tau \sim 0$ petit :

$$\begin{aligned} d(z(\tau)) &\geq d(z + \tau v) - |w| |e^{\alpha\tau + \beta\tau^2}| \\ &= |w| |e^{\alpha\tau + \beta\tau^2}| \left(e^{c\tau\bar{\tau} + o_\tau(2)} - 1 \right) \\ &\geq |w| |e^{\alpha\tau + \beta\tau^2}| \left(e^{\frac{1}{2}c\tau\bar{\tau}} - 1 \right) \\ &\geq C\tau\bar{\tau}. \end{aligned} \tag{C > 0}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} d(z(\tau)) \Big|_{\tau=0} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \bar{\tau}} d(z(\tau)) \Big|_{\tau=0} &> 0. \end{aligned}$$

Avec $r = -d$ dans Ω , un calcul simple tenant compte du fait que $\tau \mapsto z(\tau)$ est holomorphe réexprime (exercice) tout ceci au point $\zeta := z + w \in \partial\Omega$ sous une forme :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial r}{\partial z_i}(\zeta) z'_i(0) &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(\zeta) z'_j(0) \bar{z}'_k(0) &< 0, \end{aligned}$$

qui contredit (i) de manière flagrante. \square

11. Propriétés des fonctions plurisousharmoniques

Comment comprendre intuitivement les fonctions plurisousharmoniques ? Rappelons que les fonctions lisses *sous-harmoniques* sont caractérisées par la positivité de leur laplacien. Si donc $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ est un point, si $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est un vecteur non nul, si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{PSH}(\Omega)$, la sous-harmonicité de la fonction :

$$\zeta \longmapsto u(z + \zeta v),$$

définie pour ζ dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$ entraîne la positivité :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left. \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \bar{\zeta}} \right|_{\zeta=0} u(z + \zeta v) \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} u(z) v_j \bar{v}_k. \end{aligned}$$

L'énoncé suivant montre qu'une telle positivité dans toutes les directions *caractérise* la plurisousharmonicité des fonctions lisses $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Théorème 11.1. *Une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est plurisousharmonique si et seulement si :*

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} (z) v_j \bar{v}_k \geq 0 \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega).$$

Démonstration. Effectivement, il suffit que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ pour que le calcul précédent ait un sens.

La réciproque découle de la caractérisation connue des fonctions sous-harmoniques \mathcal{C}^2 définies dans des ouverts de \mathbb{C} . \square

Exemple 11.2. Pour $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, y compris $f = 0$, et pour $c > 0$ réel, on a (exercice) :

$$\log |f| \in \text{PSH}(\Omega) \quad \text{et} \quad |f|^c \in \text{PSH}(\Omega),$$

puisque — solution de l'exercice — cela découle du cas connu en une variable.

En tout point $z \in \Omega$, on considère donc la matrice hermitienne :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \bar{z}_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_1 \partial \bar{z}_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u(z)}{\partial z_n \partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}.$$

Pour la fonction norme euclidienne au carré :

$$\|z\|^2 := |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2,$$

— à ne pas confondre avec la norme de polydisque $|z| = \max(|z_1|, \dots, |z_n|)$! — ainsi que pour les deux autres fonctions :

$$x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad \text{et} \quad y_1^2 + \cdots + y_n^2,$$

on vérifie aisément (exercice) que cette matrice est définie positive.

Définition 11.3. Une fonction $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite *strictement plurisousharmonique* lorsque :

(1) $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$;

(2) en tout point $z \in \Omega$ et pour tout vecteur tangent non nul $v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \setminus \{0\}$:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k > 0.$$

Ce dernier concept strict :

$$u \in \text{SPSH}(\Omega),$$

sera central dans les prochains chapitres. Mais pour développer la théorie, revenons maintenant à la Définition 9.2 générale qui ne suppose que la semi-continuité supérieure. Tout d'abord :

Théorème 11.4. *Si $(u_\nu)_{\nu=1}^\infty$ est une suite décroissante $u_{\nu+1} \leq u_\nu$ de fonctions $u_\nu \in \text{PSH}(\Omega)$ définies dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, alors :*

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} u_\nu \in \text{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Découle de l'énoncé connu à une variable, en examinant ce qui se produit sur les intersections de Ω avec des droites affines complexes. Le point-clé, c'est que l'inégalité de sous-moyenne qui caractérise les fonctions sous-harmoniques passe à la limite, et que la continuité (ou la semi-continuité) des u_ν 'dégénère' en semi-continuité supérieure à la limite. \square

En fait, la sous-harmonicité de $u \in \text{PSH}(\Omega)$ revient à des inégalités de sous-moyenne sur les droites affine complexes, comme suit. En tout point $z_0 \in \Omega$, pour tout vecteur $v_0 \in T_{z_0}\Omega$ avec $\|v_0\| < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$:

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + v_0 e^{i\theta}) d\theta.$$

Théorème 11.5. *Étant donné un nombre fini $M \geq 1$ de fonctions $u_1, \dots, u_M \in \text{PSH}(\Omega)$, et des réels $c_1, \dots, c_M \geq 0$, on a :*

$$\max(u_1, \dots, u_M) \in \text{PSH}(\Omega) \quad \text{et} \quad c_1 u_1 + \dots + c_M u_M \in \text{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable. L'intérêt de cet énoncé, c'est qu'il manifeste une flexibilité de $\text{PSH}(\Omega)$ qui s'avérera très souvent utile, notamment la prise de $\max(u_1, \dots, u_M)$. \square

Théorème 11.6. *Si, en un point intérieur $z_0 \in \Omega$, une fonction $u \in \text{PSH}(\Omega)$ atteint :*

$$\sup_{\Omega} u = u(z_0),$$

alors $u \equiv u(z_0)$ est constante dans la composante connexe ω_0 de Ω contenant z_0 .

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable, en remplaçant Ω par ω_0 , et en faisant varier le vecteur $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega \setminus \{0\}$. \square

Théorème 11.7. *Soit $u \in \text{PSH}(\Omega)$. Si, en un point $z_0 \in \Omega$:*

$$-\infty < u(z_0),$$

alors $u \in L_{\text{loc}}^1(\omega_0)$ est localement intégrable dans la composante connexe $\omega_0 \ni z_0$ de Ω .

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable, au prix d'une adaptation qui ne sera pas détaillé ici. \square

Théorème 11.8. Soit $u \in \text{PSH}(\Omega)$. Si $\psi: [\inf u, \sup u] \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe croissante, alors :

$$\psi \circ u \in \text{PSH}(\Omega),$$

en définissant $\psi(-\infty) := \lim_{-\infty \leftarrow t} \psi(t)$ lorsque $-\infty = \inf u$.

Démonstration. Découle de l'énoncé connu en une variable. \square

Théorème 11.9. Soit $u \in \text{SPSH}(\Omega) = \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \text{PSH}(\Omega)$ une fonction strictement plurisousharmonique. Si ψ est une fonction \mathcal{C}^2 réelle définie dans un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'image $u(\Omega) \subset \mathbb{R}$ qui satisfait :

$$\psi'(t) > 0 \quad \text{et} \quad \psi''(t) \geq 0,$$

alors $\psi \circ u \in \text{SPSH}(\Omega)$ est strictement plurisousharmonique.

Démonstration. En un point quelconque $z \in \Omega$, pour un vecteur tangent non nul arbitraire $v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega \setminus \{0\}$, il suffit de calculer et de réorganiser :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2(\psi \circ u)}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) \bar{v}_k v_j &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial z_j} \left[\psi'(u(z)) \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}(z) \bar{v}_k \right] v_j \\ &= \psi''(u(z)) \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j}(z) v_j \sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_k}(z) \bar{v}_k + \psi'(u(z)) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \\ &= \psi''(u(z)) \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_i}(z) v_i \right|^2 + \underbrace{\psi'(u(z)) \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k}_{> 0}, \end{aligned}$$

pour voir la positivité stricte. \square

Théorème 11.10. Soient $u_1, \dots, u_M \in \text{PSH}(\Omega)$. Si $\varphi: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe croissante par rapport à chacune de ses variables, alors $\varphi(u_1, \dots, u_M)$ est plurisousharmonique dans Ω .

En particulier :

$$u_1 + \dots + u_M, \quad \max(u_1, \dots, u_M), \quad \log(e^{u_1} + \dots + e^{u_M})$$

sont plurisousharmoniques.

Démonstration. Analogue au cas de une variable. \square

Soit maintenant une fonction-régularisante $\chi = \chi(|z_1|, \dots, |z_n|)$ définie sur \mathbb{C}^n à valeurs dans $[0, 1]$ lisse à support compact contenu dans la boule unité euclidienne $\{\|z\| \leq 1\}$ qui ne dépend que des modules des variables complexes et dont l'intégrale $\int_{\mathbb{C}^n} \chi d\lambda = 1$ est normalisée. Pour $\varepsilon > 0$, posons :

$$\omega_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \chi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right).$$

Théorème 11.11. Si $u \in \text{PSH}(\Omega)$ est plurisousharmonique dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $u \not\equiv -\infty$, alors pour $\varepsilon > 0$, les convolées :

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(z) &:= u * \omega_\varepsilon(z) = \int u(z - \varepsilon \zeta) \chi(\zeta) d\lambda(\zeta) \\ &\geq u(z) \end{aligned}$$

sont \mathcal{C}^∞ plurisousharmoniques dans le sous-ouvert :

$$\Omega_\varepsilon := \{z \in \Omega : \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) > \varepsilon\},$$

et tendent en décroissant vers u en tout point $z \in \Omega$:

$$u_\varepsilon(z) \searrow u(z) \quad (\varepsilon \searrow 0, z \in \Omega).$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. \square

Théorème 11.12. Si $h: \Omega \xrightarrow{\sim} \Omega' = h(\Omega)$ est un biholomorphisme entre deux ouverts $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ et $\Omega' \subset \mathbb{C}^n$, alors :

$$u' \in \text{PSH}(\Omega') \implies u \circ h \in \text{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. \square

Théorème 11.13. Si $\{u_a\}_{a \in A}$ est une famille localement uniformément bornée quelconque de fonctions $u_a \in \text{PSH}(\Omega)$, et si la fonction :

$$u(z) := \sup_{a \in A} u_a(z) \quad (z \in \Omega)$$

est semi-continue supérieurement, alors $u \in \text{PSH}(\Omega)$.

Démonstration. Analogue au cas de une variable. \square

Le fait est que $\sup_{a \in A} u_a(z)$ n'est pas forcément semi-continue supérieurement. En la corrigeant, tout se passe bien.

Théorème 11.14. Si $\{u_a\}_{a \in A}$ est une famille localement uniformément bornée quelconque de fonctions $u_a \in \text{PSH}(\Omega)$, alors la régularisée supérieure :

$$u^*(z) := \limsup_{w \rightarrow z} \left(\sup_{a \in A} u_a(w) \right) \geq u(z) \quad (z \in \Omega),$$

est la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui est $\geq u$, est presque partout égale à $\sup_{a \in A} u_a$, et est plurisousharmonique :

$$u^* \in \text{PSH}(\Omega).$$

Démonstration. Analogue au cas de une variable. \square

12. Ouverts pseudoconvexes et enveloppes plurisousharmoniques

Définition 12.1. L'enveloppe plurisousharmonique d'un compact $K \subset \Omega$ dans un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est :

$$\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} := \left\{ z \in \Omega : u(z) \leq \sup_K u \text{ pour toutes } u \in \text{PSH}(\Omega) \right\}.$$

En prenant $u := \log |f(z)|$ avec $f \in \mathcal{O}(\Omega)$, on constate (exercice) que :

$$\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \widehat{K}_{\mathcal{O}(\Omega)}.$$

Toutefois, puisqu'il n'est pas clair *a priori* que cette enveloppe $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$ soit relativement fermée dans Ω , nous le démontrerons plus tard.

Dans les ouverts pseudoconvexes, l'analogie du Théorème de Cartan-Thullen pour les domaines d'holonomie s'exprime en termes de ce nouveau concept d'enveloppe.

Théorème 12.2. [Caractérisations de la pseudoconvexité] Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, les trois conditions suivantes sont équivalentes.

(i) La fonction continue $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega)$ est plurisousharmonique dans Ω .

(ii) Il existe une fonction continue plurisousharmonique $u \in \text{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{R} telle que, pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :

$$\{z \in \Omega : u(z) \leq c\}$$

est compact dans Ω .

(iii) Tout compact $K \subset \Omega$ a une enveloppe plurisousharmonique $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \Omega$ dont l'adhérence dans \mathbb{C}^n :

$$\overline{\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}} \subset \Omega$$

est aussi compacte, contenue dans Ω .

Démonstration. (i) \implies (ii). Comme $z \mapsto |z|^2$ est plurisousharmonique et à ensembles de sous-niveaux bornés — de simples polydisques ! —, la fonction continue :

$$u(z) := |z|^2 - \log \text{dist}(z, \partial\Omega),$$

qui est plurisousharmonique et qui tend vers l'infini au voisinage de $\partial\Omega$, convient.

(ii) \implies (iii). Soit un compact quelconque $K \subset \Omega$. Pour $c \gg 1$ assez grand, on a $K \subset L_c := \{u \leq c\}$, d'où :

$$\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \widehat{L}_{c\text{PSH}(\Omega)} = L_c,$$

cette dernière égalité, élémentaire, se vérifiant en revenant à la définition :

$$\widehat{L}_{c\text{PSH}(\Omega)} = \left\{ z \in \Omega : u(z) \leq \sup_{L_c} u \text{ pour toutes } u \in \text{PSH}(\Omega) \right\},$$

puis en prenant $u = v$, d'où $\widehat{L}_{c\text{PSH}(\Omega)} \subset L_c$, l'inclusion inverse étant triviale.

(iii) \implies (i). Soit un point quelconque $z_0 \in \Omega$, soit un vecteur non nul quelconque $v_0 \in T_{z_0}^{\mathbb{C}}\Omega$ et soit $r > 0$ tel que le disque fermé :

$$\overline{\Delta} = \{z_0 + \tau v_0 : |\tau| \leq r\} \subset \Omega$$

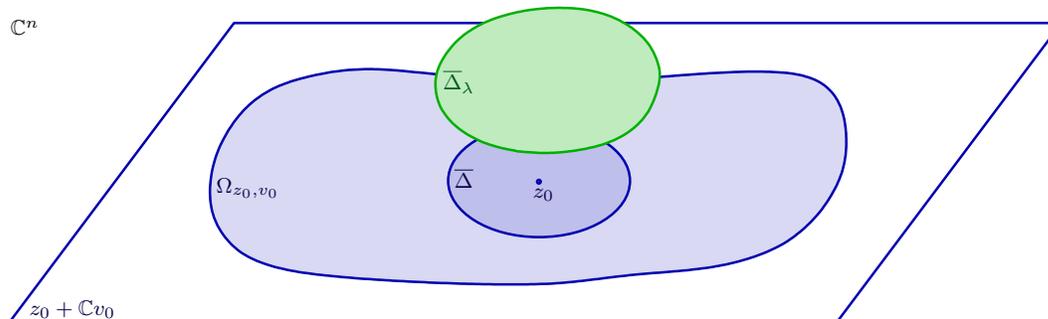
est contenu dans l'ouvert. Pour tout polynôme $p(\tau) \in \mathbb{C}[\tau]$ majorant sur le bord de $\overline{\Delta}$:

$$-\log \text{dist}(z_0 + \tau v_0, \partial\Omega) \leq \text{Re } p(\tau) \quad (\forall |\tau|=r),$$

l'objectif est d'obtenir la même inégalité en tout point de $\overline{\Delta}$, c'est-à-dire pour tout $|\tau| \leq r$, ce qui établira la plurisousharmonicité.

Récrivons cette hypothèse comme :

$$(12.3) \quad \text{dist}(z_0 + \tau v_0, \partial\Omega) \geq |e^{-p(\tau)}| \quad \text{pour tout } |\tau| = r.$$



Prenons un autre vecteur non nul $w_0 \in \mathbb{C}^n$ de norme $0 < |w_0| < 1$ et, pour $0 \leq \lambda \leq 1$, introduisons les disques holomorphes paramétrés :

$$A_\lambda: \quad \overline{\mathbb{D}}_r \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ \tau \longmapsto z_0 + \tau v_0 + \lambda w_0 e^{-p(\tau)}.$$

Lorsque $\lambda = 0$, nous retrouvons le disque « plat » :

$$A_0: \quad \tau \longmapsto z_0 + \tau v_0.$$

Notons alors leurs images dans \mathbb{C}^n :

$$\overline{\Delta}_\lambda := A_\lambda(\overline{\mathbb{D}}_r) \quad (0 \leq \lambda \leq 1),$$

avec bien sûr :

$$\overline{\Delta}_0 = \overline{\Delta} \subset \Omega.$$

Jusqu'à quel moment ces $\overline{\Delta}_\lambda$ restent-ils contenus dans Ω ? Introduisons donc :

$$\Lambda := \{ \lambda \in [0, 1] : \overline{\Delta}_{\lambda'} \subset \Omega \text{ pour tous } 0 \leq \lambda' \leq \lambda \}.$$

Clairement, $\Lambda \ni 0$ est ouvert non vide. Posons :

$$\lambda_* := \sup_{\lambda \in \Lambda} \lambda.$$

Assertion 12.4. Λ est fermé.

Preuve. Par l'absurde, supposons que $\Lambda = [0, \lambda_*[$. Introduisons l'ensemble :

$$K := \bigcup_{0 \leq \lambda \leq 1} A_\lambda(\partial \mathbb{D}_r),$$

réunion des bords de ces disques, qui est compact dans \mathbb{C}^n . Explicitement :

$$K = \{ z_0 + \tau v_0 + \lambda w_0 e^{-p(\tau)} : |\tau| = r, 0 \leq \lambda \leq 1 \} \\ \subset \Omega$$

et comme $|w_0| < 1$, une simple inégalité triangulaire montre grâce à l'hypothèse (12.3) que ce compact est entièrement contenu dans l'ouvert.

Prenons maintenant une fonction quelconque $u \in \text{PSH}(\Omega)$. Puisque pour tout $\lambda < \lambda_*$ arbitrairement proche de λ_* , le disque $A_\lambda(\overline{\mathbb{D}}_r) = \overline{\Delta}_\lambda \subset \Omega$ est contenu dans l'ouvert, nous pouvons composer :

$$\tau \longrightarrow u \circ A_\lambda(\tau),$$

ce qui, d'après l'Exercice 1, fournit une fonction sous-harmonique dans un certain voisinage ouvert de $\overline{\mathbb{D}}_r$.

Mais alors le principe du maximum donne, en un point quelconque $\tau_0 \in \overline{\mathbb{D}}_r$:

$$u(A_\lambda(\tau_0)) \leq \sup_{|\tau|=r} u(A_\lambda(\tau)) \\ \leq \sup_K u,$$

ce qui montre que :

$$A_\lambda(\tau_0) \in \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \Omega,$$

et ce, uniformément quelle que soit la proximité à λ_* de $\lambda < \lambda_*$, puisque par l'hypothèse (iii), l'ensemble $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \Omega$ est un compact fixe contenu dans l'ouvert. Ainsi à la limite par continuité :

$$A_{\lambda_*}(\overline{\mathbb{D}}_r) \subset \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)} \subset \Omega,$$

ce qui montre que $\lambda_* \in \Lambda$ — contradiction ! \square

Le sous-ensemble $\Lambda \subset [0, 1]$ non vide, ouvert et fermé, ne peut qu'être $\Lambda = [0, 1]$, i.e. $\lambda_* = 1$, donc :

$$A_1(\overline{\mathbb{D}}_r) \subset \Omega,$$

c'est-à-dire :

$$z_0 + \tau v_0 + w_0 e^{-p(\tau)} \in \Omega \quad (\forall |\tau| \leq r),$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$\text{dist}(z_0 + \tau v_0, \mathbb{C}\Omega) \geq |w_0| |e^{-p(\tau)}| \quad (\forall |\tau| \leq r).$$

Or comme $w_0 \in \mathbb{C}^n$ avec $|w_0| < 1$ pouvait être choisi de norme arbitrairement proche de 1, nous déduisons :

$$\text{dist}(z_0 + \tau v_0, \mathbb{C}\Omega) \geq |e^{-p(\tau)}| \quad (\forall |\tau| \leq r),$$

et enfin, en prenant le logarithme :

$$-\log \text{dist}(z_0 + \tau v_0, \partial\Omega) \leq \text{Re } p(\tau) \quad (\forall |\tau| \leq r),$$

nous atteignons notre objectif. \square

Théorème 12.5. Si $(\Omega_a)_{a \in A}$ est une famille quelconque d'ouverts pseudoconvexes $\Omega_a \subset \mathbb{C}^n$, alors :

$$\text{Int} \left(\bigcap_{a \in A} \Omega_a \right) =: \Omega$$

est encore un ouvert pseudoconvexe.

Démonstration. Pour tout $a \in A$, la fonction continue :

$$z \longmapsto -\log \text{dist}(z, \partial\Omega_a)$$

et plurisousharmonique dans Ω_a . Mais puisqu'un supremum quelconque de fonctions plurisousharmoniques est encore plurisousharmonique lorsqu'il est continu l'égalité :

$$-\log \text{dist}(z, \partial\Omega) = \sup_{a \in A} -\log \text{dist}(z, \partial\Omega_a),$$

dans laquelle le membre de gauche est continu dans Ω , conclut. \square

Faisons maintenant voir que la pseudoconvexité est une propriété locale.

Théorème 12.6. Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$:

$$\left(\begin{array}{l} \forall \zeta \in \partial\Omega \quad \exists \omega \ni \zeta \text{ ouvert tel que} \\ \Omega \cap \omega \text{ est pseudoconvexe} \end{array} \right) \implies \Omega \text{ est pseudoconvexe.}$$

Autrement dit, la pseudoconvexité est une propriété locale du bord.

Démonstration. En un point quelconque $\zeta \in \partial\Omega$, prenons un voisinage ouvert $\omega \ni \zeta$ tel que $\Omega \cap \omega$ est pseudoconvexe. Dans un sous-voisinage ouvert $\zeta \in \varpi \subset \omega$ assez petit, on a (exercice) :

$$\text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) = \text{dist}(z, \mathbb{C}(\Omega \cap \omega)) \quad (\forall z \in \varpi).$$

Ainsi, la fonction $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega)$ est plurisousharmonique dans un certain voisinage ouvert $\varpi_\zeta \ni \zeta$ de tout point $\zeta \in \partial\Omega$. En prenant le complémentaire, dans Ω , de la réunion de ces ϖ_ζ , nous déduisons qu'il existe un fermé $F \subset \Omega$ tel que $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega)$ est plurisousharmonique dans $\Omega \setminus F$.

Ensuite, prenons une fonction $\varphi = \varphi(|z|^2)$ positive convexe strictement croissante de $|z|^2$, donc plurisousharmonique, avec $\varphi(|z|^2) \rightarrow \infty$ quand $|z|^2 \rightarrow \infty$ et suffisamment grande pour que :

$$\varphi(|z|^2) > -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega) \quad (\forall z \in F).$$

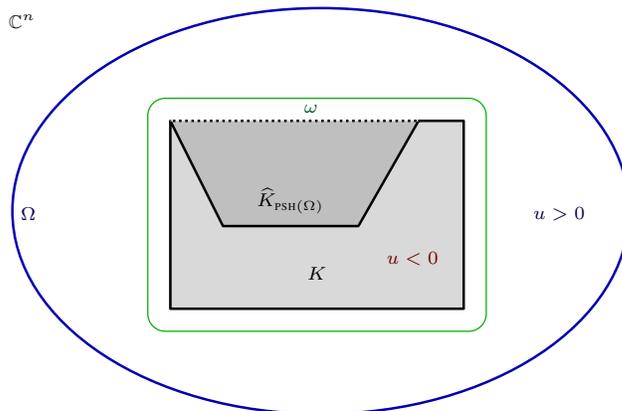
Alors la fonction continue :

$$u(z) := \max(\varphi(|z|^2), -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega)),$$

toujours plurisousharmonique d'après un théorème élémentaire déjà vu, satisfait (exercice) la condition (ii) du Théorème 12.2, donc Ω est pseudoconvexe d'après (ii) \iff (i).

D'ailleurs *a posteriori*, grâce à ce théorème, la fonction $z \mapsto -\log \text{dist}(z, \mathbb{C}\Omega)$ elle-même — sans avoir à la corriger en $u(z)$! — est continue plurisousharmonique dans Ω . \square

Maintenant, pour la théorie des estimées L^2 de Hörmander, nous aurons besoin de munir les ouverts pseudoconvexes de fonctions plurisousharmoniques lisses d'exhaustion. Voici un énoncé très général dont se déduira aisément le Théorème 12.10 utile.



Théorème 12.7. Dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soit un compact $K \subset \Omega$ et soit un voisinage ouvert :

$$\omega \supset \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}.$$

Alors il existe une fonction $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ dotée des trois qualités suivantes.

- (1) $u < 0$ dans K tandis que $u > 0$ dans $\Omega \setminus \omega$.
- (2) Pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau $\{z \in \Omega : u(z) \leq c\}$ est compact, contenu dans Ω .

(3) u est partout strictement plurisousharmonique, c'est-à-dire :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k > 0 \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega \setminus \{0\}).$$

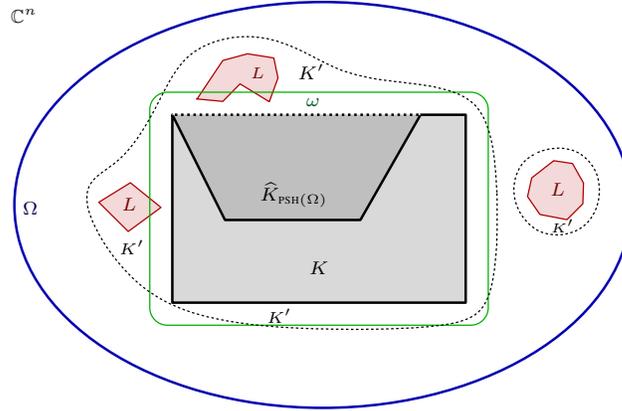
Démonstration. Commençons par construire une fonction continue $v \in \text{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ qui satisfait (1) et (2), avant de la régulariser pour atteindre (3).

Puisque Ω est pseudoconvexe, il existe, d'après le Théorème 12.2, une fonction \mathcal{C}^0 plurisousharmonique :

$$u_0: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

avec $\{u_0 \leq c\} \subset \Omega$ compact, pour tout $c \in \mathbb{R}$. En soustrayant une constante assez grande de u_0 , nous pouvons supposer que :

$$u_0|_K \leq -\delta_0 < 0 \quad (\delta_0 > 0).$$



Maintenant, avec $\omega \supset \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$ ouvert, le problème évident, c'est que u_0 peut prendre des valeurs négatives hors de ω , contrairement à ce que vise (1), et c'est pourquoi nous introduisons le compact :

$$L := \{z \in \Omega \setminus \omega : u_0(z) \leq 0\},$$

que nous supposons non vide. De plus, introduisons un ensemble de sous-niveau de u_0 assez grand pour contenir le lieu de travail :

$$K' := \{z \in \Omega : u_0(z) \leq 2\}.$$

Comme ω est un voisinage ouvert de $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$, il est clair que $L \subset \Omega \setminus \omega$ est à distance > 0 de $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$. Alors par définition de l'enveloppe, nous avons :

$$\forall z \in L \quad \exists g_z \in \text{PSH}(\Omega) \quad g_z(z) > 0 \quad \text{tandis que } g_z|_K < 0.$$

Régularisons chacune de ces g_z , pour obtenir des fonctions lisses plurisousharmoniques $h_z \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{\varepsilon_z}) \cap \text{PSH}(\Omega_{\varepsilon_z})$ de la forme convolée $h_z = g_z * \omega_{\varepsilon_z}$ définies dans des sous-ouverts $\Omega_{\varepsilon_z} \subset \Omega$ avec $\varepsilon_z > 0$ suffisamment petit pour que, quel que soit $z \in L$:

- $\Omega_{\varepsilon_z} \supset K'$;
- $h_z|_K < 0$;
- $h_z(w) > 0$ en tout point $w \in \varpi_z$ d'un certain petit voisinage ouvert $\varpi_z \ni z$.

Grâce au lemme de Borel-Lebesgue, il existe un nombre fini $M \geq 1$ de points $z_1, \dots, z_M \in L$ tels que :

$$L \subset \bigcup_{1 \leq m \leq M} \varpi_{z_m}.$$

Alors la fonction continue plurisousharmonique :

$$u_1 := \max(h_{z_1}, \dots, h_{z_M}),$$

définie dans un voisinage ouvert de K' dans Ω , satisfait toujours $u_1|_K < 0$, tandis que par construction $u_1 > 0$ dans un voisinage ouvert de L . Il reste à « recoller » cette fonction u_1 , qui n'est pas définie partout dans Ω , à la fonction u_0 .

À cet effet, avec la constante :

$$(0 <) \quad C := \max_{K'} u_1 < \infty,$$

introduisons la fonction définie pour $z \in \Omega$ de manière non unique par :

$$v(z) := \begin{cases} \max(u_1(z), C u_0(z)) & \text{lorsque } u_0(z) \leq 2, \\ C u_0(z) & \text{lorsque } u_0(z) > 1; \end{cases}$$

en fait, en des points $z \in \Omega$ tels que $1 < u_0(z) \leq 2$, ces deux définitions s'accordent, puisque sur $K' = \{u_0 \leq 2\}$, on a :

$$\left. \begin{array}{l} u_1 \leq C \\ 1 < u_0(z) \end{array} \right\} \implies \max(u_1(z), C u_0(z)) = C u_0(z).$$

De plus, cette même vérification montre que $v \equiv u_0$ dans $\{u_0 > 1\}$, et donc, même si u_1 n'est définie que dans un voisinage de K' , la fonction continue plurisousharmonique v est définie partout dans Ω , et elle exhauste Ω , puisque u_0 le fait. Enfin :

$$v|_K = \max(u_1, C u_0)|_K < 0.$$

Ensuite, il s'agit de régulariser cette fonction $v \in \text{PSH}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega)$ qui satisfait (1) et (2). Toutefois, lorsqu'on régularise par convolution, on perd en général une petite partie du domaine de définition de la fonction. Il faut donc inventer un nouveau procédé, qui va découper Ω en couronnes.

Pour $j \in \mathbb{N}$, introduisons deux compacts :

$$\begin{aligned} L_j &:= \{z \in \Omega : v(z) \leq j\}, & \delta_j &:= \text{dist}(L_j, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0, \\ L'_j &:= \{z \in \Omega : \text{dist}(z, L_j) \leq \frac{1}{3} \delta_j\}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour $0 < \varepsilon_j < \frac{1}{3} \delta_j$ assez petit, introduisons les fonctions définies pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ par :

$$v_j(z) := \int_{\substack{\zeta \in L'_j \\ \|\zeta - z\| \leq \varepsilon_j}} v(\zeta) \chi\left(\frac{z - \zeta}{\varepsilon_j}\right) \frac{d\lambda(\zeta)}{\varepsilon_j^{2n}} + \varepsilon_j \|z\|^2 + \varepsilon_j |z_1 - 1|^2,$$

où la fonction χ est comme dans le Théorème 11.11. D'après ce théorème, les fonctions v_j sont \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{C}^n et strictement plurisousharmoniques dans \mathbb{C}^n grâce au terme $\varepsilon_j \|z\|^2$; en outre, puisque la partie intégrale est $\geq v(z)$ lorsque $z \in L_j$ et puisque le reste additionnel $\varepsilon_j (\|z\|^2 + |z_1 - 1|^2)$ est > 0 en tout point — y compris en l'origine $z = 0$ —, nous obtenons la minoration :

$$v_j > v \quad (\text{dans } L_j, \forall j \geq 0).$$

En choisissant $\varepsilon_0 > 0$ et $\varepsilon_1 > 0$ assez petits, on garantit :

$$v_0|_K < 0 \quad \text{et} \quad v_1|_K < 0,$$

puis en choisissant tous les $\varepsilon_j > 0$ pour $j \geq 1$ assez petits, on garantit :

$$v_j < v + 1 \quad (\text{dans } L_j, \forall j \geq 1).$$

Affirmation 12.8. *Pour tout $j \geq 1$, il existe un voisinage ouvert U_j dans Ω de la couronne compacte $C_j := \{j - 1 \leq v \leq j\}$ dans lequel :*

$$v_j(z) - (j - 1) > 0 \quad (\forall z \in U_j).$$

Preuve. En effet, si $j - 1 \leq v(z) \leq j$, la minoration sur L_j donne :

$$v_j(z) - (j - 1) > v(z) - (j - 1) \geq j - 1 - j + 1 = 0,$$

Cette inégalité étant stricte sur un compact, l'existence d'un voisinage ouvert U_j découle de la continuité de v_j . \square

Ensuite, prenons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$ avec $\psi \equiv 0$ sur \mathbb{R}_- qui, sur \mathbb{R}_+ , est strictement croissante $\psi' > 0$ et strictement convexe $\psi'' > 0$. Alors pour tout $j \geq 1$ les fonctions composées :

$$\psi(v_j - (j - 1))$$

sont > 0 et strictement plurisous-harmoniques dans U_j .

Puisque la réunion de L_0 avec toutes les couronnes remplit :

$$\Omega = L_0 \bigcup_{j \geq 1} C_j,$$

et puisque $v_0 > v$ dans L_0 , en choisissant successivement les $a_j \gg 0$ positifs assez grands pour être toujours $> v$ sur toutes les couronnes, la fonction :

$$\begin{aligned} u(z) &:= v_0(z) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \psi(v_j(z) - j + 1) \\ &> v(z), \end{aligned}$$

de classe \mathcal{C}^∞ parce que la somme est localement finie (exercice), est strictement plurisous-harmonique partout dans Ω , et comme elle est supérieure à la fonction d'exhaustion v , elle satisfait aussi (exercice) la condition (2).

Enfin par construction :

$$u|_K = v_0|_K + 0 < 0 \quad \text{et} \quad u|_{\Omega \setminus \omega} > v|_{\Omega \setminus \omega} > 0. \quad \square$$

Avant d'énoncer le théorème fondamental de la théorie, conceptualisons la propriété (2) ci-dessus.

Définition 12.9. [Fonctions d'exhaustion] Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, une fonction $u: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$ est dite *d'exhaustion* lorsque l'adhérence dans Ω de tous ses ensembles de sous-niveau :

$$\overline{\{z \in \Omega: u(z) < c\}}^\Omega = \overline{\{u < c\}}^{\mathbb{C}^n} \cap \Omega \quad (\forall c \in \mathbb{R}),$$

sont des ensembles *compacts*, contenus dans Ω . On dit que ces $\{u < c\}$ sont *relativement compacts dans Ω* .

Autrement dit, toutes ces adhérences relatives $\overline{\{u < c\}}^\Omega$ sont fermées bornées dans \mathbb{C}^n et à distance > 0 de $\partial\Omega$, d'après une caractérisation de la compacité déjà exprimée dans le chapitre consacré aux domaines d'holomorphic.

Pour une fonction arbitraire $u : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty[$, on a toujours :

$$\Omega = \bigcup_{c \in \mathbb{R}} \{u < c\},$$

mais ces ensembles $\{u < c\}$ ou leur adhérence $\overline{\{u < c\}}$ peuvent en général aller jusqu'à $\partial\Omega$. L'intérêt d'une vraie fonction d'exhaustion est donc de remplir Ω par des ensembles de sous-niveau relativement compacts.

Lorsque la fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue, puisque pour tout $c \in \mathbb{R}$ et tout $\varepsilon > 0$ on a :

$$\overline{\{u < c\}} \subset \{u \leq c\} \subset \{u < c + \varepsilon\} \subset \overline{\{u < c + \varepsilon\}}$$

— la première et la troisième inclusions pouvant être strictes ! —, il revient au même de demander la compacité de chaque :

$$\{z \in \Omega : u(z) \leq c\}.$$

Le résultat suivant, corollaire de ce qui précède, est très important pour toute la théorie.

Théorème 12.10. *Pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, on a équivalence entre :*

- (i) Ω est pseudoconvexe ;
- (ii) il existe une fonction lisse $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ strictement plurisousharmonique :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k > 0 \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega \setminus \{0\}),$$

qui est d'exhaustion, i.e. telle que pour tout $c \in \mathbb{R}$, l'ensemble de sous-niveau :

$$\{z \in \Omega : u(z) \leq c\}$$

est compact dans Ω .

Démonstration. Effectuer la synthèse entre le Théorème 12.2 et le Théorème 12.7 dans lequel $K := \emptyset$ et $\omega = \Omega$. □

Rappelons que la caractérisation de la pseudoconvexité offerte par la propriété (iii) du Théorème 12.2 incorporait les adhérences des enveloppes plurisousharmoniques des compacts $K \subset \Omega$, mais en fait, ces enveloppes sont fermées.

Proposition 12.11. *Dans un ouvert pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ l'enveloppe $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$ de tout compact $K \subset \Omega$ est fermée, et compacte.*

Preuve. Soit un point quelconque $\zeta \in \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$. Alors le 'gros' ouvert $\omega := \Omega \setminus \{\zeta\}$ est un voisinage ouvert de $\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}$ auquel le Théorème 12.7 s'applique. Ainsi, il existe $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ avec $u|_K < 0$ d'où aussi $u|_{\widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}} < 0$ telle que $u|_{\Omega \setminus \omega} = u(\zeta) > 0$. Comme u est continue :

$$\zeta \notin \widehat{K}_{\text{PSH}(\Omega)}. \quad \square$$

13. Exercices

Exercice 1. Si $h: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^{n'}$ est une application holomorphe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ à valeurs dans $\mathbb{C}^{n'}$, et si $u' \in \text{PSH}(\Omega')$ est plurisousharmonique dans un ouvert $\Omega' \supset h(\Omega)$, montrer que la composée $u := u' \circ h$ est plurisousharmonique dans Ω . **Indication:** Traiter d'abord le cas où $u' \in \mathcal{C}^2(\Omega')$.

Exercice 2. Soit un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soient $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ avec $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$ les coordonnées canoniques, et soit la norme euclidienne $\|z\|^2 := |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2$ par rapport à laquelle on calcule :

$$\text{dist}(z, \partial\Omega) := \inf \{ \|z - \zeta\| : \zeta \in \partial\Omega \}.$$

Avec les deux opérateurs réels $d = \partial + \bar{\partial}$ et $d^c := \frac{1}{2i\pi}(\partial - \bar{\partial})$, introduisons les formes différentielles :

$$\begin{aligned} \alpha &:= \frac{1}{2} dd^c \|z\|^2, \\ \beta &:= dd^c \log \|z\|^2, \\ \gamma &:= d^c \log \|z\|^2 \wedge \beta^{n-1}. \end{aligned}$$

(a) Pour toute fonction plurisousharmonique $u \in \text{PSH}(\Omega)$ montrer qu'en tout point $z_0 \in \Omega$ et pour tout rayon $0 < r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, on a l'inégalité de sous-moyenne :

$$u(z_0) \leq \frac{1}{r^{2n}} \int_{\|z-z_0\| < r} u(z) \alpha^n(w).$$

(b) Pour toute fonction plurisousharmonique $u \in \text{PSH}(\Omega)$ avec $u \not\equiv -\infty$, montrer qu'en tout point $z_0 \in \Omega$, pour toute paire de rayons $0 < s \leq r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$-\infty < \int_{\|z\|=s} u(z_0 + z) \gamma(z) \leq \int_{\|z\|=r} u(z_0 + z) \gamma(z) < \infty.$$

Exercice 3. Après avoir vérifié que la distance signée à un bord lisse a une différentielle jamais nulle, démontrer le Lemme 10.2. **Indication:** Utiliser le théorème des fonctions implicites.

Exercice 4. EE

Exercice 5. EE

Résolution d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Rappels (sans démonstrations) sur la transformée de Fourier

Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées canoniques sur l'espace euclidien réel \mathbb{R}^d de dimension $d \geq 1$, muni de la norme :

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2},$$

dérivant du produit scalaire :

$$x \cdot x' := x_1 x'_1 + \dots + x_d x'_d.$$

La *transformée de Fourier* d'une fonction Lebesgue-intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ à valeurs complexes est la fonction d'une variable auxiliaire $\xi \in \mathbb{R}^d$ définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\xi \cdot x} dx.$$

Une simple inégalité triangulaire garantit alors que :

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)},$$

et le théorème de continuité des intégrales à paramètres montre que $\xi \mapsto \widehat{f}(\xi)$ est continue. En outre, le célèbre *Lemme de Riemann-Lebesgue* montre que :

$$0 = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi).$$

De plus, si on emploie le symbole :

$$\mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow \infty}^0$$

pour désigner l'espace des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini de \mathbb{R}^d , on démontre que :

$$\widehat{(\cdot)}: L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow \infty}^0$$

est une application injective.

Malheureusement, comme la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ n'appartient la plupart du temps *pas* à $L^1(\mathbb{R}^d)$, il est impossible en général de réappliquer

une deuxième fois la transformée de Fourier — modifiée seulement par un changement de signe dans l'exponentielle — afin d'obtenir la *formule d'inversion de Fourier* :

$$f(x) \stackrel{?}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi x \cdot \xi} d\xi,$$

formule naturelle dont on peut deviner l'existence en effectuant un certain passage à la limite dans la représentation d'une fonction lisse sur un cercle comme somme de sa série de Fourier, et en faisant tendre le rayon du cercle vers l'infini.

Afin d'élaborer une théorie harmonieuse, élémentaire, séduisante, on introduit alors classiquement l'*espace de Schwartz*, lequel consiste en les fonctions de classe \mathcal{C}^∞ dont toutes les dérivées partielles décroissent très rapidement à l'infini :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^k \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x) \right| < \infty, \forall k \in \mathbb{N}, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \right\},$$

et on démontre alors le fait remarquable que la transformée de Fourier en est un *endomorphisme* :

$$\widehat{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

Il importe d'observer qu'il contient l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à support compact :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \supset \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d),$$

pour la raison triviale qu'être identiquement nul au voisinage de l'infini garantit de décroître très rapidement !

Avant de revenir à l'inversion de Fourier, deux propriétés élémentaires très souvent utiles, satisfaites dans d'autres espaces que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, doivent être mentionnées.

La première montre qu'à travers le miroir de la transformation $\widehat{(\cdot)}$, les dérivations deviennent des multiplications monomiales :

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) \quad (f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)),$$

où, pour des raisons de contraction notacionnelle, on a abrégé :

$$\partial_x^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \quad \text{et} \quad (2i\pi\xi)^\alpha := (2i\pi)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_d^{\alpha_d}.$$

La seconde propriété élémentaire montre que le *produit de convolution* :

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) dy = g * f(x),$$

commutatif, entre deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, fonction qui appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, se transmue en *multiplication* à travers le prisme de Fourier :

$$\widehat{f * g}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi),$$

ce dernier produit appartenant encore à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Si donc on envisage $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ comme plongé dans l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable sur \mathbb{R}^d au sens de Lebesgue, le théorème fondamental suivant réalise l'un des buts principaux de la théorie de base.

Théorème 1.1. *La transformée de Fourier :*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi\xi \cdot x} dx$$

établit un endomorphisme isomorphe de l'espace de Schwartz :

$$\widehat{(\cdot)}: \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$$

d'inverse donné par la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi x \cdot \xi} d\xi,$$

isomorphisme qui est de plus isométrique pour la norme L^2 induite :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \quad (\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)). \quad \square$$

Grâce à ce résultat absolument fondamental, en utilisant le fait connu que l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est *dense* dans $L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^d),$$

d'où découle trivialement :

$$\overline{\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\mathbb{R}^d),$$

on réussit en utilisant des suites de Cauchy appropriées à *prolonger* la transformée de Fourier en un opérateur linéaire :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: L^2(\mathbb{R}^d) &\longrightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \\ f &\longmapsto \mathcal{F}(f), \end{aligned}$$

qui satisfait l'*identité de Plancherel* :

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Les démonstrations de tous ces énoncés peuvent être trouvées dans plusieurs manuels d'Analyse.

2. Équation $L(u) = f$

Toujours dans \mathbb{R}^d , considérons maintenant un opérateur linéaire aux dérivées partielles :

$$L := \sum_{\substack{(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d \\ |\alpha| \leq o}} a_\alpha \partial_x^\alpha,$$

à coefficients $a_\alpha \in \mathbb{C}$ *constants*, où $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, et où $o \in \mathbb{N}$ est l'*ordre* de L en supposant bien sûr qu'il existe au moins un $a_\alpha \neq 0$ avec :

$$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = o.$$

Le cas de coefficients $a_\alpha = a_\alpha(x)$ variables, qui ouvre sur des problèmes mathématiques innombrables, ne sera pas discuté ici.

Problème 2.1. *Résoudre l'équation aux dérivées partielles scalaire :*

$$L(u) = f,$$

de second membre une fonction quelconque $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Trois exemples classiques de telles équations sont l'équation de Laplace dans \mathbb{R}^d :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = f,$$

l'équation de la chaleur dans \mathbb{R}^{d+1} :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} = f,$$

ou encore l'équation des ondes dans \mathbb{R}^{d+1} :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_d^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f.$$

Dans ces trois problèmes d'origine physique, on sait que la transformée de Fourier peut être exploitée d'une manière clé pour en simplifier la résolution. Et pour le cas général qui nous intéresse, si nous nous souvenons que :

$$\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi) = (2i\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi),$$

il suffit d'appliquer $\widehat{(\cdot)}$ pour métamorphoser l'équation aux dérivées partielles en une simple équation algébrique :

$$P(\xi) \widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

en termes du *polynôme caractéristique* de L :

$$P(\xi) := \sum_{|\alpha| \leq o} a_\alpha (2i\pi\xi)^\alpha.$$

Rien n'est moins tentant alors que de résoudre rationnellement :

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{\widehat{f}(\xi)}{P(\xi)},$$

et de s'imaginer qu'une simple transformée de Fourier inverse :

$$u := \frac{\widehat{f}^{-1}}{P}$$

va offrir une solution u sur un plateau d'argent.

Hélas, dans un cadre aussi général que celui considéré ici, une telle division par $P(\xi)$ introduit nécessairement des singularités, sans compter que la transformée de Fourier inverse peut, dans de nombreuses circonstances, ne pas être bien définie. Par ailleurs, comme l'équation homogène $L(u) = 0$ possède en général un « très gros » noyau, les solutions u sont très loin d'être uniques.

Or une issue intermédiaire à ces difficultés, motivée par des découvertes physiques remontant au XVII^{ème} siècle, consiste à admettre l'existence de solutions « faibles », en un sens plus large, maintenant conceptualisées dans le cadre de la théorie des espaces de Hilbert, et de la théorie des distributions de Schwartz.

3. Solutions faibles

Afin de décrire quelque peu les origines profondes de ce concept de « solutions faibles », vivant dans un espace plus gros que $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, fixons les idées en travaillant dans un ouvert :

$$\Omega \subset \mathbb{R}^d,$$

et considérons l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ des fonctions lisses à support compact dans Ω .

Théorème 3.1. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$:*

$$\overline{\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{L^2}} = L^2(\Omega).$$

Démonstration. Même si cet énoncé est censé être déjà connu du lecteur, résumons-en les arguments.

Soit une fonction $f \in L^2(\Omega)$. Avec un grand entier $M \gg 1$, on commence par tronquer f :

$$g_M(x) := \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } |x| \leq M \text{ et } |f(x)| \leq M \text{ et } \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \frac{1}{M}, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Grâce au théorème de convergence dominée, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $M = M(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$\|g_M - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Observons que g_M est une fonction L^2 à support compact dans Ω . Il suffit alors d'approximer g_M en norme L^2 par des fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact dans Ω .

Pour cela, la méthode classique, dite *de régularisation*, consiste à « lisser » g_M en la convolant avec une bonne approximation de l'identité.

Soit donc une fonction réelle $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :

- $\varphi \geq 0$;
- $\text{supp } \varphi \subset \{|x| \leq 1\}$;
- $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) dx = 1$.

On peut par exemple prendre :

$$\varphi(x) := \begin{cases} c e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} & \text{lorsque } |x| < 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geq 1, \end{cases}$$

avec la constante :

$$c := \frac{1}{\int_{|x| < 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx}.$$

Ensuite, pour $\delta > 0$ réel petit, on introduit les renormalisées :

$$\varphi_\delta(x) := \frac{1}{\delta^d} \varphi\left(\frac{x}{\delta}\right),$$

puis les convolées :

$$g_M * \varphi_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_M(x-y) \varphi_\delta(y) dy.$$

En choisissant $\delta < \frac{1}{2M}$, on assure que :

$$\text{supp } g_M * \varphi_\delta \Subset \Omega$$

est encore à support compact dans Ω , car situé à distance $\geq \frac{1}{2M}$ de $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$. D'après des propriétés bien connues, $g_M * \varphi_\delta$ est \mathcal{C}^∞ .

Le travail principal consiste alors à établir que :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \|g_M * \varphi_\delta - g_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et il existe de nombreuses variations concernant la démonstration, avec utilisation de théorèmes de densité préliminaire dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, ou avec examen des points de Lebesgue de g_M — le lecteur est renvoyé aux ouvrages d'Analyse.

En admettant cela, la conclusion vient en prenant $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$\|g_M * \varphi_\delta - g_M\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon,$$

d'où par simple inégalité triangulaire $\|f - g_M * \varphi_\delta\|_{L^2} \leq \varepsilon + \varepsilon$. \square

On introduit alors le *produit scalaire* L^2 entre deux fonctions quelconques $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ à valeurs dans \mathbb{C} :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx.$$

Il munit ainsi $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ d'une structure d'espace préhilbertien, mais $(\mathcal{C}_c^\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$ n'est *jamais* complet.

Or d'après des théorèmes classiques d'analyse fonctionnelle, l'espace $L^2(\Omega)$ des fonctions mesurables $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ de carré Lebesgue-intégrable dans Ω :

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} := \sqrt{\langle u, u \rangle_{L^2(\Omega)}} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

est un espace de Hilbert, à savoir il est *complet* pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ dérivée du produit scalaire hermitien :

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) \overline{v(x)} dx \quad (u, v \in L^2(\Omega, \mathbb{C})).$$

Le fait que $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ soit dense dans $L^2(\Omega)$ s'avère essentiel pour effectuer des calculs.

Définition 3.2. L'opérateur *adjoint* de L est :

$$L^* := \sum_{|\alpha| \leq o} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \partial_x^\alpha.$$

Cet adjoint apparaît naturellement lorsqu'on effectue une intégration par parties, dans laquelle aucun terme de bord n'interfère, puisque les fonctions sont à support compact :

$$\begin{aligned}
 \langle L\varphi, \psi \rangle_{L^2} &= \left\langle \sum_{\alpha} a_{\alpha} \partial_x^{\alpha} \varphi, \psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
 &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} \int_{\Omega} \partial_x^{\alpha} \varphi(x) \cdot \overline{\psi(x)} dx \\
 &= \sum_{\alpha} a_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} \varphi(x) \cdot \partial_x^{\alpha} \overline{\psi(x)} dx \\
 &= \left\langle \varphi, \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_{\alpha} \partial_x^{\alpha} \psi \right\rangle_{L^2(\Omega)} \\
 &= \langle \varphi, L^* \psi \rangle_{L^2},
 \end{aligned}$$

le fait que les a_{α} soient constants facilitant le transfert de gauche à droite de toutes les dérivations ∂_x^{α} . En résumé :

Lemme 3.3. Pour toutes fonctions $\varphi, \psi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$:

$$\langle L\varphi, \psi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \varphi, L^* \psi \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Maintenant, de très brefs rappels sur les distributions s'avèrent nécessaires.

Définition 3.4. Une *distribution sesquilinéaire* sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est une fonctionnelle \mathbb{C} -antilinéaire :

$$\mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega) \ni \varphi \mapsto T(\varphi) \in \mathbb{C},$$

telle que, pour tout sous-ensemble compact $K \Subset \Omega$, il existe un entier $\nu = \nu(K) \in \mathbb{N}$ et une constante positive finie $0 \leq C = C(K) < \infty$ satisfaisant :

$$|T(\varphi)| \leq C \max_{\substack{x \in K \\ |\beta| \leq \nu}} |\partial_x^{\beta} \varphi(x)| \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega), \text{ supp } \varphi \subset K).$$

On note alors $\mathcal{D}'(\Omega)$ l'espace des distributions sur Ω .

Le plus souvent, $\nu = \nu(\Omega)$ et $C = C(\Omega)$ sont indépendants du compact $K \Subset \Omega$. Par exemple, toute fonction $u \in L^2(\Omega)$ peut être envisagée comme la distribution :

$$u(\varphi) := \int_{\Omega} u(x) \overline{\varphi(x)} dx,$$

avec $\nu(K) = 0$ pour tout compact $K \Subset \Omega$.

L'intérêt majeur des distributions, c'est qu'on peut toujours les dériver jusqu'à n'importe quel ordre. En effet, pour $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^d$ quelconques, la dérivée :

$$\partial_x^{\alpha} T =: S \in \mathcal{D}'(\Omega)$$

est définie par son action :

$$S(\varphi) := T\left((-1)^{|\alpha|} \partial_x^{\alpha} \varphi\right) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)),$$

ce membre de droite ayant un sens, puisque φ est indéfiniment dérivable.

Alors par sesquilinearité, pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\lambda \partial_x^{\alpha} T = T\left((-1)^{|\alpha|} \bar{\lambda} \partial_x^{\alpha} \varphi\right),$$

et ainsi, lorsque $T = Lu$ avec $u \in L^2(\Omega)$ est la L -dérivée avec $L = \sum a_\alpha \partial_x^\alpha$ de la distribution u mentionnée plus haut, il vient :

$$(3.5) \quad Lu(\varphi) = u(L^*\varphi).$$

En revenant maintenant à l'équation à résoudre :

$$Lu = f,$$

si l'on se place dans l'espace de Hilbert $L^2(\Omega)$, avec $f \in L^2(\Omega)$, en recherchant une solution $u \in L^2(\Omega)$, on peut interpréter cette équation comme égalité entre deux distributions, et alors pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_{\Omega} u \cdot \overline{L^*\varphi} = u(L^*\varphi) \\ &= Lu(\varphi) \\ &= f(\varphi) = \int_{\Omega} f \overline{\varphi} = \langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

La notion de *solution faible* à une équation aux dérivées partielles propose alors d'*élargir* l'espace dans lequel on recherche des solutions — ce qui augmente les chances d'en trouver! —, tout en contournant, grâce à la dualité distributionnelle, le fait qu'on ne peut *pas* en général dériver des fonctions L^2 .

Définition 3.6. Une fonction $u \in L^2(\Omega)$ est une *solution faible* de l'équation aux dérivées partielles $Lu = f$, de membre de droite $f \in L^2(\Omega)$, si :

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)).$$

Pour motiver encore mieux ce concept, énonçons alors quelques observations naturelles. Pour $\nu \geq 1$ entier, soit $\mathcal{C}^\nu(\Omega)$ l'espace des fonctions continûment dérivables dans toutes les directions jusqu'à l'ordre ν :

$$\mathcal{C}^\nu(\Omega) = \left\{ f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}: \partial_x^\beta f \in \mathcal{C}^0(\Omega), \forall |\beta| \leq \nu \right\}.$$

Lorsqu'on cherche à résoudre $Lu = f$ avec, disons, un membre de droite continu $f \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, il est naturel de supposer que $u \in \mathcal{C}^o(\Omega)$, où o est l'ordre de $L = \sum_{|\alpha| \leq o} a_\alpha \partial_x^\alpha$.

En revenant à l'intégration par parties du Lemme 3.3, un simple examen convainc aisément que sa formule :

$$\langle Lu, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2(\Omega)}$$

reste toujours vraie pour $u \in \mathcal{C}^o(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, car les termes de bord disparaissent aussi. L'intérêt de cette égalité est que son membre de droite existe toujours, car $\varphi \in \mathcal{C}^\infty$ peut être dérivée par L^* , et alors, en remplaçant $Lu = f$, on obtient à nouveau, comme en théorie générale des distributions :

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^*\varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)),$$

ce qui re-justifie la notion de solution faible.

L'Exercice 1 donne, pour l'équation des ondes $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$, une justification supplémentaire, d'ordre physique, à la nécessité des solutions faibles.

4. Théorème d'existence principal

Nous pouvons maintenant formuler le théorème général qui garantit l'existence de solutions *faibles* aux opérateurs différentiels à coefficients constants.

Théorème 4.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine borné. Pour tout opérateur aux dérivées partielles :*

$$L = \sum_{|\alpha| \leq o} a_\alpha \partial_x^\alpha,$$

à coefficients constants $a_\alpha \in \mathbb{C}$, il existe un opérateur linéaire borné :

$$K = K_L: L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega),$$

qui fournit universellement la solution de $L(u) = f$ pour tout membre de droite $f \in L^2(\Omega)$ au sens où :

$$L(K(f)) = f \quad (\forall f \in L^2(\Omega)).$$

Même en dimension $d = 1$, l'unicité est mise en défaut — penser par exemple à $L = \frac{\partial}{\partial x}$ dans $\mathbb{R} \ni x$, opérateur pour lequel toute solution $\frac{\partial u}{\partial x} = f(x)$ peut être perturbée en la solution $u(x) + \text{constante}$.

Démonstration. Le cœur technique principal de l'argumentation est une inégalité que nous énonçons maintenant, mais dont la démonstration ne pourra être donnée, au moyen de la transformée de Fourier, que dans la Section 5 suivante.

Lemme 4.2. [Principal] *Il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que toute fonction $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ satisfait :*

$$\|\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|L^*(\psi)\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

La signification de cet énoncé peut aisément être dévoilée. Si l'on s'imaginait que l'opérateur $L: E \longrightarrow F$ agissait entre espaces vectoriels de dimension finie, le fait qu'il soit surjectif équivaudrait au fait que son adjoint $L^*: F^* \longrightarrow E^*$ entre espaces duaux soit injectif, et alors une inégalité du type $\|\psi\|_{F^*} \leq c \|L^*(\psi)\|_{E^*}$, garantissant l'injectivité, serait automatiquement satisfaite. Rappelons ici que $L^2(\Omega)^* \cong L^2(\Omega)$ est auto-dual, d'après le théorème de représentation de Riesz.

Mais en dimension infinie, on a réellement besoin d'une telle estimée quantitative. Démontrons donc ce Théorème 4.1 en admettant le Lemme 4.2.

Notons $H_0 := \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ l'espace des fonctions lisses à support compact muni de la norme :

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H_0} := \langle L^* \varphi, L^* \psi \rangle_{L^2}.$$

Puisque ce produit est linéaire et sesquilinéaire par rapport à ses deux entrées, et puisque l'inégalité-clé du Lemme 4.2 est satisfaite, c'est un espace préhilbertien.

L'Exercice 2 rappelle alors que la *complétion* H de H_0 est un vrai espace de Hilbert (complet !), unique à isomorphisme près, qui satisfait :

- (1) $H_0 \subset H$;
- (2) $\langle \varphi, \psi \rangle_H = \langle \varphi, \psi \rangle_{H_0}$ pour tous $\varphi, \psi \in H_0$;
- (3) H_0 est dense dans H .

De plus, grâce à l'inégalité-clé en question, toute suite de Cauchy en norme $\|\cdot\|_{H_0}$ est à nouveau une suite de Cauchy en norme L^2 , et donc on peut voir H comme un sous-espace :

$$H_0 \subset H \subset L^2(\Omega).$$

Affirmation 4.3. *L'opérateur L^* initialement défini comme :*

$$L^* : (H_0, \|\cdot\|_{H_0}) \longrightarrow (L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$$

et trivialement borné :

$$\|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)} = \|\psi\|_{H_0} \leq 1 \cdot \|\psi\|_{H_0},$$

se prolonge à la complétion $H \supset H_0$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{L^*} & L^2(\Omega) \\ \uparrow & \nearrow L^* & \\ H_0 & & \end{array}$$

comme opérateur satisfaisant encore :

$$\|L^*\psi\|_{L^2(\Omega)} \leq 1 \cdot \|\psi\|_H \quad (\forall \psi \in H).$$

Preuve. Étant donné $\psi \in H$, soit par densité une suite $(\psi_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $\psi_n \in H_0$ avec :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\|_H.$$

Alors pour tous entiers n_1, n_2 :

$$\|L^*(\psi_{n_1}) - L^*(\psi_{n_2})\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi_{n_1} - \psi_{n_2}\|_{H_0} \xrightarrow{n_1, n_2 \rightarrow \infty} 0,$$

ce qui montre que $(L^*(\psi_n))_{n=1}^\infty$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, lequel est complet, donc il existe une limite dans $L^2(\Omega)$.

En fait, cette limite est *indépendante* de la suite approximante $(\psi_n)_{n=1}^\infty$, car si $(\tilde{\psi}_n)_{n=1}^\infty$ est une autre telle suite avec donc :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}_n - \psi\|_H,$$

par soustraction et par inégalité triangulaire, il vient :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{\psi}_n - \psi_n\|_H,$$

d'où :

$$\|L^*(\tilde{\psi}_n) - L^*(\psi_n)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\tilde{\psi}_n - \psi_n\|_H \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Pour terminer, la convergence en norme connue (exercice de révision) :

$$\begin{aligned} \left(0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n - \psi\|_H\right) &\implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|\psi_n\|_H = \|\psi\|_H\right), \\ \left(0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|L^*(\psi_n) - L^*(\psi)\|_H\right) &\implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|L^*(\psi_n)\|_H = \|L^*(\psi)\|_H\right), \end{aligned}$$

nous permet, en prenant la limite dans les inégalités $\|L^*\psi_n\|_{L^2} \leq \|\psi_n\|_H$, d'obtenir comme annoncé, pour tout $\psi \in H$:

$$\|L^*(\psi)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\psi\|_H. \quad \square$$

Maintenant, puisque l'objectif est de résoudre :

$$Lu = f,$$

fixons $f \in L^2(\Omega)$, et introduisons la forme \mathbb{C} -linéaire $\ell: \mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par :

$$\ell(\varphi) := \langle \varphi, f \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Affirmation 4.4. Elle se prolonge comme forme linéaire bornée définie sur la complétion H de $H_0 = \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{C} \\ \uparrow & \nearrow \ell & \\ H_0 & & \end{array}$$

Démonstration. En effet, l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivie d'une nouvelle application du Lemme Principal 4.2 donnent pour $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ quelconque :

$$\begin{aligned} |\ell(\varphi)| &= |\langle \varphi, f \rangle_{L^2(\Omega)}| \leq \|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|L^* \varphi\|_{L^2(\Omega)} \|f\|_{L^2(\Omega)} \\ &= c' \|\varphi\|_H, \end{aligned}$$

avec la constante $c' := c \|f\|_{L^2(\Omega)}$. Ainsi, ℓ est bornée sur le sous-espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) \subset H$ dense pour la norme induite $\|\cdot\|_H$, et en raisonnant avec des suites de Cauchy (utiliser l'Affirmation 4.3), on se convainc aisément que ℓ se prolonge à H , avec la même norme d'opérateur

$$\|\ell\| \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad \square$$

Ensuite, comme H est un espace de Hilbert, on peut appliquer le théorème de représentation de Riesz. Ainsi, il existe une *unique* fonction $v \in H$ avec :

$$\|v\|_H = \|\ell\| \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

au moyen de laquelle la fonctionnelle ℓ se représente comme simple produit scalaire :

$$\ell(\varphi) = \langle \varphi, v \rangle_H = \langle L^* \varphi, L^* v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in H).$$

Si on pose :

$$u := L^* v,$$

en restriction à $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on obtient donc :

$$\langle \varphi, f \rangle_{L^2(\Omega)} = \ell(\varphi) = \langle L^* \varphi, u \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty),$$

d'où par simple conjugaison :

$$\langle f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle u, L^* \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)),$$

ce qui achève de démontrer que la fonction $u \in L^2(\Omega)$ ainsi obtenue est solution faible de l'équation $Lu = f$.

