

# Fonctions harmoniques

François DE MARÇAY  
Département de Mathématiques d'Orsay  
Université Paris-Sud, France

## 1. Lien avec les fonctions holomorphes

Commençons par effectuer quelques rappels sur les fonctions harmoniques définies sur des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ , qui satisfont par définition  $\Delta u = 0$  où  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  est l'opérateur laplacien. Dans la théorie plus générale des fonctions sous-harmoniques satisfaisant  $\Delta u \geq 0$  et qui sera développée dans le chapitre suivant, le lecteur pourra reconnaître de nombreux arguments qui redonnent les preuves de résultats classiques pour les fonctions harmoniques.

Dans le plan complexe  $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$  muni des coordonnées réelles  $(x, y) \cong z = x + iy$ , soit  $\Omega$  un ouvert, pas nécessairement supposé connexe.

**Définition 1.1.** Une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  à valeurs réelles :

$$u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$$

est dite *harmonique* lorsqu'elle est annulée par l'opérateur  $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  de Laplace :

$$0 \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

On notera :

$$\text{Harm}(\Omega)$$

l'espace des fonctions  $\mathcal{C}^2$  harmoniques dans  $\Omega$ . Par anticipation, l'un des résultats centraux de la théorie établit que toute fonction  $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$  localement intégrable au sens de Lebesgue qui satisfait  $\Delta u = 0$  au sens faible, à savoir :

$$0 = \int_{\Omega} u \cdot \Delta(\varphi),$$

pour toute fonction  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty$  lisse à support compact — voire même toute distribution  $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$  satisfaisant cela — est en fait une fonction  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\Omega$ , après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle.

C'est pourquoi la régularité  $\mathcal{C}^2$  des fonctions  $u$  que l'on appelle *harmoniques* dans la Définition initiale 1.1 n'est pas déterminante, seul compte l'opérateur  $\Delta$ .

Dans le formalisme de la théorie des fonctions holomorphes, l'opérateur de Laplace peut aussi s'écrire en termes des opérateurs de dérivée par rapport à  $z$  et par rapport à  $\bar{z}$  :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{et} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right),$$

comme suit :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \circ \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ &= 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}.\end{aligned}$$

**Proposition 1.2.** *Les parties réelle et imaginaire de toute fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  :*

$$\operatorname{Re} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} f$$

*sont des fonctions harmoniques.*

*Démonstration.* Rappelons que :

$$2 \operatorname{Re} f = f + \bar{f} \quad \text{et} \quad 2i \operatorname{Im} f = f - \bar{f}.$$

La fonction holomorphe  $f$  et sa conjuguée antiholomorphe  $\bar{f}$  sont localement développables en série entière convergente, donc  $\mathcal{C}^\infty$ . Comme  $\frac{\partial}{\partial z}$  et  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  commutent, on trouve :

$$\frac{1}{2} \Delta(\operatorname{Re} f) = \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 + 0 = 0,$$

par définition de l'holomorphicité et de l'antiholomorphicité. Pour  $f - \bar{f}$ , c'est  $0 - 0 = 0$ .  $\square$

Réciproquement, toute fonction harmonique est localement partie réelle (ou imaginaire) d'une fonction holomorphe.

**Proposition 1.3.** *Si  $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$  est une fonction harmonique dans un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ , alors au voisinage de tout point  $(x_0, y_0) = z_0 \in \Omega$ , par exemple dans un disque ouvert  $\mathbb{D}_r(z_0)$  de rayon assez petit pour qu'il soit contenu dans l'ouvert :*

$$\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$$

*il existe une fonction holomorphe :*

$$f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$$

*telle que :*

$$u|_{\mathbb{D}_r(z_0)} = \operatorname{Re} f.$$

*Démonstration.* Soit la 1-forme différentielle :

$$\omega := - \frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Le calcul (détailé !) de sa différentielle extérieure :

$$\begin{aligned}d\omega &= -d\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) \wedge dx + d\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \wedge dy \\ &= - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy \right) \wedge dx + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} dy \right) \wedge dy \\ &= \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx \wedge dy \\ &= 0,\end{aligned}$$

montre qu'elle est fermée par harmonicité de  $u$ . En appliquant alors le Lemme de Poincaré dans le disque  $\mathbb{D}_r(z_0)$  qui est étoilé en  $z_0$ , cette forme est *exacte*, à savoir il existe une fonction  $v$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{D}_r(z_0)$  telle que  $\omega = dv$ .

En fait, la théorie standard des formes différentielles sur  $\mathbb{R}^2$  fournit la formule agréable :

$$v(z) = v(x, y) = \int_{z_0}^z \omega = \int_{z_0}^z \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right),$$

dans laquelle l'intégration s'effectue le long de n'importe quel chemin  $\mathcal{C}^1$  par morceaux allant de  $z_0$  à un point  $z \in \mathbb{D}_r(z_0)$  — et la valeur obtenue ne dépend pas du chemin grâce à la fermeture  $d\omega = 0$ .

En remplaçant  $(x, y)$  par  $(x + \varepsilon, y)$  puis par  $(x, y + \varepsilon)$ , on se convainc aisément, que les dérivées partielles de cette intégrale valent :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

relations qui s'obtenaient d'ailleurs plus directement à partir de  $\omega = dv$  sans qu'on l'ait dit !

Mais ces deux équations aux dérivées partielles ne sont autres que les *équations de Cauchy-Riemann* montrant que la fonction :

$$f := u + iv$$

est holomorphe dans  $\Omega$ . □

Sous une hypothèse topologique naturelle, la réciproque globale est le :

**Théorème 1.4.** *Si le domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  est simplement connexe, pour toute fonction  $u \in \text{Harm}(\Omega)$ , il existe une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ , unique à une constante près, telle que :*

$$u = \text{Re } f.$$

**Terminologie 1.5.** Une fonction  $v$  telle que  $u + iv$  est holomorphe est appelée une *conjugué harmonique* de  $u \in \text{Harm}(\Omega)$ .

*Démonstration.* À nouveau, soit la 1-forme différentielle  $\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ , soit  $z_0 \in \Omega$  un point de référence fixé, et soit la 'primitive' :

$$v(z) = \int_{z_0}^z \omega = \int_{z_0}^z \left( -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \right).$$

Puisque  $\Omega$  est simplement connexe, tous les chemins  $\mathcal{C}^1$  par morceaux allant de  $z_0$  à  $z$  dans  $\Omega$  peuvent être déformés continûment l'un vers l'autre en demeurant dans  $\Omega$ . Il en découle que l'intégrale ne dépend pas du chemin. La fonction  $v$  est alors définie globalement et uniquement en tout point  $z \in \Omega$ . Le même argument que précédemment conclut alors que  $f := u + iv$  satisfait les équations de Cauchy-Riemann, donc est holomorphe.

Pour ce qui est de l'unicité à une constante près, soit  $u = \text{Re } f = \text{Re } g$  avec  $f, g \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Alors la fonction  $h := f - g$  holomorphe dans  $\Omega$  satisfait  $\text{Re } h \equiv 0$ . Autrement dit :

$$h(z) + \overline{h(z)} \equiv 0 \quad \text{d'où} \quad h'(z) + 0 \equiv 0$$

en dérivant par rapport à  $z$  puisque  $\overline{h(z)} = \overline{h(\bar{z})}$  est une fonction holomorphe de  $\bar{z}$  et puisque  $\frac{\partial \bar{z}}{\partial z} = 0$  (exercice), donc  $h$  est une constante imaginaire pure. □

Sans l'hypothèse que  $\Omega$  est simplement connexe, la représentation des fonctions harmoniques comme parties réelles de fonctions holomorphes n'est pas toujours vraie. Soit en effet le disque unité épointé :

$$\mathbb{D}^* = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}.$$

La fonction :

$$u := \log |z| = \frac{1}{2} \log (z\bar{z})$$

est harmonique dans  $\mathbb{D}^*$  :

$$4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}} (\log z + \log \bar{z}) = 0 + 0,$$

mais la conjuguée harmonique (à une constante près) de  $u$  ne pourrait être (exercice) que :

$$v = \arg z,$$

laquelle est multivalente sur  $\mathbb{D}^*$ .

