Devoirs, Examens
Intégration, Analyse de Fourier

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

« Dieu ne se soucie pas de nos difficultés mathématiques. »

Mikhail GROMOV, Professeur permanent à l'IHES.

Méthodologie de travail

• **Polycopié de cours.** Des chapitres constituant un polycopié en cours d'élaboration seront distribués régulièrement. Chaque étudiant est invité à signaler les fautes typographiques et autres défauts, puisque cela aidera à améliorer le polycopié pour l'année prochaine. De nombreux exercices d'assimilation seront inclus.

• **Lecture régulière du polycopié.** *Afin de réussir sa formation au métier merveilleux de mathématicien — métier qui exige une grande capacité de lire, en solitaire, des textes mathématiques écrits —, chaque étudiant doit impérativement lire et étudier attentivement le polycopié*. Le travail de lecture peut s'effectuer occasionnellement, même sur des courtes périodes d'une dizaine de minutes, à la maison, à la bibliothèque ou dans les transports en commun. *C'est en lisant qu'on devient vraiment intelligent*, car on absorbe les intelligences variées d'autres personnes sans rester confiné en soi-même, voire infiniment pire : confiné à l'abrutissement total du tripotage crétinisant de téléphone portable ! Tous les mathématiciens professionnels sont de grands lecteurs et savent mettre à distance la technologie ludique envahissante.

• **Assiduité au cours.** Il est vrai que lire des mathématiques peut s'avérer ardu voire décourageant, d'autant plus que d'assez nombreux textes écrits sous-entendent beaucoup de choses et ne parviennent pas véritablement à transmettre les intuitions fondamentales. Or *c'est principalement le cours oral au tableau qui permet de transmettre les idées informelles et les intuitions importantes*. Aussi lecture du polycopié et présence au cours sont-elles *deux activités complémentaires et indispensables pour une préparation optimale au métier de mathématicien*. De plus, *on lit beaucoup plus facilement le polycopié après avoir écouté le professeur*.

• **Prise de notes pendant les séances de cours.** L'existence d'un polycopié *ne dispense absolument pas de prendre des notes manuscrites complètes et soignées*, car ces notes, relatives au cours intuitif, viendront compléter la lecture du polycopié écrit. *Au tableau apparaîtront de nombreuses figures qui seront absentes du polycopié. Il faut donc être très respectueux des figures, qui sont de la pensée intuitive très élaborée*.

• **Devoirs à la maison.** Trois devoirs à la maison seront proposés au cours du semestre avec des exercices de niveau fort accessible. *On tiendra compte « inconsciemment » des performances de chacun aux devoirs à la maison pour relever ou rabaisser les notations*. Évidemment, avoir réfléchi *indépendamment* sur ces devoirs aidera grandement à obtenir une note finale agréable, car un certain pourcentage des questions d'examen (partiel) seront des variations sur des questions traitées à la maison.

1. **Partiel du Jeudi 10 Mars 2011 .... 4**
2. **Corrige détaillé du partiel du Jeudi 10 Mars 2011 .... 7**
3. **Examen du Jeudi 19 Mai 2011 .... 15**
4. **Corrigé détaillé de l'examen du Jeudi 19 Mai 2011 .... 18**
5. **Partiel du Lundi 12 Mars 2012 .... 25**
6. **Corrigé détaillé du partiel du Lundi 12 mars 2012 .... 29**
7. **Examen du Jeudi 10 Mai 2012 .... 39**
8. **Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 11 Avril 2012 .... 42**
9. **Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 2 Mai 2012 .... 46**
10. **Partiel du 13 mars 2013 et son corrigé détaillé 48**
11. **Examen du Mercredi 15 mai 2013 .... 59**
12. **Devoir-maison à rendre pour le Mardi 12 mars 2013 .... 62**
13. **Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 15 mai 2013 .... 67**
14. **Partiel du Mercredi 12 mars 2014 .... 73**
15. **Corrigé détaillé de l'Examen partiel du Mercredi 12 mars 2014 ... 77**
16. **Examen du Jeudi 15 mai 2014 .... 84**
17. **Partiel du Mercredi 12 novembre 2014 .... 88**
18. **Corrigé du partiel du Mercredi 12 novembre 2014 .... 91**
19. **Examen du Jeudi 8 janvier 2015 .... 101**
20. **Rattrapage du Vendredi 19 juin 2015 .... 104**
21. **Partiel du Mardi 10 novembre 2015 .... 107**
22. **Corrigé du partiel du Mardi 10 novembre 2015 .... 110**
23. **Examen du Mardi 12 janvier 2016 .... 113**
24. **Rattrapage du Jeudi 14 juin 2016 .... 118**
25. **Partiel du jeudi 10 novembre 2016 .... 122**
26. **Corrigé détaillé du partiel du jeudi 10 novembre 2016 .... 126**

1. Partiel du Jeudi 10 Mars 2011

Exercice 1. Soient H et K deux espaces de Hilbert, soit F un sous-espace vectoriel arbitraire de H, et soit L une application linéaire continue quelconque de F dans K. L'objectif est de démontrer qu'il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\widetilde{L}\colon H \to K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\widetilde{L}\big|_F = L$ et $\|\!|\widetilde{L}|\!\| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $\|\!|\widetilde{L}|\!\| = \|\!|L|\!\|$.

(a) Rappeler la définition de la norme d'opérateur $\|\!|L|\!\|$.

(b) Montrer tout d'abord que L admet un unique prolongement linéaire continu $L' \in \mathrm{Lin}\big(\overline{F}, K\big)$.

(c) Établir que l'application $h \mapsto \pi_{\overline{F}}(h)$, de H à valeurs dans $\overline{F}$, « projection orthogonale sur $\overline{F}$ », est linéaire continue. Que vaut $\|\!|\pi_{\overline{F}}|\!\|$?

(d) Considérer l'opérateur $\widetilde{L} := L' \circ \pi_{\overline{F}}$ et conclure.

Exercice 2. Soit $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots, \mathscr{C}_k, \dots$ une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides dans un espace de Hilbert H qui satisfont :

$$\mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k \qquad\qquad (k \geqslant 1).$$

(a) Montrer par un exemple géométrique simple que l'intersection :

$$\mathscr{C}_\infty := \bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathscr{C}_k$$

peut se réduire à l'ensemble vide.

(b) On suppose dorénavant que $\mathscr{C}_\infty \neq \emptyset$. Vérifier alors que $\mathscr{C}_\infty$ est un sous-ensemble convexe fermé de H.

(c) Fixons à présent un élément $h \in H$ arbitraire. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note :

$$h_k := \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$$

le projeté de h sur $\mathscr{C}_k$, et aussi :

$$\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$$

le projeté de h sur $\mathscr{C}_\infty$. Vérifier alors que :

$$\|h - h_k\|^2 \leqslant \|h - h_{k+1}\|^2 \leqslant \|h - \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)\|^2.$$

(d) Qu'en déduire sur la suite $\big(\|h - h_k\|^2\big)_{k \geqslant 1}$?

(e) En utilisant l'identité du parallélogramme (que l'on rappellera ou que l'on reconstituera), établir que la suite $(h_k)_{k \geqslant 1}$ est alors nécessairement de Cauchy dans H pour la distance associée à la norme hilbertienne.

(f) Si on note :

$$h_\infty := \lim_{k\to+\infty} h_k,$$

montrer que l'on a, pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$:

$$\mathrm{Re}\ \langle h - h_\infty,\ g - h_\infty\rangle \leqslant 0.$$

(g) En déduire :

$$h_\infty = \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h),$$

et énoncer le résultat obtenu sous la forme d'un théorème clair.

Exercice 3. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme de Fejér est continue sur le cercle $\mathbb{T}$ et satisfait :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Exercice 4. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π-périodique (continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5. On considère la série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $S(\theta)$ sa somme.

(b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.

(c) En développant $\sin^3(n\theta)$, exprimer $S(\theta)$ en fonction de (justifier aussi l'existence) :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

(d) Montrer que $S(\theta)$ est développable en série de Fourier et trouver son développement.

(e) En considérant aussi :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

calculer explicitement $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$.

(f) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a la formule explicite :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4} \sin\big(\sin\theta\big)\, e^{\cos\theta} - \tfrac{1}{4} \sin\big(\sin 3\theta\big)\, e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que ses sommes de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ sont impaires et en déduire que f elle-même est impaire.

(b) On considère la fonction $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(\theta) := -\int_0^\theta f(t)\,dt.$$

Montrer que F est 2π-périodique, de classe $\mathscr{C}^1$, et que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\left[\begin{aligned} &\widehat{F}(0) = \int_0^{2\pi} t\,f(t)\,\frac{dt}{2\pi}, \\ &\widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|}\,b_{|k|}, \qquad \forall\,k \in \mathbb{Z}^*. \end{aligned}\right.$$

Exercice 7. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. Montrer que la série :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

est absolument convergente.

2. Corrigé détaillé du partiel du Jeudi 10 Mars 2011

Exercice 1. On supposera $F \neq \{0\}$, car si F se réduit à $\{0\}$, l'application linéaire continue $H \to K$ identiquement nulle convient comme prolongement de l'application nulle $\{0\} \to K$ préservant la norme d'opérateur.

(a) [0,5 pt] La norme de l'opérateur linéaire :

$$L\colon \big(F,\, \|\cdot\|_H\big) \longrightarrow \big(K,\, \|\cdot\|_K\big)$$

est classiquement définie par :

$$|\!|\!|L|\!|\!| := \sup_{\substack{f\in F\\ f\neq 0}} \frac{\|L(f)\|_K}{\|f\|_H} = \sup_{\substack{f\in F\\ \|f\|=1}} \|L(f)\|_K.$$

(b) [1 pt] Tout élément $\overline{f} \in \overline{F}$ de l'adhérence du sous-espace vectoriel $F \subset H$ s'obtient comme la limite dans H d'une certaine suite $(f_k)_{k\geqslant 1}$ d'éléments $f_k \in F$, laquelle est alors nécessairement de Cauchy. Or la majoration uniforme :

$$\|L(f_{k_2}) - L(f_{k_1})\|_K \leqslant |\!|\!|L|\!|\!|\, \|f_{k_2} - f_{k_1}\|_H$$

montre que la suite $\big(L(f_k)\big)_{k\geqslant 1}$ est alors aussi de Cauchy dans l'espace de Hilbert K, lequel est complet par définition. Donc il existe un unique $\overline{g} \in K$ tel que $\lim_{k\to+\infty} L(f_k) = \overline{g}$.

Maintenant, cette application[1] $\overline{L}$ qui à un tel $\overline{f} \in \overline{F}$ associe ce $\overline{g}$ est *linéaire*, puisque, si $f_k' \to \overline{f}' \in \overline{F}$, si $\overline{g}' := \overline{L}(\overline{f}')$, si $f_k'' \to \overline{f}'' \in \overline{F}$, si $\overline{g}'' := \overline{L}(\overline{f}'')$, et si λ', λ'' sont deux constantes arbitraires, la suite $\lambda' f_k' + \lambda'' f_k''$ converge vers $\lambda'\overline{f}' + \lambda''\overline{f}''$, et on déduit de la linéarité de L que :

$$\lim_{k\to+\infty} L\big(\lambda'\, f_k' + \lambda''\, f_k''\big) = \lambda' \lim_{k\to+\infty} L(f_k') + \lambda'' \lim_{k\to+\infty} L(f_k'') = \lambda'\,\overline{g}' + \lambda''\,\overline{g}'',$$

donc l'unique élément que $\overline{L}$ associe à $\lambda'\overline{f}' + \lambda''\overline{f}''$ est bien égal à $\lambda'\overline{L}(\overline{f}') + \lambda''\overline{L}(\overline{f}'')$.

Ensuite, en passant à la limite dans les inégalités :

$$\|L(f_k)\|_K \leqslant |\!|\!|L|\!|\!|\, \|f_k\|_H \qquad\qquad (k\geqslant 1;\ f_k\in F),$$

on obtient :

$$\|\overline{L}\big(\,\overline{f}\,\big)\|_K \leqslant |\!|\!|L|\!|\!|\, \|\overline{f}\|_H,$$

et donc $|\!|\!|\overline{L}|\!|\!| \leqslant |\!|\!|L|\!|\!|$, ce qui montre que $\overline{L}$ est un opérateur linéaire continu. En fait, comme $\overline{L}\big|_F = L$, on a même, plus précisément :

$$|\!|\!|\overline{L}|\!|\!| = |\!|\!|L|\!|\!|.$$

Enfin, si deux applications linéaires continues $\overline{L}_1\colon \overline{F} \to K$ et $\overline{L}_2\colon \overline{F} \to K$ prolongent toutes deux $L\colon F \to K$, à savoir $\overline{L}_1\big|_F = L$ et $\overline{L}_2\big|_F = L$, alors, puisque tout élément

1. Noter le léger changement de notation par rapport à l'énoncé, où le prolongement $\overline{L}$ était noté L'.

élément $\overline{f} \in \overline{F}$ de l'adhérence de F peut s'écrire comme la limite $\overline{f} = \lim_{k\to+\infty} f_k$ d'une suite d'éléments $f_k \in F$, et puisque $\overline{L}_1$ et $\overline{L}_2$ sont continues, on voit que :

$$\overline{L}_1(\overline{f}) = \overline{L}_1\big(\lim_{k\to+\infty} f_k\big) = \lim_{k\to+\infty} \overline{L}_1(f_k) = \lim_{k\to+\infty} L(f_k) = \lim_{k\to+\infty} \overline{L}_2(f_k) = \overline{L}_2\big(\lim_{k\to+\infty} f_k\big) = \overline{L}_2(\overline{f}),$$

d'où $\overline{L}_1 = \overline{L}_2$.

Ainsi l'application $\overline{L}$ définit l'unique prolongement linéaire continu $\overline{L} \in \mathrm{Lin}\big(\overline{F}, K\big)$ de L, c'est-à-dire satisfaisant $\overline{L}\big|_F = L$.

(c) [1 pt] D'après un résultat du cours (Corollaire 5.3), puisque $\overline{F}$ est fermé, l'espace de Hilbert H se décompose comme somme directe orthogonale :

$$H = \overline{F} \overset{\perp}{\oplus} \overline{F}^{\perp}$$

de $\overline{F}$ avec son orthogonal :

$$\overline{F}^{\perp} := \big\{g \in H\colon\ \langle g, f\rangle = 0,\ \forall\, f \in \overline{F}\big\},$$

lequel est lui aussi fermé. Ainsi, tout élément $h \in H$ se décompose comme :

$$h = \pi_{\overline{F}}(h) + \pi_{\overline{F}^{\perp}}(h),$$

où les deux projections $\pi_{\overline{F}}(\cdot)$ et $\pi_{\overline{F}^{\perp}}(\cdot)$ sont linéaires, et l'orthogonalité assure que le théorème de Pythagore est satisfait :

$$\|h\|^2 = \big\|\pi_{\overline{F}}(h)\big\|^2 + \big\|\pi_{\overline{F}^{\perp}}(h)\big\|^2.$$

Mais alors, si on néglige le second terme à droite qui est positif, cette égalité peut être vue comme une inégalité :

$$\|h\|^2 \geqslant \big\|\pi_{\overline{F}}(h)\big\|^2,$$

laquelle exprime que la norme de l'opérateur de projection orthogonale $\pi_{\overline{F}}(\cdot)$ est toujours $\leqslant 1$. Enfin, puisque cet opérateur se réduit à l'identité en restriction à $\overline{F} \neq \{0\}$, on a en fait :

$$\|\pi_{\overline{F}}\| = 1.$$

(d) [0,5 pt] L'opérateur $\widetilde{L} := \overline{L} \circ \pi_{\overline{F}}$ est linéaire continu, puisque $\overline{L}$ et $\pi_{\overline{F}}$ le sont tous deux. De plus, grâce à la majoration connue de la norme d'opérateur d'une composition d'opérateurs continus :

$$\begin{aligned}\|\widetilde{L}\| &\leqslant \|\overline{L}\|\ \underbrace{\|\pi_{\overline{F}}\|}_{=1}\\ &= \|\overline{L}\|\\ &= \|L\|,\end{aligned}$$

on voit que $\widetilde{L}$ est continu lui aussi, de norme d'opérateur majorée par celle de L. Mais comme sa restriction $\widetilde{L}\big|_F = L$ à $F \neq \{0\}$ est clairement égale à L par définition, il se trouve que $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$ en fait.

En conclusion, il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\widetilde{L}\colon H \to K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\widetilde{L}\big|_F = L$ et $\|\widetilde{L}\| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $\|\widetilde{L}\| = \|L\|$. Ce théorème est vrai plus généralement dans n'importe quel espace vectoriel normé (espace dit de Banach), d'après le fameux *Théorème de Hahn-Banach* (cours de M1).

Exercice 2. **(a)** [1 pt] Dans $H = \mathbb{R}^2(x, y)$, une famille de demi-espaces fermés à bords parallèles qui est poussée à l'infini telle que, disons, $\mathscr{C}_k := \{x \geqslant k\}$, offre un exemple simple de suite de sous-ensembles convexes fermés non vides $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \dots, \mathscr{C}_k, \dots$ emboîtés les uns dans les autres : $\mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k$ mais dont l'intersection $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathscr{C}_k = \emptyset$ est vide.

(b) [0,5 pt] L'intersection $\bigcap_{k=1}^{+\infty} \mathscr{C}_k =: \mathscr{C}_\infty$ est toujours un fermé, car au niveau abstrait de la topologie générale, une intersection quelconque d'ensembles fermés est encore fermée, sachant que l'ensemble vide est un fermé lui aussi.

Si $\mathscr{C}_\infty$ est non vide, soient $f, g \in \mathscr{C}_\infty$. Alors pour tout entier k, ces deux éléments f et g appartiennent à $\mathscr{C}_k$. Mais puisque $\mathscr{C}_k$ est convexe, le segment fermé $\{tf + (1-t)g \colon 0 \leqslant t \leqslant 1\}$ qu'ils délimitent est contenu dans $\mathscr{C}_k$, et ce, pour tout $k \geqslant 1$. Donc ce segment est aussi contenu dans l'*intersection* $\mathscr{C}_\infty$ de tous les $\mathscr{C}_k$, d'où il découle que $\mathscr{C}_\infty$ est convexe.

(c) [1 pt] D'après un résultat du cours (Théorème 5.1), si $h \in H$ est un élément arbitraire, ses projections $h_k := \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$ $(k \geqslant 1)$ et $\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$ sur les convexes fermés $\mathscr{C}_k$ $(k \geqslant 1)$ et $\mathscr{C}_\infty$ existent et sont uniques. Or à cause des deux inclusions :

$$\mathscr{C}_\infty \subset \mathscr{C}_{k+1} \qquad \text{et} \qquad \mathscr{C}_{k+1} \subset \mathscr{C}_k,$$

on a immédiatement :

$$\pi_{\mathscr{C}_\infty}(h) \in \mathscr{C}_{k+1} \qquad \text{et} \qquad h_{k+1} \in \mathscr{C}_k,$$

et alors grâce aux deux propriétés de minimisation de la distance :

$$\|h - h_{k+1}\| = \min_{g \in \mathscr{C}_{k+1}} \|h - g\| \qquad \text{et} \qquad \|h - h_k\| = \min_{g \in \mathscr{C}_k} \|h - g\|$$

on peut en déduire, si l'on pose $g := \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)$ puis $g := h_{k+1}$, respectivement, les deux inégalités désirées :

$$\|h - h_{k+1}\|^2 \leqslant \|h - \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h)\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|h - h_k\|^2 \leqslant \|h - h_{k+1}\|^2.$$

(d) [0,5 pt] On en déduit que la suite de nombre réels tous positifs $\left(\|h - h_k\|^2\right)_{k \geqslant 1}$, qui est croissante et majorée par $\|h - \pi_{\mathscr{C}\infty}(h)\|$ admet une unique limite, disons $d_\infty \geqslant 0$, dans $\mathbb{R}_+$.