Enfin, puisque v , donc $u = L^* v$, sont uniques, on peut poser :

$$K(f) := u.$$

En inspectant les arguments qui précèdent, on se convainc alors que l'application :

$$f \mapsto K(f)$$

est \mathbb{C} -linéaire. De plus, on a par construction :

$$\begin{aligned} \|Kf\|_{L^2(\Omega)} &= \|u\|_{L^2(\Omega)} = \|L^*v\|_{L^2(\Omega)} = \|v\|_H = \|\ell\| \\ &\leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui montre que l'opérateur $K : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ est bien borné. \square

5. Démonstration de l'estimée-clé

Pour compléter la démonstration du Théorème 4.1, il reste à établir l'estimée du Lemme 4.2, à savoir :

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|L^*\varphi\|_{L^2(\Omega)} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)).$$

Le raisonnement va exploiter le fait que si une fonction intégrable $f \in L_c^1(\mathbb{R})$ est à support compact, sa transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx$, initialement définie pour $\xi \in \mathbb{R}$, se prolonge en fait comme fonction holomorphe *entière* à tous les $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$. *In fine*, ce fait va réduire le problème à l'inégalité simple suivante concernant le produit d'un polynôme par une fonction holomorphe.

Lemme 5.1. *Soit un polynôme complexe unitaire de degré $m \geq 0$:*

$$P(z) = z^m + a_1 z^{m-1} + \cdots + a_{m-1} z + a_m \quad (a_i \in \mathbb{C}).$$

Alors pour toute fonction holomorphe $F \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$ définie sur \mathbb{C} , on a :

$$|F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}) F(e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Cette inégalité est d'ailleurs satisfaite plus généralement par toute fonction holomorphe $F \in \mathcal{O}(\mathcal{V}(\mathbb{D}))$ définie seulement dans un voisinage ouvert du disque unité fermé $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$.

Le cas spécial $P = 1$:

$$(5.2) \quad |F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |F(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

n'est autre que l'inégalité de sous-moyenne connue, satisfaite par la fonction sous-harmonique $|F|^2$.

Démonstration. Commençons par factoriser :

$$P(z) = \prod_{|\alpha| \geq 1} (z - \alpha) \prod_{|\beta| < 1} (z - \beta) =: P_1(z) P_2(z),$$

en séparant les racines qui sont hors, ou à l'intérieur, du disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, et observons que :

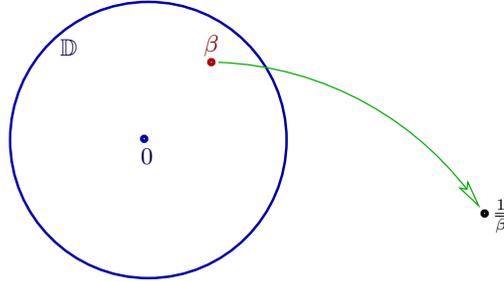
$$|P_1(0)| = \prod_{|\alpha| \geq 1} |\alpha| \geq 1.$$

Maintenant, si on appliquait (5.2) à la fonction sous-harmonique $|PF|^2 = |P_1 P_2 F|^2$,

$$? \leq |P_2(0) F(0)|^2 \leq |P_1(0) P_2(0) F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta}) F(e^{i\theta})|^2 d\theta$$

pour atteindre à gauche $|F(0)|^2$, on serait bloqué par le fait que :

$$|P_2(0)| = \prod_{|\beta| < 1} |\beta| < 1.$$



Pour régler ce problème, l'astuce va consister à « faire sauter » ces racines « gênantes » β hors du disque unité.

À cet effet, rappelons que le *facteur de Blaschke* :

$$B_\beta(z) := \frac{\beta - z}{1 - \bar{\beta}z}$$

vaut identiquement 1 sur le cercle unité (exercice) :

$$|B_\beta(e^{i\theta})| \equiv 1 \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}).$$

Si donc nous introduisons à la place de P_2 le nouveau polynôme :

$$\tilde{P}_2(z) := \prod_{|\beta| < 1} (1 - \bar{\beta}z),$$

avec $\tilde{P}_2(0) = 1$ qui satisfait :

$$P_2(z) = \prod_{|\beta| < 1} (\beta - z) = \prod_{|\beta| < 1} B_\beta(z) \prod_{|\beta| < 1} \tilde{P}_2(z),$$

d'où crucialement :

$$|P_2(e^{i\theta})| = |\tilde{P}_2(e^{i\theta})| \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}),$$

puisqu'il s'agit d'effectuer une intégration sur le cercle unité $\{e^{i\theta}\}$, ceci nous permet :

$$\begin{aligned} |F(0)|^2 &\leq |P_1(0) \tilde{P}_2(0) F(0)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_1(e^{i\theta}) \tilde{P}_2(e^{i\theta}) F(e^{i\theta})|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P_1(e^{i\theta}) P_2(e^{i\theta}) F(e^{i\theta})|^2 d\theta \end{aligned}$$

de remplacer \tilde{P}_2 par P_2 dans l'intégrale — *tricky, is'nt it?* □

Démonstration du Lemme 4.2. Maintenant, il s'agit d'établir qu'il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que :

$$\|\varphi\|_{L^2} \leq c \|L^* \varphi\|_{L^2} \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)).$$

Soit $f \in L_c^2(\mathbb{R})$ une fonction de carré intégrable à support compact, disons :

$$\text{supp } f \subset [-M, M],$$

pour un réel $M \gg 1$ assez grand. L'argument ξ de sa transformée de Fourier :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-M}^M f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx,$$

peut être remplacé par un nombre complexe $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire $i\eta \in i\mathbb{R}$ arbitraire :

$$\widehat{f}(\xi + i\eta) = \int_{-M}^M \underbrace{f(x) e^{2\pi x\eta}}_{=: g(x)} e^{-2i\pi\xi x} dx,$$

car l'intégrale sur $[-M, M]$ existe toujours, et un théorème classique de dérivation sous le signe intégral assure que $\widehat{f}(\zeta) = \int_{-M}^M f(x) e^{-2i\pi\zeta x} dx$ se prolonge comme fonction holomorphe de $\zeta = \xi + i\eta$ définie sur le plan complexe \mathbb{C} tout entier.

Nous affirmons que l'on a la majoration cruciale :

$$(5.3) \quad \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi + i\eta)|^2 d\xi \leq e^{4\pi M|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx,$$

car la fonction $g(x) := f(x) e^{2\pi x\eta}$ introduite incidemment ci-dessus satisfait l'identité de Plancherel :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi + i\eta)|^2 d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{g}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \\ &= \int_{-M}^M |f(x)|^2 e^{4\pi x\eta} dx \leq e^{4\pi M|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

En revenant à l'opérateur différentiel écrit en dimension $d = 1$:

$$L = \sum_{0 \leq k \leq o} a_k \left(\frac{d}{dx} \right)^k \quad (a_o \neq 0),$$

si on le multiplie par une constante appropriée (ce qui ne change rien à l'objectif) :

$$L \mapsto \frac{1}{(2i\pi)^o a_o} L,$$

on peut garantir que $a_o = \frac{1}{(2i\pi)^o}$, et alors son adjoint :

$$L^* = \sum_{0 \leq k \leq o} (-1)^k \bar{a}_k \left(\frac{d}{dx} \right)^k,$$

aura pour polynôme caractéristique :

$$Q(\xi) = Q(L^*)(\xi) = \sum_{0 \leq k \leq o} (-1)^k \bar{a}_k (2i\pi\xi)^k$$

un polynôme qui devient *unitaire* en ξ , avec bien sûr :

$$\widehat{L^* \varphi}(\xi) = Q(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})).$$

Maintenant, comme l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ est borné, il existe $M \gg 1$ assez grand pour que $\Omega \subset [-M, M]$, et alors l'inégalité cruciale (5.3) appliquée à $f := L^* \varphi$ donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi + i\eta) \widehat{\varphi}(\xi + i\eta)|^2 d\xi \leq e^{4\pi M|\eta|} \int_{-\infty}^{\infty} |L^* \varphi(x)|^2 dx.$$

Ensuite, on pose dans cette inégalité $\eta := \sin \theta$ avec $\theta \in \mathbb{R}$ quelconque, et on effectue le changement de variable translationnel $\xi \mapsto \xi + \cos \theta$ dans l'intégrale de gauche :

(5.4)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| Q(\xi + \cos \theta + i \sin \theta) \widehat{\varphi}(\xi + \cos \theta + i \sin \theta) \right|^2 d\xi \leq e^{4\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |L^* \varphi(x)|^2 dx.$$

Par ailleurs, une application du Lemme 5.1 à la fonction holomorphe entière $F(z) := \widehat{\varphi}(\xi + z)$ et au polynôme unitaire $Q(\xi + z)$ donne :

$$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(\xi + e^{i\theta}) \widehat{\varphi}(\xi + e^{i\theta})|^2 d\theta.$$

Pour terminer, en partant de l'identité de Plancherel satisfaite par $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, une intégration par rapport à ξ de cette dernière inégalité :

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |Q(\xi + e^{i\theta}) \widehat{\varphi}(\xi + e^{i\theta})|^2 d\theta d\xi \\ \text{[Fubini]} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^{\infty} |Q(\xi + e^{i\theta}) \widehat{\varphi}(\xi + e^{i\theta})|^2 d\xi \\ \text{[Inégalité (5.4)]} &\leq 1 \cdot e^{4\pi M} \int_{-\infty}^{\infty} |L^* \varphi(x)|^2 dx \\ &=: c \|L^* \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

fait aboutir à l'inégalité désirée, en dimension $d = 1$. En résumé :

Proposition 5.5. *Étant donné un ouvert borné non vide $\Omega \subset [-M, M] \subset \mathbb{R}$ avec $M > 0$, pour tout entier $o \geq 1$ et tous coefficients complexes $a_1, \dots, a_o \in \mathbb{C}$, l'opérateur à coefficients constants :*

$$L := \frac{1}{(2i\pi)^o} \left(\frac{d}{dx} \right)^o + \sum_{1 \leq k \leq o} a_k \left(\frac{d}{dx} \right)^{o-k}$$

a un adjoint L^* qui satisfait l'estimée uniforme suivante pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq e^{4\pi M} \|L^* \varphi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \quad \square$$

Le cas général de la dimension $d \geq 1$ quelconque s'atteint par une adaptation économique de ces arguments, comme suit.

L'adjoint de l'opérateur $L = \sum a_\alpha \partial_x^\alpha$ étant $L^* = \sum (-1)^{|\alpha|} \bar{a}_\alpha \partial_x^\alpha$, il est visible qu'en remplaçant $L \mapsto \lambda L$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $L^* \mapsto \bar{\lambda} L^*$. Or comme il existe $\alpha \in \mathbb{N}^d$ avec $|\alpha| = o$ tel que $a_\alpha \neq 0$, si on décompose le polynôme caractéristique de L^* :

$$Q(\xi) = Q(L^*)(\xi) = Q_o(\xi) + R(\xi),$$

en spécifiant sa partie polynomiale homogène $0 \neq Q_o(\xi)$ de degré maximal o , avec un polynôme-reste $R(\xi) \in \mathbb{C}[\xi]$ de degré $\leq o - 1$, puisqu'il existe au moins un $\xi^0 \in \mathbb{R}^d$ de norme $|\xi^0| = 1$ en lequel $Q_o(\xi^0) \neq 0$, il est clair qu'en remplaçant :

$$L \mapsto \frac{1}{Q_o(\xi^0)} L,$$

ce qui ne change rien à l'objectif, on peut supposer que :

$$Q_o(\xi^0) = 1.$$

Choisissons alors de nouveaux axes *orthonormés* de coordonnées $(\xi'_1, \dots, \xi'_d) \in \mathbb{R}^d$ tels que l'axe ξ'_1 soit dirigé par ce vecteur ξ^0 , d'où $\xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$ dans les nouvelles coordonnées, le changement :

$$\xi' = A \cdot \xi$$

s'effectuant au moyen d'une matrice spéciale orthogonale $A \in \text{SO}_d(\mathbb{R})$, à savoir une matrice satisfaisant ${}^t A \cdot A = \text{Id}_{d \times d}$ ainsi que $1 = \det A$, la mesure de Lebesgue étant alors inchangée :

$$d\xi'_1 \cdots d\xi'_d = d\xi_1 \cdots d\xi_d.$$

Pour alléger, renotons (ξ_1, \dots, ξ_d) ces coordonnées, en supprimant les primes.

Puisque $Q_o(1, 0, \dots, 0) = 1$, le polynôme caractéristique complet de L^* devient alors :

$$Q(\xi) = \xi_1^o + \sum_{1 \leq k \leq o} \xi_1^{o-k} S_k(\xi_2, \dots, \xi_d).$$

Or comme $\frac{\partial}{\partial x_i} \longleftrightarrow 2i\pi \xi_i$ à travers la transformée de Fourier, on doit avoir :

$$L^* = \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^o + \sum_{1 \leq k \leq o} \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{o-k} S_k \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_d} \right).$$

Observons aussi que les monômes dérivationnels dans L^* commutent, puisque tous les coefficients $a_\alpha \in \mathbb{C}$ sont constants.

Définition 5.6. En posant $S_0 := 1$, l'opérateur adjoint partiel de L est :

$$L_{2, \dots, d}^{*1} := \sum_{0 \leq k \leq o} S_k(\xi_2, \dots, \xi_d) \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{o-k}.$$

Un tel opérateur surgit en effet naturellement ici, comme nous allons le voir dans un instant. Pour commencer, la formule de Plancherel et le théorème de Fubini permettent d'écrire, pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_2 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} d\xi_d |\widehat{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi_2 \cdots d\xi_d \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)|^2 d\xi_1, \end{aligned}$$

ce qui montre qu'il est naturel d'introduire la *transformée de Fourier partielle* :

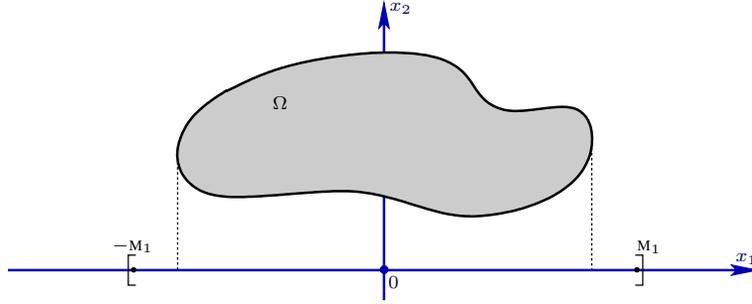
$$\mathcal{F}_{2, \dots, d}(\varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) := \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_d) e^{-2i\pi(\xi_2 x_2 + \cdots + \xi_d x_d)} dx_2 \cdots dx_d,$$

de telle sorte qu'on a :

$$\mathcal{F}_1 \left(\mathcal{F}_{2, \dots, d}(\varphi)(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_d) \right) (\xi_1) = \widehat{\varphi}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d),$$

seulement grâce à Fubini :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi \xi_1 x_1} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_d) e^{-2i\pi(\xi_2 x_2 + \cdots + \xi_d x_d)} dx_2 \cdots dx_d = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) e^{-2i\pi \xi \cdot x} dx.$$



Souvenons-nous maintenant que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est supposé borné, donc sa projection sur l'axe des x_1 est aussi bornée. Ainsi, il existe $M_1 \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Omega \subset [-M_1, M_1] \times \mathbb{R}^{d-1}.$$

Alors pour tout $(\xi_2, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$, en regardant l'intégrale qui définit la transformée de Fourier partielle ci-dessus, on voit que :

$$\text{supp} \left(x_1 \mapsto \mathcal{F}_{2,\dots,d}(\varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \right) \subset [-M_1, M_1].$$

Or les coefficients de l'opérateur adjoint partiel $L_{2,\dots,d}^{*1}$ de L , qui dépendent de (ξ_2, \dots, ξ_d) , sont constants vis-à-vis de x_1 . Nous pouvons donc appliquer la Proposition 5.5 qui a produit une estimée uniforme utile, pour obtenir :

$$(5.7) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_{2,\dots,d}(\varphi)(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_d))(\xi_1) \right|^2 d\xi_1 \leq e^{4\pi M_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \left| L_{2,\dots,d}^{*1} \mathcal{F}_{2,\dots,d}(\varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \right|^2.$$

Ensuite, on devine spontanément la commutativité :

$$(5.8) \quad L_{2,\dots,d}^{*1} \mathcal{F}_{2,\dots,d}(\varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) = \mathcal{F}_{2,\dots,d}(L^* \varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d),$$

ce qu'on vérifie en écrivant le membre de gauche :

$$\sum_{0 \leq k \leq o} S_k(\xi_2, \dots, \xi_d) \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{o-k} \mathcal{F}_{2,\dots,d}(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d),$$

puis le membre de droite :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{-2i\pi(\xi_2 x_2 + \dots + \xi_d x_d)} \left(\sum_{0 \leq k \leq o} S_k \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_d} \right) \left(\frac{1}{2i\pi} \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{o-k} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_d) \right) dx_2 \cdots dx_d,$$

pour constater visuellement qu'il coïncident bien.

L'estimée synthétique terminale

$$\begin{aligned}
\|\varphi\|_{L^2(\Omega)}^2 &= \|\widehat{\varphi}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi_2 \cdots d\xi_d \int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{F}_1(\mathcal{F}_{2,\dots,d}(\cdot, \xi_2, \dots, \xi_d))(\xi_1) \right|^2 d\xi_1 \\
[\text{Inégalité 5.7}] &\leq e^{4\pi M_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi_2 \cdots d\xi_d \left| L_{2,\dots,d}^* \mathcal{F}_{2,\dots,d}(\varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \right|^2 \\
[\text{Commutativité 5.8}] &= e^{4\pi M_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi_2 \cdots d\xi_d \left| \mathcal{F}_{2,\dots,d}(L^* \varphi)(x_1, \xi_2, \dots, \xi_d) \right|^2 \\
&= e^{4\pi M_1} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{\mathbb{R}^{d-1}} dx_2 \cdots dx_d \left| L^* \varphi(x_1, x_2, \dots, x_d) \right|^2 \\
&= e^{4\pi M_1} \|L^* \varphi\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned}$$

achève la preuve du Lemme Principal 4.2, et par la même occasion aussi, celle du Théorème 4.1. \square

6. Exercices

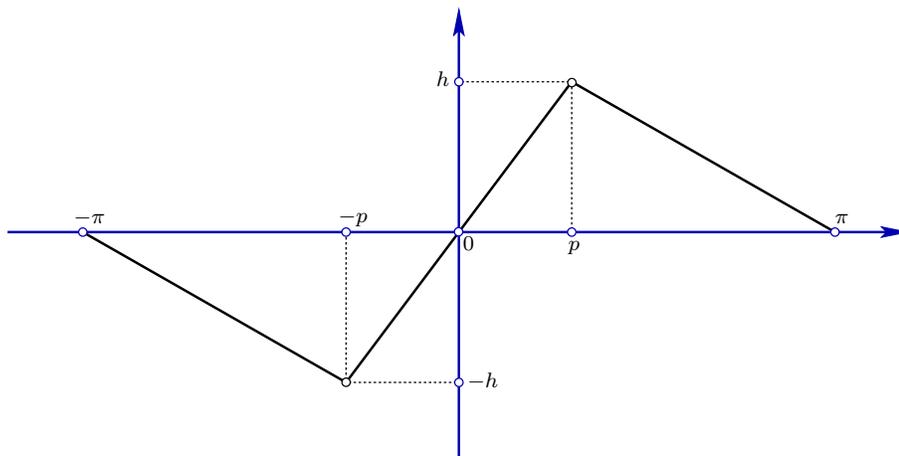
Exercice 1. [Corde pincée, solutions faibles] Sur \mathbb{R}^2 , soient les coordonnées (x, t) , et soit l'opérateur des ondes $\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$.

(a) Pour une fonction 2π -périodique $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, vérifier que la formule de D'Alembert :

$$u(x, t) := \frac{g(x+t) + g(x-t)}{2}$$

donne une solution à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$



(b) Soient aussi deux constantes réelles $0 < p < \pi$ et $h > 0$, et soit $f(x)$ la fonction continue affine par morceaux 2π -périodique sur \mathbb{R} dont le graphe sur $[-\pi, \pi]$ apparaît sur la figure. Montrer que la fonction :

$$u(x, t) := \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}$$

donne une solution faible à :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

Indication: Au moyen d'une convolution avec une suite régularisante, approximer f sur les compacts de \mathbb{R} par une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions \mathcal{C}^{∞} et introduire $u_n(x, t) := \frac{f_n(x+t) + f_n(x-t)}{2}$.

Exercice 2. [Complétion d'un espace préhilbertien] Soit H_0 un \mathbb{C} -espace vectoriel préhilbertien (pas nécessairement complet), de produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$ défini positif. On considère la collection de toutes les suites $(f_n)_{n=1}^\infty$ d'éléments $f_n \in H_0$ qui sont de Cauchy pour $\| \cdot \|_{H_0}$, on introduit la relation :

$$(f_n)_{n=1}^\infty \sim (f'_n)_{n=1}^\infty \iff 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f'_n\|_{H_0},$$

et on définit le quotient :

$$H := \left\{ (f_n)_{n=1}^\infty \in H_0 \right\} / \sim.$$

(a) Vérifier que \sim est une relation d'équivalence. On notera F la classe d'équivalence d'une suite $(f_n)_{n=1}^\infty \in H_0$.

(b) Montrer que H hérite d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel.

(c) Montrer que H hérite du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ défini par :

$$\langle F, G \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_{H_0},$$

où F et G sont représentés par $(f_n)_{n=1}^\infty$ et $(g_n)_{n=1}^\infty$.

(d) Avec des suites constantes, vérifier que $H \supset H_0$, et que $\langle f, g \rangle_H = \langle f, g \rangle_{H_0}$ pour tous $f, g \in H_0$.

(e) Montrer que H_0 est dense dans H .

(f) Montrer que H est complet. Indication: Étant donné une suite de Cauchy $(F^k)_{k=1}^\infty$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$, chaque F^k étant représenté par une suite de Cauchy $(f_n^k)_{n=1}^\infty$ d'éléments $f_n^k \in H_0$, montrer que l'élément $F \in H$ représenté par la suite — dont on vérifiera qu'elle est bien de Cauchy — :

$$(f_{N(k)}^n)_{n=1}^\infty,$$

où $N(k) \gg 1$ est choisi suffisamment grand pour que :

$$\|f_n^k - f_{N(k)}^k\|_{H_0} \leq \frac{1}{k} \quad (\forall n \geq N(k)),$$

satisfait :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|F - F^k\|_H.$$

(g) Enfin, soient H et H' deux espaces de Hilbert (complets) qui sont des complétions de H_0 au sens où :

$$\begin{aligned} H_0 \subset H, \quad \overline{H_0}^{\| \cdot \|_H} &= H, & \langle \cdot, \cdot \rangle_H|_{H_0} &= \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}, \\ H_0 \subset H', \quad \overline{H_0}^{\| \cdot \|_{H'}} &= H', & \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}|_{H_0} &= \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}. \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\Phi: H \rightarrow H'$ avec $\Phi|_{H_0} = \text{Id}_{H_0}$ qui est unitaire au sens où :

$$\|\Phi(F)\|_{H'} = \|F\|_H \quad (\forall F \in H).$$

Indication: Si $F \in H$ est représenté par une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy dans H_0 , montrer que $(f_n)_{n=1}^\infty$ définit aussi un élément $F' \in H'$.

Exercice 3. EE

Estimées L^2 de Hörmander

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Espaces de Hilbert à poids pour l'équation $\bar{\partial}u = f$

En dimension complexe $n \geq 1$, soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ un domaine, à savoir un ouvert connexe. L'objectif principal de ce chapitre est de présenter en détail la résolution, due à Hörmander en 1965, de l'équation :

$$\bar{\partial}u = f,$$

d'inconnue une (p, q) -forme différentielle lisse $u \in \mathcal{C}_{p,q}^\infty(\Omega)$ de bidegrés quelconques $0 \leq p \leq n$ et $0 \leq q \leq n - 1$:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n} u_{i_1, \dots, i_p; k_1, \dots, k_q} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{k_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k_q} \\ &=: \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I,K} dz^I \wedge d\bar{z}^K \quad \text{[Abréviation]} \end{aligned}$$

à coefficients lisses $u_{\bullet, \bullet} \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ dans le domaine, et de second membre une $(p, q + 1)$ -forme lisse $f \in \mathcal{C}_{p,q+1}^\infty(\Omega)$:

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{q+1} \leq n} f_{i_1, \dots, i_p; j_1, \dots, j_{q+1}} dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{j_{q+1}} \\ &=: \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I,J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \quad \text{[Abréviation]}, \end{aligned}$$

laquelle doit nécessairement satisfaire $\bar{\partial}f = 0$, à cause de la relation $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ satisfaite par la différentiation extérieure antiholomorphe — analogue à la relation $d \circ d = 0$ dite de Poincaré — :

$$\bar{\partial}u = f \implies 0 = \bar{\partial}f \quad \text{[Condition nécessaire]},$$

et ce, sous l'hypothèse géométrique cruciale que :

$$\Omega \subset \mathbb{C}^n \text{ est un domaine pseudoconvexe ;}$$

par souci de complétude, on rappelle qu'un théorème fondamental caractérise le fait — équivalent *a posteriori* à une définition — que $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est *pseudoconvexe* par l'existence d'au moins une fonction réelle de classe \mathcal{C}^∞ :

$$\varphi: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

qui est *d'exhaustion* au sens où les ensembles de sous-niveau :

$$\{z \in \Omega : \varphi(z) \leq c\} \Subset \Omega$$

sont compacts pour tout $c \in \mathbb{R}$ et telle que, en tout point $z \in \Omega$ et pour tout vecteur tangent $w \in T_z\Omega \cong \mathbb{C}^n$:

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) w_j \bar{w}_k \geq e(z) \sum_{i=1}^n |w_i|^2,$$

avec une constante $e(z) > 0$. Un argument de régularisation permet alors de trouver une fonction $e : \Omega \rightarrow]0, \infty[$ de classe \mathcal{C}^∞ satisfaisant cela en tout point $z \in \Omega$.

L'objectif principal en ligne de mire est donc le

Théorème 1.1. [Hörmander 1965] *Dans un domaine pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, l'équation :*

$$\bar{\partial}u = f$$

possède une solution $u \in \mathcal{C}_{p,q}^\infty(\Omega)$, pour toute $f \in \mathcal{C}_{p,q+1}^\infty(\Omega)$ telle que $\bar{\partial}f = 0$.

Toutefois, l'étude directe de l'équation $\bar{\partial}u = f$ en catégorie \mathcal{C}^∞ présente certaines difficultés qu'il est avisé de contourner dans un premier temps avant de revenir ultérieurement à la catégorie \mathcal{C}^∞ . D'après un principe évident, plus l'espace dans lequel on recherche une solution est vaste, plus les facilités à en trouver une augmentent. Or en un certain sens, le plus vaste des espaces fonctionnels est celui \mathcal{D}' des distributions.

Toutefois, un espace intermédiaire entre \mathcal{C}^∞ et \mathcal{D}' , plus flexible qu'eux deux, car enrichi de tous les concepts fondamentaux issus de la géométrie euclidienne classique, s'est avéré, avec le temps et l'expérience de l'histoire mathématique des équations aux dérivées partielles, être l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable. En effet, on y dispose d'un produit scalaire qui permet d'effectuer des projections orthogonales (manquantes dans les espaces de Banach), et surtout, nous verrons que dans les espaces de Hilbert, ce sera le fameux Théorème de représentation de Riesz qui fournira, tel un *Deus ex machina*, une solution à l'équation $\bar{\partial}u = f$.

Précisément, l'objectif intermédiaire sera le

Théorème 1.2. [Hörmander 1965] *Dans un domaine pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, l'équation :*

$$\bar{\partial}u = f,$$

interprétée au sens des distributions, possède une solution $u \in L_{p,q}^2(\Omega, \text{loc})$, pour toute $f \in L_{p,q+1}^2(\Omega, \text{loc})$ telle que $\bar{\partial}f = 0$.

Tout d'abord, qu'entend-on par $L_{p,q}^2(\Omega, \text{loc})$? Soit pour commencer une (p, q) -forme :

$$u = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K,$$

à coefficients mesurables $u_{I;K} : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, les primes signifiant que la sommation s'effectue sur des multi-indices strictement croissants.

Définition 1.3. Le *produit hermitien ponctuel* entre deux formes mesurables sur Ω de mêmes bidegrés (p, q) :

$$u = \sum'_{I} \sum'_{K} u_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K \quad \text{et} \quad v = \sum'_{I} \sum'_{K} v_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K$$

est la fonction mesurable $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$:

$$u \bullet v := \sum_I' \sum_K' u_{I;K} \overline{v_{I;K}}.$$

En un point fixé $z \in \Omega$, c'est le produit hermitien standard sur le \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie de tous ces coefficients. Alors d'après des propriétés élémentaires connues, la quantité :

$$|u|^2 := u \bullet u,$$

est le carré d'une norme, et on a l'inégalité de Cauchy-Schwarz ponctuelle :

$$|u \bullet v| \leq |u| |v|.$$

Pour abrégier, la mesure de Lebesgue $2n$ -dimensionnelle sur $\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ sera notée :

$$d\lambda.$$

Définition 1.4. On dit que u est de *carré localement intégrable* dans Ω :

$$u \in L_{p,q}^2(\Omega, \text{loc}),$$

lorsque, en restriction à tout sous-ensemble compact $C \Subset \Omega$:

$$\int_C |u|^2 d\lambda < \infty,$$

ce qui équivaut à :

$$u_{I;K} \in L^2(\Omega, \text{loc}) \quad (\forall |I|=p, \forall |K|=q).$$

Ici plus généralement, en suivant la technique dite des *trois poids* due à Hörmander, laquelle va consister en un artifice technique magique visant à dissiper le mystère de la structure du bord $\partial\Omega$ — non supposé lisse ! — que l'on « approche » lorsque la constante c de $\{\varphi \leq c\} \Subset \Omega$ tend vers l'infini, nous considérerons des espaces de (p, q) -formes de carré intégrable à poids.

Soit donc maintenant $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$ une fonction continue, dite *de densité*.

Définition 1.5. L'espace des (p, q) -formes L^2 à poids la fonction strictement positive $e^{-\varphi} > 0$ est :

$$L_{p,q}^2(\Omega, e^{-\varphi}) := \left\{ u \in L_{p,q}(\Omega, \text{loc}) : \int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi} d\lambda < \infty \right\}.$$

Sur cet espace préhilbertien, on notera alors le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle_{\varphi} &:= \int_{\Omega} u \bullet v e^{-\varphi} d\lambda \\ &= \int_{\Omega} \sum_{|I|=p}' \sum_{|K|=q}' u_{I;K} \overline{v_{I;K}} e^{-\varphi} d\lambda, \end{aligned}$$

ainsi que la norme associée :

$$\|u\|_{\varphi}^2 := \langle u, u \rangle_{\varphi} = \int_{\Omega} u \bullet u e^{-\varphi} d\lambda,$$

qui satisfont l'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale :

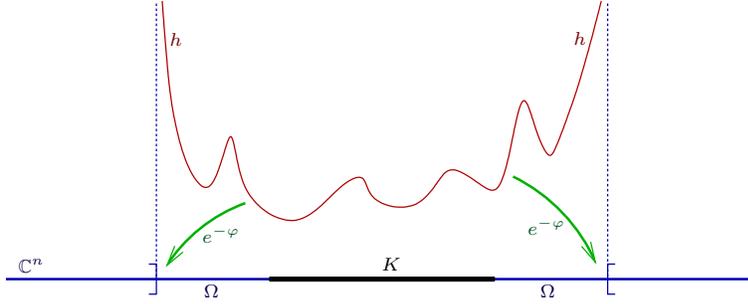
$$|\langle u, v \rangle_{\varphi}| \leq \|u\|_{\varphi} \|v\|_{\varphi}.$$

En présence d'un poids, une adaptation connue de résultats standard de la théorie des espaces de Hilbert montre la

Proposition 1.6. *Pour une densité continue quelconque $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace $L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi})$ est un espace de Hilbert complet pour la métrique dérivée de sa norme $\|\cdot\|_{\varphi}$.* \square

Mentionnons que l'on a un

Lemme 1.7. *Pour toute (p, q) -forme $u \in L^2_{p,q}(\Omega, \text{loc})$, il existe une densité $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R}_+)$ telle que $u \in L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi})$.*



Démonstration. Étant donné une fonction $h \in L^2(\Omega, \text{loc})$ quelconque, l'idée, esquissée par le diagramme qui précède, consiste à rabattre la croissance intégrale éventuellement grande de h lorsqu'on s'approche du bord $\partial\Omega$ en multipliant par un poids $e^{-\varphi}$ qui tend assez vite vers zéro, ce qui revient à faire dominer la croissance de h par celle de φ . L'Exercice 1 propose de mettre au point un argument rigoureux. \square

Les (p, q) -formes u dont tous les coefficients $u_{I;K} \in \mathcal{C}^\infty$ sont lisses appartiennent au sous-espace :

$$\mathcal{C}^\infty_{p,q}(\Omega) \subset L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi}) \subset L^2_{p,q}(\Omega, \text{loc}).$$

Si de plus le support de tous ces $u_{I;K}$ est compact, on écrit :

$$u \in \mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega).$$

De la même manière qu'on démontre que les fonctions lisses à support compact sont denses dans L^2 , pour des (p, q) -formes au lieu de fonctions et en présence d'un poids, on propose dans l'Exercice 2 une démonstration de la

Proposition 1.8. *Pour une densité continue quelconque $\varphi \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$, l'espace $\mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\varphi}$:*

$$\overline{\mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{\varphi}} = L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi}). \quad \square$$

Maintenant, s'il s'agit de résoudre $\bar{\partial}u = f$ dans les espaces de Hilbert L^2 , pour $u \in L^2_{p,q}(\Omega, \text{loc})$, la différentiation $\bar{\partial}u$ n'est pas toujours définie. Heureusement, la théorie des distributions lui donne un sens.

Exemple 1.9. L'intervalle $]0, 1[\subset \mathbb{R}$ étant prototype simplissime d'ensemble ouvert, l'opérateur de différentiation standard :

$$D: \mathcal{C}_c^1(]0, 1[, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}_c^0(]0, 1[, \mathbb{R}) \\ h \longmapsto h'$$

n'est pas en général bien défini lorsque $h \in L^2(]0, 1[, \mathbb{R})$, mais la théorie des distributions lui donne un sens par dualité, en déclarant que $D(h)$ agit sur les *fonctions-tests* $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[, \mathbb{R})$ par une formule :

$$\langle D(h), \psi \rangle := - \langle h, \psi' \rangle = - \int_0^1 h(x) \psi'(x) dx,$$

qui est automatiquement satisfaite (sans terme de bord), via une intégration par parties (exercice) lorsque $h \in \mathcal{C}_c^1$ est différentiable à support compact. Ainsi, $D(h) \in \mathcal{D}'$ est toujours une distribution pour $h \in L^2$.

Mais dans certaines circonstances favorables, cette distribution $D(h)$ s'identifie à une fonction L^2 , et l'on peut définir l'espace de Sobolev :

$$W^1(]0, 1[, \mathbb{R}) := \{h \in L^2 : D(h) \in L^2\},$$

de telle sorte qu'un opérateur D à valeurs dans L^2 est bien défini sur ce sous-espace :

$$\begin{array}{ccc} L^2 & \overset{D}{\dashrightarrow} & L^2 \\ \cup & \nearrow & \\ W^1, & D & \end{array}$$

les pointillés signifiant « n'être pas partout défini ». Pour plus d'information, on se reportera aussi à l'Exercice 3. \square

D'une manière qui généralise aisément cela au cas d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, l'opérateur :

$$\bar{\partial} : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

possède alors un sens précis et rigoureux, car si $(x_1, \dots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$ sont les coordonnées canoniques, l'espace de Sobolev d'ordre 1 est défini en demandant que les dérivées partielles dans toutes les directions appartiennent encore à L^2 :

$$W^1(\Omega) := \{h \in L^2(\Omega) : \partial_{x_i} h \in L^2(\Omega), \forall 1 \leq i \leq 2n\},$$

et l'on peut écrire :

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \overset{\bar{\partial}}{\dashrightarrow} & L^2(\Omega) \\ \cup & \nearrow & \\ W^1(\Omega), & \bar{\partial} & \end{array}$$

En revenant maintenant à la recherche de (p, q) -formes u satisfaisant $\bar{\partial}u = f$, pour des raisons qui s'éclairciront ultérieurement, il s'avère utile d'introduire *trois* poids différents $e^{-\varphi_1}$, $e^{-\varphi_2}$, $e^{-\varphi_3}$ selon les degrés des formes, et ainsi, de considérer, avec (p, q) quelconques — et maintenant définitivement fixés —, les deux opérateurs :

$$L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) \overset{\bar{\partial}}{\dashrightarrow} L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) \overset{\bar{\partial}}{\dashrightarrow} L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3}),$$

les flèches en pointillés signifiant qu'ils ne sont pas partout définis, opérateurs qui seront dorénavant notés :

$$T \equiv \bar{\partial} \quad \text{et} \quad S \equiv \bar{\partial},$$

et qui ne sont en fait définis que sur leurs domaines respectifs :

$$\text{Dom } T := \{u \in L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) : \bar{\partial}u \in L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2})\},$$

$$\text{Dom } S := \{f \in L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) : \bar{\partial}u \in L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3})\},$$

de telle sorte qu'un diagramme rigoureux doit se présenter comme suit :

$$\begin{array}{ccccc} L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3}) \\ \cup & \nearrow T & \cup & \nearrow S & \\ \text{Dom } T & & \text{Dom } S & & \end{array}$$

Lemme 1.10. *L'opérateur $T \equiv \bar{\partial}$ a un domaine dense :*

$$\overline{\text{Dom } T}^{\|\cdot\|_{\varphi_1}} = L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}),$$

ainsi que $S \equiv \bar{\partial}$:

$$\overline{\text{Dom } S}^{\|\cdot\|_{\varphi_2}} = L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}).$$

Démonstration. En effet, on a clairement :

$$\text{Dom } T \supset \mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega) \quad \text{et} \quad \text{Dom } S \supset \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega),$$

et ces sous-espaces sont déjà denses, comme l'a affirmé la Proposition 1.8. \square

Définition 1.11. Un opérateur linéaire T entre deux espaces de Banach (vectoriels normés complets) :

$$(X, \|\cdot\|_X) \quad \text{et} \quad (Y, \|\cdot\|_Y)$$

à domaine $\text{Dom } T \subset X$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \cup & \nearrow T & \\ \text{Dom } T, & & \end{array}$$

est dit *fermé* lorsque son graphe :

$$\text{Graphe } T = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in \text{Dom } T\}$$

est un sous-ensemble fermé du produit $X \times Y$, muni de la topologie dérivant de la *norme du graphe* :

$$\|(x, y)\|_{X \times Y} := \|x\|_X + \|y\|_Y \quad (x \in X, y \in Y).$$

Concrètement, pour établir qu'un opérateur $T : \text{Dom } T \rightarrow Y$ est fermé, à savoir, pour établir que tous les points adhérents au graphe appartiennent encore au graphe, on part d'une suite quelconque :

$$(x_n, T(x_n))_{n=1}^\infty \in \text{Graphe } T,$$

qui est de Cauchy pour la norme du graphe, de telle sorte que, par complétude de X et de Y , il existe deux points-limites :

$$X \ni x_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n) = y_\infty \in Y,$$

et, pour conclure que :

$$\overline{\text{Graphe } T}^{\|\cdot\|_{X \times Y}} = \text{Graphe } T,$$

on cherche à vérifier deux choses :

□ $x_\infty \in \text{Dom } T$;

□ $y_\infty = T(x_\infty)$.

Lemme 1.12. *L'opérateur de différentiation standard :*

$$\begin{array}{ccc} L^2(]0, 1[) & \xrightarrow{D} & L^2(]0, 1[) \\ \cup & \nearrow D & \\ \text{Dom } D & & \end{array}$$

est fermé.

Démonstration. Comme cela vient d'être expliqué, en partant d'une suite :

$$(h_n, D(h_n))_{n=1}^\infty \in \text{Graphe } D,$$

telle qu'il existe $h_\infty \in L^2$ et $l_\infty \in L^2$ avec :

$$\|h_n - h_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad \|D(h_n) - l_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

il s'agit de faire voir que $h_\infty \in \text{Dom } D$, puis que $l_\infty = D(h_\infty)$.

Or en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz $|\int_0^1 f \cdot 1| \leq (\int_0^1 |f|^2)^{\frac{1}{2}} (\int_0^1 1^2)^{\frac{1}{2}}$ on obtient pour toute fonction-test $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0, 1[)$ deux majorations :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 (h_n - h_\infty) \psi' \right| &\leq \max_{[0,1]} |\psi'| \|h_n - h_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \int_0^1 (D(h_n) - l_\infty) \psi \right| &\leq \max_{[0,1]} |\psi| \|D(h_n) - l_\infty\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

qui permettent de passer à la limite dans les identités vraies par définition :

$$\int_0^1 h_n \psi' = - \int_0^1 D(h_n) \psi,$$

ce qui offre sur un plateau :

$$\int_0^1 h_\infty \psi' = - \int_0^1 l_\infty \psi,$$

l'identité qui signifie exactement que $h_\infty \in \text{Dom } D$ et — simultanément ! — que $l_\infty = D(h_\infty)$. □

Lemme 1.13. *Les deux opérateurs T et S :*

$$\begin{array}{ccccc} L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3}) \\ \cup & \nearrow T & \cup & \nearrow S & \\ \text{Dom } T & & \text{Dom } S & & \end{array}$$

sont fermés.

Démonstration. Le principe d'argumentation, très similaire à ce qui vient d'être vu sur $]0, 1[$, est laissé en Exercice 4. □

En résumé, nous avons présenté les éléments de pensée du théorème suivant, qui va constituer le vrai point de départ de la théorie.

Théorème 1.14. Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, pour des densités continues arbitraires $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^0(\Omega, \mathbb{R})$, les deux opérateurs $\bar{\partial}$:

$$\begin{array}{ccccc} L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3}) \\ \cup & \nearrow T & \cup & \nearrow S & \\ \text{Dom } T & & \text{Dom } S & & \end{array}$$

sont fermés et à domaine dense. □

Puisque l'équation de Poincaré $\bar{\partial} \circ \bar{\partial} = 0$ valable sur les (p, q) -formes appartenant à $\mathcal{C}^\infty_{c,p,q}(\Omega)$ est naturellement héritée (exercice) par ces opérateurs qui prolongent $\bar{\partial}$, on a :

$$T(\text{Dom } T) =: \text{Im } T \subset \text{Ker } S,$$

et puisque $\text{Ker } S \subset \text{Dom } S$ (exercice mental), on peut écrire :

$$S \circ T = 0.$$

Maintenant, en direction du Théorème 1.2, donc dans des espaces L^2 à poids, il s'agit de résoudre $T(u) = f$ avec $f \in \text{Dom } S$ satisfaisant $S(f) = 0$, et en abrégant nos trois espaces de Hilbert :

$$H_1 := L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}), \quad H_2 := L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_2}), \quad H_3 := L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_3}),$$

cela nécessite de faire un détour par la théorie générale des opérateurs non partout définis.

2. Théorie élémentaire des opérateurs non bornés de Von Neumann

Dans cette section, on raisonnera maintenant exclusivement avec des espaces de Hilbert abstraits généraux. Soit donc pour commencer deux \mathbb{C} -espaces de Hilbert :

$$(H_1, \|\cdot\|_{H_1}) \quad \text{et} \quad (H_2, \|\cdot\|_{H_2}),$$

et soit un opérateur linéaire défini seulement sur un sous-ensemble de H_1 :

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{T} & H_2 \\ \cup & \nearrow T & \\ \text{Dom } T & & \end{array}$$

Naturellement :

$$\text{Ker } T := \{f \in \text{Dom } T : T(f) = 0\} \quad \text{et} \quad \text{Im } T := T(\text{Dom } T).$$

Même si le cas où $\text{Dom } T = H_1$ sera couvert par les raisonnements de cette section, on sous-entend incidemment que $\text{Dom } T \subsetneq H_1$, puisque c'est ce qui se produit pour le $\bar{\partial}$ dans les espaces L^2 à poids. De plus, on ne suppose *nullement* que $T : \text{Dom } T \rightarrow H_2$ est un opérateur borné (continu), à savoir il se peut que sa norme d'opérateur :

$$\|T\| := \sup_{\substack{f \in \text{Dom } T \\ f \neq 0}} \frac{\|T(f)\|_{H_2}}{\|f\|_{H_1}} \in [0, \infty],$$

soit infinie.

Définition 2.1. L'opérateur T est dit à *domaine dense* lorsque :

$$\overline{\text{Dom } T}^{\|\cdot\|_{H_1}} = H_1,$$

et il est dit *fermé* lorsque son graphe :

$$\text{Graphe } T := \{(f, T(f)) \in H_1 \times H_2 : f \in \text{Dom } T\},$$

est un sous-ensemble fermé du produit $H_1 \times H_2$ pour la topologie dérivant de la *norme du graphe* :

$$\|(f, g)\|_{H_1 \times H_2} = \|f\|_{H_1} + \|g\|_{H_2} \quad (f \in H_1, g \in H_2).$$

Pour de tels opérateurs T fermés et à domaine dense, Von Neumann a développé une notion très générale — et assez subtile — d'*opérateur adjoint* T^* , définie tout d'abord en introduisant son domaine :

$$\text{Dom } T^* := \left\{ g \in H_2 : \text{la forme linéaire } \left[\begin{array}{c} \text{Dom } T \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto \langle T(f), g \rangle_{H_2} \end{array} \right] \text{ est bornée en norme } \|\cdot\|_{H_1} \right\},$$

c'est-à-dire qu'il existe une constante $0 \leq C_g < \infty$ telle que :

$$|\langle T(f), g \rangle_{H_2}| \leq C_g \|f\|_{H_1} \quad (\forall f \in \text{Dom } T).$$

Notons alors cette forme linéaire :

$$\Lambda_g : f \longmapsto \langle T(f), g \rangle_{H_2}.$$

Puisqu'elle est bornée, le théorème de Hahn-Banach permet alors de la prolonger à H_1 tout entier, sans changer sa norme d'opérateur, ce qui fournit :

$$\tilde{\Lambda}_g : H_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

avec $\|\tilde{\Lambda}_g\| = \|\Lambda_g\|$, et un tel prolongement est unique (exercice mental), car $\text{Dom } T$ est dense dans H_1 . En fait, comme on travaille dans un espace de Hilbert, il n'est pas nécessaire de faire appel au théorème de Hahn-Banach dans toute sa généralité, comme propose de le rappeler l'Exercice 5.

Le théorème de représentation de Riesz offre alors un unique vecteur $g_* \in H_1$ qui identifie cette forme linéaire prolongée à un simple produit scalaire :

$$\tilde{\Lambda}_g(h) = \langle h, g_* \rangle_{H_1} \quad (\forall h \in H_1),$$

d'où en restriction à $\text{Dom } T$:

$$\Lambda_g(f) = \tilde{\Lambda}_g(f) = \langle f, g_* \rangle_{H_1} \quad (\forall f \in \text{Dom } T).$$

On laisse en exercice le soin se convaincre que l'application ainsi produite $g \longmapsto g_*$ est linéaire, ce qui justifie de noter :

$$T^*(g) := g_*,$$

en termes d'un certain opérateur linéaire *a priori* non partout défini et non borné (tout autant que l'était T) :

$$H_1 \longleftarrow \text{Dom } T^* : T^*.$$

Ainsi, à tout opérateur T est donc associé son *adjoint* T^* :

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xrightarrow{\quad T \quad} & H_2 \\ \cup & \nearrow T & \\ \text{Dom } T & & \end{array} \quad \sim \quad \begin{array}{ccc} H_1 & \xleftarrow{\quad T^* \quad} & H_2 \\ \cup & \nwarrow T^* & \\ \text{Dom } T^* & & \end{array}$$

Une série de vérités frappantes ont été découvertes par Von Neumann en 1929.

Proposition 2.2. *Si $T: H_1 \dashrightarrow H_2$ est un opérateur fermé à domaine dense entre deux espaces de Hilbert, alors son adjoint $H_1 \dashleftarrow H_2: T^*$ est lui aussi fermé à domaine dense.*

Démonstration. Introduisons l'application auxiliaire « magique » :

$$\begin{aligned}\sigma: H_1 \times H_2 &\longrightarrow H_2 \times H_1 \\ (f, g) &\longmapsto (g, -f),\end{aligned}$$

qui transforme le graphe de T en :

$$\sigma(\text{Graphe } T) = \{(T(f), -f) : f \in \text{Dom } T\}.$$

Affirmation 2.3. *Tout vecteur orthogonal :*

$$(y, x) \in [\sigma(\text{Graphe } T)]^\perp$$

est de la forme :

$$x = T^*y \quad \text{avec} \quad y \in \text{Dom } T^*.$$

Démonstration. Cette relation d'orthogonalité s'exprime comme :

$$\langle T(f), y \rangle_{H_2} = \langle f, x \rangle_{H_1} \quad (\forall f \in \text{Dom } T).$$

Grâce à cette identité et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous voyons que la forme linéaire :

$$\text{Dom } T \ni f \longmapsto \langle T(f), y \rangle_{H_2}$$

est bornée (continue), et cela signifie exactement que $y \in \text{Dom } T^*$ avec en sus $x = T^*y$. \square

Une reformulation équivalente de cette affirmation est que :

$$\text{Graphe } T^* = [\sigma(\text{Graphe } T)]^\perp,$$

et puisque l'orthogonal d'un sous-ensemble quelconque d'un espace de Hilbert est toujours fermé, nous obtenons que T^* est fermé.

Ensuite, afin de montrer que $\text{Dom } T^*$ est dense, en nous souvenant qu'un sous-espace $V \subset H$ d'un espace de Hilbert H est dense si et seulement si $V^\perp = \overline{V}^\perp = \{0\}$, prenons un élément quelconque :

$$z \in (\text{Dom } T^*)^\perp = (\overline{\text{Dom } T^*})^\perp,$$

et cherchons à montrer que $z = 0$. Ainsi :

$$0 = \langle z, y \rangle_{H_2} \quad (\forall y \in \text{Dom } T^*),$$

et en introduisant un terme nul quelque peu artificiel mais astucieux :

$$0 = \langle z, y \rangle_{H_2} + \langle 0, T^*y \rangle_{H_1} \quad (\forall y \in \text{Dom } T^*),$$

nous voyons que cela signifie que :

$$\begin{aligned}(z, 0) \in (\text{Graphe } T^*)^\perp &= \overline{\sigma(\text{Graphe } T)} = \sigma(\text{Graphe } T) \\ &= \{(T(f), -f) : f \in \text{Dom } T\},\end{aligned}$$

d'où par identification $0 = -f$, et finalement $z = T(f) = 0$, comme voulu. \square

Proposition 2.4. *Si $T: H_1 \dashrightarrow H_2$ est un opérateur fermé à domaine dense, alors son bi-adjoint coïncide avec lui-même :*

$$(T^*)^* = T.$$

Démonstration. Nous savons déjà que T^* est aussi fermé à domaine dense, et que :

$$\langle f, T^*(g) \rangle_{H_1} = \langle T(f), g \rangle_{H_2} \quad (\forall f \in \text{Dom } T, \forall g \in \text{Dom } T^*).$$

Grâce à cette identité, nous voyons que la forme linéaire :

$$\begin{aligned} \text{Dom } T^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ g &\longmapsto \langle T^*(g), f \rangle_{H_1} = \langle g, T(f) \rangle_{H_2} \end{aligned}$$

est bornée en norme H_2 , et ceci signifie précisément l'appartenance :

$$f \in \text{Dom } (T^*)^*,$$

d'où :

$$\text{Dom } T \subset \text{Dom } (T^*)^*.$$

De plus, l'égalité :

$$\langle g, T(f) \rangle_{H_2} = \langle T^*(g), f \rangle_{H_1} = \langle g, (T^*)^*(f) \rangle_{H_2},$$

valide pour tout $g \in \text{Dom } T^*$ (dense dans H_2) donne :

$$T(f) = (T^*)^*(f) \quad (\forall f \in \text{Dom } T),$$

d'où :

$$\text{Graphe } T \subset \text{Graphe } (T^*)^*.$$

Pour terminer, puisque $\text{Graphe } T$ est fermé et se projette sur $\text{Dom } T \subset H_1$ qui est dense, on vérifie (exercice : raisonner par contradiction) qu'on a ici « = » au lieu de « \subset ». \square

Théorème 2.5. [Von Neumann 1929] *Si $T: H_1 \dashrightarrow H_2$ est un opérateur (non nécessairement continu) fermé à domaine dense, alors son adjoint :*

$$H_1 \dashleftarrow H_2 : T^*$$

est aussi fermé à domaine dense, et il satisfait l'identité fondamentale :

$$\langle f, T^*(g) \rangle_{H_1} = \langle T(f), g \rangle_{H_2} \quad (\forall f \in \text{Dom } T, \forall g \in \text{Dom } T^*).$$

De plus :

$$(T^*)^* = T,$$

et aussi :

$$\begin{aligned} \text{Ker } T^* &= (\text{Im } T)^\perp && [= \overline{(\text{Im } T)}^\perp], \\ (\text{Ker } T)^\perp &= \overline{\text{Im } T^*}. \end{aligned}$$

Démonstration. Il ne reste plus qu'à établir les deux dernières égalités. Lorsque $g \in \text{Ker } T^*$, l'identité fondamentale devient :

$$0 = \langle T(f), g \rangle_{H_2} \quad (\forall f \in \text{Dom } T),$$

ce qui signifie $g \in (\text{Im } T)^\perp$, donc $\text{Ker } T^* \subset (\text{Im } T)^\perp$, et l'inclusion opposée est aussi satisfaite par simple logique inverse.

Pour la seconde égalité, puisque $V^\perp = \overline{V}^\perp$ pour tout sous-espace $V \subset H$ d'un espace de Hilbert, et puisque $(\overline{V}^\perp)^\perp = \overline{V}$, en prenant l'orthogonal de la première égalité acquise :

$$\text{Ker } T^* = (\text{Im } T)^\perp = (\overline{\text{Im } T})^\perp,$$

on obtient $(\text{Ker } T^*)^\perp = \overline{\text{Im } T}$, ce qui est le résultat voulu après simple échange notationnel $T^* \longleftrightarrow T$, pleinement légitimé par le fait que T et T^* jouent des rôles parfaitement symétriques. □

3. Un théorème d'existence abstrait

De retour à notre diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} L^2_{p,q}(\Omega, e^{-\varphi_1}) & \xrightarrow{\dots\dots\dots T} & L^2_{p,q+1}(\Omega, e^{-\varphi_2}) & \xrightarrow{\dots\dots\dots S} & L^2_{p,q+2}(\Omega, e^{-\varphi_3}) \\ \cup & \nearrow T & \cup & \nearrow S & \\ \text{Dom } T & & \text{Dom } S, & & \end{array}$$

dans lequel $T \equiv \bar{\partial}$ et $S \equiv \bar{\partial}$, sachant que :

$$\text{Im } T = T(\text{Dom } T) \subset \text{Ker } S \subset \text{Dom } S,$$

l'objectif est d'atteindre l'égalité :

$$\text{Im } T \stackrel{?}{=} \text{Ker } S.$$

Maintenant que nous possédons les éléments de la théorie des opérateurs non bornés de Von Neumann, nous pouvons dévoiler un théorème d'existence abstrait s'appliquant ci-dessous à :

$$F := \text{Ker } S,$$

et qui joue un rôle universel en analyse des équations aux dérivées partielles, y compris pour des applications à la géométrie différentielle et à la géométrie algébrique, et surtout, qui sera notre plus grand atout pour résoudre $\bar{\partial}u = f$.

Théorème 3.1. *Soit $T : H_1 \dashrightarrow H_2$ un opérateur fermé à domaine dense entre deux espaces de Hilbert, et soit $F \subset H_2$ un sous-espace fermé qui contient l'image de T :*

$$\begin{array}{ccc} H_1 & \xleftrightarrow[\dots\dots\dots T^*]{\dots\dots\dots T} & H_2 \\ & \cup & \\ & F \text{ fermé} & \\ & \cup & \\ & \text{Im } T. & \end{array}$$

Alors :

$$F = \text{Im } T \iff \left(\begin{array}{l} \exists 0 \leq C < \infty \\ \|g\|_{H_2} \leq C \|T^*g\|_{H_1} \end{array} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^* \cap F) \right).$$

L'implication principale intéressante est « \Leftarrow », et il s'agit d'une estimée *a priori* qui, dans les nombreuses circonstances où on cherche à l'utiliser, représente toujours un travail d'exploration calculatoire substantiel, spécifique à la situation géométrique visée. Pour $T^* \equiv \bar{\partial}^*$, obtenir cette estimée $\|g\|_{H_2} \leq C \|T^*g\|_{H_1}$ pour toutes les (p, q) -formes $g \in \text{Dom } T$ sera *difficile*.

Lorsque l'hypothèse de droite entre grandes parenthèses est satisfaite, une information supplémentaire existe, qui mérite d'apparaître sous forme d'un deuxième énoncé, le plus important et le plus utile des deux.

Théorème 3.2. *Entre trois espaces de Hilbert H_1, H_2, H_3 , soient deux opérateurs fermés T et S à domaines denses satisfaisant $S \circ T = 0$, i.e. $\text{Im } T \subset \text{Ker } S$:*

$$\begin{array}{ccccc} H_1 & \xrightarrow{\quad T \quad} & H_2 & \xrightarrow{\quad S \quad} & H_3 \\ \cup & & \cup & & \\ \text{Dom } T & \xrightarrow{\quad T \quad} & \text{Im } T & & \\ & & \cap & & \\ & & \text{Ker } S & & \\ & & \cap & & \\ & & \text{Dom } S & \xrightarrow{\quad S \quad} & \text{Im } S. \end{array}$$

Si il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$\|g\|_{H_2}^2 \leq C^2 \left(\|T^*g\|_{H_1}^2 + \|Sg\|_{H_3}^2 \right) \quad (\forall g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S),$$

alors on a :

$$\text{Im } T = \text{Ker } S,$$

avec de plus unicité et information quantitative :

$$\forall f \in \text{Ker } S \quad \exists ! u \in \text{Dom } T \cap (\text{Ker } T)^\perp \quad \text{telle que} \quad Tu = f \quad \text{avec} \quad \|u\|_{H_1} \leq C \|f\|_{H_2}.$$

Le début de la démonstration de ce deuxième théorème observe que pour $g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Ker } S$ quelconque, l'estimée (plus générale) supposée devient celle du Théorème 3.1 qui précède :

$$\|g\|_{H_2}^2 \leq C^2 \left(\|T^*g\|_{H_1}^2 + 0 \right) \quad (\forall g \in \text{Dom } T^* \cap \text{Ker } S),$$

et donc avec $F := \text{Ker } S$, l'implication susdite principale « \Leftarrow » offre $\text{Ker } S = \text{Im } T$, comme voulu. L'information quantitative apparaîtra ultérieurement.

Démonstration du Théorème 3.1. Commençons par l'implication « \Rightarrow », la moins intéressante, mais qu'il faut quand même traiter par souci de complétude mathématique.

Supposons donc que $F = \text{Im } T$. Puisque F est fermé dans son espace de Hilbert H_2 , donc est un espace de Hilbert en lui-même, l'objectif est de démontrer que l'ensemble :

$$B := \{g \in \text{Dom } T^* \cap F : \|T^*g\|_{H_1} \leq 1\},$$

est borné, et en fait, est contenu dans une boule fermée de rayon un certain nombre réel fini $0 \leq C < \infty$.

Or en nous rappelant qu'un sous-ensemble d'un espace de Hilbert est borné si et seulement si il est faiblement borné (voir la Section 8), il suffit, pour tout vecteur fixé $f \in F$, de démontrer que l'ensemble des valeurs des produits scalaires :

$$\{\langle f, g \rangle_{H_2} \in \mathbb{C} : g \in B\} \stackrel{?}{\subset} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq C_f < \infty\}$$

est borné dans \mathbb{C} . Mais $F = \text{Im } T$ par hypothèse, donc il existe $u \in \text{Dom } T$ avec $f = Tu$, et donc pour tout $g \in B$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} & |\langle f, g \rangle_{H_2}| = |\langle Tu, g \rangle_{H_2}| \\ [g \in \text{Dom } T^*] & = |\langle u, T^*g \rangle_{H_1}| \\ [\text{Cauchy-Schwarz}] & \leq \|u\|_{H_1} \|T^*g\|_{H_1} \\ [g \in B] & \leq \|u\|_{H_1} \cdot 1 \\ & =: C_f < \infty, \end{aligned}$$

ce qui signifie bien que B est faiblement borné.

Passons maintenant à l'implication principale « \Leftarrow ». En supposant donc qu'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$\|g\|_{H_2} \leq C \|T^*g\|_{H_1} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^* \cap F),$$

l'objectif est de montrer que F , qui contient $\text{Im } T$, vaut en fait $F = \text{Im } T$, à savoir de trouver, pour $f \in F$ quelconque, un vecteur $u \in \text{Dom } T$ satisfaisant $Tu = f$.