## 2. Propriétés fondamentales

Une première propriété fondamentale des fonctions harmoniques est leur régularité élevée, beaucoup mieux que  $\mathcal{C}^2$ , encore mieux que  $\mathcal{C}^\infty$ , à savoir *analytique réelle*, notée  $\mathcal{C}^\omega$ . Cette notation  $\mathcal{C}^\omega$  est classiquement utilisée pour les anneaux de fonctions *analytiques réelles*, elle prolonge la hiérarchie des fonctions continues puis différentiables :

$$\mathcal{C}^0 \supset \mathcal{C}^1 \supset \mathcal{C}^2 \supset \dots \supset \mathcal{C}^k \supset \dots \supset \mathcal{C}^\infty \supset \mathcal{C}^\omega,$$

la lettre  $\omega$  désignant, dans la théorie cantorienne des ensembles, le premier ordinal infini.

**Théorème 2.1.** *Toute fonction harmonique  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  est en fait  $\mathcal{C}^\infty$  dans  $\Omega$ , et même analytique réelle, au sens où elle est localement développable, au voisinage de tout point  $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$ , en série de Taylor :*

$$u(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\partial^{k+l} u}{\partial x^k \partial y^l} (x_0, y_0) \frac{(x - x_0)^k}{k!} \frac{(y - y_0)^l}{l!}$$

convergeant dans tout disque ouvert  $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$  de rayon  $r \leq \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ .

*Démonstration.* Quand on prend la partie réelle  $u = \text{Re } f$  d'une fonction holomorphe, on conserve la lissité, et même la propriété d'être développable en série entière convergente.

Il découle d'ailleurs de ce qu'on sait pour les fonctions holomorphes que la convergence de la série de Taylor de  $u$  est alors valide dans le disque de rayon maximal possible :

$$r_{\max} := \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega) = \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$$

tel que le disque reste entièrement contenu dans  $\Omega$ . □

Phénomène majeur, les fonctions harmoniques jouissent d'une remarquable *propriété d'équilibre*.

**Théorème 2.2. [de la Moyenne]** *Étant donné une fonction harmonique  $u \in \text{Harm}(\Omega)$  sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , en tout point  $z_0 \in \Omega$  et pour tout rayon :*

$$r < \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega),$$

la valeur de  $u$  en  $z_0$  est égale à la moyenne intégrale de ses valeurs sur le cercle de rayon  $r$  :

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta}_{\text{moyenne sur le cercle } S_r(z_0) = \partial\mathbb{D}_r(z_0)} . \quad \square$$

*Démonstration.* Rappelons tout d'abord la formule de la moyenne pour une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ . Soit  $z_0 \in \Omega$  et soit un rayon :

$$r < \delta := \text{dist}(z_0, \mathbb{C} \setminus \Omega).$$

Pour tout  $z \in \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ , on a le développement normalement convergent :

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

**Assertion 2.3.** *La formule de la moyenne est satisfaite par la fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Omega)$  :*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

*Preuve.* En effet, en appliquant le développement en série entière qui précède à des points  $z = z_0 + r e^{i\theta}$  avec  $0 \leq \theta < 2\pi$ , la convergence uniforme (car normale) permet d'intervertir sommation et intégration :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} r^k e^{ik\theta} \right) d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \frac{1}{2\pi} r^k \int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = f(z_0),$$

et le résultat suit, car dans cette dernière somme, tous les termes pour  $k \geq 1$  s'évanouissent, en vertu de  $\left[ \frac{e^{ik\theta}}{ik} \right]_0^{2\pi} = 0$ .  $\square$

Étant donné une fonction  $u \in \text{Harm}(\Omega)$ , le Théorème 1.4 a montré que sa restriction au disque de rayon maximal  $\mathbb{D}_\delta(z_0) \subset \Omega$  est la partie réelle  $\text{Re } f = u$  d'une fonction  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_\delta(z_0))$ . Mais alors le résultat voulu :

$$u(z_0) = \text{Re } f(z_0) = \text{Re} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta$$

découle (trop ?) simplement de l'Assertion 2.3 qui vient d'être vue !  $\square$

**Théorème 2.4. [de la Moyenne bis]** *Sous les mêmes hypothèses :*

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) s ds d\theta}_{\text{moyenne sur le disque } \overline{\mathbb{D}}_r(z_0)}.$$

*Démonstration.* Il suffit d'intégrer  $\int_0^r s ds (\cdot)$  la formule de la moyenne qui précède sur des cercles de rayons  $0 \leq s \leq r$  :

$$\int_0^r s ds u(z_0) = \int_0^r s ds \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta,$$

et de réorganiser (visuellement) cette formule.  $\square$

Ce qui est encore plus remarquable, c'est que la réciproque est vraie, et elle sera établie ultérieurement dans un contexte plus général.

**Théorème 2.5.** *Sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , pour une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega, \mathbb{R})$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i)  *$u$  est harmonique ;*

(ii)  $u$  est égale à sa valeur moyenne sur tout cercle qui est contenu dans  $\Omega$  et dont le disque intérieur est aussi contenu dans  $\Omega$  ;

(iii)  $u$  est égale à sa valeur moyenne sur tout disque fermé contenu dans  $\Omega$ .  $\square$

Rappelons que dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$ , une fonction holomorphe valant 0 sur une suite  $(z_n)_{n=0}^\infty$  ayant un point d'accumulation  $z_\infty \in \Omega$  est alors identiquement nulle. L'exemple de la fonction harmonique non nulle  $2 \operatorname{Re} z = z + \bar{z}$  sur  $\mathbb{C}$  qui vaut 0 sur l'axe des  $y$  montre qu'une hypothèse plus forte est nécessaire.

**Théorème 2.6. [d'unicité]** Si deux fonctions harmoniques  $u_1, u_2 \in \operatorname{Harm}(\Omega)$  coïncident sur un sous-ensemble  $E \subset \Omega$  d'intérieur  $\overset{\circ}{E} \neq \emptyset$  non vide :

$$u_1|_E = u_2|_E,$$

alors elles sont partout égales  $u_1 = u_2$ .  $\square$

*Démonstration.* La fonction harmonique  $u := u_1 - u_2$  satisfait  $u|_E \equiv 0$ . Introduisons l'ensemble :

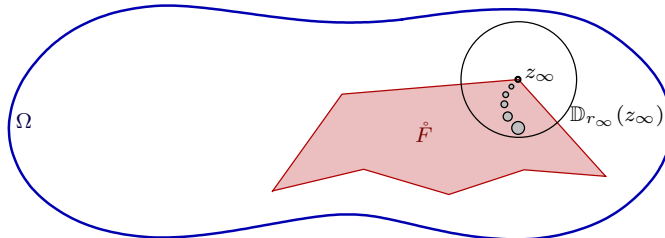
$$F := \{z \in \Omega : u(z) = 0\},$$

fermé car  $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$  est  $\mathcal{C}^2$ , voire  $\mathcal{C}^\infty$ , voire  $\mathcal{C}^\omega$ , dont l'intérieur est non vide :

$$\overset{\circ}{F} \supset \overset{\circ}{E} \neq \emptyset.$$

**Assertion 2.7.** Cet intérieur  $\overset{\circ}{F} \subset \Omega$  est un sous-ensemble fermé de  $\Omega$ .

*Preuve.* En effet, soit un point  $z_\infty \in \Omega$  appartenant à la fermeture  $F$  de  $\overset{\circ}{F}$  dans  $\Omega$ , ce qui veut dire qu'il existe une suite  $(z_n)_{n=0}^\infty$  d'éléments  $z_n \in \overset{\circ}{F}$  telle que  $z_n \rightarrow z_\infty$ .



Soit un disque ouvert  $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty) \subset \Omega$  de rayon  $r_\infty < \operatorname{dist}(z_\infty, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ . Il s'agit de montrer que  $z_\infty \in \overset{\circ}{F}$ , c'est-à-dire que  $u$  est nulle dans un voisinage de  $z_\infty$ , et nous allons faire voir précisément que  $u \equiv 0$  dans  $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$ .