(e) [2 pts] L'identité du parallélogramme, qui remonte à Pythagore et à Euclide, stipule que pour tous $u, v \in H$, on a :

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\left\|\tfrac{u+v}{2}\right\|^2 + \tfrac{1}{2}\,\|u - v\|^2.$$

Appliquons donc cette identité à $u := h - h_{k_1}$ et à $v := h - h_{k_2}$ pour deux entiers $k_1 \leqslant k_2$, en plaçant $\|u - v\|^2$ seul à gauche, ce qui nous donne :

$$\tfrac{1}{2}\,\|h_{k_2} - h_{k_1}\|^2 = \|h - h_{k_1}\|^2 + \|h - h_{k_2}\|^2 - 2\,\left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|^2.$$

Or, puisque h_{k_1} et h_{k_2} appartiennent tous deux à $\mathscr{C}_{k_1} \supset \mathscr{C}_{k_2}$, leur milieu $\frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}$ appartient aussi au convexe $\mathscr{C}_{k_1}$, et donc encore grâce à la propriété de minimisation, on a :

$$\|h - h_{k_1}\| \leqslant \left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|,$$

c'est-à-dire de manière équivalente en multipliant par -1 :

$$-\left\|h - \tfrac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\| \leqslant -\|h - h_{k_1}\|.$$

En revenant à l'égalité précédente, on en déduit alors une inégalité :

$$\tfrac{1}{2}\,\|h_{k_2} - h_{k_1}\|^2 \leqslant \|h - h_{k_2}\|^2 - \|h - h_{k_1}\|^2$$

qui implique que la suite double $\|h_{k_2} - h_{k_1}\|$ satisfait la condition dite de Cauchy pour la distance associée à la norme hilbertienne, puisque nous venons de voir que la suite décroissante positive $\big(\|h - h_k\|^2\big)_{k \geqslant 1}$ converge. Par complétude de l'espace de Hilbert H, la suite des h_k converge donc vers une certaine limite dans H. Soit h_∞ cette limite. Puisque $h_k \in \mathscr{C}^k$ pour tout k, on a $h_\infty \in \mathscr{C}^\infty$.

(f) [1 pt] D'après un résultat du cours (Théorème 5.2), pour k fixé quelconque, le projeté $h_k = \pi_{\mathscr{C}_k}(h)$ de h sur le convexe fermé $\mathscr{C}_k$ est caractérisé par la propriété que :

$$\mathrm{Re}\,\langle h - h_k,\, g - h_k\rangle \leqslant 0,$$

pour tout autre élément $g \in \mathscr{C}_k$. En particulier puisque $\mathscr{C}_\infty$ est contenu dans $\mathscr{C}_k$, cette inégalité est satisfaite pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$. Mais d'après la question précédente, la limite :

$$h_\infty := \mathsf{lim}_{k\to+\infty}\, h_k$$

existe, et par continuité du produit scalaire, en passant à la limite quand $k \to +\infty$, la famille d'inégalités précédentes devient :

$$\mathrm{Re}\,\langle h - h_\infty,\, g - h_\infty\rangle \leqslant 0,$$

pour tout $g \in \mathscr{C}_\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

(g) [0,5 pt] Toujours d'après le même résultat du cours, ce jeu d'inégalités caractérise uniquement la projection de h sur le convexe fermé $\mathscr{C}_\infty$, donc il en découle que :

$$h_\infty = \pi_{\mathscr{C}_\infty}(h).$$

Pour conclure, le théorème « clair » énonce : 1) que la limite des projetés orthogonaux sur des convexes fermés emboîtés en famille dénombrable dont l'intersection totale est non vide existe ; 2) qu'elle est unique ; et 3) qu'elle coïncide avec la projection orthogonale sur le convexe fermé qui est l'intersection totale de tous ces convexes fermés ; ce résultat pourra aussi être considéré comme mathématiquement plus « clair » si on l'exprime sous la forme d'une seule équation :

$$\mathsf{lim}_{k\to+\infty}\, \pi_{\mathscr{C}_k}(h) = \pi_{\cap_{k=1}^{+\infty}\mathscr{C}_k}(h).$$

Exercice 3. [1 pt] Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme de Fejér [2], qui est par définition la n-ème somme de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta) + S_1(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=-k}^{l=+k} \widehat{f}(l)\, e^{il\theta}$$

est évidemment continue sur le cercle $\mathbb{T}$, puisque c'est un polynôme de degré $\leqslant n$ en les exponentielles complexes $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$. D'après un calcul du cours, cette somme s'exprime comme la convolution avec le n-ème noyau de Fejér F_n :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \mathsf{F}_n * f\,(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(\eta)\, f(\theta - \eta)\, \frac{d\eta}{2\pi},$$

2. Exercice subsidiaire : Établir que :

$$\mathsf{K}_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\, e^{ik\theta} \quad \text{et que :} \quad \sigma_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n}\Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\, \widehat{f}(k)\, e^{ik\theta}.$$

donc on peut alors majorer aisément :

$$\begin{aligned}\big|\sigma_n(f)(\theta)\big| &\leqslant \mathsf{max}_{|\eta|\leqslant\pi}\,\big|f(\theta-\eta)\big|\,\int_{-\pi}^{\pi}|\mathsf{F}_n(\eta)|\,\frac{d\eta}{2\pi}\\ &= \|f\|_{\mathscr{C}^0},\end{aligned}$$

en se souvenant de la propriété cruciale que, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, l'intégrale sur $[-\pi,+\pi]$ de ce noyau *positif* est toujours égale à 1 :

$$1=\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{F}_n(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}=\|\mathsf{F}_n\|_{L^1},$$

ce qui démontre finalement l'inégalité désirée en prenant le maximum sur θ à gauche :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathscr{C}^0}\leqslant\|f\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Exercice 4. [1 pt] Le zéro-ème coefficient de Fourier complexe de la fonction $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, définie pour tout $\theta\in[-\pi,\pi]$ par :

$$f(\theta):=1-\frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π-périodique (continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier est égal à :

$$\widehat{f}(0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(1-\tfrac{\theta^2}{\pi^2}\big)\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(2\pi-\frac{1}{\pi^2}\,2\,\frac{\pi^3}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Pour $k\in\mathbb{N}^*$, si l'on se souvient que que $\int_{-\pi}^{\pi}e^{il\theta}\,d\theta=0$ pour tout entier $l\neq 0$, le k-ème coefficient de Fourier complexe de ladite fonction f se calcule grâce à deux intégrations par parties dont la nécessité ne fait pas de doute :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\big(\underline{1}-\tfrac{\theta^2}{\pi^2}\big)\,e^{-ik\theta}\,d\theta\\ &=\underline{\frac{1}{2\pi}\left[-\,\frac{\theta^2}{\pi^2}\,\frac{1}{-ik}\,e^{-ik\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\theta}{\pi^2}\,\frac{1}{ik}\,e^{-ik\theta}\,d\theta\\ &=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\theta}{\pi^2}\,\frac{1}{k^2}\,e^{-ik\theta}\right]_{-\pi}^{\pi}+\underline{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2}{\pi^2}\,\frac{1}{k^2}\,e^{-ik\theta}\,d\theta}\\ &=-\,\frac{2}{\pi^2}\,\frac{1}{k^2}\,(-1)^n\qquad\qquad{\scriptstyle(k\in\mathbb{Z}^*)}.\end{aligned}$$

Exercice 5. (a) [0,5 pt] La série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction continue $S(\theta)$, puisque qu'elle converge normalement (et même très rapidement) :

$$\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{\sin^3(n\theta)}{n!}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}<+\infty,$$

sachant que $n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$ croît plus vite, lorsque n tend vers l'infini, que toute puissance fixe n^a.

(b) - (c) [0,5pt - 1pt] Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin(3t),$$

d'après une formule classique de trigonométrie que l'on peut retrouver et re-deviner — au cas où l'on ne s'en souvienne pas — en développant tout simplement $\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$. Si donc l'on pose :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n \geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!},$$

série qui converge à nouveau uniformément grâce au même argument que ci-dessus, on voit que :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4}\,\sigma(\theta) - \tfrac{1}{4}\,\sigma(3\theta),$$

formule que l'on pouvait aussi re-deviner en examinant un peu à l'avance l'équation qui était écrite à la dernière question **(f)**. Pour montrer que $S(\theta)$ est $\mathscr{C}^\infty$, il suffit visiblement de montrer que $\sigma(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$. Mais si l'on dérive p fois terme à terme la série σ, on obtient une série :

$$\sum_{n \geqslant 1} n^p \, \frac{\sin(n\theta)}{n!}$$

qui est à nouveau normalement convergente, puisque $n!$ croît plus vite que toute puissance fixe n^a. D'après le théorème classique d'existence d'une série dérivée, il en découle par récurrence sur p que la dérivée p-ème de σ existe, qu'elle est continue et 2π-périodique et qu'elle est donnée par cette série infinie normalement convergente dérivée terme à terme :

$$\sigma^{(p)}(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^p \, \frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

(d) [1 pt] Puisque $\sigma(\theta)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc en particulier de classe $\mathscr{C}^1$, le théorème connu de Dirichlet [3] montre qu'elle s'identifie, en tout point du cercle, à sa série de Fourier :

$$\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \widehat{\sigma}(k)\, e^{ik\theta}.$$

Mais comme $\sigma(\theta)$ s'écrit déjà sous la forme d'une série trigonométrique absolument convergente, on en déduit sans aucun calcul [4] que $\widehat{\sigma}(0) = 0$ et que :

$$\widehat{\sigma}(k) = \frac{1}{2i}\,\frac{\mathrm{sgn}(k)}{|k|!} \qquad \text{pour } \ |k| \geqslant 1,$$

Maintenant, en remplaçant θ par 3θ :

$$\sigma(3\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}\,\frac{e^{i3n\theta} - e^{-i3n\theta}}{2i},$$

3. En fait, le théorème le plus élémentaire de Dini s'applique aussi directement, non pas seulement aux fonctions höldériennes de classe $\mathscr{C}^\alpha$ avec $0 < \alpha \leqslant 1$, mais aussi bien entendu aux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ qui sont beaucoup plus régulières.

4. — grâce à un résultat du cours qui dit qu'une série trigonométrique normalement convergente est la série de Fourier de la fonction continue qu'elle définit sur le cercle —

et en revenant à la relation $S(\theta) = \frac{3}{4}\,\sigma(\theta) - \frac{1}{4}\,\sigma(3\theta)$, il vient $\widehat{S}(0) = 0$ et enfin pour tout $k \geqslant 1$:

$$\widehat{S}(3k-2) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k-2)!}\big), \qquad \widehat{S}(3k-1) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k-1)!}\big), \qquad \widehat{S}(3k) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{1}{(3k)!} - \tfrac{1}{4}\tfrac{1}{k!}\big),$$
$$\widehat{S}(-3k+2) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k-2)!}\big), \qquad \widehat{S}(-3k+1) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k-1)!}\big), \qquad \widehat{S}(-3k) = \tfrac{1}{2i}\big(\tfrac{3}{4}\tfrac{-1}{(3k)!} - \tfrac{1}{4}\tfrac{-1}{k!}\big).$$

(e)-(f) [1pt - 1pt] Pour le calcul explicite de $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$, si l'on introduit, comme cela a été suggéré :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

on observe en posant $z := e^{i\theta}$, que l'on peut écrire $\tau + i\sigma$ sous une forme simple :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$$

qui fait naturellement apparaître l'exponentielle complexe e^z. Donc on a :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = e^z = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\, e^{i\sin\theta} = e^{\cos\theta}\big[\cos(\sin\theta) + i\,\sin(\sin\theta)\big],$$

ce qui donne en identifiant les parties imaginaires à gauche et à droite :

$$\sigma(\theta) = e^{\cos\theta}\,\sin(\sin\theta).$$

Enfin, on obtient bien la formule explicite annoncée :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4}\,\sin\big(\sin\theta\big)\,e^{\cos\theta} - \tfrac{1}{4}\,\sin\big(\sin 3\theta\big)\,e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n\geqslant 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) [1 pt] Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f est donc égale à :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=1}^{n} b_k\,\sin(k\theta),$$

fonction qui est visiblement impaire. Il en découle que la n-ème somme de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ est elle aussi impaire, puisque :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta) + S_1(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n}.$$

Or d'après le théorème de Fejér, la suite $\big(\sigma_n(f)(\theta)\big)_{n\geqslant 1}$ converge uniformément, lorsque n augmente jusqu'à l'infinu, vers f. Donc f elle-même est impaire.

(b) [1 pt] La primitive $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de f définie par :

$$F(\theta) := -\int_0^\theta f(t)\,dt$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ tout entier puisque f est continue, et elle est aussi 2π-périodique, puisque l'on a grâce à la règle de Chasles :

$$F(\theta+\pi) - F(\theta-\pi) = -\int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(t)\,dt = 0,$$

cette dernière intégrale s'annulant automatiquement par imparité de f.

Maintenant, calculons en appliquant le théorème de Fubini à la fonction continue (dont intégrable) $(t,\theta) \longmapsto f(t)$ le zéro-ème coefficient de Fourier de F :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(0) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} f(t)\,dt\right]d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\int_t^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,(t-2\pi)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} t f(t)\,dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t)\,dt}_{=\widehat{f}(0)=0}
\end{aligned}$$

Ensuite, calculons, à nouveau grâce au théorème de Fubini, le k-ème coefficient de Fourier de F, pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ arbitraire :

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(k) &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{\theta} f(t)\,dt\right]e^{-ik\theta}\,d\theta = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\int_t^{2\pi} e^{-ik\theta}\,d\theta\right]dt \\
&= \frac{1}{2ik\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-e^{-ikt}\right)f(t)\,dt = \frac{1}{ik}\left(\widehat{f_0} - \widehat{f}(k)\right) = -\frac{1}{ik}\,\widehat{f}(k).
\end{aligned}$$

Mais comme on a par hypothèse :

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} -\,\frac{i}{2}\,b_k & \text{pour } k \geqslant 1, \\ +\,\frac{i}{2}\,b_{-k} & \text{pour } k \leqslant -1, \end{cases}$$

on obtient bien comme voulu :

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|}\,b_{|k|} \qquad \forall\, k \in \mathbb{Z}^*.$$

Exercice 7. [1,5 pts] D'après la formule de Parseval, la série de terme général $|\widehat{f}(k)|^2$ converge et est égale au carré de la norme L^2 de la fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, à savoir l'on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left|\widehat{f}(k)\right|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2\,\frac{d\theta}{2\pi} \\
&= \|f\|_{L^2}^2 < +\infty.
\end{aligned}$$

Mais par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, de majorer la somme partielle à étudier :

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k} &\leqslant \Bigg(\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} |\widehat{f}(k)|^2\Bigg)^{1/2}\Bigg(\sum_{\substack{|k|\leqslant n \\ k\neq 0}} \frac{1}{k^2}\Bigg)^{1/2} \\
&\leqslant \|f\|_{L^2(\mathbb{T})}\cdot\left(2\,\tfrac{\pi^2}{6}\right)^{1/2} \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

par une quantité qui est bornée uniformément par rapport à n, ce qui montre que la série à termes positifs $\sum_{k\in\mathbb{Z}^*}\frac{|\widehat{f}(k)|}{k}$ est effectivement *absolument* convergente, *cqfd.*

3. Examen du Jeudi 19 Mai 2011

Exercice 1

Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régularisante, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x)\,dx = 1$ et $\operatorname{supp}\rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$ satisfaisant $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$.

(1) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(2) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant a$ et pour tout entier $j \geqslant 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)(x) = 0.$$

(3) Montrer que :

$$\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)\big\|_{L^1} \geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx.$$

(4) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2

(1) Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on a en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f * \psi_\varepsilon(x) = f(x).$$

(2) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que la convergence est uniforme.

(3) On suppose à présent que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

(a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de e^{-ax^2}, où $a > 0$ est une constante réelle, et écrire en quelques mots comment s'est effectuée la démonstration en cours.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi.$$

(c) Montrer que (justifier d'abord l'existence de l'intégrale) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi = f*\varphi_\varepsilon(x),$$

où l'on a posé : $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$.

(d) En déduire la formule de type « inversion », valable pour toute $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})\cap L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi.$$

Problème

L'objectif est de produire des exemples de séries trigonométriques qui ne sont série de Fourier d'aucune fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur le cercle unité $\mathbb{T}=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle l'expression : $\mathsf{D}_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{k=+n} e^{ik\theta}$ du noyau de Dirichlet, et celle : $\mathsf{F}_n(\theta) := \frac{1}{n}\big[\mathsf{D}_0(\theta)+\cdots+\mathsf{D}_{n-1}(\theta)\big]$ du noyau de Fejér, somme de Cesàro des $\mathsf{D}_j(\theta)$.

(1) Montrer, pour toute fonction 2π-périodique intégrable $f\in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$n\,\mathsf{F}_n(\theta) = \sum_{|k|\leqslant n}\big(n-|k|\big)\,e^{ik\theta} \qquad \text{et que :} \qquad \mathsf{F}_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\,\widehat{f}(k)\,e^{ik\theta}.$$

où : $\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi}$ désigne le k-ème coefficient de Fourier de f.

(2) Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(0)=0$ dont on considère la primitive $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$ s'annulant en 0. Vérifier que G est 2π-périodique et montrer que :

$$\widehat{G}(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\,g(s)\,ds.$$

(3) Montrer que :

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{ik}\,\widehat{g}(k) \qquad\qquad (k\in\mathbb{Z}^*).$$

(4) Montrer que :

$$\mathsf{F}_n * G(0) = \widehat{G}(0) - i\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k=n}\widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1}\widehat{g}(k)\bigg).$$

(5) Établir que :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\,g(s)\,ds.$$

(6) Pour tout couple d'entiers (p,q) tels que $0\leqslant p\leqslant q$ et tout $\theta\not\equiv 0 \bmod (2\pi)$, calculer :

$$\sum_{n=p}^{n=q}\sin(n\theta) = \sum_{n=p}^{n=q}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i},$$

et montrer ensuite que cette somme est majorée par $\frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})}$.

(7) Montrer que la série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

converge pour *tout* $\theta \in \mathbb{T}$ fixé ; par souci de complétude mais sans s'y attarder, établir auparavant que si $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1})\big[b_k + \cdots + b_1\big] = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - a_n\big(b_1 + \cdots + b_n\big),$$

et en déduire le critère de convergence d'Abel : si la suite a_n est positive, décroissante, convergente vers zéro, et si la suite $\big(\sum_{k=1}^{n} b_k\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée, alors la série $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k b_k$ converge.

(8) En admettant sans s'y attarder le principe de comparaison entre séries à termes décroissants et intégrales, montrer, en effectuant un changement de variables dans l'intégrale correspondante, que :

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log k} \sim \log\log n.$$

(9) Déduire de tout ce qui précède que la série trigonométrique en question $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$ n'est la série de Fourier d'aucune fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$.