Lemme 3.3. *Pour $f \in F$ fixé, avec la même constante C , on a :*

$$|\langle f, g \rangle_{H_2}| \leq C \|f\|_{H_2} \|T^*g\|_{H_1} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^*).$$

Démonstration. Puisque $F \subset H_2$ est fermé, la somme directe orthogonale :

$$H_2 = F \oplus F^\perp,$$

permet de décomposer tout $g \in \text{Dom } T^*$:

$$g = g' + g'' \quad (g' \in F, g'' \in F^\perp),$$

et comme $F \supset \text{Im } T$ entraîne :

$$F^\perp \subset (\text{Im } T)^\perp = \text{Ker } T^*,$$

il vient $T^*(g'') = 0$, d'où en particulier $g'' \in \text{Dom } T^*$, et de plus aussi :

$$g' = g - g'' \in \text{Dom } T^*.$$

Comme $f \in F$ et $g'' \in F^\perp$, observons aussi que :

$$\langle f, g'' \rangle_{H_2} = 0,$$

ce qui permet, en observant que $g' \in \text{Dom } T^* \cap F$, de calculer-majorer :

$$\begin{aligned} & |\langle f, g \rangle_{H_2}| = |\langle f, g' \rangle_{H_2} + \langle f, g'' \rangle_{H_2}| \\ [\text{Cauchy-Schwarz}] & \leq \|f\|_{H_2} \|g'\|_{H_2} \\ [\text{Hypothèse principale}] & \leq \|f\|_{H_2} C \|T^*g'\|_{H_1} \\ & = C \|f\|_{H_2} \|T^*g\|_{H_1}, \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Sur le sous-espace linéaire $\text{Im } T^* = T^*(\text{Dom } T^*) \subset H_1$, soit maintenant la forme antilinéaire :

$$\begin{aligned} \Lambda_f: \text{Im } T^* &\longrightarrow \mathbb{C} \\ T^*g &\longmapsto \langle f, g \rangle_{H_2}. \end{aligned}$$

Grâce à l'estimation qui vient d'être obtenue, Λ_f est continue sur $\overline{\text{Im } T^*}$ de norme $\|\Lambda_f\| \leq C \|f\|_{H_2}$. En appliquant le théorème de Hahn-Banach, ou en raisonnant d'une manière purement interne à la théorie des espaces de Hilbert comme dans l'Exercice 5, en décomposant :

$$H_1 = \overline{\text{Im } T^*} \oplus (\overline{\text{Im } T^*})^\perp = (\text{Ker } T)^\perp \oplus \text{Ker } T,$$

prolongeons :

$$\tilde{\Lambda}_f: H_1 \longrightarrow \mathbb{C},$$

comme forme antilinéaire continue de même norme $\|\tilde{\Lambda}_f\| = \|\Lambda_f\| \leq C \|f\|_{H_2}$, en déclarant $\tilde{\Lambda}_f := 0$ sur $(\overline{\text{Im } T^*})^\perp$, le prolongement étant alors unique.

Deus ex Machina!

Le théorème de représentation de Riesz appliqué à l'espace de Hilbert $\overline{\text{Im } T^*}^\perp = (\text{Ker } T)^\perp$ fait alors « descendre du Ciel » un unique vecteur $u \in (\text{Ker } T)^\perp$ tel que :

$$\tilde{\Lambda}_f(h) = \langle u, h \rangle_{H_1} \quad (\forall h \in H_1),$$

ce qui, en restriction à $\text{Im } T^*$, donne :

$$\Lambda_f(T^*g) = \langle u, T^*g \rangle_{H_1} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^*),$$

puis, en revenant à la définition de Λ_f :

$$\langle f, g \rangle_{H_2} = \langle u, T^*g \rangle_{H_1} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^*),$$

identités qui garantissent que :

$$u \in \text{Dom } (T^*)^* = \text{Dom } T,$$

de telle sorte que nous pouvons écrire :

$$\langle f, g \rangle_{H_2} = \langle Tu, g \rangle_{H_2} \quad (\forall g \in \text{Dom } T^*),$$

et enfin des fins, comme $\text{Dom } T^*$ est dense dans H_2 , ceci conclut que :

$$f = Tu. \quad \square$$

Démonstration du Théorème 3.2. Une inspection rétrograde des arguments qui viennent d'être explicités montre, dans l'application réalisée du *théorème de représentation de Riesz* — *Deus ex machina* par excellence lorsqu'il s'agit de « résoudre » des équations aux dérivées partielles —, que l'on peut choisir $u \in (\text{Ker } T)^\perp$ unique satisfaisant de plus :

$$\|u\|_{H_1} = \|\Lambda_f\| \leq C \|f\|_{H_2}. \quad \square$$

4. Densité en norme du graphe pour trois poids

En vue d'établir l'inégalité *a priori* :

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq C^2 \left(\|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 \right) \quad (\forall f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S),$$

il est naturel de penser qu'il suffit de travailler avec des formes $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$, car \mathcal{C}_c^∞ est dense dans l'espace L^2 . Toutefois, en présence de poids variés et avec un opérateur adjoint à traiter, ceci va requérir un travail non trivial et substantiel.

Rappelons que le produit scalaire ponctuel entre deux $(p, q+1)$ -formes :

$$f = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \quad \text{et} \quad g = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} g_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

vaut :

$$f \cdot g = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} \overline{g_{I;J}},$$

et que la norme associée $|f|^2 = f \cdot f$ satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz ponctuelle :

$$|f \cdot g| \leq |f| |g|.$$

Grâce à ce produit, pour une fonction réelle lisse quelconque $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$, on peut introduire le produit scalaire L^2 à poids strictement positif $e^{-\varphi}$:

$$\begin{aligned} \langle f, g \rangle_\varphi &:= \int_\Omega \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} \overline{g_{I;J}} e^{-\varphi} d\lambda, \\ \|f\|_\varphi^2 &:= \int_\Omega \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} |f_{I;J}|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \end{aligned}$$

qui satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz intégrale (exercice) :

$$|\langle f, g \rangle_\varphi| \leq \|f\|_\varphi \|g\|_\varphi.$$

Proposition 4.1. *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soit $(\eta_\nu)_{\nu=1}^\infty$ une suite de fonctions réelles à support compact :*

$$\eta_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, [0, 1]),$$

dont les niveaux-plateaux $K_\nu := \{\nu = 1\} \subset \Omega$ sont emboîtés :

$$K_\nu \subset \text{Int } K_{\nu+1} \quad (\forall \nu \geq 1),$$

et remplissent :

$$\Omega = \bigcup_{\nu \geq 1} K_\nu.$$

On suppose données trois fonctions lisses :

$$\varphi_1 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \varphi_2 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega), \quad \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega),$$

qui satisfont :

$$\begin{aligned} e^{-\varphi_2} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 &\leq e^{-\varphi_1} & (\forall \nu \geq 1), \\ e^{-\varphi_3} \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 &\leq e^{-\varphi_2} & (\forall \nu \geq 1). \end{aligned}$$

Alors $\mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$ est dense dans $\text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ pour la norme du double graphe :

$$f \longmapsto \|T^* f\|_{\varphi_1} + \|f\|_{\varphi_2} + \|Sf\|_{\varphi_3}.$$

Faisons remarquer que pour tout choix de $(\eta_\nu)_{\nu=1}^\infty$, il existe toujours de telles $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, puisque les deux inégalités à satisfaire reviennent à :

$$\bar{\partial}\eta_\nu \cdot \bar{\partial}\eta_\nu = |\bar{\partial}\eta_\nu|^2 = \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial\eta_\nu}{\partial\bar{z}_k} \right| \leq e^{\varphi_{j+1} - \varphi_j} \quad (j=1, 2 \nu \geq 1),$$

donc il suffit de choisir φ_2 , puis φ_3 , qui croissent assez vite à mesure que les compacts K_ν remplissent Ω .

Démonstration. Avant de régulariser les $(p, q+1)$ -formes f , tronquons leur support en utilisant les fonctions η_ν .

Lemme 4.2. Pour toute $f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$, on a convergence $\eta_\nu f \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} f$ pour ces trois normes :

$$0 = \underbrace{\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|T^*(\eta_\nu f) - T^*(f)\|_{\varphi_1}}_{\textcircled{1}} = \underbrace{\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\eta_\nu f - f\|_{\varphi_2}}_{\textcircled{2}} = \underbrace{\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S(\eta_\nu f) - S(f)\|_{\varphi_3}}_{\textcircled{3}}.$$

L'intérêt, c'est que ces $\eta_\nu f$ ont un support compact, ce qui facilitera leur régularisation.

Démonstration. Grâce à l'inégalité :

$$|(\eta_\nu - 1)f| e^{-\varphi_2} \leq |f| e^{-\varphi_2},$$

la propriété $\textcircled{2}$ découle du théorème de convergence dominée, puisqu'on a convergence ponctuelle $(\eta_\nu - 1)f \rightarrow 0$ partout dans Ω .

Pour $\textcircled{3}$, il faut bien sûr commencer par vérifier que $\eta_\nu f \in \text{Dom } S$! Comme $S \equiv \bar{\partial}$ sur les formes lisses, on se convainc (exercice) que tel est bien le cas, puis que :

$$S(\eta_\nu f) = \bar{\partial}\eta_\nu \wedge f + \eta_\nu S(f).$$

Autrement dit :

$$S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f) = \bar{\partial}\eta_\nu \wedge f.$$

Maintenant, l'Exercice 7 propose de trouver une constante $0 < C_n < \infty$ ne dépendant que de la dimension telle que pour toute $(0, 1)$ -forme μ et toute (p, q) -forme u :

$$(4.3) \quad |\mu \wedge u|^2 \leq C_n^2 |\mu|^2 |u|^2.$$

Application :

$$\begin{aligned} |S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)|^2 e^{-\varphi_3} &\leq C_n |f|^2 |\bar{\partial}\eta_\nu|^2 e^{-\varphi_3} \\ &\leq C_n |f|^2 e^{-\varphi_2}. \end{aligned}$$

Alors une intégration sur Ω :

$$\int_{\Omega} \underbrace{|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)|^2}_{\rightarrow 0 \text{ ponctuellement}} e^{-\varphi_3} d\lambda = \|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)\|_{\varphi_3}^2 \leq \|f\|_{\varphi_2}^2 < \infty,$$

justifie l'utilisation du théorème de convergence dominée pour obtenir :

$$0 = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)\|_{\varphi_3} \quad (\forall f \in \text{Dom } S).$$

Enfin, une inégalité triangulaire et une dernière convergence dominée concluent ③ :

$$\|S(\eta_\nu f) - S(f)\|_{\varphi_3} \leq \|S(\eta_\nu f) - \eta_\nu S(f)\|_{\varphi_3} + \|\eta_\nu S(f) - S(f)\|_{\varphi_3} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0.$$

De loin, ① requiert plus de travail. Il faut commencer par vérifier une

Assertion 4.4. *Si $f \in \text{Dom } T^*$, pour tout entier $\nu \geq 1$, on a aussi $\eta_\nu f \in \text{Dom } T^*$.*

Preuve. Étant donné une (p, q) -forme $u \in \text{Dom } T$, afin de montrer que l'application :

$$u \longmapsto \langle \eta_\nu f, Tu \rangle_{\varphi_2}$$

est continue en norme $\|\cdot\|_{\varphi_1}$, ce qui donnera $\eta_\nu f \in \text{Dom } T^*$, calculons, en utilisant le fait que $\bar{\eta}_\nu = \eta_\nu$ est réelle :

$$\begin{aligned} \langle \eta_\nu f, Tu \rangle_{\varphi_2} &= \langle f, \eta_\nu Tu \rangle_{\varphi_2} = \langle f, T(\eta_\nu u) \rangle_{\varphi_2} + \langle f, \eta_\nu Tu - T(\eta_\nu u) \rangle_{\varphi_2} \\ &= \langle T^* f, \eta_\nu u \rangle_{\varphi_2} + \langle f, -\bar{\partial} \eta_\nu \wedge u \rangle_{\varphi_2} \\ &= \langle \eta_\nu T^* f, u \rangle_{\varphi_1} - \langle f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u \rangle_{\varphi_2}. \end{aligned}$$

Pour le premier terme obtenu, l'application $u \longmapsto \langle \eta_\nu T^* f, u \rangle_{\varphi_1}$ est clairement bornée en norme $\|\cdot\|_{\varphi_1}$ grâce à Cauchy-Schwarz.

Quant au deuxième terme, majorons-le en utilisant Cauchy-Schwarz puis (4.3) :

$$\begin{aligned} \left| \langle f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u \rangle_{\varphi_2} \right| &= \left| \int_{\Omega} f \cdot \overline{\bar{\partial} \eta_\nu \wedge u} e^{-\varphi_2} d\lambda \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} f e^{-\frac{\varphi_2}{2}} \cdot \bar{\partial} \eta_\nu \wedge \bar{u} e^{-\frac{\varphi_2}{2}} d\lambda \right| \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |\bar{\partial} \eta_\nu \wedge \bar{u}|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{\varphi_2} C_n \left(\int_{\Omega} |u|^2 |\bar{\partial} \eta_\nu|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|f\|_{\varphi_2} C_n \left(\int_{\Omega} |u|^2 e^{-\varphi_1} d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \text{constante} \|u\|_{\varphi_1}, \end{aligned}$$

$[|\bar{\partial} \eta_\nu|^2 = |\partial \eta_\nu|^2 \text{ car } \bar{\eta}_\nu = \eta_\nu]$

ce qui termine la vérification de $\eta_\nu f \in \text{Dom } T^*$. □

Pour établir ①, en utilisant $\eta_\nu f \in \text{Dom } T^*$, calculons :

$$\begin{aligned}
\left| \langle T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f, u \rangle_{\varphi_1} \right| &= \left| \langle T^*(\eta_\nu f), u \rangle_{\varphi_1} - \langle \eta_\nu T^* f, u \rangle_{\varphi_1} \right| \\
&= \left| \langle f, \eta_\nu T u \rangle_{\varphi_2} - \langle f, T(\eta_\nu u) \rangle_{\varphi_2} \right| \\
&= \left| \langle f, \eta_\nu T u - T(\eta_\nu u) \rangle_{\varphi_2} \right| \\
&= \left| \langle f, \bar{\partial} \eta_\nu \wedge u \rangle_{\varphi_2} \right| \\
&= \left| \int_{\Omega} f \cdot \bar{\partial} \eta_\nu \wedge \bar{u} e^{-\varphi_2} d\lambda \right| \\
&\leq \int_{\Omega} |f \cdot \bar{\partial} \eta_\nu \wedge \bar{u}| e^{-\varphi_2} d\lambda \\
\text{[Cauchy-Schwarz ponctuel]} &\leq \int_{\Omega} |f| |\bar{\partial} \eta_\nu \wedge \bar{u}| e^{-\varphi_2} d\lambda \\
\text{[4.3]} &\leq C_n \int_{\Omega} |f| e^{-\frac{\varphi_2}{2}} |u| |\bar{\partial} \eta_\nu| e^{-\frac{\varphi_2}{2}} d\lambda \\
\text{[Hypothèse]} &\leq C_n \int_{\Omega} |f| e^{-\frac{\varphi_2}{2}} |u| e^{-\frac{\varphi_1}{2}} d\lambda.
\end{aligned}$$

En termes d'intégrales, cette inégalité s'écrit :

$$\left| \int_{\Omega} \left(T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f \right) \cdot u e^{-\varphi_1} d\lambda \right| \leq C_n \int_{\Omega} |f| e^{-\frac{\varphi_2}{2}} |u| e^{-\frac{\varphi_1}{2}} d\lambda.$$

Ceci étant vrai pour toute $u \in \text{Dom } T$, en particulier pour toute $u \in \mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega)$, avec l'aide de l'Exercice 8, nous déduisons une inégalité ponctuelle presque partout :

$$|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f| e^{-\varphi_1} \leq C_n |f| e^{-\frac{\varphi_2}{2}} e^{-\frac{\varphi_1}{2}},$$

laquelle équivaut à un contrôle par une fonction-dominatrice indépendante de ν :

$$|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2 e^{-\varphi_1} \leq C_n |f|^2 e^{-\varphi_2}.$$

Une intégration sur Ω assure alors la finitude de :

$$\int_{\Omega} \underbrace{|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f|^2}_{\rightarrow 0 \text{ ponctuellement}} e^{-\varphi_1} d\lambda \leq C_n \int_{\Omega} |f|^2 e^{-\varphi_2} d\lambda < \infty,$$

et le théorème de la convergence dominée donne :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} = 0 \quad (\forall f \in \text{Dom } T^*).$$

Enfin, une inégalité triangulaire et une dernière convergence dominée concluent ① :

$$\|T^*(\eta_\nu f) - T^* f\|_{\varphi_1} \leq \|T^*(\eta_\nu f) - \eta_\nu T^* f\|_{\varphi_1} + \|\eta_\nu T^* f - T^* f\|_{\varphi_1} \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

En remplaçant f par $\eta_\nu f$ avec $\nu \gg 1$ arbitrairement grand, le Lemme 4.2 permet donc de supposer, dans la suite de la démonstration de la Proposition 4.1, que $f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S$ est à support compact.

Naturellement, il s'agit maintenant de régulariser f , ce qui va être possible sans déborder de Ω grâce à la compacité de son support.

Soit donc une fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ avec $\text{supp } \chi \subset \{|z| \leq 1\}$ qui satisfait $\int \chi = 1$, et, pour $\varepsilon > 0$ petit, soit $\chi_\varepsilon(z) := \frac{1}{\varepsilon^{2n}} \chi\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$. Posons :

$$f * \chi_\varepsilon := \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} * \chi_\varepsilon dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

en soumettant tous les coefficients $f_{I;J} \in L^2(\Omega, e^{-\varphi_2})$ à convolution sur \mathbb{C}^n :

$$\begin{aligned} f_{I;J} * \chi_\varepsilon(z) &:= \int_{\mathbb{C}^n} f_{I;J}(w) \chi_\varepsilon(z - w) d\lambda(w) \\ &= \int_{\mathbb{C}^n} f_{I;J}(z - \varepsilon w) \chi(w) d\lambda(w). \end{aligned}$$

En fait, autorisons ε à varier seulement dans $]0, \varepsilon_0]$, où :

$$\varepsilon_0 := \min\left(1, \frac{1}{2} \text{dist}(\text{supp } f, \partial\Omega)\right) > 0,$$

de telle sorte que toutes les convoluées $f_{I;J} * \chi_\varepsilon$ sont à supports contenus dans le sous-ensemble compact fixe de Ω :

$$K := \{w \in \mathbb{C}^n : \text{dist}(w, \text{supp } f) \leq \varepsilon_0\} \subset \Omega.$$

Il est classique que les $f_{I;J} * \chi_\varepsilon$, donc $f * \chi_\varepsilon$, sont alors \mathcal{C}_c^∞ à support dans Ω .

Premièrement, un théorème d'Analyse connu dans les espaces L^2 à poids offre :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f - f * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_2}.$$

Deuxièmement, comme $f \in \text{Dom } S$, on peut écrire :

$$S(f * \chi_\varepsilon) = (Sf) * \chi_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$

et le même théorème de convergence offre aussi :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|Sf - (Sf) * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_3}.$$

Afin de conclure que $f * \chi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} f$ dans la norme du double graphe :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\|T^* f - (T^* f) * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_1} + \|f - f * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_2} + \|Sf - (Sf) * \chi_\varepsilon\|_{\varphi_3} \right),$$

il ne reste donc plus qu'à traiter le premier terme.

La Proposition 5.4 ci-dessous donne l'expression explicite complète de $T^* f$ lorsque $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$:

$$T^* f = (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n e^{\varphi_1} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} \right) dz^I \wedge d\bar{z}^K.$$

Visiblement, cette expression peut se récrire sous forme abrégée comme :

$$e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^* = U + \mathbf{a},$$

où U est un opérateur différentiel d'ordre 1 à coefficients constants, et où \mathbf{a} est un opérateur de multiplication par une fonction \mathcal{C}^∞ . Une telle écriture est aussi valable, au sens des distributions, sur les éléments $f \in \text{Dom } T^*$.

Maintenant, si nous écrivons en trois morceaux :

$$\begin{aligned}(U + \mathbf{a})(f * \chi_\varepsilon) &= (Uf) * \chi_\varepsilon + \mathbf{a}(f * \chi_\varepsilon) \\ &= ((U + \mathbf{a})f) * \chi_\varepsilon - (\mathbf{a}f) * \chi_\varepsilon + \mathbf{a}(f * \chi_\varepsilon),\end{aligned}$$

les théorèmes standard de convergence offrent les convergences en norme L^2 :

$$\begin{aligned}((U + \mathbf{a})f) * \chi_\varepsilon &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} (U + \mathbf{a})f, \\ -(\mathbf{a}f) * \chi_\varepsilon &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} -\mathbf{a}f, \\ \mathbf{a}(f * \chi_\varepsilon) &\xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} \mathbf{a}f.\end{aligned}$$

Tout ceci permet de voir que le premier terme en attente :

$$\begin{aligned}\|T^*(f * \chi_\varepsilon) - T^*f\|_{\varphi_1}^2 &= \int_K \left| e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^*(f * \chi_\varepsilon) - e^{\varphi_2 - \varphi_1} T^*f \right|^2 e^{-2\varphi_2 + \varphi_1} d\lambda \\ &= \int_K \left| (U + \mathbf{a})(f * \chi_\varepsilon) - (U + \mathbf{a})(f) \right|^2 \underbrace{e^{-2\varphi_2 + \varphi_1}}_{\text{borné sur } K} d\lambda,\end{aligned}$$

converge effectivement vers 0 lorsque $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$. □

5. Normes de (p, q) -formes et expression de T^*f

Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, avec trois fonctions-densités $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R})$ auxquelles sont associées les poids $e^{-\varphi_1}, e^{-\varphi_2}, e^{-\varphi_3}$, en considérant le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} L_{p,q}^2(\Omega, e^{-\varphi_1}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L_{p,q+1}^2(\Omega, e^{-\varphi_2}) & \xrightarrow{\bar{\partial}} & L_{p,q+2}^2(\Omega, e^{-\varphi_3}) \\ \cup & \nearrow T & \cup & \nearrow S & \\ \text{Dom } T & & \text{Dom } S, & & \end{array}$$

ce qui précède a montré qu'afin d'atteindre :

$$\begin{aligned}\forall f \in L_{p,q+1}^2(\Omega, e^{-\varphi_2}) \quad \text{avec } \bar{\partial}f = 0, \\ \exists u \in L_{p,q}^2(\Omega, e^{-\varphi_1}) \quad \text{telle que } \bar{\partial}u = f,\end{aligned}$$

il suffit d'établir une inégalité *a priori* du type :

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq C^2 \left(\|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 \right) \quad (\forall f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S),$$

pour une certaine constante $0 \leq C < \infty$, et même, il suffit de le faire pour des formes lisses à support compact :

$$\forall f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega) \subset \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S.$$

La première chose à faire, donc, c'est de calculer T^*f . Nous allons le faire pour $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$, puis la formule obtenue aura du sens dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit donc une $(p, q + 1)$ -forme :

$$f = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

à coefficients $f_{I;J} \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, définis pour des multiindices croissants :

$$1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n \quad \text{et} \quad 1 \leq j_1 < \cdots < j_q < j_{q+1} \leq n.$$

Sans de telles conditions de croissance, il sera nécessaire de pouvoir parler aussi de $f_{I;J}$, et nous devons donc commencer par étendre ces coefficients à des listes non ordonnées d'entiers appartenant à $\{1, \dots, n\}$.

Définition 5.1. Étant donnée une liste de $(q+1)$ entiers de $\{1, \dots, n\}$ deux à deux distincts :

$$M = m_1, \dots, m_q, m_{q+1},$$

si J avec $\{J\} = \{M\}$ en est le réordonnement croissant, on pose :

$$f_{I;M} := \varepsilon_J^M f_{I;J},$$

où :

$$\varepsilon_J^M := \text{signe permutation} \begin{pmatrix} m_1 & \cdots & m_q & m_{q+1} \\ j_1 & \cdots & j_q & j_{q+1} \end{pmatrix}$$

Plus généralement, pour deux listes quelconques de $r \geq 1$ entiers :

$$A = a_1, \dots, a_r \quad \text{et} \quad B = b_1, \dots, b_r,$$

il s'avérera utile de définir :

$$\varepsilon_A^B := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } A \text{ ou } B \text{ ont des éléments répétés,} \\ 0 & \text{lorsque } \text{Card}\{A\} = \text{Card}\{B\} = r \text{ mais } \{A\} \neq \{B\}, \\ \text{signe permutation} \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_r \\ b_1 & \cdots & b_r \end{pmatrix} & \text{autrement.} \end{cases}$$

En cohérence avec ceci, nous assignerons :

$$f_{I;M} := 0 \quad \text{lorsque } M \text{ a des éléments répétés.}$$

Maintenant, si nous revenons au produit scalaire entre formes, il est naturel, pour deux (p, q) -formes :

$$u = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K \quad \text{et} \quad v = \sum'_{|H|=p} \sum'_{|L|=q} v_{H;L} dz^H \wedge d\bar{z}^L,$$

de calculer le produit scalaire hermitien ponctuel par linéarité :

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{|L|=q} u_{I;K} \overline{v_{H;L}} (dz^I \wedge d\bar{z}^K) \cdot (dz^H \wedge d\bar{z}^L) \\ &\stackrel{?}{=} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I;K} \overline{v_{I;K}}, \end{aligned}$$

et une comparaison avec la définition qui a été donnée précédemment montre qu'on doit avoir :

$$(dz^I \wedge d\bar{z}^K) \cdot (dz^H \wedge d\bar{z}^L) := \varepsilon_H^I \varepsilon_L^K.$$

Lemme 5.2. Toute $(p, q + 1)$ -forme admet l'écriture alternative :

$$\begin{aligned} f &= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J \\ &= \frac{1}{q+1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n f_{I;k,K} dz^I \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^K. \end{aligned}$$

Preuve. Fixons I , ainsi que :

$$J = j_1 < \cdots < j_q < j_{q+1}.$$

Dans la deuxième écriture, au monôme différentiel $f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J$ ne peuvent correspondre que ceux dont les indices satisfont :

$$\{k\} \cup \{k_1 < \cdots < k_q\} = \{j_1 < \cdots < j_q < j_{q+1}\},$$

ce qui revient à choisir l'entier k parmi les $(q + 1)$ indices j_\bullet , les q indices j_\bullet restants devenant $k_1 < \cdots < k_q$, sans autre choix. Ces $q + 1$ possibilités nécessitent la division $\frac{1}{q+1}$, sachant que pour les signes, les relations :

$$f_{I;k,K} = \varepsilon_J^{k,K} f_{I;J} \quad \text{et} \quad d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^K = \varepsilon_J^{k,K} d\bar{z}^J$$

montrent qu'il y a compensation, car $(\varepsilon_J^{k,K})^2 = (\pm 1)^2 = 1$. \square

Lemme 5.3. Pour $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$ et $u \in \mathcal{C}_{p,q}^\infty(\Omega)$, on a en tout point de Ω :

$$f \cdot \bar{\partial}u = (-1)^p \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n f_{I;k,K} \frac{\overline{\partial u_{I;K}}}{\partial \bar{z}_k}.$$

Preuve. En partant de :

$$u = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K,$$

que nous différencions :

$$\bar{\partial}u = (-1)^p \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \frac{\partial u_{I;K}}{\partial \bar{z}_k} dz^I \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^K,$$

et en utilisant l'expression alternative pour f obtenue précédemment :

$$f = \frac{1}{q+1} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|L|=q} \sum'_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n f_{H;\ell,L} dz^H \wedge d\bar{z}_\ell \wedge d\bar{z}^L,$$

calculons le produit scalaire ponctuel :

$$\begin{aligned} f \cdot \bar{\partial}u &= \frac{(-1)^p}{q+1} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|L|=q} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \sum'_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n \\ & f_{H;\ell,L} \frac{\overline{\partial u_{I;K}}}{\partial \bar{z}_k} \underbrace{(dz^H \wedge d\bar{z}_\ell \wedge d\bar{z}^L) \cdot (dz^I \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^K)}_{= \varepsilon_I^H \varepsilon_{k,K}^{\ell,L}}, \end{aligned}$$

ce qui nécessite $H = I$, d'où en réorganisant :

$$f \cdot \bar{\partial}u = (-1)^p \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \frac{\overline{\partial u_{I;K}}}{\partial \bar{z}_k} \left(\frac{1}{q+1} \sum'_{|L|=q} \sum'_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n f_{I;\ell,L} \varepsilon_{k,K}^{\ell,L} \right).$$

Or dans la somme double entre parenthèses, nous affirmons que tous les termes sont égaux, en nombre $q+1$ qui compense le $\frac{1}{q+1}$. En effet, puisque k et K y sont fixés avec $\text{Card} \{k, K\} = q+1$, pour que $\varepsilon_{k,K}^{\ell,L}$ soit *non* nul, il faut que $\ell \in \{k, K\}$, ce qui représente $q+1$ choix exactement, puis nécessairement $L = \{k, K\} \setminus \{\ell\}$, et enfin, tous les termes sont alors égaux à :

$$f_{I;\ell,L} \varepsilon_{k,K}^{\ell,L} = f_{I;k,K},$$

ce qui donne bien la formule annoncée. \square

Proposition 5.4. Pour $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$, on a :

$$T^*f = \bar{\partial}^*f = (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n e^{\varphi_1} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} \right) dz^I \wedge d\bar{z}^K.$$

Démonstration. Pour toute $u \in \mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega)$ et toute $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$, la définition de l'adjoint s'exprime par :

$$\langle \bar{\partial}^*f, u \rangle_{\varphi_1} = \langle f, \bar{\partial}u \rangle_{\varphi_2}.$$

Introduisons une notation pour les coefficients *inconnus* à déterminer :

$$\bar{\partial}^*f =: \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} (\bar{\partial}^*f)_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K,$$

d'où :

$$\bar{\partial}^*f \cdot u = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} (\bar{\partial}^*f)_{I;K} \overline{u_{I;K}},$$

donc :

$$\begin{aligned} \langle \bar{\partial}^*f, u \rangle_{\varphi_1} &= \int_{\Omega} \bar{\partial}^*f \cdot u e^{-\varphi_1} d\lambda \\ &= \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} (\bar{\partial}^*f)_{I;K} \overline{u_{I;K}} e^{-\varphi_1} d\lambda. \end{aligned}$$

Par ailleurs, l'expression obtenue pour $f \cdot \bar{\partial}u$ dans le lemme qui précède permet, en effectuant une intégration par parties basique, de calculer :

$$\begin{aligned}
\langle f, \bar{\partial}u \rangle_{\varphi_2} &= \int_{\Omega} f \cdot \bar{\partial}u e^{-\varphi_2} d\lambda \\
&= (-1)^p \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} \frac{\partial \overline{u_{I;K}}}{\partial z_k} d\lambda \\
&= -(-1)^p \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \frac{\partial}{\partial z_k} \left(e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} \right) \overline{u_{I;K}} d\lambda \\
&= (-1)^{p-1} \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n e^{\varphi_1} \frac{\partial}{\partial z_k} \left(e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} \right) \overline{u_{I;K}} e^{-\varphi_1} d\lambda,
\end{aligned}$$

ce qui, par identification, fournit les valeurs annoncées des coefficients $(\bar{\partial}^* f)_{I;K}$ de $\bar{\partial}^* f$. \square

Question 5.5. Cette formule est-elle valable pour tout $f \in \text{Dom } T^*$?

Afin d'établir l'inégalité fondamentale, il est maintenant nécessaire de connaître une expression appropriée de $|Sf|^2 = |\bar{\partial}f|^2$. Commençons par un préliminaire.

Lemme 5.6. Pour une $(p, q+1)$ -forme $f \in L^2_{p,q+1}(\Omega, \text{loc})$, on a :

$$|f|^2 = f \cdot f = \frac{1}{q+1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n |f_{I;k,K}|^2.$$

Preuve. En partant de la représentation alternative du Lemme 5.2 écrite avec des indices différents :

$$f = \frac{1}{q+1} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|L|=q} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n f_{H;\ell,L} dz^H \wedge d\bar{z}_{\ell} \wedge d\bar{z}^L,$$

nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned}
f \cdot f &= \frac{1}{(q+1)^2} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{|L|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n f_{I;k,K} \overline{f_{H;\ell,L}} \\
&\quad (dz^I \wedge d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}^K) \cdot (dz^H \wedge d\bar{z}_{\ell} \wedge d\bar{z}^L) \\
&= \frac{1}{(q+1)^2} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{|L|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n \epsilon_{\ell,L}^{k,K} f_{I;k,K} \overline{f_{H;\ell,L}} \\
&= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n f_{I;k,K} \left(\frac{1}{(q+1)^2} \sum'_{|L|=q} \sum_{\substack{\ell=1 \\ \ell \notin L}}^n \epsilon_{\ell,L}^{k,K} \overline{f_{I;\ell,L}} \right) \\
&= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K}}^n f_{I;k,K} \left(\frac{1}{(q+1)^2} (q+1) \overline{f_{I;k,K}} \right),
\end{aligned}$$

en observant que dans la somme double entre parenthèses, une fois k, K fixés, seuls les termes pour lesquels $\{\ell, L\} = \{k, K\}$ sont non nuls, et grâce aux corrections de signes, ils sont tous identiques — au nombre de $q + 1$ —, ce qui nous conduit à destination. \square

Par exemple, pour $p = 0$ et $q = 1$, en partant de :

$$\begin{aligned} f &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} f_{j_1, j_2} d\bar{z}_{j_1} \wedge d\bar{z}_{j_2} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_1}}^n f_{k, k_1} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_{k_1}, \end{aligned}$$

la définition donne directement :

$$\begin{aligned} |f|^2 &:= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq n} |f_{j_1, j_2}|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k_1=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_1}}^n |f_{k, k_1}|^2, \end{aligned}$$

expression qui coïncide avec le résultat que le lemme général affirme.

Ensuite, nous souhaitons obtenir une formule pour $|\bar{\partial}f|^2$. Il est avisé de commencer par regarder le cas simple $(p, q) = (0, 1)$. Partons donc de :

$$f = \sum_{j=1}^n f_j d\bar{z}_j,$$

que nous différencions :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge d\bar{z}_j \\ &= \sum_{j < k} + \sum_{j > k} \\ [j \longleftrightarrow k] &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left(\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \right) d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}_k, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |\bar{\partial}f|^2 &= \sum_{1 \leq j < k \leq n} \left| \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \right|^2. \end{aligned}$$

Toutefois, puisque cette formule n'est pas encore assez bonne pour nous, en utilisant :

$$|a - b|^2 = |a|^2 + |b|^2 - a\bar{b} - \bar{a}b \quad (a, b \in \mathbb{C}),$$

nous développons :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\left| \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 + \left| \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \right) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}} + \overline{\frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k}} \frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j} \right),$$

et en observant que les deux couples entre grandes parenthèses sont invariants par l'échange $j \longleftrightarrow k$ après sommation, nous parvenons à une formule finalisée :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 - \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_k}{\partial \bar{z}_j}}.$$

La proposition suivante généralise une telle formule aux formes lisses de bidegré quelconque.

Proposition 5.7. *Pour une $(p, q+1)$ -forme appartenant à $\mathcal{C}_{p,q+1}^\infty(\Omega)$:*

$$f = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J,$$

on a :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin K}}^n \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}}.$$

Démonstration. Grâce au formalisme mis en place et déjà plusieurs fois utilisé, calculons aisément :

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f \cdot \bar{\partial}f &= \left((-1)^p \sum'_{|I|=p} \sum'_{\substack{|J|=q+1 \\ j \notin J}} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} dz^I \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}^J \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left((-1)^p \sum'_{|H|=p} \sum'_{\substack{|M|=q+1 \\ m \notin M}} \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin M}}^n \frac{\partial f_{H;M}}{\partial \bar{z}_m} dz^H \wedge d\bar{z}_m \wedge d\bar{z}^M \right) \\ &= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|H|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum'_{\substack{|M|=q+1 \\ j \notin J}} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin M}}^n \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{H;M}}{\partial \bar{z}_m}} \underbrace{(dz^I \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}^J) \cdot (dz^H \wedge d\bar{z}_m \wedge d\bar{z}^M)}_{= \epsilon_H^I \epsilon_{m,M}^{j,J}}, \end{aligned}$$

ce qui force $H = I$ et donne une première formule non finalisée :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum'_{|M|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin M}}^n \epsilon_{m,M}^{j,J} \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;M}}{\partial \bar{z}_m}}.$$

Ensuite, divisons cette expression en deux parties disjointes correspondant à la décomposition :

$$\sum_j \sum_m = \sum_{j=m} + \sum_{j \neq m}.$$

ce qui donne un premier :

$$\begin{aligned} \text{Terme}_1 &:= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum'_{|M|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \epsilon_{j,M}^{j,J} \epsilon_{m,M}^{j,J} \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;M}}{\partial \bar{z}_m}} \\ [J = M] &= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2. \end{aligned}$$

Pour l'autre somme sur $\{j \neq m\}$, soit à transformer :

$$\text{Terme}_2 := \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum'_{|M|=q+1} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin J, m \notin M}} \epsilon_{m,M}^{j,J} \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;M}}{\partial \bar{z}_m}}.$$

Ici, pour que $\epsilon_{m,M}^{j,J}$ avec $j \notin J$ et $m \notin M$ soit *non nul*, il faut que les deux ensembles de cardinal $q+2$ coïncident :

$$\{j, J\} = \{m, M\},$$

donc il existe $K = k_1 < \dots < k_q$ ordonné de cardinal q tel que :

$$\{J\} = \{m, K\} \quad \text{et} \quad \{M\} = \{j, K\},$$

et comme J et M sont ordonnés, ceci veut dire que m se place dans K au bon endroit, et de même, que j se place au bon endroit dans K .

Par composition de permutations, transformons :

$$\begin{aligned} \epsilon_{m,M}^{j,J} &= \epsilon_{m,j,K}^{j,J} \epsilon_{j,m,K}^{m,j,K} \epsilon_{m,M}^{j,m,K} \\ [\epsilon_{j,m}^{m,j} = -1] &= \epsilon_{m,j,K}^{j,J} (-1) \epsilon_{m,M}^{j,m,K} \\ [j \longleftrightarrow m] &= (-\epsilon_{j,m,K}^{j,J}) (-1) (-\epsilon_{m,M}^{m,j,K}) \\ &= -\epsilon_{m,K}^J \epsilon_M^{j,K}, \end{aligned}$$

de manière à pouvoir écrire :

$$\begin{aligned} \text{Terme}_2 &= - \sum'_{|I|=p} \sum'_{\substack{|J|=q+1 \\ \{J\} = \{m,K\}}} \sum'_{\substack{|M|=q+1 \\ \{M\} = \{j,K\}}} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin J, m \notin M}} \epsilon_{m,K}^J \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \epsilon_M^{j,K} \overline{\frac{\partial f_{I;M}}{\partial \bar{z}_m}} \\ &= - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin K, m \notin K}} \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}}. \end{aligned}$$

Ainsi, en additionnant ces deux termes nous parvenons à une expression qui n'est pas encore celle de la proposition :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin K, m \notin K}} \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}}.$$

Pour achever le travail, écrivons :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \notin J}}^n = \sum_{j=1}^n - \sum_{j \in J}^n,$$

ce qui conduit à trois au lieu de deux blocs :

$$(5.8) \quad \begin{aligned} |\bar{\partial}f|^2 &= \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \\ &\quad - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin K \neq m}} \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}}. \end{aligned}$$

Lemme 5.9. *Étant donné des quantités $A_k^{j_1, \dots, j_{q+1}} \in \mathbb{C}$ antisymétriques en leurs indices supérieurs $j_\bullet \in \{1, \dots, n\} \ni k$, on a :*

$$\sum'_{|J|=q+1} \sum_{j \in J} |A_j^J|^2 = \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n |A_j^{j,K}|^2,$$

à savoir plus précisément :

$$\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_{q+1} \leq n} \left(|A_{j_1}^{j_1, \dots, j_{q+1}}|^2 + \dots + |A_{j_{q+1}}^{j_1, \dots, j_{q+1}}|^2 \right) = \sum_{1 \leq k_1 < \dots < k_q \leq n} \left(\sum_{j \neq k_1, \dots, k_q} |A_j^{j, k_1, \dots, k_q}|^2 \right).$$

Démonstration. Élémentaire, et proposée en Exercice 9. \square

Le deuxième de ces trois blocs se transforme donc en :

$$- \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \in J}}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 = - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n \left| \frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2,$$

et lorsqu'on l'additionne au troisième bloc, le résultat se contracte en un seul bloc :

$$- \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n \left| \frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{1 \leq j \neq m \leq n \\ j \notin K \neq m}} \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}} = - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin K}}^n \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}},$$

ce qui, en revenant à (5.8), conclut la démonstration de la formule annoncée :

$$|\bar{\partial}f|^2 = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin K}}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \notin K}}^n \frac{\partial f_{I;m,K}}{\partial \bar{z}_j} \overline{\frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_m}}. \quad \square$$

6. Inégalité fondamentale pour les (p, q) -formes

Toujours dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, commençons par des préliminaires très élémentaires. Pour $1 \leq k \leq n$, les opérateurs basiques :

$$\partial_k := \frac{\partial}{\partial z_k} \quad \text{et} \quad \bar{\partial}_k := \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k}$$

ont en effet des adjoints formels qu'il convient de comprendre à l'avance. Soit une fonction quelconque $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et soit le produit scalaire hermitien à poids :

$$\langle A, B \rangle_\varphi := \int_\Omega A \bar{B} e^{-\varphi} d\lambda,$$

défini et étudié ici seulement pour $A, B \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Introduisons donc les opérateurs :

$$\delta_k(A) := e^\varphi \frac{\partial}{\partial z_k} (A e^{-\varphi}) = \frac{\partial A}{\partial z_k} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_k} A \quad (1 \leq k \leq n),$$

ainsi que leurs conjugués $\bar{\delta}_k$: ce sont eux les adjoints volontaires !

Lemme 6.1. *Pour toutes fonctions $A, B \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a :*

$$\begin{aligned} \langle A, \bar{\delta}_k(B) \rangle_\varphi &= - \langle \delta_k(A), B \rangle_\varphi, \\ \langle \bar{\delta}_k(A), B \rangle_\varphi &= - \langle A, \delta_k(B) \rangle_\varphi. \end{aligned}$$

Preuve. Grâce à une intégration par parties n'incorporant aucun terme de bord, on calcule en effet aisément :

$$\begin{aligned} \langle A, \bar{\delta}_k(B) \rangle_\varphi &= \int_\Omega A \frac{\overline{\partial B}}{\partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} d\lambda = - \int_\Omega \bar{B} \frac{\partial}{\partial z_k} (A e^{-\varphi}) d\lambda \\ &= - \int_\Omega e^\varphi \frac{\partial}{\partial z_k} (A e^{-\varphi}) \bar{B} e^{-\varphi} d\lambda \\ &= - \langle \delta_k(A), B \rangle_\varphi. \end{aligned}$$

De manière similaire :

$$\langle \bar{\delta}_k(A), B \rangle_\varphi = \int_\Omega \frac{\partial A}{\partial \bar{z}_k} \bar{B} e^{-\varphi} d\lambda = - \int_\Omega A e^\varphi \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} (\bar{B} e^{-\varphi}) e^{-\varphi} d\lambda = - \langle A, \delta_k(B) \rangle_\varphi. \quad \square$$

Plus tard, nous serons intéressés par le calcul de certains commutateurs entre ces opérateurs, lequel va — de manière sérendipitaire — faire apparaître tous les coefficients matriciels de $\partial \bar{\partial} \varphi$.

Lemme 6.2. *Pour toutes fonctions $A, B \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a :*

$$\int_\Omega \left(\delta_j(A) \overline{\delta_k(B)} - \bar{\delta}_k(A) \overline{\delta_j(B)} \right) e^{-\varphi} d\lambda = \int_\Omega A \bar{B} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} e^{-\varphi} d\lambda.$$

Preuve. Commençons par observer que les commutateurs en question sont d'ordre zéro, c'est-à-dire agissent comme simples opérateurs de multiplication :

$$\begin{aligned} (\delta_j \circ \bar{\delta}_k - \bar{\delta}_k \circ \delta_j)(A) &= \left(\frac{\partial}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} \cdot \right) \frac{\partial A}{\partial \bar{z}_k} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \left(\frac{\partial A}{\partial z_j} - \frac{\partial \varphi}{\partial z_j} A \right) \\ &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} A. \end{aligned}$$

Ainsi grâce à cela et en utilisant le lemme qui précède, l'intégrale dans le membre de gauche ci-dessus se transforme en :

$$\begin{aligned} \text{gauche} &= \langle \delta_j(A), \delta_k(B) \rangle_\varphi - \langle \bar{\delta}_k(A), \bar{\delta}_j(B) \rangle_\varphi \\ &= - \langle \bar{\delta}_k(\delta_j(A)), B \rangle_\varphi + \langle \delta_j(\bar{\delta}_k(A)), B \rangle_\varphi \\ &= \left\langle \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} A, B \right\rangle_\varphi. \quad \square \end{aligned}$$

Une fois cette mise en bouche avalée, toujours dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, si nous choisissons une fonction $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ qui croît assez rapidement pour majorer les normes des $\bar{\partial}\eta_\nu$ qui sont *a priori* non connues :

$$\sum_{k=1}^n \left| \frac{\partial \eta_\nu}{\partial \bar{z}_k} \right|^2 \leq e^\psi \quad (\forall \nu \geq 1, \text{ dans } \Omega),$$

et si nous choisissons les trois fonctions-poids sous la forme :

$$\varphi_1 := \varphi - 2\psi, \quad \varphi_2 := \varphi - \psi, \quad \varphi_3 := \varphi,$$

alors les deux conditions qui garantissent l'applicabilité de la Proposition 4.1 fondamentale de densité seront remplies, puisque :

$$e^\psi = e^{\varphi_3 - \varphi_2} = e^{\varphi_2 - \varphi_1},$$

et alors avec un tel choix, la fonction φ reste entièrement libre. En fait, dans peu de temps, nous supposons Ω pseudoconvexe et nous choisissons une fonction :

$$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega),$$

qui est d'exhaustion, afin que la géométrie de Ω intervienne.

Rappelons que nous désirons atteindre l'estimée *a priori* :

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq C^2 \left(\|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 \right) \quad (\forall f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S),$$

donc nous venons de justifier parfaitement qu'il suffit de le faire pour $f \in \mathcal{C}_{c,p,q+1}^\infty(\Omega)$, que nous écrivons toujours sous la forme :

$$f = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} f_{I;J} dz^I \wedge d\bar{z}^J.$$

Ici, les fonctions-coefficients $f_{I;k,K} = 0$ sont par convention supposées nulles lorsque $J = k$, K s'écrit sous la forme d'un indice k suivi d'un q -multiindice ordonné $K = k_1 < \dots < k_q$, dans la circonstance où $k = k_v$ pour un v avec $1 \leq v \leq q$.

Dans l'expression que nous avons obtenue pour $T^*f = \bar{\partial}^*f$, nous pouvons donc supprimer la mention $k \notin K$, ce qui, après multiplication par e^ψ , lance le calcul suivant :

$$\begin{aligned} e^\psi T^*f &= (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{k=1}^n e^{\psi+\varphi_1} \left[-\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_k} e^{-\varphi_2} f_{I;k,K} + e^{-\varphi_2} \frac{\partial f_{I;k,K}}{\partial z_k} \right] dz^I \wedge d\bar{z}^K \\ &= (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{k=1}^n e^{\psi+\varphi_1-\varphi_2} \left[-\frac{\partial \varphi_2}{\partial z_k} f_{I;k,K} + \frac{\partial f_{I;k,K}}{\partial z_k} \right] dz^I \wedge d\bar{z}^K \\ [\varphi_2 = \varphi - \psi] &= (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{k=1}^n \left[-\frac{\partial \varphi}{\partial z_k} f_{I;k,K} + \frac{\partial \psi}{\partial z_k} f_{I;k,K} + \frac{\partial f_{I;k,K}}{\partial z_k} \right] dz^I \wedge d\bar{z}^K \\ &= (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{k=1}^n \delta_k(f_{I;k,K}) dz^I \wedge d\bar{z}^K + \\ &\quad + (-1)^{p-1} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum'_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_k} f_{I;k,K} dz^I \wedge d\bar{z}^K. \end{aligned}$$

Récrivons cette égalité à trois termes en changeant leurs places vis-à-vis du signe égalité :

$$\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \left(\sum_{k=1}^n \delta_k(f_{I;k,K}) \right) dz^I \wedge d\bar{z}^K = (-1)^{p-1} e^\psi T^* f - \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_k} f_{I;k,K} \right) dz^I \wedge d\bar{z}^K,$$

ce que nous pouvons abrégé comme égalité entre vecteurs :

$$z = x + y$$

de l'espace vectoriel \mathbb{C}^Q de dimension égale au nombre de (p, q) -formes indépendantes $dz^I \wedge d\bar{z}^K$:

$$Q := \binom{p}{n} \binom{q}{n}.$$

Dans cet espace \mathbb{C}^Q muni du produit scalaire hermitien ponctuel que nous avons noté \bullet , l'inégalité de Cauchy-Schwarz majeure :

$$\begin{aligned} z \bullet z &= x \bullet x + x \bullet y + y \bullet x + y \bullet y \\ &\leq 2 x \bullet x + 2 y \bullet y, \end{aligned}$$

ce qui nous donne :

$$\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_j(f_{I;j,K}) \overline{\delta_k(f_{I;k,K})} \leq 2 \left(e^{2\psi} T^* f \bullet T^* f + \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_k}} f_{I;j,K} \overline{f_{I;k,K}} \right).$$

Maintenant, comme pour des nombres complexes $\Psi_j \in \mathbb{C}$ et $F_j \in \mathbb{C}$, nous pouvons majorer de manière élémentaire :

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \Psi_j \overline{\Psi_k} F_j \overline{F_k} = \left| \sum_{j=1}^n \Psi_j F_j \right|^2 \leq \left(\sum_{j=1}^n |\Psi_j|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |F_k|^2 \right),$$

le dernier terme à droite ci-dessous est majoré par :

$$\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \overline{\frac{\partial \psi}{\partial \bar{z}_k}} f_{I;j,K} \overline{f_{I;k,K}} \leq \left(\sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial \psi}{\partial z_j} \right|^2 \right) \underbrace{\left(\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{k=1}^n |f_{I;k,K}|^2 \right)}_{=(q+1)|f|^2}$$

d'où :

$$\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_j(f_{I;j,K}) \overline{\delta_k(f_{I;k,K})} \leq 2 \left(e^{2\psi} |T^* f|^2 + (q+1) |\partial \psi|^2 |f|^2 \right),$$

et enfin en intégrant après multiplication par $e^{-\varphi}$:

$$\int_{\Omega} \left(\sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \delta_j(f_{I;j,K}) \overline{\delta_k(f_{I;k,K})} \right) e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \left(\|T^* f\|_{\varphi_1} + (q+1) \int_{\Omega} |\partial \psi|^2 |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \right).$$

Maintenant, additionnons à cette inégalité la formule pour $|\bar{\partial} f|^2$ que nous avons longuement préparée à l'avance, réécrite comme :

$$- \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_{I;k,K}}{\partial \bar{z}_j}} + \sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 = |\bar{\partial} f|^2,$$

pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\delta_j(f_{I;j,K}) \overline{\delta_k(f_{I;k,K})} - \frac{\partial f_{I;j,K}}{\partial \bar{z}_k} \overline{\frac{\partial f_{I;k,K}}{\partial \bar{z}_j}} \right) e^{-\varphi} d\lambda + \\ & \quad + \underbrace{\int_{\Omega} \left(\sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \right) e^{-\varphi} d\lambda}_{\text{positif de toute façon}} \leq \\ & \leq 2 \|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3} + 2(q+1) \int_{\Omega} |\partial\psi|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \end{aligned}$$

et pour atteindre enfin une inégalité fondamentale :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{I;j,K} \overline{f_{I;k,K}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) e^{-\varphi} d\lambda + \int_{\Omega} \left(\sum'_{|I|=p} \sum'_{|J|=q+1} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f_{I;J}}{\partial \bar{z}_j} \right|^2 \right) e^{-\varphi} d\lambda \leq \\ & \leq 2 \|T^* f\|_{\varphi_1} + \|Sf\|_{\varphi_3} + 2(q+1) \int_{\Omega} |\partial\psi|^2 |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda. \end{aligned}$$

7. Théorèmes d'existence dans des domaines pseudoconvexes

Dorénavant, supposons que Ω est pseudoconvexe, et que $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ est une fonction strictement plurisousharmonique d'exhaustion pour Ω . La stricte plurisousharmonicité de φ s'exprime par l'existence d'une fonction réelle \mathcal{C}^∞ strictement positive :

$$c: \Omega \longrightarrow]0, \infty[,$$

telle que :

$$c(z) \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^c \Omega).$$

Alors dans l'identité fondamentale obtenue après bien des efforts à la fin de la Section 6 qui précède, minorons la quantité à gauche entre grandes parenthèses :

$$c \sum_{i=1}^n |f_{I;i,K}|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{I;j,K} \overline{f_{I;k,K}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \quad (\forall |I|=p, \forall |K|=q),$$

souvenons-nous du Lemme 5.6, sommons-intégrons ces inégalités, négligeons le terme positif de toute façon :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} c(q+1) |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda &= \int_{\Omega} c \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \sum_{i=1}^n |f_{I;i,K}|^2 e^{-\varphi} d\lambda \\ &\leq \int_{\Omega} \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} \left(\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n f_{I;j,K} \overline{f_{I;k,K}} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) e^{-\varphi} d\lambda \\ &\leq 2 \|T^* f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 + 2(q+1) \int_{\Omega} |\partial\psi|^2 |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda, \end{aligned}$$

soustrayons-réorganisons :

$$(q+1) \int_{\Omega} (c - 2|\partial\psi|^2) |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2$$

et enfin utilisons $1 \leq (q+1)$ ainsi que $1 \leq 2$:

$$\boxed{\int_{\Omega} (c - 2|\partial\psi|^2) |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq 2 \|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + 2 \|Sf\|_{\varphi_3}^2}$$

Maintenant, si nous pouvions choisir la fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ telle que la fonction c associée satisfasse :

$$2 \leq (c - 2|\partial\psi|^2) e^{-\psi},$$

en rappelant que $e^{-\varphi+\psi} = e^{-\varphi_2}$, nous atteindrions l'inégalité *a priori* que nous souhaitons :

$$\begin{aligned} 2 \|f\|_{\varphi_2}^2 &= \int_{\Omega} 2e^{\psi} |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \leq \int_{\Omega} (c - 2|\partial\psi|^2) |f|^2 e^{-\varphi} d\lambda \\ &\leq 2 \|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + 2 \|Sf\|_{\varphi_3}^2. \end{aligned}$$

Autrement dit, cela revient à rechercher une fonction d'exhaustion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ dont la fonction c qui minore la positivité de $\sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\varphi$ soit suffisamment grande pour que :

$$2e^{\psi} + 2|\partial\psi|^2 \leq c.$$

Ici à gauche, la fonction n'est pas contrôlée, elle peut croître assez rapidement au bord de Ω . Donc le problème revient à savoir si l'on peut rendre arbitrairement grande la positivité de $\sqrt{-1} \partial\bar{\partial}\varphi$ pour une fonction d'exhaustion d'un domaine pseudoconvexe, et la réponse est oui !

Proposition 7.1. *Dans un domaine pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, étant donné une suite quelconque $\{\eta_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ de fonctions $\eta_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, [0, 1])$ satisfaisant :*

$$\{\eta_\nu = 1\} \subset \text{Int} \{\eta_{\nu+1} = 1\} \quad \text{et} \quad \Omega = \bigcup_{\nu \geq 1} \{\eta_\nu = 1\},$$

si $\psi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un majorant quelconque dans :

$$|\partial\eta_\nu|^2 \leq e^\psi \quad (\nu \geq 1),$$

alors il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$:

$$c(z) \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}}\Omega),$$

telle que :

$$2e^{\psi} + 2|\partial\psi|^2 \leq c \quad (\text{dans } \Omega).$$

Dans ces conditions, comme promis, nous atteindrons l'inégalité *a priori* que nous désirons :

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq \|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 \quad (\forall f \in \mathcal{C}_{c,p,q}^\infty(\Omega)).$$

Démonstration. Partons d'une fonction $\phi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ quelconque satisfaisant :

$$e(z) \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega),$$

pour une certaine fonction $e \in \mathcal{C}^\infty(\Omega,]0, \infty[)$. Soit alors $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ une fonction croissante convexe. En composant :

$$\varphi := \chi \circ \phi,$$

calculons et minorons :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \chi'' \circ \phi \frac{\partial \phi}{\partial z_j} \frac{\partial \phi}{\partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k + \chi' \circ \phi \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k \\ &= \chi'' \circ \phi \left| \sum_{i=1}^n \frac{\partial \phi}{\partial z_i} v_i \right|^2 + \chi' \circ \phi \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \phi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} v_j \bar{v}_k \\ &\geq 0 + \chi' \circ \phi \cdot e \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \end{aligned}$$

et donc si nous prenons :

$$c := \chi' \circ \phi \cdot e,$$

il suffit de choisir χ qui croît suffisamment rapidement pour que :

$$\chi' \circ \phi \geq \frac{2e^\psi + 2|\partial\psi|^2}{e}. \quad \square$$

Plus généralement, la même preuve montre que pour toute fonction $c: \Omega \rightarrow]0, \infty[$, il existe une fonction d'exhaustion $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \text{SPSH}(\Omega)$ telle que :

$$c(z) \sum_{i=1}^n |v_i|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z) v_j \bar{v}_k \quad (\forall z \in \Omega, \forall v \in T_z^{\mathbb{C}} \Omega).$$

Théorème 7.2. Dans un domaine pseudoconvexe $\Omega \subset \mathbb{C}^{n \geq 1}$, l'équation $\bar{\partial}u = f$ est résoluble dans l'espace des formes localement de carré intégrable de bidegrés quelconques :

$$\forall f \in L_{\text{loc}, p, q+1}^2(\Omega) \quad \text{avec} \quad \bar{\partial}f = 0 \quad \exists u \in L_{\text{loc}, p, q}^2(\Omega) \quad \bar{\partial}u = f.$$

Démonstration. Pour une forme donnée $f \in L_{\text{loc}, p, q+1}^2(\Omega)$, nous pouvons augmenter la croissance de χ , donc de φ , de manière à rendre (exercice) :

$$f \in L_{p, q+1}^2(\Omega, e^{\psi-\varphi}).$$

L'inégalité *a priori* que nous avons obtenue :

$$\|f\|_{\varphi_2}^2 \leq \|T^*f\|_{\varphi_1}^2 + \|Sf\|_{\varphi_3}^2 \quad (\forall f \in \text{Dom } T^* \cap \text{Dom } S),$$

alliée au Théorème 3.2, fournit alors une solution $u \in L_{p, q}^2(\Omega, e^{-\varphi+2\psi})$ de $\bar{\partial}u = f$. Mais alors, comme les poids sont \mathcal{C}^∞ donc bornés :

$$u \in L_{\text{loc}, p, q}^2(\Omega). \quad \square$$

8. Appendice : Sous-ensembles faiblement bornés d'un espace de Hilbert

Rappelons qu'un espace de Banach est un espace vectoriel normé complet.

Théorème 8.1. [de Banach-Steinhaus] *Entre deux espaces de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|\cdot\|_Y)$, soit une famille $(T_i)_{i \in I}$, indexée par un ensemble quelconque I , d'opérateurs linéaires continus :*

$$X \xrightarrow{T_i} Y.$$

Si, pour tout $x \in X$ fixé :

$$\sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_Y < \infty,$$

alors les normes d'opérateurs sont uniformément bornées :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| < \infty.$$

Démonstration. Puisque X est complet, on peut appliquer les théorèmes de Baire, dont nous rappelons sans démonstration un des énoncés possibles, de la manière suivante.

Théorème 8.2. [de Baire] *Dans un espace de Banach, toute réunion infinie dénombrable $\bigcup_{n \geq 1} X_n$ de sous-ensembles fermés $X_n \subset X$ d'intérieurs $\text{Int } X_n = \emptyset$ vides est encore d'intérieur vide :*

$$\text{Int } \bigcup_{n \geq 1} X_n = \emptyset. \quad \square$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ entier (grand), introduisons en effet :

$$X_n := \{x \in X : \sup_{i \in I} \|T_i(x)\|_Y \leq n\}.$$

Ces sous-ensembles emboîtés $X_n \subset X_{n+1}$ sont fermés, puisque tous les T_i sont supposés continus, et l'hypothèse principale signifie que :

$$X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n.$$

Comme X est d'intérieur non vide, la contraposée du théorème de Baire fournit alors un entier $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$\emptyset \neq \text{Int } X_N.$$

Donc il existe $x_0 \in X_N$ et il existe $\delta > 0$ petit tels que :

$$\overline{B}(x_0, \delta) := \{x \in X : \|x - x_0\|_X \leq \delta\} \subset X_N.$$

Ensuite, soit un vecteur quelconque $u \in X$ avec $\|u\|_X \leq 1$, et soit $i \in I$ un indice quelconque. En observant que $x_0 + \delta u \in \overline{B}(x_0, \delta) \subset X_N$, on calcule alors :

$$\begin{aligned} \|T_i(u)\|_Y &= \frac{1}{\delta} \|T_i(\delta u + x_0) - T_i(x_0)\|_Y \\ &\leq \frac{1}{\delta} \left(\|T_i(x_0 + \delta u)\|_Y + \|T_i(x_0)\|_Y \right) \\ [x_0 + \delta u \in X_N, x_0 \in X_N] \quad &\leq \frac{1}{\delta} (N + N). \end{aligned}$$

Ceci étant valide quel que soit $\|u\|_X \leq 1$ et quel que soit $i \in I$, en prenant un supremum double :

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| = \sup_{i \in I} \sup_{\|u\|_X \leq 1} \|T_i(u)\|_Y \leq \frac{2N}{\delta} < \infty,$$

on conclut. □

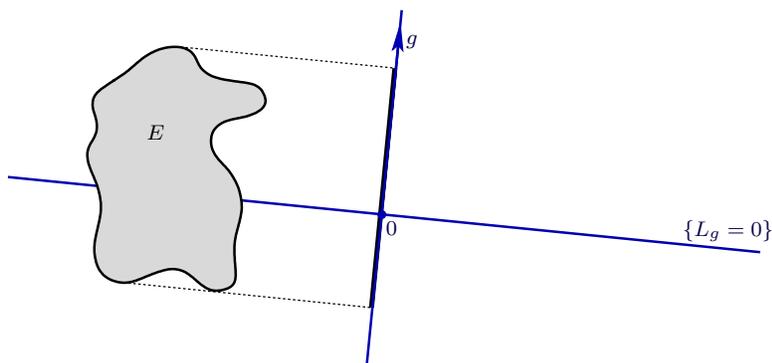
Rappelons que le théorème de représentation de Riesz implique que tout espace de Hilbert H est égal à son dual $H^* = H = H^{**}$ ainsi qu'à son bidual.