Quitte à supprimer des termes, on peut supposer que tous les  $z_n$  appartiennent à  $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$ . Soit alors une suite  $(r_n)_{n=0}^\infty$  de rayons  $r_n > 0$  assez petits pour que :

$$\mathbb{D}_{r_n}(z_n) \subset \overset{\circ}{F} \cap \mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty) \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Soit  $v \in \operatorname{Harm}(\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty))$  une conjuguée harmonique de  $u$ , construite au Théorème 1.4. La fonction  $u + iv$  étant holomorphe, elle satisfait les équations de Cauchy-Riemann qui, en restriction à cette petite suite de disques :

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (\text{sur chaque } \mathbb{D}_{r_n}(z_n)),$$

montrent que  $v$  est constante sur chaque  $\mathbb{D}_{r_n}(z_n)$ . Comme  $u = 0$  aussi, la fonction holomorphe  $u + iv$  est alors constante dans les  $\mathbb{D}_{r_n}(z_n)$ , puis par le théorème d'unicité pour

les fonctions holomorphes, sa constance se propage dans le « grand » disque  $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$  — observons d'ailleurs qu'un seul disque  $\mathbb{D}_{r_n}(z_n) \subset \mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$  suffirait pour cela. Enfin,  $u = \operatorname{Re}(u + iv)$  est constante dans  $\mathbb{D}_{r_\infty}(z_\infty)$ , et cette constante ne peut être que 0.  $\square$

Comme le sous-ensemble non vide  $\overset{\circ}{F} \subset \Omega$  ouvert par définition est aussi fermé dans l'ouvert connexe  $\Omega$ , on a nécessairement  $\overset{\circ}{F} = F = \Omega$ , d'où  $u_1 = u_2$  partout.  $\square$

Toutefois, deux analogies fortes et utiles avec les fonctions holomorphes existent.

**Théorème 2.8. [Principe du maximum]** *Si une fonction harmonique  $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$  atteint son maximum global en un point intérieur  $z_0 \in \Omega$  :*

$$u(z_0) = \max_{z \in \Omega} u(z),$$

alors elle est constante.  $\square$

Le résultat vaut aussi pour le minimum, et c'est un corollaire direct en considérant la fonction opposée  $-u$  qui est aussi harmonique.

*Démonstration.* Soit un disque ouvert  $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \Omega$  avec  $r > 0$ . Le Théorème 1.4 fournit une fonction  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{D}_r(z_0))$  telle que  $\operatorname{Re} f = u$ .

La fonction exponentiée  $e^f$  est holomorphe, et elle possède un module  $|e^f| = e^u$  qui atteint alors son maximum en  $z_0$ . D'après le principe du maximum du module pour les fonctions holomorphes,  $f$  est constante, donc  $u|_{\mathbb{D}_r(z_0)}$  est constante, et enfin  $u$  est constante partout dans  $\Omega$  grâce au Théorème 2.6 d'unicité.  $\square$

**Théorème 2.9. [de Liouville]** *Si une fonction harmonique  $u \in \operatorname{Harm}(\mathbb{C})$  définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier est bornée supérieurement :*

$$u \leq M < \infty,$$

alors elle est constante.

En considérant  $-u$ , l'énoncé avec une hypothèse de bornitude inférieure est tout aussi vrai.

*Démonstration.* Quitte à remplacer  $u$  par  $-u + M + 1$ , on peut supposer que  $u > 0$ . Puisque  $\mathbb{C}$  est simplement connexe, le Théorème 1.4 fournit une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  définie sur  $\mathbb{C}$  tout entier telle que  $u = \operatorname{Re} f$ .

La transformation homographique :

$$h: z \mapsto \frac{z-1}{z+1} =: w$$

envoie le demi-plan  $\{\operatorname{Re} z > 0\}$  biholomorphiquement sur le disque unité  $\mathbb{D} = \{|w| < 1\}$ .

Alors quand on compose  $h \circ f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{D}$ , on obtient une fonction holomorphe sur  $\mathbb{C}$  bornée, laquelle est constante grâce au Théorème de Liouville classique, donc  $f$  est constante, donc  $u$  est constante.  $\square$

Par ailleurs, la notion de fonction harmonique est invariante par changement de coordonnée holomorphe.

**Théorème 2.10. [Invariance conforme]** *Soit une fonction harmonique  $u \in \operatorname{Harm}(\Omega)$  et soit un biholomorphisme :*

$$h: \Omega' \xrightarrow{\sim} \Omega$$

de  $\Omega$  sur un autre ouvert  $\Omega' \subset \mathbb{C}'$ . Alors la fonction composée  $u \circ h$  :

$$\Omega' \xrightarrow{h} \Omega \xrightarrow{u} \mathbb{R}$$

est elle aussi harmonique dans  $\Omega'$ .

*Démonstration.* Au voisinage d'un point  $z \in \Omega$ , soit une fonction holomorphe  $f$  telle que  $u = \operatorname{Re} f$ . Alors  $u \circ h = \operatorname{Re} f \circ h$  est partie réelle d'une fonction holomorphe au voisinage du point  $z' := h^{-1}(z)$ , donc  $u \circ h$  est harmonique.  $\square$

### 3. Problème de Dirichlet sur un disque ouvert $\Delta \subset \mathbb{C}$

Les fonctions harmoniques ont de remarquables propriétés d'équilibre qui leur confèrent une grande flexibilité pour résoudre le problème dit de Dirichlet dans des domaines à bord suffisamment 'régulier' en un certain sens.

**Définition 3.1.** Soit  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un domaine à bord  $\partial\Omega$  quelconque. On dit que le *problème de Dirichlet* est résoluble pour  $(\Omega, \partial\Omega)$  si, pour toute fonction continue à valeurs réelles définie sur le bord :

$$\phi: \partial\Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

il existe une fonction :

$$h \in \operatorname{Harm}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\Omega \cup \partial\Omega)$$

harmonique à l'intérieur et continue sur la fermeture telle que :

$$h|_{\partial\Omega} = \phi.$$

Dans cette section, nous allons nous contenter de traiter le cas où  $\Omega = \Delta$  est un disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , l'existence dans le cas général pouvant être délicate (théorie de Perron ; fonctions-barrière). En tout cas, l'unicité de la solution pour un domaine quelconque est facile.

**Lemme 3.2.** *Il existe au plus une solution au problème de Dirichlet pour  $(\Omega, \partial\Omega)$ .*

*Démonstration.* En effet, soient  $h_1$  et  $h_2$  deux solutions. Alors  $h_1 - h_2$  est harmonique dans  $\Omega$ , continue sur  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , et égale à 0 sur  $\partial\Omega$ . En appliquant le principe du maximum Théorème 2.8 à  $h_1 - h_2$  puis à  $h_2 - h_1$ , on se convainc aisément que  $h_1 - h_2 \equiv 0$ .  $\square$

Soit comme précédemment  $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$  le disque unité dans  $\mathbb{C}$  de bord  $\partial\mathbb{D} = \{|z| = 1\}$  le cercle unité.

**Définition 3.3.** Le *noyau de Poisson* est la fonction :

$$P: \mathbb{D} \times \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie par :

$$P(z, \zeta) := \operatorname{Re} \left( \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \right) = \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \quad (|z| < 1, |\zeta| = 1).$$

L'*intégrale de Poisson* ou *transformée de Poisson* d'une fonction réelle Lebesgue-intégrable sur le cercle :

$$\phi \in L^1(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$$

est la fonction définie pour  $|z| < 1$  par :

$$(3.4) \quad (P_{\mathbb{D}}\phi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) \phi(e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{i\theta} - z|^2} \phi(e^{i\theta}) d\theta.$$



Plus généralement, si  $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$  est un disque ouvert de  $\mathbb{C}$  centré en un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  de rayon  $r > 0$ , le noyau de Poisson associé est une renormalisation de celui du disque unité :

$$P\left(\frac{z-z_0}{r}, e^{i\theta}\right),$$

et l'intégrale de Poisson associée est alors définie similairement pour  $z \in \Delta$  par :

$$(P_\Delta \phi)(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P\left(\frac{z-z_0}{r}, e^{i\theta}\right) \phi(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Nous devons parfois examiner cette formule en détail, et en un point quelconque :

$$z = z_0 + s e^{it} \in \Delta,$$

avec  $0 \leq s < r$ , elle s'écrit explicitement (exercice) :

$$(3.5) \quad P_\Delta(z_0 + s e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} \phi(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Maintenant, la magie harmonique peut commencer à se dévoiler.