4. Corrigé détaillé de l'examen du Jeudi 19 Mai 2011

Exercice 1

(1) Les régularisées $f*\rho_j(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\,\rho_j(x-y)\,dy$ de la fonction f sont identiquement nulles, puisque chaque fonction $y \mapsto \rho_j(x-y)$ appartient à $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Soit a un réel strictement positif, soit $b := a+1$, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leqslant a$. Alors, puisque le support chaque fonction ρ_j est contenu dans $[-1,1]$ (par hypothèse, $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$), le support de $y \mapsto \rho_j(x-y)$ est contenu dans $[-b,b]$, donc :

$$\begin{aligned}
0 = \rho_j * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x-y)\,f(y)\,dy &= \int_{-b}^{+b} \rho_j(x-y)\,f(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x-y)\,f(y)\,\mathbf{1}_{[-b,b]}(y)\,dy \\
&= \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)(x).
\end{aligned}$$

(3) Sachant que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $a > 0$ quelconque, on a trivialement :

$$\begin{aligned}
\|g\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |g(x)|\,dx &= \int_{-a}^{+a} |g(x)|\,dx + \int_{|x|>a} |g(x)|\,dx \\
&\geqslant \int_{-a}^{+a} |g(x)|\,dx,
\end{aligned}$$

on voit immédiatement que :

$$\begin{aligned}
\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)\big\|_{L^1} &\geqslant \int_{-a}^{+a} \big|\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f - \underline{\rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f\big)}\big|\,dx \\
&\geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

(4) Observons que $\mathbf{1}_{[-b,b]}\,f$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, puisque $f \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R})$ par hypothèse. D'après un théorème du cours, le membre de gauche de la dernière inégalité tend vers zéro quant j tend vers $+\infty$. Ainsi, $\int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx = 0$, et puisque le réel positif a était arbitraire, on en déduit, comme demandé, que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2

(1) C'est une question de cours. Soit donc $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, posons $\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$. On a encore $1 =$

$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_\varepsilon(x)\,dx$ (faire $\frac{x}{\varepsilon} =: y$). Étant donné une fonction quelconque $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on calcule la différence à étudier en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f * \psi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\,\psi_\varepsilon(y)\,dy - f(x) \\ &= \int_{\infty}^{+\infty} \big(f(x-y) - f(x)\big)\,\psi_\varepsilon(y)\,dy. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque f est continue en x :

$$\forall\,\delta > 0, \quad \exists\,\upsilon = \upsilon(\delta) > 0, \quad \Big(\big|(x-y) - x\big| \leqslant \upsilon \Longrightarrow \big|f(x-y) - f(x)\big| \leqslant \delta\Big).$$

En découpant alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} = \int_{|y|\leqslant\upsilon} + \int_{|y|>\upsilon}$, on en déduit la majoration :

$$\big|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leqslant \delta \underbrace{\int_{-\upsilon}^{+\upsilon} \psi_\varepsilon(y)\,dy}_{\leqslant \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon = 1} + 2\,\|f\|_{L^\infty} \int_{|y|>\upsilon} \psi_\varepsilon(y)\,dy.$$

Mais dans l'intégrale restante, en revenant à l'expression $\psi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)$, on peut poser $x := \frac{y}{\varepsilon}$ et se ramener au majorant suivant :

$$\big|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)\big| \leqslant \delta + \int_{|x|>\frac{\upsilon}{\varepsilon}} \psi(x)\,dx,$$

dont le deuxième terme à droite tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, puisque $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse, et puisque $\frac{\nu}{\varepsilon} \to \infty$.

(2) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, il est clair que le υ ci-dessus ne dépend pas de x, d'où la convergence est uniforme.

(3) On suppose à présent que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. On a en effet besoin de $f \in L^1(\mathbb{R})$ puisque l'on va considérer la transformée de Fourier de f.

(a) On a vu en cours au tableau que la transformée de Fourier de e^{-ax^2}, où $a > 0$ est une constante réelle :

$$\mathscr{F}\big(e^{-ax^2}\big)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}\,e^{-ix\xi}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\,e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

se calculait grâce à la formule des résidus dans $\mathbb{C}$ effectuée sur un rectange parallèle à l'axe des x, symétrique par rapport à l'axe des y, dont les largeurs tendent vers $\pm\infty$, les deux intégrales sur les largeurs devenant négligeables à l'infini.

(b) Si on applique tout simplement cette formule à $a := \frac{\varepsilon^2}{2}$ et à[5] $\xi := -(x-y)$, on obtient l'expression de l'intégrale qui était demandée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,e^{i\xi(x-y)}\,d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\varepsilon^2/2}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}.$$

(c) L'intégrale suivante :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi$$

5. — noter l'échange de variables $x \leftrightarrow \xi$ —

existe bel et bien, puisque la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de toute fonction $f \in L^1$ est bornée et puisque le facteur exponentiel $e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}$ est à décroissante très rapide en $\pm\infty$, pourvu que $\varepsilon > 0$. Maintenant, le théorème de Fubini nous permet d'échanger l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,f(y)\,dy\,d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,e^{i\xi(x-y)}\,d\xi\bigg)\,f(y)\,dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}\,f(y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{2\varepsilon^2}}\,f(y)\,dy \\
&= f*\varphi_\varepsilon(x),
\end{aligned}$$

où l'on a posé :

$$\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}.$$

(d) Maintenant, la question **(1)** s'applique et donne la formule de type « inversion », valable pour toute $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \mathsf{lim}_{\varepsilon\to 0}\, f*\varphi_\varepsilon(x) = \mathsf{lim}_{\varepsilon\to 0}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\widehat{f}(\xi)\,e^{ix\xi}\,e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\,d\xi.$$

Problème

(1) On calcule :

$$\begin{aligned}
n\,\mathsf{F}_n(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1}\mathsf{D}_j(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=-j}^{k=+j} e^{ik\theta} &= \sum_{\substack{(j,k)\in\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\\ |k|\leqslant j\leqslant n-1}} e^{ik\theta} \\
&= \sum_{|k|\leqslant n-1}\mathsf{card}\big\{j\in\mathbb{N}\colon\ |k|\leqslant j\leqslant n-1\big\}\cdot e^{ik\theta} \\
&= \sum_{|k|\leqslant n-1}\big(n-|k|\big)\,e^{ik\theta} \\
&= \sum_{|k|\leqslant n}\big(n-|k|\big)\,e^{ik\theta}.
\end{aligned}$$

Ensuite, en appliquant cette formule, il vient aisément, pour toute fonction 2π-périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_n * f\,(\theta) &= \frac{1}{n}\sum_{|k|\leqslant n}\big(n-|k|\big)\,e^{ik\cdot} * f\,(\theta). \\
&= \sum_{k=-n}^{k=+n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\,\widehat{f}(k)\,e^{ik\theta},
\end{aligned}$$

grâce à la formule fondamentale :

$$\boxed{\widehat{f}(k)\,e^{ik\theta} = f * e^{ik\cdot}\,(\theta) = e^{ik\cdot} * f\,(\theta)}.$$

qu'il fallait absolument avoir intégré mentalement dans ce cours.

(2) Soit maintenant g une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(0) = 0$ et soit $G(t) := \int_0^t g(s)\,ds$ sa primitive s'annulant en 0. Elle est continue, car intégrale d'une fonction L^1, et sa 2π-périodicité équivaut à $\widehat{g}(0) = 0$:

$$G(t+2\pi) = \int_t^{2\pi+t} g(s)\,ds = \int_0^{2\pi} g(s)\,ds = 0.$$

Pour calculer $\widehat{G}(0)$, il vaut mieux considérer $\int_0^{2\pi}$ au lieu de $\int_{-\pi}^{\pi}$. La fonction $(t,s) \mapsto g(s)$ étant intégrable sur le triangle $\big\{(t,s) \in \mathbb{R}^2 \colon\ 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 2\pi\big\}$, le théorème de Fubini nous permet d'échanger l'ordre de l'intégration double qui apparaît naturellement, et en prenant bon soin des bornes [6], on obtient la réponse :

$$\begin{aligned}
\widehat{G}(0) = \int_0^{2\pi} G(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\bigg(\int_0^t g(s)\,ds\bigg)\,dt &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds \int_s^{2\pi} g(s)\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} ds\,(\underline{2\pi} - s)\,g(s) \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\,g(s)\,ds,
\end{aligned}$$

car l'intégrale correspondant au terme souligné s'annule, puisque $\widehat{g}(0) = 0$ par hypothèse (encore elle !).

(3) Maintenant, pour tout entier relatif non nul $k \in \mathbb{Z}^*$, établissons astucieusement la relation demandée $\widehat{G}(k) = \frac{1}{ik}\,\widehat{g}(k)$ en la voyant sous la forme équivalente $\widehat{g}(k) = ik\,\widehat{G}(k)$, ce qui revient à dire que nous partons de la définition :

$$\widehat{g}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi},$$

et que nous prenons avantage du fait que la *primitive* G de g s'annulant en zéro peut être considérée, ce qui nous permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(k) &= \underline{\Big[G(t)\,e^{-ikt}\Big]_{-\pi}^{\pi}} - \int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,(-ik)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} \\
&= ik\int_{-\pi}^{\pi} G(t)\,e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} \\
&= ik\,\widehat{G}(k),
\end{aligned}$$

le terme souligné s'annulant par la 2π-périodicité de G observée à l'instant.

(4) Maintenant, passons aux choses sérieuses. En posant $\theta = 0$ dans l'identité obtenue en **(1)** ci-dessus que l'on applique présentement à notre primitive G, en utilisant les relations

6. Faire une bonne figure explicative dans sa copie aide toujours à convaincre le correcteur d'attribuer les points.

démontrées jusqu'à ce point, et en réorganisant, on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_n * G\,(0) = \sum_{k=-n}^{k=+n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\,\widehat{G}(k) &= \widehat{G}(0) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\,\widehat{G}(k)\\
&= \widehat{G}(0) + \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\Big(1-\frac{|k|}{n}\Big)\,\frac{1}{ik}\,\widehat{g}(k)\\
&= \widehat{G}(0) - i\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{|k|}{k}\,\widehat{g}(k)\\
&= \widehat{G}(0) - i\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k=n}\widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1}\widehat{g}(k)\bigg),
\end{aligned}$$

comme souhaité.

(5) Il est enfin possible de regarder cette identité intéressante et de raisonner. Comme cette fonction G est continue, le théorème de Fejér assure que $\mathsf{F}_n * G(0)$ converge vers $G(0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ fournit les deux limites :

$$0 = \mathsf{lim}_{k\to+\infty}\,\widehat{g}(k) \qquad \text{et} \qquad 0 = \mathsf{lim}_{k\to-\infty}\,\widehat{g}(k).$$

Le théorème de Cesàro, d'après lequel les moyennes arithmétiques de toute suite ayant une limite déterminée ont forcément la même limite nous donne alors aussi :

$$0 = \mathsf{lim}_{n\to+\infty}\,\frac{\widehat{g}(1)+\cdots+\widehat{g}(n)}{n} \qquad \text{et} \qquad 0 = \mathsf{lim}_{n\to+\infty}\,\frac{\widehat{g}(-1)+\cdots+\widehat{g}(-n)}{n}.$$

Il découle donc de notre identité intéressante que la limite, quand n tend vers $+\infty$, de la somme $\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k}$ existe et qu'elle n'est autre que $-i\,\widehat{G}(0)$, c'est-à-dire si l'on revient à son expression intégrale :

$$\mathsf{lim}_{n\to+\infty}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\,g(s)\,ds.$$

(6) Pour tout couple d'entiers (p,q) tels que $0\leqslant p\leqslant q$ et tout $\theta\not\equiv 0 \mod(2\pi)$, on calcule :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=p}^{n=q}\mathsf{sin}(n\theta) = \sum_{n=p}^{n=q}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i} &= \frac{e^{ip\theta}\big[1+e^{i\theta}+\cdots+e^{i(q-p)\theta}\big] - e^{-ip\theta}\big[1+e^{-i\theta}+\cdots+e^{-i(q-p)\theta}\big]}{2i}\\
&= \frac{e^{ip\theta}}{2i}\,\frac{e^{i(q-p+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} - \frac{e^{-ip\theta}}{2i}\,\frac{e^{-i(q-p+1)\theta}-1}{e^{-i\theta}-1}\\
&= \frac{e^{ip\theta}}{2i}\,\frac{e^{i(\frac{q-p+1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}}\,\frac{e^{i(\frac{q-p+1}{2})\theta}-e^{-i(\frac{q-p+1}{2})\theta}}{e^{i\frac{\theta}{2}}-e^{-i\frac{\theta}{2}}} - \frac{e^{-ip\theta}}{2i}\,\frac{e^{-i(\frac{q-p+1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}}\,\frac{e^{-i(\frac{q-p+1}{2})\theta}-e^{i(\frac{q-p+1}{2})\theta}}{e^{-i\frac{\theta}{2}}-e^{i\frac{\theta}{2}}}\\
&= \frac{e^{i(\frac{q+p}{2})\theta}}{2i}\,\frac{\mathsf{sin}(\frac{q-p+1}{2})\theta}{\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})} - \frac{e^{-i(\frac{q+p}{2})\theta}}{2i}\,\frac{\mathsf{sin}(-\frac{q-p+1}{2})\theta}{\mathsf{sin}(-\frac{\theta}{2})}\\
&= \frac{\mathsf{sin}(\frac{q-p+1}{2})\theta}{\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})}\,\frac{e^{i(\frac{q+p}{2})\theta}-e^{-i(\frac{q+p}{2})\theta}}{2i}\\
&= \frac{\mathsf{sin}(\frac{q-p+1}{2})\theta}{\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})}\,\mathsf{sin}(\tfrac{q+p}{2})\theta,
\end{aligned}$$

d'où l'on déduit la majoration :

$$\left|\sum_{n=p}^{n=q} \mathsf{sin}(n\theta)\right| \leqslant \frac{1}{\left|\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})\right|}$$

(7) Pour $\theta \equiv 0 \mod \pi$, la série considérée $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{\mathsf{log}n}$ est bien entendu convergente, puisque tous ses termes sont nuls.

Supposons donc que $\theta \not\equiv 0 \mod \pi$, d'où $\frac{1}{|\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})|} < +\infty$. Les sommes partielles $\sum_{n=p}^{n=q} \mathsf{sin}(n\theta)$ étant majorées, en valeur absolue, par une quantité finie qui est indépendante de p et de q, et la suite $n \mapsto \frac{1}{\mathsf{log}n}$ étant décroissante pour $n \geqslant 2$, le critère d'Abel assure bien que la série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{\mathsf{log}n}$$

converge pour tous ces autres $\theta \in \mathbb{T}$ fixés non égaux à 0 modulo π.

Pour redémontrer le critère d'Abel, on établit très facilement par récurrence l'identité donnée dans l'énoncé. Ensuite, puisque $\mathbb{R}$ est complet, il suffit de montrer que la suite $\big(\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\big)_{n\geqslant 2}$ est de Cauchy. Mais la suite $-a_n(b_1 + \cdots + b_n)$ est de Cauchy, puisque $a_n \to 0$ et puisque par hypothèse, il existe une constante $B > 0$ telle que $|b_1 + \cdots + b_n| \leqslant B$ pour tout $n \geqslant 1$. Il reste le membre de gauche, et pour tout couple d'entiers (p, q) avec $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant n-1$, on estime :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{p\leqslant k\leqslant q} (a_k - a_{k+1})\big[b_k + \cdots + b_1\big]\right| &\leqslant B \sum_{p\leqslant k\leqslant q} \big|a_k - a_{k+1}\big| \\ &= B \sum_{p\leqslant k\leqslant q} a_k - a_{k+1} = B(a_p - a_{q+1}),\end{aligned}$$

quantité qui peut être rendue arbitrairement petite pourvu que p soit assez grand, puisque $a_k \to 0$.

(8) Ainsi, on admet, sans en rappeler tous les éléments de justification, le principe de comparaison entre $\sum$ et $\int$, d'où par le simple changement de variable $y := \mathsf{log}x$, $dy = \frac{dx}{x}$:

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\mathsf{log}k} \sim \int_2^n \frac{1}{x\mathsf{log}x}\, dx = \int_{\mathsf{log}2}^{\mathsf{log}n} \frac{1}{y}\, dy \sim \mathsf{loglog}n,$$

équivalent qui tend vers l'infini quand n tend vers $+\infty$.

(9) Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{g}(k)\, e^{ik\theta}$$

est cette série trigonométrique :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=-2} \frac{-1}{2i\mathsf{log}(-k)}\, e^{ik\theta} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2i\mathsf{log}k}\, e^{ik\theta},$$

c'est-à-dire dont les coefficients de Fourier $\widehat{g}(k)$ seraient donnés par :

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } \ |k| \leqslant 1; \\ \frac{1}{2i\log k} & \text{pour } \ k \geqslant 2; \\ \frac{-1}{2i\log(-k)} & \text{pour } \ k \leqslant -2. \end{cases}$$

On en déduit l'imparité de ces coefficients :

$$\widehat{g}(-k) = -\,\widehat{g}(k),$$

et donc aussi, la parité de la fonction $k \mapsto \frac{\widehat{g}(k)}{k}$, pour $|k| \geqslant 1$. D'après la question **(5)**, si une telle fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ existait, la suite indexée par un entier n :

$$\sum_{1 \leqslant |k| \leqslant n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = 2 \sum_{k=1}^{n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\log k}$$

devrait avoir une limite *finie* lorsque $n \to +\infty$, mais nous venons de voir dans la question précédente que la série à termes positifs $\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k\log k}$ divergait, contradiction et fin du problème.

5. Partiel du lundi 12 Mars 2012

Exercice 1. On dit qu'une suite d'éléments $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert $\big(H, \|\cdot\|_H\big)$ converge *faiblement* vers un élément f de H si, pour tout $g \in H$, la suite numérique $\langle f_n, g\rangle$ converge, lorsque $n \to +\infty$, vers $\langle f, g\rangle$. On dit qu'une telle suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge *fortement* (ou *converge en norme*) vers un élément f de H lorsque $0 = \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_H$.

(a) En supposant qu'elle existe, montrer que la limite faible d'une suite est unique.

(b) Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers f, montrer qu'elle converge faiblement vers f.

(c) Dans $\ell^2(\mathbb{C})$, trouver une suite qui converge faiblement sans converger fortement.

(d) Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, la suite associée :

$$b_n^- := \inf\big\{b_m :\ m \geqslant n\big\}$$

est croissante, et on définit :

$$\liminf_{n\to+\infty} b_n := \lim_{n\to+\infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, +\infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geqslant 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n\to+\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant 1} = \liminf_{n\to+\infty} \big(b_n\big)_{n\geqslant N}.$$

(e) Si une autre suite de nombres réels $(a_n)_{n\geqslant 1}$ satisfait $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \geqslant 1$ et converge vers un réel $a \in \mathbb{R}$, en déduire que $a \leqslant \liminf_{n\to\infty} b_n$.

(f) Si $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge faiblement vers f, en déduire que :

$$\|f\|_H \leqslant \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|_H.$$

(g) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n\geqslant 1}$ de nombres réels, l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup\big\{b_m :\ m \geqslant n\big\}$$

est décroissante, et on définit :

$$\limsup_{n\to+\infty} b_n := \lim_{n\to+\infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, +\infty]$. Vérifier que b_n converge vers une limite $b \in [-\infty, +\infty]$ si et seulement si :

$$\liminf_{n\to+\infty} b_n = \limsup_{n\to+\infty} b_n.$$

(h) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge fortement vers un vecteur $f \in H$ si et seulement si elle converge faiblement vers f et si, de plus, $\limsup_{n\to\infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$.

Exercice 2. Le but ici est d'établir que de toute suite infinie d'éléments $(f_n)_{n\geqslant 1}$ d'un $\mathbb{C}$-espace de Hilbert H qui est *bornée* :

$$\text{il existe une constante } M > 0 \text{ telle que } \|f_n\|_H \leqslant M \text{ pour tout } n \geqslant 1,$$

on peut extraire une sous-suite $(f_{n_l})_{l\geqslant 1}$ qui converge faiblement (au sens de l'Exercice précédent) vers un certain vecteur $f \in H$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geqslant 1$, il existe une suite $\big(f_n^k\big)_{n\geqslant 1}$ extraite de $(f_n)_{n\geqslant 1}$ telle que, pour tout entier $1 \leqslant j \leqslant k$, la limite :

$$\lim_{k\to+\infty} \big\langle f_n^k, f_j\big\rangle$$

existe dans $\mathbb{C}$ et est égale à un certain nombre complexe c_j.