Proposition 8.3. *Soit H un espace de Hilbert, et soit $E \subset H$ un sous-ensemble quelconque. Alors E est borné :*

$$\exists 0 \leq R < \infty \quad E \subset \{f \in H : \|f\|_H \leq R\},$$

si et seulement si E est faiblement borné :

$$\forall g \in H \quad \exists 0 \leq C_g < \infty \quad |\langle e, g \rangle_H| \leq C_g \quad (\forall e \in E).$$



Être borné signifie être contenu dans une boule de rayon assez grand, et être faiblement borné, avoir des projections bornées sur *toutes* les droites engendrées par des vecteurs non nuls, car pour $g \in H$, si nous notons $L_g \in H^*$ la forme linéaire :

$$\begin{aligned} L_g: H &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle f, g \rangle_H, \end{aligned}$$

la seconde condition de la proposition signifie en effet que :

$$L_g(E) \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq C_g\} \quad (\forall g \in H).$$

Démonstration. Si E est borné, à savoir si $\|e\|_H \leq R < \infty$ pour tout $e \in E$, alors avec $g \in H$ quelconque, une simple inégalité de Cauchy-Schwarz montre la faible bornitude :

$$|\langle e, g \rangle_H| \leq \|e\|_H \|g\|_H \leq R \|g\|_H =: C_g < \infty \quad (\forall e \in E).$$

Réciproquement, supposons que pour tout $g \in H$, on a :

$$|\langle e, g \rangle_H| \leq C_g \quad (\forall e \in E),$$

inégalité qu'il est avisé de faire « pivoter » par conjugaison complexe :

$$\begin{aligned} |\langle e, g \rangle_H| &= |\overline{\langle g, e \rangle_H}| = |\langle g, e \rangle_H| \\ &= |L_e(g)| \leq C_g, \end{aligned}$$

de manière à la ré-interpréter sous la forme :

$$\sup_{e \in E} |L_e(g)| \leq C_g < \infty \quad (\forall g \in H),$$

ce qui fait voir que cette nouvelle famille de formes linéaires $(L_e)_{e \in E}$ indexée par E satisfait l'hypothèse du Théorème 8.1 de Banach-Steinhaus, sur tout vecteur fixé $g \in H$. En appliquant ce théorème, nous obtenons :

$$\sup_{e \in E} \|L_e\| < \infty,$$

et comme $\|L_e\| = \|e\|_H$ (révision mentale), ceci conclut que E est bien borné. □

9. Exercices

Exercice 1. Démontrer le Lemme 1.7. *Indication:* Écrire $\Omega = \cup_{j=1}^{\infty} K_j$, avec une suite de compacts $K_j \subseteq \mathbb{R}^n$ emboîtés $K_j \subset \text{Int } K_{j+1}$, et, en raisonnant par récurrence sur $j \geq 1$, déclarer successivement φ sur les « coquilles » disjointes $K_{j+1} \setminus K_j$ en fonction des valeurs $\int_{K_{j+1} \setminus K_j} |u|^2 d\lambda < \infty$.

Exercice 2. Fournir une démonstration rigoureuse de la Proposition 1.8. *Indication:* Pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, commencer par construire une suite $(\eta_\nu)_{\nu=1}^{\infty}$ de fonctions $\eta_\nu \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, [0, 1])$ lisses à support compact dans Ω telle que :

$$\|u - \eta_\nu u\|_\varphi \xrightarrow{\nu \rightarrow \infty} 0,$$

puis convoler $(\eta_\nu u) * \chi_\varepsilon$ avec une famille régularisante $(\chi_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ de fonctions $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{C}^n, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant $\text{supp } \chi_\varepsilon \subset \{|z| \leq \varepsilon\}$ pour tout $\varepsilon > 0$, ainsi que $1 = \int \chi_\varepsilon d\lambda$.

Exercice 3. [Espace de Sobolev prototypique] Ici, toutes les fonctions sont supposées à valeurs dans \mathbb{R} . On note $W^1 = W^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ le \mathbb{R} -sous-espace vectoriel de $L^2(]0, 1[)$ constitué des fonctions $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2(]0, 1[)$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \Lambda_f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0, 1[, \mathbb{R})$ de classe \mathcal{C}^1 à support compact dans $]0, 1[$.

(a) Montrer que W^1 est un sous-ensemble dense de $L^2(]0, 1[)$.

(b) Montrer que :

$$\langle f, g \rangle_{W^1} := \int_0^1 f(x) g(x) dx + \int_0^1 \Lambda_f(x) \Lambda_g(x) dx$$

définit un produit scalaire sur W^1 .

(c) Montrer que W^1 , muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 4. Démontrer le Lemme 1.13. *Indication:* Localiser le problème dans un ouvert relativement compact de Ω au moyen d'une fonction-plateau.

Exercice 5. (a) Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un \mathbb{C} -espace de Hilbert, soit $D \subset H$ un sous-espace vectoriel dense, *i.e.* satisfaisant $\overline{D}^{\|\cdot\|_H} = H$, et soit une forme linéaire :

$$\Lambda: D \rightarrow \mathbb{C}.$$

Montrer qu'il existe un unique prolongement linéaire $\tilde{\Lambda}: H \rightarrow \mathbb{C}$ avec $\tilde{\Lambda}|_D = \Lambda$ ayant la même norme d'opérateur $\|\tilde{\Lambda}\| = \|\Lambda\|$. *Indication:* Utiliser des suites $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de vecteurs $h_n \in D$ qui convergent vers des éléments quelconques $h_\infty \in H$.

(b) Généraliser ce résultat à une forme linéaire $\Lambda: E \rightarrow \mathbb{C}$ qui est définie sur un sous-espace vectoriel quelconque $E \subset H$, pas forcément dense. *Indication:* Prolonger d'abord Λ à l'adhérence \overline{E} , puis déclarer le prolongement de Λ à l'orthogonal \overline{E}^\perp comme étant identiquement nul.

Exercice 6. Sous la même hypothèse principale que le Théorème 3.2, montrer que les opérateurs adjoints :

$$H_1 \xleftarrow{T^*} H_2 \xleftarrow{S^*} H_3$$

satisfont :

$$\text{Ker } T^* = \text{Im } S^* = \overline{\text{Im } S^*}.$$

Indication: Vérifier pour commencer que $\text{Ker } T^* \supset \text{Im } S^*$.

Exercice 7. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, soit une $(0, 1)$ -forme $u = \sum_{j=1}^n \mu_j d\bar{z}_j$ et soit une (p, q) -forme $u = \sum'_{|I|=p} \sum'_{|K|=q} u_{I;K} dz^I \wedge d\bar{z}^K$.

(a) Montrer que :

$$\mu \wedge u = (-1)^p \sum'_{|I|=p} \sum_{j < k_1 < \dots < k_q} \left(\mu_j u_{I;k_1, k_2, \dots, k_q} - \mu_{k_1} u_{I;j, k_2, \dots, k_q} + \dots + (-1)^q \mu_{k_q} u_{I;j, k_1, \dots, k_{q-1}} \right) dz^I \wedge d\bar{z}_j \wedge d\bar{z}^K.$$

(b) Vérifier que $(a_1 + \dots + a_r)^2 \leq r(a_1^2 + \dots + a_r^2)$ pour des réels $a_1, \dots, a_r \geq 0$.

(c) Établir l'inégalité :

$$|\mu \wedge u| \leq (q+1) |\mu| |u|.$$

(d) Lorsque u est aussi une $(0, 1)$ -forme, pour améliorer la constante, montrer directement que $|\mu \wedge u| \leq |\mu| |u|$.

Exercice 8. Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, soit un nombre $r \geq 1$ de fonctions $g_1, \dots, g_r \in L^2(\Omega, \text{loc})$ à valeurs dans \mathbb{C} , et soit $h \in L^2(\Omega, \text{loc})$ réelle positive $h \geq 0$. Montrer qu'on a équivalence entre :

$$(|g_1|^2 + \dots + |g_r|^2)^{1/2} \leq h \quad (\text{presque partout}),$$

et :

$$\left| \int_{\Omega} (\bar{v}_1 g_1 + \dots + \bar{v}_r g_r) d\lambda \right| \leq \int_{\Omega} (|v_1|^2 + \dots + |v_r|^2)^{1/2} h d\lambda \quad (\forall v \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega, \mathbb{C})).$$

Indication: Traiter d'abord le cas de fonctions continues $g_1, \dots, g_r, h \in \mathcal{C}^0(\Omega)$, puis utiliser un argument de densité.

Exercice 9. Vérifier la formule du Lemme 5.9.

Exercice 10. EE

Exercice 11. EE

Faisceaux

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

Après les travaux précurseurs de Cousin sur les fonctions méromorphes à plusieurs variables, les concepts généraux de la théorie des faisceaux ont été introduits en France par Jean Leray pendant la seconde guerre mondiale, puis développés dans les années 1950-60, notamment par Henri Cartan, Jean-Pierre Serre et Alexandre Grothendieck, pour ne citer que les mathématiciens les plus connus. Les faisceaux sont rapidement devenus un outil important et reconnu en géométrie algébrique et en géométrie analytique, ainsi qu'en topologie, car ils expriment toutes les relations qui peuvent exister entre l'être global d'un objet et toutes ses caractéristiques locales ou semi-locales. On se contentera ici de développer quelques rudiments de cette théorie, notre prochain objectif étant d'utiliser son langage afin d'établir le théorème très fondamental suivant : *pour toute fonction holomorphe (resp. méromorphe) donnée sur un petit ouvert d'une surface de Riemann, il existe toujours une unique surface de Riemann qui constitue le domaine de prolongement maximal de cette fonction en tant que fonction holomorphe (resp. méromorphe).*

L'exemple de faisceau qui est à la fois le plus simple et le plus représentatif, c'est celui de l'algèbre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ des fonctions continues complexes définies sur un espace topologique X . L'objectif conceptuel est de penser le fait qu'avec une fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$, toutes ses restrictions $f|_U: U \rightarrow \mathbb{C}$ à des sous-ouverts quelconques $U \subset X$ sont aussi automatiquement données : on voudrait donc comprendre $\mathcal{C}(X, \mathbb{C})$ en voyant simultanément aussi toutes ses restrictions $\mathcal{C}(U, \mathbb{C})$ à des ouverts *quelconques* $U \subset X$, et on voudrait aussi comprendre la manière dont ces restrictions dépendent des ouverts U . Certes, passer de X à ses sous-ouverts U pourrait sembler artificiel ici, mais c'est en fait *dans le sens inverse* que de très nombreux problèmes mathématiques se posent : *comment, à partir d'une collection d'objets qui sont définis seulement sur des petits ouverts, peut-on construire un objet qui est défini sur l'espace tout entier?*

2. Préfaisceaux, faisceaux, et leurs morphismes

Classiquement, avant de parler de faisceaux, on commence par définir une notion presque amorphe tant elle est générale : la notion de *préfaisceau*, laquelle ne requiert que l'existence d'*applications de restriction*. On va voir dans un instant qu'on est parfois forcé, en partant d'un faisceau, d'aboutir à un préfaisceau qui aura perdu une partie de sa structure initiale de faisceau, donc la notion de préfaisceau n'est en rien une généralité gratuite.

Définition 2.1. Soit X un espace topologique. Un *préfaisceau* (d'ensembles) \mathcal{F} sur X consiste en les données suivantes :

- (i) une collection d'ensembles non vides $\mathcal{F}(U)$ associés à tout ouvert $U \subset X$ non vide ;
- (ii) une collection d'applications :

$$\rho_{V,U} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V)$$

associées à toute paire d'ouverts $V \subset U$ avec $\rho_{U,U} = \text{Id}$ qui, pour tout triplet d'ouverts $W \subset V \subset U$, satisfait la propriété de transitivité :

$$\rho_{W,V} \circ \rho_{V,U} = \rho_{W,U}.$$

L'ensemble $\mathcal{F}(U)$ est appelé *ensemble des sections* au-dessus de U du préfaisceau \mathcal{F} .

La plupart du temps, le préfaisceau \mathcal{F} possède une structure algébrique additionnelle. Soit \mathbb{A} un anneau quelconque et soit \mathbb{K} un corps quelconque.

Définition 2.2. Un préfaisceau d'ensembles \mathcal{F} sur X comme ci-dessus est appelé un *préfaisceau de groupes abéliens* (resp. *d'anneaux*, *de \mathbb{A} -modules*, *d'algèbres*, *de \mathbb{K} -espaces vectoriels*) si, pour tout sous-ouvert $U \subset X$, l'ensemble $\mathcal{F}(U)$ est un groupe abélien (resp. un anneau, un \mathbb{A} -module, une algèbre, un \mathbb{K} -espace vectoriel) et si les applications $\rho_{U,V}$ sont des *morphismes* de la structure algébrique en question. Dans ces cas-là, on suppose alors toujours que $\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$.

En voici trois exemples.

(a) Si on assigne à tout ouvert $U \subset X$ l'ensemble $\mathcal{C}(U, \mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur U et si $\rho_{U,V}$ désigne le morphisme évident de restriction $\mathcal{C}(V, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}(U, \mathbb{R})$, alors on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X , que l'on peut noter \mathcal{C}_X .

(b) De manière similaire, si X est une variété différentielle de classe \mathcal{C}^k , on obtient un préfaisceau d'algèbres sur X en considérant les fonctions de classe \mathcal{C}^k définies sur des ouverts $U \subset X$ qui sont à valeurs dans \mathbb{R} (ou dans \mathbb{C}), et on peut le noter \mathcal{C}_X^k .

(c) Si X est une surface de Riemann, on obtient le préfaisceau des fonctions holomorphes sur X , classiquement noté \mathcal{O}_X .

C'est à cause de ces trois exemples que les applications $\rho_{V,U}$ ci-dessus sont classiquement (et intuitivement) considérées comme des *applications de restriction*, bien qu'en toute généralité, les ensembles $\mathcal{F}(U)$ de la définition donnée ne soient pas nécessairement des ensembles de fonctions définies sur U .

Observons que pour les trois préfaisceaux \mathcal{C}_X , \mathcal{C}_X^k et \mathcal{O}_X ci-dessus, les propriétés qui définissent les fonctions considérées sont purement locales. De plus, on se convainc aisément, en examinant la manière dont sont définies les trois sortes de fonctions en question, que ces trois préfaisceaux \mathcal{C}_X , \mathcal{C}_X^k et \mathcal{O}_X satisfont les deux propriétés additionnelles suivantes.

Définition 2.3. Un préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est dit être un *faisceau* si, pour tout ouvert $U \subset X$ et tout recouvrement :

$$\bigcup_{i \in I} U_i = U$$

de U par des sous-ouverts $U_i \subset U$, il satisfait deux conditions.

Axiome d'unicité 2.4. Les restrictions $\rho_{U_i, U}(F) = \rho_{U_i, U}(F')$ de deux sections $F, F' \in \mathcal{F}(U)$ coïncident sur chaque U_i si et seulement si $F = F'$ sur U tout entier.

Axiome de recollement 2.5. Étant donné une collection de sections $F_i \in \mathcal{F}(U_i)$ qui coïncident sur l'intersection de leurs domaines :

$$\rho_{U_i \cap U_j, U_i}(F_i) = \rho_{U_i \cap U_j, U_j}(F_j) \quad \text{dans } \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \text{ pour tous } i, j \in I,$$

il existe une section $F \in \mathcal{F}(U)$ dont les restrictions redonnent par restriction les sections originales :

$$\rho_{U_i, U}(F) = F_i \quad (\forall i \in I).$$

Cette dernière section F est alors *unique* par 2.4.

Voici deux exemples. Pour un ouvert U d'une surface de Riemann X , soit $\mathcal{O}_X^*(U)$ le groupe multiplicatif de toutes les applications holomorphes $f: U \rightarrow \mathbb{C}^*$. Avec l'application usuelle de restriction, \mathcal{O}_X^* est un faisceau de groupes abéliens (multiplicatifs).

Le faisceau \mathcal{M}_X^* est défini de manière un peu différente : pour tout ouvert $U \subset X$, le groupe $\mathcal{M}_X^*(U)$ consiste en toutes les fonctions méromorphes $f \in \mathcal{M}(U)$ qui ne s'annulent identiquement sur aucune composante connexe de U .

Tous les préfaisceaux ne satisfont pas ces deux derniers axiomes supplémentaires 2.4 et 2.5. Détaillons à cet effet un :

Exemple 2.6. [Préfaisceau constant] Soit E un ensemble arbitraire de cardinal ≥ 2 qui possède un élément distingué '0' et un autre élément $e \neq 0$, par exemple un groupe abélien, un anneau, un \mathbb{A} -module ou un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et soit à nouveau X un espace topologique. Alors le *préfaisceau constant* \mathcal{E}_X sur X est défini par :

$$\begin{cases} \mathcal{E}_X(\emptyset) := \{0\}, \\ \mathcal{E}_X(U) := E \quad \text{pour tout ouvert non vide } U \subset X, \end{cases}$$

avec comme applications de restriction $\rho_{U, V} = \text{Id}_E$ lorsque $\emptyset \neq U \subset V$ et $\rho_{U, V} = 0$ lorsque $U = \emptyset$. Nous affirmons maintenant que si :

$$X = V_1 \cup V_2$$

peut s'écrire comme réunion de deux ouverts *disjoints non vides* (il y a énormément d'exemples), l'axiome de recollement n'est pas satisfait.

En effet, soit $F_1 \in \mathcal{E}_X(V_1)$ définie par $F_1 := 0$ et soit $F_2 \in \mathcal{E}_X(V_2)$ définie par $F_2 := e \neq 0$. Puisque $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, on a gratuitement par définition coïncidence des restrictions à l'intersection :

$$\rho_{V_1 \cap V_2, V_1}(F_1) = 0 = \rho_{V_1 \cap V_2, V_2}(F_2).$$

S'il existait une section $G \in \mathcal{E}_X(V_1 \cup V_2)$ recollant F_1 et F_2 , on devrait alors avoir :

$$\begin{aligned} 0 = F_1 &= \underbrace{\rho_{V_1, V_1 \cup V_2}}_{\text{Id}}(G) = G, \\ e = F_2 &= \underbrace{\rho_{V_2, V_2 \cup V_1}}_{\text{Id}}(G) = G, \end{aligned}$$

ce qui contredirait manifestement l'hypothèse $e \neq 0$. \square

2.7. Morphismes de préfaisceaux. Soient maintenant \mathcal{F} et \mathcal{G} deux faisceaux de groupes abéliens (ou de toute autre structure algébrique) définis sur le même espace topologique X .

Définition 2.8. Un *morphisme* de préfaisceaux sur X :

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

est une collection de morphismes de groupes abéliens (ou d'une autre structure algébrique) :

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$$

associés à *tout* sous-ouvert $U \subset X$ qui commutent avec les morphismes de restrictions, *i.e.* qui, pour toute paire d'ouverts emboîtés $V \subset U$, assurent la commutativité du diagramme suivant :

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_{V,U}^{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \rho_{V,U}^{\mathcal{G}} \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V). \end{array}$$

Définition 2.10. Un morphisme de préfaisceaux $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ est dit *injectif* ou *surjectif* suivant que tous les $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{G}(U)$ sont injectifs ou surjectifs.

Deux préfaisceaux \mathcal{F} et \mathcal{G} sont dit *isomorphes* lorsqu'il existe un morphisme $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ qui est simultanément injectif et surjectif.

Définition 2.11. On dit que \mathcal{F} est un *sous-préfaisceau* de \mathcal{G} si, pour tout ouvert $U \subset X$, on a $\mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ et si le morphisme $\varphi_U: \mathcal{F}(U) \subset \mathcal{G}(U)$ est induit par l'inclusion.

On vérifie alors (exercice) que la propriété de commutativité signifie : $\rho_{V,U}^{\mathcal{G}}(\mathcal{F}(U)) \subset \mathcal{F}(V)$ pour tous ouverts emboîtés $V \subset U$, et que $\rho_{V,U}^{\mathcal{G}}$ coïncide avec $\rho_{V,U}^{\mathcal{F}}$ sur $\mathcal{F}(U)$.

Si \mathcal{F} est un sous-préfaisceau d'un préfaisceau \mathcal{G} de groupes abéliens, on peut définir un *préfaisceau quotient* $\mathcal{H} := \mathcal{G}/\mathcal{F}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X le groupe quotient :

$$\mathcal{H}(U) := \mathcal{G}(U)/\mathcal{F}(U).$$

D'une manière similaire, on définit le *préfaisceau noyau*, le *préfaisceau image*, et le *préfaisceau conoyau* d'un morphisme de préfaisceaux $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ en assignant à tout sous-ouvert U de X :

$$U \longmapsto \text{Ker } \varphi_U, \quad U \longmapsto \text{Im } \varphi_U, \quad U \longmapsto \text{Coker } \varphi_U,$$

Ce sont des sous-préfaisceaux (respectivement) de \mathcal{F} , de \mathcal{G} , de \mathcal{G} . La somme directe $\mathcal{F} \oplus \mathcal{G}$ de deux préfaisceaux de groupes abéliens \mathcal{F} et \mathcal{G} est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) \oplus \mathcal{G}(U).$$

Le produit tensoriel $\mathcal{F} \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{G}$ de deux préfaisceaux de \mathbb{A} -modules est le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathcal{F}(U) \otimes_{\mathbb{A}} \mathcal{G}(U).$$

2.12. Perte de la structure de faisceau. On doit bien faire attention au fait que le préfaisceau quotient d'un faisceau par un faisceau n'est pas nécessairement un faisceau.

Exemple 2.13. Soit $S^1 \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le cercle unité dans \mathbb{C} , soit \mathcal{C}_{S^1} le faisceau abélien additif des fonctions continues sur S^1 à valeurs complexes vues comme fonctions 2π -périodiques $\mathbb{R} \ni t \longmapsto g(t) \in \mathbb{C}$, et soit \mathcal{L}_{S^1} le sous-faisceau des fonctions continues sur S^1 à valeurs dans \mathbb{Z} , i.e. des fonctions localement constantes à valeurs entières. L'application exponentielle :

$$\varphi := \exp(2i\pi \cdot) : \mathcal{C}_{S^1} \longrightarrow \mathcal{C}_{S^1}^*$$

est un morphisme du faisceau \mathcal{C}_{S^1} à valeurs dans le faisceau $\mathcal{C}_{S^1}^*$ des fonctions continues jamais égales à 0, et son noyau est précisément égal à \mathcal{L}_{S^1} .

Pour tout ouvert $U \neq S^1$, il existe au moins un point $e^{i\theta_0} \in S^1 \setminus U$, donc puisque la fonction logarithme admet une détermination univaluée dans $\mathbb{C} \setminus \{re^{i\theta_0} : r \geq 0\}$, l'application φ_U est surjective, ce qui entraîne :

$$\mathcal{C}_{S^1}(U) / \mathcal{L}_{S^1}(U) \cong \mathcal{C}_{S^1}^*(U) \quad (\forall U \neq S^1).$$

Toutefois, pour $U = S^1$, nous affirmons que :

$$\mathcal{C}_{S^1}(S^1) / \mathcal{L}_{S^1}(S^1) \not\cong \mathcal{C}_{S^1}^*(S^1).$$

En effet, rappelons que le degré d'une application $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \ni t \longmapsto g(t) \in \mathbb{C}^*$ compte le nombre (entier) de fois que cette courbe fermée tourne autour de l'origine :

$$\deg g = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g'(t)}{g(t)} dt,$$

et soulignons que c'est un invariant d'homotopie, pour des déformations continues de courbes demeurant dans \mathbb{C}^* .

Assertion 2.14. L'application $\varphi_{S^1} : \mathcal{C}_{S^1}(S^1) \longrightarrow \mathcal{C}_{S^1}^*(S^1)$ a pour image :

$$\varphi_{S^1}(\mathcal{C}_{S^1}(S^1)) \subset \{h : S^1 \longrightarrow \mathbb{C}^* : \deg h = 0\}.$$

Démonstration. En effet, pour $t \longmapsto g(t)$ continue sur S^1 , la courbe continue fermée dans \mathbb{C}^* :

$$t \longmapsto \varphi_{S^1}(g)(t) = \exp(2i\pi g(t))$$

se rétracte homotopiquement en la famille suivante de courbes toujours à valeurs dans \mathbb{C}^* paramétrées continûment par $0 \leq s \leq 1$:

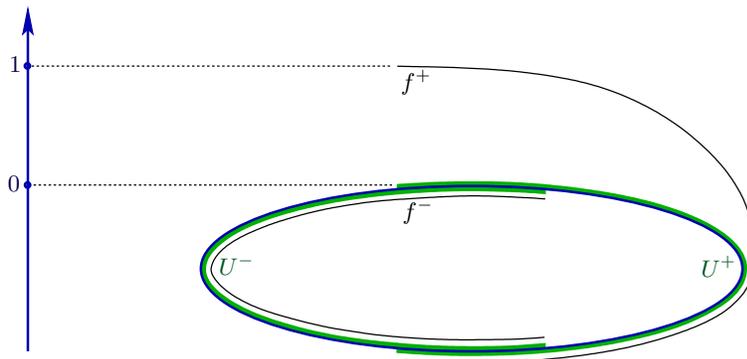
$$t \longmapsto \exp(s 2i\pi g(t)),$$

courbe au final constante $\equiv 1 \in \mathbb{C}^*$ pour $s = 0$, donc de degré zéro, donc par invariance $h := \varphi_{S^1}(g)$ est aussi de degré zéro. \square

Ainsi, φ_{S^1} n'est pas surjective, et on en déduit que le préfaisceau quotient $\mathcal{C}_{S^1} / \mathcal{L}_{S^1}$ n'est pas isomorphe au faisceau $\mathcal{C}_{S^1}^*$, bien que leurs espaces de sections soit les mêmes pour tout ouvert $U \neq S^1$.

Mais cet exemple est utile surtout à cause d'une

Observation 2.15. Le préfaisceau quotient $\mathcal{C}_{S^1}/\mathcal{L}_{S^1}$ ne satisfait pas l'axiome de recollement 2.5.



Démonstration. Décomposons $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}$ en les deux sous-ouverts :

$$U^- := \{e^{i\theta} : \frac{\pi}{4} < \theta < \frac{7\pi}{4}\} \quad \text{et} \quad U^+ := \{e^{i\theta} : -\frac{3\pi}{4} < \theta < \frac{3\pi}{4}\},$$

de réunion $U^- \cup U^+ = S^1$ et dont l'intersection consiste en les deux intervalles ouverts disjoints :

$$U^- \cap U^+ = \{|\theta - \frac{3\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}\} \cup \{|\theta - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}\}.$$

Ensuite, choisissons deux fonctions continues :

$$f^- : U^- \longrightarrow \mathbb{C} \quad \text{et} \quad f^+ : U^+ \longrightarrow \mathbb{C},$$

en prenant simplement $f^- \equiv 0$ et en prenant f^+ quelconque satisfaisant :

$$f^+(e^{i\theta}) \equiv \begin{cases} 0 & \text{pour } |\theta - \frac{3\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}, \\ 1 & \text{pour } |\theta - \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Alors dans le préfaisceau quotient $\mathcal{C}_{S^1}/\mathcal{L}_{S^1}$, on a :

$$f^-|_{U^- \cap U^+} = f^+|_{U^+ \cap U^-},$$

et pourtant, sur la réunion S^1 de ces deux ouverts, il n'existe pas de section globale :

$$\begin{aligned} f \in (\mathcal{C}_{S^1}/\mathcal{L}_{S^1})(S^1) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{C}_{S^1}(S^1)/\mathcal{L}_{S^1}(S^1) \\ &= \mathcal{C}_{S^1}(S^1) \bmod \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

qui se restreindrait à U^- et à U^+ en f^- et en f^+ , puisqu'une telle fonction devrait être partout continue sur S^1 , ce qui est manifestement impossible en $\theta = \frac{3\pi}{4}$, comme l'a déjà fait voir la figure. \square

Exemple 2.16. On peut modifier comme suit l'exemple du préfaisceau constant \mathcal{E}_X donné plus haut pour E un groupe abélien afin d'en faire un vrai faisceau. Pour tout ouvert $U \subset X$, soit $\tilde{\mathcal{E}}_X(U)$ le groupe abélien de toutes les applications $f : U \rightarrow E$ qui sont *localement constantes*, à savoir constantes sur les composantes connexes de U . Si U est connexe, il est clair que $\tilde{\mathcal{E}}_X(U)$ s'identifie à E , mais lorsque U n'est pas connexe, on voit que :

$$E = \mathcal{E}_X(U) \neq \tilde{\mathcal{E}}_X(U).$$

Pour $V \subset U$, soit $\tilde{\mathcal{E}}_X(U) \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}_X(V)$ la restriction usuelle des fonctions. On vérifie (exercice) que $\tilde{\mathcal{E}}_X$ est un vrai faisceau sur X , appelé *faisceau des fonctions localement constantes sur X à valeurs dans E* .

Afin de réparer la non-préservation des axiomes de faisceau par passage au préfaisceau quotient, on introduit classiquement un procédé de « *faisceautisation d'un préfaisceau* », que nous allons exposer progressivement après quelques préparatifs.

3. Collection des germes d'un préfaisceau

Commençons par introduire la notion de germe qui inspecte les préfaisceaux au microscope.

Définition 3.1. Si \mathcal{F} est un préfaisceau sur un espace topologique X et si $x \in X$ est un point quelconque, l'ensemble \mathcal{F}_x des germes de \mathcal{F} en x est défini comme étant la limite inductive abstraite :

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{U \ni x} (\mathcal{F}(U), \rho_{\bullet, \bullet}),$$

c'est-à-dire plus explicitement, \mathcal{F}_x est l'ensemble des classes d'équivalence d'éléments appartenant à la réunion disjointe :

$$\coprod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) / \sim_x$$

modulo ' \sim_x ' dans laquelle deux éléments :

$$F_1 \in \mathcal{F}(U_1), U_1 \ni x \quad \text{et} \quad F_2 \in \mathcal{F}(U_2), U_2 \ni x$$

sont considérés comme équivalents :

$$F_1 \sim_x F_2,$$

si et seulement si — par définition — il existe un voisinage ouvert $V \ni x$ avec $V \subset U_1 \cap U_2$ tel que :

$$\rho_{V, U_1}(F_1) = \rho_{V, U_2}(F_2).$$

Intuitivement et conceptuellement parlant, les germes sont donc des sections considérées dans un voisinage arbitrairement petit du point de référence.

Définition 3.2. Pour tout ouvert $U \subset X$ et tout point $x \in U$, on note :

$$\rho_x: \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}_x$$

l'application qui assigne à toute section $F \in \mathcal{F}(U)$ sa classe d'équivalence modulo \sim_x . L'image $\rho_x(F)$ d'une section $F \in \mathcal{F}(U)$ est alors appelée *germe de F en x* .

Lorsque \mathcal{F} est un faisceau de groupes abéliens, on vérifie pour tous $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(U)$ que (exercice) :

$$(3.3) \quad \rho_x(F_1 \pm F_2) = \rho_x(F_1) \pm \rho_x(F_2),$$

et, pour tout sous-voisinage ouvert $x \in V \subset U$, pour toute section $F \in \mathcal{F}(U)$, que (exercice) :

$$(3.4) \quad \rho_x(\rho_{V, U}(F)) = \rho_x(F).$$

Exemple 3.5. [Germes de fonctions holomorphes] Considérons le faisceau \mathcal{O}_X des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $X \subset \mathbb{C}$. Soit $x \in X$. Alors un germe de fonction

holomorphe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ est représenté par une fonction holomorphe dans un (petit) voisinage ouvert de x , et donc par conséquent, il est donné par une série entière :

$$f_x = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - x)^k$$

qui possède un rayon de convergence strictement positif, ce dernier pouvant toutefois être arbitrairement petit. Deux fonctions holomorphes définies dans un voisinage de x définissent le même germe dans $\mathcal{O}_{X,x}$ précisément lorsqu'elles ont le même développement de Taylor au point x . On en déduit immédiatement un énoncé crucial.

Proposition 3.6. *L'espace $\mathcal{O}_{X,x}$ des germes de fonctions holomorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau $\mathbb{C}\{z - x\}$ des séries entières à coefficients complexes en $z - x$ qui convergent dans un disque ouvert de rayon positif non précisé autour de x . \square*

Pour tout germe $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$, sa valeur $f_x(x)$ en x est alors bien définie : elle ne dépend pas du choix d'un représentant. Il en va de même pour ses dérivées de tous ordres.

Proposition 3.7. *L'anneau \mathcal{M}_x des germes de fonctions méromorphes en un point x d'un ouvert $X \subset \mathbb{C}$ est isomorphe à l'anneau de toutes les séries de Laurent convergentes :*

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} c_k (z - x)^k$$

à coefficients complexes c_k qui ont une partie principale finie, i.e. telles que $k_0 > -\infty$. \square

De retour à la théorie générale, la vérification de l'énoncé suivant est proposée en Exercice 1.

Lemme 3.8. *Si \mathcal{F} est un préfaisceau de groupes abéliens sur X , alors pour tout $x \in U$, le germe \mathcal{F}_x admet une structure de groupe abélien. \square*

En outre, tout morphisme de préfaisceaux induit des applications entre germes.

Proposition 3.9. *Soient deux préfaisceaux de groupes abéliens \mathcal{F} et \mathcal{G} sur un espace topologique X , et soit $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ un morphisme. Alors en tout point $x \in X$, ce dernier induit un homomorphisme-fibre entre groupes abéliens :*

$$\begin{aligned} \varphi_x: \mathcal{F}_x &\longrightarrow \mathcal{G}_x \\ f &\longmapsto \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_U(F)), \end{aligned}$$

le résultat étant indépendant du choix d'un représentant $F \in \mathcal{F}(U)$ de $f = \rho_x^{\mathcal{F}}(F)$ avec $U \ni x$ ouvert.

Démonstration. En effet, si $F' \in \mathcal{F}(U')$ est un autre représentant, à savoir s'il existe $x \in V \subset U \cap U'$ ouvert avec :

$$\rho_{V,U}^{\mathcal{F}}(F) = \rho_{V,U'}^{\mathcal{F}}(F')$$

la commutativité des diagrammes (2.9) de morphismes donne :

$$\rho_{V,U}^{\mathcal{G}}(\varphi_U(F)) = \varphi_V(\rho_{V,U}^{\mathcal{F}}(F)) = \varphi_V(\rho_{V,U'}^{\mathcal{F}}(F')) = \rho_{V,U'}^{\mathcal{G}}(\varphi_{U'}(F')),$$

et en prenant la limite (classe d'équivalence) pour $V \rightarrow x$, on obtient bien :

$$\rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_U(F)) = \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_{U'}(F')).$$

Ensuite, pour ce qui est de la loi de groupe, soient $f_1, f_2 \in \mathcal{F}_x$ avec deux représentants $F_1 \in \mathcal{F}(U_1)$ et $F_2 \in \mathcal{F}(U_2)$. Comme on vient de voir que $\varphi_x(f_1)$ et $\varphi_x(f_2)$ n'en dépendent pas, on peut restreindre d'emblée F_1 et F_2 à l'intersection $V := U_1 \cap U_2$, puis calculer :

$$\begin{aligned} \varphi_x(f_1 \pm f_2) &= \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_V(F_1 \pm F_2)) \\ &= \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_V(F_1) \pm \varphi_V(F_2)) \\ \text{[Utiliser (3.3)]} \quad &= \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_V(F_1)) \pm \rho_x^{\mathcal{G}}(\varphi_V(F_2)) \\ &= \varphi_x(f_1) \pm \varphi_x(f_2), \end{aligned}$$

ce qui conclut. \square

4. Topologie sur l'espace des germes d'un préfaisceau

Soit comme précédemment \mathcal{F} un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X . On souhaite maintenant munir la réunion disjointe des germes de \mathcal{F} en tous les points x de X :

$$\coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$$

d'une topologie naturelle. À tout ouvert $U \subset X$ et à toute section $F \in \mathcal{F}(U)$, on associe la collection des germes de cette dernière :

$$[U, F] := \left\{ \rho_x(F) \in \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x : x \in U \right\},$$

et l'on prétend que cette (immense) collection convient.

Proposition 4.1. *Le système de tous ces ensembles $[U, F]$, où $U \subset X$ est ouvert et où $F \in \mathcal{F}(U)$, forme une base pour une topologie sur $\coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$.*

Démonstration. Pour s'assurer que ce système puisse bien former une base pour une topologie sur $\coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$, on doit premièrement vérifier que tout élément de $\coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ est contenu dans au moins un $[U, F]$, ce qui provient du fait que tout germe possède un représentant local.

Deuxièmement, on se convainc par la réflexion — exercice très recommandé — que cette famille est stable par intersection :

$$[F, U] \cap [G, V] = [H, W],$$

où W est l'ensemble ouvert (exercice) de tous les points $x \in U \cap V$ en lesquels $\rho_x(F) = \rho_x(G)$, et où $H := \rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G)$. \square

On introduit alors deux notations abrégées pour désigner cette réunion de fibres munie de cette topologie canonique :

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Germes}(\mathcal{F}) := \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x.$$

Proposition 4.2. *La projection évidente :*

$$\pi: \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$$

qui envoie \mathcal{F}_x sur x , est un homéomorphisme local.

Pour la notion d'homéomorphisme local, voir la Définition 6.2.

Démonstration. Pour tout ouvert $U \subset X$, cette projection induit en fait un homéomorphisme de l'ouvert $[U, F]$ sur l'ouvert U : elle est bijective, elle est continue, et son inverse est elle aussi continue, par définition. \square

Définition 4.3. Une section de $\widetilde{\mathcal{F}} = \text{Germes}(\mathcal{F})$ sur un ouvert $U \subset X$ est une application :

$$\sigma: U \longrightarrow \text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x$$

satisfaisant $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$, i.e. :

$$\sigma(x) \in \mathcal{F}_x \quad (\forall x \in U),$$

et qui est *continue* pour les topologies respectives.

La continuité impose une cohérence locale entre les valeurs de σ : au voisinage d'un point x , elles doivent être données comme germes d'une même et unique section.

Lemme 4.4. Une application ensembliste :

$$\sigma: U \longrightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x$$

satisfaisant $\sigma(x) \in \mathcal{F}_x$ pour tout $x \in U$ est continue pour la topologie canonique sur $\text{Germes}(\mathcal{F})$ si et seulement si :

$$\forall x \in U \quad \exists x \in V \subset U \text{ sous-ouvert} \quad \exists F \in \mathcal{F}(V) \quad \left(\forall y \in V \quad \sigma(y) = \rho_y(F) \right).$$

Démonstration. En topologie générale, il y a plusieurs manières d'exprimer qu'une application $f: X \rightarrow Y$ entre deux espaces topologiques est continue. Dire que l'image réciproque de tout ouvert est un ouvert n'est pas adapté ici, il est préférable d'appliquer la définition équivalente :

$$\forall x \in X \quad \forall V \ni f(x) \text{ ouvert} \quad \exists U \ni x \text{ ouvert} \quad f(U) \subset V.$$

Or les topologies sur X et sur $\text{Germes}(\mathcal{F})$ sont telles que la continuité de σ s'exprime exactement (Exercice 2) comme l'a énoncé le lemme. \square

Soit toujours \mathcal{F} un préfaisceau sur X . Lorsqu'on parlait de ses ensembles de sections $\mathcal{F}(U)$, le terme '*section*' devait être entendu au sens abstrait. Mais maintenant, les sections de $\text{Germes}(\mathcal{F})$ sont de vraies applications entre ensembles — de même qu'en géométrie différentielle, lorsqu'on a par exemple un fibré vectoriel $\pi: E \rightarrow M$ sur une variété M , ses sections $\sigma: U \rightarrow E|_U$ sur des ouverts $U \subset M$ sont de vraies applications.

Par conséquent, pour toute paire d'ouverts emboîtés $V \subset U \subset X$, et pour toute section :

$$\sigma: U \longrightarrow \coprod_{\substack{x \in U \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x,$$

il est possible d'opérer une *restriction* au sens conventionnel :

$$\sigma|_V: V \longrightarrow \coprod_{\substack{x \in V \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x,$$

et puisque ces restrictions sont ce à quoi on pense, on ne les notera pas $\rho_{V,U}(\bullet)$, mais bien $(\bullet)|_V$.

Lemme 4.5. À tout préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est associé :

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x$$

qui est aussi un préfaisceau pour la collection suivante d'ensembles associés aux ouverts $U \subset X$:

$$U \longmapsto \widetilde{\mathcal{F}}(U) := \{\text{sections continues } \sigma : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \text{ avec } \pi \circ \sigma = \text{Id}_U\}.$$

Démonstration. Le fait que, pour tous ouverts $W \subset V \subset U$, on a :

$$\sigma|_W = (\sigma|_V)|_W,$$

provient instantanément du caractère ensembliste de l'opération de restriction. \square

Dans la suite, l'objectif sera d'établir que $\text{Germes}(\mathcal{F})$ est même un *faisceau*. Jusqu'à présent, on n'a parlé que de préfaisceaux d'ensembles, mais quand des structures algébriques sont présentes, quelque chose doit être démontré.

Lemme 4.6. Si \mathcal{F} est un préfaisceau de groupes abéliens, alors $\widetilde{\mathcal{F}}$ est aussi un préfaisceau de groupes abéliens.

Démonstration. Soit $U \subset X$ ouvert. Pour toute paire de sections :

$$\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}),$$

on doit faire voir que $\sigma_1 \pm \sigma_2$ appartient encore à $\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$, le point étant de vérifier sa continuité.

Soit un point quelconque $x \in U$. La continuité en x de σ_1, σ_2 s'exprime, d'après le Lemme 4.4, par l'existence de deux sous-ouverts $x \in V_1 \subset U$ et $x \in V_2 \subset U$ et de deux sections :

$$F_1 \in \mathcal{F}(U_1) \quad \text{et} \quad F_2 \in \mathcal{F}(U_2)$$

satisfaisant :

$$\sigma_1(y) = \rho_y(F_1) \quad (\forall y \in V_1),$$

$$\sigma_2(y) = \rho_y(F_2) \quad (\forall y \in V_2).$$

Prenons l'intersection $V := V_1 \cap V_2 \subset U$ et utilisons (3.4) pour obtenir :

$$\sigma_1(y) = \rho_y(F_1) = \rho_y(\rho_{V,U_1}(F_1)),$$

$$\sigma_2(y) = \rho_y(F_2) = \rho_y(\rho_{V,U_2}(F_2)).$$

Si donc nous introduisons

$$\rho_{V,U_1}(F_1) \pm \rho_{V,U_2}(F_2) =: G \in \mathcal{F}(V),$$

qui est une section du faisceau de groupes abéliens \mathcal{F} , alors en tout point $y \in V$:

$$\sigma_1(y) \pm \sigma_2(y) = \rho_y(\rho_{V,U_1}(F_1)) \pm \rho_y(\rho_{V,U_2}(F_2))$$

$$= \rho_y(\rho_{V,U_1}(F_1) \pm \rho_{V,U_2}(F_2))$$

$$= \rho_y(G),$$

ce qui démontre bien la continuité de $\sigma_1 \pm \sigma_2$ en $x \in V \subset U$, donc partout. \square

Comme en géométrie (algébrique, arithmétique, différentielle), on notera :

$$\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$$

l'espace des sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sur $U \subset X$ ouvert. De plus, le germe en un point $x \in U$ d'une section $\sigma \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$ sera noté comme en géométrie sans lettre ρ , juste avec x en indice inférieur :

$$\sigma_x := \text{germe de } \sigma \text{ en } x. \quad (4.7)$$

4.8. Principe d'identité et séparation de la topologie. Les propriétés des fonctions holomorphes ou méromorphes sur une variété complexe motivent la définition générale suivante.

Définition 4.9. Un préfaisceau \mathcal{F} sur un espace topologique X est dit satisfaire le *principe d'identité germique* si pour tout ouvert *connexe* $U \subset X$, pour toute paire de sections $F, G \in \mathcal{F}(U)$ dont les germes coïncident en au moins un point un point $x \in U$:

$$\rho_x(F) = \rho_x(G),$$

on a nécessairement $F = G$.

Théorème 4.10. Soit X un espace topologique localement connexe séparé et soit \mathcal{F} un préfaisceau sur X qui satisfait le principe d'identité germique. Alors l'espace topologique $\text{Germes}(\mathcal{F}) = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x$ est séparé.

Démonstration. Soient $F_x \in \mathcal{F}_x$ et $G_y \in \mathcal{F}_y$ deux éléments distincts : $F_x \neq G_y$, de cet espace $\text{Germes}(\mathcal{F})$. L'objectif est de trouver deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y .

PREMIER CAS. Lorsque $\pi(F_x) = x \neq y = \pi(G_y)$, il suffit, puisque X a été supposé séparé, de prendre deux voisinages ouverts $U \ni x$ et $V \ni y$ qui sont disjoints : $U \cap V = \emptyset$, et d'observer que $\pi^{-1}(U)$ et $\pi^{-1}(V)$ sont alors automatiquement deux voisinages ouverts disjoints de F_x et de G_y .

DEUXIÈME CAS. Supposons maintenant que $y = x$. Soient alors $F \in \mathcal{F}(U)$ et $G \in \mathcal{F}(V)$ deux représentants des germes distincts $F_x \neq G_x$, à savoir satisfaisant :

$$\rho_x(F) = F_x \quad \text{et} \quad \rho_x(G) = G_x,$$

où U et V sont deux voisinages ouverts de x . Soit ensuite $W \subset U \cap V$ un voisinage ouvert *connexe* (il en existe par hypothèse) de x . Alors les deux ouverts de $\text{Germes}(\mathcal{F})$:

$$[W, \rho_{W,U}(F)] \quad \text{et} \quad [W, \rho_{W,V}(G)]$$

sont des voisinages de F_x et de G_x , respectivement. Nous affirmons que leur intersection est vide. Sinon, il existerait un élément :

$$H_z \in [W, \rho_{W,U}(F)] \cap [W, \rho_{W,V}(G)]$$

et en sa projection $\pi(H_z) = z \in W$, les deux représentants satisferaient :

$$H = \rho_z(F) = \rho_z(G),$$

ce qui impliquerait grâce au principe d'identité germique que :

$$\rho_{W,U}(F) = \rho_{W,V}(G),$$

d'où immédiatement $F_x = G_x$ par définition des germes : contradiction ! □

5. Faisceautisation des préfaisceaux

Au début de ce chapitre, nous avons adopté une terminologie qui décidait d'appeler « sections » les éléments $\mathcal{F}(U)$ d'un préfaisceau \mathcal{F} associés à un ouvert U d'un espace topologique X . Or nous l'avons déjà dit, le terme « section » possède déjà — en topologie et géométrie différentielle par exemple — un sens plus spécifique : si $\pi : E \rightarrow M$ est un espace fibré (principal, vectoriel, *etc.*) au-dessus d'une variété lisse M , une *section* de π au-dessus d'un ouvert $U \subset M$ est — d'après une définition standard universellement admise — une application lisse $\sigma : U \rightarrow E$ « allant dans le sens inverse de π » qui envoie chaque point $x \in U$ dans la fibre $E_x := \pi^{-1}(x)$ « située au-dessus de lui », à savoir brièvement, une application qui satisfait $\pi \circ \sigma = \text{Id}_U$.

Or un préfaisceau \mathcal{F} n'associe pas nécessairement en général à un ouvert $U \subset X$ un espace d'applications de U à valeurs dans un autre espace : $\mathcal{F}(U)$ est supposé être juste un ensemble, c'est *a priori* très abstrait. Aussi la terminologie « sections » pour désigner les éléments de $\mathcal{F}(U)$ est-elle légèrement en décalage avec certains autres usages.

Mais en vérité, la plupart des (pré)faisceaux que l'on rencontre dans la vie mathématique ordinaire sont de vrais espaces de « sections », et c'est pour cette raison que l'on s'autorise une légère confusion de langage lorsqu'on introduit la notion de préfaisceau. En effet, si M est une variété réelle de classe \mathcal{C}^∞ , le faisceau des fonctions \mathcal{C}^∞ sur M possède comme « sections » sur un ouvert quelconque $U \subset M$ les fonctions $f \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$; de même, le faisceau des k -formes différentielles de classe \mathcal{C}^∞ sur M possède comme « sections » les applications $\omega \in \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k T_M^*)$. Ce sont bien des applications définies sur des ouverts $U \subset M$. Classiquement, on utilise alors la lettre grecque « Γ » pour désigner de tels espaces de « sections » :

$$\Gamma(U, \mathcal{C}_M^\infty) \equiv \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \Gamma(U, \Lambda^k T_M^*) \equiv \mathcal{C}^\infty(U, \Lambda^k T_M^*).$$

La morale de cette discussion, c'est que lorsqu'on peut interpréter un préfaisceau comme espace de « vraies sections-applications », alors le préfaisceau en question s'avère être un faisceau, puisque les sections, en tant qu'*applications*, satisfont automatiquement les deux axiomes d'unicité 2.4 et de recollement 2.5. C'est alors tout le sens du théorème que voici de remplacer un préfaisceau quelconque \mathcal{F} par un espace de vraies sections-applications :

$$U \longmapsto \Gamma(U, \text{Germes}(\mathcal{F}))$$

afin de le transformer en un vrai faisceau (*i.e.* de le « faisceautiser »), les axiomes 2.4 et 2.5 étant alors automatiquement satisfaits comme nous venons de le dire.

Prenons alors le temps d'énoncer un théorème très progressif et très détaillé qui résume ce qui a déjà été vu avant qu'y apparaissent les informations nouvelles attendues.

Théorème 5.1. [Faisceautisation d'un préfaisceau] *Sur un espace topologique X quelconque (pas nécessairement séparé), à tout un préfaisceau (d'ensembles, de groupes abéliens, d'espaces vectoriels) \mathcal{F} sur X est associée de manière canonique la réunion disjointe des germes de \mathcal{F} en tous les points $x \in X$:*

$$\widetilde{\mathcal{F}} := \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x,$$

munie de la topologie dont une base d'ouverts est constituée (par définition) de tous les ensembles :

$$[U, F] := \{ \rho_x(F) \in \widetilde{\mathcal{F}} : x \in U \},$$

où $U \subset X$ est un ouvert quelconque et où $F \in \mathcal{F}(U)$ est une section arbitraire.
Alors (Proposition 4.2) avec cette topologie, la projection évidente :

$$\pi: \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$$

qui envoie \mathcal{F}_x sur x est un homéomorphisme local.

De plus et surtout, le préfaisceau des (vraies) sections continues de cette projection π :

$$U \longmapsto \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) := \{ \text{sections continues } \sigma: U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \text{ telles que } \pi \circ \sigma = \text{Id}_U \}$$

constitue un vrai faisceau, et les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

(i) $\widetilde{\mathcal{F}}$ possède les mêmes germes que \mathcal{F} en tout point $x \in X$:

$$\widetilde{\mathcal{F}}_x = \mathcal{F}_x;$$

(ii) il existe un morphisme canonique de préfaisceaux :

$$\gamma: \mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}$$

défini, pour tout ouvert $U \subset X$, par :

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \gamma_U: \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) \\ F &\longmapsto (U \ni x \longmapsto \rho_x(F) \in \mathcal{F}_x); \end{aligned}$$

(iii) ce morphisme γ est un isomorphisme lorsque et seulement lorsque \mathcal{F} était un faisceau au départ.

Démonstration. Afin de ne pas trop embrumer les idées directrices actives qui seules réussissent à propulser la pensée vers l'élégance et la limpidité qu'elle désire de tout son être, nous nous contenterons, comme nous l'avons fait jusqu'à présent, de traiter seulement le cas de (pré)faisceaux de groupes abéliens.

Comme le Lemme 4.6 a déjà fait voir que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un préfaisceau de groupes abéliens, il s'agit d'établir que $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisfait l'Axiome 2.4 d'unicité et l'Axiome 2.5 de recollement.

Or l'unicité provient directement du fait que les sections de $\widetilde{\mathcal{F}}$ sont de vraies applications entre ensembles, puisque si $U = \cup_{i \in I} U_i$ est un recouvrement ouvert d'un certain ouvert $U \subset X$, et si deux sections :

$$\sigma \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) \quad \text{et} \quad \sigma' \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}),$$

coïncident entre elles après restriction à tous les U_i :

$$\sigma|_{U_i} = \sigma'|_{U_i} \quad (\forall i \in I),$$

alors il est absolument instantanément clair comme l'éclair que $\sigma = \sigma'$!

Pour le recollement, soit à nouveau $U = \cup_{i \in I} U_i$ un recouvrement ouvert d'un ouvert quelconque $U \subset X$, et soient des sections continues $\sigma_i \in \Gamma(U_i, \widetilde{\mathcal{F}})$ coïncidant sur les intersections d'ouverts :

$$(5.3) \quad \sigma_i|_{U_i \cap U_j} = \sigma_j|_{U_j \cap U_i},$$

pour tous $i, j \in I$.

Pour tout $x \in U$, il existe (au moins) un indice $i(x) \in I$ tel que $x \in U_{i(x)}$, et au moyen de la section continue associée $\sigma_{i(x)} \in \Gamma(U_{i(x)}, \widetilde{\mathcal{F}})$, définissons une section globale sur U :

$$\begin{aligned} \sigma: U &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \\ x &\longmapsto \sigma_{i(x)}(x), \end{aligned}$$

dont la valeur ne dépend en fait pas du choix d'un indice $i(x)$, puisque lorsque $x \in U_{i'(x)}$ pour tout autre indice $i'(x) \in I$, l'hypothèse (5.3) garantit justement que $\sigma_{i'(x)}(x) = \sigma_{i(x)}(x)$. Il s'agit d'argumenter que σ est *continue*.

Observons au passage qu'en tout autre point $y \in U_{i(x)}$, il découle aussi de $y \in U_{i(y)}$ que :

$$(5.4) \quad \sigma(y) = \sigma_{i(y)}(y) = \sigma_{i(x)}(y).$$

Maintenant, soit $x \in U$, et soit $i(x) \in I$ avec $x \in U_{i(x)}$. On regarde la section $\sigma_{i(x)} \in \Gamma(U_{i(x)}, \widetilde{\mathcal{F}})$, qui est par hypothèse continue, ce qui veut dire qu'il existe un sous-ouvert $x \in V \subset U_{i(x)}$ et il existe $F \in \mathcal{F}(V)$ tels que :

$$\sigma_{i(x)}(y) = \rho_y(F) \quad (\forall y \in V).$$

Mais l'observation 5.4 qui signifie $\sigma|_{U_{i(x)}} = \sigma_{i(x)}$ et qui devient après restriction à V :

$$\sigma|_V = \sigma_{i(x)}|_V,$$

fournit précisément une représentation :

$$\sigma(y) = \sigma_{i(x)}(y) = \rho_y(F) \quad (\forall y \in V),$$

qui exprime la continuité voulue de σ , ce qui achève de prouver que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est un faisceau.

À présent, commençons par établir **(ii)** avant **(i)**. Soit $U \subset X$ un ouvert, et soit comme en (5.2) :

$$\begin{aligned} \gamma_U: \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) \\ F &\longmapsto (U \ni x \longmapsto \rho_x(F) \in \mathcal{F}_x). \end{aligned}$$

Comme la section $x \longmapsto \rho_x(F)$ est continue d'après le critère du Lemme 4.4, il est clair que γ_U est à valeurs dans $\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$. Il s'agit de vérifier que γ est un morphisme de faisceaux de groupes abéliens.

Tout d'abord, vérifions que γ_U est un homomorphisme de groupes abéliens, à savoir pour $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(U)$, montrons qu'on a additivité $\gamma_U(F_1 \pm F_2) = \gamma_U(F_1) \pm \gamma_U(F_2)$. En introduisant la restriction :

$$\widetilde{\mathcal{F}}|_U := \coprod_{\substack{x \in U \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x,$$

on calcule :

$$\begin{aligned} \gamma_U(F_1 \pm F_2) &= \left(U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_U \right. \\ &\quad \left. x \longmapsto \rho_x(F_1 \pm F_2) \right) \\ \text{[Utiliser (3.3)]} &= \left(x \longmapsto \rho_x(F_1) \pm \rho_x(F_2) \right) \\ &= \gamma_U(F_1) \pm \gamma_U(F_2), \end{aligned}$$

ce qui montre qu'on a bien additivité.

Ensuite, établissons la commutativité du diagramme correspondant à (2.9) pour toute paire d'ouverts $V \subset U$:

$$(5.5) \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\gamma_U} & \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) \\ \rho_{V,U}^{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \cdot|_V \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\gamma_V} & \Gamma(V, \widetilde{\mathcal{F}}). \end{array}$$

En effet, pour tout $F \in \mathcal{F}(U)$, on calcule :

$$\begin{aligned} \gamma_V(\rho_{V,U}^{\mathcal{F}}(F)) &= \left(\begin{array}{l} V \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_V \\ x \mapsto \underbrace{\rho_x(\rho_{V,U}^{\mathcal{F}}(F))}_{=\rho_x(F) \text{ par (3.4)}} \end{array} \right) \\ &= \left(\begin{array}{l} U \rightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_U \\ x \mapsto \rho_x(F) \end{array} \right) \Big|_V \\ &= \gamma_U|_V, \end{aligned}$$

ce qui est la commutativité !

Traisons maintenant **(i)**. Fixons un point $x \in X$, rappelons la notation (4.7) pour le germe d'une section de $\widetilde{\mathcal{F}}$, et introduisons une application qui formera un isomorphisme $\mathcal{F}_x \cong \widetilde{\mathcal{F}}_x$:

$$\begin{aligned} \Lambda: \mathcal{F}_x &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}_x \\ f &\longmapsto \text{germe en } x \text{ de la section continue } \left(U \ni y \longmapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathcal{F}}|_U \right) \\ &= (y \longmapsto \rho_y(F))_x, \end{aligned}$$

où le germe $f = \rho_x(F) \in \mathcal{F}_x$ est représenté par une section $F \in \mathcal{F}(U)$ dans un ouvert $U \ni x$.

Assertion 5.6. *Le résultat ne dépend pas du choix d'un représentant.*

Démonstration. Si $f = \rho_x(F) = \rho_x(F')$, on peut supposer après prise d'intersection et restriction que $F \in \mathcal{F}(V)$ et $F' \in \mathcal{F}(V)$ sont définies dans un seul et même ouvert $V \ni x$. Alors les deux sections :

$$V \ni y \longmapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathcal{F}}|_V \quad \text{et} \quad V \ni y \longmapsto \rho_y(F') \in \widetilde{\mathcal{F}}|_V$$

coïncident au voisinage de x , donc ont même germe en x au sens (4.7). \square

Assertion 5.7. *L'application Λ est un homomorphisme de groupes.*

Démonstration. Soient $f, g \in \mathcal{F}_x$ représentés par $f = \rho_x(F)$ et $g = \rho_x(G)$ dans un seul et même ouvert $V \ni x$. Alors $F + G$ représente le germe $f \pm g$, i.e. $f \pm g = \rho_x(F + G)$,

donc :

$$\begin{aligned}
 \Lambda(f + g) &= \left(y \mapsto \rho_y(F \pm G) \right)_x \\
 &= \left(y \mapsto \rho_y(F) \pm \rho_y(G) \right)_x \\
 &= \left(y \mapsto \rho_y(F) \right)_x \pm \left(y \mapsto \rho_y(G) \right)_x \\
 &= \Lambda(f) \pm \Lambda(g),
 \end{aligned}$$

et c'est ce qu'il fallait. \square

Assertion 5.8. *L'homomorphisme Λ est injectif.*

Démonstration. En effet, soit $f \in \mathcal{F}_x$ avec $\Lambda(f) = 0$, représenté $f = \rho_x(F)$ par $F \in \mathcal{F}(U)$ dans un ouvert $U \ni x$. Or comme $0 = \Lambda(f)$ s'exprime par :

$$0 = \left(y \mapsto \rho_y(F) \right)_x,$$

en particulier au point $y = x$, il vient $\rho_x(F) = f = 0$. \square

Assertion 5.9. *L'homomorphisme Λ est surjectif.*

Démonstration. Par définition, un élément $g \in \widetilde{\mathcal{F}}_x$, c'est un germe $g = \sigma_x$ en x d'une section σ définie près de x , continue à valeurs dans $\widetilde{\mathcal{F}}$. Donc après rétrécissement d'ouvert, il existe $V \ni x$ ouvert, il existe $F \in \mathcal{F}(V)$ tels que :

$$g = \left(V \ni y \mapsto \rho_y(F) \in \widetilde{\mathcal{F}}|_V \right)_x.$$

Mais alors $f := \rho_x(F)$ satisfait naturellement $\Lambda(f) = g$. \square

Il reste encore à établir **(iii)**, à savoir l'équivalence :

$$\mathcal{F} \text{ est un faisceau} \iff \gamma: \mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}} \text{ est un isomorphisme de préfaisceaux.}$$

L'implication ' \Leftarrow ' se voit directement, par mentalisation de ce qui précède.

Traitons donc ' \Rightarrow '. L'hypothèse est que \mathcal{F} est un faisceau. Le but est de montrer que pour tout ouvert $U \subset X$, l'application :

$$\begin{aligned}
 \gamma_U: \mathcal{F}(U) &\longrightarrow \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}) \\
 F &\longmapsto \left(U \ni x \mapsto \rho_x(F) \in \mathcal{F}_x \right)
 \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

Si donc $\sigma \in \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}})$ est une section quelconque, nous devons montrer qu'il existe une *unique* section $F \in \mathcal{F}(U)$ antécédante, *i.e.* telle que $\gamma_U(F) = \sigma$.

D'après le Lemme 4.4, le fait que σ est continue s'exprime comme suit :

$$\forall x \in U \quad \exists x \in V_x \subset U \text{ sous-ouvert} \quad \exists F_x \in \mathcal{F}(V_x) \quad \left(\forall y \in V_x \quad \sigma(y) = \rho_y(F_x) \right),$$

d'où :

$$(5.10) \quad \sigma(x) = \rho_x(F_x).$$

Clairement, ceci produit un recouvrement ouvert de :

$$U = \bigcup_{x \in U} V_x.$$

Assertion 5.11. *Pour tous $x, x' \in U$:*

$$\rho_{V_x \cap V_{x'}, V_x}(F_x) = \rho_{V_{x'} \cap V_x, V_{x'}}(F_{x'}).$$

Démonstration. En tout point $y \in V_x \cap V_{x'}$, on déduit de la continuité exprimée à l'instant que les deux germes en y de F_x et de $F_{x'}$ coïncident :

$$\rho_y(F_x) = \sigma(y) = \rho_y(F_{x'}),$$

ce qui veut dire qu'il existe un sous-ouvert :

$$y \in W_{x,x',y} \subset V_x \cap V_{x'},$$

en restriction auquel :

$$\rho_{W_{x,x',y}, V_x \cap V_{x'}}(F_x) = \rho_{W_{x,x',y}, V_{x'} \cap V_x}(F_{x'}).$$

Clairement, ceci produit un recouvrement ouvert de :

$$V_x \cap V_{x'} = \bigcup_{y \in V_x \cap V_{x'}} W_{x,x',y},$$

et ces conditions de coïncidence alliées à l'Axiome 2.4 d'unicité satisfait par le faisceau \mathcal{F} donnent :

$$\rho_{V_x \cap V_{x'}, V_x}(F_x) = \rho_{V_{x'} \cap V_x, V_{x'}}(F_{x'}),$$

et c'est exactement ce qui avait été asserté ! □

Ensuite presque instantanément, comme \mathcal{F} est un (vrai) faisceau, l'Axiome 2.5 de recollement s'applique à ces coïncidences pour fournir une — unique par 2.4 — section $F \in \mathcal{F}(U)$ telle que :

$$\rho_{V_x, U}(F) = F_x \quad (\forall x \in U),$$

d'où :

$$(5.12) \quad \rho_x(F) = \rho_x(\rho_{V_x, U}(F)) = \rho_x(F_x).$$

Maintenant, en revenant à la définition (5.2), un calcul synthétique terminal :

$$\begin{aligned} \gamma_U(F) &= \left(U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_U \right) \\ &= \left(U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_U \right) \\ &= \left(U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}}|_U \right), \end{aligned}$$

[Appliquer 5.12]

[Appliquer 5.10]

montre qu'on a bien $\gamma_U(F) = \sigma$.