**Proposition 3.6.** *Pour tout disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , la transformée de Poisson d'une fonction  $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$  est une fonction harmonique de  $z \in \Delta$ .*

*Démonstration.* Quitte à effectuer un changement affine de variables, on peut supposer (exercice) que  $z_0 = 0$  et que  $r = 1$ , à savoir que  $\Delta = \mathbb{D}$ . Alors la formule (3.4) astucieusement ré-écrite :

$$(P_{\mathbb{D}}\phi)(z) = \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \phi(e^{i\theta}) d\theta \right) \quad (z \in \mathbb{D})$$

montre instantanément que la fonction  $z \mapsto P_{\mathbb{D}}\phi(z)$ , partie réelle d'une intégrale qui dépend holomorphiquement de  $z \in \mathbb{D}$ , est harmonique !  $\square$

Comme on l'aura deviné, c'est la transformée de Poisson qui résout le problème de Dirichlet sur un disque.

**Théorème 3.7.** *Pour tout disque ouvert  $\Delta \subset \mathbb{C}$ , étant donné une fonction intégrable  $\phi \in L^1(\partial\Delta, \mathbb{R})$  qui est continue en un point  $\zeta_0 \in \partial\Delta$ , on a :*

$$\phi(\zeta_0) = \lim_{\substack{z \rightarrow \zeta_0 \\ z \in \Delta}} (P_{\mathbb{D}}\phi)(z).$$

*En particulier, si  $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\Delta, \mathbb{R})$  est partout continue, la fonction :*

$$h(z) := \begin{cases} (P_{\mathbb{D}}\phi)(z) & \text{lorsque } z \in \Delta, \\ \phi(z) & \text{lorsque } z \in \partial\Delta, \end{cases}$$

*résout le problème de Dirichlet pour  $(\Delta, \partial\Delta)$ .*

*Démonstration.* À nouveau, on peut supposer que  $\Delta = \mathbb{D}$ . Tout repose sur la proposition fondamentale suivante, qui exprime que le noyau de Poisson est une approximation de l'unité.

**Proposition 3.8.** *Le noyau de Poisson  $P(z, \zeta)$  sur  $\mathbb{D} \times \partial\mathbb{D}$  jouit des trois propriétés suivantes :*

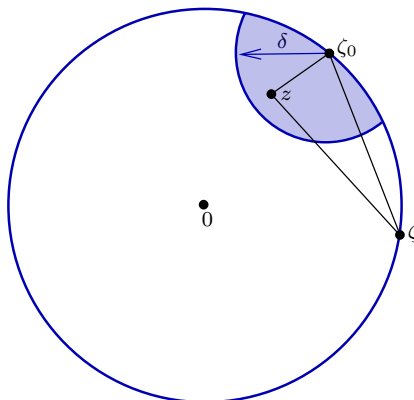
(i) *pour tout  $|z| < 1$ , fixé  $P(z, e^{i\theta}) > 0$  sur  $\partial\mathbb{D}$  ;*

(ii) pour tout  $|z| < 1$  fixé :

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta;$$

(iii) en tout point  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ , quel que soit  $\delta > 0$  arbitrairement petit donné à l'avance :

$$0 = \lim_{z \rightarrow \zeta_0} \left( \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) \right).$$



Autrement dit, lorsque  $z$  tend vers un point du bord  $\zeta_0 \in \partial\mathbb{D}$ , la propriété (iii) exprime que toute la « masse » constante égale à 1 par (i) du noyau de Poisson se concentre autour et très proche de  $\zeta_0$  : en dehors d'une zone de sécurité de longueur  $\delta > 0$ , la norme supérieure de  $P$  s'écrase vers zéro.

*Démonstration.* Il est clair que  $P(z, \zeta) = \frac{1-|z|^2}{|\zeta-z|^2} > 0$ , ce qui donne (i).

Pour ce qui est de (ii), exprimons l'intégrale de  $P(z, e^{i\theta})$  comme intégrale d'une fonction holomorphe à laquelle le Théorème des résidus s'applique :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( \frac{1}{2i\pi} \int_{|\zeta|=1} \left( \frac{2}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta} \right) d\zeta \right) \\ &= \operatorname{Re} (2 - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Enfin, établissons (iii). Comme sur la figure, soit  $z \in \mathbb{D}$  avec  $|z - \zeta_0| < \delta$ . Soit aussi  $\zeta \in \partial\mathbb{D}$  avec  $|\zeta - \zeta_0| \geq \delta$ . De l'inégalité du triangle :

$$\begin{aligned} |\zeta - z| &\geq |\zeta - \zeta_0| - |z - \zeta_0| \\ &\geq \delta - |z - \zeta_0|, \end{aligned}$$

nous déduisons :

$$\sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} P(z, \zeta) = \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} \frac{1 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \leq \sup_{|\zeta - \zeta_0| \geq \delta} \frac{1 - |z|^2}{(\delta - |z - \zeta_0|)^2}$$

et la limite du majorant à droite, quand  $z \rightarrow \zeta_0$  d'où  $1 - |z|^2 \rightarrow 0$ , est égale à 0.  $\square$

De retour à la démonstration du théorème, en notant  $\zeta_0 = e^{i\theta_0}$ , on peut écrire grâce à **(i)** et **(ii)** :

$$\begin{aligned} |P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0)| &= |P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0) \cdot 1| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) (\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)) d\theta \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta. \end{aligned}$$

Soit maintenant un  $\varepsilon > 0$  arbitrairement petit. Par continuité de  $\phi$  en  $\zeta_0$ , il existe  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  assez petit pour que :

$$|\zeta - \zeta_0| \leq \delta \implies |\phi(\zeta) - \phi(\zeta_0)| \leq \varepsilon.$$

Si donc nous découpons l'intégrale majorante en les deux morceaux :

$$\int_0^{2\pi} = \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} + \int_{|\zeta - \zeta_0| > \delta},$$

le premier morceau est petit :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| \leq \delta} P(z, e^{i\theta}) \cdot \varepsilon d\theta \\ &\leq \varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) d\theta \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Quant au second morceau, afin d'assurer qu'il soit lui aussi petit, grâce à **(iii)**, il existe aussi un  $\delta' = \delta'(\varepsilon) > 0$  assez petit pour que :

$$|z - \zeta_0| \leq \delta' \implies \sup_{|\zeta - \zeta_0|} P(z, \zeta) \leq \varepsilon.$$

Alors pour  $|z - \zeta_0| < \delta'$ , on peut effectivement le majorer :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta - \zeta_0| > \delta} P(z, e^{i\theta}) |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon |\phi(e^{i\theta}) - \phi(\zeta_0)| d\theta \\ &\leq \varepsilon \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\phi(e^{i\theta})| d\theta + |\phi(\zeta_0)| \right) \\ &= \varepsilon (\|\phi\|_{L^1(\partial\mathbb{D})} + |\phi(\zeta_0)|) \end{aligned}$$

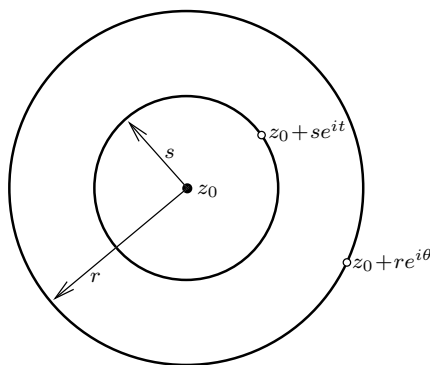
par une quantité qui tend vers 0 avec  $\varepsilon$ .