(b) On introduit la suite dite *diagonale* :

$$(g_l)_{l\geqslant 1} := \big(f_l^l\big)_{l\geqslant 1}.$$

Vérifier d'abord que :

$$\sup_{l\geqslant 1} \|g_l\|_H \leqslant \sup_{n\geqslant 1} \|f_n\|_H \leqslant M.$$

Montrer ensuite que pour *tout* entier $j \geqslant 1$ fixé, la suite de nombres complexes $\big(\langle g_l, f_j\rangle\big)_{l\geqslant 1}$ converge aussi, lorsque $l \to \infty$, vers le même nombre complexe c_j.

(c) Soit $V := \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_n\colon\, n \geqslant 1\}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel engendré par tous les vecteurs f_n de la suite initiale. Montrer que pour tout $f \in V$, on a :

$$0 = \lim_{l,m\to+\infty} \big|\,\langle f,\, g_m - g_l\rangle\,\big|.$$

(d) Soit $u \in H$ un vecteur arbitraire. Si $\overline{V}$ désigne l'adhérence (la fermeture) de V dans $\big(H, \|\cdot\|_H\big)$, justifier que l'on puisse écrire $u = v + w$ avec $v \in \overline{V}$ et $w \in \overline{V}^{\perp}$.

(e) Montrer alors que la suite $\big(\langle v, g_l\rangle\big)_{l\geqslant 1}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est de Cauchy.

(f) En déduire que pour tout $u \in H$, la suite $\langle u, g_l\rangle$ converge vers une certaine limite $\ell(u) \in \mathbb{C}$ et vérifier que l'application $\ell\colon H \to \mathbb{C}$ est linéaire.

(g) Montrer que $|\ell(u)| \leqslant M\,\|u\|_H$.

(h) Conclure qu'il existe un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\lim_{l\to+\infty} \langle u, g_l\rangle = \langle u, g\rangle\,,$$

pour tout $u \in H$.

Exercice 3. Rappeler la définition du noyau de Fejér $\mathsf{F}_n(\theta)$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et montrer que pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, on a :

$$\bigg|\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \mathsf{F}_n(t)\,h(t)\,\frac{dt}{2\pi}\bigg| \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}\,\|h\|_{L^1}.$$

Exercice 4. Rappeler la définition du noyau de Dirichlet $\mathsf{D}_n(\theta)$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, et montrer, en suivant le guide ci-dessous, qu'un équivalent de sa norme L^1 est :

$$\|\mathsf{D}_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2}\log n + \mathrm{O}(1).$$

(a) Établir les deux inégalités fonctionnelles préparatoires :

$$t - \tfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t,$$

pour tout $t \in [0, +\infty[$.

(b) En utilisant le fait que $\frac{1}{1-x} \leqslant 1+2x$ pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, en déduire que les deux inégalités suivantes :

$$\frac{2}{t} \leqslant \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leqslant \frac{2}{t} + \frac{t}{6}$$

sont satisfaites pour tout $t \in [0, \pi]$.

(c) Établir les deux inégalités :

$$0 \leqslant \|\mathsf{D}_n\|_{L^1} - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\, dt \leqslant \frac{\pi}{12}.$$

(d) En déduire que :

$$\|\mathsf{D}_n\|_{L^1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \left| \frac{\sin u}{k\pi + u} \right| du + \mathrm{O}(1)$$

et préciser une constante indépendante de n qui se cache dans cet $\mathrm{O}(1)$.

(e) En déduire que :

$$\|\mathsf{D}_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + \mathrm{O}(1)$$

et préciser une constante indépendante de n qui se cache dans cet $\mathrm{O}(1)$.

Exercice 5. Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T\colon E \to F$ un opérateur linéaire continu.

(a) Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $T^*\colon F \to E$ satisfaisant :

$$\big\langle T(x),\, y \big\rangle_F = \big\langle x,\, T^*(y) \big\rangle_E,$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$.

(b) Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$.

(c) Montrer que $\big(T^*\big)^* = T$.

(d) Montrer que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

Exercice 6. Soit f une application 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ qui est de classe $\mathscr{C}^k$, *i.e.* qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre k et dont la k-ème dérivée $f^{(k)}$ est continue, 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^k}\big),$$

quand $|n| \longrightarrow \infty$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n(f)(\theta) = \sum_{j=-n}^{j=+n} \widehat{f}(j)\, e^{ij\theta}$ la n-ème somme partielle de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathscr{C}^k\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$. Montrer que :

$$\big\| f - S_n(f) \big\|_{\mathscr{C}^0} = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^{k-1}}\big),$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

(c) Soit $f \in L^1\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$ et soit $k \geqslant 2$ un entier. Montrer que si :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n^k}\big),$$

quand $|n| \longrightarrow \infty$, alors f est une une fonction de classe $\mathscr{C}^{k-2}$.

Exercice 7. Soit une fonction :

$$f \in \mathscr{C}^0\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big) \cap \mathscr{C}^1_{\mathsf{pm}}\big(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\big)$$

une fonction continue, $\mathscr{C}^1$ par morceaux et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

(a) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur $\mathbb{R}$.

(b) En déduire que l'on a :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}(n)\, e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

6. Corrigé détaillé du partiel du Lundi 12 mars 2012

[Seul(e) l'étudiant(e) qui lit et qui réfléchit sur l'*intégralité* des corrigés détaillés progresse dans sa perception que les mathématiques sont belles et que leur *pensée* est l'élégance même.]

Exercice 1. (a) Étant donné deux éléments f' et f'' satisfaisant, pour tout $g \in H$:

$$\langle f', g \rangle_H = \lim_{n \to +\infty} \langle f_n, g \rangle_H = \langle f'', g \rangle_H ,$$

on déduit par soustraction $0 = \|f'' - f'\|_H^2$ en prenant $g := f'' - f'$, c'est-à-dire $f'' = f'$.

(b) Supposons donc la convergence forte $0 = \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_H$. Alors pour $g \in H$ quelconque, on déduit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\big| \langle f_n, g \rangle_H - \langle f, g \rangle_H \big| = \big| \langle f_n - f, g \rangle_H \big| \leqslant \|f_n - f\|_H \, \|g\|_H \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} 0,$$

ce qui montre effectivement que f_n converge faiblement vers f.

(c) Soit la base hilbertienne canonique $(e_i)_{i \geqslant 1}$ de $\ell^2(\mathbb{C})$ constituée des vecteurs élémentaires :

$$e_i = \big(0, \dots, 0, 1, 0, \dots\big) \in \mathbb{C}^\infty,$$

avec 1 à la i-ème place, et zéro partout ailleurs. Alors la suite $(e_n)_{n \geqslant 1}$ converge faiblement vers 0, puisque, pour tout $g = (g_1, g_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{C})$, à savoir satisfaisant $\sum_{i=1}^{+\infty} |g_i|^2 < \infty$, on a immédiatement $\langle e_n, g \rangle = g_n$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, puisque le terme général de toute série convergente *doit au moins* converger vers 0. Mais bien entendu, cette suite $(e_n)_{n \geqslant 1}$ ne converge pas fortement vers 0, puisque tous ces vecteurs de base e_n sont de norme 1 !

(d) La suite translatée $(c_n)_{n \geqslant 1} := \big(b_{n+N-1}\big)_{n \geqslant 1}$ a pour suite croissante associée :

$$c_n^- = \inf \big\{ c_m \colon \ m \geqslant n \big\} = \inf \big\{ b_{m+N-1} \colon \ m \geqslant n \big\} = \inf \big\{ b_m \colon \ m \geqslant n + N - 1 \big\} = \overline{b}_{n+N-1},$$

et comme une translatée quelconque d'une suite (croissante) convergente possède toujours la même limite que la suite originale, on déduit que l'on a bien :

$$\liminf_{n \to +\infty} (b_n)_{n \geqslant 1} = \lim_{n \to +\infty} b_n^- = \lim_{n \to +\infty} b_{n+N-1}^- = \liminf_{n \to +\infty} (b_n)_{n \geqslant N}.$$

(e) Maintenant, puisque par hypothèse a_n converge vers a lorsque $n \to \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow \Big(a - \varepsilon \leqslant a_n \leqslant a + \varepsilon \Big)$$

Alors pour tous ces entiers $n \geqslant N$, on déduit de l'hypothèse $a_n \leqslant b_n$ que :

$$a - \varepsilon \leqslant b_n.$$

Par conséquent, en appliquant **(d)** :

$$a - \varepsilon \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \big(b_n\big)_{n \geqslant N} = \liminf_{n \to +\infty} \big(b_n\big)_{n \geqslant 1},$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, on conclut comme demandé que $a \leqslant \liminf(b_n)_{n \geqslant 1}$.

(f) On a par hypothèse de convergence simple :

$$\big(\|f\|_H\big)^2 = \lim_{n \to +\infty} \langle f, f_n \rangle_H \,.$$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz contraint, pour tout entier $n \geqslant 1$, à ce que :

$$\big| \langle f, f_n \rangle_H \big| \leqslant \|f\|_H \, \|f_n\|_H$$

Une application directe du résultat de la question précédente donne alors :

$$\big(\|f\|_H\big)^2 \leqslant \|f\|_H \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_H,$$

ce qui est la conclusion désirée à un facteur $\|f\|_H$ près.

(g) Il est immédiatement clair par définition que b_n jouit pour tout entier $n \geqslant 1$, de l'encadrement :

$$b_n^- \leqslant b_n \leqslant b_n^+,$$

et donc si les deux suites encadrantes convergent vers une limite identique, cela force manifestement b_n à converger vers la même limite.

Réciproquement, si b_n converge vers une limite b, à savoir si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N \Longrightarrow \Big(b - \varepsilon \leqslant b_n \leqslant b + \varepsilon\Big),$$

alors on déduit sans effort que pour ces mêmes entiers $n \geqslant N$:

$$b - \varepsilon \leqslant b_n^- \ \text{ et } \ b_n^+ \leqslant b + \varepsilon,$$

d'où en prenant les deux limites :

$$b - \varepsilon \leqslant \liminf_{n \to +\infty} b_n \ \text{ et } \ \limsup_{n \to +\infty} b_n \leqslant b + \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a bien égalité des deux limites inférieure et supérieure.

(h) Si f_n converge fortement vers f, on a déjà vu qu'elle converge faiblement vers f, tandis que la continuité de la norme $\|\cdot\|_H$ vue en cours et la question qui précèdent assurent que :

$$\|f\|_H = \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_H = \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_H = \limsup_{n \to +\infty} \|f_n\|_H$$

Réciproquement, le résultat de la question **(f)** et la deuxième hypothèse donnent un jeu d'(in)égalités :

$$\|f\|_H \leqslant \liminf_{n \to +\infty} \|f_n\|_H \leqslant \limsup_{n \to +\infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$$

qui contraint visiblement, grâce à la question qui précède, à l'existence de la limite :

$$\|f\|_H = \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_H.$$

Si donc l'on veut établir que les f_n convergent fortement vers f, on estime la norme au carré de leurs différences :

$$\big\|f - f_n\big\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \|f_n\|_H^2 - 2 \,\mathrm{Re} \,\langle f_n, \, f \rangle \,,$$

et l'on voit à droite que le second terme tend vers $\|f\|_H^2$, tandis que grâce à l'hypothèse de convergence faible, le troisième terme tend vers $-2\,\mathrm{Re}\,\langle f, f\rangle = -2\,\|f\|_H^2$, ce qui donne une somme qui tend vers 0, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 2. (a) Soit $k=1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}\big|\,\langle f_n, f_1\rangle\,\big| &\leqslant \|f_n\|_H\,\|f_1\|_H\\ &\leqslant M\,\|f_1\|_H\end{aligned}$$

montre que la première suite $\big(\langle f_n, f_1\rangle\big)_{n\geqslant 1}$ de nombres complexes est bornée, à valeurs dans le disque fermé de centre l'origine dans $\mathbb{C}$ et de rayon $M\,\|f_1\|_H$. Par compacité d'un tel disque, il est donc possible d'extraire une sous-suite $\big(f_n^1\big)_{n\geqslant 1}$ de la suite $(f_n)_{n\geqslant 1}$ de telle sorte que la suite de nombres complexes $\langle f_n^1, f_1\rangle$ converge vers un certain nombre complexe c_1 appartenant au disque fermé en question.

Supposons par récurrence que l'énoncé demandé soit démontré au niveau k. Alors avec le $(k+1)$-ème vecteur f_{k+1}, l'inégalité de Cauchy-Schwarz à nouveau :

$$\begin{aligned}\big|\,\big\langle f_n^k, f_{k+1}\big\rangle\,\big| &\leqslant \|f_n^k\|_H\,\|f_{k+1}\|_H\\ &\leqslant M\,\|f_{k+1}\|_H\end{aligned}$$

et la compacité du disque fermé de centre l'origine dans $\mathbb{C}$ et de rayon $M\,\|f_{k+1}\|_H$ assurent que l'on peut extraire une sous-suite $\big(f_n^{k+1}\big)_{n\geqslant 1}$ de la suite $\big(f_n^k\big)_{n\geqslant 1}$ — laquelle demeure constamment une sous-suite de la suite originale $(f_n)_{n\geqslant 1}$ — de telle sorte que la suite de nombres complexes $\big\langle f_n^{k+1}, f_{k+1}\big\rangle$ converge aussi vers un certain nombre complexe c_{k+1} appartenant au disque fermé en question. Or il est immédiatement clair par construction que toutes les limites des suites $\big\langle f_n^{k+1}, f_j\big\rangle$ demeurent les mêmes pour tout entier $1\leqslant j\leqslant k$, ce qui achève la preuve.

(b) La suite diagonale $(g_l)_{l\geqslant 1}$ étant extraite de la suite initiale $(f_n)_{n\geqslant 1}$, on a évidemment :

$$\sup_{l\geqslant 1}\|g_l\|_H \leqslant \sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|_H \leqslant M.$$

Ensuite, soit un vecteur fixé f_j, pour un certain entier $j\geqslant 1$. D'après les extractions de suites qui précèdent, on sait que :

$$\lim_{n\to+\infty}\big\langle f_n^j,\, f_j\big\rangle = c_j.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, il existe un entier $J=J(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n\geqslant J \Longrightarrow \Big(\big|\,\big\langle f_n^j,\, f_j\big\rangle - c_j\big| \leqslant \varepsilon\Big).$$

Quitte à augmenter J si nécessaire, on peut supposer que $J\geqslant j$.

Considérons alors tous les vecteurs f_l^l pour $l\geqslant J\geqslant j$. Puisque $l\geqslant j$ et puisque chaque suite $(f_n^l)_{n\geqslant 1}$ est par construction (successivement) extraite de la suite $(f_n^j)_{n\geqslant 1}$, chaque f_l^l est nécessairement de la forme :

$$f_l^l = f_{n(l)}^j$$

pour un certain entier $n(l)\geqslant l\geqslant J$ (le l-ème terme d'une suite extraite est au moins le l-ème terme de la suite initiale), d'où l'on déduit :

$$\big|\,\big\langle f_l^l,\, f_j\big\rangle - c_j\big| = \big|\big\langle f_{n(l)}^j,\, f_j\big\rangle - c_j\big| \leqslant \varepsilon,$$

pour tout $l \geqslant J = J(\varepsilon)$. La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, ces inégalités démontrent bien que $c_j = \lim_{l \to \infty} \left\langle f_l^l, f_j \right\rangle$.

(c) En effet, tout vecteur $f \in V$ s'écrit comme combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{\text{finie}} a_j\, f_j$$

à coefficients complexes $a_j \in \mathbb{C}$ de vecteurs f_j de la suite initiale. Or grâce à la question qui précède, on sait que :

$$\lim_{l \to +\infty} \big| \langle a_j f_j,\, g_l \rangle \big| = a_j\, c_j = \lim_{m \to +\infty} \big| \langle a_j f_j,\, g_m \rangle \big|,$$

d'où par sommation de soustractions :

$$0 = \lim_{l, m \to +\infty} \big| \langle f,\, g_m \rangle - \langle f,\, g_l \rangle \big|.$$

(d) Il s'agit là d'un résultat du cours, d'après lequel tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert possède un supplémentaire orthogonal.

(e) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de l'adhérence, comme $v \in \overline{V}$, il existe $f \in V$ avec $\| f - v \| \leqslant \varepsilon$. Pour deux entiers l, m assez grands, on peut alors estimer en utilisant la question **(c)** :

$$\begin{aligned} \big| \langle v,\, g_m \rangle - \langle v,\, g_l \rangle \big| &\leqslant \big| \langle v - f,\, g_m - g_l \rangle \big| + \big| \langle f,\, g_m - g_l \rangle \big| \\ &\leqslant \varepsilon \left(\| g_m \|_H + \| g_l \|_H \right) + \text{terme qui tend vers } 0 \text{ lorsque } l, m \to \infty \\ &\leqslant \varepsilon\, 2M + \text{terme qui tend vers } 0 \text{ lorsque } m, l \to \infty. \end{aligned}$$

La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petite, cette inégalité montre bien que la suite numérique $\big(\langle v, g_l \rangle \big)_{l \geqslant 1}$ est de Cauchy.

(f) Puisque chaque vecteur g_l appartient par construction à V, on a par orthogonalité :

$$\langle u,\, g_l \rangle = \langle v,\, g_l \rangle + \underline{\langle w,\, g_l \rangle}_{\circ},$$

d'où la suite $\big(\langle u, g_l \rangle \big)_{l \geqslant 1}$ est elle aussi de Cauchy, donc converge vers une certaine limite $\ell(u)$, par complétude de $\mathbb{C}$. Maintenant, si $u = u' + u''$ ou si $u = \lambda\, u$, on a $v = v' + v''$ ou on a $v = \lambda\, v$, d'où aisément $\ell(u) = \ell(u') + \ell(u'')$ ou $\ell(u) = \lambda\, \ell(u)$, ce qui vérifie la linéarité.

(g) Par construction, on sait que :

$$\big| \langle u,\, g_l \rangle \big| \leqslant M\, \| u \|_H,$$

d'où immédiatement $|\ell(u)| \leqslant M\, \| u \|_H$.

(h) Ainsi l'application $u \mapsto \ell(u)$ est-elle une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H. Le théorème de représentation de Riesz garantit alors l'existence d'un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\ell(u) = \lim_{l \to +\infty} \langle u, g_l \rangle = \langle u, g \rangle\,,$$

pour tout $u \in H$. En conclusion, *la suite $(g_l)_{l \geqslant 1}$ extraite par procédé diagonal de la suite bornée initiale $(f_n)_{n \geqslant 1}$ possède bien la propriété d'être faiblement convergente vers ce vecteur $g \in H$.*

Exercice 3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n-ème noyau de Fejér est égal à :

$$\mathsf{F}_n(\theta) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\,\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2,$$

sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, la majoration triviale valable pour tout réel t avec $\delta \leqslant |t| \leqslant \pi$:

$$\mathsf{F}_n(t) \leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}$$

peut être intégée sur-le-champ pour déduire que l'on a effectivement, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \mathsf{F}_n(t)\,h(t)\,\frac{dt}{2\pi}\right| &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} |h(t)|\,\frac{dt}{2\pi}\\ &\leqslant \frac{1}{n}\,\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}\,\|h\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Exercice 4. (a) Intégrer l'inégalité triviale $\cos t \leqslant 1$ donne l'inégalité connue $\sin t \leqslant t$ valable pour tout $t \geqslant 0$. Autrement dit : $-t \leqslant -\sin t$, inégalité que l'on intègre à nouveau pour obtenir, après transfert à gauche de la constante 1 d'intégration :

$$1 - \tfrac{t^2}{2} \leqslant \cos t,$$

inégalité valable sur $[0, +\infty[$. Enfin, une troisième et dernière intégration donne l'inégalité désirée :

$$t - \tfrac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t,$$

satisfaite sur $[0, +\infty[$.