La démonstration — étendue et enrichie d'abstractions psychédéliques — du Théorème de faisceautisation d'un préfaisceau est (enfin !) achevée. □

Terminologie 5.13. On dit que $\widetilde{\mathcal{F}}$ est le *faisceau associé* au préfaisceau \mathcal{F} .

Exemple 5.14. [Faisceau constant associé au préfaisceau constant] Comme dans l'Exemple 2.6, soit X un espace topologique, et soit E un ensemble avec $\text{Card } E \geq 2$.

Quel est le faisceau associé $\widetilde{\mathcal{E}}_X$ au préfaisceau constant \mathcal{E}_X ?

Une section du préfaisceau constant \mathcal{E}_X sur un ouvert $\emptyset \neq U \subset X$ est un élément unique $e \in \mathcal{E}_X(U) = E$, donc on peut identifier :

$$\mathcal{E}_X(U) = \{ \text{applications } \sigma : U \longrightarrow E \text{ constantes} \}.$$

Lorsque X n'est pas connexe, l'Exemple 2.6 a fait voir que $U \longmapsto \mathcal{E}_X(U)$ n'est jamais un faisceau.

En tout cas, les germes du faisceau associé $\widetilde{\mathcal{E}}_X$ en un point arbitraire $x \in X$ sont constamment égaux (exercice) à :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{X,x} = \mathcal{E}_{X,x} = E \quad (\forall x \in X).$$

Des définitions et propriétés vues plus haut se déduisent une description agréable des espaces de sections continues $\sigma : U \longrightarrow \widetilde{\mathcal{E}}_X$

Assertion 5.15. On a :

$$\Gamma(U, \widetilde{\mathcal{E}}_X) = \left\{ \text{applications } \sigma : U \longrightarrow E \underbrace{\text{localement constantes}}_{\substack{\text{i.e. constantes} \\ \text{sur les composantes connexes de } U}} \right\}.$$

De plus, la topologie canonique sur :

$$\widetilde{\mathcal{E}}_X = \text{Germes}(\mathcal{E}_X) = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{E}_{X,x}$$

induit sur les fibres $\widetilde{\mathcal{E}}_{X,x} = E$ la topologie discrète : tout singleton $e \in E$ est un ouvert.

Démonstration. Voir l'Exercice 4. □

En définitive, c'est l'ensemble des applications *localement constantes* $U \longrightarrow E$ qui est le bon vrai faisceau qu'il faut considérer et introduire.

Notation 5.16. Le *faisceau constant* de base X et de fibre E — à ne pas confondre avec le préfaisceau constant \mathcal{E}_X — sera noté :

$$E_X := \widetilde{\mathcal{E}}_X,$$

par exemple $\mathbb{Z}_X, \mathbb{R}_X, \mathbb{C}_X$, et ses espaces de sections seront notés $\Gamma(U, E_X)$.

Parfois, au-delà de l'exemple essentiellement trivial du (pré)faisceau constant, il est (vraiment) nécessaire de passer au faisceau associé $\widetilde{\mathcal{F}}$ à un préfaisceau \mathcal{F} , notamment lorsque le préfaisceau en question provient d'opérations naturelles sans être un faisceau : l'Exercice 15 montre par exemple qu'une difficulté se produit lorsqu'on cherche à introduire l'*image inverse* d'un faisceau.

Quand $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}}$ est un faisceau, nous venons de voir qu'il est muni d'une topologie canonique faisant de la projection :

$$\pi : \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$$

un homéomorphisme local surjectif. Ce fait va nous conduire à re-définir le concept de faisceau d'une manière différente (Définition 6.3) équivalente, et qui aura l'avantage de

« rendre » les germes du faisceau, « visibles » comme *fibres* d'une certaine application continue.

6. Définition du concept de faisceau comme espace étalé

La théorie des faisceaux la plus générale possible peut en effet être reformulée dans le cadre « amorphe » des espaces topologiques quelconques. Commençons par rappeler deux notions topologiques « primitives » utiles.

Définition 6.1. Soient X et Y deux espaces topologiques, et soit $\tau: Y \rightarrow X$ une application continue. Si $x \in X$ est un point, la *fibres* de x est l'ensemble :

$$\tau^{-1}(x) = \{y \in Y: \tau(y) = x\}.$$

Définition 6.2. Une application $\tau: Y \rightarrow X$ entre deux espaces topologiques est un *homéomorphisme local* si tout point $y \in Y$ possède un voisinage ouvert V dont l'image $\tau(V) =: U \subset X$ est ouverte dans X tel que la restriction :

$$\tau|_V: V \rightarrow U$$

est un homéomorphisme.

Dans quelques instants, nous allons voir que la définition suivante de la notion de faisceau est équivalente à celle qui a déjà été vue plus haut.

Définition 6.3. Un *faisceau* \mathcal{S} sur X est un espace topologique \mathcal{S} muni d'une application continue :

$$\tau: \mathcal{S} \rightarrow X$$

qui est *surjective* et qui est un homéomorphisme local. Les fibres d'un faisceau sont alors notées :

$$\mathcal{S}_x := \tau^{-1}(x).$$

On dit aussi que \mathcal{S} est un *espace étalé* au-dessus de X .

Pour l'instant, travaillons avec cette nouvelle définition. La plupart du temps, un faisceau possède une structure algébrique naturelle, la plus « simple » étant celle de groupe abélien.

Définition 6.4. Si, en tout point $x \in X$, la fibre \mathcal{S}_x d'un faisceau $\tau: \mathcal{S} \rightarrow X$ est un groupe abélien, et si, sur le *produit fibré* :

$$\mathcal{S} \times_X \mathcal{S} := \{(s_1, s_2) \in \mathcal{S} \times \mathcal{S}: \tau(s_1) = \tau(s_2)\},$$

les deux opérations algébriques :

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \times_X \mathcal{S} &\rightarrow \mathcal{S} \\ (s_1, s_2) &\mapsto s_1 \pm s_2 \end{aligned}$$

sont continues, on dit que \mathcal{S} est un *faisceau de groupes abéliens*.

En demandant que les opérations algébriques qui correspondent aux notions de groupes, d'anneaux, ou de corps, soient continues, on définit de manière similaire et aisément énonçable (exercice) les concepts de *faisceaux de groupes, d'anneaux, ou de corps*.

Exemple 6.5. [Faisceau constant, bis] Considérons \mathbb{C} muni de la topologie discrète, et introduisons le produit :

$$\mathbb{C}_X := X \times \mathbb{C},$$

avec la projection $\tau: \mathbb{C}_X \rightarrow X$ sur son premier facteur. Alors \mathbb{C}_X est un faisceau de corps sur X (exercice), de fibres $(\mathbb{C}_X)_x \equiv \mathbb{C}$ constamment égales à \mathbb{C} , quel que soit $x \in X$. De manière similaire, on définit les faisceaux constants $\mathbb{R}_X \rightarrow X$ et $\mathbb{Z}_X \rightarrow X$.

Définition 6.6. Sur un ouvert $U \subset X$, une section σ d'un faisceau $\tau: \mathcal{S} \rightarrow X$ est une application continue :

$$\sigma: U \rightarrow \mathcal{S}$$

satisfaisant $\tau \circ \sigma = \text{Id}_U$. La collection de ces sections sera notée :

$$\Gamma(U, \mathcal{S}).$$

Les sections du faisceau constant \mathbb{C}_X sont alors les applications localement constantes $U \rightarrow \mathbb{C}$, i.e. constantes sur les composantes connexes de $U \subset \mathbb{C}$.

Lemme 6.7. Si \mathcal{S} est un faisceau de groupes abéliens sur X , et si $U \subset X$ est ouvert, alors pour toute paire de sections $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, on a $\sigma_1 \pm \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$.

Démonstration. Cela provient de la continuité demandée par la Définition 6.4. □

Lemme 6.8. Sur tout ouvert $U \subset X$, l'application zéro :

$$U \ni x \mapsto 0_x \in \mathcal{S}_x$$

est une section continue, i.e. appartient à $\Gamma(U, \mathcal{S})$.

Démonstration. Soit $x \in U$ quelconque. Dans un voisinage ouvert $x \in U' \subset U$, soit une section continue quelconque $\sigma \in \Gamma(U', \mathcal{S})$. Alors $\sigma - \sigma = 0$ est continue. □

Soit un point $s \in \mathcal{S}$, et soit $x := \tau(s)$. Comme τ est un homéomorphisme local, il existe un ouvert $s \in V \subset \mathcal{S}$ tel que :

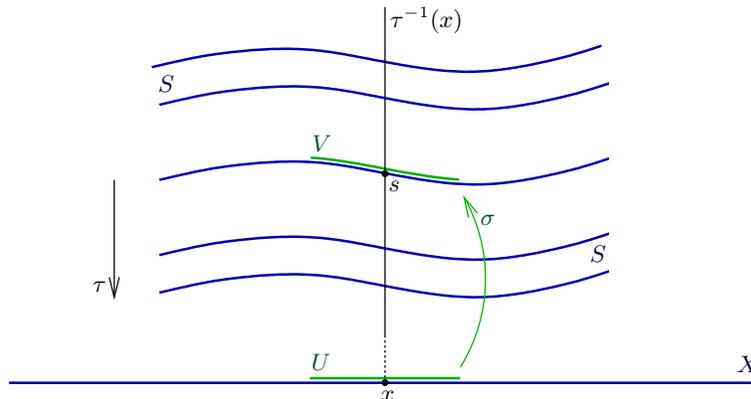
$$\tau|_V: V \rightarrow U := \tau(V) \subset X$$

est un homéomorphisme. Par conséquent :

$$\sigma := (\tau|_V)^{-1}: U \rightarrow V$$

est une section, $V = \sigma(U)$ est un voisinage ouvert de s , et σ est un homéomorphisme.

Proposition 6.9. Pour tout $x \in X$, la topologie induite sur la fibre $\mathcal{S}_x = \tau^{-1}(x)$ est discrète.



Démonstration. Les ouverts de la topologie induite sur $\tau^{-1}(x)$ sont de la forme $V \cap \tau^{-1}(x)$, où V est un ouvert de \mathcal{S} .

Soit un point $s \in \tau^{-1}(x)$ quelconque. Comme τ est un homéomorphisme local, il existe un ouvert $s \in V \subset \mathcal{S}$ tel que :

$$\tau|_V: V \xrightarrow{\sim} \tau(V) =: U \subset X$$

est un homéomorphisme, donc est bijectif. Pour tout autre point $s' \in V \cap \tau^{-1}(x)$, on a :

$$\tau(s') = x = \tau(s),$$

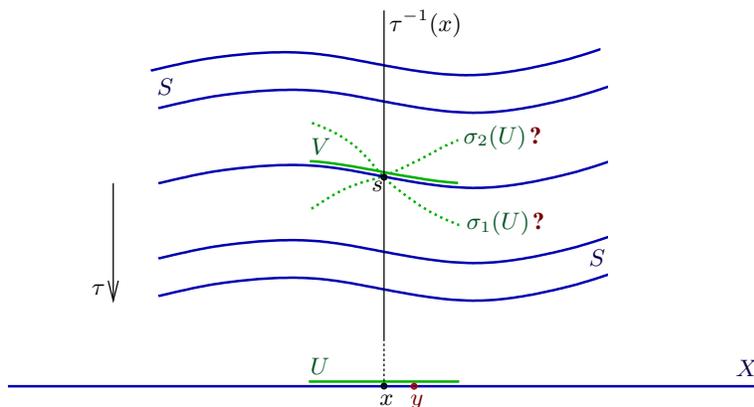
d'où en fait $s' = s$ car τ est en particulier injectif. Ainsi :

$$\{s\} = V \cap \tau^{-1}(x),$$

ce qui montre bien que les ouverts de $\tau^{-1}(x)$ sont des *singletons*. \square

Proposition 6.10. *Pour tout ouvert $U \subset X$, pour toute paire de sections (continues) $\sigma_1, \sigma_2 \in \Gamma(U, \mathcal{S})$, en tout point $x \in U$, on a :*

$$\sigma_1(x) = \sigma_2(x) \iff \exists x \in U' \subset U \text{ sous-ouvert avec } \sigma_1|_{U'} = \sigma_2|_{U'}.$$



Démonstration. Posons :

$$s := \sigma_1(x) = \sigma_2(x) \in \tau^{-1}(x) \subset \mathcal{S}.$$

Soit un ouvert $s \in V \subset \mathcal{S}$ en restriction auquel la projection est un homéomorphisme :

$$\tau|_V: V \xrightarrow{\sim} \tau(V) := U \subset X.$$

Les deux sections $\sigma_1, \sigma_2: U \rightarrow \mathcal{S}$ avec $\sigma_1(x) = \sigma_2(x) = s$ sont *continues*, donc il existe un sous-ouvert $x \in U' \subset U$ tel que :

$$\sigma_1(U') \subset V \quad \text{et} \quad \sigma_2(U') \subset V.$$

De plus, comme σ_1 et σ_2 sont des sections, elles satisfont pour tout $y \in U'$:

$$\tau \circ \sigma_1(y) = y = \tau \circ \sigma_2(y),$$

et comme $\tau|_V$ est en particulier injectif, on déduit :

$$\sigma_1(y) = \sigma_2(y) \quad (\forall y \in U'),$$

ce qu'il fallait. \square

Théorème 6.11. *Un faisceau au sens de la Définition 2.3 est un faisceau au sens de la Définition 6.3, et inversement.*

Démonstration. Soit donc \mathcal{F} un faisceau au sens 2.3. Alors par le Théorème 5.1, $\mathcal{F} \cong \widetilde{\mathcal{F}}$ s'identifie à son faisceautisé, la projection :

$$\pi: \widetilde{\mathcal{F}} \longrightarrow X$$

est un homéomorphisme local, et pour tout ouvert $U \subset X$, les espaces de sections respectifs s'identifient :

$$\mathcal{F}(U) \cong \Gamma(U, \widetilde{\mathcal{F}}),$$

donc les Définitions 6.3 et 6.6 sont satisfaites.

Inversement, soit $\tau: \mathcal{S} \longrightarrow X$ un homéomorphisme local surjectif, comme en 6.3. Alors le préfaisceau :

$$U \longmapsto \Gamma(U, \mathcal{S}) = \{\sigma: U \longrightarrow \mathcal{S} \text{ continues}\}$$

est un faisceau \mathcal{F}' au sens 2.3 (exercice) avec germes égaux aux τ -fibres :

$$\mathcal{F}'_x = \tau^{-1}(x) \quad (\forall x \in X),$$

et on se convainc (exercice) que :

$$\mathcal{F}' \cong \widetilde{\mathcal{F}'} \cong \mathcal{S},$$

ce qui conclut. □

Dans la suite, les faisceaux seront envisagés et étudiés selon ces deux perspectives équivalentes : à la fois comme espaces de sections, et comme espaces étalés.

7. Exercices

Exercice 1. En raisonnant rigoureusement avec les classes d'équivalence, établir le Lemme 3.8.

Exercice 2. Vérifier en détail le Lemme 4.4.

Exercice 3. Soit X un espace topologique quelconque.

- (a) Définir la notion de (pré)faisceau d'anneaux commutatifs unitaires \mathcal{A}_X sur X .
- (b) Définir la notion de (pré)faisceau de \mathcal{A}_X -modules \mathcal{P}_X sur X .
- (c) Montrer que pour tout point $x \in X$, la fibre \mathcal{P}_x possède une structure de \mathcal{A}_x -module.
- (d) Définir la somme directe $\mathcal{P}_X \oplus \mathcal{Q}_X$ de deux préfaisceaux de \mathcal{A}_X -modules.
- (e) Cette somme directe $\mathcal{P}_X \oplus \mathcal{Q}_X$ est-elle un faisceau ?
- (f) Définir la notion de sous-faisceau de \mathcal{A}_X -modules $\mathcal{Q}_X \subset \mathcal{P}_X$.

Exercice 4. Démontrer l'Assertion 5.15.

Exercice 5. Comme dans l'Exercice 3, soient $\mathcal{Q}_X \subset \mathcal{P}_X$ des (sous-)faisceaux de \mathcal{A}_X -modules. On introduit le préfaisceau :

$$U \longmapsto \mathcal{P}_X(U)/\mathcal{Q}_X(U) \quad (U \subset X \text{ ouvert}),$$

qui n'est en général pas un faisceau, comme l'a fait voir l'Observation 2.15. On introduit donc le faisceau associé par le Théorème 5.1 à ce préfaisceau, que l'on note \mathcal{P}/\mathcal{Q} .

(a) Vérifier que l'on a :

$$(\mathcal{P}/\mathcal{Q})_x \cong \mathcal{P}_x/\mathcal{Q}_x \quad (\forall x \in X).$$

(b) Lorsque $U \longmapsto \mathcal{P}_X(U)/\mathcal{Q}_X(U)$ n'est pas un faisceau, vérifier qu'il existe $U \subset X$ ouvert tel que :

$$(\mathcal{P}/\mathcal{Q})(U) \not\cong \mathcal{P}(U)/\mathcal{Q}(U).$$

(c) On considère l'espace topologique $X := \mathbb{R}$ muni de sa topologie standard, et, comme dans les Exemples 5.14 et 6.5 mais avec $E = \mathbb{Z}$, le faisceau constant $\mathbb{Z}_{\mathbb{R}}$. Avec le doubleton $\{0, 1\} \subset \mathbb{R}$, pour $U \subset \mathbb{R}$ ouvert, on introduit :

$$\mathbb{Z}_{\mathbb{R}(0,1)}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{Z} \text{ localement constantes} : f(0) = 0 \text{ si } 0 \in U, f(1) = 0 \text{ si } 1 \in U\}.$$

Vérifier que $U \mapsto \mathbb{Z}_{\mathbb{R}(0,1)}(U)$ constitue un faisceau.

(d) Montrer que :

$$\Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}}) / \Gamma(\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}(0,1)}) \cong \mathbb{Z} / \{0\} = \mathbb{Z}.$$

(e) Montrer que :

$$\Gamma\left(\mathbb{R}, \mathbb{Z}_{\mathbb{R}} / \mathbb{Z}_{\mathbb{R}(0,1)}\right) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z},$$

et interpréter.

Exercice 6. Pour $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, soit $\mathcal{G}(U)$ l'espace vectoriel de toutes les fonctions holomorphes bornées $f: U \rightarrow \mathbb{C}$. Pour un couple d'ouverts $U \subset V$, soit $\mathcal{G}(V) \rightarrow \mathcal{G}(U)$ l'application usuelle de restriction. Montrer que le préfaisceau \mathcal{G} satisfait l'axiome d'unicité 2.4, mais pas l'axiome de recollement 2.5.

Exercice 7. Pour $U \subset \mathbb{C}$ ouvert, soit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ l'anneau des fonctions holomorphes sur U , et soit $\mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*(U)$ le sous-ensemble des fonctions holomorphes nulle part égales à zéro. On pose :

$$\mathcal{F}(U) := \mathcal{O}_{\mathbb{C}}^*(U) / \exp(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)).$$

Montrer que $U \mapsto \mathcal{F}(U)$, muni des applications usuelles de restriction, est un préfaisceau qui ne satisfait pas l'axiome d'unicité 2.4.

Exercice 8. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, avec $n \geq 1$. Pour $U \subset \Omega$ ouvert, soit :

$$\mathcal{O}_{\Omega}(U) := \{f: U \rightarrow \mathbb{C} \text{ holomorphe}\}.$$

(a) Montrer que $U \mapsto \mathcal{O}_{\Omega}(U)$ constitue un faisceau d'anneaux commutatifs unitaires.

(b) En un point $z_0 \in \Omega$, identifier le germe $\mathcal{O}_{\Omega, z_0}$.

(c) Montrer que $\mathcal{O}_{\Omega, z_0}$ est un anneau local, i.e. n'ayant qu'un unique idéal maximal, lequel sera noté $\mathfrak{m}_{\Omega, z_0}$.

(d) Pour $k \geq 1$ entier, décrire explicitement :

$$(\mathfrak{m}_{\Omega, z_0})^k \quad \text{ainsi que} \quad \mathcal{O}_{\Omega, z_0} / (\mathfrak{m}_{\Omega, z_0})^k.$$

(e) La topologie sur Germes \mathcal{O}_{Ω} est-elle séparée ?

Exercice 9. Soit $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, $n \geq 1$, ouvert. Soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble quelconque. On définit le faisceau d'idéaux \mathcal{I}_E de E , pour tout sous-ouvert $U \subset \Omega$, par :

$$\mathcal{I}_E(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) : f(z) = 0, \forall z \in E \cap U\}.$$

(a) Montrer que $U \mapsto \mathcal{I}_E(U)$ constitue un faisceau.

(b) Montrer que chaque germe \mathcal{I}_{E, z_0} en un point $z_0 \in \Omega$ est un idéal de l'anneau $\mathcal{O}_{\Omega, z_0}$.

(c) Lorsque $E = \{a\}$ se réduit à un point-singleton unique $a \in \Omega$, calculer les germes $\mathcal{I}_{E, z}$ en tout point $z \in \Omega$.

Exercice 10. Soit X un espace topologique. Pour $U \subset X$ ouvert, soit le préfaisceau :

$$\mathcal{F}(U) := \left\{ \text{fonctions } F: U \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornées} : -\infty < \inf_U f \leq \sup_U f < \infty \right\}.$$

(a) Vérifier que \mathcal{F} n'est pas en général un faisceau.

(b) Montrer que le préfaisceau associé $\widetilde{\mathcal{F}}$ est le faisceau des fonctions localement bornées sur X .

(c) Montrer que $\widetilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}$ si et seulement si, de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts, on peut extraire un sous-recouvrement fini, i.e. X est un espace topologique compact.

Exercice 11. [Faisceau gratte-ciel] Soit X un espace topologique séparé (Hausdorff), soit $x_0 \in X$ un point fixé, soit E un ensemble quelconque, et soit $e \in E$ un élément fixé. Pour $U \subset X$ ouvert, soit :

$$\mathcal{E}_{\uparrow x_0 \uparrow}(U) := \begin{cases} E & \text{lorsque } U \ni x_0, \\ \{e\} & \text{lorsque } U \not\ni x_0, \end{cases}$$

et, pour $V \subset U \subset X$ sous-ouverts :

$$\rho_{V,U} := \begin{cases} \text{Id}_E & \text{lorsque } x_0 \in V \subset U, \\ E \longrightarrow \{e\} & \text{lorsque } x_0 \notin V. \end{cases}$$

(a) Montrer que $\mathcal{E}_{\uparrow x_0 \uparrow}$ est un faisceau d'ensembles.

(b) Montrer que ses germes en des points $x \in X$ sont :

$$(\mathcal{E}_{\uparrow x_0 \uparrow})_x = \begin{cases} \{e\} & \text{lorsque } x \neq x_0, \\ E & \text{lorsque } x = x_0. \end{cases}$$

Exercice 12. Soit \mathcal{F} un préfaisceau arbitraire sur un espace topologique quelconque X . Montrer que le faisceau canoniquement associé à \mathcal{F} :

$$\widetilde{\mathcal{F}} = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{F}_x,$$

qui vient accompagné d'un morphisme de préfaisceaux naturel :

$$\gamma: \mathcal{F} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{F}},$$

est caractérisé par la propriété universelle suivante. Pour tout morphisme de préfaisceaux sur X :

$$\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$$

dont l'espace image \mathcal{G} est un *vrai* faisceau, il existe un unique morphisme de faisceaux (en pointillés) qui rend commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \gamma \downarrow & \nearrow & \\ \widetilde{\mathcal{F}} & & \end{array}$$

Exercice 13. Soit $\varphi: \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G}$ un morphisme de faisceaux sur un espace topologique X pour une certaine structure algébrique (groupes abéliens, anneaux, \mathbb{A} -modules, \mathbb{A} -algèbres, \mathbb{K} -espaces vectoriels). On rappelle que par la Proposition 3.9, φ induit, pour tout $x \in X$, un morphisme entre germes $\varphi_x: \mathcal{F}_x \longrightarrow \mathcal{G}_x$.

(a) Montrer que φ est injectif si et seulement si φ_x est injectif pour tout $x \in X$.

(b) Montrer que φ est un isomorphisme si et seulement si φ_x est un isomorphisme pour tout $x \in X$.

(c) Soit $X := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, soit \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X , et soit \mathcal{O}_X^* le faisceau des fonctions holomorphes nulle part égales à zéro. Montrer que l'application exponentielle $\varphi: \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X^*$ est surjective sur les germes.

(d) Montrer enfin que $\varphi(X)$ n'est pas surjective, et interpréter cela.

Exercice 14. [Image directe d'un faisceau] Soit $f: X \longrightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques, et soit \mathcal{F} un préfaisceau d'ensembles sur X .

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \rightsquigarrow & f_*\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Pour tout ouvert $V \subset Y$, on introduit :

$$f_*(\mathcal{F})(V) := \mathcal{F}(f^{-1}(V)).$$

(a) Montrer que $V \longmapsto f_*(\mathcal{F})(V)$ constitue un préfaisceau sur Y .

(b) Lorsque \mathcal{F} est un faisceau, montrer que $f_*(\mathcal{F})$ est un faisceau.

Exercice 15. [Image inverse d'un faisceau] Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques, et soit \mathcal{G} un préfaisceau d'ensembles sur Y .

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}\mathcal{G} & \leftarrow & \mathcal{G} \\ \vdots & & \vdots \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Pour $U \subset X$ ouvert, on introduit :

$$f^{-1}\mathcal{G}(U) := \varinjlim_{\substack{W \supset f(U) \\ \text{ouvert}}} \mathcal{G}(W).$$

- (a) Montrer que $U \mapsto f^{-1}\mathcal{G}(U)$ constitue un préfaisceau sur X .
- (b) Lorsque \mathcal{G} est un faisceau (sur Y), montrer par un exemple que ce procédé ne fournit pas en général un faisceau (sur X).
- (b) Comment, alors, définir un faisceau sur X , aussi noté $f^{-1}\mathcal{G}$, de manière naturelle ?

Exercice 16. Montrer que la topologie canonique sur l'espace des germes $\text{Germes}(\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty})$ du faisceau $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}^{\infty}$ des fonctions indéfiniment différentiables sur \mathbb{R} n'est pas séparée (Hausdorff).

Exercice 17. EE

Faisceaux analytiques cohérents

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Définition des faisceaux cohérents

Soit X un espace topologique, et soit $\mathcal{A} \rightarrow X$ un faisceau d'anneaux commutatifs unitaires sur X , où \mathcal{A} est un espace topologique, où la projection ' \rightarrow ' est un homéomorphisme local surjectif, et où les espaces de sections $\Gamma(U, \mathcal{A})$ pour $U \subset X$ ouvert ont une structure d'anneau.

Soit aussi un faisceau de \mathcal{A} -modules sur X :

$$\mathcal{M} \rightarrow X,$$

où \mathcal{M} est un espace topologique, où la projection ' \rightarrow ' est un homéomorphisme local surjectif, et où les espaces de sections $\Gamma(U, \mathcal{M})$ sont des $\Gamma(U, \mathcal{A})$ -modules.

Comme l'a fait comprendre la théorie générale des faisceaux, on peut envisager \mathcal{A} et \mathcal{M} alternativement et simultanément comme une réunion topologisée de germes :

$$\mathcal{A} = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{A}_x, \quad \text{et} \quad \mathcal{M} = \coprod_{\substack{x \in X \\ \text{topologisée}}} \mathcal{M}_x,$$

sachant que ces germes \mathcal{A}_x et \mathcal{M}_x s'identifient aux fibres des projections ' \rightarrow ' respectives.

La prise de germe d'une section $M \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ en un point $x \in U$ d'un ouvert $U \subset X$ sera notée :

$$M \mapsto \underline{M}_x \in \mathcal{M}_x.$$

Des éléments fixés de ces fibres \mathcal{A}_x et \mathcal{M}_x seront notés $a_x \in \mathcal{A}_x$ et $m_x, n_x \in \mathcal{M}_x$. La théorie générale des faisceaux dit que ce sont en fait des *germes* de sections locales continues définies dans des voisinages ouverts de x ; rappelons en effet deux propriétés fondamentales établies au chapitre précédent.

Principe d'extension germique 1.1. *Tout germe $m_x \in \mathcal{M}_x$ possède toujours un certain représentant local $M \in \Gamma(U, \mathcal{M})$, à savoir une section continue M de \mathcal{M} définie dans un certain voisinage ouvert $x \in U \subset X$ qui redonne le germe :*

$$\underline{M}_x = m_x.$$

De plus, si $m_x \in \mathcal{M}_x$ et $n_x \in \mathcal{M}_x$ ont pour représentants $M \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ et $N \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ dans un ouvert commun $x \in U \subset X$, alors :

$$m_x = n_x \quad (\text{dans } \mathcal{M}_x) \iff \exists x \in V \subset U \quad \text{sous-ouvert tel que} \quad M|_V = N|_V \quad (\text{dans } V).$$

Le plus souvent, une hypothèse de noethérianité est satisfaite, qui peut être conceptualisée abstraitement comme suit.

Définition 1.2. Un faisceau \mathcal{M} de \mathcal{A} -modules est dit *localement finiment engendré* lorsque, en tout point $x \in X$, il existe un nombre fini $K \geq 1$ de sections $M_1, \dots, M_K \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ définies dans un certain voisinage ouvert $x \in U \subset X$ dont les germes engendrent toutes les fibres :

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{A}_y \cdot \underline{M_{1,y}} + \dots + \mathcal{A}_y \cdot \underline{M_{K,y}} \quad (\forall y \in U).$$

Exemple 1.3. [Oka 1950] Toutefois, l'engendrement fini local peut parfois être mis en défaut. Dans \mathbb{C}^2 , prenons en effet deux boules ouvertes concentriques emboîtées de rayons $0 < s < r$:

$$B_s := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < s\} \quad \text{et} \quad B_r := \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 < r\},$$

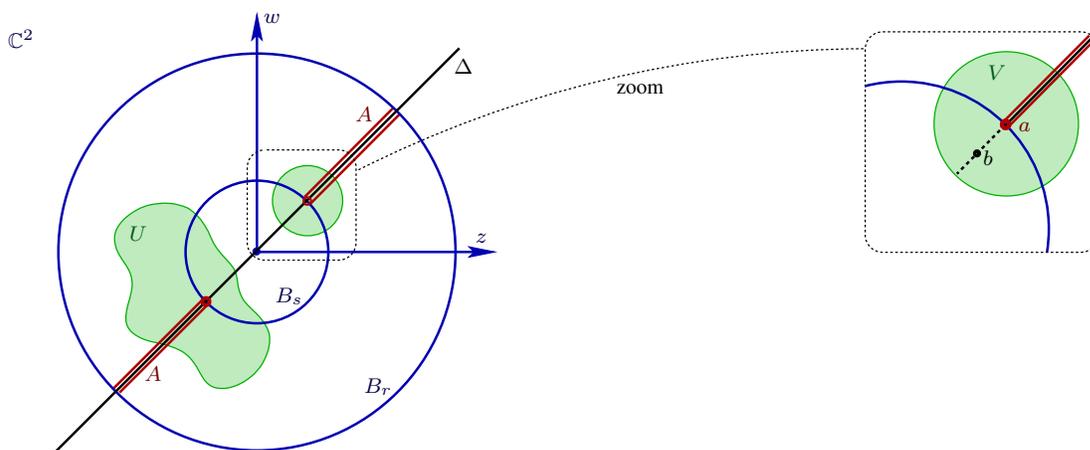
prenons la diagonale :

$$\Delta := \{z = w\},$$

et attribuons un nom à son intersection avec la différence entre ces boules :

$$A := \Delta \cap (B_r \setminus B_s).$$

On doit pouvoir se convaincre visuellement que A est un anneau contenu dans la droite complexe $\{z = w\} \cong \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.



Observons aussi que la partie du bord de B_s qui est dans cette diagonale :

$$\partial B_s \cap \Delta \subset A$$

est un cercle ‘spécial’ de rayon $s/\sqrt{2}$ entièrement contenu dans l’anneau A , de telle sorte que A est fermé du côté de ∂B_s , tandis qu’il est ouvert du côté de ∂B_r .

Introduisons maintenant le faisceau des fonctions holomorphes s’annulant sur A , dont les sections pour tout ouvert $U \subset B_r$ sont :

$$\mathcal{I}_A(U) := \{f \in \mathcal{O}(U) : f(z, z) = 0, \forall (z, z) \in A \cap U\};$$

le fait qu’il s’agit d’un vrai faisceau a déjà été vu dans un exercice qui précède.

Le principe des zéros isolés montre alors que si $U \cap \Delta$ est connexe, et s’il existe un point $(z_0, z_0) \in A \cap U$, alors $f(z, z) \equiv 0$ partout dans $U \cap \Delta$, donc f est localement factorisable par $(z - w)$. On en déduit (exercice aisé) qu’en tout point $b \in B_r$, les germes de ce faisceau valent :

$$(1.4) \quad \mathcal{I}_{A,b} = \begin{cases} \mathcal{O}_b(z - w)_b & \text{si } b \in A, \\ \mathcal{O}_b & \text{si } b \notin A. \end{cases}$$

Assertion 1.5. *En tout point $a \in A \cap \partial B_s$ du cercle spécial, le faisceau \mathcal{I}_A n'est pas localement finiment engendré.*

Démonstration. Sinon, il existerait un voisinage ouvert $a \in V$ qu'on peut supposer, après réduction, être une petite boule ouverte centrée en a , de telle sorte que $V \cap \{z = w\}$ est connexe, et il existerait un nombre fini $J \geq 1$ de fonctions $f_1, \dots, f_J \in \mathcal{I}_A(V) \subset \mathcal{O}(V)$ satisfaisant :

$$\mathcal{I}_{A,b} = \mathcal{O}_b \underline{f}_{1_b} + \dots + \mathcal{O}_b \underline{f}_{J_b} \quad (\forall b \in V).$$

Mais le principe mentionné des zéros isolés forcerait ces $f_j(z, z) \equiv 0$ à s'annuler en tout $(z, z) \in \Delta \cap V$, donc $f_j(b) = 0$ en des points $b \in B_s \cap \Delta \cap V$ de la diagonale intérieurs à la petite boule, d'où $b \notin A$, ce qui, en se remémorant (1.4), conduirait à l'inclusion impossible de l'anneau local dans son idéal maximal :

$$\mathcal{I}_{A,b} = \mathcal{O}_b \subset \mathfrak{m}_b := \{g_b \in \mathcal{O}_b : g_b(b) = 0\}. \quad \square$$

Lemme 1.6. *Si un faisceau \mathcal{M} de \mathcal{A} -modules est localement finiment engendré, et si, en un point $x \in X$, il existe des sections $N_1, \dots, N_L \in \Gamma(U, \mathcal{M})$ définies dans un ouvert $U \ni x$ dont les germes engendrent :*

$$\mathcal{M}_x = \mathcal{A}_x \cdot \underline{N}_{1_x} + \dots + \mathcal{A}_x \cdot \underline{N}_{L_x},$$

alors en fait, il existe un sous-voisinage ouvert $x \in V \subset U$ dans lequel ces mêmes sections engendrent toutes les fibres :

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{A}_y \cdot \underline{N}_{1_y} + \dots + \mathcal{A}_y \cdot \underline{N}_{L_y} \quad (\forall y \in V).$$

Démonstration. L'hypothèse que \mathcal{M} est localement finiment engendré s'exprime donc, quitte à réduire $U \ni x$, comme dans la Définition 1.2 :

$$\mathcal{M}_y = \mathcal{A}_y \cdot \underline{M}_{1_y} + \dots + \mathcal{A}_y \cdot \underline{M}_{K_y} \quad (\forall y \in U).$$

Mais alors, comme $\underline{N}_{1_x}, \dots, \underline{N}_{L_x}$ engendrent \mathcal{M}_x sur \mathcal{A}_x , il existe des germes $a_{k,\ell,x} \in \mathcal{A}_x$ tels que :

$$\underline{M}_{k_x} = a_{k,1,x} \underline{N}_{1_x} + \dots + a_{k,L,x} \underline{N}_{L_x} \quad (1 \leq k \leq K).$$

Le Principe d'extension germinique 1.1 fournit alors pour ces germes $a_{k,\ell,x}$ des représentants $A_{k,\ell} \in \Gamma(V, \mathcal{A})$ tous définis dans un certain sous-voisinage ouvert commun $x \in V \subset U$ tout en garantissant que :

$$\underline{M}_{k_y} = \sum_{1 \leq \ell \leq L} \underline{A}_{k,\ell_y} \underline{N}_{\ell_y} \quad (\forall y \in V, 1 \leq k \leq K).$$

Pour tout $y \in V$, il vient alors par simple remplacement :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_y &= \sum_{1 \leq k \leq K} \mathcal{A}_y \cdot \underline{M}_{k_y} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq K} \sum_{1 \leq \ell \leq L} \mathcal{A}_y \cdot \underline{A}_{k,\ell_y} \underline{N}_{\ell_y} \\ &\subset \sum_{1 \leq \ell \leq L} \mathcal{A}_y \cdot \underline{N}_{\ell_y}, \end{aligned}$$

et comme l'inclusion inverse ' \supset ' est évidente, on a l'égalité annoncée. \square

Étant donné un faisceau \mathcal{M} de \mathcal{A} -modules et étant donné un nombre fini arbitraire $Q \geq 1$ de sections quelconques :

$$M_1, \dots, M_Q \in \Gamma(U, \mathcal{M})$$

définies dans un voisinage ouvert $U \subset X$, les problèmes qu'ont étudié (et résolu) Cousin puis Oka ont montré qu'il était nécessaire de comprendre les relations existant entre leurs germes, ce qui conduit en théorie générale des faisceaux à introduire, en tout point $y \in U$, l'ensemble des *relations germiques* :

$$\mathcal{R}_y(M_1, \dots, M_Q) := \left\{ (a_{1,y}, \dots, a_{Q,y}) \in (\mathcal{A}_y)^Q : 0 = a_{1,y} \underline{M}_{1,y} + \dots + a_{Q,y} \underline{M}_{Q,y} \right\}.$$

On peut vérifier (exercice) que $\cup_y \mathcal{R}_y(M_1, \dots, M_Q)$ constitue un sous-faisceau de la restriction $(\mathcal{A})^Q|_U$, les sections continues étant alors représentées dans des sous-ouverts $V \subset U$:

$$V \ni y \longmapsto (A_1(y), \dots, A_Q(y)),$$

au moyen de sections continues $A_1, \dots, A_Q \in \Gamma(V, \mathcal{A})$ satisfaisant :

$$0 = \underline{A}_{1,y} \underline{M}_{1,y} + \dots + \underline{A}_{Q,y} \underline{M}_{Q,y} \quad (\forall y \in V).$$

Mais en général, ces diverses fibres \mathcal{R}_y peuvent être si découplées les unes des autres lorsque $y \in U$ varie, qu'il n'est pas vrai, en général, qu'elles soient localement finiment engendrées même lorsque \mathcal{M} l'est, et ce phénomène justifie — après production d'un exemple simple — l'introduction d'un nouveau concept.

Exemple 1.7. Dans \mathbb{C}^n avec $n \geq 1$, soient une boule ouverte $B = \{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 < r^2\}$ de rayon $r > 0$, de fermeture $\overline{B} = \{|z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq r^2\}$, et soit la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_B(z) := \begin{cases} z & \text{lorsque } z \in B, \\ 0 & \text{lorsque } z \in \mathbb{C}^n \setminus B. \end{cases}$$

Si $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ désigne le faisceau des (germes de) fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n , considérons les relations engendrées en divers points $z \in \mathbb{C}^n$ par cette unique fonction :

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{1}_B) := \{f_z \in \mathcal{O}_z : f_z \underline{\mathbf{1}}_z = 0\}.$$

Alors le principe d'unicité pour les fonctions holomorphes permet de se convaincre (exercice) que :

$$\mathcal{R}_z(\mathbf{1}_B) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } z \in \overline{B}, \\ \mathcal{O}_z & \text{lorsque } z \in \mathbb{C}^n \setminus \overline{B}, \end{cases}$$

ce qui empêche (exercice) ces relations d'être localement finiment engendrées en tout point du bord $z \in \partial B = \overline{B} \setminus B$.

Définition 1.8. Un faisceau \mathcal{M} de \mathcal{A} -modules est dit *cohérent* lorsqu'il satisfait les deux conditions suivantes.

- (i) \mathcal{M} est localement finiment engendré.
- (ii) Dans tout ouvert $U \subset X$, pour tout nombre fini $Q \geq 1$ de sections :

$$M_1, \dots, M_Q \in \Gamma(U, \mathcal{M}),$$

la réunion disjointe de leurs relations germiques :

$$\coprod_{y \in U} \mathcal{R}_y(M_1, \dots, M_Q)$$

est elle aussi *localement finiment engendrée* dans U , c'est-à-dire que pour tout $x \in U$, il existe un sous-ouvert $x \in V \subset U$ et il existe un nombre fini $\kappa \geq 1$ de sections :

$$A_k = (A_{k,1}, \dots, A_{k,Q}) \in \Gamma(V, \mathcal{A}^Q) \quad (1 \leq k \leq \kappa)$$

telles que dans V :

$$\mathcal{R}_y = \mathcal{A}_y \cdot \underline{A}_{1,y} + \dots + \mathcal{A}_y \cdot \underline{A}_{\kappa,y} \quad (\forall y \in V).$$

Autrement dit, les relations germiques en divers points y près de x sont en fait engendrées d'une manière « cohérente » par de vraies sections locales de \mathcal{A}^Q définies de manière « cohérente » dans un vrai voisinage de x .

Observation 1.9. Si \mathcal{M} est un faisceau cohérent de \mathcal{A} -modules, alors tout sous-faisceau $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ localement finiment engendré est encore cohérent.

Démonstration. Il reste à vérifier que des relations germiques quelconques de \mathcal{N} sont localement finiment engendrées, mais comme elles se plongent dans celles de \mathcal{M} , cela est automatiquement vrai. \square

La proposition suivante montre qu'on pourrait, dans la Définition 1.8, requérir de manière plus générale mais en fait équivalente, que pour tout $P \geq 1$, et tous :

$$M_1, \dots, M_Q \in \Gamma(U, \mathcal{M}^P), \quad M_q = (M_{q,p})_{1 \leq p \leq P},$$

la collection des P relations germiques simultanées :

$$\left\{ (a_{1,y}, \dots, a_{Q,y}) \in (\mathcal{A}_y)^Q : 0 = a_{1,y} \underline{M}_{1,p_y} + \dots + a_{Q,y} \underline{M}_{Q,p_y}, \forall 1 \leq p \leq P \right\},$$

soit localement finiment engendré.

Proposition 1.10. Si \mathcal{M} est un faisceau cohérent de \mathcal{A} -modules, alors \mathcal{M}^N est aussi cohérent pour tout entier $N \geq 1$.

Démonstration. Au moyen de sections de $\Gamma(U, \mathcal{M}^N)$ du type $(0, \dots, M_n, \dots, 0)$ avec $1 \leq n \leq N$, on voit que \mathcal{M}^N est localement finiment engendré.

Raisonnons par récurrence sur $N \geq 2$ en supposant que les relations germiques de \mathcal{M}^n sont localement finiment engendrées pour tout $1 \leq n \leq N - 1$. Soit maintenant $U \subset X$ ouvert, soit $Q \geq 1$, et soient des sections $M_1, \dots, M_Q \in \Gamma(U, \mathcal{M}^N)$ qui comportent donc N composantes :

$$M_q = (M_{q,n})_{1 \leq n \leq N} \quad (1 \leq q \leq Q).$$

La réunion disjointe sur $y \in U$ des relations germiques :

$$\coprod_{y \in U} \mathcal{R}_y(M_1, \dots, M_Q) \subset \coprod_{y \in U} \mathcal{R}_y(M_{1,1}, \dots, M_{Q,1})$$

requiert, au sujet de germes $(a_{1,y}, \dots, a_{Q,y}) \in \mathcal{A}_y^Q$, qu'il satisfassent N équations scalaires :

$$0 = a_{1,y} \underline{M}_{1,y} + \dots + a_{Q,y} \underline{M}_{Q,y} = \left(\sum_{1 \leq q \leq Q} a_{q,y} \underline{M}_{q,n_y} \right)_{1 \leq n \leq N},$$

donc en particulier la première qui concerne seulement $\mathcal{M}^{N=1}$:

$$0 = a_{1,y} \underline{M}_{1,1_y} + \dots + a_{Q,y} \underline{M}_{Q,1_y} \quad (y \in U).$$

Fixons un point quelconque $x \in U$. Puisque \mathcal{M} est cohérent, il existe un sous-ouvert $x \in V \subset U$, il existe $\kappa \geq 1$, et il existe $A_1, \dots, A_\kappa \in \Gamma(V, \mathcal{A}^Q)$ qui engendrent toutes ces relations de manière cohérente dans V :

$$(a_{1,y}, \dots, a_{Q,y}) \in \sum_{1 \leq k \leq \kappa} \mathcal{A}_y \cdot \left(\underline{A_{k,1}_y}, \dots, \underline{A_{k,Q}_y} \right),$$

à savoir il existe des germes $b_{1,y}, \dots, b_{\kappa,y} \in \mathcal{A}_y$ tels que :

$$a_{q,y} = \sum_{1 \leq k \leq \kappa} b_{k,y} \underline{A_{k,q}_y} \quad (1 \leq q \leq Q, y \in V).$$

Puisque le germe $a_y \in \mathcal{A}_y^Q$ satisfait déjà par construction la première équation, il lui reste à satisfaire les $N - 1$ équations restantes :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq q \leq Q} a_{q,y} \underline{M_{q,n}_y} \\ &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{1 \leq k \leq \kappa} b_{k,y} \underline{A_{k,q}_y} \underline{M_{q,n}_y} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq \kappa} b_{k,y} \left(\underbrace{\sum_{1 \leq q \leq Q} \underline{A_{k,q}_y} \underline{M_{q,n}_y}}_{=: \underline{N_{k,n}_y}} \right) \end{aligned} \quad (2 \leq n \leq N),$$

ce qui fait apparaître certaines sections $N_1, \dots, N_\kappa \in \Gamma(V, \mathcal{M}^{N-1})$.

Comme ces $N - 1$ équations constituent des relations germiques pour \mathcal{M}^{N-1} , l'hypothèse de récurrence s'applique pour produire un sous-ouvert :

$$x \in W \subset V \subset U,$$

ainsi qu'un nombre fini $L \geq 1$ de sections $B_1, \dots, B_L \in \Gamma(W, \mathcal{A}^\kappa)$ telles que, au moyen de certains germes $c_{1,y}, \dots, c_{L,y} \in \mathcal{A}_y$, on ait :

$$b_{k,y} = \sum_{1 \leq \ell \leq L} c_{\ell,y} \cdot \underline{B_{\ell,k}_y} \quad (1 \leq k \leq \kappa, y \in W).$$

Ceci conduit à effectuer un remplacement pour obtenir, toujours avec $y \in W$:

$$\begin{aligned} a_{q,y} &= \sum_{1 \leq k \leq \kappa} b_{k,y} \underline{A_{k,q}_y} \\ &= \sum_{1 \leq k \leq \kappa} \sum_{1 \leq \ell \leq L} c_{\ell,y} \underline{B_{\ell,k}_y} \underline{A_{k,q}_y} \\ &= \sum_{1 \leq \ell \leq L} c_{\ell,y} \left(\underbrace{\sum_{1 \leq k \leq \kappa} \underline{B_{\ell,k}_y} \underline{A_{k,q}_y}}_{=: \underline{C_{\ell,q}_y}} \right) \end{aligned} \quad (1 \leq q \leq Q),$$

ce qui signifie que les sections $C_1, \dots, C_L \in \Gamma(W, \mathcal{A}^Q)$ ainsi définies :

$$(a_{1,y}, \dots, a_{Q,y}) = \sum_{1 \leq \ell \leq L} c_{\ell,y} \left(\underline{C_{\ell,1}_y}, \dots, \underline{C_{\ell,Q}_y} \right),$$

engendrent les relations de manière cohérente sur W . □

Proposition 1.11. *Si deux sous-faisceaux $\mathcal{R}, \mathcal{S} \subset \mathcal{M}$ d'un faisceau cohérent de \mathcal{A} -modules sont cohérents, alors leur intersection $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est elle aussi cohérente.*

Démonstration. Pour établir que $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ est localement finiment engendré, soit un point quelconque $x \in X$ et soit $U \ni x$ un voisinage ouvert dans lequel il existe des sections :

$$R_1, \dots, R_K \in \Gamma(U, \mathcal{R}) \quad \text{et} \quad S_1, \dots, S_L \in \Gamma(U, \mathcal{S})$$

qui, en tout point $y \in U$, engendrent :

$$\mathcal{R}_y = \sum_{1 \leq k \leq K} \mathcal{A}_y \cdot \underline{R_{k,y}} \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_y = \sum_{1 \leq \ell \leq L} \mathcal{A}_y \cdot \underline{S_{\ell,y}}.$$

Alors des germes $t_y \in \mathcal{R}_y \cap \mathcal{S}_y$ appartiennent à l'intersection si et seulement si :

$$\sum_{1 \leq k \leq K} a_{k,y} \underline{R_{k,y}} = t_y = \sum_{1 \leq \ell \leq L} b_{\ell,y} \underline{S_{\ell,y}},$$

pour certains $a_{k,y}, b_{\ell,y} \in \mathcal{A}_y$.

Or ces égalités peuvent être ré-interprétées comme faisceau de relations :

$$0 = \sum_{1 \leq k \leq K} a_{k,y} \underline{R_{k,y}} + \sum_{1 \leq \ell \leq L} b_{\ell,y} (-\underline{S_{\ell,y}})$$

entre $K + L$ sections du faisceau \mathcal{M} . Grâce à la cohérence de \mathcal{M} , sur un sous-ouvert $x \in V \subset U$, il existe un nombre fini $J \geq 1$ de sections :

$$(A_{j,1}, \dots, A_{j,K}, B_{j,1}, \dots, B_{j,L}) \in \Gamma(V, \mathcal{A}^{K+L}) \quad (1 \leq j \leq J)$$

dont les germes engendrent ces relations en tout point $y \in V$:

$$(a_{1,y}, \dots, a_{K,y}, b_{1,y}, \dots, b_{L,y}) \in \sum_{1 \leq j \leq J} \mathcal{A}_y \cdot \left(\underline{A_{j,1,y}}, \dots, \underline{A_{j,K,y}}, \underline{B_{j,1,y}}, \dots, \underline{B_{j,L,y}} \right),$$

et ceci offre (exercice mental) les deux représentations :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_y \cap \mathcal{S}_y &= \sum_{1 \leq j \leq J} \mathcal{A}_y \cdot \left(\sum_{1 \leq k \leq K} \underline{A_{j,k} R_{k,y}} \right) \\ &= \sum_{1 \leq j \leq J} \mathcal{A}_y \cdot \left(\sum_{1 \leq \ell \leq L} \underline{B_{j,\ell} S_{\ell,y}} \right), \end{aligned}$$

dont l'une seule suffit à exhiber l'engendrement fini local de $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$.

Pour ce qui est des faisceaux de relations de $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$, l'Observation 1.9 a déjà fait comprendre qu'ils sont alors automatiquement localement finiment engendrés. \square

2. Faisceaux analytiques cohérents

Définition 2.1. Un faisceau \mathcal{M} de \mathcal{A} -modules sur un espace topologique X est dit *localement libre* lorsqu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que tout point $x \in X$ a un voisinage ouvert $x \in U \subset X$ dans lequel :

$$\mathcal{M}|_U \cong (\mathcal{A}|_U)^r.$$

Un cas spécial mérite attention, lorsque X est une variété complexe et $\mathcal{A} = \mathcal{O}_X$ est le faisceau des germes de fonctions holomorphes sur X . Tout faisceau localement libre est alors localement isomorphe à $(\mathcal{O}_X)^r$.

Théorème 2.2. [Oka] *Tout faisceau localement libre de \mathcal{O}_X -modules sur une variété complexe X est cohérent.*

Démonstration. En effet, $X \cong \mathbb{C}^n$ localement avec $n = \dim X$, donc $\mathcal{O}_X \cong \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}$ est cohérent d'après le théorème standard d'Oka, puis la Proposition 1.10 donne la cohérence de $(\mathcal{O}_X)^r$. \square

3. Exercices

Exercice 1. Comme dans l'Exemple 1.7, soit $B \subset \mathbb{C}^n$ une boule ouverte de rayon $r > 0$, et soit $\chi: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction \mathcal{C}^∞ telle que $\chi > 0$ sur B tandis que $\chi \equiv 0$ dans le complémentaire $\mathbb{C}^n \setminus B$. En divers points $z \in \mathbb{C}^n$, on regarde :

$$\mathcal{R}_z := \{(f_z, g_z) \in \mathcal{O}_z^2 : 0 = f_z \chi_z + g_z (1 - \chi)_z\}.$$

- (a) Déterminer explicitement \mathcal{R}_z en fonction de la position de z .
- (b) Discuter les cas où \mathcal{R}_z est, ou n'est pas, finiment engendré.

Exercice 2. EE

Théorème de préparation de Weierstrass et théorème de division de Stickelberger

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Théorème de préparation de Weierstrass

Notre premier objectif va être d'établir une représentation locale «pseudo-polynomiale» de toute fonction holomorphe de plusieurs variables complexes, à multiplication près par une fonction ne s'annulant nulle part. Comme dans la plupart des manuels, nous suivrons une démonstration due à Siegel, la plus limpide et transparente qui soit, sachant que Siegel a écrit un bref article en 1968 dans lequel il compare sa preuve simplifiée à celles qui la précèdent pour vanter la supériorité de la sienne !

Auparavant, deux rappels de théorie des fonctions d'une variable complexe s'imposent.

Théorème 1.1. [de Rouché] *Si deux fonctions $f, g \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_{\overline{\Delta}})$ holomorphes dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{\overline{\Delta}}$ d'un disque fermé $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$ d'intérieur $\Delta \neq \emptyset$ non vide satisfont sur son bord :*

$$|f(z)| > |g(z)| \quad (\forall z \in \partial\Delta),$$

alors f et $f + g$ ont même nombre de zéros dans Δ , comptés avec multiplicité. □

Pour abrégé, on convient de noter $\mathcal{O}(F)$ l'espace des fonctions holomorphes dans un certain voisinage ouvert d'un sous-ensemble fermé $F \subset \mathbb{C}$, par exemple $F = \overline{\Delta}$. On en déduit l'application utile suivante, laissée en Exercice 1.

Corollaire 1.2. *Si une famille de fonctions holomorphes $f_t \in \mathcal{O}(\overline{\Delta})$ dépendant continûment d'un paramètre $t \in [0, 1]$ n'a jamais de zéros sur $\partial\Delta$, alors le nombre de zéros de chaque f_t dans Δ est constant, quel que soit $t \in [0, 1]$.* □

L'énoncé suivant, interprété avec $k = 0$, compte le nombre de zéros dans un disque.

Théorème 1.3. *Si une fonction $f \in \mathcal{O}(\mathcal{V}_{\overline{\Delta}})$ holomorphe dans un voisinage ouvert $\mathcal{V}_{\overline{\Delta}}$ d'un disque fermé $\overline{\Delta} \subset \mathbb{C}$ d'intérieur $\Delta \neq \emptyset$ n'a aucun zéro sur le cercle $\partial\Delta$, et si ses zéros dans Δ , comptés avec multiplicité, s'écrivent :*

$$a_1, \dots, a_M \in \Delta,$$

alors pour tout entier $k \geq 0$:

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} \zeta^k d\zeta = a_1^k + \dots + a_M^k. \quad \square$$

Soit donc maintenant $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe non identiquement nulle définie dans un domaine $U \ni 0$ contenant l'origine de \mathbb{C}^n , avec $n \geq 1$. Elle se développe comme une série entière convergente centrée en 0 :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(z),$$

dans laquelle, pour les besoins qui suivront, on peut regrouper ensemble *tous* les termes homogènes qui sont de degrés égaux à un entier $k \geq 0$ quelconque fixé :

$$f^{(k)}(z) := \sum_{a_1 + \dots + a_n = k} \frac{1}{a_1! \dots a_n!} \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} f}{\partial z_1^{a_1} \dots \partial z_n^{a_n}}(0) (z_1)^{a_1} \dots (z_n)^{a_n}.$$

Lemme 1.4. *Il existe un sous-ensemble dense de vecteurs non nuls $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que la fonction d'une variable complexe :*

$$\zeta \mapsto f(\zeta v_1, \dots, \zeta v_n)$$

est non identiquement nulle dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Comme $f \not\equiv 0$, il existe un $k_0 \geq 0$ tel que le polynôme homogène correspondant $f^{(k_0)} \not\equiv 0$ est non nul. Alors puisque :

$$f(\zeta v) = \sum_{k=0}^{\infty} \zeta^k f^{(k)}(v),$$

il suffit de trouver un vecteur v satisfaisant $f^{(k_0)}(v) \neq 0$, ce qui est possible sur un ouvert *dense* de $\mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ — sinon, si $f^{(k_0)}(v)$ s'annulait sur un ouvert non vide, le principe d'unicité pour les polynômes holomorphes entraînerait $f^{(k_0)}(v) \equiv 0$. \square

Définition 1.5. L'ordre en 0 d'une fonction holomorphe $f \not\equiv 0$ définie dans un voisinage de l'origine est :

$$\text{ord}_0(f) := \min \{k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(z) \not\equiv 0\}.$$

Lorsque $f \equiv 0$, on convient que f est d'ordre ∞ .

L'ordre en un point quelconque $z_0 \in U$ d'une fonction holomorphe définie dans un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ se détermine en utilisant les coordonnées recentrées $z - z_0$.

Ainsi, l'ordre est ≥ 1 lorsque, et seulement lorsque, la fonction s'annule au point considéré, situation qui focalisera notre intérêt, puisque nous visons à décrire et à étudier l'ensemble des zéros :

$$Z_f := \{z \in U : f(z) = 0\},$$

localement au voisinage de $0 \in Z_f$. En tout cas, avec :

$$k_0 := \text{ord}_0(f),$$

le développement commence par :

$$f(z) = \sum_{k \geq k_0} f^{(k)}(z).$$

Pour la plupart des vecteurs $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$, on a alors grâce au lemme qui précède $f^{(k_0)}(v) \neq 0$, mais il est possible que pour certains v , on ait $f^{(k_0)}(v) = 0$ tandis que pour un entier minimal $k_1 > k_0$:

$$f^{(k_1)}(v) \neq 0.$$

En fait, le prochain théorème — énoncé fondamental de la théorie — va être vrai pour tous les choix d'un vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que l'ordre en 0 de la restriction de f à la droite complexe $\mathbb{C}v$:

$$d := \text{ord}_0(\zeta \mapsto f(\zeta v)) < \infty$$

est fini, avec toujours $d \geq k_0 = \text{ord}_0(f)$.

Après un changement linéaire de coordonnées complexes sur \mathbb{C}^n , on peut supposer que :

$$v = (0, \dots, 0, 1),$$

ce qui signifie que :

$$f(0, \dots, 0, z_n) = (z_n)^d (\alpha + O(z_n)) \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Sur \mathbb{C}^n , soit $z = (z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) =: (z', z_n)$ et soit la norme :

$$|z| := \max_{1 \leq i \leq n} |z_i|, \quad |z'| := \max_{1 \leq j \leq n-1} |z_j|.$$

Le *Vorbereitungssatz* figure pour la première fois dans le recueil publié en 1866 par Weierstraß sous le titre « *Abhandlungen aus der Functionenlehre* ».

Théorème 1.6. [de préparation de Weierstrass] Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^n$, avec $n \geq 1$, telle que :

$$f(0, \dots, 0, z_n) \neq 0,$$

et soit :

$$d := \text{ord}_0(z_n \mapsto f(0, \dots, 0, z_n)) \geq 1.$$

Alors il existe un sous-voisinage ouvert $0 \in \Delta \subset U$ avec $2\bar{\Delta} \subset U$ de la forme polydisque-produit :

$$\Delta = \{|z'| < r'\} \times \{|z_n| < r_n\} \quad (0 < r', 0 < r_n),$$

il existe une unique fonction holomorphe $u \in \mathcal{O}(\Delta)$ ne s'annulant $u(z) \neq 0$ en aucun point $z \in \Delta$, et il existe des fonctions-coefficients uniques $a_1(z'), \dots, a_d(z')$ holomorphes pour $|z'| < r'$ avec $a_1(0') = \dots = a_d(0') = 0$ telles que :

$$f(z) = u(z) \cdot (z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z')) \quad (\forall z \in \Delta).$$

Puisque u ne s'annule jamais, il en découle le

Corollaire 1.7. Dans le polydisque local $0 \in \Delta \subset U$, l'ensemble des zéros de f est représenté comme ensemble des zéros d'un pseudo-polynôme en z_n à coefficients holomorphes en z' :

$$\{z \in \Delta : f(z) = 0\} = \{(z', z_n) : z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z') = 0\}. \quad \square$$

Lorsque $d = 0$, i.e. lorsque $f(0) \neq 0$, le pseudo-polynôme n'existe pas, $f = u$ est une unité de $\mathcal{O}(\Delta)$, à savoir est une fonction holomorphe inversible, puisque $\frac{1}{f} = \frac{1}{u}$ est holomorphe dans V .

On notera :

$$P(z'; z_n) := z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z').$$

Corollaire 1.8. Sous les hypothèses du Théorème 1.6 de préparation, si le vecteur $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ est choisi tel que :

$$d = \text{ord}_0(f),$$

puis redressé en $v = (0, \dots, 0, 1)$, alors les fonctions-coefficients $a_k(z')$ satisfont :

$$a_k(z') = O(|z'|^k) \quad (1 \leq k \leq d).$$

Démonstration. Puisque $u(z)$ est une unité, il faut que :

$$d = \text{ord}_0(P).$$

En restriction à $\{z_n = 0\}$, on déduit :

$$d \geq \text{ord}_0(z' \mapsto P(z'; 0)),$$

à savoir $a_d(z') = O(|z'|^d)$.