Au final, les majorants obtenus pour ces deux morceaux :

$$|P_{\mathbb{D}}\phi(z) - \phi(\zeta_0)| \leq \varepsilon + \varepsilon (\|\phi\|_{L^1(\partial\mathbb{D})} + |\phi(\zeta_0)|),$$

restent petits en s'additionnant, ce qui conclut.  $\square$

Comme conséquence de ce résultat, nous obtenons un analogue de la formule intégrale de Cauchy pour les fonctions harmoniques.



**Corollaire 3.9. [Formule intégrale de Poisson]** Si une fonction  $h$  est harmonique dans un voisinage ouvert d'un disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0)$ , avec  $z_0 \in \mathbb{C}$  et  $r > 0$ , alors pour tout  $0 \leq s < r$  et tout  $0 \leq t < 2\pi$ , on a :

$$h(z_0 + s e^{it}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r^2 - s^2}{r^2 - 2rs \cos(\theta - t) + s^2} h(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

*Démonstration.* Considérons le problème de Dirichlet sur le disque  $\Delta := \mathbb{D}_r(z_0)$  avec la valeur au bord  $h|_{\partial\Delta}$ . D'après ce qui précède,  $h$  elle-même et aussi la transformée de Poisson  $P_\Delta(h|_{\partial\Delta})$  sont toutes deux solutions. Grâce au Lemme 3.2 d'unicité,  $h = P_\Delta h$  sur  $\Delta$ , ce qui est la formule écrite en des points  $z = z_0 + s e^{it} \in \Delta$ .  $\square$

Faisons remarquer que cette formule généralise la formule de la moyenne, qu'on retrouve en posant  $r = 0$ . Ainsi, les valeurs de  $h$  en un point  $z \in \Delta$  quelconque peuvent être « capturées » à partir de la seule connaissance de ses valeurs sur le bord  $\partial\Delta$ . L'Exercice 8 produit encore une autre formule pour la fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\Delta)$  essentiellement unique satisfaisant  $h = \operatorname{Re} f$ .

#### 4. Caractérisation des fonctions harmoniques et applications

Dans la Définition 1.1 des fonctions harmoniques, on a supposé dès le départ que  $u \in \mathcal{C}^2$  est suffisamment lisse pour pouvoir lui appliquer l'opérateur de Laplace, et on a vu qu'en fait, la fonction est alors beaucoup plus régulière que  $\mathcal{C}^2$ , à savoir  $\mathcal{C}^\infty$ , voire  $\mathcal{C}^\omega$ . Depuis le XIX<sup>ème</sup> siècle, ce phénomène fondamental a été considérablement exploré et généralisé, et dans la théorie des fonctions harmoniques, on a par exemple un énoncé célèbre qui, partant d'une fonction *a priori* très irrégulière comme peuvent l'être les fonctions Lebesgue-intégrables, déduit l'harmonicité à partir d'une propriété d'équilibre.

**Théorème 4.1.** Soit une fonction localement intégrable :

$$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Si, en tout point  $z_0 \in \Omega$  et pour tout rayon :

$$r < \operatorname{dist}(z_0, \partial\Omega),$$

avec  $\overline{\mathbb{D}}_r(z_0) \subset \Omega$ , la fonction  $u$  satisfait la propriété d'équilibre :

$$u(z_0) = \underbrace{\frac{1}{\pi r^2} \iint_{\mathbb{D}_r(z_0)} u(\xi, \eta) d\xi d\eta}_{\substack{\text{moyenne bidimensionnelle} \\ \text{de } u \text{ sur le disque } \mathbb{D}_r(z_0)}}$$

alors en fait,  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ , et elle est harmonique dans  $\Omega$ .  $\square$

Un théorème analogue existe en supposant que pour *presque* tout rayon  $r < \text{dist}(z_0, \partial\Omega)$ , la fonction  $u$  est égale à sa valeur moyenne sur le cercle de rayon  $r$  :

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta.$$

Ces résultats seront d'ailleurs conséquences d'énoncés plus généraux dans la théorie des fonctions *sous-harmoniques*, et dont les démonstrations seront présentées et étudiées en détail ultérieurement.

Toutefois, au niveau que nous venons d'atteindre, nous pouvons énoncer et démontrer une caractérisation des fonctions harmoniques *continues*.

**Théorème 4.2. [Caractérisation de l'harmonicité par la propriété de la moyenne]** Soit  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue définie sur un ouvert  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Si  $h$  satisfait la propriété locale de la moyenne dans  $\Omega$ , à savoir si, pour tout  $z_0 \in \Omega$ , il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $0 \leq s \leq r$  :

$$h(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta$$

alors  $h$  est harmonique dans  $\Omega$ .

En particulier, la propriété locale de la moyenne possède un effet suprenant de rendre les fonctions continues plus régulières,  $\mathcal{C}^2$ ,  $\mathcal{C}^\infty$ ,  $\mathcal{C}^\omega$ . De plus, un aspect important très utile pour les applications est que cette propriété n'a à être vérifiée que sur des petits cercles centrés en  $z_0$ .

*Démonstration.* Il suffit de faire voir que  $h$  est harmonique dans tout disque fermé  $\bar{\Delta} \subset \Omega$ . Fixons un tel disque, et définissons une fonction  $k: \bar{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}$  au moyen de l'opérateur de Poisson  $P_\Delta$  par :

$$k := \begin{cases} h - P_\Delta(h|_{\partial\Delta}) & \text{sur } \Delta, \\ 0 & \text{sur } \partial\Delta. \end{cases}$$

Cette fonction  $k$  est continue sur  $\bar{\Delta}$ , et puisque  $h$  et la fonction harmonique  $P_\Delta(h|_{\partial\Delta})$  satisfont la propriété locale de la moyenne dans  $\Delta$ , il en va de même de  $k$ .

Comme  $\bar{\Delta}$  est compact,  $k$  y atteint une certaine valeur maximale :

$$\max_{\bar{\Delta}} k =: M \geq 0.$$

**Lemme 4.3.** Cette valeur vaut  $M = 0$ .

*Démonstration.* Décomposons  $\Delta$  en deux sous-ensembles :

$$E := \{z \in \Delta: k(z) < M\} \quad \text{et} \quad F := \{z \in \Delta: k(z) = M\}.$$

Clairement,  $E$  est ouvert puisque  $k$  est continue.

**Assertion 4.4.** L'ensemble  $F$  est lui aussi ouvert.

*Preuve.* En un point  $z \in F \subset \Delta$ , on a  $k(z) = M$ . La propriété de la moyenne sur des petits cercles centrés en  $z$  contenus dans  $\Delta$ , écrite sous la forme :

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \underbrace{M - k(z + s e^{i\theta})}_{\text{toujours } \geq 0 \text{ car } M = \max k} \right] d\theta,$$

force alors toutes les valeurs  $k(z + s e^{i\theta}) = M$  à être égales à  $M$ , sinon l'intégrale serait  $> 0$ . Ainsi,  $k \equiv M$  dans un voisinage ouvert de  $z$ .  $\square$

Par connexité de l'union disjointe  $\Delta = E \cup F$ , on a :

- soit  $\Delta = E$ , i.e.  $k < M$  partout sur  $\Delta$ , auquel cas :

$$M = \max_{\Delta \cup \partial\Delta} k = \max_{\partial\Delta} k = 0;$$

- soit  $\Delta = F$ , i.e.  $k \equiv M$  partout sur  $\Delta$ , et par continuité de  $k$  jusqu'à  $\partial\Delta$ , on obtient à nouveau :

$$M = 0,$$

ce qui termine le lemme.  $\square$

En procédant de manière analogue, on montre que :

$$m := \min_{\Delta} k \leq 0$$

vaut aussi  $m = 0$ , donc  $k = 0$  !

Ainsi, la fonction  $h = P_{\Delta}(h|_{\partial\Delta})$  qui coïncide avec la transformée de Poisson de sa restriction à  $\partial\Delta$  est bel et bien harmonique dans  $\Delta$  !  $\square$

Comme première application, nous déduisons un analogue du Théorème de Cauchy d'après lequel les limites uniformes de fonctions holomorphes sont encore holomorphes.