(b) En remplaçant t par $\frac{t}{2}$, l'inégalité préparatoire devient :

$$\tfrac{t}{2} - \tfrac{t^3}{48} \leqslant \sin\tfrac{t}{2} \leqslant \tfrac{t}{2}.$$

Par inversion, les inégalités et les extrémités échangent leurs rôles :

$$\frac{2}{t} \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{t}\,\frac{1}{1 - \frac{t^2}{24}}.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a l'inégalité (légèrement grossière) $\frac{t^2}{24} \leqslant \frac{1}{2}$, et en appliquant l'inégalité :

$$\frac{1}{1-x} \leqslant 1 + 2\,x$$

dont on vérifie qu'elle est trivialement satisfaite pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, on déduit finalement que :

$$\frac{2}{t} \leqslant \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \leqslant \frac{2}{t} + \frac{t}{6},$$

à nouveau pour tout $t \in [0, \pi]$.

(c) Par parité de la fonction qui définit le noyau de Dirichlet, sa norme est égale à :

$$\|\mathsf{D}_n\|_{L^1} = \frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\left|\sin(n + \frac{1}{2})t\right|}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}\,dt.$$

En appliquant les inégalités vues à l'instant, on déduit aisément ce qui était demandé :

$$\begin{aligned}
0 \leqslant \|\mathsf{D}_n\|_{L^1} - \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi 2\,\frac{|\sin(n+\frac{1}{2})t|}{t}\,dt &\leqslant \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \frac{t}{6}\,|\sin(n+\tfrac{1}{2})t|\,dt \\
&\leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{t}{6}\,dt \\
&= \frac{\pi}{12}.
\end{aligned}$$

(d) Dans l'intégrale considérée à l'instant qui approche donc $\|\mathsf{D}_n\|_{L^1}$ à $\mathrm{O}(1)$ près, on pose :

$$\big(n+\tfrac{1}{2}\big)\,t =: v, \qquad \text{d'où :} \quad \tfrac{dt}{t} = \tfrac{dv}{v},$$

ce qui la transforme en deux morceaux dont le second est d'une contribution négligeable :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{|\sin(n+\frac{1}{2})\,t|}{t}\,dt &= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v}\,dv \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v}\,dv + \frac{2}{\pi}\underbrace{\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v}\,dv}_{\leqslant \frac{1}{n\pi}\frac{\pi}{2} = \mathrm{O}(\frac{1}{n})}.
\end{aligned}$$

Naturellement, grâce aux changements de variables linéaires $v := k\pi + u$ effectués pour $k = 0, \dots, n-1$, l'intégrale restante (le premier morceau) se décompose en une somme d'intégrales sur $[0, \pi]$:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v}\,dv = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{|\sin u|}{k\pi+u}\,du.$$

En définitive, on obtient (la valeur absolue disparaît) :

$$\big\|\mathsf{D}_n\big\|_{L^1} = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi+u}\,du + \mathrm{O}(1) + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big),$$

expression dans laquelle la constante qui se cache dans le $\mathrm{O}(1)$ n'a pas été modifiée et peut être prise égale à $\frac{\pi}{12}$.

(e) Tout d'abord, le terme pour $k = 0$ de cette dernière somme est majoré par :

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du \leqslant \pi.$$

Ensuite, pour tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n-1$, les inégalités triviales :

$$\frac{1}{k\pi+\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi+u} \leqslant \frac{1}{k\pi},$$

valables pour tout $u \in [0, \pi]$, multipliées par la quantitée positive $\sin u$, intégrées sur $[0, \pi]$, puis sommées pour k allant de 1 à $n-1$, donnent :

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+\pi}\underbrace{\int_0^\pi \sin u\,du}_{=2} \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi+u}\,du \leqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi}\underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du}_{=2}.$$

Or en L3, le correcteur est en mesure de s'imaginer que l'étudiant sait pertinemment que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \mathsf{log} n + \gamma + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big),$$

où γ est la constante d'Euler (sinon, l'étudiant en question est prié de se cultiver sur la question). Donc on obtient :

$$\frac{4}{\pi^2}\big(- \tfrac{1}{1} + \mathsf{log} n + \gamma + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big)\big) \leqslant \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\mathsf{sin} u}{k\pi + u}\, du \leqslant \frac{4}{\pi^2}\big(\mathsf{log} n + \gamma + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big)\big).$$

En faisant le bilan de toutes les inégalités établies jusqu'à présent, on conclut par exemple que :

$$\bigg| \big\|\mathsf{D}_n\big\|_{L^1} - \frac{4}{\pi^2}\,\mathsf{log} n \bigg| \leqslant \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{4}{\pi^2}\,\gamma + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big).$$

Question laissée en suspens : quelle est la valeur *exacte* de la constante c telle que :

$$\big\|\mathsf{D}_n\big\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2}\,\mathsf{log} n + \mathsf{c} + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big)?$$

Un point en plus à qui trouvera la réponse dans la littérature mathématique.

Exercice 5. (a)(b) Pour tout $y \in F$ fixé, l'application :

$$x \longmapsto \langle T(x), y\rangle$$

est linéaire et continue. Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe alors un unique élément de E — que l'on notera $T^*(y)$ puisqu'il dépend de y — tel que cette application linéaire s'écrive comme un produit scalaire avec cet élément :

$$\langle T(x),\, y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle\,.$$

Pour tous $y_1, y_2 \in F$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on se convainc très aisément que $\lambda_1\, T^*(y_1) + \lambda_2\, T^*(y_2)$ satisfait la propriété qui caractérise $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2\, y_2)$, ce qui montre que $y \mapsto T^*(y)$ est effectivement linéaire.

Maintenant, en appliquant la définition des normes d'opérateurs et en utilisant le fait que $\|z\| = \big\langle z, \frac{z}{\|z\|}\big\rangle$ pour tout vecteur de norme 1, on transforme successivement ces normes en passant par deux expressions centrales parfaitement symétriques :

$$\begin{aligned}
|\!|\!| T^* |\!|\!| &\overset{\text{def}}{=} \mathsf{sup}\big\{\|T^*(y)\| \colon\ y \in F,\ \|y\|_F = 1\big\} \\
&= \mathsf{sup}\big\{\big|\,\langle x, T^*(y)\rangle\,\big| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1,\ y \in F,\ \|y\|_F = 1\big\} \\
&= \mathsf{sup}\big\{\big|\,\langle T(x), y\rangle\,\big| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1,\ y \in F,\ \|y\|_F = 1\big\} \\
&= \mathsf{sup}\big\{\|T(x)\| \colon\ x \in E,\ \|x\|_E = 1\big\} \\
&\overset{\text{def}}{=} |\!|\!| T |\!|\!|,
\end{aligned}$$

d'où il découle que T^*, de norme visiblement finie, est en effet continu.

(c) La démonstration du fait que $\big(T^*\big)^* = T$ découle des définitions par simple symétrie logique, et — seule exception ici — le micro-détail des vérifications ne sera pas offert au lecteur par le correcteur.

(d) Avant de montrer que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$, on a tout d'abord par majoration connue des normes d'une composition d'opérateurs et en utilisant la question **(b)** :

$$\begin{aligned}\|T^* \circ T\| &\leqslant \|T^*\| \cdot \|T\| \\ &\leqslant \|T\|^2.\end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x \in E$ avec $\|x\|_E \leqslant 1$:

$$\begin{aligned}\|T(x)\|^2 &= \big\langle T(x),\, T(x)\big\rangle \\ &= \big\langle x,\, (T^* \circ T)(x)\big\rangle \\ &\leqslant \|x\|_E \cdot \|T^* \circ T\| \cdot \|x\|_E \\ &\leqslant \|T^* \circ T\|.\end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité inverse $\|T\|^2 \leqslant \|T^* \circ T\|$, d'où l'égalité demandée.

Exercice 6. (a) Après k intégrations par parties dans chacune desquelles les termes de bord s'annulent automatiquement par 2π-périodicité, on obtient :

$$\begin{aligned}\widehat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

La k-ème dérivée de f étant continue par hypothèse, le lemme de Riemann-Lebesgue assure que :

$$0 = \mathsf{lim}_{n \to +\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta)\, e^{-in\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

Il en découle que l'on a bien :

$$\widehat{f}(n) = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{|n|^k}\big),$$

lorsque $|n| \longrightarrow \infty$.

(b) Grâce à l'inégalité triangulaire infinie, on majore — sans finesse ni grossièreté — pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la différence :

$$\begin{aligned}\big|f(\theta) - S_n(f)(\theta)\big| &= \bigg|\sum_{|\ell| \geqslant n+1} \widehat{f}(\ell)\, e^{i\ell\theta}\bigg| \\ &\leqslant \sum_{|\ell| \geqslant n+1} \big|\widehat{f}(\ell)\big|.\end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la question qui précède, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geqslant 1$ assez grand pour satisfaire :

$$\begin{aligned}\big\|f - S_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0} &\leqslant \varepsilon\, 2 \sum_{|\ell| \geqslant n+1} \frac{1}{n^\ell} \\ &\leqslant \varepsilon\, 2 \int_n^\infty \frac{dx}{x^k} \\ &\leqslant \frac{2\,\varepsilon}{(k-1)\, n^{k-1}}.\end{aligned}$$

Ainsi a-t-on bien comme annoncé :

$$\big\| f - S_n(f) \big\|_{\mathscr{C}^0} = \mathrm{o}\big(\tfrac{1}{n^{k-1}}\big).$$

lorsque $n \longrightarrow \infty$.

(c) Puisque $\widehat{f}(n) = \mathrm{O}\big(\frac{1}{|n|^k}\big)$ et que l'on a supposé $k \geqslant 2$, la série :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)$$

converge absolument, d'après le critère dit de Riemann. Par conséquent, la série de Fourier complète :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)\, e^{i\ell\theta}$$

converge uniformément vers une fonction au moins continue sur le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et un théorème du cours (basé sur l'utilisation du noyau de Fejér) assure que l'on peut écrire :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k)\, e^{ik\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, où le membre de droite converge uniformément.

Mais il y a plus : tant que $k' \leqslant k-2$, la série des dérivées terme à terme :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)\, (i\ell)^{k'}\, e^{i\ell\theta}$$

continue à converger absolument et normalement — toujours d'après le critère de Riemann —, donc le théorème de dérivation terme à terme assure l'existence et la continuité de telles dérivées k-èmes.

Exercice 7. (a) La fonction f' étant 2π-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle appartient manifestement à l'espace $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, en tenant compte de l'intégration par parties :

$$\widehat{f'}(n) = in\, \widehat{f}(n),$$

on peut appliquer la formule de Plancherel à f', ce qui donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} n^2 \, \big|\widehat{f}(n)\big|^2 = \big\|f'\big\|_{L^2} < +\infty.$$

Mais ensuite, une utilisation fréquente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz finie qui consiste quelque peu astucieusement à faire apparaître un produit invisible montre que l'on a, pour tout entier $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \big|\widehat{f}(n)\big| &= \sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{1}{|n|} \big|n\,\widehat{f}(n)\big| \\
&\leqslant \bigg(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} \frac{1}{n^2}\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant N} n^2 \,\big|\widehat{f}(n)\big|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \bigg(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant \infty} \frac{1}{n^2}\bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\sum_{1 \leqslant |n| \leqslant \infty} n^2 \,\big|\widehat{f}(n)\big|^2\bigg)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2\,\tfrac{\pi^2}{6}}\,\big(\|f'\|_{L^2}\big)^2 \\
&< +\infty,
\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale demandée.

(b) Un théorème du cours — application du théorème fondamental de Fejér — assure alors que f est égale à sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \widehat{f}(n)\, e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

[Nous voici donc rendus à la fin de ce corrigé détaillé qui doit être lu et re-lu, médité et re-médité, dans son intégralité.]

7. Examen du Jeudi 10 Mai 2012

Exercice 1. Soit la famille des noyaux de Fejér sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ indexée par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathsf{F}_n(\theta) = \frac{1}{n}\left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right]^2 \qquad \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}; \qquad \mathsf{F}_n\big|_{2\pi\mathbb{Z}} = n.$$

(a) Rappeler de manière concise les trois propriétés fondamentales dont jouissent ces F_n.

(b) En admettant l'inégalité de Hölder $\int_X |fg|\,d\mu \leqslant \big(\int_X |f|^{\mathsf{p}}\,d\mu\big)^{1/\mathsf{p}} \big(\int_X |g|^{\mathsf{p}'}\,d\mu\big)^{1/\mathsf{p}'}$ pour toute mesure de probabilité μ sur un espace topologique X, vérifier, dans les notations du cours, que pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ avec $1 \leqslant \mathsf{p} < +\infty$, on a :

$$\big|\sigma_n(f)(\theta)\big|^{\mathsf{p}} \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta - t)\big|^{\mathsf{p}}\,\mathsf{F}_n(t)\,dt.$$

(c) Montrer l'inégalité suivante entre normes L^{p} :

$$\big\|\sigma_n(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(d) Vérifier, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'identité :

$$f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta) - f(\theta - t)\big)\mathsf{F}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

(e) En déduire que l'on a :

$$\big(\big\|\sigma_n(f) - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} \leqslant \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{F}_n(t)\bigg(\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(t) - f(\theta - t)\big|^{\mathsf{p}}\,dt\bigg)\,dt.$$

(f) Conclure que l'on a :

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \big\|\sigma_n(f) - f\big\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

Exercice 2. Étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur consiste à déterminer les fonctions $u \in \mathscr{C}^2\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\big)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & \text{pour tous } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ \lim_{y\to 0} u(x,y) = f(x) & \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \\ \sup_{y>0} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \big|u(x,y)\big|\,dx < +\infty. \end{cases}$$

On suppose que, pour tout $y > 0$, les quatre fonctions :

$$x \longmapsto u(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

sont intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(a) Si $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$ désigne la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x dont on explicitera d'abord la définition, montrer que l'on a, pour tout $y > 0$:

$$\begin{cases} \xi^2\,\widehat{u}(\xi,y) - \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0, \\ \lim_{y\to 0}\widehat{u}(\xi,0) = \widehat{f}(\xi), \\ \sup_{y>0}\big|\widehat{u}(\xi,y)\big| < +\infty. \end{cases}$$

(b) Montrer qu'il existe des fonctions A et B telles que :

$$\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi)\,e^{-\xi y} + B(\xi)\,e^{\xi y}.$$

(c) Établir que l'on a en fait :

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\,e^{-|\xi|\,y}.$$

(d) Vérifier, pour tout $y > 0$ fixé, que la fonction $\xi \longmapsto \widehat{u}(\xi,y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier que l'on a :

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{u}(\xi,y)\,e^{ix\xi}\,d\xi.$$

(f) On pose $g_y(x) := \frac{1}{\pi}\,\frac{y}{x^2+y^2}$. Calculer la transformée de Fourier :

$$\widehat{g_y}(\xi)(\xi) = e^{-|\xi|\,y}.$$

(g)Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\widehat{u}(\xi,y) = \mathscr{F}\big(f * g_y\big).$$

(h) Montrer que la solution recherchée est donnée par la formule intégrale :

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)\,\frac{y}{\pi(y^2+(x-s)^2)}\,ds,$$

qu'elle est de classe en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+^*$, et qu'elle satisfait toutes les conditions requises.

Exercice 3. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ dont la moyenne $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0$ est nulle.

(a) Montrer que l'on a :

$$\int_0^{2\pi} \big|f(x)\big|^2\,dx \leqslant \int_0^{2\pi} \big|f'(x)\big|^2\,dx.$$

(b) Montrer que l'on a égalité si et seulement si $f(x) = a\,e^{ix} + b\,e^{-ix}$ pour des constantes $a, b \in \mathbb{C}$.

Exercice 4. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment réel $[a, b]$ avec $a < b$ qui vérifie $f(a) = f(b) = 0$.

(a) En appliquant la formule de Plancherel, montrer que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \left| f'(x) \right|^2 dx.$$

(b) Montrer que la constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ est optimale.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert et soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe fermé non vide. Montrer, en utilisant un théorème du cours, que l'opérateur de projection π_C sur C est 1-*lipschitzien*, au sens où il satisfait :

$$\|\pi_C(x_2) - \pi_C(x_1)\| \leqslant \|x_2 - x_1\|,$$

pour tous $x_1, x_2 \in H$.

8. Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 11 Avril 2012

(Toute copie incomplète sera corrigée)
(Les exercices restants pourront être rendus après les vacances)
(Tous les exercices sont fondamentaux et importants pour le prochain cours)

Exercice 1. Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, soit la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f définie comme étant la fonction (continue) de $\xi \in \mathbb{R}^d$:

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\langle x,\xi\rangle}\, dx.$$

(a) En dimension $d = 1$, avec $-\infty < a < b < +\infty$, calculer :

$$\mathscr{F}\big(\tfrac{1}{2}\, e^{-|x|}\big)(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}.$$

$$\mathscr{F}\big(\mathbf{1}_{[a,b]}\big)(\xi) = \begin{cases} 2\, \dfrac{\sin\big(\frac{b-a}{2}\,\xi\big)}{\xi}\, e^{-i(a+b)\,\xi/2} & \text{si } \xi \neq 0, \\ b-a & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$

(b) Pour $a \neq 0$, calculer :

$$\mathscr{F}\Big(\frac{1}{a^2+x^2}\Big)(\xi) = \frac{\pi}{a}\, e^{-a\,|\xi|},$$

$$\mathscr{F}\bigg(\Big(1 - \frac{2|x|}{a}\Big)\, \mathbf{1}_{[-\frac{a}{2},\frac{a}{2}]}\bigg)(\xi) = 8\, \frac{\sin^2(a\xi/4)}{a\xi^2}.$$

Exercice 2. Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On note :

- $\overline{f}$ sa *conjuguée*, définie par $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$;
- f_σ sa *symétrisée*, définie par $f_\sigma(x) := f(-x)$;
- $\tau_a f$ sa *translatée* par un vecteur fixe quelconque $a \in \mathbb{R}^d$, définie par :

$$\tau_a f(x) := f(x-a).$$

(a) Montrer :

$$\mathscr{F}\big(f_\sigma\big) = \big(\mathscr{F}(f)\big)_\sigma, \qquad \mathscr{F}\big(\overline{f}\big) = \Big(\overline{\mathscr{F}(f)}\Big)_\sigma, \qquad \overline{\mathscr{F}}\big(\overline{f}\big) = \overline{\mathscr{F}(f)},$$

et en déduire :

$$f \text{ paire (resp. impaire)} \implies \widehat{f} \text{ paire (resp. impaire)}.$$

(b) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$ fixé, montrer :

$$\mathscr{F}\big(f(\lambda\,\cdot)\big)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d}\,\mathscr{F}(f)\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big).$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, montrer :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\tau_a f)(\xi) &= e^{-i\langle a,\xi\rangle}\,\mathscr{F}(f)(\xi),\\ \mathscr{F}\big(e^{i\langle a,\cdot\rangle}\,f(\cdot)\big)(\xi) &= \tau_a\big(\mathscr{F}(f)\big)(\xi).\end{aligned}$$

Exercice 3. Pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, montrer :

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\,\widehat{f_2}.$$

Exercice 4. On sait que la transformation de Fourier :

$$\mathscr{F}\colon \ \Big(L^1(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{L^1}\Big) \longrightarrow \Big(\mathscr{C}^0_{\substack{\longrightarrow 0\\ |\cdot|\to+\infty}}(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0}\Big)$$

est une application linéaire continue. Le but est d'établir qu'elle n'est pas surjective. On travaille ici en dimension $d = 1$.