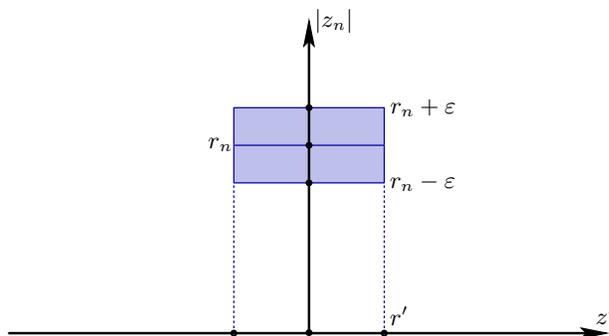
Ensuite, on soustrait $P \mapsto P - a_d$, on divise par z_n , on pose $z_n = 0$, on trouve $a_{d-1}(z') = O(|z'|^{d-1})$, et ainsi de suite. \square

Démonstration du Théorème 1.6. Il existe $r_n > 0$ assez petit tel que $f(0, \dots, 0, z_n) \neq 0$ pour $0 < |z_n| \leq r_n$. Par continuité de f et par compacité du cercle contenu dans l'axe des z_n :

$$\{z' = 0'\} \times \{|z_n| = r_n\},$$

il existe $r' > 0$ et $0 < \varepsilon \ll r_n$ assez petits pour que :

$$(1.9) \quad f(z', z_n) \neq 0 \quad \text{pour tous } |z'| \leq r', \quad r_n - \varepsilon \leq |z_n| \leq r_n + \varepsilon.$$



De plus, on peut supposer que :

$$\{|z'| \leq 2r'\} \times \{|z_n| \leq 2r_n\} \subset U.$$

Maintenant, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, introduisons les intégrales :

$$N_k(z') := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{1}{f(z', \zeta_n)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta_n) \zeta_n^k d\zeta_n.$$

Puisque leurs intégrandes, jamais singuliers sur le cercle d'intégration, dépendent holomorphiquement du paramètre z' , elles sont holomorphes dans un voisinage ouvert de $\{|z'| \leq r'\}$. Pour $k = 0$, lorsqu'on fixe z' , le Théorème 1.3 dit que la fonction $N_0(z')$ compte le nombre de zéros de $z_n \mapsto f(z', z_n)$ dans le disque ouvert $\{|z_n| < r_n\}$, aucun zéro ne se situant sur le bord.

Assertion 1.10. [cruciale] Pour tout $|z'| \leq r'$, le nombre de zéros de $z_n \mapsto f(z', z_n)$ dans le disque $\{|z_n| < r_n\}$ est constant égal à d .

Démonstration. En effet, la non-annulation (1.9) sur les cercles $\{z'\} \times \{|z_n| = r_n\}$ garantit que le Corollaire 1.2 s'applique, sachant que pour $z' = 0$, ce nombre de zéros est bien égal à d . \square

Nous pouvons donc désigner ces d zéros, qui dépendent de z' , par :

$$w_{1,z'}, \dots, w_{d,z'},$$

sachant que cette dépendance est juste une dépendance ensembliste, elle n'est en général pas holomorphe par rapport à z' . Par construction, on a :

$$w_{1,0'} = \dots = w_{d,0'} = 0,$$

et par (1.9), on sait que ces racines ne s'échappent pas trop loin :

$$|w_{1,z'}| < r_n - \varepsilon, \dots, |w_{d,z'}| < r_n - \varepsilon.$$

Maintenant, le Théorème 1.3 calcule les intégrales en question :

$$N_k(z') = (w_{1,z'})^k + \dots + (w_{d,z'})^k.$$

Or, comme le rappelle l'Exercice 4, les fonctions symétriques élémentaires des racines :

$$\sigma_\ell(z') := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq d} w_{i_1,z'} \dots w_{i_\ell,z'} \quad (1 \leq \ell \leq d),$$

peuvent être exprimées, au moyen des *Formules de Waring inverses*, comme polynômes à coefficients rationnels en les sommes de Newton $N_1(z'), \dots, N_d(z')$.

Par conséquent, puisque nous savons que les dépendances $z' \mapsto N_k(z')$ sont *holomorphes*, bien que chaque racine $w_{i,z'}$ ne dépende en général *pas* holomorphiquement de z' , nous obtenons le point-clé qui fait marcher toute la démonstration :

Lemme 1.11. *Les fonctions symétriques élémentaires $\sigma_1(z'), \dots, \sigma_d(z')$ des racines $w_{1,z'}, \dots, w_{d,z'}$ dépendent holomorphiquement de z' dans un voisinage ouvert de $\{|z'| \leq r'\}$. \square*

Grâce à cela, nous pouvons introduire le pseudo-polynôme :

$$\begin{aligned} P(z'; z_n) &:= z_n^d - \sigma_1(z') z_n^{d-1} + \dots + (-1)^d \sigma_d(z') \\ &= (z_n - w_{1,z'}) \dots (z_n - w_{d,z'}), \end{aligned}$$

qui est donc polynomial en z_n , et dont les coefficients ne sont en général pas des polynômes en z' , mais sont quand même des fonctions *holomorphes* de z' .

Pour $|z'| \leq r'$ fixé, $z_n \mapsto f(z', z_n)$ et $z_n \mapsto P(z'; z_n)$ ne s'annulent jamais dans l'anneau $\{r_n - \varepsilon \leq |z_n| \leq r_n + \varepsilon\}$, et possèdent exactement les mêmes racines comptées avec multiplicité dans le disque $\{|z_n| < r_n\}$. Grâce au théorème d'élimination des singularités, les deux fonctions de la variable z_n :

$$u_{z'}(z_n) := \frac{f(z', z_n)}{P(z'; z_n)} \quad \text{et} \quad v_{z'}(z_n) := \frac{P(z'; z_n)}{f(z', z_n)}$$

sont alors holomorphes pour $|z_n| \leq r_n + \varepsilon$. Cependant, lorsque (z', z_n) varie librement, il n'est pas clair *a priori* que ces deux quotients soient continus.

Heureusement, toujours à z' fixé, la formule de Cauchy à une variable les exprime comme deux intégrales :

$$u_{z'}(z_n) = \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{f(z', \zeta_n)}{P(z'; z_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}}_{=: u(z', z_n)} \quad \text{et} \quad v_{z'}(z_n) = \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{P(z'; \zeta_n)}{f(z', z_n)} \frac{d\zeta_n}{\zeta_n - z_n}}_{=: v(z', z_n)}.$$

Or ces intégrales dépendent holomorphiquement de $|z'| < r'$, et aussi de $|z_n| < r_n$, donc elles sont holomorphes par rapport à toutes les variables, et définissent deux fonctions holomorphes $u(z', z_n)$ et $v(z', z_n)$ dans un voisinage ouvert du produit $\{|z'| \leq r'\} \times \{|z_n| \leq r_n\}$.

Mais comme dans l'ouvert produit d'un anneau :

$$\{|z'| < r'\} \times \{r_n - \varepsilon < z_n < r_n\},$$

où les deux dénominateurs P et f de $u_{z'}(z_n)$ et de $v_{z'}(z_n)$ ne s'annulent jamais, on a par construction :

$$u(z', z_n) \cdot v(z', z_n) \equiv u_{z'}(z_n) \cdot v_{z'}(z_n) \equiv \frac{f(z', z_n)}{P(z'; z_n)} \cdot \frac{P(z'; z_n)}{f(z', z_n)} \equiv 1,$$

le principe d'identité pour les fonctions holomorphes donne dans le polydisque entier $\{|z'| < r'\} \times \{|z_n| < r_n\}$:

$$u(z', z_n) \cdot v(z', z_n) \equiv 1.$$

Ainsi, nous avons établi que la fonction :

$$u(z', z_n) = u_{z'}(z_n) = \frac{f(z', z_n)}{P(z'; z_n)}$$

est holomorphe dans $\{|z'| < r'\} \times \{|z_n| < r_n\}$ et ne s'annule jamais, à savoir est une unité, ce qui termine la démonstration d'existence de P et de u .

Concernant l'unicité, supposons que :

$$f = u \cdot P = \tilde{u} \cdot \tilde{P},$$

avec deux unités u et \tilde{u} , et avec deux pseudo-polynômes :

$$P(z'; z_n) = z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z') \quad \text{et} \quad \tilde{P}(z'; z_n) = z_n^d + \tilde{a}_1(z') z_n^{d-1} + \dots + \tilde{a}_d(z').$$

Mais comme u et \tilde{u} ne s'annulent jamais, pour tout $|z'| < r'$ fixé, les deux polynômes $z_n \mapsto P(z'; z_n)$ et $z_n \mapsto \tilde{P}(z'; z_n)$ doivent avoir les mêmes racines que $z_n \mapsto f(z', z_n)$, ce qui force leurs coefficients $a_i = \tilde{a}_i$ à coïncider, d'où $P = \tilde{P}$, puis $u = \tilde{u}$. \square

Pour le cas $n = 2$ qui ne diffère que très légèrement du cas $n \geq 2$ quelconque, on trouve les éléments principaux de la démonstration qui précède, dus à Simart et encore améliorés par Siegel, dans le *Traité d'Analyse* de Picard (tome II, 1^{ère} édition, 1893).

Fait remarquable, le Théorème des fonctions implicites dans la catégorie des fonctions holomorphes, classiquement démontré à l'aide d'un théorème du point fixe par itérations « à la Picard », ou de séries majorantes « à la Cauchy », se déduit simplement du Théorème 1.6 de préparation de Weierstrass, avec le bonus d'offrir une représentation intégrale de la solution.

Corollaire 1.12. Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe définie dans un voisinage ouvert $U \ni 0$ de l'origine de \mathbb{C}^n , avec $n \geq 2$, telle que :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial z_n}(0) \neq 0.$$

Alors il existe un sous-voisinage ouvert $0 \subset \Delta \subset U$ de la forme polydisque-produit :

$$\Delta = \Delta' \times \Delta_n = \{|z'| < r'\} \times \{|z_n| < r_n\} \quad (0 < r', 0 < r_n),$$

et il existe une fonction holomorphe $\varphi: \Delta' \rightarrow \mathbb{C}$ tels que dans Δ :

$$0 = f(z', z_n) \iff z_n = \varphi(z').$$

De plus :

$$\varphi(z') = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n} \frac{1}{f(z', \zeta_n)} \frac{\partial f}{\partial z_n}(z', \zeta_n) \zeta_n d\zeta_n.$$

Démonstration. Il s'agit du cas $d = 1$ du Théorème 1.6, qui donne :

$$z_n + a_1(z') = 0,$$

d'où $\varphi(z') := -a_1(z')$, et la formule intégrale apparaît dans la démonstration. \square

2. Théorème de division de Stickelberger

Définition 2.1. On appelle *polynôme de Weierstrass* en z_n tout polynôme unitaire :

$$z_n^e + b_1(z') z_n^{e-1} + \cdots + b_e(z'),$$

à coefficients holomorphes dans un voisinage ouvert $0' \in V' \subset \mathbb{C}^{n-1} \ni z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ dont les coefficients s'annulent à l'origine :

$$0 = b_1(0') = \cdots = b_e(0').$$

Dans un article de Stickelberger, on trouve une formulation plus générale (voir l'Exercice 6) du théorème de préparation de Weierstrass sous une forme très analogue à la division euclidienne dans l'algèbre de polynômes $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$.

Théorème 2.2. [Théorème de division de Stickelberger] Soit $f \in \mathcal{O}(U)$ une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert U de $0 \in \mathbb{C}^n$, avec $n \geq 1$, telle que :

$$f(0', z_n) \neq 0,$$

et soit :

$$d := \text{ord}_0(z_n \mapsto f(0', z_n)).$$

Alors il existe un sous-voisinage ouvert $0 \in \Delta \subset U$ avec $2\bar{\Delta} \subset U$ de la forme polydisque-produit :

$$\Delta = \Delta' \times \Delta_n = \{|z'| < r'\} \times \{|z_n| < r_n\} \quad (0 < r', 0 < r_n),$$

tel que toute fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(U)$ est divisible par f dans Δ au sens où :

$$g(z) = q(z) f(z) + R(z) \quad (\forall z \in \Delta),$$

avec une unique fonction-quotient $q \in \mathcal{O}(\bar{\Delta})$, et une unique fonction-reste pseudo-polynomiale de degré $\leq d - 1$:

$$R(z) = R(z'; z_n) = c_0(z') (z_n)^{d-1} + c_1(z') (z_n)^{d-2} + \cdots + c_{d-1}(z'),$$

à coefficients $c_j \in \mathcal{O}(\bar{\Delta}')$.

De plus, il existe une constante $\kappa > 0$ telle que :

$$\max_{\bar{\Delta}} |q| \leq \kappa \max_{\bar{\Delta}} |g| \quad \text{et} \quad \max_{\bar{\Delta}} |R| \leq \kappa \max_{\bar{\Delta}} |g| \quad (\forall g \in \mathcal{O}(U)).$$

Démonstration. Grâce au Théorème 1.6 de préparation, on a $f(z) = u(z) \cdot P(z'; z_n)$, et comme l'unité $u(z)$ peut être absorbée dans $q(z)$ et dans $R(z)$, il suffit d'établir la division lorsque $f(z) = P(z'; z_n)$ est un polynôme de Weierstrass de degré d , dans un polydisque :

$$\{|z'| < 2r'\} \times \{|z_n| < 2r_n\} \subset U.$$

L'unicité est aisée, puisque en partant de :

$$g = qP + R = \tilde{q}P + \tilde{R},$$

une simple soustraction conduit à :

$$(q - \tilde{q}) P = - (R - \tilde{R}),$$

donc pour tout z' fixé, les d racines de $z_n \mapsto P(z'; z_n)$ doivent être racines du pseudo-polynôme $R(z'; z_n) - \tilde{R}(z'; z_n)$ de degré $\leq d - 1$, ce qui force $R = \tilde{R}$, puis $q = \tilde{q}$.

Afin d'établir maintenant l'existence des deux fonctions q et R , choisissons $r_n > 0$, $r' > 0$ et $0 < \varepsilon \ll r_n$ satisfaisant de manière analogue à (1.9) :

$$P(z'; z_n) \neq 0 \quad \text{pour tous } |z'| \leq r', \quad r_n - \varepsilon \leq |z_n| \leq r_n + \varepsilon,$$

et introduisons la première fonction :

$$q(z', z_n) := \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{P(z'; \zeta_n) (\zeta_n - z_n)} d\zeta_n \quad (|z'| < r', |z_n| < r_n).$$

Par holomorphie de son intégrande, cette intégrale définit $q(z)$ comme fonction holomorphe dans un voisinage ouvert du polydisque $\bar{\Delta}$.

Ensuite, introduisons la deuxième fonction :

$$R := g - q \cdot P,$$

qui est aussi clairement holomorphe autour de $\bar{\Delta}$, mais il y a mieux, en utilisant le fait que g satisfait la formule de Cauchy sur les disques parallèles à l'axe des z_n , cette fonction R est donnée par une expression :

$$\begin{aligned} R(z', z_n) &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n - \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{P(z'; \zeta_n) (\zeta_n - z_n)} d\zeta_n \cdot P(z'; z_n) \\ &= \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{P(z'; \zeta_n)} \left[\frac{P(z'; \zeta_n) - P(z'; z_n)}{\zeta_n - z_n} \right] d\zeta_n, \end{aligned}$$

dans laquelle la singularité $\frac{1}{\zeta_n - z_n}$ va disparaître.

En effet, si nous revenons à l'expression du polynôme de Weierstrass, nous pouvons éliminer algébriquement ce dénominateur après avoir posé $a_0(z') := 1$ pour harmoniser les calculs :

$$\begin{aligned} \frac{P(z'; \zeta_n) - P(z'; z_n)}{\zeta_n - z_n} &= \frac{a_0(z') \zeta_n^d + a_1(z') \zeta_n^{d-1} + \dots + a_d(z') - a_0(z') z_n^d - a_1(z') z_n^{d-1} - \dots - a_d(z')}{\zeta_n - z_n} \\ &= a_0(z') \frac{\zeta_n^d - z_n^d}{\zeta_n - z_n} + a_1(z') \frac{\zeta_n^{d-1} - z_n^{d-1}}{\zeta_n - z_n} + \dots + a_{d-1}(z') \frac{\zeta_n - z_n}{\zeta_n - z_n} \\ &= a_0(z') (\zeta_n^{d-1} + \dots + z_n^{d-1}) + a_1(z') (\zeta_n^{d-2} + \dots + z_n^{d-2}) + \dots + a_{d-1}(z') \\ &= z_n^{d-1} \underbrace{a_0(z')}_{=: C_0(z'; \zeta_n)} + z_n^{d-2} \underbrace{(a_0(z') \zeta_n + a_1(z'))}_{=: C_1(z'; \zeta_n)} + \dots + z_n^0 \underbrace{(a_0(z') \zeta_n^{d-1} + \dots + a_{d-1}(z'))}_{=: C_{d-1}(z'; \zeta_n)}, \end{aligned}$$

puis constater, après réorganisation, que le résultat est polynomial de degré $\leq d - 1$ en z_n , ce qui, après intégration, éclaire le caractère pseudo-polynomial annoncé de :

$$R(z'; z_n) = z_n^{d-1} \underbrace{\frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{P(z'; \zeta_n)} C_0(z'; \zeta_n) d\zeta_n}_{=: c_0(z')} + \dots + \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon} \frac{g(z', \zeta_n)}{P(z'; \zeta_n)} C_{d-1}(z'; \zeta_n) d\zeta_n, \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=: c_{d-1}(z')}$$

les coefficients $c_0(z'), \dots, c_{d-1}(z')$ étant bien holomorphes dans un voisinage de $\{|z'| \leq r'\}$.

Pour terminer, le théorème de Cauchy de déformation continue de contours montre que l'on peut remplacer les intégrales $\int_{|\zeta_n|=r_n+\varepsilon}$ dans la formule vue juste à l'instant qui donne $R(z'; z_n)$ par les intégrales $\int_{|\zeta_n|=r_n}$. En effectuant des majorations (exercice), on en déduit que :

$$\max_{\Delta} |R| \leq \kappa_1 \max_{\Delta} |g| \quad (\forall g \in \mathcal{O}(U)),$$

où la constante $\kappa_1 > 0$ dépend des valeurs maximales des coefficients $a_1(z'), \dots, a_{d-1}(z')$ sur $\{|z'| \leq r'\}$ ainsi que de :

$$\kappa_2 := \max_{\substack{|z'| \leq r' \\ |\zeta_n|=r_n}} \frac{1}{|P(z'; \zeta_n)|}.$$

Enfin, en revenant à l'expression $q = \frac{g-R}{P}$ et en appliquant le principe du maximum sur les disques verticaux à $z_n \mapsto q(z', z_n)$, on majore :

$$\max_{\Delta} |q| = \max_{\substack{|z'| \leq r' \\ |z_n|=r_n}} |q(z', z_n)| \leq \kappa_2 \max_{\Delta} |g| + \kappa_2 \kappa_1 \max_{\Delta} |g| \quad (\forall g \in \mathcal{O}(U)),$$

ce qui conduit à la constante $\kappa := \max(\kappa_1, \kappa_2 + \kappa_2 \kappa_1)$ de l'énoncé, et conclut. \square

3. Exercices

Exercice 1. Démontrer le Corollaire 1 directement à partir du Théorème 1.1 de Rouché, ou bien à partir du Théorème 1.3 comme suit. Pour $0 \leq t \leq 1$, soit le nombre de zéros de f_t dans Δ :

$$N_t := \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\Delta} \frac{f_t'(\zeta)}{f_t(\zeta)} d\zeta.$$

On introduit le sous-ensemble de $[0, 1]$:

$$J := \{t \in [0, 1] : N_s = N_0, \forall s \leq t\}.$$

- (a) Vérifier que $J \neq \emptyset$ et montrer que J est ouvert.
 (b) Montrer que J est fermé, puis conclure.

Exercice 2. (a) Soit un domaine $0 \subset U \subset \mathbb{C}^n$ contenant l'origine, avec $n \geq 1$, et soit une famille dénombrable $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions holomorphes $f_k \in \mathcal{O}(U)$ toutes non identiquement nulles. Montrer qu'il existe un ensemble dense de vecteurs $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tels que les fonctions d'une variable complexe $\zeta \mapsto f_k(\zeta v)$ sont toutes non identiquement nulles dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}$.

(b) Montrer qu'il peut y avoir des vecteurs exceptionnels $v \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ pour lesquels certaines (voire toutes) restrictions $f_k(\zeta v) \equiv 0$ sont identiquement nulles.

Exercice 3. [Formules de Waring] Sur le corps de base \mathbb{Q} , soient $n \geq 1$ indéterminées x_1, \dots, x_n , soit X une autre indéterminée et soit le développement du polynôme-produit :

$$(X - x_1) \cdots (X - x_n) = X^n - \sigma_1(x) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n(x),$$

dans lequel les *fonctions symétriques élémentaires* $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ de $x = (x_1, \dots, x_n)$ valent :

$$\sigma_\ell(x) := \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n} x_{i_1} \cdots x_{i_\ell} \quad (1 \leq \ell \leq n).$$

Par ailleurs, pour tout $k \geq 0$ entier, la k -ème *somme de Newton* est définie par :

$$N_k(x) := x_1^k + \cdots + x_n^k.$$

L'objectif de cet exercice est d'obtenir les formules *closes*, dues à Waring :

$$N_k = k \cdot \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_n=k \\ i_1 \geq 0, i_2 \geq 0, \dots, i_n \geq 0}} \frac{(-1)^{i_2+2i_3+\dots+(n-1)i_n}}{i_1+i_2+\dots+i_n} \frac{(i_1+i_2+\dots+i_n)!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} (\sigma_1)^{i_1} (\sigma_2)^{i_2} \cdots (\sigma_n)^{i_n}.$$

On commence par produire des formules *inductives ouvertes*, insuffisantes, puis on introduit des développements en séries formelles pour *fermer directement* les récurrences sous-jacentes.

(a) Vérifier directement que l'on a :

$$\begin{aligned} N_1 &= \sigma_1, \\ N_2 &= (\sigma_1)^2 - 2\sigma_2, \\ N_3 &= (\sigma_1)^3 - 3\sigma_1\sigma_2 + 3\sigma_3, \\ N_4 &= (\sigma_1)^4 - 4(\sigma_1)^2\sigma_2 + 4\sigma_1\sigma_3 + 2(\sigma_2)^2 - 4\sigma_4. \end{aligned}$$

(b) Lorsque $k \leq n$, montrer que :

$$N_k = \sigma_1 N_{k-1} - \sigma_2 N_{k-2} + \cdots + (-1)^{k-2} \sigma_{k-1} N_1 + (-1)^{k-1} \sigma_k k,$$

en notant bien que le dernier terme est k , et non pas $N_0 = n$ comme on aurait pu le supputer.

(c) En posant $n \geq 4$, écrire ces formules et en déduire une démonstration des formules de la question (a).

(d) Lorsque $k \geq n$, montrer que :

$$N_k = \sigma_1 N_{k-1} - \sigma_2 N_{k-2} + \cdots + (-1)^{n-2} \sigma_{n-1} N_{k-n+1} + (-1)^{n-1} \sigma_n N_{k-n}.$$

(e) En posant $Y := \frac{1}{X}$, vérifier que :

$$(1 - x_1 Y)(1 - x_2 Y) \cdots (1 - x_n Y) = 1 - \sigma_1 Y + \cdots + (-1)^{n-1} \sigma_{n-1} Y^{n-1} + (-1)^n \sigma_n Y^n.$$

(f) En utilisant le développement en série formelle de $\log(1 - T) = -\sum_{k \geq 1} \frac{T^k}{k}$, vérifier que :

$$\log(1 - x_1 Y) + \cdots + \log(1 - x_n Y) = -\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} N_k Y^k.$$

(g) Par ailleurs, en utilisant la *formule du multinôme* :

$$(Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n)^\ell = \sum_{i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \ell} \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} (Z_1)^{i_1} (Z_2)^{i_2} \cdots (Z_n)^{i_n},$$

établir que :

$$\log(1 - \sigma_1 Y + \cdots + (-1)^n \sigma_n Y^n) = -\sum_{k \geq 1} Y^k \sum_{i_1 + 2i_2 + \cdots + ni_n = k} \frac{(-1)^{i_2 + 2i_3 + \cdots + (n-1)i_n}}{i_1 + i_2 + \cdots + i_n} \frac{(i_1 + i_2 + \cdots + i_n)!}{i_1! i_2! \cdots i_n!} (\sigma_1)^{i_1} (\sigma_2)^{i_2} \cdots (\sigma_n)^{i_n}.$$

(h) Conclure en obtenant les formules de Waring annoncées, et tenter de les ré-obtenir en partant seulement des formules de récurrence vues plus haut.

Exercice 4. [Formules de Waring inverses] En utilisant seulement la question (b) de l'Exercice 3, montrer qu'il existe pour $\ell = 1, \dots, n$ des polynômes à coefficients rationnels $P_\ell \in \mathbb{Q}[T_1, \dots, T_\ell]$ tels que :

$$\sigma_\ell = P_\ell(N_1, \dots, N_\ell) \quad (1 \leq \ell \leq n).$$

Exercice 5. Dans \mathbb{C}^2 muni des coordonnées (z, w) , soit la fonction $f(z, w) := \sin w + z^2$.

(a) Vérifier que $\text{ord}_0 f = 1$.

(b) Déterminer la décomposition de Weierstrass $f = u \cdot P$.

(c) Faire de même pour $f(z, w) := w + \sin w + z^2$.

Exercice 6. Montrer que le Théorème 1.6 de préparation de Weierstrass se déduit comme corollaire du Théorème 2.2 de division de Stickelberger.

Exercice 7. [Théorème de Hensel analytique] Soit $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ avec $n \geq 2$, et soit un polynôme de degré $d \geq 1$:

$$P(z'; z_n) = z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \cdots + a_d(z'),$$

à coefficients a_1, \dots, a_d holomorphes dans un voisinage de $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$, tel que :

$$P(0'; z_n) = (z_n - \alpha_1)^{d_1} \cdots (z_n - \alpha_k)^{d_k},$$

avec $\kappa \geq 1$, avec des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_\kappa \in \mathbb{C}$ deux à deux distinctes, avec $d_1, \dots, d_\kappa \geq 1$, et avec $d_1 + \dots + d_\kappa = d$.

Montrer qu'il existe des polynômes unitaires uniques de degrés respectifs d_1, \dots, d_κ :

$$P_k(z'; z_n) = z_n^{d_k} + a_{k,1}(z') z_n^{d_k-1} + \dots + a_{k,d_k}(z') \quad (1 \leq k \leq \kappa),$$

à coefficients holomorphes en z' près de $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$ avec :

$$P_k(0'; z_n) = (z_n - \alpha_k)^{d_k},$$

tels que :

$$P(z'; z_n) = \prod_{1 \leq k \leq \kappa} P_k(z'; z_n).$$

Exercice 8. EE

RÉFÉRENCES

- [1] Cartan, H. : *Sur le théorème de préparation de Weierstrass*, Festschrift Weierstraß, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Wissenschaftliche Abhandlung, Band 33, 155–168 (1966).
- [2] Siegel, C.L. : *Zu den Beweisen des Vorbereitungssatzes von Weierstraß*, Abhandlungen aus Zahlentheorie und Analysis zur Erinnerung an Edmund Landau (1877–1938), 299–306. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1968.

Géométrie locale des hypersurfaces complexes

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Revêtement ramifié local associé à un polynôme de Weierstrass

Grâce au Théorème de préparation de Weierstrass, la géométrie locale de l'ensemble des zéros d'une fonction holomorphe *quelconque* va pouvoir être comprise de manière transparente.

Soit donc une fonction holomorphe non nulle $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ définie au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ avec $f(0) = 0$, représentée comme produit d'une fonction holomorphe $u \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ ne s'annulant jamais par un polynôme de Weierstrass :

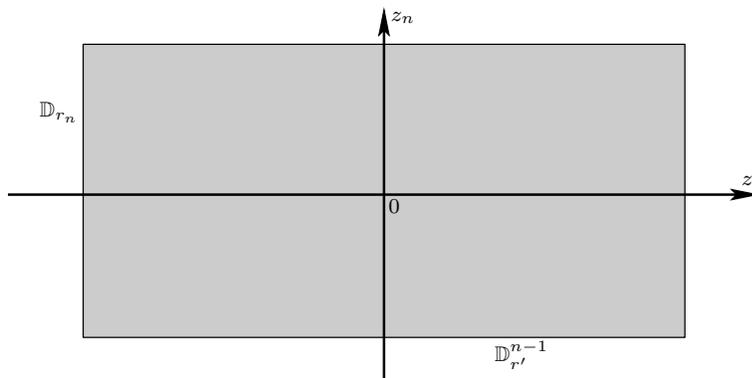
$$f(z) = u(z) P(z'; z_n) = u(z) (z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \cdots + a_d(z')),$$

de degré $d \geq 1$, avec $z' \in \mathbb{C}^{n-1}$, de telle sorte que :

$$\{f = 0\} = \{P = 0\} \supset \{0\},$$

où les coefficients $a_i(z')$ sont holomorphes dans $\{|z'| < r'\}$ avec $r' > 0$ et satisfont $a_i(0') = 0$, et où $|z_n| < r_n$ avec $r_n > 0$. Pour ce polydisque 'horizontal' de dimension $n - 1$ et pour ce disque 'vertical', on utilisera parfois les notations :

$$\mathbb{D}_{r'}^{n-1} := \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : |z'| < r'\} \quad \text{et} \quad \mathbb{D}_{r_n} := \{z_n \in \mathbb{C} : |z_n| < r_n\}.$$



Si nous décomposons P en produit de facteurs premiers irréductibles dans l'anneau local factoriel \mathcal{O}_n :

$$P = P_1 \cdots P_k,$$

ces facteurs P_k sont alors tous, d'après un théorème vu précédemment, eux aussi des polynômes de Weierstrass $P_k \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$, et comme il est de plus manifestement clair que :

$$\{P = 0\} = \{P_1 = 0\} \cup \cdots \cup \{P_k = 0\},$$

il est possible et naturel de se restreindre à étudier l'ensemble des zéros d'un unique polynôme de Weierstrass qui est *irréductible*.

Supposons donc $P(z'; z_n)$ irréductible dans \mathcal{O}_n , ce qui équivaut, on le sait, à son irréductibilité dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Pour tout z' fixé, $z_n \mapsto P(z', z_n)$ est un polynôme de degré constant $d \geq 1$, donc on peut former son discriminant par rapport à z_n :

$$\begin{aligned} \Delta(z') &:= \text{Disc}_{z_n}(P(z'; z_n)) \\ &= \text{Res}_{z_n}\left(P(z'; z_n), \frac{\partial P}{\partial z_n}(z'; z_n)\right). \end{aligned}$$

Or dans l'anneau de polynômes $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, l'irréductibilité de P équivaut, d'après le cours d'Algèbre, à la non-annulation identique :

$$\Delta(z') \neq 0.$$

Lorsqu'en point fixé z' , on a $\Delta(z') \neq 0$, les d racines de $z_n \mapsto P(z'; z_n)$ sont distinctes.

En général, pour tout z' fixé, nous noterons $w_{1,z'}, \dots, w_{d,z'}$ les d racines comptées avec multiplicité. Lorsque $\Delta(z') = 0$, au moins deux d'entre elles coïncident. En $z' = 0$, toutes les d racines sont égales à $0'$.

Puisque P est unitaire, nous pouvons l'écrire :

$$(1.1) \quad P(z'; z_n) = \prod_{i=1}^d (z_n - w_{i,z'}).$$

D'après une expression connue, le discriminant vaut alors :

$$\Delta(z') = (-1)^{\frac{d(d-1)}{2}} \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq d} (w_{i_1,z'} - w_{i_2,z'}),$$

mais cette expression (symétrique !) en fonction des racines n'est pas appropriée, il est préférable d'invoquer le Théorème de Lagrange, grâce auquel ce discriminant peut être ré-exprimé comme un certain polynôme Λ_d à coefficients dans \mathbb{Z} en les coefficients $a_i(z')$ du polynôme de Weierstrass :

$$\Delta(z') = \Lambda(a_1(z'), \dots, a_d(z')).$$

L'étude algébrique des polynômes discriminants est un sujet mathématique en lui-même, et nous ne pouvons résister à la tentation de signaler qu'aucune expression close complètement explicite n'est connue en degré $d \geq 1$ quelconque. Bornons-nous alors à les contempler pour de petites valeurs de d .

Exemple 1.2. En degré 2 :

$$\Delta(z') = (a_1(z'))^2 - 4a_2(z'),$$

en degré 3 :

$$\Delta(z') = -4 (a_1(z'))^3 a_3(z') + (a_1(z'))^2 (a_2(z'))^2 + 18 a_1(z') a_2(z') a_3(z') - 4 (a_2(z'))^3 - 27 (a_3(z'))^2,$$

et en degré 4 :

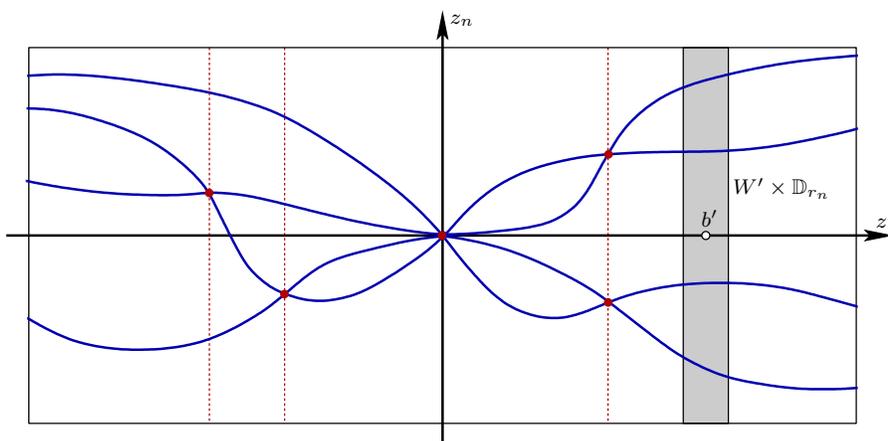
$$\begin{aligned} \Delta = & -27 a_1^4 a_4^2 + 18 a_1^3 a_2 a_3 a_4 - 4 a_1^3 a_3^3 - 4 a_1^2 a_2^3 a_4 + \\ & + a_1^2 a_2^2 a_3^2 + 144 a_1^2 a_2 a_4^2 - 6 a_1^2 a_3^2 a_4 - 80 a_1 a_2^2 a_3 a_4 + \\ & + 18 a_1 a_2 a_3^3 - 192 a_1 a_3 a_4^2 + 16 a_2^4 a_4 - 4 a_2^3 a_3^2 - \\ & - 128 a_2^2 a_4^2 + 144 a_2 a_3^2 a_4 - 27 a_4^4 + 256 a_4^3. \end{aligned}$$

Puisque Λ_d est un polynôme, le discriminant $\Delta(z')$ est une fonction holomorphe de $|z'| < r'$.

Terminologie 1.3. Le *lieu discriminant* est le sous-ensemble :

$$\{z' \in \mathbb{D}_{r'}^{n-1} : \Delta(z') = 0\}.$$

En pointillés, on représente $\{\Delta = 0\} \times \{|z_n| < r_n\}$.



L'énoncé suivant exprime que les d racines $w_{1,z'}, \dots, w_{d,z'}$ dépendent en fait holomorphiquement du 'paramètre' z' , pourvu qu'on évite ce lieu discriminant.

Théorème 1.4. [Géométrie locale des hypersurfaces] *Tout point b' hors du lieu discriminant :*

$$\Delta(b') \neq 0,$$

possède un voisinage ouvert $b' \in W' \subset \mathbb{D}_{r'}^{n-1}$ suffisamment petit dans lequel il existe d fonctions holomorphes :

$$w_1, \dots, w_d \in \mathcal{O}(W'),$$

avec $w_{i_1}(z') \neq w_{i_2}(z')$ pour tous $i_1 \neq i_2$ et tout $z' \in W'$, telles que :

$$P(z'; z_n) = (z_n - w_1(z')) \cdots (z_n - w_d(z')) \quad (\forall z' \in W').$$

Démonstration. Puisque $b' \notin \{\Delta = 0\}$, pour tout z' dans un petit voisinage ouvert $b' \in W' \subset \mathbb{D}_{r'}^{n-1}$, les d racines de $z_n \mapsto P(z'; z_n)$ sont deux à deux distinctes :

$$w_{i_1,z'} \neq w_{i_2,z'} \quad (z' \in W', 1 \leq i_1 \neq i_2 \leq d).$$

Or si nous nous souvenons que la dérivée d'un polynôme scindé $Q(X) = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_d)$ ayant des racines deux à deux distinctes prend une valeur non nulle en l'une quelconque de ces racines :

$$\frac{dQ}{dX}(\alpha_i) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq d \\ j \neq i}} (\alpha_i - \alpha_j) \neq 0 \quad (1 \leq i \leq d),$$

en revenant à la factorisation ponctuelle (1.1), nous voyons qu'en chaque point :

$$(b', w_{i,b'}) \quad (1 \leq i \leq d)$$

qui est un zéro de P 'au-dessus' de b' , la dérivée partielle 'verticale' :

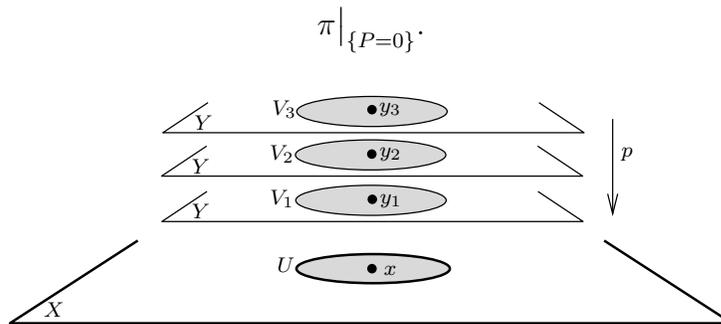
$$\frac{\partial P}{\partial z_n}(b', w_{i,b'}) = \prod_{\substack{1 \leq j \leq d \\ j \neq i}} (w_{i,b'} - w_{j,b'}) \neq 0$$

est non nulle, donc le théorème des fonctions implicites garantit que chaque racine $w_{i,z'}$ est, pour z' près de b' , une vraie fonction holomorphe $w_i(z')$. \square

Afin d'interpréter encore mieux ce théorème, introduisons la projection (locale) sur l'espace des z' :

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{D}_{r'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{r_n} &\longrightarrow \mathbb{D}_{r'}^{n-1} \\ (z', z_n) &\longmapsto z', \end{aligned}$$

et restreignons-la à l'ensemble des zéros de notre polynôme irréductible :



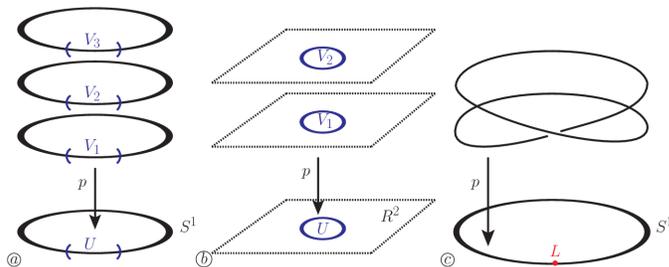
Définition 1.5. Soient X et Y deux espaces topologiques. Une application continue $p: Y \rightarrow X$ est appelée un revêtement si tout point $x \in X$ possède un voisinage ouvert U dans X (suffisamment petit) dont la préimage :

$$p^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} V_j$$

consiste en une famille, indexée par un certain ensemble J , d'ouverts $V_j \subset Y$ disjoints deux à deux tels que chaque application restreinte :

$$p|_{V_j} : V_j \xrightarrow{\sim} U$$

est un homéomorphisme (pile d'assiettes ouvertes disjointes).



Si X est connexe, on démontre que les divers ensembles d'indices J sont tous de même cardinal. Lorsque $\text{Card } J =: d < \infty$ est fini constant, on dit que p est un revêtement à d feuillets.

Corollaire 1.6. *Hors du lieu discriminant, la projection sur le polydisque horizontal :*

$$\begin{aligned} \{(z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C} : P(z'; z_n) = 0, |z'| < r', |z_n| < r_n\} \\ \downarrow \pi \\ \{z' \in \mathbb{C}^{n-1} : \Delta(z') \neq 0, |z'| < r'\} \end{aligned}$$

est un revêtement holomorphe à d feuillets. \square

Définition 1.7. Un revêtement ramifié $p: Y \rightarrow X$ est une application continue entre espaces topologiques avec un sous-ensemble propre $R \subset X$ dont le complémentaire $X \setminus R$ est connexe tel que :

$$p|_{X \setminus p^{-1}(R)}: X \setminus p^{-1}(R) \rightarrow X \setminus R$$

est un vrai revêtement à un nombre fini constant de feuillets.

Figure 3-dimensionnelle

On peut démontrer (exercice) que le complémentaire :

$$\{|z'| < r'\} \setminus \{\Delta(z') \neq 0\}$$

est connexe.

Corollaire 1.8. *Pour toute fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ avec $n \geq 1$ non identiquement nulle, de telle sorte qu'en tout point $z \in \Omega$, son ordre est fini :*

$$d_z := \text{ord}_z f := \min \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n, a_1 + \dots + a_n = k, \frac{\partial^{a_1 + \dots + a_n} f}{\partial z_1^{a_1} \dots \partial z_n^{a_n}}(z) \neq 0 \right\} < \infty,$$

pour toute droite complexe affine $L_z \cong \mathbb{C}$ passant par z en restriction à laquelle l'ordre reste inchangé :

$$\text{ord}_z (f|_{L_z}) = d_z,$$

et pour tout hyperplan affine complexe $H_z \cong \mathbb{C}^{n-1}$ passant par z qui est supplémentaire de L_z dans \mathbb{C}^n , la projection de l'ensemble des zéros :

$$\{f = 0\}$$

sur H_z parallèle à L_z , localisée à un certain voisinage ouvert de z dans \mathbb{C}^n , forme un revêtement ramifié local à d_z feuillets.

Démonstration. Dans un système de coordonnées affines holomorphes centrées en z , la droite L_z devient l'axe des z_n et l'hyperplan H_z devient l'espace des coordonnées z' en termes desquels toutes les considérations qui précèdent s'appliquent. \square

2. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE

Propriétés algébriques de l'anneau local \mathcal{O}_n des germes de fonctions holomorphes

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Préliminaires algébriques

Sans démonstrations, rappelons quelques énoncés d'algèbre commutative élémentaire qui serviront dans la théorie analytique locale en géométrie complexe. Pour des révisions, nous renvoyons à [1, 2]. Tous les anneaux et corps seront supposés commutatifs.

1.1. Anneaux noethériens. Soit $\mathbb{A} = (\mathbb{A}, +, \times)$ un anneau commutatif unitaire, dont les éléments neutres $0_{\mathbb{A}}$ pour l'addition et $1_{\mathbb{A}}$ pour la multiplication seront notés en abrégé 0 et 1.

Rappelons qu'un sous-ensemble $I \subset \mathbb{A}$ est un *idéal* de \mathbb{A} lorsque :

- I est un sous-groupe additif de \mathbb{A} , à savoir $f \in I$ et $g \in I$ implique $f \pm g \in I$;
- pour tout $a \in \mathbb{A}$ et tout $f \in I$, le produit $a f \in I$.

On note que $1 \in I$ si et seulement si $I = \mathbb{A}$.

Définition 1.2. Un anneau est dit *noethérien* si tout idéal $I \subset \mathbb{A}$ est engendré par un nombre fini d'éléments, à savoir il existe $\kappa \geq 1$ et $f_1, \dots, f_{\kappa} \in I$ tels que :

$$I = \{a_1 f_1 + \dots + a_{\kappa} f_{\kappa} : a_1, \dots, a_{\kappa} \in \mathbb{A}\},$$

ce qui sera noté :

$$I = \langle f_1, \dots, f_{\kappa} \rangle.$$

Dans ce qui suit, tous les anneaux qui seront considérés seront noethériens. En particulier, un anneau *quasi-principal*¹, à savoir un anneau dont tout idéal peut être engendré par un unique générateur, est noethérien, mais accepter des générateurs en nombre fini arbitraire offre une bien plus grande généralité en extension.

On a une caractérisation classique.

Lemme 1.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes.*

- (i) \mathbb{A} est noethérien ;
- (ii) toute suite infinie dénombrable croissante d'idéaux dans \mathbb{A} :

$$I_1 \subset I_2 \subset \dots \subset I_{\kappa} \subset I_{\kappa+1} \subset \dots$$

devient stationnaire à partir d'un certain rang, à savoir il existe $\kappa \geq 1$ tel que $I_k = I_{\kappa}$ pour tout $k \geq \kappa$;

1. Un anneau est dit *principal* s'il est de plus intègre, voir ci-dessous.

(iii) pour toute collection non vide $\cup_{j \in J} I_j$ d'idéaux $I_j \subset \mathbb{A}$, il existe un idéal $I^* \subset \mathbb{A}$ tel que pour tout j , si $I_j \supset I^*$, alors $I_j = I^*$. \square

Tous les corps (commutatifs) \mathbb{K} sont (trivialement) noethériens, puisque si un idéal $I \subset \mathbb{K}$ contient un élément $0 \neq x \in I$, alors $x^{-1}x = 1 \in I$, d'où $I = \mathbb{K}$.

Théorème 1.4. [de la base de Hilbert] Si \mathbb{A} est un anneau commutatif noethérien, si $n \geq 1$ est un entier, et si X_1, \dots, X_n sont des indéterminées, alors l'anneau de polynômes $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ est aussi noethérien. \square

Cet énoncé s'applique en particulier (souvent!) dans le cas où $\mathbb{A} = \mathbb{K}$ est un corps commutatif, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Corollaire 1.5. Dans un anneau noethérien \mathbb{A} , pour tout idéal $I \subset \mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$, l'anneau quotient :

$$\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]/I$$

est aussi noethérien. \square

1.6. Modules noethériens. La notion de module sur un anneau est une sorte d'analogue de la notion d'espace vectoriel sur un corps, sans l'opération d'inversion des constantes. Comme précédemment, soit \mathbb{A} un anneau commutatif unitaire.

Définition 1.7. Un \mathbb{A} -module M est un ensemble muni de deux opérations sous lesquelles il est stabilisé :

- il existe une *addition* interne qui est une loi de groupe commutative et associative :

$$M \times M \ni (x, y) \mapsto x \pm y \in M;$$

- il existe une *multiplication par les scalaires* :

$$\mathbb{A} \times M \ni (a, x) \mapsto ax \in M;$$

et ces deux lois doivent satisfaire, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ et tous $x, y \in M$:

$$a(x \pm y) = ax \pm ay, \quad (ab)x = a(bx), \quad (a + b)x = ax + bx, \quad 1x = x.$$

Un sous- \mathbb{A} -module $N \subset M$ est un sous-ensemble $N \subset M$ stable par ces opérations :

$$N \pm N \subset N \quad \text{et} \quad \mathbb{A}N \subset N,$$

ce qui fait de N un \mathbb{A} -module en tant que tel.

Définition 1.8. Un \mathbb{A} -module M est dit *noethérien* lorsque *tout* sous- \mathbb{A} -module $N \subset M$ est *finiment engendré*, à savoir il existe un entier $k \geq 1$ et des éléments $y_1, \dots, y_k \in N$ tels que :

$$N = \mathbb{A}y_1 + \dots + \mathbb{A}y_k = \langle y_1, \dots, y_k \rangle.$$

Proposition 1.9. Si M est un module finiment engendré sur un anneau noethérien \mathbb{A} , alors M est noethérien. \square

Tout produit $\mathbb{A}^{\oplus m}$ pour $m \geq 1$ entier possède une structure naturelle de \mathbb{A} -module avec la multiplication :

$$a(x_1, \dots, x_m) := (ax_1, \dots, ax_m).$$

Proposition 1.10. Si \mathbb{A} est un anneau noethérien, pour tout entier $m \geq 2$, le \mathbb{A} -module produit $\mathbb{A}^{\oplus m}$ est aussi noethérien. \square

Démonstration. Pour $m = 1$, c'est trivial, car \mathbb{A} est noethérien !

Raisonnons par récurrence sur $m \geq 2$, en supposant $\mathbb{A}^{\oplus(m-1)}$ noethérien. Soit $N \subset \mathbb{A}^{\oplus m}$ un sous- \mathbb{A} -module quelconque. Introduisons la projection de $\mathbb{A}^{\oplus m}$ sur son premier facteur :

$$\text{pr}_1(a_1, a_2, \dots, a_m) := a_1.$$

Comme $\text{pr}_1(N)$ est alors un idéal de \mathbb{A} (exercice mental) noethérien, il est finiment engendré, à savoir il existe $x_1, \dots, x_j \in N$ tel que $\text{pr}_1(x_1), \dots, \text{pr}_1(x_j)$ engendrent $\text{pr}_1(N)$.

Par conséquent, tout élément $x \in N$ peut s'écrire sous la forme :

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_j x_j + y,$$

au moyen de constantes $a_1, \dots, a_j \in \mathbb{A}$, et avec un reste $y \in N$ satisfaisant :

$$\text{pr}_1(y) = 0.$$

Mais alors, puisque la collection de ces restes y appartient à l'ensemble :

$$N \cap \text{Ker}(\text{pr}_1) \subset N \cap \mathbb{A}^{\oplus(m-1)},$$

qui est un sous- \mathbb{A} -module de $\mathbb{A}^{\oplus(m-1)}$, l'hypothèse de récurrence s'applique pour donner un nombre fini de générateurs y_1, \dots, y_k , ce qui conclut. \square

1.11. Anneaux intègres, éléments premiers, éléments irréductibles. Un *anneau intègre* \mathbb{A} — ou *domaine d'intégrité* — est un anneau commutatif unitaire distinct de l'anneau nul tel que :

$$a \in \mathbb{A}, \quad b \in \mathbb{A}, \quad ab = 0 \quad \implies \quad (a = 0 \quad \text{ou} \quad b = 0),$$

ou par contraposition :

$$(a \neq 0 \quad \text{et} \quad b \neq 0) \quad \implies \quad ab \neq 0.$$

On dit que a *divise* c , ce qu'on note :

$$a \mid c,$$

lorsqu'il existe b tel que $ab = c$. Un *diviseur de zéro* est un élément $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ tel qu'il existe $b \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$ avec $ab = 0$.

L'intégrité de \mathbb{A} se ré-exprime alors en disant que \mathbb{A} ne possède aucun diviseur de zéro.

Le *groupe des unités* — ou *inversibles* — de \mathbb{A} est :

$$\mathbb{A}^\times := \{u \in \mathbb{A} : \exists v \in \mathbb{A}, \quad uv = 1\}.$$

Étant donné $a \in \mathbb{A}$, les *associés* de a sont tous les au avec $u \in \mathbb{A}^\times$.

Définition 1.12. Dans un anneau intègre \mathbb{A} , un élément $p \in \mathbb{A}$ est dit *premier* si $p \neq 0$, si $p \notin \mathbb{A}^\times$, et s'il vérifie le Lemme d'Euclide, à savoir pour tous $a, b \in \mathbb{A}$:

$$p \mid ab \quad \implies \quad (p \mid a \quad \text{ou} \quad p \mid b).$$

Une abréviation à ne pas confondre avec \mathbb{A}^\times sera parfois employée :

$$\mathbb{A}^* := \mathbb{A} \setminus \{0\}.$$

L'ensemble des éléments non nuls et non inversibles est alors :

$$\mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times.$$

Les deux concepts « *premier* » (ci-dessus) et « *irréductible* » (ci-dessous) concernent les éléments de $\mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$.

Définition 1.13. Dans un anneau intègre \mathbb{A} , un élément $f \in \mathbb{A}$ est dit *irréductible* si $f \neq 0$, si $f \notin \mathbb{A}^\times$, et si :

$$f = uv \implies (u \in \mathbb{A}^\times \text{ ou } v \in \mathbb{A}^\times).$$

De ces deux définitions découle (exercice de révision) une

Observation 1.14. Dans tout anneau intègre \mathbb{A} :

$$\llcorner \text{premier} \llcorner \implies \llcorner \text{irréductible} \llcorner. \quad \square$$

Toutefois, comme le montre par exemple l'anneau quotient intègre $\mathbb{C}[x, y, z]/\langle z^2 - xy \rangle$, les éléments irréductibles ne sont pas toujours premiers, puisque dans cet anneau (exercice) :

$$z \mid xy \quad \text{tandis que} \quad z \nmid x, \quad z \nmid y.$$

On note :

$$\begin{aligned} I(\mathbb{A}) &:= \{f \in \mathbb{A} \text{ irréductibles}\} \\ &\subset \mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times. \end{aligned}$$

Théorème 1.15. Soit \mathbb{A} un anneau noethérien intègre. Alors tout élément non nul et non-inversible $a \in \mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ admet une factorisation finie en irréductibles :

$$a = f_1 \cdots f_L,$$

où $L \geq 1$ et où $f_1, \dots, f_L \in I(\mathbb{A})$. □

1.16. Anneaux factoriels. Soit \mathbb{A} un anneau commutatif intègre. On note :

$$\begin{aligned} P(\mathbb{A}) &:= \{p \in \mathbb{A} \text{ premiers}\} \\ &\subset \mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times. \end{aligned}$$

La factorisabilité par éléments premiers est une condition plus forte que par éléments irréductibles.

Définition 1.17. Un anneau intègre \mathbb{A} est dit *factoriel* si tout élément non nul qui n'est pas une unité $a \in \mathbb{A}^* \setminus \mathbb{A}^\times$ est produit d'un nombre fini d'éléments premiers :

$$a = p_1 \cdots p_k \quad (\exists p_1, \dots, p_k \in P(\mathbb{A})).$$

Par convention, les unités $u \in \mathbb{A}^\times$ ont aussi une factorisation, $u = u$, à un seul terme. Un cas limite d'anneau factoriel est celui où il n'y a aucun élément irréductible, l'anneau \mathbb{A} est alors un corps \mathbb{K} , d'ailleurs également euclidien, voir ci-dessous.

Proposition 1.18. Dans un anneau factoriel \mathbb{A} :

$$\llcorner \text{irréductible} \llcorner \iff \llcorner \text{premier} \llcorner. \quad \square$$

Le fait que les irréductibles soient premiers garantit l'unicité dans le théorème fondamental suivant.

Théorème 1.19. Dans un anneau factoriel \mathbb{A} , pour tout élément non nul $a \in \mathbb{A} \setminus \{0\}$, il existe une unité $u \in \mathbb{A}^\times$ et un nombre fini d'éléments irréductibles (premiers) $p_1, \dots, p_k \in I(\mathbb{A})$ tels que :

$$a = u p_1 \cdots p_k.$$

De plus, toute autre telle factorisation :

$$a = v q_1 \cdots q_L \quad (v \in \mathbb{A}^\times, q_1, \dots, q_L \in I(\mathbb{A})),$$

a le même nombre $L = K$ d'irréductibles qui sont, après permutation éventuelle des facteurs, associés par paires :

$$q_1 = w_1 p_1, \dots, q_k = w_k p_k. \quad (\exists w_1, \dots, w_k \in \mathbb{A}^\times). \quad \square$$

Comme \mathbb{A} est intègre, il vient $u = v w_1 \cdots w_k$. Ainsi *a posteriori*, dans la Définition 1.17, la décomposition $a = p_1 \cdots p_k$ en éléments premiers est en fait *unique* à permutation près (exercice).

Théorème 1.20. *Soit \mathbb{A} un anneau noethérien intègre. Alors \mathbb{A} est factoriel si et seulement si tout élément irréductible de \mathbb{A} est premier.* \square

Théorème 1.21. *Tout anneau principal est factoriel.* \square

Théorème 1.22. [de Gauss] *Si \mathbb{A} est un anneau factoriel, si $n \geq 1$ est un entier, et si X_1, \dots, X_n sont des indéterminées, alors l'anneau de polynômes $\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ est aussi factoriel.*

Plus précisément, son groupe des unités est :

$$(\mathbb{A}[X_1, \dots, X_n])^\times = \mathbb{A}^\times,$$

et tout polynôme $P \in \mathbb{A}[X_1, \dots, X_n]$ de degré ≥ 1 admet une décomposition :

$$P(X) = u P_1(X) \cdots P_k(X),$$

avec $u \in \mathbb{A}^\times$ et P_1, \dots, P_k polynômes irréductibles de degrés ≥ 1 . \square

1.23. Anneaux euclidiens. Une abstraction inspirée de \mathbb{Z} ou de $\mathbb{Q}[X]$ conduit au concept suivant.

Définition 1.24. Un anneau intègre \mathbb{A} est appelé un *anneau euclidien* s'il existe une fonction — parfois appelée *stathme* — :

$$\delta: \mathbb{A} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad (\delta(0) := -\infty),$$

telle que, pour tous $a, b \in \mathbb{A}$ avec $b \neq 0$, il est possible de diviser a par b avec un reste δ -inférieur au sens précis où :

$$\text{il existe } q, r \in \mathbb{A} \text{ avec } \delta(r) < \delta(b) \text{ satisfaisant } a = qb + r.$$

L'unicité n'est pas demandée.

Lorsque $\mathbb{A} = \mathbb{K}[x]$ est l'anneau des polynômes sur un corps \mathbb{K} , la fonction *degré* :

$$\delta(a) := \deg a \quad (a \in \mathbb{K}[x]),$$

avec $\deg(0) := -\infty$, est le stathme naturel qui munit $\mathbb{K}[x]$ d'une structure d'anneau euclidien, l'unicité du quotient q et du reste r étant d'ailleurs satisfaite dans ce cas (révision de l'algorithme d'Euclide).

Théorème 1.25. *Tout anneau euclidien est principal, donc factoriel.*

Plus précisément, pour tout idéal I de \mathbb{A} non réduit à $\{0\}$, il existe un élément a_0 dans $I \setminus \{0\}$ avec :

$$\delta(a_0) = \min_{a \in I \setminus \{0\}} \delta(a),$$

qui engendre :

$$I = a_0 \mathbb{A}. \quad \square$$

Les anneaux principaux sont trop restreints, car pour $n \geq 2$, l'anneau $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ n'est pas principal, bien qu'il intervienne constamment en géométrie algébrique.

1.26. pgcd et ppcm. Soit à nouveau \mathbb{A} un anneau factoriel, et soient deux éléments non nuls $a, b \in \mathbb{A}^*$,

Définition 1.27. On dit qu'un élément $c \in \mathbb{A}$ est *un plus grand commun diviseur* entre a et b , ce qu'on note :

$$c = \text{pgcd}(a, b) = a \wedge b,$$

lorsque :

- $c \mid a$ et $c \mid b$;
- si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors en fait $d \mid c$

Définition 1.28. On dit qu'un élément $e \in \mathbb{A}$ est *un plus petit commun multiple* entre a et b , ce qu'on note :

$$e = \text{ppcm}(a, b) = a \vee b,$$

lorsque :

- $a \mid e$ et $b \mid e$;
- si $a \mid f$ et $b \mid f$, alors en fait $e \mid f$.

Lemme 1.29. Pour tous $a, b \in \mathbb{A}$, il existe un $\text{pgcd}(a, b)$ et un $\text{ppcm}(a, b)$, uniques à un facteur inversible $\in \mathbb{A}^\times$ près. \square

Définition 1.30. Deux éléments $a, b \in \mathbb{A}$ sont dits *premiers* entre eux lorsque $a \wedge b \in \mathbb{A}^\times$, ce qu'on abrège par :

$$a \wedge b = 1.$$

Soit maintenant $(p_i)_{i \in I}$ une famille complète de représentants, distincts à multiplication par une unité $\in \mathbb{A}^\times$ près, d'éléments irréductibles de l'anneau factoriel \mathbb{A} . Tout élément non nul $a \in \mathbb{A}^*$ s'écrit alors :

$$a = u \prod_{i \in I} (p_i)^{r_i},$$

avec une unité $u \in \mathbb{A}^\times$, et avec des exposants entiers $r_i \geq 0$ tous nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Lemme 1.31. Un pgcd et un ppcm de $a = u \prod p_i^{r_i}$ et de $b = v \prod p_i^{s_i}$ sont :

$$a \wedge b = \prod_{i \in I} (p_i)^{\min(r_i, s_i)},$$

$$a \vee b = \prod_{i \in I} (p_i)^{\max(r_i, s_i)},$$

tous les autres pgcd et ppcm s'en déduisant par multiplication par un élément quelconque de \mathbb{A}^\times . \square

Lemme 1.32. [de Gauss] Dans un anneau factoriel \mathbb{A} , si $a \in \mathbb{A}$ et $b \in \mathbb{A}$ sont premiers entre eux, i.e. si $a \wedge b = 1$, alors pour tout $c \in \mathbb{A}$:

$$a \mid bc \implies a \mid c. \quad \square$$

1.33. Résultants à une variable. Soit \mathbb{A} un anneau (commutatif, unitaire) intègre, soit X une indéterminée, et soient deux polynômes non constants :

$$\begin{aligned} P(X) &= a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m && (a_0 \neq 0), \\ Q(X) &= b_0 X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n && (b_0 \neq 0), \end{aligned}$$

de degrés $m \geq 1$ et $n \geq 1$.

Définition 1.34. Le *résultant* de $P(X)$ et de $Q(X)$ est la constante $\text{Res}(P, Q) \in \mathbb{A}$ donnée par le développement du déterminant :

$$\text{Res}(P, Q) := \det \begin{pmatrix} \overbrace{a_0 \ a_1 \ a_2 \ \cdots \ 0}^n & \overbrace{0 \ \cdots \ 0 \ 0}^m \\ 0 \ a_0 \ a_1 \ \ddots \ 0 & 0 \ \cdots \ 0 \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \ddots \ \ddots & \ddots \ \ddots \ \vdots \ \vdots \\ \vdots \ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \ddots & \ddots \ \ddots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ a_0 & a_1 \ \cdots \ a_{m-1} \ a_m \\ b_0 \ b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_{n-1} & b_n \ \cdots \ 0 \ 0 \\ 0 \ b_0 \ b_1 \ \ddots \ b_{n-2} & b_{n-1} \ \ddots \ 0 \ 0 \\ \vdots \ \vdots \ \ddots \ \ddots \ \ddots & \ddots \ \ddots \ \ddots \ \vdots \\ 0 \ 0 \ 0 \ \cdots \ b_{n-m} & b_{n-m+1} \ \cdots \ b_{n-1} \ b_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} n \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} b_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m \end{matrix}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m-1} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n+1}$

dans lequel il y a n lignes décalées de a_\bullet suivies de m lignes décalées de b_\bullet .