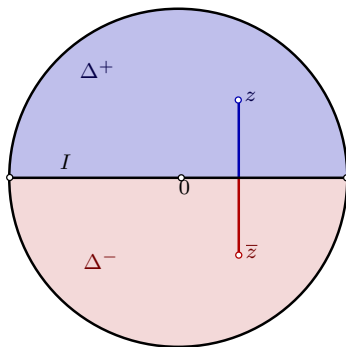
**Corollaire 4.5.** *Si  $(h_n)_{n=0}^{\infty}$  est une suite de fonctions harmoniques dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  qui converge uniformément sur les compacts  $K \subset \Omega$  vers une certaine fonction continue  $h$ , alors  $h$  est harmonique dans  $\Omega$ .*

*Démonstration.* Par convergence uniforme, les formules de la moyenne passent à la limite :

$$\begin{aligned} h(z_0) &= \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h_n(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(z_0 + s e^{i\theta}) d\theta, \end{aligned}$$

et grâce au théorème qui précède,  $h$  est effectivement harmonique.  $\square$

Comme deuxième application, nous énonçons un principe de réflexion pour les fonctions harmoniques qui est analogue à celui de Schwarz pour les fonctions holomorphes.



**Théorème 4.6. [Principe de réflexion]** Soit  $\Delta := \mathbb{D}_R(0)$  un disque de centre  $0 \in \mathbb{C}$  et de rayon  $R > 0$ , et soient ses parties supérieure et inférieure :

$$\Delta^\pm := \{z \in \Delta : \pm \operatorname{Im} z > 0\},$$

en contact le long du segment réel :

$$I := \{z \in \Delta : \operatorname{Im} z = 0\}.$$

Si une fonction harmonique dans  $\Delta^+$  se prolonge continûment jusqu'à  $I$  et s'y annule :

$$h^+ \in \operatorname{Harm}(\Delta^+) \cap \mathcal{C}^0(\Delta^+ \cap I) \quad \text{avec} \quad h^+|_I \equiv 0,$$

alors elle se prolonge comme fonction harmonique au disque  $\Delta$  tout entier par :

$$h(z) := -h^+(\bar{z}) \quad (\forall z \in \Delta^-).$$

*Démonstration.* Soit  $f^+ \in \mathcal{O}(\Delta^+)$  une fonction holomorphe telle que  $h^+ = \operatorname{Re} f^+$ . Alors la fonction :

$$-\operatorname{Re} f^+(\bar{z}),$$

définie pour  $z \in \Delta^-$  est partie réelle d'une fonction antiholomorphe, donc harmonique dans  $\Delta^-$ .

A-t-on encore harmonicité dans des voisinages de points  $x_0 \in I$  ?

En tout cas, on a manifestement continuité sur  $\Delta$  tout entier de la fonction globale :

$$h(z) := \begin{cases} h^+(z) & \text{lorsque } z \in \Delta^+, \\ 0 & \text{lorsque } z \in I, \\ -h^+(\bar{z}) & \text{lorsque } z \in \Delta^-. \end{cases}$$

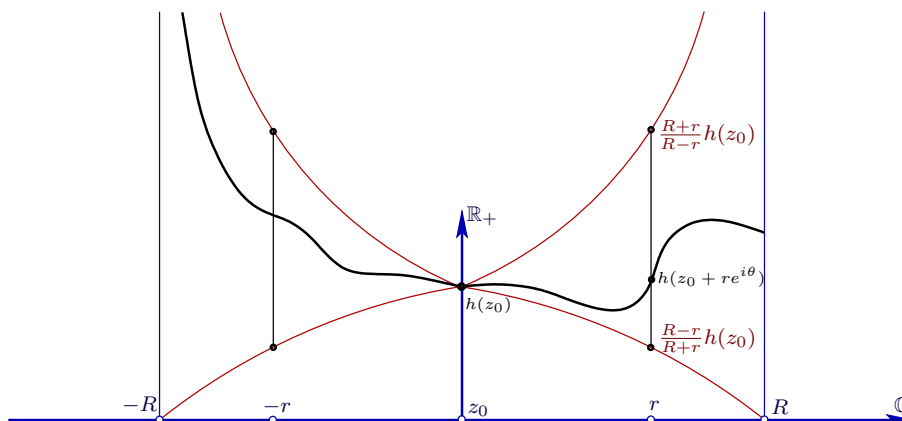
Grâce au Théorème 4.2, il suffit pour conclure de vérifier pour  $0 \leq s < \operatorname{dist}(x_0, \partial\mathbb{D})$  que :

$$\begin{aligned} 0 &= 2\pi h(x_0) \stackrel{?}{=} \int_{-\pi}^{\pi} h(x_0 + s e^{i\theta}) d\theta \\ &\stackrel{?}{=} \int_{-\pi}^0 -h^+(x_0 + s e^{-i\theta}) d\theta + \int_0^{\pi} h^+(x_0 + s e^{i\theta}) d\theta \stackrel{\text{OUI}}{=} 0, \end{aligned}$$

mais cela avait évidemment été prévu à l'avance ! □

## 5. Fonctions harmoniques positives : théorèmes de Harnack

Dans cette section, nous allons exploiter la formule intégrale de Poisson pour en déduire des inégalités sur les fonctions harmoniques à valeurs *positives*, surprenantes car elles permettent d'encadrer leurs graphes par valeurs inférieures et supérieures.



**Théorème 5.1. [Inégalités de Harnack]** Si  $h$  est une fonction harmonique définie sur un disque ouvert  $\mathbb{D}_R(z_0)$  centré en un point  $z_0 \in \mathbb{C}$  et de rayon  $R > 0$  qui est positive :

$$h(z) \geq 0 \quad (\forall z \in \Delta),$$

alors pour tout rayon inférieur  $0 \leq r < R$  et tout  $0 \leq \theta < 2\pi$  :

$$\frac{R-r}{R+r} h(z_0) \leq h(z_0 + r e^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r} h(z_0).$$

Ces inégalités expriment un contrôle très contraignant et très utile des valeurs de  $h$  lorsqu'on s'éloigne d'un point central : la fonction  $r \mapsto \frac{R+r}{R-r}$  et son inverse encadrent le graphe de  $h$  par deux hyperboloïdes.

Pour mieux mentaliser le diagramme ci-dessus, il faudrait plutôt s'imaginer que la base est réellement un disque contenu dans le plan 2-dimensionnel  $\mathbb{C}$  (non un segment), et que le graphe de  $h$  est une nappe ondulée, s'élevant éventuellement vers l'infini lorsque  $r \rightarrow R$ .

*Démonstration.* Choisissons un rayon intermédiaire  $r < s < R$ . La formule intégrale de Poisson du Corollaire 3.9 appliquée ici à la fonction  $h$  qui est harmonique dans un voisinage de  $\overline{\mathbb{D}}_s(z_0)$  s'écrit :

$$h(z_0 + r e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{s^2 - 2sr \cos(t - \theta) + r^2} h(z_0 + s e^{it}) dt.$$

Or pour tout  $t - \theta \in \mathbb{R}$  on a :

$$s^2 - 2sr \cos(t - \theta) + r^2 \geq s^2 - 2sr + r^2 = (s - r)^2,$$

donc comme  $h$  est positive on peut majorer l'intégrande :

$$\begin{aligned} h(z_0 + r e^{i\theta}) &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{s^2 - r^2}{(s - r)^2} h(z_0 + s e^{it}) dt \\ &\leq \frac{s + r}{s - r} h(z_0), \end{aligned}$$

et appliquer l'égalité de la moyenne. En faisant  $s \rightarrow R$ , on obtient la deuxième inégalité, tandis que la première se démontre d'une manière fort similaire (exercice).  $\square$

L'application la plus fréquente concerne les théorèmes de convergence, dont de nombreux avatars existeront dans les chapitres suivants consacrés aux fonctions sous-harmoniques et pluri-sous-harmoniques. Bien méditer le principe dans le cas standard des fonctions harmoniques anticipera la joie de comprendre en profondeur de tout ce qui suivra.