(a) Soit $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue impaire qui tend vers 0 à l'infini telle que la limite :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{g(x)}{x}\,dx$$

n'existe *pas* : trouver un seul ou plusieurs exemples explicites de telles fonctions.

(b) Montrer que l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$$

existe ; on ne demande pas ici de la calculer exactement, mais juste de démontrer au moins qu'elle existe [7].

(c) On suppose maintenant par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} = g$, et on pose :

$$F(t) := -i\big(f(t) - f(-t)\big).$$

Vérifier que :

$$g(x) = \int_0^{+\infty} F(t)\sin(xt)\,dt.$$

7. Elle est en fait égale à $\frac{\pi}{2}$. Existe-t-il une démonstration simple et rapide ?

(d) Montrer que l'on a pour tout $R \geqslant 1$:

$$\int_1^R \frac{g(x)}{x}\,dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_1^R \frac{\sin(xt)}{x}\right) F(t)\,dt.$$

(e) Conclure.

Exercice 5. **(a)** En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f'}(\xi) = i\,\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

Si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ avec $k \geqslant 1$, en déduire que pour tout entier positif $\ell \leqslant k$, on a :

$$\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (i\xi)^\ell\,\widehat{f}(\xi).$$

(b) En dimension $d \geqslant 1$, quelconque, si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout multiindice $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $\ell_1 + \cdots + \ell_d \leqslant k$, on a :

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^{\ell_1+\cdots+\ell_d}}{\partial x_1^{\ell_1} \cdots \partial x_d^{\ell_d}} f\right)(\xi_1, \dots, \xi_d) = i^{\ell_1+\cdots+\ell_d}\,\xi_1^{\ell_1} \cdots \xi_d^{\ell_d}\,\mathscr{F}(f)(\xi_1, \dots, \xi_d).$$

(c) En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction produit $x \mapsto xf(x)$ appartienne encore à $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f}$ admet une dérivée $\widehat{f}'$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par la formule :

$$\widehat{f}'(\xi) = -\,i\,\widehat{xf}(\xi).$$

(c) En dimension $d \geqslant 1$ quelconque, si, pour un entier $k \geqslant 1$, toutes les fonctions produits f, $x_{l_1} f$, $x_{l_1} x_{l_2} f$, …, $x_{l_1} x_{l_2} \cdots x_{l_k} f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ pour tous indices $1 \leqslant l_1, l_2, \dots, l_k \leqslant d$, montrer que l'on a pour tout entier $\ell \leqslant k$:

$$\frac{\partial^\ell\big(\mathscr{F}(f)\big)}{\partial \xi_{l_1} \cdots \partial \xi_{l_\ell}}(\xi) = (-i)^\ell\,\mathscr{F}\big(x_{l_1} \cdots x_{l_\ell}\,f\big)(\xi).$$

Exercice 6. On admet ici un théorème du cours du mardi 10 avril 2012, dit *Formule d'inversion* : *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d\,f_\sigma$$

en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et soit une autre fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(a) Vérifier que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer que $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(c) Montrer que l'on a :

$$\widehat{f\,g} = \frac{1}{(2\pi)^d}\,\widehat{f} * \widehat{g}.$$

Exercice 7. **(a)** Montrer que la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ n'appartient *pas* à $L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'entraîne pas $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, donc la transformée seconde $\widehat{\widehat{f}}$ ne peut *pas* en général être calculé.

Le but ici est d'énoncer une condition spécifique sur f, dite « de Dini », qui assurera que l'on puisse néanmoins inverser la transformée de Fourier en écrivant :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi,$$

cette intégrale impropre étant définie comme valeur principale au sens de Cauchy :

$$\mathsf{lim}_{R\to+\infty} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

(b) Avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose donc pour $R > 0$:

$$S_R(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

En admettant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(Rt)}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, montrer que l'on a :

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2}\right] \frac{\sin(Rt)}{t}\, dt.$$

(c) On pose donc :

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2},$$

et on suppose (Dini) qu'il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\int_0^{\delta} \frac{|g_x(t)|}{t}\, dt < +\infty.$$

Montrer que alors sous cette hypothèse que l'on a effectivement la conclusion désirée :

$$f(x) = \mathsf{lim}_{R\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, d\xi.$$

(d) Vérifier que cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^{\alpha}(\mathbb{R})$, à savoir lorsque f satisfait de plus une condition de type Hölder : il existe un certain nombre réel $0 < \alpha < 1$ et une constante K tels que l'on ait :

$$\big|f(x'') - f(x')\big| \leqslant K\,\big|x'' - x'\big|^{\alpha},$$

pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}$.

Exercice en complément au partiel. Soit D_n le noyau de Dirichlet. Déterminer la constante c telle que :

$$\big\|\mathsf{D}_n\big\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2}\,\mathsf{log} n + \mathsf{c} + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big).$$

Quelle serait la constante suivante dans le reste $\mathrm{O}\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{\mathsf{d}}{n} + \mathrm{O}\big(\frac{1}{n^2}\big)$? Peut-on aller plus loin ?

9. Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 2 Mai 2012

(Toute copie incomplète sera corrigée)
(Les exercices restants pourront être rendus après les vacances)
(Tous les exercices sont fondamentaux et importants pour le prochain cours)

Exercice 1. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy = 1$. On pose :

$$\begin{aligned} \mathsf{c}_- &:= \int_{-\infty}^{0} g(y)\,dy, \\ \mathsf{c}_+ &:= \int_{0}^{+\infty} g(y)\,dy. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\, g\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

(a) Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * g_\varepsilon(x) = \mathsf{c}_-\, f(x+0) + \mathsf{c}_+\, f(x-0).$$

(b) Si de plus f ne présente pas de points de discontinuité sur un intervalle fermé donné, montrer que la convergence est uniforme sur cet intervalle.

(c) Que se passe-t-il si l'intervalle en question contient un point de discontinuité de f ?

Exercice 2. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un segment réel $[a,b]$ avec $a < b$ qui vérifie $f(a) = f(b) = 0$.

(a) En appliquant la formule de Plancherel, montrer que :

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b \big|f'(x)\big|^2\,dx.$$

(b) Montrer que la constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ est optimale.

Exercice 3. (a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cosh \pi x}.$$

(b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{-i\pi x^2}}{\cosh \pi x}.$$

(c) Établir deux formules dues à Ramanujan :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\cosh \pi x} \cos \pi x^2\,dx &= \frac{1 + \sqrt{2}\sin \pi t^2}{2\sqrt{2}\,\cosh \pi t}, \\ \int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\cosh \pi x} \sin \pi x^2\,dx &= \frac{-1 + \sqrt{2}\cos \pi t^2}{2\sqrt{2}\cosh \pi t}. \end{aligned}$$

Exercice 4. Soit D_n le noyau de Dirichlet. Déterminer la constante c telle que :

$$\|\mathsf{D}_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2}\,\mathsf{log} n + \mathsf{c} + \mathrm{O}\big(\tfrac{1}{n}\big).$$

Quelle serait la constante suivante dans le reste $\mathrm{O}\big(\frac{1}{n}\big) = \frac{\mathsf{d}}{n} + \mathrm{O}\big(\frac{1}{n^2}\big)$?

10. Partiel du 13 mars 2013 et son corrigé détaillé

Exercice 1 (Théorème du point fixe pour les applications strictement contractantes). Soit X un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit une application continue $T : X \to X$. On suppose que T est *strictement contractante*, à savoir on suppose qu'il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}_+$ avec $0 \leqslant \kappa < 1$ telle que :

$$\big\| T(x) - T(y) \big\| \leqslant \kappa \, \| x - y \| \qquad \text{pour tous } x, y \in X.$$

L'objectif est d'établir l'existence d'un unique $x^* \in X$ satisfaisant $T(x^*) = x^*$, c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'un *point fixe* pour T.

Avant de commencer, il importe de faire observer au lecteur-étudiant que ce théorème est vrai *avec une démonstration identique sans aucune modification* plus généralement lorsque $\big(X, \| \cdot \| \big)$ est un espace de Banach, à savoir un espace vectoriel normé *complet* dont la norme $\| \cdot \|$ ne dérive pas nécessairement d'un produit scalaire (observer ci-dessous que le produit scalaire n'est absolument pas utilisé !).

(a) On choisit (au hasard) un $x_0 \in X$ initial quelconque et on itère sur x_0 l'application T un nombre arbitraire $n \geqslant 1$ de fois :

$$x_n := T^n(x_0) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}(x_0).$$

Montrer alors que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\big\| x_{n+1} - x_n \big\| \leqslant \kappa^n \, \big\| T(x_0) - x_0 \big\|.$$

Tout d'abord, pour $n = 1$, c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse de contraction (stricte) ci-dessus appliquée à $x := T(x_0)$ et $y := x_0$. Ensuite, supposant cette inégalité acquise au niveau n, on se place au niveau $n+1$ et on majore :

$$\begin{aligned}
\big\| x_{n+2} - x_{n+1} \big\| &= \big\| T^{n+2}(x_0) - T^{n+1}(x_0) \big\| = \big\| T\big(T^{n+1}(x_0)\big) - T\big(T^n(x_0)\big) \big\| \\
\text{[Hypothèse de contraction stricte]} \qquad &\leqslant \kappa \, \big\| T^{n+1}(x_0) - T^n(x_0) \big\| \\
\text{[Coïncidence notationnelle]} \qquad &= \kappa \, \big\| x_{n+1} - x_n \big\| \\
\text{[Hypothèse de récurrence]} \qquad &\leqslant \kappa \, \kappa^n \, \big\| T(x_0) - x_0 \big\|,
\end{aligned}$$

ce qui conclut grâce au principe d'induction complète.

(b) Déduire du point précédent que, pour tous entiers $0 \leqslant j < k$, on a la majoration générale :

$$\big\| x_k - x_j \big\| \leqslant \big(\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j \big) \big\| T(x_0) - x_0 \big\|.$$

Tout d'abord, essayons de comprendre ce qui est demandé dans le cas particulier où $k = j + 2$. On devine qu'il est naturel d'insérer deux termes dont la somme s'annule afin de se ramener à ce qui vient d'être démontré :

$$\begin{aligned} \|x_{j+2} - x_j\| = \big\|x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\big\| &\leqslant \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\ \text{[Appliquer } \textbf{(a)} \text{ deux fois]} \qquad &\leqslant \big(\kappa^{j+1} + \kappa^j\big)\, \big\|T(x_0) - x_0\big\|. \end{aligned}$$

Le cas général où $k - j \geqslant 1$ est arbitraire se démontre aisément de manière similaire :

$$\begin{aligned} \|x_k - x_j\| &= \big\|x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\big\| \\ &\leqslant \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\leqslant \big(\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j\big)\, \big\|T(x_0) - x_0\big\|. \end{aligned}$$

(c) Déduire de ce qui précède que la suite $\big(x_k\big)_{k \geqslant 0}$ est convergente vers un (unique) point $x^* \in X$.

L'espace de Hilbert X étant complet (par axiome !), il suffit de faire voir que la suite $\big(x_k\big)_{k \geqslant 0}$ est de Cauchy, car alors une limite unique x^* existera. Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Ainsi la question est : peut-on choisir un entier $J \gg 1$ assez grand pour que :

$$\Big(k > j \geqslant J\Big) \implies \Big(\|x_k - x_j\| \leqslant \varepsilon\Big)\,?$$

La réponse est manifestement : oui grâce à la question qui précède ! Tout simplement parce que l'on sait parfaitement calculer des sommes géométriques tronquées :

$$\begin{aligned} \|x_k - x_j\| &\leqslant \kappa^j \left(\kappa^{k-j-1} + \cdots + \kappa + 1\right) \underbrace{\big\|T(x_0) - x_0\big\|}_{\text{constante}} \\ &= \kappa^j\, \frac{1 - \kappa^{k-j}}{1 - \kappa}\, \big\|T(x_0) - x_0\big\| \\ &\leqslant \kappa^J\, \underbrace{\frac{1}{1 - \kappa}\, \big\|T(x_0) - x_0\big\|}_{\text{nouvelle constante}}, \end{aligned}$$

et bien entendu aussi, parce que $\lim_{J \to \infty} \kappa^J = 0$ puisque $0 \leqslant \kappa < 1$ par hypothèse.

(d) Montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\big\|x^* - T(x^*)\big\| \leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa\, \|x_k - x^*\|.$$

Conclure que l'on a $T(x^*) = x^*$.

Après insertion (artificielle) du terme nul $-x_{k+1} + x_{k+1}$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} \big\|x^* - T(x^*)\big\| &\leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \big\|x_{k+1} - T(x^*)\big\| \\ &= \|x^* - x_{k+1}\| + \big\|T(x_k) - T(x^*)\big\| \\ &\leqslant \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa\, \|x_k - x^*\|. \end{aligned}$$

Pour conclure, en faisant tendre k vers ∞, le membre de droite tend visiblement vers $0+0$, puisque $x_k \longrightarrow x^*$ par construction, d'où :

$$\big\|x^* - T(x^*)\big\| \leqslant 0,$$

ce qui donne $x^* = T(x^*)$ par positivité stricte de la norme sur $X\backslash\{0\}$.

(e) Montrer que si x^{**} vérifie aussi $T(x^{**}) = x^{**}$, alors nécessairement $x^{**} = x^*$.

Ici, il s'agissait simplement de deviner qu'une application de l'hypothèse de stricte contraction à $x := x^{**} = T(x^{**})$ et à $y := x^* = T(x^*)$ donne instantanément :

$$\underbrace{\big\|T(x^{**}) - T(x^*)\big\|}_{=\|x^{**}-x^*\|} \leqslant \kappa\, \|x^{**} - x^*\|,$$

à savoir :

$$(1-\kappa)\, \|x^{**} - x^*\| \leqslant 0,$$

et comme $0 \leqslant \kappa < 1$, cette quantité positive ne peut qu'être nulle, d'où $x^{**} = x^*$ par positivité stricte de la norme sur $X\backslash\{0\}$.

Exercice 2 (Théorème des fonctions implicites de Zarantonello). On se donne un ensemble E, un $\mathbb{R}$-espace de Hilbert $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ muni de la norme associée $\|\cdot\|$ et une application :

$$\begin{aligned} F\colon \quad E\times X &\longrightarrow X \\ (\xi, x) &\longmapsto F(\xi, x). \end{aligned}$$

On suppose que :

• F est *fortement monotone en x, uniformément en ξ*, à savoir : il existe une constante réelle $a > 0$ telle que l'on ait, pour tout $\xi \in E$ et tous $x, y \in X$:

$$\big\langle F(\xi, x) - F(\xi, y),\ x - y\big\rangle \geqslant a\,\|x-y\|^2\,;$$

• F est *Lipschitzienne en x, uniformément en ξ*, à savoir : il existe une constante réelle $b > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\xi \in X$ et tous $x, y \in X$:

$$\|F(\xi,x) - F(\xi,y)\| \leqslant b\,\|x-y\|.$$

On se propose d'établir l'existence d'une application $f : E \to X$ résolvant l'équation implicite $F = 0$, à savoir telle que, pour chaque $\xi \in E$, on ait :

$$\Big(F(\xi, x) = 0\Big) \iff \Big(x = f(\xi)\Big).$$

Notons que ce théorème des fonctions implicites est valable sans aucune hypothèse sur l'application de départ F, ni continuité, ni linéarité — même partielle par rapport au second argument x —, de telle sorte que l'application résolvante f que nous allons construire n'a pas non plus de raison de jouir de propriétés spécifiques.

(a) Pour $c > 0$, on définit une application $G_c\colon E\times X \longrightarrow X$ par :

$$G_c(\xi, x) := x - c\,F(\xi, x).$$

Vérifier que, pour $\xi \in E$ fixé, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si x est un point fixe de l'application :

$$X \ni x \longmapsto G_c(\xi, x) \in X.$$

À quoi pense-t-on alors ?

La fixe-attitude de $G_c(\xi, \cdot)$:

$$x = G_c(\xi, x) = x - c\,F(\xi, x)$$

est manifestement équivalente — grâce à des opérations algébriques élémentaires dont la maîtrise remonte aux mathématiques babyloniennes et qui furent symbolisée de manière systématique par les mathématiciens arabes — à la zéro-itude de $F(\xi, x)$, puisque $c > 0$, lui au moins, il n'est pas atteint de nulle-itude ! Comme on a résolu sagement l'exercice précédent, on pense en un éclair au Théorème du point fixe !

(b) Montrer que l'on a, pour $c > 0$, $\xi \in X$ et $x, y \in X$:

$$\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\|^2 \leqslant (1 - 2ac + c^2b^2)\|x - y\|^2.$$

Dans un espace de Hilbert, le calcul d'une norme au carré doit s'effectuer en développant le produit scalaire par bilinéarité :

$$\begin{aligned}\big\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\big\|^2 &= \big\|x - y - c\big(F(\xi, x) - F(\xi, y)\big)\big\|^2\\ &= \big\langle x - y - c\big(F(\xi, x) - F(\xi, y)\big),\ x - y - c\big(F(\xi, x) - F(\xi, y)\big)\big\rangle\\ &= \|x - y\|^2 + c^2\,\big\|F(\xi, x) - F(\xi, y)\big\|^2 - 2c\,\big\langle x - y,\ F(\xi, x) - F(\xi, y)\big\rangle.\end{aligned}$$

Les deux hypothèses admises sur l'application F donnent alors deux majorations uniformes :

$$\begin{aligned}\big\|F(\xi, x) - F(\xi, y)\big\|^2 &\leqslant b^2\,\|x - y\|^2,\\ -\big\langle F(\xi, x) - F(\xi, y),\ x - y\big\rangle &\leqslant -a\,\|x - y\|^2\end{aligned}$$

que l'on peut reporter dans l'expresssion obtenue, ce qui donne la majoration cherchée :

$$\big\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\big\|^2 \leqslant \|x - y\|^2 + c^2\,b^2\,\|x - y\|^2 - 2\,a\,c\,\|x - y\|^2,$$

en tenant compte bien sûr de la symétrie du produit scalaire dans le $\mathbb{R}$-espace de Hilbert X.

(c) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in E$, l'application $G_c(\xi, \cdot)$ soit contractante.

Il est clair que pour $c > 0$ assez petit on a :

$$1 - 2ac + c^2b^2 < 1,$$

puisque $a > 0$, sachant que $c^2 \ll c$ (exercice mental). Aussi l'inégalité de la question précédente **(b)** montre le caractère contractant de l'application $x \longmapsto G_c(\xi, x)$, laquelle est uniforme en ξ, d'ailleurs.

(d) Pour tout $\xi \in E$, noter $f(\xi)$ l'unique point fixe de $G_c(\xi, \cdot)$. Montrer que l'application $f : E \to X$ ainsi définie vérifie la propriété suivante : pour tout $\xi \in E$ et tout $x \in X$, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si $x = f(\xi)$.

Pour tout ξ fixé, le *Théorème du point fixe* (ces deux termes n'ont pas exactement le même sens dans les deux cas !) assure alors qu'il existe un unique $x = x(\xi) \in X$ dépendant de ξ qui satisfait :

$$x(\xi) = G_c\big(x(\xi), x\big) \iff F\big(\xi, x(\xi)\big) = 0.$$

À tout $\xi \in E$ est donc associé d'une manière parfaitement déterminée cet unique $x = x(\xi) \in X$. Par définition même du concept d'*application* entre deux ensembles, ceci veut précisément dire qu'on a construit une *application* :

$$E \longrightarrow X$$

que l'on choisit ici de noter « f », et qui vérifie toutes les propriétés requises, comme on s'en convainc en effectuant la synthèse mentale des résultats démontrés dans cet Exercice.