L'écriture de la dernière ligne, où b_{n-m} apparaît, est valable lorsque $n \geq m$ — sinon il faut lire 0 à la place —, mais de toute manière, on peut supposer $n \geq m$ grâce à la relation (exercice) :

$$\text{Res}(Q, P) = (-1)^{mn} \text{Res}(P, Q).$$

Théorème 1.35. [Relation de Bézout] Il existe :

$$U \in \mathbb{A}[X] \quad \text{avec} \quad \deg U \leq n-1 \quad \text{et} \quad V \in \mathbb{A}[X] \quad \text{avec} \quad \deg V \leq m-1$$

tels que :

$$U(X)P(X) + V(X)Q(X) \equiv \text{Res}(P, Q) \in \mathbb{A}.$$

Démonstration. Pour tout entier $j = 1, \dots, m + n - 1$, multiplions la j -ème colonne du déterminant qui définit $\text{Res}(P, Q)$, et additionnons tous les résultats à la dernière, $m + n$ -ème, colonne, ce qui donne :

$$\text{Res}(P, Q) = \det \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & X^{n-1}P(X) \\ 0 & a_0 & a_1 & \ddots & 0 & 0 & \cdots & 0 & X^{n-2}P(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-1} & P(X) \\ b_0 & b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & b_n & \cdots & 0 & X^{m-1}Q(X) \\ 0 & b_0 & b_1 & \ddots & b_{n-2} & b_{n-1} & \ddots & 0 & X^{m-2}Q(X) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-m} & b_{n-m+1} & \cdots & b_{n-1} & Q(X) \end{vmatrix},$$

et ensuite, développons ce déterminant par rapport à sa dernière colonne.

Puisque tous les mineurs de taille $(m + n - 1) \times (m + n - 1)$ qui sont associés à chaque élément de la dernière colonne appartiennent à l'anneau \mathbb{A} , une organisation évidente du résultat obtenu fournit les deux polynômes $U(X)$ et $V(X)$, de degrés $\leq n - 1$ et $\leq m - 1$, comme cela se voit en relisant la dernière colonne. \square

Introduisons maintenant le *corps des fractions* de \mathbb{A} :

$$\text{Frac } \mathbb{A} := \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{A}, b \in \mathbb{A}^* \right\},$$

deux quotients $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ étant identifiés (exercice) comme lorsqu'on passe de \mathbb{Z} à $\mathbb{Q} = \text{Frac } \mathbb{Z}$, l'intégrité de \mathbb{A} garantissant que \mathbb{A}^* est stable par multiplication afin que 0 n'apparaisse jamais au dénominateur.

Théorème 1.36. *Lorsque \mathbb{A} est un anneau factoriel — d'où $\mathbb{A}[X]$ est factoriel —, on a équivalence entre :*

(i) $0 = \text{Res}(P, Q)$;

(ii) *les deux décompositions en facteurs irréductibles de degré ≥ 1 :*

$$P(X) = u P_1(X) \cdots P_k(X) \quad \text{et} \quad Q(X) = v Q_1(X) \cdots Q_l(X)$$

possèdent au moins un certain facteur en commun $P_k(X) = Q_l(X)$.

En particulier :

$$1 = P \wedge Q \quad \iff \quad \text{Res}(P, Q) \neq 0.$$

Démonstration. Supposons que $P(X)$ et $Q(X)$ ont un facteur irréductible (de degré ≥ 1) en commun, disons $R(X)$, d'où $P(X) = R(X) \underline{P}(X)$ et $Q(X) = R(X) \underline{Q}(X)$.

En revenant à la relation de Bézout, la factorisation :

$$\mathbb{A} \ni \text{Res}(P, Q) = R(X) [U(X) \underline{P}(X) + V(X) \underline{Q}(X)],$$

montre, puisque $\mathbb{A}[X]$ est factoriel, que $R(X)$ doit être un facteur premier de l'élément constant $\text{Res}(P, Q)$ (de degré 0), et ceci ne peut se produire que si $\text{Res}(P, Q) = 0$.

Réciproquement, si $\text{Res}(P, Q) = 0$, à nouveau la relation de Bézout, écrite sous la forme :

$$U(X) P(X) = -V(X) Q(X),$$

fait voir, pour des raisons de degré, qu'il est impossible que tous les facteurs premiers de P soient contenus dans V , donc au moins l'un d'entre eux divise Q . \square

Ensuite, soit la clôture algébrique :

$$\mathbb{K} := \overline{\text{Frac } \mathbb{A}}.$$

Théorème 1.37. *Les deux équations algébriques :*

$$P(x) = 0 \quad \text{et} \quad Q(x) = 0$$

possèdent une racine commune $x = \alpha \in \mathbb{K}$ si et seulement si $0 = \text{Res}(P, Q)$.

Démonstration. S'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $P(\alpha) = Q(\alpha) = 0$, la relation de Bézout — encore elle ! — dans laquelle on fait $X := \alpha$ donne :

$$\mathbb{A} \ni \text{Res}(P, Q) = U(\alpha)P(\alpha) + V(\alpha)Q(\alpha) = 0 \in \mathbb{K},$$

et comme $\mathbb{A} \hookrightarrow \mathbb{K}$ s'injecte dans la clôture algébrique de son corps des fractions, on a $0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{A}}$, d'où $\text{Res}(P, Q) = 0 \in \mathbb{A}$.

Inversement, si $\text{Res}(P, Q) = 0$, alors :

$$U(X)P(X) = -V(X)Q(X),$$

et à nouveau pour des raisons de degré, au moins une racine de $P(X) = 0$ doit être une racine de $Q(X) = 0$. \square

Dans la clôture algébrique \mathbb{K} , les deux polynômes se scindent :

$$P(X) = a_0 \prod_{i=1}^m (X - \alpha_i) \quad \text{et} \quad Q(X) = b_0 \prod_{j=1}^n (X - \beta_j),$$

grâce à certaines racines :

$$\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K} \quad \text{et} \quad \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}.$$

Théorème 1.38. *Après développement :*

$$\text{Res}(P, Q) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j).$$

Démonstration. Si on introduit les fonctions symétriques élémentaires respectives de ces racines :

$$\sigma_k := \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \alpha_{i_1} \cdots \alpha_{i_k} \quad \text{et} \quad \tau_\ell := \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_\ell \leq n} \beta_{j_1} \cdots \beta_{j_\ell},$$

définies pour $1 \leq k \leq m$ et pour $1 \leq \ell \leq n$, il vient en développant les produits de facteurs linéaires et en identifiant les puissances de X :

$$a_k = a_0 (-1)^k \sigma_k \quad \text{et} \quad b_\ell = b_0 (-1)^\ell \tau_\ell.$$

Observons que le résultant $\text{Res}(P, Q)$ est, après développement du déterminant qui le définit, un polynôme homogène de degré n en (a_0, a_1, \dots, a_m) , et homogène de degré m en (b_0, b_1, \dots, b_n) . En substituant ces valeurs des a_k et des b_ℓ , nous déduisons que $\text{Res}(P, Q)$ est un polynôme en les fonctions symétriques élémentaires des racines α_i et β_j , multiplié par $a_0^n b_0^m$.

Considérons maintenant $(\alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_n)$ comme des indéterminées formelles. Si $\alpha_i = \beta_j$ pour un i et un j , alors P et Q ont le facteur commun $(X - \alpha_i) = (X - \beta_j)$.

Par conséquent, en tant que polynôme en les α_i, β_j , le résultat $\text{Res}(P, Q)$ doit être divisible par $(\alpha_i - \beta_j)$.

Il en découle que $\text{Res}(P, Q)$ est divisible par :

$$\begin{aligned} S &:= \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) \\ &= a_0^n \prod_{i=1}^m Q(\alpha_i) \\ &= a_0^n \prod_{i=1}^m (b_0 \alpha_i^n + b_1 \alpha_i^{n-1} + \dots + b_n) \\ &= \text{polynôme homogène de degré } m \text{ en } (b_0, b_1, \dots, b_n). \end{aligned}$$

De même :

$$\begin{aligned} S &= (-1)^{mn} b_0^m \prod_{j=1}^n (a_0 \beta_j^m + a_1 \beta_j^{m-1} + \dots + a_m) \\ &= \text{polynôme homogène de degré } m \text{ en } (a_0, a_1, \dots, a_m). \end{aligned}$$

Ainsi, S a les mêmes propriétés d'homogénéité que $\text{Res}(P, Q)$, donc il existe une constante $c \in \mathbb{A}$ telle que :

$$\text{Res}(P, Q) = c \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j).$$

Pour déterminer cette constante c , si nous regardons la diagonale du déterminant qui définit $\text{Res}(P, Q)$, nous voyons qu'il contient le monôme :

$$(a_0)^n (b_n)^m.$$

Comparons alors les coefficients de $(\beta_1 \cdots \beta_n)^n$ dans $\text{Res}(P, Q)$ et dans $\prod_i \prod_j (\alpha_i - \beta_j)$.

Pour le résultant, il vient :

$$\begin{aligned} \text{Res}(P, Q) &= a_0^n b_n^m + \dots = a_0^n b_0^m \left[\left(\frac{b_n}{b_0}\right)^m + \dots \right] \\ &= a_0^n b_0^m \left[(-1)^{nm} (\beta_1 \cdots \beta_n)^m + \dots \right], \end{aligned}$$

et pour le double produit, il vient :

$$\prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) = \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (-1)^{nm} (\beta_1 \cdots \beta_n)^m + \dots,$$

donc le coefficient constant recherché est $a_0^n b_0^m$, comme annoncé dans l'énoncé. \square

Observons au passage que le résultant s'écrit de plusieurs manières différentes :

$$\text{Res}(P, Q) = a_0^n b_0^m \prod_{i=1}^m \prod_{j=1}^n (\alpha_i - \beta_j) = a_0^n \prod_{i=1}^m Q(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_0^m \prod_{j=1}^n P(\beta_j).$$

La *dérivée formelle* d'un polynôme $R(X) = c_0 X^p + \dots + c_{p-1} X + c_p$ est :

$$R'(X) := p c_0 X^{p-1} + \dots + c_{p-1}.$$

Définition 1.39. Le *discriminant* d'un polynôme à coefficients dans \mathbb{A} :

$$a_0 X^m + a_1 X^{m-1} + \cdots + a_m \quad (a_0 \neq 0),$$

est :

$$\text{Disc}(P) := \frac{1}{a_0} \text{Res}(P, P').$$

Théorème 1.40. En fonction des racines $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$ de P :

$$\text{Disc}(P) = (-1)^{\frac{m(m-1)}{2}} a_0^{2m-2} \prod_{1 \leq i_1 < i_2 \leq m} (\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2})^2.$$

Démonstration. On vérifie (exercice) que la dérivée de P prend pour valeur en toute racine :

$$P'(\alpha_i) = a_0 \prod_{i_1 \neq i} (\alpha_i - \alpha_{i_1}),$$

et on applique (exercice) une formule qui précède. \square

2. Factorialité et noethérianité de \mathcal{O}_n

Soient $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ les coordonnées holomorphes canoniques, et soit l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$.

Définition 2.1. L'ensemble des *germes de fonctions holomorphes en 0* est :

$$\mathcal{O}_n := \mathcal{O}_{n,0} := \prod_{\substack{U \ni 0 \\ \text{ouvert}}} \mathcal{O}(U) / \sim,$$

où l'on identifie $f \sim g$ toute paire de fonctions $f \in \mathcal{O}(U)$ et $g \in \mathcal{O}(V)$ définies dans deux voisinages ouverts $0 \in U$ et $0 \in V$ lorsqu'il existe un sous-voisinage ouvert :

$$0 \in W \subset U \cap V,$$

en restriction auquel elles coïncident :

$$f|_W = g|_W.$$

Cette identification \sim est une relation d'équivalence. La classe d'équivalence d'une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(U)$ définie dans un voisinage ouvert $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ sera notée :

$$f_0,$$

et sera appelée *germe de f en 0*.

On constate que \mathcal{O}_n est un anneau (exercice).

Lemme 2.2. L'anneau \mathcal{O}_n est intègre, identifiable à l'espace $\mathbb{C}\{z\} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ des séries entières convergentes dans des voisinages divers de l'origine :

$$\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z\} := \left\{ f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha z^\alpha : \exists R = R(f) > 0, \exists C = C(f) > 0, |a_\alpha| \leq C \cdot R^{|\alpha|} \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Démonstration. L'intégrité provient du principe d'identité, et la coïncidence $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z\}$ de la développabilité en série entière convergente des fonctions holomorphes. \square

Lorsque $n = 1$, l'anneau $\mathbb{C}\{z\}$ est principal (exercice), donc factoriel et noéthérien d'après les théorèmes qui précèdent, mais dès que $n \geq 2$, l'anneau $\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ n'est jamais principal, voir aussi l'Exercice 1.

Rappelons que le Théorème de Gauss et le Théorème de la base de Hilbert stipulent que l'anneau intègre $\mathbb{C}[z] = \mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ des polynômes en z_1, \dots, z_n à coefficients complexes est factoriel et noéthérien. Or puisque :

$$\mathbb{C}[z] = \left\{ \sum_{\text{finie}} a_\alpha z^\alpha \right\} \subset \left\{ \sum_{\substack{\text{infinie} \\ \text{convergente}}} a_\alpha z^\alpha \right\} = \mathbb{C}\{z\},$$

et puisque, d'une manière intuitive, lorsque le nombre de termes d'un polynôme tend vers l'infini, il s'« approche » des séries entières — fait qui pourrait être résumé sous forme d'un slogan :

« À l'infini, la Géométrie Algébrique se métamorphose en Géométrie Analytique »

—, on peut soupçonner que $\mathbb{C}\{z\}$ va hériter de la factorialité et de la noéthérianité de $\mathbb{C}[z]$.

Théorème 2.3. *L'anneau intègre $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z\}$ est factoriel.*

Toutefois, il existe une petite différence entre $\mathbb{C}[z]$ et $\mathbb{C}\{z\}$:

- les unités de $\mathbb{C}[z]$ sont les constantes non nulles :

$$\mathbb{C}[z]^\times = \mathbb{C}^*;$$

- tandis que les unités de $\mathbb{C}\{z\}$ sont :

$$\mathbb{C}\{z\}^\times = \{u \in \mathbb{C}\{z\} : u(0) \neq 0\} = \mathcal{O}_n^\times,$$

car $\frac{1}{u}$ est alors holomorphe près de 0, donc développable en série entière convergente. Notons que l'inverse d'un polynôme de degré ≥ 1 n'est jamais un polynôme !

Avant d'entamer la démonstration de factorialité de \mathcal{O}_n , rassemblons trois lemmes préliminaires qui vont montrer que les propriétés algébriques de \mathcal{O}_n sont reliées à — et même essentiellement équivalentes à — celles de l'anneau $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ des pseudo-polynômes :

$$b_0(z') z_n^e + b_1(z') z_n^{e-1} + \dots + b_e(z'),$$

en z_n à coefficients $b_j(z')$ holomorphes en $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$ près de $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$.

Rappelons aussi qu'un *polynôme de Weierstrass* est un élément unitaire de $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$:

$$z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \dots + a_d(z'),$$

dont les coefficients $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ s'annulent $a_i(0') = 0$ tous à l'origine $0' \in \mathbb{C}^{n-1}$. Afin de bien les différencier, leur espace sera noté :

$$\mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n] \subset \mathcal{O}_{n-1}[z_n].$$

Le premier lemme dit qu'un quotient régulier d'un polynôme par un polynôme de Weierstrass est nécessairement un polynôme.

Lemme 2.4. *Soit $P \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ un polynôme de Weierstrass, et soit un germe holomorphe $h \in \mathcal{O}_n$. Si $P h =: F \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est polynômial en z_n , alors en fait :*

$$h \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n].$$

La conclusion serait fautive en supposant seulement $P \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ (non de Weierstrass) : prendre $F = 1$, et $P = z_n + a(z')$ avec $a(0') \neq 0$, puis $h := \frac{1}{P}$, qui satisfait $P h = 1$ sans être polynomial en z_n .

Démonstration. Comme le coefficient dominant de P en z_n vaut 1, l'algorithme standard de division euclidienne de F par P dans l'anneau de polynômes à une variable $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est possible sans apparition de dénominateur, et il donne :

$$F = P Q + R,$$

avec un certain quotient $Q \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, et un certain reste $R \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de degré :

$$\deg_{z_n} R \leq \deg_{z_n} P - 1.$$

Nous pouvons alors raisonner comme lorsque nous avons établi l'unicité (facile) dans le théorème de division de Späth, c'est-à-dire en partant de :

$$P (h - Q) = R,$$

nous voyons que pour tout z' fixé près de $0'$, le polynôme $z_n \mapsto R(z'; z_n)$ doit avoir $\deg_{z_n} P$ racines comptées avec multiplicité, ce qui force $R \equiv 0$, donc par intégrité $h = Q \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. \square

Le deuxième lemme corrige un produit de pseudo-polynômes de manière à en faire un produit de polynômes de Weierstrass.

Lemme 2.5. Soit $P \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ un polynôme de Weierstrass. S'il existe un nombre fini de polynômes $Q_1, \dots, Q_K \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de degrés ≥ 1 tels que :

$$P = Q_1 \cdots Q_K,$$

alors il existe des unités $u_1, \dots, u_K \in \mathcal{O}_{n-1}^\times$, avec $u_1 \cdots u_K = 1$, et il existe des polynômes de Weierstrass $P_1, \dots, P_K \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ tels que :

$$Q_1 = u_1 P_1, \dots, Q_K = u_K P_K,$$

d'où :

$$P = P_1 \cdots P_K.$$

Démonstration. Soit $d := \deg P$, et, pour $k = 1, \dots, K$, soient $e_k := \deg Q_k \geq 1$, d'où :

$$d = e_1 + \cdots + e_K.$$

Le produit des coefficients dominants u_1, \dots, u_K respectifs de Q_1, \dots, Q_K doit être égal à celui, 1, de P , donc u_1, \dots, u_K sont des unités de \mathcal{O}_{n-1} , et elles satisfont $u_1 \cdots u_K = 1$.

Par extraction de ces coefficients dominants, on peut écrire :

$$Q_k = u_k P_k \quad (1 \leq k \leq K),$$

avec de nouveaux polynômes $P_k \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ qui sont unitaires, sans changer le produit :

$$P = u_1 P_1 \cdots u_K P_K = P_1 \cdots P_K.$$

Enfin, en posant $z' := 0'$, l'identité :

$$z_n^d = P(0'; z_n) = P_1(0'; z_n) \cdots P_K(0'; z_n),$$

force $P_k(0'; z_n) = z_n^{e_k}$ pour $k = 1, \dots, K$, ce qui montre bien que les polynômes P_1, \dots, P_K sont de Weierstrass. \square

En application des définitions algébriques, observons qu'un élément $f \in \mathcal{O}_n$ est *irréductible* si :

$$f = gh \quad \text{avec} \quad g, h \in \mathcal{O}_n \quad \implies \quad (g(0) \neq 0 \quad \text{ou} \quad h(0) \neq 0).$$

Par contraposée, $f \in \mathcal{O}_n$ est *réductible* si :

$$\exists g \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}, \quad g(0) = 0, \quad \exists h \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}, \quad h(0) = 0, \quad f = gh.$$

Le troisième lemme achève de convaincre que les propriétés analytiques de \mathcal{O}_n se ramènent aux propriétés algébriques des polynômes de Weierstrass.

Lemme 2.6. *Pour un polynôme de Weierstrass $P \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$:*

$$P \text{ est irréductible dans } \mathcal{O}_n \iff P \text{ est irréductible dans } \mathcal{O}_{n-1}[z_n].$$

Démonstration. Dans la contraposée :

$$P \text{ est réductible dans } \mathcal{O}_n \iff P \text{ est réductible dans } \mathcal{O}_{n-1}[z_n],$$

l'implication ' \Leftarrow ' provient du Lemme 2.5, puisque si $P = Q_1 Q_2$ avec $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ de degrés ≥ 1 , ce lemme fournit deux polynômes de Weierstrass $P_1, P_2 \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ tels que :

$$P = Q_1 Q_2 = P_1 P_2,$$

et comme $P_1(0) = P_2(0) = 0$ s'annulent à l'origine (par définition !), cela rend P réductible dans \mathcal{O}_n .

Pour établir ' \Rightarrow ', partons de l'hypothèse que :

$$P(z'; z_n) = h_1(z) \cdot h_2(z),$$

avec $h_1, h_2 \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$ non nuls et non inversibles, i.e. $h_i(0) = 0$. Soit $d := \deg_{z_n} P \geq 1$. En posant $z' = 0'$:

$$z_n^d = h_1(0', z_n) h_2(0', z_n),$$

il vient que $h_1(0', z_n)$ et $h_2(0', z_n)$ ont des ordres d'annulation $e_1 \geq 1$ et $e_2 \geq 1$ avec $d = e_1 + e_2$.

Donc on peut appliquer le Théorème de préparation de Weierstrass, qui fournit deux décompositions :

$$h_1 = u_1 P_1 \quad \text{et} \quad h_2 = u_2 P_2,$$

avec unités $u_i \in \mathcal{O}_n^\times$ et polynômes de Weierstrass $P_i \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ de degrés e_i , d'où en revenant plus haut :

$$P = u_1 u_2 P_1 P_2.$$

Le Lemme 2.4 montre alors que $u_1 u_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Mais avec $e_0 := \deg(u_1 u_2)$, l'égalité :

$$d = e_0 + e_1 + e_2$$

force $e_0 = 0$, d'où $u_1 u_2 \in \mathbb{C}^*$ est constant, et enfin $u_1 u_2 \equiv 1$, car P, P_1, P_2 sont unitaires. Ainsi :

$$P = P_1 P_2$$

est bien réductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, et même dans $\mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$. □

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 2.3, que nous ré-énoncerons auparavant sous une forme plus détaillée. En accord avec le formalisme algébrique, nous notons :

$$\mathcal{O}_n^* = \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$$

l'ensemble des germes en 0 de fonctions holomorphes non identiquement nulles.

Théorème 2.7. *L'anneau $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z\}$ des germes de fonctions holomorphes dans un voisinage de l'origine $0 \in \mathbb{C}^n$ est factoriel, à savoir pour tout $f \in \mathcal{O}_n^*$ non identiquement nul, il existe une unité $u \in \mathcal{O}_n^\times$ et il existe un nombre fini $\kappa \geq 1$ d'éléments irréductibles :*

$$f_1, \dots, f_\kappa \in \mathcal{O}_n^* \setminus \mathcal{O}_n^\times,$$

uniques à permutation près et à multiplication par une unité près, tels que :

$$f = u f_1 \cdots f_\kappa.$$

Plus précisément, si les coordonnées (z', z_n) sont adaptées à l'avance pour que $f(0', z_n) \neq 0$, alors :

$$f = u P_1 \cdots P_\kappa,$$

avec des polynômes de Weierstrass $P_1, \dots, P_\kappa \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ irréductibles et premiers, tout aussi bien dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ que dans \mathcal{O}_n .

Démonstration. En dimension $n = 1$, soit $z \in \mathbb{C}$, et soit un germe $f \in \mathcal{O}_1^*$ non nul. Si $f(0) \neq 0$, c'est une unité. Si $f(0) = 0$, une factorisation de son développement en série entière par la puissance maximale de z donne :

$$f(z) = z^d g(z),$$

avec $d \geq 1$ entier et $g \in \mathcal{O}_n^*$ déterminés de manière unique. On se convainc (exercice) que la fonction $z \mapsto z$ est l'unique élément premier (irréductible) de \mathcal{O}_1^* , ce qui conclut.

Soit maintenant $n \geq 2$, et supposons par récurrence que \mathcal{O}_{n-1} est factoriel. Quitte à effectuer un changement linéaire de coordonnées, on peut supposer que $f(0', z_n) \neq 0$. Le Théorème de préparation de Weierstrass représente alors :

$$f = u P,$$

avec une unité $u \in \mathcal{O}_n^\times$, et avec un polynôme :

$$P(z'; z_n) = z_n^d + a_1(z') z_n^{d-1} + \cdots + a_d(z'),$$

dont les coefficients $a_i \in \mathcal{O}_{n-1}$ s'annulent à l'origine.

Grâce au Théorème de Gauss, $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est factoriel, donc il existe une unité :

$$v \in (\mathcal{O}_{n-1}[z_n])^\times = \mathcal{O}_{n-1}^\times$$

et des polynômes irréductibles Q_1, \dots, Q_κ , uniques à permutation près et modulo \mathcal{O}_{n-1}^\times , tels que :

$$P = v Q_1 \cdots Q_\kappa.$$

Or puisqu'on peut absorber v dans $Q_1 \mapsto v Q_1$, on peut supposer $v = 1$.

Ensuite, le Lemme 2.5 réorganise les coefficients dominants $u_k \in \mathcal{O}_{n-1}^\times$ des Q_k pour aboutir à :

$$f = u P = u Q_1 \cdots Q_\kappa = u P_1 \cdots P_\kappa,$$

avec des polynômes de Weierstrass $P_k = u_k^{-1} Q_k \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n]$ tout aussi irréductibles dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ que les Q_k , donc irréductibles dans \mathcal{O}_n grâce au Lemme 2.6, ce qui démontre l'existence d'une décomposition.

Pour ce qui est de l'unicité, comme la théorie algébrique le met en œuvre, il suffit (exercice de révision) d'établir que tout élément irréductible de \mathcal{O}_n est premier,

Lemme 2.8. *Si un germe non nul irréductible $g \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$ divise un produit $f_1 f_2$ de germes $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_n \setminus \{0\}$, alors g divise f_1 ou g divise f_2 .*

Démonstration. Grâce au Théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer après élimination d'une unité que :

$$g, f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{n-1}^{\text{Wei}}[z_n].$$

Puisque g divise $f_1 f_2$ dans \mathcal{O}_n , le Lemme 2.4 montre que la divisibilité a en fait lieu dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Puisque g est irréductible dans \mathcal{O}_n , le Lemme 2.6 montre que g est aussi irréductible dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Or en raisonnant par récurrence sur n , nous avons supposé que \mathcal{O}_{n-1} est factoriel, donc $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ l'est aussi grâce au Théorème de Gauss, et enfin, puisque dans tout anneau factoriel, les éléments irréductibles sont premiers, $g \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$ est premier, divise $f_1 f_2$ avec $f_1, f_2 \in \mathcal{O}_{n-1}[z_n]$, donc divise f_1 ou divise f_2 . \square

Ce quatrième lemme montre donc que les irréductibles de \mathcal{O}_n sont premiers, ce qui garantit l'unicité d'une décomposition. \square

Tout germe $f \in \mathcal{O}_n$ admet (au moins) un *représentant*, c'est-à-dire peut être vu comme une vraie fonction holomorphe concrète $f \in \mathcal{O}(U)$ définie dans un certain voisinage ouvert $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$. On peut alors re-considérer les germes f_a de f autour de points quelconques $a \in U$.

Exemple 2.9. Si un germe $f \in \mathcal{O}_n$ est irréductible (en 0), il n'est pas nécessairement irréductible en des points a proches de 0, comme le montre, dans $\mathbb{C}^3 \ni (x, y, z)$, le polynôme $x^2 - y^2 z$ qui, autour des points $(0, 0, c)$ avec $c \neq 0$ se factorise :

$$(x + y \sqrt{z})(x - y \sqrt{z}).$$

Voici toutefois une première manifestation de la *cohérence* de \mathcal{O}_n au sens d'Oka, notion qui sera définie et étudiée ultérieurement. La factorialité de \mathcal{O}_n donne un bien-fondé au pgcd et au ppcm de toute famille finie de germes de fonctions holomorphes.

Théorème 2.10. *Si deux germes $f, g \in \mathcal{O}_n$ sont premiers entre eux en $a = 0$, alors pour tout $a \in \mathbb{C}^n$ près de 0, les germes f_a et g_a (de représentants de f et de g) sont aussi premiers entre eux.*

Démonstration. Si $f(0) \neq 0$ ou $g(0) \neq 0$, l'énoncé est trivial, donc supposons $f(0) = g(0) = 0$. Grâce au Théorème de préparation de Weierstrass, on peut supposer que :

$$f(z) = P(z'; z_n) \quad \text{et} \quad g(z) = Q(z'; z_n)$$

appartiennent tous deux à $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$. Le Lemme 2.6 et le Théorème 2.7 montrent qu'ils sont alors premiers entre eux non seulement dans \mathcal{O}_n , mais encore dans $\mathcal{O}_{n-1}[z_n]$.

Or le Théorème 1.35 exprime le fait que $f = f_0$ et $g = g_0$ sont premiers entre eux par la non-annulation :

$$\text{Res}_{z_n}(P, Q) \neq 0 \in \mathcal{O}_{n-1}.$$

Puisque cette fonction de z' est non identiquement nulle, le principe d'unicité assure qu'elle est aussi non identiquement nulle dans tout voisinage de tout point $a' \in \mathbb{C}^{n-1}$ proche de $0'$. Comme P et Q sont unitaires, leur résultant en tout point (a', a_n) proche de $0 \in \mathbb{C}^n$ est donné par le même déterminant, lequel est donc non identiquement nul localement, et une nouvelle application du Théorème 1.35 montre que les germes P_a et Q_a sont premiers entre eux. \square

Il reste à traiter la noethérianité, plus aisée que la factorialité.

Théorème 2.11. *L'anneau $\mathcal{O}_n = \mathbb{C}\{z\}$ des germes de fonctions holomorphes dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ est noethérien, et, pour tout entier $m \geq 1$, le \mathcal{O}_n -module :*

$$(\mathcal{O}_n)^{\oplus m}$$

est aussi noethérien.

Démonstration. La Proposition 1.10 facilite le travail en le restreignant au cas $m = 1$. On raisonne par récurrence sur la dimension $n \geq 1$.

• $n = 1$. Soit un idéal $I \subset \mathcal{O}_1$ avec $I \neq 0$ et $I \neq \mathcal{O}_1$, d'où $f(0) = 0$ pour tout $f \in I$. Une factorisation de série entière par la puissance maximale de z donne :

$$f = z^{d_f} g(z),$$

avec un entier $d_f \geq 1$ et une fonction holomorphe inversible $g \in \mathcal{O}_1^\times$, i.e. satisfaisant $g(0) \neq 0$. On vérifie (exercice) qu'avec l'entier :

$$d := \min_{f \in I \setminus \{0\}} d_f \geq 1,$$

on a $\langle z^d \rangle = I$, donc I est principal, donc noethérien. Ainsi, \mathcal{O}_1 est noethérien car principal, mais en dimension supérieure, \mathcal{O}_n perdra (heureusement) la principalité.

• $n \geq 2$. Par hypothèse de récurrence, \mathcal{O}_{n-1} est noethérien, puis la Proposition 1.10 montre que $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus m}$ est noethérien, pour tout $m \geq 1$.

Soit un idéal $I \subset \mathcal{O}_n$ avec $I \neq \{0\}$ et $I \neq \mathcal{O}_n$, d'où tout $f \in \mathcal{O}_n$ satisfait $f(0) = 0$. Après un changement linéaire de coordonnées et élimination d'une unité, I contient un polynôme de Weierstrass $P(z'; z_n)$ de degré $d \geq 1$.

Ensuite, on applique à tout autre élément $f \in I$ le Théorème de division de Stickelberger par P :

$$f(z) = q_f(z) P(z'; z_n) + R_f(z'; z_n),$$

avec $q_f \in \mathcal{O}_n$ et :

$$R_f(z'; z_n) = c_0(z') z_n^{d-1} + \cdots + c_{d-1}(z'),$$

d'où $R_f \in I$.

Introduisons alors :

$$\mathcal{C} := \{(c_0, \dots, c_{d-1}) \in \mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d} \text{ provenant de } R_f \text{ pour tous les } f \in I\}.$$

On voit (exercice visuel) que \mathcal{C} est un \mathcal{O}_{n-1} -sous-module de $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$. Comme on sait que $\mathcal{O}_{n-1}^{\oplus d}$ est noethérien, \mathcal{C} est engendré (Définition 1.8) par un nombre fini, disons $M \geq 1$, de vecteurs :

$$(c_0^{(m)}, \dots, c_{d-1}^{(m)}) \quad (1 \leq m \leq M).$$

Au final, on obtient l'engendrement fini :

$$I = \langle P, R^{(1)}, \dots, R^{(M)} \rangle,$$

où les $R^{(\bullet)}$ correspondent à ces vecteurs, lequel qui montre la noethérianité de \mathcal{O}_n . \square

3. Exercices

Exercice 1. (a) Montrer directement que pour $n = 1$, l'anneau $\mathcal{O}_n = \mathcal{O}_{n,0}$ est principal, noethérien, et factoriel.

(b) Montrer par un exemple que pour $n \geq 2$, l'anneau \mathcal{O}_n n'est pas principal.

Exercice 2.

[Nullstellensatz de Rückert]

Exercice 3.

RÉFÉRENCES

- [1] Lang, S. : *Algebra*. Revised third edition. Graduate Texts in Mathematics, 211. Springer-Verlag, New York, 2002. xvi+914 pp.
- [2] de Jong, T. ; Pfister, G : *Local analytic geometry. Basic theory and applications*. Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2000. xii+382 pp.

Théorème de cohérence d'Oka

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

It is no exaggeration to claim that Oka's theorem became a landmark in the development of function theory of several complex variables. Reinhold Remmert

1. Historique succinct

2. Énoncé

Dans un chapitre qui précède, nous avons démontré qu'en tout point fixé z de \mathbb{C}^n , avec $n \geq 1$, l'anneau \mathcal{O}_z des germes de fonctions holomorphes en z est noethérien. Le théorème suivant donne une information beaucoup plus profonde que la noethérianité ponctuelle, en autorisant des points w à varier localement dans un voisinage d'un point z de référence. Il exprime une propriété de finitude locale frappante pour la collection infinie non dénombrable des relations germiques entre les germes d'une famille finie de fonctions holomorphes, en *tous* les points d'un domaine. C'est cette découverte majeure qui a conduit, à la fin des années 1940, à conceptualiser la notion de *faisceau analytique cohérent*.

Rappelons que le germe en un point w d'une fonction holomorphe $G = G(z)$ définie près de w est noté :

$$\underline{G}_w = \underline{G(z)}_w.$$

Théorème 2.1. [de cohérence d'Oka] *Dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, avec $n \geq 1$, pour tous entiers $P \geq 1$ et $Q \geq 1$, pour toute famille de Q fonctions holomorphes vectorielles à valeurs dans \mathbb{C}^P :*

$$F_1, \dots, F_Q \in \mathcal{O}(\Omega)^P,$$

ayant pour composantes :

$$(F_{q,p})_{1 \leq p \leq P} = F_q \quad (1 \leq q \leq Q),$$

et pour tout point $w \in \Omega$, soit le \mathcal{O}_w -sous-module de \mathcal{O}_w^Q des relations entre les germes en w de F_1, \dots, F_Q :

$$\mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q) := \left\{ (g_{1,w}, \dots, g_{Q,w}) \in \mathcal{O}_w^Q : 0 = g_{1,w} \underline{F_1(z)}_w + \dots + g_{Q,w} \underline{F_Q(z)}_w \right\}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \forall z_0 \in \Omega \quad \exists \text{ sous-ouvert } \omega \subset \Omega \\ \exists R \geq 1 \quad \exists G_1, \dots, G_R \in \mathcal{O}(\omega)^Q \end{aligned}$$

tels que en tout point $w \in \omega$:

$$\mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q) = \mathcal{O}_w \underline{G_{1,w}} + \dots + \mathcal{O}_w \underline{G_{R,w}}.$$

Autrement dit, en tout point $w \in \omega$, il existe des germes $e_{1,w}, \dots, e_{R,w} \in \mathcal{O}_w$ tels que :

$$g_{q,w} = \sum_{1 \leq r \leq R} e_{r,w} \underline{G_{r,q}}_w \quad (1 \leq q \leq Q).$$

Démonstration. Examinons tout d'abord le cas simple $P = 1$ en dimension $n = 1$. Soient donc $F_1, \dots, F_Q \in \mathcal{O}(\Omega)$, et soit, après translation, $z_0 = 0 \in \Omega$. Bien sûr, on peut supposer toutes ces $F_q \not\equiv 0$ près de 0.

Ainsi, il existe $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_Q$ entiers, il existe des constantes $c_q \neq 0$, et il existe des fonctions-restes $E_q(z) = O(z)$ holomorphes d'ordre ≥ 1 près de 0 tels que :

$$F_q(z) = z^{d_q} (c_q + E_q(z)) \quad (1 \leq q \leq Q).$$

Mais alors, déterminer $\mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q)$ pour w près de l'origine revient à résoudre en les germes inconnus $g_{q,w}$ l'équation :

$$0 = \underline{z}^{d_1}_w \left[g_{1,w} (c_1 + \underline{E_{1,w}}) + g_{2,w} \underline{z}^{d_2-d_1}_w (c_2 + \underline{E_{2,w}}) + \dots + g_{Q,w} \underline{z}^{d_Q-d_1}_w (c_Q + \underline{E_{Q,w}}) \right]$$

et comme le germe en facteur est non nul — \mathcal{O} est un faisceau d'anneaux intègres! —, cela revient à résoudre :

$$0 = g_{1,w} \underline{(c_1 + E_1)}_w + g_{2,w} \underline{D_{2,w}} + \dots + g_{Q,w} \underline{D_{Q,w}},$$

avec de nouvelles fonctions holomorphes D_2, \dots, D_Q définies près de 0.

Cette équation hyperplane étant linéaire avec un premier coefficient ne s'annulant pas, il est clair que l'espace de ses solutions est engendré par les germes des $Q - 1$ vecteurs indépendants :

$$G_1 := \left(1, \frac{-D_2}{c_1 + E_1}, 0, \dots, 0, 0 \right),$$

.....

$$G_{Q-1} := \left(1, 0, 0, \dots, 0, \frac{-D_Q}{c_1 + E_1} \right),$$

à savoir, il est clair qu'il existe $\lambda_{1,w}, \dots, \lambda_{Q-1,w} \in \mathcal{O}_w$ tels que :

$$(g_{1,w}, \dots, g_{Q,w}) = \lambda_{1,w} \underline{G_1}_w + \dots + \lambda_{Q-1,w} \underline{G_{Q-1}}_w. \quad \Delta$$

Lemme 2.2. *En dimension fixée $n \geq 1$, pour tout $P \geq 2$, si le théorème est vrai (par récurrence) quels que soient (P', Q') avec $1 \leq P' \leq P - 1$ et $Q' \geq 1$ quelconque, alors il est vrai quels que soient (P, Q) avec $Q \geq 1$ quelconque.*

Démonstration. Soit donc $P \geq 2$, soient $F_1, \dots, F_Q \in \mathcal{O}(\Omega)^P$, et soit $z \in \Omega$. Pour w près de z , un germe $(g_{1,w}, \dots, g_{Q,w}) \in \mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q)$ doit satisfaire les P équations scalaires :

$$0 = g_{1,w} \underline{F_{1,w}} + \dots + g_{Q,w} \underline{F_{Q,w}} = \left(\sum_{1 \leq q \leq Q} g_{q,w} \underline{F_{q,p}} \right)_{1 \leq p \leq P},$$

donc en particulier la première :

$$0 = g_{1,w} \underline{F_{1,1}}_w + \dots + g_{Q,w} \underline{F_{Q,1}}_w.$$

Comme $1 \leq P - 1$, l'hypothèse (de récurrence) s'applique, donc il existe un nombre $s \geq 1$ de fonctions holomorphes à valeurs dans \mathbb{C}^Q définies dans un certain sous-voisinage ouvert $z \in \omega \subset \Omega$:

$$H_1, \dots, H_s \in \mathcal{O}(\omega)^Q,$$

telles que, pour tout $w \in \omega$:

$$(g_{1,w}, \dots, g_{Q,w}) \in \sum_{1 \leq s \leq S} \mathcal{O}_w \cdot \left(\underline{H_{s,1,w}}, \dots, \underline{H_{s,Q,w}} \right),$$

à savoir, il existe des germes $h_{s,w} \in \mathcal{O}_w$ qui représentent :

$$g_{q,w} = \sum_{1 \leq s \leq S} h_{s,w} \underline{H_{s,q,w}} \quad (1 \leq q \leq Q, w \in \omega).$$

La première équation étant satisfaite, il reste à remplir les $P - 1$ dernières :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq q \leq Q} g_{q,w} \underline{F_{q,p,w}} \\ \text{[Remplacer]} &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{1 \leq s \leq S} h_{s,w} \underline{H_{s,q,w}} \underline{F_{q,p,w}} \\ &= \sum_{1 \leq s \leq S} h_{s,w} \left(\underbrace{\sum_{1 \leq q \leq Q} \underline{H_{s,q,w}} \underline{F_{q,p,w}}}_{=: \underline{I_{s,p,w}}} \right) \quad (2 \leq p \leq P), \end{aligned}$$

ce qui fait apparaître S nouvelles fonctions holomorphes $I_1, \dots, I_S \in \mathcal{O}(\omega)^{P-1}$ à valeurs dans \mathbb{C}^{P-1} .

Pour résoudre ces $P - 1$ équations en les inconnues $h_{s,w}$, l'hypothèse (de récurrence) s'applique à nouveau et fournit un sous-ouvert de ω contenant z , que nous noterons encore ω , et un nombre $R \geq 1$ de fonctions holomorphes $E_1, \dots, E_R \in \mathcal{O}(\omega)^S$ qui les représentent en un point quelconque $w \in \omega$ sous la forme :

$$h_{s,w} = \sum_{1 \leq r \leq R} e_{r,w} \underline{E_{r,s,w}} \quad (1 \leq s \leq S),$$

au moyen de certains germes $e_{r,w} \in \mathcal{O}_w$.

Alors un dernier remplacement :

$$\begin{aligned} g_{q,w} &= \sum_{1 \leq s \leq S} h_{s,w} \underline{H_{s,q,w}} \\ &= \sum_{1 \leq s \leq S} \sum_{1 \leq r \leq R} e_{r,w} \underline{E_{r,s,w}} \underline{H_{s,q,w}} \\ &= \sum_{1 \leq r \leq R} e_{r,w} \left(\underbrace{\sum_{1 \leq s \leq S} \underline{E_{r,s,w}} \underline{H_{s,q,w}}}_{=: \underline{G_{r,q,w}}} \right) \quad (1 \leq q \leq Q), \end{aligned}$$

produit les fonctions holomorphes $G_1, \dots, G_R \in \mathcal{O}(\omega)^Q$ qui engendrent uniformément et finiment les relations $\mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q)$ en tout point $w \in \omega$. \square

Grâce à ce résultat ponctuel, dont la démonstration est assez proche de celle qui établit la noéthérianité d'un anneau germique \mathcal{O}_z , nous savons maintenant qu'en dimension $n = 1$, le théorème est vrai pour tout $P \geq 1$ et tout $Q \geq 1$.

Il reste encore à s'élever en dimension, et c'est là qu'interviennent réellement les idées d'Oka et de Weierstrass.

Proposition 2.3. [Principale] *Pour $n \geq 2$, si le théorème est vrai (par récurrence) en dimension $n - 1$ pour tout $P' \geq 1$ et pour tout $Q' \geq 1$, alors il est vrai en dimension n pour $P = 1$ et pour tout $Q \geq 1$.*

Démonstration. Avec $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ ouvert, soient donc un nombre $Q \geq 1$ de fonctions holomorphes scalaires $F_1, \dots, F_Q \in \mathcal{O}(\Omega)$, et soit, après translation, un point $z_0 = 0 \in \Omega$. On peut supposer $F_q \neq 0$ près de $z_0 = 0$ pour tout $q = 1, \dots, Q$.

Soient aussi les ordres d'annulation en 0 de ces fonctions :

$$d_q := \min \{ |\alpha| : \alpha \in \mathbb{N}^n, \frac{\partial^{|\alpha|} F_q}{\partial z^\alpha}(0) \neq 0 \} \quad (1 \leq q \leq Q).$$

Après renumérotation éventuelle, on peut aussi supposer que $0 \leq d_1 \leq \dots \leq d_Q$, d'où :

$$d_1 = \min_{1 \leq q \leq Q} d_q \quad \text{et} \quad d_Q = \max_{1 \leq q \leq Q} d_q.$$

Après une transformation linéaire, on peut aussi supposer que les coordonnées ambiantes $z = (z', z_n) \in \mathbb{C}^{n-1} \times \mathbb{C}$ satisfont :

$$d_q = \text{ord}_0 (z_n \mapsto F_q(0', z_n)) \quad (1 \leq q \leq Q),$$

donc le théorème de préparation de Weierstrass fournit un sous-ouvert de la forme produit :

$$0 \in \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n} = \{ |z'| < \rho' \} \times \{ |z_n| < \rho_n \} \subset \Omega \quad (\rho' > 0, \rho_n > 0)$$

dans lequel existent des décompositions :

$$F_q(z) = U_q(z) P_q(z'; z_n) \quad (1 \leq q \leq Q),$$

avec des fonctions holomorphes-unités U_q définies dans $\mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$ ne s'annulant jamais, et avec des polynômes de Weierstrass :

$$P_q(z'; z_n) = z_n^{d_q} + P_{q,1}(z') z_n^{d_q-1} + \dots + P_{q,d_q}(z'),$$

dont les coefficients s'annulent tous $0 = P_{q,i_q}(0')$ à l'origine de \mathbb{C}^{n-1} , pour $1 \leq i_q \leq d_q$.

Mais alors, par transfert de ces facteurs-unités U_q , on a les isomorphismes en tout point $w \in \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$:

$$\mathcal{R}_w(F_1, \dots, F_Q) \cong \mathcal{R}_w(P_1, \dots, P_Q),$$

simplement parce que les équations :

$$0 = g_{1,w} \underline{F}_{1w} + \dots + g_{Q,w} \underline{F}_{Qw} \quad \text{et} \quad 0 = h_{1,w} \underline{P}_{1w} + \dots + h_{Q,w} \underline{P}_{Qw}$$

sont équivalentes *via* :

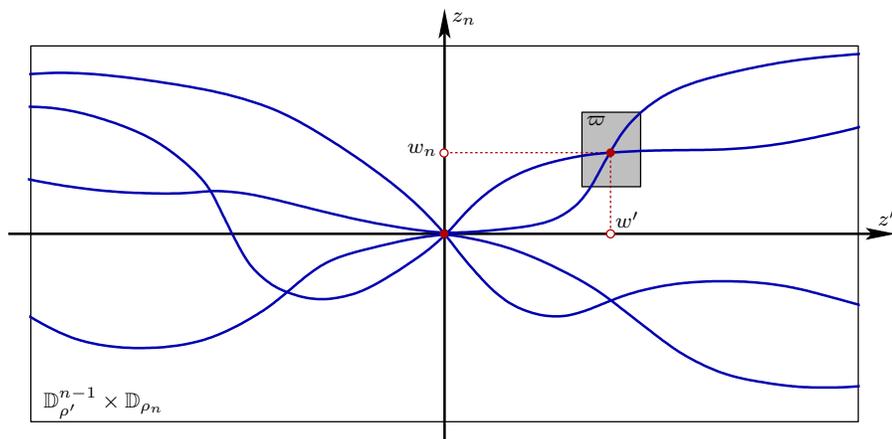
$$g_{q,w} \underline{U}_{qw} = h_{q,w} \iff g_{q,w} = \frac{1}{\underline{U}_{qw}} h_{q,w} \quad (1 \leq q \leq Q).$$

Il suffit donc de travailler, pour la suite, avec ces polynômes de Weierstrass P_1, \dots, P_Q , et le fait qu'ils soient *polynomiaux* en la dernière variable z_n va s'avérer être un point-clé pour la réalisation d'un argument de récurrence sur la dimension $n \geq 2$, puisqu'un polynôme n'est pas un germe, il possède *de facto* une essence globale.

Dans la preuve du cas initial simple $n = 1, P = 1$, nous avons déjà entrevu l'existence générale de $Q - 1$ *solutions triviales* :

$$\begin{aligned} (h_{1,w}, \dots, h_{Q,w}) &= \left(\underline{P}_{qw}, 0, \dots, 0, -\underline{P}_{1w}, 0, \dots, 0 \right) \\ &=: \underline{T}_{qw} \in \mathcal{R}_w(P_1, \dots, P_Q) \end{aligned} \quad (2 \leq q \leq Q),$$

et dans un instant, il va s'avérer incontournable et avantageux d'en tenir compte.



Puisqu'il s'agit de localiser l'étude au voisinage d'un point quelconque $w = (w', w_n) \in \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$, récrivons chaque P_q sous la forme :

$$\begin{aligned} P_q(z'; z_n) &= (z_n - w_n + w_n)^{d_q} + P_{q,1}(z') (z_n - w_n + w_n)^{d_q-1} + \cdots + P_{q,d_q}(z') \\ &=: (z_n - w_n)^{d_q} + N_{q,1}(z') (z_n - w_n)^{d_q-1} + \cdots + N_{q,d_q}(z'). \end{aligned}$$

Sélectionnons ensuite $q = 1$, donc regardons seulement P_1 . La présence de la puissance la plus élevée $(z_n - w_n)^{d_1}$ garantit alors la finitude de l'ordre :

$$e_1 := \text{ord}_{z_n=w_n}(z_n \mapsto P_1(w'; z_n)) \leq d_1 < \infty,$$

lequel est d'ailleurs donné en ces termes tout simplement par :

$$e_1 = d_1 - \max \{0 \leq i_1 \leq d_1 : N_{1,i_1}(w') \neq 0\}.$$

Dans la figure, l'ordre de P_1 en $z = 0$ vaut 4, et en $z = w$, il vaut 2. Évidemment, pour la plupart des $w \in \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$, cet ordre vaut en fait 0 !

Grâce à $e_1 < \infty$, le théorème de préparation de Weierstrass s'applique pour fournir un sous-sous-voisinage ouvert :

$$w \in \varpi \subset \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n} \subset \Omega,$$

de la forme produit $\varpi = \varpi' \times \varpi_n$, avec une fonction holomorphe jamais nulle dans ϖ envisagée comme un germe :

$$v_{1,w} \in \mathcal{O}(\varpi),$$

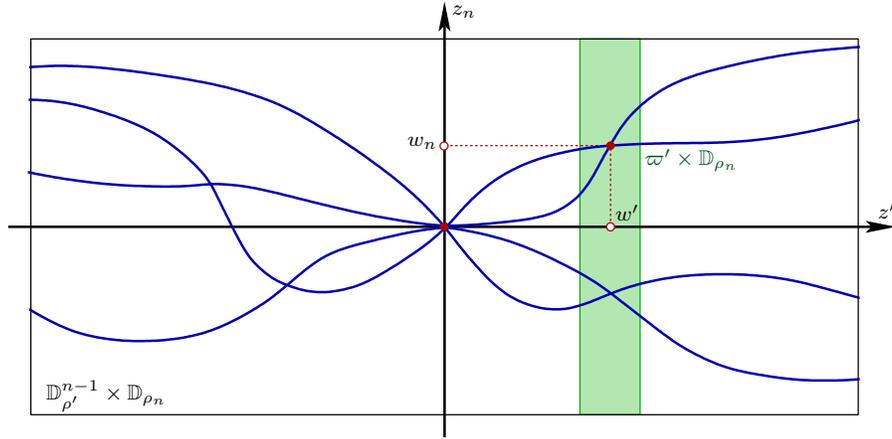
ainsi qu'un polynôme de Weierstrass :

$$\begin{aligned} Q_{1,w}^*(z'; z_n - w_n) &\in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n], \\ \deg_{z_n-w_n} Q_{1,w}^* &= e_1, \end{aligned}$$

à coefficients locaux (germiques) dans les variables horizontales $z' - w'$ tels que :

$$(2.4) \quad \underline{P}_{1,w} = v_{1,w} \cdot Q_{1,w}^*.$$

Le point-clé ici, c'est que la dernière variable $z_n - w_n$ du germe $Q_{1,w}^*$ devient globale, puisqu'elle est polynomiale, contrairement à ses coefficients, qui dépendent de la variable horizontale $z' \sim w'$ et qui ne sont définis que dans le tout petit ouvert $\varpi' \subset \mathbb{C}^{n-1}$ autour de w' .



Géométriquement, une *globalisation verticale* s'exerce : on passe du petit ouvert ϖ_n à l'ouvert-colonne $\varpi' \times \{|z_n| < \rho_n\}$, ce qui s'annonce favorable en direction d'une récurrence sur la dimension $n \geq 2$.

Notation 2.5. Les « bons » éléments de :

$$\mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n]$$

qui sont intermédiaires entre les germes purs de $\mathcal{O}_{n,w}$ et les fonctions holomorphes « globales » définies dans $\mathbb{D}_{\rho'}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$, seront notés avec une étoile, comme $Q_{1,w}^*$ ci-dessus.

Rappelons à présent un lemme-clé vu auparavant, qui s'énonce pour les besoins présents sous la forme suivante.

Lemme 2.6. *Soit polynôme de Weierstrass $Q \in \mathcal{O}_{n-1,w'}^{\text{Wei}}[z_n - w_n]$ unitaire à coefficients s'annulant en $z' = w'$, et soit un germe $v \in \mathcal{O}_{n,w}$. Si $vQ \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n]$ est encore un polynôme en $z_n - w_n$, alors en fait, $v \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n]$ l'est aussi. \square*

De la représentation (2.4) de Weierstrass laissée sur le bord du chemin plus haut, nous déduisons donc la polynomialité de :

$$v_{1,w} \equiv V_{1,w}^* \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n],$$

ce qui nous conduit à la récrire :

$$\underline{P}_{1,w} = V_{1,w}^* \cdot Q_{1,w}^*.$$

Bien entendu :

$$\deg_{z_n - w_n} V_{1,w}^* = d_1 - e_1.$$

Prenons maintenant un germe quelconque en w de relation :

$$h_w = (h_{1,w}, h_{2,w}, \dots, h_{Q,w}) \in \mathcal{R}_w(P_1, P_2, \dots, P_Q),$$

et divisons $h_{2,w}, \dots, h_{Q,w}$ par ce polynôme de Weierstrass $Q_{1,w}^*$, ce qui donne dans un sous-sous-sous-voisinage de w que nous noterons encore ϖ :

$$\begin{aligned} h_{q,w} &= s_{q,w} Q_{1,w}^* + R_{q,w}^* \\ &= \frac{s_{q,w}}{v_{1,w}} \underline{P}_{1,w} + R_{q,w}^* \end{aligned} \quad (2 \leq q \leq Q),$$

avec des germes-quotients $s_{q,w} \in \mathcal{O}_{n,w}$ (en fait des fonctions holomorphes définies dans ϖ), ainsi que des polynômes-restes :

$$R_{q,w}^* \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n] \tag{2 \leq q \leq Q},$$

de degrés en $z_n - w_n$:

$$\deg R_{q,w}^* \leq \deg Q_{1,w}^* - 1 = e_1 - 1 \tag{2 \leq q \leq Q}.$$

Ensuite, ajoutons à h_w une combinaison appropriée des relations triviales de manière à faire disparaître le plus de quotients $s_{q,w}$ possible :

$$\begin{aligned} h_w + \sum_{2 \leq q \leq Q} \frac{s_{q,w}}{v_{1,w}} T_{q,w} &= (h_{1,w}, h_{2,w}, \dots, h_{Q,w}) + \sum_{2 \leq q \leq Q} \frac{s_{q,w}}{v_{1,w}} \left(\underline{P}_q, \dots, -\underline{P}_{1,w}, \dots, 0 \right) \\ &= (h_{1,w}, h_{2,w}, \dots, h_{Q,w}) + \frac{s_{2,w}}{v_{1,w}} \left(\underline{P}_{2,w}, -\underline{P}_{1,w}, 0, \dots, 0, 0 \right) + \\ &\quad + \dots + \\ &\quad + \frac{s_{Q,w}}{v_{1,w}} \left(\underline{P}_{Q,w}, 0, 0, \dots, 0, -\underline{P}_{1,w} \right) \\ &= \left(\underbrace{h_{1,w} + \frac{s_{2,w}}{v_{1,w}} \underline{P}_{2,w} + \dots + \frac{s_{Q,w}}{v_{1,w}} \underline{P}_{Q,w}}_{=: r_{1,w}}, h_{2,w} - \frac{s_{2,w}}{v_{1,w}} \underline{P}_{1,w}, \dots, h_{Q,w} - \frac{s_{Q,w}}{v_{1,w}} \underline{P}_{1,w} \right) \\ &= \left(r_{1,w}, R_{2,w}^*, \dots, R_{Q,w}^* \right). \end{aligned}$$

Dans le résultat obtenu, la bonne nouvelle, c'est que les $Q - 1$ dernières composantes-germes $R_{2,w}^*, \dots, R_{Q,w}^*$ sont polynomiales en $z_n - w_n$, ce qui est favorable pour exécuter un raisonnement par récurrence sur $n \geq 2$. Mais la première composante $r_{1,w}$ n'appartient pas *a priori* à $\mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n]$. Heureusement :

Assertion 2.7. *Le produit $r_{1,w} v_{1,w} =: S_{1,w}^* \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n]$.*

Preuve. En effet, puisque le calcul que nous venons de conduire nous a fourni une relation :

$$(r_{1,w}, R_{2,w}^*, \dots, R_{Q,w}^*) \in \mathcal{R}_w(P_1, P_2, \dots, P_Q),$$

nous devons avoir :

$$0 = r_{1,w} \underline{P}_{1,w} + R_{2,w}^* \underline{P}_{2,w} + \dots + R_{Q,w}^* \underline{P}_{Q,w},$$

c'est-à-dire avec un membre de droite polynomial :

$$r_{1,w} v_{1,w} Q_{1,w}^* = -R_{2,w}^* \underline{P}_{2,w} - \dots - R_{Q,w}^* \underline{P}_{Q,w} \in \mathcal{O}_{n-1,w'}[z_n - w_n],$$

et puisque $Q_{1,w}^*$ est un polynôme de Weierstrass en $z_n - w_n$ au point $w = (w', w_n)$, le Lemme 2.6 magique s'applique à nouveau ! □

Grâce à tous ces calculs et observations, nous pouvons maintenant constater :

$$\begin{aligned}
 h_w + \sum_{2 \leq q \leq Q} \frac{s_{q,w}}{v_{1,w}} T_{q,w} &= \frac{1}{v_{1,w}} \left(r_{1,w} v_{1,w}, v_{1,w} R_{2,w}^*, \dots, v_{1,w} R_{Q,w}^* \right) \\
 &= \frac{1}{v_{1,w}} \left(S_{1,w}^*, V_{1,w}^* R_{2,w}^*, \dots, V_{1,w}^* R_{Q,w}^* \right) \\
 (2.8) \qquad \qquad \qquad &=: \frac{1}{v_{1,w}} \left(S_{1,w}^*, S_{2,w}^*, \dots, S_{Q,w}^* \right)
 \end{aligned}$$

qu'après correction par des combinaisons linéaires appropriées de relations triviales, le germe quelconque de relation $h_w \in \mathcal{R}_w$ se ramène à des relations entre germes qui sont globaux dans la direction z_n .