**Théorème 5.2. [de convergence de Harnack]** Si  $(h_n)_{n=1}^\infty$  est une suite croissante de fonctions harmoniques dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  :

$$h_1 \leq h_2 \leq h_3 \leq \dots \leq h_n \leq h_{n+1} \dots,$$

alors :

- ou bien  $h_n \rightarrow \infty$  uniformément sur tout compact  $K \subset \Omega$  ;
- ou bien  $h_n$  converge vers une certaine fonction harmonique finie  $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$ , uniformément sur tout compact  $K \subset \Omega$ .

*Démonstration.* En remplaçant  $h_n \mapsto h_n - h_1$ , on se ramène à une suite croissante de fonctions harmoniques positives.

**Assertion 5.3.** S'il existe un point  $z_0 \in \Omega$  en lequel  $h_n(z_0) \rightarrow \infty$ , alors  $h_n(z) \rightarrow \infty$  en tout point  $z \in \Omega$ .

*Preuve.* En effet, l'ensemble incriminé :

$$E_\infty := \{z \in \Omega : h_n(z) \rightarrow \infty\}$$

est ouvert grâce à l'inégalité inférieure de Harnack, parce que si  $z_0 \in E_\infty$ , si  $\mathbb{D}_R(z_0) \subset \Omega$  avec  $R > 0$ , si  $z \in \mathbb{D}_R(z_0)$ , alors :

$$\underbrace{\frac{R - |z - z_0|}{R + |z - z_0|} h_n(z_0)}_{\rightarrow \infty} \leq h_n(z).$$

Ensuite, l'inégalité supérieure de Harnack appliquée d'une manière fort similaire montre (exercice) que son complémentaire  $\Omega \setminus E_\infty$  est lui aussi ouvert. Par connexité et non-vacuité,  $E_\infty = \Omega$ .  $\square$

La circonstance significative est donc celle où la suite croissante  $(h_n)_{n=1}^\infty$  prend des valeurs finies en *tous* les points  $z \in \Omega$ .

Qui plus est, l'inégalité de Harnack supérieure — laquelle n'a pas encore dévoilé tout son secret ! — montre, lorsqu'on l'applique aux fonctions harmoniques positives  $h_n - h_m$  pour  $1 \ll m \leq n \rightarrow \infty$  :

$$(h_n - h_m)(z) \leq \frac{R + |z - z_0|}{R - |z - z_0|} (h_n - h_m)(z_0),$$

que la convergence est *uniforme* sur tout sous-disque  $\mathbb{D}_r(z_0) \subset \mathbb{D}_R(z_0)$  de rayon  $0 < r < R$ . Grâce au Corollaire 4.5, la fonction-limite  $h := \lim h_n$  est alors harmonique dans  $\Omega$ .  $\square$

Toute la force de l'inégalité supérieure de Harnack qui vient de garantir une convergence uniforme était d'ailleurs implicitement devinable dans la figure d'encadrements par hyperboles.

**Corollaire 5.4. [de Harnack]** Soit une suite  $(u_k)_{k=1}^\infty$  de fonctions harmoniques  $u_k \in \text{Harm}(\Omega)$  qui est décroissante :

$$\dots \leq u_{k+1} \leq u_k \leq \dots \leq u_1.$$

Alors la limite :

$$u(z) := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k(z)$$

ou bien est  $\equiv -\infty$ , ou bien constitue une fonction harmonique (finie) dans  $\Omega$ .

*Démonstration.* Soit  $\omega \subset \Omega$  un sous-ouvert de fermeture compacte  $\bar{\omega} \subset \Omega$ . Après soustraction d'une constante :

$$u_1 \longmapsto u_1 - \max_{\bar{\omega}} u_1,$$

on peut supposer que  $u_1 \leq 0$ . Le théorème précédent s'applique alors à la suite croissante  $(-u_n|_{\omega})_{n=1}^{\infty}$  de fonctions harmoniques positives sur  $\omega$ .  $\square$

## 6. Pseudodistance de Harnack

Soit maintenant  $\mathbb{C}_{\infty} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$  le plan complexe auquel on ajoute un point à l'infini, muni de la topologie pour laquelle une base de voisinages de  $\{\infty\}$  est :

$$\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > R\} \quad (R > 0).$$

Il s'agit de la sphère de Riemann, biholomorphe à l'espace projectif complexe de dimension 1 :

$$P^1(\mathbb{C}) = \{[Z_0 : Z_1] \in \mathbb{C}^2 \setminus [0 : 0]\} / \left( [Z_0 : Z_1] \sim [\lambda Z_0 : \lambda Z_1] \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}^* \right).$$

L'intérieur, le bord, la fermeture d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$  seront pris relativement à cette topologie, équivalente à celle définie par la *distance de corde* sur la sphère :

$$\text{dist}(z_1, z_2) := \begin{cases} \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{1 + |z_1|^2} \sqrt{1 + |z_2|^2}} & \text{lorsque } z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \\ \frac{1}{\sqrt{1 + |z_1|^2}} & \text{lorsque } z_1 \in \mathbb{C}, z_2 = \infty. \end{cases}$$

Autour de  $\{\infty\}$ , la topologie est la même qu'autour de  $0 \in \mathbb{C}$  en remplaçant  $z$  par  $\frac{1}{z}$ .

L'inégalité de Harnack sur des disques implique un résultat analogue beaucoup plus général.

**Proposition 6.1.** *Étant donné un domaine quelconque  $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$  et deux points  $z_1, z_2 \in \Omega$ , il existe un nombre :*

$$\tau = \tau(\Omega, z_1, z_2)$$

*tel que pour toute fonction harmonique positive  $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$  :*

$$\tau^{-1}h(z_2) \leq h(z_1) \leq \tau h(z_2).$$

*Démonstration.* Écrivons  $z_1 \sim z_2$  lorsqu'il existe un nombre  $\tau \geq 1$  satisfaisant cela. On vérifie qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Ensuite, les inégalités de Harnack montrent (exercice) que les classes d'équivalence sont des sous-ensembles *ouverts* de  $\Omega$ . Comme  $\Omega$  est connexe, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence.  $\square$

**Définition 6.2.** La *distorsion de Harnack* entre deux points  $z_1, z_2$  d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}_{\infty}$  est la constante *minimale* :

$$\tau_{\Omega}(z_1, z_2) \geq 1$$

satisfaisant pour *toute* fonction harmonique positive  $h \in \text{Harm}(\Omega, \mathbb{R}_+)$  :

$$\tau_{\Omega}(z_1, z_2)^{-1} h(z_2) \leq h(z_1) \leq \tau_{\Omega}(z_1, z_2) h(z_2).$$

Bien entendu, ces distorsions peuvent être difficiles à calculer explicitement pour des domaines quelconques, mais pour un disque, ce qui précède avait déjà implicitement fait le travail.

**Théorème 6.3.** Sur  $\Delta = \mathbb{D}_R(z_0) \subset \mathbb{C}$ , on a :

$$\tau_\Delta(z_1, z_0) = \frac{R + |z_1 - z_0|}{R - |z_1 - z_0|} \quad (\forall z_1 \in \Delta).$$

*Démonstration.* Les inégalités de Harnack offrent au moins une constante supérieure à la minimale possible :

$$\tau_\Delta(z_1, z_0) \leq \frac{R + |z_1 - z_0|}{R - |z_1 - z_0|}.$$

Pour faire voir qu'il y a égalité, avec  $z_0 \neq z_1 \in \Delta$  et  $r_1 := |z_1 - z_0|$ , en écrivant  $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ , et en considérant la fonction harmonique positive :

$$h(z) := \operatorname{Re} \left( \frac{R e^{i\theta_1} + (z - z_0)}{R e^{i\theta_1} - (z - z_0)} \right)$$

qui satisfait  $h(z_0) = 1$ , l'inégalité de Harnack supérieure devient égalité en  $z = z_1$  :

$$h(z_1) = \frac{R e^{i\theta_1} + r_1 e^{i\theta_1}}{R e^{i\theta_1} - r_1 e^{i\theta_1}} = \frac{R + r_1}{R - r_1} \cdot h(z_0)$$

ce qui montre que  $\tau_\Delta(z_1, z_0)$  a bien la valeur annoncée.  $\square$

**Fill ??**

## 7. Exercices

**Exercice 1.** Montrer que la fonction  $h(x + iy) := e^x (x \cos y - y \sin y)$  est harmonique sur  $\mathbb{C}$ , et trouver une fonction holomorphe  $f \in \mathcal{O}(\mathbb{C})$  telle que  $h = \operatorname{Re} f$ .