Exercice 3 (Fonctions continues à coefficients de Fourier positifs). Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité. On dit qu'elle est *définie positive* si :

$$\forall\,\nu \in \mathbb{N}^*, \quad \forall\,\theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}, \quad \forall\,c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$$

$$\text{on a positivité de :} \qquad \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c}_\mu \;\geqslant\; 0.$$

Comme on s'en est rendu compte en lisant le sujet, le but de cet exercice est d'établir qu'une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ est définie positive *si et seulement si* tous ses coefficients de Fourier sont positifs. Voilà donc un théorème amusant !

(a) Montrer par le calcul que tout *monôme* trigonométrique $a_k\, e^{ik\theta}$ avec $a_k \geqslant 0$ est une fonction définie positive. En déduire qu'il en va de même pour toute somme *finie* à coefficients positifs $a_k \geqslant 0$:

$$\sum_{\substack{\text{finie} \\ k \in \mathbb{Z}}} a_k\, e^{ik\theta}.$$

Traitons d'abord le cas d'un seul monôme exponentiel $a_k\, e^{ik\theta}$ dont le coefficient a_k est $\geqslant 0$. On doit donc estimer l'expression suivante et déterminer si elle est toujours positive :

$$\begin{aligned}
a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} e^{ik(\theta_\lambda - \theta_\mu)}\, c_\lambda\, \overline{c_\mu} = \\
&= a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda}\, \overline{c_\mu\, e^{ik\theta_\mu}} \\
&= a_k \bigg(\sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda} \bigg) \overline{\bigg(\sum_{\mu=1}^{\nu} c_\mu\, e^{ik\theta_\mu} \bigg)} \\
= \underbrace{a_k}_{\geqslant 0} \underbrace{\bigg| \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda\, e^{ik\theta_\lambda} \bigg|^2}_{\text{est aussi } \geqslant 0},
\end{aligned}$$

ce qui s'avère être vrai ! Le cas d'une somme finie s'en déduit par linéarité de la condition qu'une fonction est définie positive : on somme un nombre fini de conditions sur chaque $a_k\, e^{ik\theta}$, qui sont toutes $\geqslant 0$, donc la somme est aussi $\geqslant 0$!

(b) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité dont *tous* les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) \geqslant 0$ sont positifs, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$. Rappeler et utiliser le théorème de Fejér concernant les $\sigma_n(f)(\theta) = \mathsf{F}_n * f(\theta)$ pour établir que f est définie positive en utilisant **(a)**.

Prenons et fixons un entier $\nu \in \mathbb{N}^*$, des points du cercle $\theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}$ et des constantes $c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que :

$$0 \leqslant \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c_\mu}.$$

Grâce au Théorème de Fejér, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier assez grand $n = n(\varepsilon) \gg 1$ tel que la n-ème somme de Fejér $\sigma_n(f) = \mathsf{F}_n * f$ — laquelle est un polynôme trigonométrique contenant des $e^{il\theta}$ seulement pour $|l| \leqslant n$ — satisfait la ε-proximité à f uniformément sur $\mathbb{T}$:

$$\big\| f - \sigma_n(f) \big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})} \leqslant \varepsilon.$$

Or grâce à la question **(a)** que nous venons de résoudre aisément puisque nous l'avons sûrement déjà résolue dans le Devoir 1 à la maison, nous savons pour un tel polynôme trigonométrique $\sigma_n(f)$ qu'il est défini positif, et donc on a positivité de :

$$0 \leqslant \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sigma_n(f)\big(\theta_\lambda - \theta_\mu\big)\, c_\lambda\, \overline{c_\mu}.$$

Maintenant, la différence avec la somme qui nous intéresse peut être majorée par une quantité :

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}\big(f-\sigma_n(f)\big)\big(\theta_\lambda-\theta_\mu\big)\,c_\lambda\,\overline{c_\mu}\right| &\leqslant\ \varepsilon\sum_{\lambda=1}^{\nu}\sum_{\mu=1}^{\nu}c_\lambda\,\overline{c_\mu}\\ &=\varepsilon\,\underbrace{\big|c_1+\cdots+c_\nu\big|^2}_{=\,\text{constante}}\end{aligned}$$

qui tend vers 0 avec $\varepsilon\to 0^+$. Par conséquent (exercice mental), la positivité de la somme double portant sur $\sigma_n(f)$ implique la positivité (désirée) de la somme double portant sur f.

(c) Soient deux fonctions continues $f,g\in\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. On introduit la fonction :

$$F(\theta):=\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\theta')\,g(\theta')\,\frac{d\theta'}{2\pi}.$$

Montrer que ses coefficients de Fourier $\widehat{F}(k)$ sont égaux aux produits $\widehat{f}(k)\,\widehat{g}(k)$.

Par définition, le k-ème coefficient en question vaut l'intégrale :

$$\widehat{F}(k):=\int_{-\pi}^{\pi}F(\theta)\,e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\theta')\,g(\theta')\,e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Écrivons artificiellement (et astucieusement !) l'exponentielle sous la forme $e^{-ik\theta}=e^{-ik\theta'}\,e^{-ik(\theta-\theta')}$ et effectuons le changement de variable $\eta:=\theta-\theta'$ qui induit $d\eta=d\theta$ dans l'intégrale double (permutable puisque le Théorème de Fubini s'applique sans problème aux fonctions continues) :

$$\widehat{F}(k)=\int_{-\pi}^{\pi}g(\theta')\,e^{-ik\theta'}\,\frac{d\theta'}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\theta')\,e^{-ik(\theta-\theta')}\,\frac{d\theta}{2\pi}=\widehat{g}(k)\,\widehat{f}(k).$$

(d) Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$ définie positive. Pour toute fonction $h\in\mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, montrer en la ramenant à une somme double l'inégalité :

$$0\ \leqslant\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta-\theta')\,h(\theta)\,\overline{h(\theta')}\,\frac{d\theta}{2\pi}\,\frac{d\theta'}{2\pi}.$$

L'étudiant fin-comme-le-renard aura bien entendu réalisé que cette intégrale double (continue) manifeste des similarités troublantes avec les sommes doubles (discrètes) de l'hypothèse de définie positivité ! Il aura ensuite été guidé par son précieux flair pour se rappeler, par réminiscence (platonicienne), que les intégrales de Riemann (largement suffisantes pour les fonctions continues !) se calculent comme limites de sommes de Riemann *finies et discrètes*.
Subdivisons donc l'intervalle produit $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$ en $\nu\times\nu$ petits intervalles tous de même longueur $\frac{2\pi}{\nu}$ en les points (équidistribués) de coordonnées :

$$\theta_\lambda:=-\pi+\frac{\lambda-1}{\nu}\,2\pi\qquad{\scriptstyle(\lambda\,=\,1\,\cdots\,\nu)}\qquad\text{et}\qquad\theta_\mu:=-\pi+\frac{\mu-1}{\nu}\,2\pi\qquad{\scriptstyle(\mu\,=\,1\,\cdots\,\nu)}$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $\nu = \nu(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que l'intégrale double soit ε-approximable par la somme double de Riemann correspondante :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, h(\theta)\, \overline{h(\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi} - \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f(\theta_\lambda - \theta_\mu)\, \underbrace{h(\theta_\lambda)}_{=: c_\lambda}\, \underbrace{\overline{h(\theta_\mu)}}_{=: \overline{c_\mu}}\, \frac{2\pi}{\nu}\, \frac{2\pi}{\nu}}_{\text{quantité toujours} \geqslant 0 \text{ par hypothèse !}} \right| \leqslant \varepsilon.$$

Ceci implique (exercice mental) que l'intégrale double à gauche est nécessairement $\geqslant 0$.

(e) En déduire que si f est définie positive, tous ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) \geqslant 0$ sont positifs, $\forall\, k \in \mathbb{Z}$.

La question qui précède nous a convaincu que pour *toute* fonction continue $h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$, on a l'inégalité :

$$0 \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, h(\theta)\, \overline{h(\theta')}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi},$$

et on aimerait bien pouvoir se ramener à la question **(c)** :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, g(\theta')\, e^{-ik\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}\, \frac{d\theta'}{2\pi} = \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k).$$

Le problème quand on compare ces deux intégrales doubles, c'est que la fonction $h(\theta')$ apparaît conjuguée dans la première, tandis que dans la seconde, la fonction $g(\theta')$ n'apparaît pas conjuguée ! Qu'à cela ne tienne, on n'a qu'à déclarer que :

$$h(\theta) := e^{-ik\theta} \qquad \text{et que :} \qquad g(\theta') := \overline{h(\theta')} = e^{ik\theta'}.$$

Et cette fois-ci — c'est merveilleux ! —, tout s'enclenche bien : les deux intégrales doubles coïncident, on a $\widehat{g}(k) = 1$ — qui est positif ! — et donc au final :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \text{première intégrale double} &= \text{deuxième intégrale double} \\ &= \widehat{f}(k)\, \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{f}(k), \end{aligned}$$

et cela, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut élégamment (on l'espère...) la démonstration.

Exercice 4 (Noyau approximant et Théorème de Weierstrass sur le cercle). Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, rappelons qu'un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire finie des $\left(e^{ik\theta}\right)_{k\in\mathbb{Z}}$. Pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$, on introduit le noyau :

$$\mathsf{C}_n(\theta) := c_n \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right)^n,$$

où $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ est une certaine constante.

(a) Vérifier que la fonction 2π-périodique C_n est $\geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et montrer que l'on peut choisir la constante $c_n > 0$ — sans la calculer ! — de telle sorte que :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{C}_n(\theta)\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Puisque $\cos\theta$ est > -1 sur $]-\pi, \pi[$, l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction paire continue $\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n$ strictement positive excepté aux bornes de l'intervalle est > 0, et on n'a alors pas d'autre choix que de prendre :

$$c_n := \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{2\pi}}.$$

(b) Montrer que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \big\| \mathsf{C}_n \big\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi])},$$

pour tout $\delta \in]0, \pi]$. Indication : on cherche à raisonner *sans avoir à calculer les constantes* c_n. On pourra d'abord vérifier et utiliser le fait que :

$$1 = c_n\, 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{2\pi} \geqslant c_n\, 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \sin\theta\, \frac{d\theta}{2\pi},$$

pour en déduire que $c_n \leqslant \frac{\pi}{2}(n+1)$, puis on pourra établir que :

$$\big\| \mathsf{C}_n \big\|_{\mathscr{C}^0([\delta,\pi])} \leqslant \frac{\pi}{2}\,(n+1) \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n.$$

Une astuce indiquée dans l'énoncé du sujet consiste à commencer par *minorer* l'intégrale (paire) de C_n par l'intégrale de la même fonction multipliée par la fonction positive $\sin\theta \leqslant 1$ de façon à faire apparaître une intégrande dont la primitive se voit aisément :

$$\begin{aligned} 1 = \frac{2\, c_n}{2\, \pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n d\theta \geqslant \frac{c_n}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \sin\theta\, d\theta \\ = \frac{c_n}{\pi} \left[- \frac{2}{n+1} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{n+1} \right]_0^{\pi} \\ = \frac{c_n}{\pi}\, \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne une *majoration* des constantes qu'on n'a pas eu le courage de calculer :

$$\boxed{c_n \leqslant \frac{\pi}{2}\,(n+1).}$$

Ensuite, puisque $\mathsf{C}_n(\theta)$ décroît sur $[0,\pi]$ (exercice mental), on a pour tout $\theta \in [\delta,\pi]$:

$$\begin{aligned}\mathsf{C}_n(\theta) \leqslant \mathsf{C}_n(\delta) &= c_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \\ &\leqslant \underbrace{\frac{\pi}{2}\,(n+1)\,\Big(\underbrace{\frac{1+\cos\delta}{2}}_{<1}\Big)^n}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\,0},\end{aligned}$$

ce qui établit la convergence uniforme vers 0 de C_n sur $[\delta,\pi]$, puis aussi sur $[-\delta,-\pi]$ par parité.

(c) Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. On pose :

$$\kappa_n(f)(\theta) := \int_{\pi}^{\pi} f(\theta-t)\,\mathsf{C}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = f * \mathsf{C}_n(\theta).$$

Montrer que les $\kappa_n(f)(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser (sans redémontrer) la formule du multinôme :

$$\left(\frac{2+e^{i(\theta-t)}+e^{-i(\theta-t)}}{4}\right)^n = \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{k+l\leqslant n\\ k\geqslant 0,\ l\geqslant 0}} \frac{n!\,2^{n-k-l}}{(n-k-l)!\,k!\,l!}\, e^{i(k-l)(\theta-t)}.$$

Par commutativité du produit de convolution :

$$\begin{aligned}\kappa_n(f)(\theta) &= \mathsf{C}_n * f(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{C}_n(\theta-t)\,f(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\ &= c_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2+e^{i(\theta-t)}+e^{-i(\theta-t)}}{4}\right)^n f(t)\,\frac{dt}{2\pi}.\end{aligned}$$

Ensuite, l'application suggérée de la formule du multinôme conclut :

$$\text{la même chose} = \frac{c_n}{4^n} \underbrace{\sum_{k+l\leqslant n} \frac{n!\ 2^{n-k-l}}{(n-k-l)!\,k!\,l!}\, e^{i(k-l)\,\theta}}_{\text{somme finie de } e^{ih\theta}} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)\,t}\, f(t)\,\frac{dt}{2\pi}}_{\text{constante}\,=\,\widehat{f}(k-l)}.$$

(d) Soit $\delta > 0$ petit, notamment $\ll \pi$. Montrer que :

$$\big|\kappa_n(f)(\theta)-f(\theta)\big| \leqslant \int_{|t|\leqslant\delta} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\mathsf{C}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big|\,\mathsf{C}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

À partir de maintenant, les raisonnements sont exactement les mêmes que dans le cours polycopié lorsqu'on montrait le même théorème avec les noyaux de Fejér F_n au lieu de ces noyaux C_n. L'inégalité en vue provient de l'insertion de $f(\theta)$

à l'intérieur de l'intégrale — grâce au fait que la masse des noyaux positifs C_n vaut toujours 1 — :

$$\begin{aligned}\kappa_n(f)(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(\theta-t)-f(\theta)\big)\,\mathsf{C}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t|\leqslant\delta} \text{même} + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \text{même} \\ &\leqslant \int_{|t|\leqslant\delta} \big|\text{même}\big| + \int_{\delta\leqslant|t|\leqslant\pi} \big|\text{même}\big|,\end{aligned}$$

puis d'une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[-\delta,\delta]$ et en $[\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$, suivie enfin d'une simple inégalité triangulaire.

(e) En déduire :

$$\big|\kappa_n(f)(\theta)-f(\theta)\big| \leqslant \max_{\substack{\theta\in\mathbb{R}\\|t|\leqslant\delta}} \big|f(\theta-t)-f(\theta)\big| + 2\,\|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}\,\big\|\mathsf{C}_n\big\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi])}.$$

En fait, la déduction procède comme dans le cours.

(f) En utilisant ce qui précède, établir que :

$$0=\lim_{n\to\infty}\big\|f-\kappa_n(f)\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{T})}.$$

Soit $\varepsilon>0$. Rappelons que le raisonnement consiste à prendre d'abord δ assez petit pour que le premier terme soit $\leqslant\varepsilon$ grâce à l'uniforme continuité de f sur le compact $\mathbb{T}$, puis à prendre $n\geqslant N(\varepsilon)\gg 1$ assez grand pour que le second terme soit lui aussi $\leqslant\varepsilon$, ce qui est possible une fois que δ est fixé grâce à la question **(b)**.

11. Examen du Mercredi 15 mai 2013

Exercice 1 [Fonction égale à sa transformée de Fourier]. On se propose de calculer la transformée de Fourier de la fonction définie sur $\mathbb{R}$:

$$f(x) := \frac{1}{\cosh(\pi x)} = \frac{2}{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}.$$

(a) Vérifier que $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) Pour $R > 0$, on note $\square_R$ le rectangle de $\mathbb{C}$, orienté dans le sens trigonométrique, ayant les quatre sommets $-R$, R, $R+i$, $-R+i$. Vérifier que le résidu en $z = \frac{i}{2}$ de la fonction complexifiée $f(z) := \frac{1}{\cosh(\pi z)}$ vaut $\frac{1}{i\,\pi}$, et montrer qu'elle n'a pas d'autre pôle dans l'adhérence de $\square_R$.

(c) Appliquer, après l'avoir énoncé précisément, le théorème des résidus pour calculer :

$$\int_{\square_R} \frac{e^{-2i\pi z\xi}}{\cosh(\pi z)}\, dz.$$

(d) Montrer que :

$$\frac{1}{2i\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{\cosh(\pi x)}\, dx - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2i\pi(x+i)\xi}}{\cosh\big(\pi(x+i)\big)}\, dx\right] = \frac{e^{\pi\xi}}{i\pi}.$$

(e) En déduire :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\cosh(\pi\xi)}.$$

Exercice 2 [Théorème ergodique trigonométrique]. On fixe un réel $-\pi < \alpha < \pi$ qui est *multiple irrationel* de π et on pose, pour $j \in \mathbb{N}$, $\alpha_j := -\pi + j(\alpha + \pi)$. Étant donné une fonction 2π-périodique β-höldérienne $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ avec $\frac{1}{2} < \beta \leqslant 1$, on se propose de démontrer la coïncidence (égalité) entre sa *moyenne spatiale* $\mathsf{M_s}(u)$ et sa *moyenne temporelle* $\mathsf{M_t}(u)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} =: \mathsf{M_s}(u) \overset{\text{coïncidence}}{=} \mathsf{M_t}(u) := \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} u(\alpha_j).$$

(a) En utilisant la formule élémentaire $1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$, $a \neq 1$, montrer tout d'abord que l'on a bien $\mathsf{M_t}(u) = \mathsf{M_s}(u)$ lorsque u est l'une des exponentielles-modèle $\theta \mapsto e^{ik\theta}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Justifier, grâce à un théorème du cours dont l'énoncé sera rappelé avec soin, la formule :

$$u(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(k)\, e^{ik\theta} \qquad \Big[\, \widehat{u}(k) = \textstyle\int_{-\pi}^{\pi} u(t)\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi}\Big],$$

en précisant le mode de convergence.

(c) En insérant cette représentation, en simplifiant $\widehat{u}(0)$, et en découpant $\sum_{k\in\mathbb{Z}}$, estimer alors :

$$\left|\frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} u(\alpha_j) - \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}\right|,$$

pour montrer que $\mathsf{M_s}(u) = \mathsf{M_t}(u)$.

Exercice 3 [Théorème de Plancherel et signaux à spectre borné]. La *transformée de Fourier* d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction $\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$. On rappelle que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est contenu dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(a) Soit une fonction quelconque $u \in L^2(\mathbb{R})$, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge, au sens de la norme L^2, vers u. À l'aide du Théorème de Plancherel pour $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ — dont on rappellera l'énoncé —, montrer que la suite $(\widehat{u}_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers une certaine fonction dans $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette fonction-limite dépend seulement de u, *i.e.* elle ne dépend pas du choix de la suite approximante $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On la note alors $\mathscr{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\|\mathscr{F}(u)\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, puis vérifier que l'application $u \mapsto \mathscr{F}(u)$, dite *transformée de Fourier dans* L^2, est $\mathbb{C}$-linéaire.

(d) On pose maintenant $\mathbb{I} := [-1/2, 1/2]$ et on définit le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des *signaux à spectre borné* :

$$BL^2(\mathbb{R}) := \Big\{u \in L^2(\mathbb{R})\colon\ \mathscr{F}(u)(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{I}\Big\}.$$

Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartient à $BL^2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathscr{F}(u) \in L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier soigneusement que l'on peut écrire $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(u)(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) En déduire qu'après correction éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, une fonction $u \in BL^2(\mathbb{R})$ est toujours $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 4 [Espace de Wiener]. Étant donné la transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$ définie par une formule intégrale sur $L^1(\mathbb{R})$, on considère l'*espace de Wiener* :

$$\mathscr{W} := L^1(\mathbb{R}) \cap \widehat{L^1(\mathbb{R})}.$$

(a) Pour $f \in \mathscr{W}$, montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, puis, en écrivant $|f(x)|^{\mathsf{p}} = |f(x)|^{\mathsf{p}-1}\,|f(x)|$, que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout $1 < \mathsf{p} < \infty$.