Avant d'appliquer l'hypothèse de récurrence, prenons le temps d'estimer les degrés en $z_n - w_n$ de ces divers objets. En partant de :

$$S_{1,w}^* Q_{1,w}^* = -R_{2,w}^* P_{2,w} - \dots - R_{Q,w}^* P_{Q,w},$$

nous pouvons estimer le degré en $z_n - w_n$ du produit :

$$\begin{aligned}
 \deg(S_{1,w}^* Q_{1,w}^*) &\leq \max_{2 \leq q \leq Q} \left(\deg R_{q,w}^* + \deg P_q \right) \\
 &\leq \max_{2 \leq q \leq Q} (e_1 - 1 + d_q) \\
 &= e_1 - 1 + d_Q,
 \end{aligned}$$

d'où pour le premier facteur :

$$\begin{aligned}
 \deg S_1^* &\leq -\deg Q_{1,w}^* + e_1 - 1 + d_Q \\
 &= d_Q - 1.
 \end{aligned}$$

Ensuite pour tout $2 \leq q \leq Q$, en revenant à $S_{q,w}^* := V_{1,w}^* R_{q,w}^*$, il vient :

$$\begin{aligned}
 \deg S_{q,w}^* &\leq \deg V_{1,w}^* + \deg R_{q,w}^* \\
 &\leq d_1 - e_1 + e_1 - 1 \\
 &= d_1 - 1.
 \end{aligned}$$

En conséquence, abrégeons :

$$\delta_1 := d_Q - 1, \quad \delta_2 := d_1 - 1 + d_Q - d_2, \quad \dots, \quad \delta_Q := d_1 - 1 + d_Q - d_Q,$$

et observons la constance :

$$d_1 + \delta_1 = d_2 + \delta_2 = \dots = d_Q + \delta_Q = d_1 + d_Q - 1.$$

3. Fin de la démonstration [Erreur dans les livres]

Ainsi, il existe des germes $t_{q,i_q,w'}$ qui sont les coefficients dans les développements :

$$S_{q,w}^* = \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n - w_n)_{w_n}^{\delta_q - i_q}}{w_n} t_{q,i_q,w'} \quad (1 \leq q \leq Q),$$

ce que l'on peut récrire avec de nouveaux germes sous la forme [Erreur] :

$$S_{q,w}^* = \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n)_{w_n}^{\delta_q - i_q}}{w_n} s_{q,i_q,w'}.$$

Avec l'expression initiale des polynômes de Weierstrass $P_q(z'; z_n)$:

$$\underline{P}_{q,w} = \sum_{0 \leq j_q \leq d_q} \frac{(z_n)^{d_q - j_q}}{w_n} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'},$$

la détermination de $\mathcal{R}_w(P_1, \dots, P_Q)$, après la réduction (2.8) modulo les relations triviales, devient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq q \leq Q} S_{q,w}^* \underline{P}_{q,w} \\ &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \left(\sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} s_{q,i_q,w'} \right) \left(\sum_{0 \leq j_q \leq d_q} \frac{(z_n)^{d_q - j_q}}{w_n} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \right) \\ &= \sum_{0 \leq \ell \leq d_1 + d_Q - 1} \frac{(z_n)^{d_1 + d_Q - 1 - \ell}}{w_n} \left(\sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q = \ell \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q}} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \right). \end{aligned}$$

Alors une identification à zéro des coefficients des puissances de \underline{z}_n donne un système de $d_1 + d_Q$ relations entre germes dans l'espace \mathbb{C}^{n-1} à $(n-1)$ variables (z_1, \dots, z_{n-1}) :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q = \ell \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q}} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \\ &(\forall w' \in \mathbb{D}_{\rho'}^{n-1}, \forall 0 \leq \ell \leq d_1 + d_Q - 1). \end{aligned}$$

Clairement, l'hypothèse (de récurrence) de la Proposition 2.3 s'applique pour fournir un rayon positif $0 < \rho'' \leq \rho'$ et un nombre fini $R' \geq 1$ de fonctions holomorphes :

$$S_{r',q,i_q}(z') \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{\rho''}^{n-1}) \quad (1 \leq r' \leq R'),$$

dont les germes engendrent ces relations au sens où, en tout point $w' \in \mathbb{D}_{\rho''}^{n-1}$, il existe des germes $u_{r',w'} \in \mathcal{O}_{n-1,w'}$ tels que :

$$s_{q,i_q,w'} = \sum_{1 \leq r' \leq R'} u_{r',w'} \underline{S}_{r',q,i_q}(z')_{w'}.$$

Pour terminer, il suffit de remplacer :

$$\begin{aligned} S_{q,w}^* &= \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} \left(\sum_{1 \leq r' \leq R'} u_{r',w'} \underline{S}_{r',q,i_q}(z')_{w'} \right) \\ &= \sum_{1 \leq r' \leq R'} u_{r',w'} \underbrace{\left(\sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} \underline{S}_{r',q,i_q}(z')_{w'} \right)}_{=: \underline{G}_{r',q}(z'; z_n)_w}, \end{aligned}$$

ce qui introduit $R' \cdot Q$ nouvelles fonctions holomorphes $\underline{G}_{r',q}(z'; z_n)$ définies dans $\mathbb{D}_{\rho''}^{n-1} \times \mathbb{D}_{\rho_n}$, puis en revenant à (2.8) :

$$h_w = - \sum_{2 \leq q \leq Q} \frac{s_{q,w}}{v_{1,w}} \underline{T}_{q,w} + \sum_{1 \leq r' \leq R'} \frac{u_{r',w'}}{v_{1,w}} \underline{G}_{r'}(z)_w. \quad \square$$

Grâce à la Proposition 2.3, nous atteignons la dimension $n = 2$, seulement pour $P = 1$, et pour tout $Q \geq 1$. Mais une nouvelle application du Lemme 2.2 nous permet d'atteindre, toujours en dimension $n = 2$, tous les $P \geq 1$ et tous les $Q \geq 1$, et ensuite, les engrenages mécaniques de ce lemme et de cette proposition achèvent, par récurrence double sur n et sur P , de dévorer le théorème. \square

4. Arguments corrects

Fin de la démonstration du Théorème 2.1. Ainsi, il existe des germes $s_{q,i_q,w'}$ qui sont les coefficients dans les développements :

$$S_{q,w}^* = \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n - w_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} s_{q,i_q,w'} \quad (1 \leq q \leq Q).$$

Avec l'expression initiale des polynômes de Weierstrass $P_q(z'; z_n)$:

$$\underline{P}_{q,w} = \sum_{0 \leq j_q \leq d_q} \frac{(z_n)^{d_q - j_q}}{w_n} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'},$$

la détermination de $\mathcal{R}_w(P_1, \dots, P_Q)$, après la réduction (2.8) modulo les relations triviales, devient :

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{1 \leq q \leq Q} S_{q,w}^* \underline{P}_{q,w} \\ &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \left(\sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n - w_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} s_{q,i_q,w'} \right) \left(\sum_{0 \leq j_q \leq d_q} \frac{(z_n - w_n + w_n)^{d_q - j_q}}{w_n} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \right) \\ &= \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \sum_{0 \leq j_q \leq d_q} \sum_{0 \leq k_q \leq d_q - j_q} \frac{(z_n - w_n)^{\delta_q - i_q + d_q - j_q - k_q}}{w_n} \binom{d_q - j_q}{k_q} (w_n)^{k_q} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \\ &= \sum_{0 \leq \ell \leq d_1 + d_Q - 1} \frac{(z_n - w_n)^{d_1 + d_Q - 1 - \ell}}{w_n} \left\{ \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q + k_q = \ell \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q \\ 0 \leq k_q \leq d_q - j_q}} \binom{d_q - j_q}{k_q} (w_n)^{k_q} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \right\}, \end{aligned}$$

ceci au sens des germes, *i.e.* dans $\mathbb{C}\{z' - w', z_n - w_n\}$, et en tout point $w = (w', w_n)$:

$$\forall w' \quad \text{et} \quad \forall w_n.$$

Tous les coefficients des puissances de $\frac{(z_n - w_n)}{w_n}$ doivent donc s'annuler dans $\mathbb{C}\{z' - w'\}$:

$$0 = \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q + k_q = \ell \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q \\ 0 \leq k_q \leq d_q - j_q}} \binom{d_q - j_q}{k_q} (w_n)^{k_q} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'},$$

ce :

$$\forall w', \quad \forall w_n, \quad \forall 0 \leq \ell \leq d_1 + d_Q - 1.$$

Avec la convention que $P_{q,j_q} := 0$ pour $j_q < 0$ et $j_q > d_q$, ces équations peuvent être réorganisées en collectant les puissances de w_n :

$$0 = \sum_{0 \leq \kappa \leq d_Q} (w_n)^\kappa \left[\sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q = \ell - \kappa \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q}} \binom{d_q - j_q}{\kappa} s_{q,i_q,w'} \underline{P}_{q,j_q}(z')_{w'} \right].$$

Mais puisque ces annulations doivent être vérifiées $\forall w_n$, en faisant $w_n = 0$, puis en dérivant un nombre fini de fois par rapport à w_n en $w_n = 0$, nous voyons que tous les coefficients des puissances de w_n doivent s'annuler, et donc nous obtenons un système pur dans les $(n - 1)$ variables z' et w' , à savoir les annulations suivantes dans $\mathbb{C}\{z' - w'\}$:

$$0 = \sum_{1 \leq q \leq Q} \sum_{\substack{i_q + j_q = \ell - \kappa \\ 0 \leq i_q \leq \delta_q \\ 0 \leq j_q \leq d_q}} \binom{d_q - j_q}{\kappa} s_{q, i_q, w'} \underline{P_{q, j_q}(z')}_{w'}$$

$(\forall w', \forall 0 \leq \ell \leq d_1 + d_Q - 1, \forall 0 \leq \kappa \leq d_Q).$

L'hypothèse (de récurrence) de la Proposition 2.3 s'applique pour fournir un rayon positif $0 < \rho'' \leq \rho'$ et un nombre fini $R' \geq 1$ de fonctions holomorphes :

$$S_{r', q, i_q}(z') \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_{\rho''}^{n-1}) \quad (1 \leq r' \leq R'),$$

dont les germes engendrent ces relations au sens où, en tout point $w' \in \mathbb{D}_{\rho''}^{n-1}$, il existe des germes $u_{r', w'} \in \mathcal{O}_{n-1, w'}$ tels que :

$$s_{q, i_q, w'} = \sum_{1 \leq r' \leq R'} u_{r', w'} \underline{S_{r', q, i_q}(z')}_{w'}.$$

Pour terminer, il faut remplacer, développer, et réorganiser :

$$\begin{aligned} S_{q, w}^* &= \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \frac{(z_n - w_n)^{\delta_q - i_q}}{w_n} \sum_{1 \leq r' \leq R'} u_{r', w'} \underline{S_{r', q, i_q}(z')}_{w'} \\ &= \sum_{1 \leq r' \leq R'} \sum_{0 \leq i_q \leq \delta_q} \sum_{0 \leq m_q \leq \delta_q - i_q} \underbrace{(-1)^{m_q} \binom{\delta_q - i_q}{m_q} u_{r', w'} (w_n)^{m_q}}_{=: e_{r, w}} \underbrace{\frac{(z_n)^{\delta_q - i_q - m_q}}{w_n} \underline{S_{r', q, i_q}(z')}_{w'}}_{=: \underline{G_{r, q}(z)}_w}, \end{aligned}$$

ce qui, en introduisant le nombre R de triplets (r', i_q, m_q) , s'écrit effectivement sous une forme adéquate :

$$S_{q, w}^* = \sum_{1 \leq r \leq R} e_{r, w} \underline{G_{r, q}(z)}_w,$$

et un retour final à (2.8) termine la démonstration :

$$h_w = - \sum_{2 \leq q \leq Q} \frac{s_{q, w}}{v_{1, w}} \underline{T_q}_w + \sum_{1 \leq r \leq R} \frac{e_{r, w}}{v_{1, w}} \underline{G_r(z)}_w. \quad \square$$

5. Exercices

Exercice 1. EE

Théorie des ensembles analytiques complexes

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Sous-ensembles analytiques : propriétés élémentaires

Dans ce qui va suivre, $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ sera toujours un domaine, *i.e.* un ouvert connexe. La théorie élémentaire des fonctions holomorphes de plusieurs variables complexes établit le

Théorème 1.1. [d'identité] *Si une fonction holomorphe $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ définie dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ s'annule identiquement sur un sous-ouvert non vide $\omega \subset \Omega$:*

$$f|_{\omega} \equiv 0,$$

alors $f \equiv 0$ partout dans Ω . □

L'objet de ce chapitre est l'étude des ensembles qui sont localement zéros d'un nombre fini de fonctions holomorphes. Le cadre est donc plus général que celui de la géométrie algébrique complexe, mais de nombreuses analogies exactes existeront entre ces deux théories.

Définition 1.2. Un sous-ensemble $A \subset \Omega$ est appelé un *sous-ensemble analytique (complexe)* si :

(1) A est fermé ;

(2) autour de tout point $a \in A$, il existe un ouvert connexe $U \subset \Omega$ et un nombre fini $L \geq 1$ de fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_L \in \mathcal{O}(U)$ telles que :

$$A \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_L(z) = 0\}.$$

Pour $n = 1$, on voit (exercice mental) qu'un sous-ensemble $A \subset \Omega$ est un sous-ensemble analytique si et seulement si A est discret.

Théorème 1.3. *Si un sous-ensemble analytique $A \subset \Omega$ d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est d'intérieur $\text{Int } A \neq \emptyset$ non vide, alors $A = \Omega$.*

Démonstration. Nous affirmons que $\text{Int } A = \Omega$, d'où $A = \Omega$. Sinon, s'il existe :

$$a \in \overline{\text{Int } A} \setminus \text{Int } A = \partial \text{Int } A,$$

cette fermeture et ce bord étant déterminés dans Ω , prenons un ouvert connexe $U \subset \Omega$ et des fonctions $f_1, \dots, f_L \in \mathcal{O}(U)$ telles que :

$$A \cap U = \{f_1 = \dots = f_L = 0\}.$$

Puisqu'il existe des points $b \in U \cap \text{Int } A$ arbitrairement proches de a , avec des voisinages ouverts $V_b \subset U \cap \text{Int } A$, il vient :

$$0 \equiv f_1|_{V_b} \equiv \cdots \equiv f_L|_{V_b},$$

mais alors le principe d'identité pour les fonctions holomorphes implique :

$$0 \equiv f_1 \equiv \cdots \equiv f_L \quad (\text{dans } U),$$

d'où $A \cap U \subset \text{Int } A$, ce qui contredit $a \in \partial \text{Int } A$. \square

Un théorème classique à une variable complexe énonce que les singularités isolées au voisinage desquelles une fonction holomorphe est bornée sont en fait illusoire. En voici la version à plusieurs variables complexes, qui s'avérera extrêmement utile pour toute la théorie.

Théorème 1.4. [d'extension de Riemann] Soit $A \subsetneq \Omega$ un sous-ensemble analytique propre d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et soit une fonction holomorphe $g \in \mathcal{O}(\Omega \setminus A)$. Si g est localement bornée au voisinage de A :

$$\forall a \in A \quad \exists U_a \subset \Omega \text{ ouvert tel que } \sup_{U_a \setminus A} |g| < \infty,$$

alors g se prolonge holomorphiquement à travers A :

$$\exists G \in \mathcal{O}(\Omega) \quad G|_{\Omega \setminus A} = g.$$

Démonstration. Le cas $n = 1$, où $A \subset \Omega$ est discret, bien connu, est donc admis ici.

Supposons $n \geq 2$, et notons $z = (z', z_n)$ avec $z' = (z_1, \dots, z_{n-1})$. Après une translation, $a = 0$ est l'origine. Par hypothèse, il existe une fonction holomorphe $f \neq 0$ non identiquement nulle $f \in \mathcal{O}(U)$ définie dans un voisinage $0 \in U \subset \Omega$ telle que :

$$A \cap U \subset \{f = 0\}.$$

En effectuant au besoin une transformation linéaire sur les coordonnées, on peut supposer la finitude de :

$$d := \text{ord}_0(z_n \mapsto f(0', z_n)) < \infty.$$

Comme dans la démonstration du théorème de préparation de Weierstrass, il existe $\rho' > 0$, $\rho_n > 0$, $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon \ll \rho_n$, assez petits pour que :

$$f(z', \zeta_n) \neq 0 \quad (\forall |z'| \leq \rho', \rho_n - \varepsilon \leq |\zeta_n| \leq \rho_n + \varepsilon),$$

et de plus, pour tout $|z'| \leq \rho'$ fixé, la fonction $z_n \mapsto f(z', z_n)$ a exactement d zéros isolés, comptés avec multiplicité, dans le disque $\mathbb{D}_{\rho_n - \varepsilon}$.

Puisque, pour tout $|z'| \leq \rho'$ fixé, $z_n \mapsto g(z', z_n)$ est bornée au voisinage des zéros isolés de $z_n \mapsto f(z', z_n)$, le théorème classique de Riemann à une variable garantit que $z_n \mapsto g(z', z_n)$ est en fait holomorphe dans $\mathbb{D}_{\rho_n + \varepsilon}$.

Par conséquent, la formule de Cauchy s'applique :

$$g(z', z_n) = \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta_n|=\rho_n} \frac{g(z', \zeta_n)}{\zeta_n - z_n} d\zeta_n =: G(z', z_n),$$

et comme g est continue et bornée sur le compact :

$$\{|z'| \leq \rho', |\zeta_n| = \rho_n\} \subset \Omega \setminus A,$$

cette dernière intégrale, visiblement holomorphe par rapport à ses deux « paramètres » (z', z_n) , produit le prolongement holomorphe recherché G . \square

Théorème 1.5. Si $A \subsetneq \Omega$ est un sous-ensemble analytique propre d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, alors $\Omega \setminus A$ est connexe.

Démonstration. Sinon :

$$\Omega \setminus A = \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_1, \Omega_2 \text{ ouverts non vides, } \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

Alors la fonction :

$$g(z) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } z \in \Omega_1, \\ 1 & \text{lorsque } z \in \Omega_2, \end{cases}$$

est holomorphe dans $\Omega \setminus A$ et bornée, donc se prolonge grâce au théorème qui précède en $G \in \mathcal{O}(\Omega)$, mais $G|_{\Omega_1} = g|_{\Omega_1} \equiv 0$ implique $G \equiv 0$ dans Ω par le principe d'unicité, contredisant $G = g \equiv 1$ dans Ω_2 . \square

Définition 1.6. Un sous-ensemble $E \subset \Omega$ d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est appelé *fin* si :

(1) E est fermé ;

(1) en tout point $e \in E$, il existe $e \in U \subset \Omega$ ouvert connexe et il existe un sous-ensemble analytique propre $A \subsetneq U$ tels que :

$$E \cap U \subset A.$$

En particulier, un sous-ensemble analytique propre $A \subsetneq \Omega$ est fin.

Théorème 1.7. Soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble fin d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Alors :

(1) $\Omega \setminus E$ est dense dans Ω ;

(2) $\Omega \setminus E$ est connexe ;

(3) en tout point $e \in E$, il existe une courbe analytique réelle $\gamma: [0, 1] \rightarrow \Omega$ satisfaisant :

$$\gamma(0) = e \quad \text{et} \quad \gamma(t) \notin E, \quad \forall 0 < t \leq 1.$$

Démonstration. (1) En un point $e \in E$, le Théorème 1.3 a déjà fait voir que $A \supset E \cap U$ ne contient pas de point intérieur à Ω , donc $E \cap U$ non plus, et ainsi, $\Omega \setminus E$ est dense dans Ω .

(2) Si $\Omega \setminus E$ n'était pas connexe, il existerait $\Omega_1, \Omega_2 \subset \Omega$ ouverts non vides tels que :

$$\Omega \setminus E = \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad \text{avec} \quad \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset.$$

Nous laissons alors au lecteur-étudiant le soin de vérifier qu'il existe un point $e \in E$, un voisinage ouvert connexe $e \in U \subset \Omega$, et un sous-ensemble analytique propre $A \subsetneq U$ avec $A \supset E \cap U$, tels que :

$$U \setminus A \subset U \setminus E = \underbrace{(U \cap \Omega_1)}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(U \cap \Omega_2)}_{\neq \emptyset},$$

la réunion étant disjointe non vide.

Comme A est d'intérieur non vide, et comme on a en fait l'égalité :

$$U \setminus A = \underbrace{[(U \cap \Omega_1) \setminus A]}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{[(U \cap \Omega_2) \setminus A]}_{\neq \emptyset},$$

ceci contredit la connexité de $U \setminus A$ obtenue précédemment par le Théorème 1.5.

(3) Pour $e \in E$, quitte à rapetisser U et à effectuer une translation, on peut supposer que :

$$e = 0 \in E \cap U \subset \{z \in U : f(z) = 0\},$$

avec $f \in \mathcal{O}(U)$ satisfaisant $f(0', 0) = 0$ et $f(0', z_n) \neq 0$, d'où $f(0', z_n) \neq 0$ pour $0 < |z_n| \leq \rho_n$, avec $\rho_n > 0$ assez petit. Mais alors :

$$\gamma(t) := \left(0', \frac{t}{\rho_n}\right)$$

satisfait clairement $\gamma(t) \notin \{f = 0\} \supset E \cap U$ pour $0 < t \leq 1$. □

Définition 1.8. Un point $a \in A$ d'un sous-ensemble analytique $A \subset \Omega$ d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est dit *régulier* s'il existe un voisinage ouvert $a \in U \subset \Omega$ et un nombre entier $0 \leq c \leq n$ de fonctions holomorphes $f_1, \dots, f_c \in \mathcal{O}(U)$ telles que :

$$A \cap U = \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_c(z) = 0\},$$

avec :

$$df_1(a) \wedge \dots \wedge df_c(a) \neq 0.$$

Le théorème des fonctions implicites (holomorphe) garantit alors que $A \cap U$ est une sous-variété complexe de U , de codimension (complexe) égale à c .

Notation 1.9. L'ensemble des points réguliers de A sera noté :

$$\text{Reg } A,$$

et son complémentaire :

$$\text{Sing } A := A \setminus \text{Reg } A,$$

consiste en les points dits *singuliers* de A .

D'après ces définitions, $\text{Reg } A$ est ouvert dans A , donc $\text{Sing } A$ est fermé dans A .

On prendra bien garde au fait qu'étant donné $A = \{f_1 = \dots = f_c = 0\}$, il est en général *faux* que :

$$\text{Sing } A \stackrel{?}{=} \{z \in U : df_1(z) \wedge \dots \wedge df_c(z) = 0\}$$

— penser par exemple, dans \mathbb{C}^2 , à $A := \{z_1^2 = 0\}$, pour lequel la différentielle $d(z_1^2) = 2z_1 dz_1$ s'annule en *tout* point de A , mais en fait, $A = \{z_1 = 0\} = \text{Reg } A$ est partout régulier.

2. Applications propres et finies

Soient X et Y deux espaces topologiques séparés, localement compacts, et dénombrables à l'infini.

Définition 2.1. Une application continue $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite *ouverte* lorsque l'image $\varphi(U)$ de tout ouvert $U \subset X$ est encore un ouvert de Y .

Elle est dite *fermée* si $\varphi(F) \subset Y$ est fermé pour tout fermé $F \subset X$.

Définition 2.2. Une application continue $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite *propre* lorsque l'image réciproque $f^{-1}(L)$ de tout compact $L \subset Y$ est encore un compact de X .

Définition 2.3. Une application continue $\varphi : X \rightarrow Y$ est dite *finie* lorsque :

$$\text{Card } \varphi^{-1}(y) < \infty \quad (\forall y \in Y).$$

Proposition 2.4. Soit $f : X \rightarrow Y$ une application continue entre espaces topologiques séparés localement compacts. Si f est propre, alors f est fermée.

Démonstration. Exercice-Examen. □

Proposition 2.5. Si f est propre et finie, alors pour tout $y \in f(X)$ et tout voisinage $U \supset f^{-1}(y)$, il existe un voisinage ouvert $V \ni y$ tel que $f^{-1}(V) \subset U$.

Démonstration. Exercice-Examen. □

Proposition 2.6. Si f est propre, finie, et surjective, alors en tout point $y \in Y$, avec $f^{-1}(y) = \{x_\ell\}_{1 \leq \ell \leq L}$ ($1 \leq L < \infty$), il existe un voisinage ouvert $V \ni y$ et des voisinages ouverts $U_\ell \ni x_\ell$ mutuellement disjoints avec :

$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{1 \leq \ell \leq L} U_\ell,$$

tels que chaque restriction :

$$f|_{U_\ell} : U_\ell \longrightarrow V \quad (1 \leq \ell \leq L)$$

est propre et finie.

Démonstration. Exercice-Examen. □

3. Germes d'ensembles analytiques complexes

En un point fixé $a \in \mathbb{C}^n$, considérons l'ensemble \mathfrak{A}_a des sous-ensembles analytiques complexes $A_U \subset U$ de voisinages ouverts connexes $U \ni a$. Pour deux éléments $A_U \in \mathfrak{A}_a$ et $A_V \in \mathfrak{A}_a$, écrivons $A_U \sim A_V$ s'il existe un sous-voisinage ouvert connexe $a \in W \subset U \cap V$ tel que $A_U \cap W = A_V \cap W$; on vérifie (exercice) qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur \mathfrak{A}_a .

Définition 3.1. La collection des germes de sous-ensembles analytiques complexes en un point $a \in \mathbb{C}^n$ est le quotient :

$$\underline{\mathfrak{A}}_a := \mathfrak{A}_a / \sim.$$

La classe d'équivalence $\underline{A}_a \in \underline{\mathfrak{A}}_a$ de $A_U \in \mathfrak{A}_a$ est appelée le germe de A_U (en a).

Pour deux éléments $\underline{A}_a, \underline{B}_a \in \underline{\mathfrak{A}}_a$, on écrira $\underline{A}_a \supset \underline{B}_a$ s'il existe un voisinage ouvert connexe $W \ni a$ et deux représentants A_W, B_W de ces germes dans W tels que $A_W \supset B_W$.

On dira qu'un germe de fonction holomorphe $\underline{f}_a \in \mathcal{O}_{n,a}$ s'annule sur un germe \underline{A}_a d'ensemble analytique complexe :

$$\underline{f}_a|_{\underline{A}_a} = 0$$

si, dans un voisinage ouvert connexe $U \ni a$ où existent deux représentants $f_U \in \mathcal{O}(U)$ et $A_U \subset U$, on a $f_U|_{A_U} \equiv 0$.

Définition 3.2. L'idéal (exercice mental) de $\mathcal{O}_{n,a}$:

$$\mathcal{I}(\underline{A}_a) := \{\underline{f}_a \in \mathcal{O}_{n,a} : \underline{f}_a|_{\underline{A}_a} = 0\}$$

est appelé idéal d'annulation du germe \underline{A}_a d'ensemble analytique complexe.

Maintenant, étant donné un idéal quelconque $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,a}$, rappelons que son radical est défini par :

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \{\underline{f}_a \in \mathcal{O}_{n,a} : \exists k \in \mathbb{N}, (\underline{f}_a)^k \in \mathfrak{a}\}.$$

Lorsque $\mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}}$, on dit que \mathfrak{a} est radical. De plus, il est immédiat que

Observation 3.3. Tout idéal d'annulation $\mathcal{I}(\underline{A}_a)$ est radical. □

En outre, comme nous avons démontré que $\mathcal{O}_{n,a}$ est nothérien, tout idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,a}$ possède un nombre fini $L < \infty$ de générateurs $\underline{f}_{1_a}, \dots, \underline{f}_{L_a} \in \mathcal{O}_{n,a}$:

$$\mathfrak{a} = \sum_{1 \leq \ell \leq L} \mathcal{O}_{n,a} \cdot \underline{f}_{\ell_a}.$$

Comme en géométrie algébrique, idéaux et ensembles de zéros sont intimement liés.

Définition 3.4. Étant donné un idéal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,a}$, son ensemble de zéros sera noté :

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) := \{z \in U : f_1(z) = \dots = f_L(z) = 0\},$$

où $U \ni a$ est ouvert, et où $f_1, \dots, f_L \in \mathcal{O}(U)$ sont des représentants des germes d'un système de générateurs :

$$\mathfrak{a} = \langle \underline{f}_{1_a}, \dots, \underline{f}_{L_a} \rangle.$$

On vérifie (exercice) que $\mathcal{V}(\mathfrak{a})$ ne dépend pas du choix des générateurs.

Proposition 3.5. Avec ces notations, les propriétés suivantes sont satisfaites.

- (1) Si $\underline{A}_{1_a} \subset \underline{A}_{2_a}$, alors $\mathcal{I}(\underline{A}_{1_a}) \supset \mathcal{I}(\underline{A}_{2_a})$.
- (2) Si $\mathfrak{a}_1 \subset \mathfrak{a}_2 \subset \mathcal{O}_{n,a}$ sont des idéaux, alors $\mathcal{V}(\mathfrak{a}_1) \supset \mathcal{V}(\mathfrak{a}_2)$.
- (3) $\mathcal{I}(\mathcal{V}(\mathfrak{a})) \supset \mathfrak{a}$.
- (4) $\mathcal{V}(\mathcal{I}(\underline{A}_a)) = \underline{A}_a$.
- (5) Si $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_K \subset \mathcal{O}_{n,a}$ sont des idéaux avec $K = \infty$ admis, alors dans $\underline{\mathfrak{A}}_a$:

$$\mathcal{V}\left(\sum_{1 \leq k \leq K} \mathfrak{a}_k\right) = \bigcap_{1 \leq k \leq K} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_k).$$

- (6) Si de plus $K < \infty$, alors :

$$\mathcal{V}\left(\bigcap_{1 \leq k \leq K} \mathfrak{a}_k\right) = \bigcup_{1 \leq k \leq K} \mathcal{V}(\mathfrak{a}_k).$$

- (7) Si $\underline{A}_{1_a}, \dots, \underline{A}_{M_a} \in \underline{\mathfrak{A}}_a$ avec $M < \infty$, alors :

$$\mathcal{I}\left(\bigcap_{1 \leq m \leq M} \underline{A}_{m_a}\right) = \bigcap_{1 \leq m \leq M} \underline{A}_{m_a}.$$

Démonstration. Exercice-Examen. □

Proposition 3.6. Dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, étant donné une collection quelconque $(A_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de sous-ensembles analytiques complexes $A_\gamma \subset \Omega$ — sans restriction sur $\text{Card } \Gamma$ —, l'intersection :

$$\bigcap_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \subset \Omega$$

est un sous-ensemble analytique complexe de Ω .

Démonstration. Exercice-Examen : appliquer la noethérianité de $\mathcal{O}_{n,a}$. □

À partir de maintenant, les sous-ensembles analytiques complexes seront notés avec la lettre X , au lieu de A .

Définition 3.7. Un germe $\underline{X}_a \in \mathfrak{A}_a$ de sous-ensemble analytique complexe est dit *réductible* s'il se décompose en deux germes $\underline{X}_{1_a}, \underline{X}_{2_a} \in \mathfrak{A}_a$:

$$\underline{X}_a = \underline{X}_{1_a} \cup \underline{X}_{2_a},$$

avec $\underline{X}_{1_a} \neq \underline{X}_a$ et $\underline{X}_{2_a} \neq \underline{X}_a$.

Terminologie 3.8. Un germe $\underline{X}_a \in \mathfrak{A}_a$ de sous-ensemble analytique complexe est dit *irréductible* s'il n'est pas réductible.

Théorème 3.9. *Un germe $\underline{X}_a \in \mathfrak{A}_a$ d'ensemble analytique complexe est irréductible si et seulement si son idéal d'annulation $\mathcal{I}(\underline{X}_a)$ est premier.*

Démonstration. Exercice-Examen : imiter la preuve en géométrie algébrique. □

Théorème 3.10. *Tout germe $\underline{X}_a \in \mathfrak{A}_a$ se décompose de manière unique — à permutations près — en un nombre fini :*

$$\underline{X}_a = \underline{X}_{1_a} \cup \cdots \cup \underline{X}_{M_a}$$

de germes irréductibles $\underline{X}_{m_a} \in \mathfrak{A}_a$, tels qu'aucun $\underline{X}_{m_1_a}$ ne contient un autre $\underline{X}_{m_2_a}$.

Démonstration. Exercice-Examen. □

Exemple 3.11. Un sous-ensemble algébrique (globalement) irréductible $A \subset \mathbb{C}^n$ n'est pas forcément irréductible (localement) en l'un de ses points $a \in A$, comme le montre :

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - x^5 - y^2 = 0\},$$

dont le germe à l'origine \underline{X}_0 se décompose en deux composantes irréductibles $\{y = \pm x \sqrt{1 - x^3}\}$.

Exemple 3.12. Même si \underline{X}_a est irréductible en l'un de ses points $a \in X$, pour $b \in X$ arbitrairement proche de a , le germe \underline{X}_b n'est pas forcément irréductible, comme le montre :

$$X := \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 : x^2 - y^2 z = 0\},$$

avec $a = 0$ et $b = (0, 0, z_b)$ où $z_b \neq 0$, puisque $x = \pm y \sqrt{z}$ près de b .

4. Quotient d'un idéal premier $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,0}$

On notera $\mathcal{O}_{n,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$, et pour tout $0 \leq p \leq n$:

$$\mathcal{O}_{p,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_p\},$$

ce qui, pour $p = 0$, devient $\mathcal{O}_{0,0} = \mathbb{C}$. Soit un idéal :

$$\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,0}.$$

Hypothèse 4.1. Cet idéal est propre :

$$\{0\} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{O}_{n,0},$$

et il est *premier* :

$$(a_1 \notin \mathfrak{a}, \quad a_2 \notin \mathfrak{a}) \implies a_1 a_2 \notin \mathfrak{a}.$$

Théorème 4.2. *Après une transformation linéaire des coordonnées (z_1, \dots, z_n) , il existe $0 \leq p \leq n - 1$ tel que l'inclusion :*

$$\mathcal{O}_{p,0} \hookrightarrow \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a},$$

est injective.

De plus, $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ est un module de type fini sur $\mathcal{O}_{p,0}$ via cette injection, et plus précisément, il existe $d_{p+1} \geq 1, \dots, d_n \geq 1$ tels que :

$$\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} = \sum_{\nu=p+1}^n \sum_{1 \leq i_\nu \leq d_\nu} \mathcal{O}_{p,0} \cdot z_{p+1}^{d_{p+1}-i_{p+1}} \dots z_n^{d_n-i_n}.$$

Démonstration. Par hypothèse, il existe un germe de $\mathfrak{a} \setminus \{0\}$ — notons-le $f_n \in \mathcal{O}_{n,0}$. Comme $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}_{n,0}$, nécessairement $f_n(0) = 0$.

Après une transformation linéaire, l'ordre de f_n restreint à l'axe des z_n :

$$1 \leq d_n := \text{ord}_0(z_n \mapsto f_n(0', z_n)) < \infty,$$

est fini.

Le théorème de préparation de Weierstrass fournit alors un polynôme de Weierstrass :

$$P_n(z_1, \dots, z_{n-1}, z_n) = z_n^{d_n} + \sum_{1 \leq i_n \leq d_n} P_{n,i_n}(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^{d_n-i_n},$$

et une unité $u_n \in \mathcal{O}_{n,0}^*$ tels que, en tant que germes :

$$f_n = u_n P_n.$$

Soit $\mathcal{O}_{n-1,0} = \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_{n-1}\}$. Si $\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_{n-1,0} = \{0\}$, on prend $p := n - 1$, et l'argumentation se termine par une

Affirmation 4.3. *Alors l'anneau quotient :*

$$\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$$

est finiment engendré comme $\mathcal{O}_{n-1,0}$ -module.

Comme $f_n \in \mathfrak{a}$, il y a une surjection d'anneaux quotients :

$$0 \longleftarrow \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} \longleftarrow \mathcal{O}_{n,0}/\langle f_n \rangle.$$

Démonstration. Avec l'aide de Stickelberger, divisons un élément quelconque $g \in \mathcal{O}_{n,0}$:

$$g(z) = q(z) P_n(z) + \sum_{1 \leq i_n \leq d_n} g_{i_n}(z_1, \dots, z_{n-1}) z_n^{d_n-i_n}.$$

Comme $q P_n = \frac{q}{u_n} f_n \equiv 0$ modulo \mathfrak{a} , il vient :

$$\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} = \sum_{1 \leq i_n \leq d_n} \mathcal{O}_{n-1,0} \cdot z_n^{d_n-i_n}. \quad \square$$

Que se passe-t-il lorsque $\mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_{n-1,0} \neq \{0\}$?

Soit donc un germe non nul $f_{n-1} \in \mathfrak{a} \cap \mathcal{O}_{n-1,0}$, à savoir $f_{n-1} = f_{n-1}(z_1, \dots, z_{n-1})$. Comme $\mathfrak{a} \neq \mathcal{O}_{n,0}$, nécessairement $f_{n-1}(0) = 0$.

À nouveau, une transformation linéaire de l'espace des (z_1, \dots, z_{n-1}) garantit la finitude de :

$$1 \leq d_{n-1} := \text{ord}_0(z_{n-1} \mapsto f_{n-1}(0, \dots, z_{n-1})) < \infty.$$

Ce procédé se généralise pour traiter toutes les équations polynomiales suivantes, et nous concluons que :

$$z_{p+1} \bmod \mathfrak{a}, \quad z_{p+2} \bmod \mathfrak{a}, \quad \dots, \quad z_n \bmod \mathfrak{a},$$

sont entiers sur $\mathcal{O}_{p,0}$, c'est-à-dire satisfont une équation polynomiale unitaire à coefficients dans $\mathcal{O}_{p,0}$. En fait, il existe une démonstration plus directe et plus économique.

Proposition 4.4. *Dans les termes du Théorème 4.2, tout germe :*

$$g \bmod \mathfrak{a} \in \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$$

est entier sur $\mathcal{O}_{p,0}$.

En particulier, les $n-p$ dernières fonctions coordonnées $z_\nu \bmod \mathfrak{a}$ sont entières sur $\mathcal{O}_{p,0}$. De plus leurs polynômes minimaux :

$$Q_\nu(z'; z_\nu \bmod \mathfrak{a}) = z_\nu^{e_\nu} + \sum_{1 \leq i_\nu \leq e_\nu} Q_{\nu, i_\nu}(z') z_\nu^{e_\nu - i_\nu} \in \mathcal{O}_{p,0}[z_\nu],$$

unitaires à coefficients dans $\mathcal{O}_{p,0}$, sont de Weierstrass :

$$Q_{\nu, i_\nu}(0') = 0 \quad (p+1 \leq \nu \leq n, 1 \leq i_\nu \leq e_\nu).$$

Démonstration. Nous venons de voir que $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ est finiment engendré sur $\mathcal{O}_{p,0}$. Soient donc $T_1, \dots, T_M \in \mathcal{O}_{n,0}$ des générateurs de $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ comme $\mathcal{O}_{p,0}$ -module. Pour tout $g \in \mathcal{O}_{n,0}$, on a $g \cdot \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$ car \mathfrak{a} est un idéal, d'où :

$$g \cdot \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a},$$

et par conséquent, il existe des éléments $h_{m_1, m_2} \in \mathcal{O}_{p,0}$ tels que, pour tout $1 \leq m_1 \leq M$:

$$g \cdot T_{m_1} = - \sum_{1 \leq m_2 \leq M} h_{m_1, m_2} T_{m_2}.$$

Autrement dit :

$$\begin{pmatrix} g + h_{1,1} & \cdots & h_{1,M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{M,1} & \cdots & g + h_{M,M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_1 \\ \vdots \\ T_M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

et alors en abrégant le déterminant de cette matrice par :

$$\Delta(g) := g^M + \Pi_1(\{h_{\bullet, \bullet}\}) g^{M-1} + \cdots + \Pi_M(\{h_{\bullet, \bullet}\}),$$

un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire (exercice) donne :

$$0 = \Delta(g) \cdot T_1 = \cdots = \Delta(g) \cdot T_M.$$

Comme ces T_m ne sont pas tous nuls — sinon $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} = 0$, ce qui a été exclu ! —, grâce à l'intégrité de $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ issue de l'hypothèse que \mathfrak{a} est premier, il vient :

$$0 = \Delta(g) = g^M + \pi_1(z') g^{M-1} + \cdots + \pi_M(z'),$$

ce qui montre le caractère entier sur $\mathcal{O}_{p,0}$ de $g \in \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ quelconque.

En particulier, ce résultat s'applique à :

$$g := z_\nu \bmod \mathfrak{a} \quad (p+1 \leq \nu \leq n).$$

Un raisonnement d'algèbre générale montre alors que les polynômes minimaux de ces $z_\nu \bmod \mathfrak{a}$ sont encore unitaires et à coefficients dans $\mathcal{O}_{p,0}$:

$$(\bmod \mathfrak{a}) \quad 0 \equiv Q_\nu(z'; z_\nu) := z_\nu^{e_\nu} + \sum_{1 \leq i_\nu \leq e_\nu} Q_{\nu, i_\nu}(z') z_\nu^{e_\nu - i_\nu}.$$

Si l'un de ces Q_ν n'était *pas* un polynôme de Weierstrass, à savoir s'il existait i_ν tel que $Q_{\nu, i_\nu}(0') \neq 0$, en sélectionnant l'entier maximal i_* parmi ces i_ν , on pourrait écrire :

$$Q_\nu(0'; z_\nu) = z_\nu^{d_\nu - i_*} \left(Q_{\nu, i_*}(0') + O(z_\nu) \right),$$

et le théorème de préparation de Weierstrass fournirait alors une fonction holomorphe $u(z', z_\nu)$ ne s'annulant nulle part et un polynôme de Weierstrass $\tilde{Q}_\nu(z'; z_\nu)$ tels que :

$$\begin{aligned} Q_\nu(z'; z_\nu) &= u(z', z_\nu) \tilde{Q}_\nu(z'; z_\nu), \\ \deg_{z_\nu} \tilde{Q}_\nu &= d_\nu - i_* \leq d_\nu - 1, \end{aligned}$$

puis en réduisant modulo \mathfrak{a} , on déduirait :

$$0 \equiv \tilde{Q}_\nu(z'; z_\nu \bmod \mathfrak{a}),$$

en contradiction avec le choix, Q_ν , de polynôme minimal. \square

Toujours en supposant l'idéal \mathfrak{a} premier, introduisons maintenant les corps de fractions :

$$\mathbb{K} := \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0} \quad \text{et} \quad \mathbb{L} := \text{Frac } (\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}),$$

en notant que l'*intégrité* de $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ est requise pour construire son corps de fractions.

Le fait que $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ soit un module de type fini sur $\mathcal{O}_{p,0}$ permet de déduire, avec des raisonnements élémentaires d'algèbre, le

Corollaire 4.5. *Le corps \mathbb{L} est une extension finie de \mathbb{K} , et plus précisément :*

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(z_{p+1}, \dots, z_n) = \mathbb{K}[z_{p+1}, \dots, z_n]. \quad \square$$

Étant donné un corps commutatif k , rappelons que $k(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N) = \text{Frac}(k[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N])$ désigne l'ensemble des fractions rationnelles — quotients de polynômes — en les variables $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$, à coefficients dans k , muni des opérations évidentes. Mais en fait, lorsque $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ sont annulés par un polynôme non identiquement nul sur k — on dit qu'ils sont *algébriques* sur k —, toutes ces fractions rationnelles se ramènent à des expressions polynomiales.

Il est bien connu que toute extension algébrique finie de corps peut être ramenée à l'adjonction d'un unique élément algébrique.

Théorème 4.6. [de l'élément primitif] *Soit \mathbb{K} un corps commutatif, soit $E \subset \mathbb{K}$ un sous-ensemble avec $\text{Card } E = \infty$, et soit :*

$$\mathbb{L} := \mathbb{K}(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$$

une extension algébrique finie de \mathbb{K} , où $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N$ sont algébriques sur \mathbb{K} . Alors il existe $c_1, \dots, c_N \in E$ tels que :

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(c_1 \mathbf{u}_1 + \dots + c_N \mathbf{u}_N). \quad \square$$

Grâce à cela, avec :

$$E := \mathbb{C} \subset \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0} =: \mathbb{K},$$

il existe des constantes $c_{p+1}, \dots, c_n \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\mathbb{L} := \text{Frac}(\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}) = \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0} \left(c_{p+1}z_{p+1} + \dots + c_n z_n \pmod{\mathfrak{a}} \right),$$

c'est-à-dire en abrégé $\mathbb{L} = \mathbb{K}(\tilde{z}_{p+1})$ où :

$$\tilde{z}_{p+1} := c_{p+1}z_{p+1} + \dots + c_n z_n \pmod{\mathfrak{a}}.$$

En notant à nouveau z_{p+1} , pour simplifier, ce \tilde{z}_{p+1} , nous obtenons :

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(z_{p+1}) = \mathbb{K}[z_{p+1}].$$

Problème 4.7. *Maintenant, il serait agréable que tout élément $g \in \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ soit représenté sous la forme $g = G(z_{p+1})$ au moyen d'un polynôme $G \in \mathcal{O}_{p,0}[X]$, mais cela n'est pas vrai en général. En tout cas, comme $g \in \text{Frac } \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} = \mathbb{K}[z_{p+1}]$, il existe au moins un polynôme $\tilde{G} \in \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}[X]$ tel que $g = \tilde{G}(z_{p+1})$.*

Nous allons maintenant argumenter qu'en corrigeant légèrement \tilde{G} , on peut faire qu'il soit à essentiellement à coefficients dans $\mathcal{O}_{p,0}$, et non dans $\text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}$.

Raisonnons maintenant dans un cadre algébrique général. Soit \mathbb{A} un anneau (commutatif, intègre) factoriel et soit $\mathbb{K} := \text{Frac } \mathbb{A}$ son corps de fractions. Pour application, ayons en tête que :

$$\mathbb{A} = \mathcal{O}_{p,0} \quad \text{et} \quad \mathbb{K} = \text{Frac } \mathbb{A} = \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}.$$

D'après un théorème bien connu, \mathbb{A} est intégralement clos dans son corps de fractions, c'est-à-dire si un élément $\frac{a_1}{a_2} \in \text{Frac } \mathbb{A}$ avec $a_1, a_2 \in \mathbb{A}$ premiers entre eux est solution d'une équation polynomiale unitaire à coefficients dans \mathbb{A} , alors en fait a_2 est une unité de \mathbb{A} , donc $\frac{a_1}{a_2} \in \mathbb{A}$.

Soit aussi $\mathbb{B} \supsetneq \mathbb{A}$ un sur-anneau (commutatif, intègre) strict qui est un module de type fini sur \mathbb{A} , et soit $\mathbb{L} := \text{Frac } \mathbb{B}$ son corps de fractions. Pour application, ayons en tête que :

$$\mathbb{B} = \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \mathbb{L} = \text{Frac } \mathbb{B} = \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}.$$

Sans supposer \mathbb{A} factoriel, la démonstration de la Proposition 4.4 justifie une

Proposition 4.8. *Tout élément $g \in \mathbb{B}$ d'une extension finie d'anneaux $\mathbb{B} \supset \mathbb{A}$ commutatifs intègres est entier sur \mathbb{A} . De plus, le polynôme minimal de g sur \mathbb{A} est lui aussi unitaire. \square*

Puisque l'extension de corps $\mathbb{L} \supset \mathbb{K}$ est alors aussi finie, le théorème de l'élément primitif fournit un élément :

$$\xi \in \mathbb{B} \quad (\text{avoir en tête } \xi = z_{p+1}),$$

tel que :

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(\xi) = \mathbb{K}[\xi].$$

En vertu de la Proposition 4.8 qui précède, cet élément ξ est donc entier sur \mathbb{A} , et son polynôme minimal unitaire :

$$\begin{aligned} Q(X) &\in \mathbb{A}[X], \\ Q(X) &= X^e + Q_1 X^{e-1} + \dots + Q_{e-1} X + Q_e, \\ Q(\xi) &= 0, \end{aligned}$$

est de degré $e = [\mathbb{L} : \mathbb{K}] \geq 1$, avec des coefficients $Q_1, \dots, Q_e \in \mathbb{A}$. Sa dérivée par rapport à X est :

$$\frac{dQ}{dX} := eX^{e-1} + (e-1)Q_1X^{e-2} + \dots + Q_{e-1}.$$

Proposition 4.9. [-clé] *Sous ces hypothèses concernant \mathbb{A} , $\mathbb{K} = \text{Frac } \mathbb{A}$, \mathbb{B} , $\mathbb{L} = \text{Frac } \mathbb{B}$, ξ , $Q(X)$, pour tout élément :*

$$g \in \mathbb{B} \subset \mathbb{L} = \mathbb{K}[\xi],$$

qui s'écrit :

$$g = G(\xi)$$

au moyen d'un certain polynôme $G \in \mathbb{K}[\xi]$ à coefficients fractionnaires, en fait, après multiplication par $\frac{dQ}{dX}(\xi)$, il existe un polynôme :

$$S_g(X) \in \mathbb{A}[X], \quad \deg S_g \leq \deg Q - 1,$$

à coefficients dans l'anneau de base \mathbb{A} , tel que :

$$\frac{dQ}{dX}(\xi) \cdot g = S_g(\xi).$$

Ainsi, pour résoudre le Problème 4.7, en multipliant seulement par :

$$\frac{\partial Q_{p+1}}{\partial z_{p+1}}(z'; z_{p+1}),$$

nous pourrons supprimer tous les dénominateurs éventuels qui apparaissent dans la représentation $g = \tilde{G}(z_{p+1})$ d'un élément quelconque $g \in \text{Frac } \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ au moyen d'un polynôme $\tilde{G} \in \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}[X]$.

Démonstration. Soient $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e$ les e racines de $Q(X) = 0$, avec :

$$\xi_1 := \xi,$$

et soit $\mathbb{L}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e) = \mathbb{L}(\xi_2, \dots, \xi_e)$ l'extension galoisienne finie de \mathbb{K} . Comme $Q(\xi_i) = 0$, $1 \leq i \leq e$, et comme Q est unitaire, chaque ξ_i est entier sur \mathbb{A} .

Comme $g \in \mathbb{B} \supset \mathbb{A}$, l'extension d'anneaux étant finie, $g = G(\xi)$ est entier sur \mathbb{A} .

Un fait algébrique de la théorie de Galois montre alors que tous les conjugués $g_i := G(\xi_i)$, $1 \leq i \leq e$, sont aussi entiers sur \mathbb{A} .

Formons alors l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq e} \frac{Q(X) - Q(\xi_i)}{X - \xi_i} G(\xi_i) &= \sum_{1 \leq i \leq e} \left(\frac{X^e - \xi_i^e + Q_1(X^{e-1} - \xi_i^{e-1}) + \dots + Q_{e-1}(X - \xi_i)}{X - \xi_i} \right) G(\xi_i) \\ &= \sum_{1 \leq i \leq e} \left(X^{e-1} + X^{e-2} \xi_i + \dots + \xi_i^{e-1} + Q_1(X^{e-2} + \dots + \xi_i^{e-2}) + \dots + Q_{e-1} \right) G(\xi_i) \\ &= X^{e-1} \left[\sum_{1 \leq i \leq e} G(\xi_i) \right] + X^{e-2} \left[\sum_{1 \leq i \leq e} (\xi_i + Q_1) G(\xi_i) \right] + \dots + \sum_{1 \leq i \leq e} (\xi_i^{e-1} + Q_1 \xi_i^{e-2} + \dots + Q_{e-1}) G(\xi_i) \\ &=: X^{e-1} \Lambda_0 + X^{e-2} \cdot \Lambda_1 + \dots + \Lambda_{e-1} \\ &=: S_g(X). \end{aligned}$$

Affirmation 4.10. *Ces coefficients $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{e-1}$ appartiennent à \mathbb{K} .*

Démonstration. Par hypothèse, les coefficients de :

$$G(X) = G_0 X^{e-1} + G_1 X^{e-2} + \cdots + G_{e-1}$$

sont dans \mathbb{K} , et $Q_1, \dots, Q_{e-1} \in \mathbb{A} \subset \mathbb{K}$ aussi. Comme ces :

$$\Lambda_j = \text{polynme}_j \left(G_0, G_1, \dots, G_{e-1}; \xi_1, \dots, \xi_e; Q_1, \dots, Q_e \right)$$

sont invariants par les permutations des racines ξ_i de $Q(X) = 0$, le théorème de Lagrange montre qu'ils s'expriment en fonction des coefficients de Q :

$$\Lambda_j = \text{polynme}_j \left(G_0, G_1, \dots, G_{e-1}; Q_1, \dots, Q_e \right) \in \mathbb{K}. \quad \square$$

Affirmation 4.11. *Ces coefficients $\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_{e-1}$ sont entiers sur \mathbb{A} .*

Démonstration. Sans développer les $G(\xi_i) = g_i$:

$$\Lambda_j = \text{polynme}_j \left(g_1, \dots, g_e; \xi_1, \dots, \xi_e; Q_1, \dots, Q_e \right),$$

puis l'invariance par permutation et le théorème de Lagrange donnent :

$$\Lambda_j = \text{polynme}_j \left(g_1, \dots, g_e; Q_1, \dots, Q_e \right).$$

Comme g_1, \dots, g_e sont entiers sur \mathbb{A} et comme $Q_1, \dots, Q_e \in \mathbb{A}$, ces Λ_j sont aussi entiers sur \mathbb{A} , puisque les entiers forment un anneau. \square

Ainsi, en posant $X = \xi = \xi_1$ dans le calcul ci-dessus :

$$\frac{Q(X)}{X - \xi} G(\xi) + \sum_{2 \leq i \leq e} \frac{Q(X)}{X - \xi_i} G(\xi_i) = S_g(X) = X^{e-1} \Lambda_0 + X^{e-2} \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_{e-1},$$

on obtient bien :

$$\frac{dQ}{dX}(\xi) \cdot g = S_g(\xi) = \xi^{e-1} \Lambda_0 + \xi^{e-2} \Lambda_1 + \cdots + \Lambda_{e-1}$$

avec $S_g(X) \in \mathbb{A}[X]$. \square

Corollaire 4.12. *Sous les mêmes hypothèses, avec le discriminant :*

$$\Delta := \text{Res}_X \left(Q(X), \frac{dQ}{dX}(X) \right) \in \mathbb{A},$$

pour tout $g \in \mathbb{B}$, on a :

$$\Delta \cdot g = R_g(\xi) \in \mathbb{A}[\xi],$$

au moyen d'un certain polynôme $R_g(X) \in \mathbb{A}[X]$ à coefficients dans \mathbb{A} avec $\deg R_g \leq \deg Q - 1$.

Démonstration. Dans une relation de Bézout :

$$\Delta = U(X) Q(X) + V(X) \frac{dQ}{dX}(X),$$

remplaçons en effet $X = \xi$:

$$\Delta = U(\xi) Q(\xi) + V(\xi) \frac{dQ}{dX}(\xi),$$

multiplions par g et utilisons la Proposition 4.9 :

$$\Delta \cdot g = V(\xi) \frac{dQ}{dX}(\xi) g = V(\xi) S_g(\xi).$$

Une division de $V S_g$ par Q donne R_g de degré $\leq e - 1$. \square

5. Théorème de paramétrisation locale

Maintenant, en appliquant les considérations algébriques générales qui précèdent, revenons à la situation concrète où $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,a}$ est un idéal premier, où :

$$\mathbb{A} = \mathcal{O}_{p,0} \quad \text{et} \quad \mathbb{B} = \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a},$$

avec les variables horizontales $(z_1, \dots, z_p) = z'$ et les variables verticales :

$$(z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n) = z'',$$

et rappelons que z_{p+1} joue un rôle spécial, puisque :

$$\text{Frac } \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a} = \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}[z_{p+1}].$$

Le discriminant du Corollaire 4.12 vaut alors :

$$\Delta(z') := \text{Res}_{z_{p+1}} \left(Q_{p+1}(z'; z_{p+1}), \frac{\partial Q_{p+1}}{\partial z_{p+1}}(z'; z_{p+1}) \right),$$

et en un point z' fixé, il détermine si les racines de $P_{p+1}(z'; z_{p+1}) = 0$ sont mutuellement distinctes — par le critère $\Delta(z') \neq 0$ — ou non.

La correspondance entre notations est :

$$Q(X) = X^e + Q_1 X^{e-1} + \dots + Q_e \longleftrightarrow Q_{p+1}(z'; z_{p+1}) = z_{p+1}^{e_{p+1}} + \sum_{1 \leq i_{p+1} \leq e_{p+1}} Q_{p+1, i_{p+1}}(z') z_{p+1}^{d_{p+1} - i_{p+1}}.$$

D'après ce qui précède, $z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n$ satisfont modulo \mathfrak{a} des équations de Weierstrass :

$$\begin{aligned} (\text{mod } \mathfrak{a}) \quad 0 &= Q_{p+1}(z'; z_{p+1}), \\ (\text{mod } \mathfrak{a}) \quad 0 &= Q_{p+2}(z'; z_{p+2}) = \dots = Q_n(z'; z_n), \end{aligned}$$

avec par construction :

$$Q_{p+1}, Q_{p+2}, \dots, Q_n \in \mathfrak{a},$$

et donc le sous-ensemble analytique complexe associé à l'idéal premier $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_{n,0}$:

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \{z \in \mathbb{C}^n \text{ près de } 0 : f(z) = 0, \forall f \in \mathfrak{a}\}$$

est contenu dans l'ensemble $\{Q_{p+1} = Q_{p+2} = \dots = Q_n = 0\}$.

D'une certaine manière, tout le travail qui vient d'être effectué a eu pour objectif de produire ces équations concrètes, afin d'obtenir des informations géométriques intéressantes sur $\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \subset \mathcal{V}(\langle Q_{p+1}, Q_{p+2}, \dots, Q_n \rangle)$.

Dans ce contexte, en voyant g dans $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ ou dans $\mathcal{O}_{n,0}$, la formulation du Corollaire 4.12 devient :

Proposition 5.1. *Pour tout $g \in \mathcal{O}_{n,0}$, il existe un polynôme $R_g \in \mathcal{O}_{p,0}[z_{p+1}]$ de degré $< e_{p+1}$ tel que :*

$$\Delta(z') g(z', z'') - R_g(z'; z_{p+1}) \in \mathfrak{a}. \quad \square$$

En particulier, pour $g := z_{p+2}, \dots, z_n$, en notant R_{p+2}, \dots, R_n les polynômes correspondants, on obtient :

$$\Delta(z') z_\nu - R_\nu(z'; z_\nu) \in \mathfrak{a} \quad (p+1 \leq \nu \leq n).$$

Par conséquent :

$$\mathcal{V}(\mathfrak{a}) \subset \left\{ z \text{ près de } 0: \begin{aligned} Q_{p+1}(z'; z_{p+1}) &= 0, \\ Q_{p+2}(z'; z_{p+2}) &= \cdots = Q_n(z'; z_n) = 0, \\ \Delta(z') z_{p+2} - R_{p+2}(z'; z_{p+2}) &= \cdots = \Delta(z') z_n - R_n(z'; z_n) = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Interprétation Géométrique 5.2. En tout point $z' \in \mathbb{C}^p$ proche de $0'$ tel que $\Delta(z') \neq 0$, il existe un voisinage ouvert $z' \in U'$ tel que :

(1) l'équation $Q_{p+1}(z', z_{p+1}) = 0$ se résout en e_{p+1} graphes holomorphes locaux mutuellement disjoints :

$$z_{p+1} = \Phi_1(z'), \dots, z_{p+1} = \Phi_{e_{p+1}}(z'),$$

avec $\Phi_1, \dots, \Phi_{e_{p+1}}$ holomorphes dans U' ;

(2) les coordonnées verticales restantes sont graphées au-dessus de ces e_{p+1} solutions :

$$z_{p+2} = \frac{R_{p+2}(z'; \Phi_{i_{p+1}}(z'))}{\Delta(z')}, \dots, z_n = \frac{R_n(z'; \Phi_{i_{p+1}}(z'))}{\Delta(z')} \\ (1 \leq i_{p+1} \leq e_{p+1}).$$

Nous pouvons maintenant résumer et synthétiser comme suit tout le travail que nous venons de réaliser. Ce résultat s'exprime pour l'instant de manière essentiellement algébrique, et des éclaircissement géométriques vont suivre.

Théorème 5.3. [de paramétrisation locale, version algébrique] Pour tout idéal premier $\{0\} \subsetneq \mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{O}_{n,0}$, il existe $0 \leq p \leq n-1$ tel qu'après un changement de coordonnées :

$$z = (z_1, \dots, z_p, z_{p+1}, z_{p+2}, \dots, z_n) = (z', z''),$$

les propriétés suivantes sont satisfaites.

(1) L'homomorphisme naturel $\mathcal{O}_{p,0} \hookrightarrow \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ est injectif.

(2) $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ est un $\mathcal{O}_{p,0}$ -module de type fini.

(3) Tous les éléments de $\mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$ sont entiers sur $\mathcal{O}_{p,0}$.

(4) Avec les corps de fractions $\mathbb{K} := \text{Frac } \mathcal{O}_{p,0}$ et $\mathbb{L} := \text{Frac } \mathcal{O}_{n,0}/\mathfrak{a}$:

$$\mathbb{L} = \mathbb{K}(z_{p+1}) = \mathbb{K}[z_{p+1}].$$

(5) Pour tout $p+1 \leq \nu \leq n$, le polynôme minimal $Q_\nu(z'; z_\nu) \in \mathcal{O}_{p,0}[z_\nu]$ de $z_\nu \bmod \mathfrak{a}$ sur \mathbb{K} est un polynôme de Weierstrass :

$$(\bmod \mathfrak{a}) \quad 0 \equiv z_\nu^{e_\nu} + \sum_{1 \leq i_\nu \leq e_\nu} Q_{\nu, i_\nu}(z') z_\nu^{e_\nu - i_\nu} \quad (p+1 \leq \nu \leq n),$$

c'est-à-dire $Q_{\nu, i_\nu}(0') = 0$.

(6) En termes du discriminant :

$$\Delta(z') := \text{Res}_{z_{p+1}} \left(Q_{p+1}(z'; z_{p+1}), \frac{\partial Q_{p+1}}{\partial z_{p+1}}(z'; z_{p+1}) \right),$$

pour tout autre indice $p+2 \leq \nu \leq n$, il existe un polynôme $R_\nu(z'; z_\nu) \in \mathcal{O}_{p,0}[z_\nu]$ de degré $< \deg Q_{p+1}$ tel que, modulo \mathfrak{a} :

$$\Delta(z') z_\nu - R_\nu(z'; z_\nu) = 0 \quad (p+2 \leq \nu \leq n) \quad \square$$

Ainsi, Q_{p+1} , les Q_ν et ces $\Delta z_\nu - R_\nu$ pour $p+2 \leq \nu \leq n$ appartiennent à l'idéal :

$$Q_{p+1}, Q_{p+2}, \dots, Q_n \in \mathfrak{a} \quad \text{et} \quad \Delta z_{p+2} - R_{p+2}, \dots, \Delta z_n - R_n \in \mathfrak{a}.$$

Mais ce n'est pas tout : l'idéal \mathfrak{a} en question n'est en général pas engendré (complètement) par ces éléments que nous venons de construire, et pour cette raison, il va dorénavant être nécessaire de tenir compte aussi d'un système initial $f_\ell \in \mathcal{O}_{n,0}$ de générateurs :

$$\mathfrak{a} = \langle f_1, \dots, f_L \rangle, \quad \mathcal{V}(\mathfrak{a}) = \underline{\{f_1 = \dots = f_L = 0\}}_0.$$

Comme \mathfrak{a} est supposé premier, rappelons que le germe d'ensemble analytique complexe associé :

$$\underline{X}_0 := \mathcal{V}(\mathfrak{a})$$

est irréductible. Voici alors maintenant un énoncé plus intuitif sur le plan géométrique. En particulier, il exprime qu'au-dessus du lieu $\{\Delta(z') \neq 0\}$ où le discriminant ne s'annule pas, les équations que nous venons de construire déterminent exactement \underline{X}_0 . Pour simplifier, on le notera X .

Théorème 5.4. [de paramétrisation locale, version géométrique] *Avec les hypothèses, les notations, et les conclusions du Théorème 5.3, il existe une base de voisinages ouverts $0 \in U \subset \mathbb{C}^n$ arbitrairement petits de la forme produit :*

$$0 \in U = U' \times U'' \subset \mathbb{C}^p \times \mathbb{C}^{n-p},$$

tels que les propriétés suivantes sont satisfaites par le germe d'ensemble analytique complexe $X = \mathcal{V}(\mathfrak{a})$.

(1) *La restriction à $X \cap U$ de la projection sur le premier facteur :*

$$\pi: X \cap U \longrightarrow U'$$

est propre, est finie, et vérifie $\pi^{-1}(0') = 0$.

(2) *En dehors du lieu discriminant — fin dans U' — :*

$$\begin{aligned} X \cap U \cap \{(z', z'') \in U' \times U'': \Delta(z') \neq 0\} = \\ = \left\{ (z', z'') : \Delta(z') \neq 0, Q_{p+1}(z'; z_{p+1}) = 0, \right. \\ \left. z_{p+2} = \frac{R_{p+2}(z'; z_{p+2})}{\Delta(z')}, \dots, z_n = \frac{R_n(z'; z_n)}{\Delta(z')} \right\}. \end{aligned}$$

(3) *Si $z = (z', z'') \in U' \times \mathbb{C}^{n-p}$ satisfait :*

$$0 = Q_{p+1}(z'; z_{p+1}) = \Delta(z') z_{p+2} - R_{p+2}(z'; z_{p+2}) = \dots = \Delta(z') z_n - R_n(z'; z_n),$$

alors en fait $z'' \in U''$.

(4) *La partie singulière $\text{Sing } X$ est contenue dans l'image inverse du lieu discriminant :*

$$\text{Sing } X \cap U \subset \pi^{-1}(\{\Delta(z') = 0\}).$$

(5) *La restriction de la projection hors de l'image inverse du lieu discriminant :*

$$\pi \Big|_{(X \cap U) \setminus \pi^{-1}\{\Delta=0\}} : (X \cap U) \setminus \pi^{-1}\{\Delta=0\} \longrightarrow U' \setminus \{\Delta=0\}$$

est un revêtement holomorphe non ramifié à $e_{p+1} = \deg Q_{p+1}$ feuillets.

(6) $(X \cap U) \setminus \pi^{-1}\{\Delta=0\}$ est un sous-ensemble ouvert connexe de $X \cap U$.

(7) $\pi: X \cap U \longrightarrow U'$ est surjective.

Démonstration. À voir ultérieurement. □

6. Exercices

Exercice 1. Soit un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^n$, et soit $E \subset \Omega$ un sous-ensemble *fin*, c'est-à-dire localement contenu dans un sous-ensemble analytique propre.

(a) Si une fonction $u \in \text{PSH}(\Omega \setminus E)$ est *localement bornée supérieurement* au voisinage de E , au sens où :

$$\forall e \in E \quad \exists U \ni e \text{ ouvert } \sup_U u < \infty,$$

montrer que :

$$\exists! \tilde{u} \in \text{PSH}(\Omega) \quad \tilde{u}|_{\Omega \setminus E} = u.$$

(b) Montrer que les fonctions plurisousharmoniques se prolongent comme fonctions plurisousharmoniques à travers les sous-ensembles analytiques $A \subset \Omega$ tels que $\text{codim}_a A \geq 2$ en tout point $a \in A$.

Exercice 2. EE