**Exercice 2.** Soit  $h$  une fonction harmonique dans l'anneau  $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z| < r_2\}$ , avec  $0 < r_1 < r_2 < \infty$ . En utilisant le fait que  $2 \frac{\partial h}{\partial \bar{z}} = h_x - i h_y$  est holomorphe, montrer qu'il existe des constantes uniques  $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  et  $b$  avec  $a_0, b \in \mathbb{R}$  telles que :

$$h(z) = \operatorname{Re} \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n + b \log |z| \quad (r_1 < |z| < r_2).$$

**Exercice 3.** Soient  $h$  et  $k$  deux fonctions qui sont harmoniques et non constantes dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$ . Montrer que  $hk$  est harmonique si et seulement si il existe une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que  $h + i c k$  est holomorphe. Indication: Pour le 'seulement si', considérer  $\frac{f}{g}$ , où  $f := h_x - i h_y$  et  $g := k_x - i k_y$ .

**Exercice 4.** En utilisant la propriété qu'ont les fonctions harmoniques d'être analytiques réelles, trouver une autre démonstration du Théorème 2.6 d'unicité.

**Exercice 5.** Soit  $\mathbb{D}$  le disque unité et soit  $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$  la fonction  $\phi(\zeta) := \bar{\zeta}$ . Montrer qu'il n'existe pas de fonction holomorphe continue jusqu'au bord  $f \in \mathcal{O}(\Delta) \cap \mathcal{C}^0(\Delta \cup \partial\Delta)$  telle que  $f|_{\partial\mathbb{D}} = \phi$ . Interpréter cela vis-à-vis du problème de Dirichlet.

**Exercice 6. (a)** Montrer que le noyau de Poisson pour  $z = r e^{it} \in \mathbb{D}$  et  $\zeta = e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$  est donné par :

$$P(r e^{it}, e^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} r^{|n|} e^{in(t-\theta)}.$$

Utiliser cette formule pour donner une autre preuve de la Proposition 3.8 (i).

**(b)** Montrer que si  $\phi : \partial\mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction Lebesgue-intégrable, alors :

$$(P_{\mathbb{D}}\phi)(r e^{it}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^{|n|} e^{int},$$

où les  $a_n$  sont certains coefficients dont on donnera une interprétation.

**(c)** On suppose maintenant que  $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$  est continue. Montrer que  $P_{\mathbb{D}}\phi(r e^{it})$  converge uniformément vers  $\phi$  sur  $\partial\mathbb{D}$  lorsque  $r \nearrow 1$ .

(d) Montrer que toute fonction continue  $\phi \in \mathcal{C}^0(\partial\mathbb{D}, \mathbb{R})$  peut être approximée uniformément sur  $\partial\mathbb{D}$  de manière arbitrairement proche par des *polynômes trigonométriques réels*, à savoir des expressions de la forme  $\sum_{-N}^N c_n e^{in\theta}$  avec des constantes  $c_n \in \mathbb{C}$  satisfaisant  $c_{-n} = \overline{c_n}$ .

**Exercice 7.** Soit  $(h_n)_{n=0}^\infty$  une suite de fonctions harmoniques dans un domaine  $\Omega \subset \mathbb{C}$  qui converge uniformément sur les compacts  $K \subset \Omega$  vers une fonction harmonique  $h \in \text{Harm}(\Omega)$ . Montrer que les deux suites de dérivées partielles  $(\frac{\partial h_n}{\partial x})_{n=0}^\infty$  et  $(\frac{\partial h_n}{\partial y})_{n=0}^\infty$  convergent aussi uniformément sur les compacts  $K \subset \Omega$  vers  $h_x$  et  $h_y$ .

**Exercice 8.** Montrer que si une fonction  $f$  est holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_r(0)$  de centre  $0 \in \mathbb{C}$  et de rayon  $r > 0$ , et si  $h := \text{Re } f$ , alors on a :

$$f(z) - f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2z}{r e^{i\theta} - z} h(r e^{i\theta}) d\theta,$$

pour tout  $|z| < r$ . Indication: Commencer par voir que les parties réelles coïncident.

**Exercice 9.** Dédurre de l'inégalité de Harnack du Théorème 5.1 une démonstration alternative du Théorème 2.9 de Liouville. Indication: Dans  $\mathbb{C}$ , considérer deux disques  $0 \in \mathbb{D}_r \subset \mathbb{D}_R$  et faire  $R \rightarrow \infty$ .

**Exercice 10.** (a) Montrer que si  $h$  est une fonction harmonique positive sur un disque  $\mathbb{D}_r(0)$  de rayon  $r > 0$ , alors :

$$|\nabla h| := (h_x^2 + h_y^2)^{1/2} \leq \frac{2}{r} h(0).$$

(b) En déduire que :

$$|\nabla h(z)| \leq \frac{2r}{r^2 - |z|^2} h(z) \quad (\forall |z| < r).$$

**Exercice 11.** Soit  $(h_n)_{n=1}^\infty$  une suite de fonctions harmoniques positives sur le disque unité  $\mathbb{D}$ . Montrer que si elle converge ponctuellement en tout point  $z \in \omega \subset \mathbb{D}$  d'un ouvert non vide, alors elle converge uniformément sur tous les compacts  $K \subset \mathbb{D}$ .

**Exercice 12.** Montrer que si une fonction  $f$  holomorphe dans un disque  $\mathbb{D}_r(0)$  de rayon  $r > 0$  satisfait  $0 < |f| < 1$ , alors :

$$|f(z)| \leq |f(0)|^{\frac{r-|z|}{r+|z|}} \quad (\forall |z| < r).$$

**Exercice 13.** Montrer que la distorsion de Harnack en deux points quelconques  $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$  du disque unité satisfait :

$$\tau_{\mathbb{D}}(z_1, z_2) = \frac{1 + \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|}{1 - \left| \frac{z_1 - z_2}{1 - \overline{z_1} z_2} \right|}.$$

Indication: Utiliser une homographie du disque qui envoie  $z_1$  sur 0.

**Exercice 14.** Soit  $h$  une fonction harmonique dans un voisinage ouvert d'un disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$  de rayon  $R > 0$ . Pour tout  $0 \leq r \leq R$ , on considère :

$$M_h(r) := \sup_{|z|=r} h(z).$$

(a) Établir l'inégalité :

$$M_h(r) \leq \frac{2r}{R+r} M_h(R) + \frac{R-r}{R+r} h(0) \quad (\forall 0 \leq r \leq R).$$

(b) En déduire la généralisation suivante du Théorème de Liouville : si une fonction  $h$  est harmonique dans  $\mathbb{C}$  tout entier et satisfait :

$$\liminf_{\rho \rightarrow \infty} \frac{M_h(\rho)}{\rho} \leq 0,$$

alors  $h$  est constante.

**Exercice 15.** Soit  $h$  une fonction holomorphe dans un voisinage ouvert d'un disque fermé  $\overline{\mathbb{D}}_R(0)$ . Pour  $0 \leq r \leq R$ , on définit :

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)| \quad \text{et} \quad A_f(r) := \sup_{|z|=r} \operatorname{Re} f(z).$$

Établir l'inégalité de Borel-Carathéodory :

$$M_f(r) \leq \frac{2r}{R-r} A_f(R) + \frac{R+r}{R-r} |f(0)| \quad (0 \leq r < R).$$

Indication: Appliquer le résultat de l'Exercice 8 à la fonction :

$$A_f(R) - f.$$

**Exercice 16.** EE