(b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathscr{W}$ *si et seulement si* $\widehat{f} \in \mathscr{W}$. On utilisera, après en avoir soigneusement justifié la validité, la formule $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi$.

(c) Montrer que pour $f, g \in \mathscr{W}$, on a aussi $f * g \in \mathscr{W}$ et $f\,g \in \mathscr{W}$.

(d) Vérifier que la quantité $\|f\|_{\mathscr{W}} := \|f\|_{L^1} + \big\|\widehat{f}\big\|_{L^1}$ définit une norme sur $\mathscr{W}$.

(e) Soit maitenant $\big(f_n\big)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}}\big)$.

(e-1) Justifier qu'il existe deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \left\| f_n - f \right\|_{L^1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \left\| \widehat{f_n} - g \right\|_{L^1} = 0$$

(e-2) Montrer que $\widehat{f} = g$ (presque partout).

(e-3) Montrer que la suite $\big(f_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathscr{W}$ et qu'ainsi, $\mathscr{W}$ est *complet*.

12. Devoir-maison à rendre pour le Mardi 12 mars 2013

Exercice 1. [Polynômes de Legendre] Soit $L^2\big([-1,1],\mathbb{C}\big)$ l'espace des fonctions mesurables sur $[-1,1]$ dont le module au carré est d'intégrale $< \infty$, que l'on munit du produit scalaire usuel. On appelle *polynôme de Legendre* de degré $n \geqslant 0$ le polynôme :

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\big[(x^2-1)^n\big].$$

(a) Pour deux entiers $m > n \geqslant 0$, intégrer n fois par partie l'intégrale :

$$\int_{-1}^{1} \frac{d^m}{dx^m}\big[(x^2-1)^m\big]\,\frac{d^n}{dx^n}\big[(x^2-1)^n\big]\,dx,$$

en prenant itérativement la primitive du premier facteur et en déduire que L_m est orthogonal à L_n.

(b) Par la même méthode, calculer $\|L_n\|^2_{L^2[-1,1]}$.

(c) En déduire qu'il existe une constante strictement positive $c_n > 0$ — que l'on précisera ! — telle que $\big(c_n\,L_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système *orthonormal* de $L^2\big([-1,1],\mathbb{C}\big)$.

Exercice 2. [Déterminants de Gram] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{C}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel préhilbertien, *i.e.* muni d'un produit scalaire $\langle \cdot,\cdot\rangle$ mais qui n'est pas nécessairement complet (dans le cas où E est de dimension infinie !). Soient $e_1,\dots,e_n$ des vecteurs de E. On appelle *matrice de Gram* de $e_1,\dots,e_n$ la matrice :

$$\mathsf{Gram}\big(e_1,\dots,e_n\big) := \Big(\langle e_i,\, e_j\rangle\Big)_{1\leqslant i\leqslant n}^{1\leqslant j\leqslant n},$$

l'indice i numérotant ici les lignes. Son déterminant :

$$\det \mathsf{Gram}\big(e_1,\dots,e_n\big) = \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle \end{vmatrix}$$

est naturellement appelé *déterminant de Gram* de $e_1,\dots,e_n$.

(a) Vérifier que cette matrice est *symétrique* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou *hermitienne* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, à savoir par définition égale à la conjuguée de sa transposée.

(b) Dans le cas de $n = 2$ vecteurs, que peut-on dire de $\mathsf{Gram}(e_1,e_2)$? Quel théorème fondamental le Sherlock Holmes en vous reconnaît-il ici sans aucune aide de son cher Watson ? Et qu'êtes-vous tenté alors de conjecturer pour tout $n \geqslant 2$?

(c) Soit maintenant $X = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{K}^n$ un vecteur-ligne quelconque et soit :

$$\big(\mathsf{Gram}(e)\cdot X\big)_i$$

la i-ème composante du vecteur-colonne $\mathsf{Gram}(e)\cdot X$. Montrer par le calcul que l'on a :

$$\langle X,\, \mathsf{Gram}(e)\cdot X\rangle = \bigg\| \sum_{i=1}^n \overline{x}_i\, e_i \bigg\|^2.$$

(d) Montrer que la matrice $\mathsf{Gram}(e_1,\dots,e_n)$ est toujours positive, et qu'elle est *définie* positive lorsque et seulement lorsque $e_1,\dots,e_n$ sont $\mathbb{K}$-linéairement indépendants.

(e) Le but principal de cet exercice est de montrer que si $F\subset E$ est un K-sous-espace vectoriel de dimension finie $n\geqslant 1$ muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$ qui n'est pas nécessairement orthogonale, alors pour tout $x\in E$, la distance au carré de x à F est donnée comme le quotient suivant de déterminants de Gram :

$$\big[\mathsf{dist}(x,F)\big]^2 = \frac{\mathsf{det\,Gram}(e_1,\dots,e_n,x)}{\mathsf{det\,Gram}(e_1,\dots,e_n)}.$$

Cette formule vient donc complémenter le cours « magistral », dans lequel on a systématiquement supposé que les vecteurs étaient orthogonaux entre eux afin de simplifier grandement les formules. Commencer alors par justifier l'existence d'un unique vecteur $\pi_F(x)\in F$ qui réalise la distance de x à F :

$$\begin{aligned}\mathsf{dist}\big(x,F\big) &\overset{\mathsf{def}}{=} \inf_{y\in F}\|x-y\| \\ &= \big\|x-\pi_F(x)\big\|.\end{aligned}$$

(f) Montrer par le calcul que :

$$\begin{aligned}\mathsf{det\,Gram}\big(e_1,\dots,e_n,x\big) &= \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & \overline{\langle \pi_F(x),e_1\rangle} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & \overline{\langle \pi_F(x),e_n\rangle} \\ \langle \pi_F(x),e_1\rangle & \cdots & \langle \pi_F(x),e_n\rangle & \big\|\pi_F(x)\big\|^2 \end{vmatrix} + \\ &\quad + \begin{vmatrix} \langle e_1,e_1\rangle & \cdots & \langle e_1,e_n\rangle & 0 \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \langle e_n,e_1\rangle & \cdots & \langle e_n,e_n\rangle & 0 \\ \langle \pi_F(x),e_1\rangle & \cdots & \langle \pi_F(x),e_n\rangle & \big\|x-\pi_F(x)\big\|^2 \end{vmatrix},\end{aligned}$$

et conclure.

Exercice 3. [Théorème de Müntz-Szász] On considère ici comme connu le théorème de Weierstrass d'après lequel la suite des monômes standard $\big(x^n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ est totale dans $\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0}$ de la borne supérieure. Puisque l'on a (exercice de révision) :

$$\|f\|_{L^2}\leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^0},$$

pour toute $f\in L^2\big([0,1]\big)$, la totalité de cette suite est instantanément *héritée* par L^2.

Étant alors donnée une suite $\big(\alpha_n\big)_{n\geqslant 1}$ de nombres strictement positifs $\alpha_n\in\mathbb{R}_+^*$ qui est strictement croissante : $\alpha_n<\alpha_{n+1}$, on considère la famille, indexée par $n\in\mathbb{N}^*$, des fonctions-monômes :

$$[0,1]\ni x\longmapsto x^{\alpha_n}\in\mathbb{R},$$

qui appartienent tous au sous-espace vectoriel dense :

$$\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big) \ \subset \ L^2\big([0,1],\mathbb{R}\big)$$

des fonctions continues sur le segment $[0,1]$ dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[0,1]$ muni de la norme standard $\int_0^1 f(x)^2\,dx$ notée $\|f\|_{L^2}$, et on se demande : *quand donc une telle suite est-elle (aussi) totale dans $L^2\big([0,1]\big)$?*

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'espace vectoriel :

$$E_N := \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}}\big(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_N}\big).$$

(a) Soit maintenant une fonction-monôme x^m avec $m \in \mathbb{R}_+$ quelconque. Montrer que :

$$\inf_{f\in E_N} \big\|x^m - f\big\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \left|\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}\right|.$$

Indication : En appliquant le résultat de l'exercice précédent, on se ramènera à deux déterminants de Gram que l'on calculera par des techniques d'algèbres linéaire ; notamment, on démontrera, en commençant au besoin par examiner les petites valeurs $N = 1, 2, 3$, que :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_1+m+1} \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ \frac{1}{\alpha_N+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_N+\alpha_N+1} & \frac{1}{\alpha_N+m+1} \\ \frac{1}{m+\alpha_1+1} & \cdots & \frac{1}{m+\alpha_N+1} & \frac{1}{m+m+1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1\leqslant i<j\leqslant N}\,\big(\alpha_i-\alpha_j\big)^2\,\prod_{1\leqslant i\leqslant N}\,\big(\alpha_i-m\big)^2}{(2m+1)\,\prod_{1\leqslant i,j\leqslant N}\,\big(\alpha_i+\alpha_j+1\big)\,\prod_{1\leqslant i\leqslant N}\,\big(\alpha_i+m+1\big)^2}.$$

(b) Montrer que la famille des fonctions-monômes $\big(x^{\alpha_n}\big)_{n\geqslant 1}$ est totale dans l'espace $\mathscr{C}^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ *si et seulement si* — joli Théorème dû à Müntz et à Szász — la série suivante diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$$

Indications : Premièrement, dans la circonstance spéciale (la moins significative) où la suite $\big(\alpha_n\big)_{n\geqslant 1}$ est majorée :

$$\sup_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n =: A < +\infty,$$

de telle sorte que l'on a automatiquement $\sum_n \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$, montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\lim_{N\to\infty} \prod_{i=1}^N \left|\frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1}\right| = 0.$$

Deuxièmement, dans la circonstance (plus fréquente et plus naturelle) où $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$, montrer tout d'abord que l'on a aussi pour toute constante positive :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha_n + \mathsf{constante}} = \infty.$$

Ensuite, pour tout $m \in \mathbb{R}^+$ fixé quelconque, choisir un entier $N_1 \gg 1$ assez grand pour que $\alpha_i > m$ pour tout $i \geqslant N_1$, prendre $N_2 \geqslant N_1$ arbitraire, et montrer que :

$$\left(\lim_{N_2\to\infty} \prod_{N_1\leqslant i\leqslant N_2} \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i+m+1} = 0\right) \iff \left(\lim_{N_2\to\infty} \sum_{i=N_1}^{N_2} \frac{1}{\alpha_i+m+1} = \infty\right)$$

(On pourra prendre le logarithme de ce produit et utiliser la majoration $\log(1-x) < -x$ valable pour tout $0 < x < 1$.) Pour conclure, effectuer une synthèse lumineuse qui répond de manière rigoureuse et complète à la question **(b)**, en remplissant tous les raisonnements qui n'ont pas été explicitement indiqués.

Exercice 4. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π-périodique (continue) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

Exercice 5. On considère la série de fonctions :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On note $S(\theta)$ sa somme.

(b) Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et 2π-périodique.

(c) En développant $\sin^3(n\theta)$, exprimer $S(\theta)$ en fonction de (justifier aussi l'existence) :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

(d) Montrer que $S(\theta)$ est développable en série de Fourier et trouver son développement.

(e) En considérant aussi :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

calculer explicitement $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$.

(f) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a la formule explicite :

$$S(\theta) = \tfrac{3}{4} \sin\big(\sin\theta\big)\, e^{\cos\theta} - \tfrac{1}{4} \sin\big(\sin 3\theta\big)\, e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n-ème somme de Fejér est continue sur le cercle et qu'elle satisfait :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{\mathscr{C}^0}.$$

Exercice 7. Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$, où $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On dit que f est *définie positive* si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout $(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{T}^n$, et tout $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{C}^n$, on a :

$$\sum_{j,k=1}^{n} f(\,\theta_j - \theta_k)\, c_j\, \overline{c_k} \geqslant 0.$$

(a) Soit $m \in \mathbb{N}$ et soit :

$$\phi(\theta) = \sum_{n=-m}^{m} a_n e^{in\theta}, \qquad \text{avec tous les} \quad a_n \geqslant 0.$$

Montrer que ϕ est définie positive.

(b) Soit $f \in C^0(\mathbb{T})$ avec $\widehat{f}(n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Déduire de **(a)** que f est définie positive.

(c) Soit $f, g \in C^0(\mathbb{T})$. On introduit la fonction

$$F(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta' - \theta)\, g(\theta')\, d\theta'.$$

Calculer les coefficients de Fourier $\widehat{F}(n)$ en fonction des coefficients $\widehat{f}(n)$ et $\widehat{g}(n)$.

(d) Soit f définie positive. Pour toute fonction $g \in C^0(\mathbb{T})$, montrer que l'on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta')\, g(\theta)\, \overline{g(\theta')}\, d\theta\, d\theta' \geqslant 0.$$

(e) Soit f définie positive. Déduire de **(d)** que $\widehat{f}(n) \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

13. Devoir-maison à rendre pour le Mercredi 15 mai 2013

Exercice 1. [Examen 2011] Soit $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j\geqslant 1}$ une suite régularisante lisse à support compact, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geqslant 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x)\,dx = 1$ et $\operatorname{supp}\rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leqslant 1$ satisfaisant $\lim_{j\to+\infty} \varepsilon_j = 0$.

(a) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(b) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leqslant a$ et pour tout entier $j \geqslant 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)(x) = 0.$$

(c) Montrer que :

$$\big\|\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f - \rho_j * \big(\mathbf{1}_{[-b,b]}\, f\big)\big\|_{L^1} \geqslant \int_{-a}^{+a} |f(x)|\,dx.$$

(d) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. On se propose ici d'établir une version économique de la formule d'inversion de Fourier.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à support compact contenu dans l'intervalle $[-M, M]$, avec $M > 0$, et dont la transformée de Fourier $\widehat{F}$ est à croissance modérée, *i.e.* satisfait $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathrm{constante}\big/(1+\xi^2)$.

(a) Pour L fixé avec $L/2 > M$, en associant à f une fonction L-périodique, en posant $\delta := \frac{1}{L}$, en introduisant les quantités $\widehat{f}(k\delta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, e^{-ik\delta\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}$ pour $k \in \mathbb{Z}$, montrer que l'on a :

$$f(x) = \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\big(k\delta\big)\, e^{2i\pi k\delta x} \qquad \left(|x| \leqslant \tfrac{L}{2}\right).$$

(b) Montrer que si une fonction g est continue et à croissance modérée, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,d\xi = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\big(k\delta\big).$$

(c) Conclure que l'on a bien la formule d'inversion de Fourier dans cette circonstance :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\,d\xi.$$

Exercice 3. Cet exercice illustre le principe d'après lequel la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini est reliée à la régularité de f.

(a) Soit f une fonction à croissance modérée : $|f(x)| \leqslant A\big/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ avec $A>0$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continue et satisfait :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{O}\Big(\tfrac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\Big), \qquad \text{lorsque } |\xi| \longrightarrow \infty,$$

pour un certain réel $0<\alpha<1$. En admettant que la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

est alors satisfaite, montrer que f est $\mathscr{C}^\alpha$-höldérienne, à savoir qu'elle satisfait une estimée uniforme du type :

$$\big|f(x+h)-f(x)\big| \leqslant M\,|h|^\alpha \qquad {\scriptstyle (x,\,h\,\in\,\mathbb{R})},$$

avec une constante $M>0$.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $|x|\geqslant 1$, satisfait $f(0)=0$, et est égale à :

$$\frac{1}{\log(1/|x|)}$$

dans un petit intervalle $[-\delta_0,\delta_0]$ avec $\delta_0>0$. Vérifier que f est à croissance modérée, mais que f ne l'est pas, et plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de réel $\varepsilon>0$ tel que :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathrm{O}\Big(\tfrac{1}{|\xi|^{1+\varepsilon}}\Big), \qquad \text{lorsque } |\xi| \longrightarrow \infty.$$

Exercice 4. **(a)** En dimension $d=1$, soit $f\in L^1(\mathbb{R})\cap\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\xi\in\mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f'}(\xi) = i\,\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

Si $f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ avec $k\geqslant 1$, en déduire que pour tout entier positif $\ell\leqslant k$, on a :

$$\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (i\xi)^\ell\,\widehat{f}(\xi).$$

(b) En dimension $d\geqslant 1$, quelconque, si $f\in\mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout multiindice $(\ell_1,\dots,\ell_d)\in\mathbb{N}^d$ avec $\ell_1+\cdots+\ell_d\leqslant k$, on a :

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^{\ell_1+\cdots+\ell_d}}{\partial x_1^{\ell_1}\cdots\partial x_d^{\ell_d}}f\right)(\xi_1,\dots,\xi_d) = i^{\ell_1+\cdots+\ell_d}\,\xi_1^{\ell_1}\cdots\xi_d^{\ell_d}\,\mathscr{F}(f)(\xi_1,\dots,\xi_d).$$

(c) En dimension $d=1$, soit $f\in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction produit $x\mapsto xf(x)$ appartienne encore à $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f}$ admet une dérivée $\widehat{f}'$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par la formule :

$$\widehat{f}'(\xi) = -\,i\,\widehat{xf}(\xi).$$

(d) En dimension $d\geqslant 1$ quelconque, si, pour un entier $k\geqslant 1$, toutes les fonctions produits f, $x_{l_1}f$, $x_{l_1}x_{l_2}f$, ..., $x_{l_1}x_{l_2}\cdots x_{l_k}f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ pour tous indices $1\leqslant l_1,l_2,\dots,l_k\leqslant d$, montrer que l'on a pour tout entier $\ell\leqslant k$:

$$\frac{\partial^\ell\big(\mathscr{F}(f)\big)}{\partial\xi_{l_1}\cdots\partial\xi_{l_\ell}}(\xi) = (-i)^\ell\,\mathscr{F}\big(x_{l_1}\cdots x_{l_\ell}\,f\big)(\xi).$$

Exercice 5. On admet ici un théorème démontré en cours, dit *Formule d'inversion* : *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\widehat{\widehat{f}} = (2\pi)^d \, f_\sigma$$

en presque tout point $x \in \mathbb{R}^d$. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et soit une autre fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(a) Vérifier que $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

(b) Montrer que $fg \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

(c) Montrer que l'on a :

$$\widehat{f\,g} = \frac{1}{(2\pi)^d} \, \widehat{f} * \widehat{g}.$$

Exercice 6. **(a)** Montrer que la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < +\infty$ n'appartient *pas* à $L^1(\mathbb{R})$.

Ainsi $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'entraîne pas $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, donc la transformée seconde $\widehat{\widehat{f}}$ ne peut *pas* en général être calculé.

Le but ici est d'énoncer une condition spécifique sur f, dite « de Dini », qui assurera que l'on puisse néanmoins inverser la transformée de Fourier en écrivant :

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \, e^{ix\xi} \, d\xi,$$

cette intégrale impropre étant définie comme valeur principale au sens de Cauchy :

$$\lim_{R \to +\infty} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi) \, e^{ix\xi} \, d\xi.$$

(b) Avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose donc pour $R > 0$:

$$S_R(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi) \, e^{ix\xi} \, d\xi.$$

En admettant que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(Rt)}{t} \, dt = \frac{\pi}{2}$, montrer que l'on a :

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2} \right] \frac{\sin(Rt)}{t} \, dt.$$

(c) On pose donc :

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2},$$

et on suppose (Dini) qu'il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)|}{t} \, dt < +\infty.$$

Montrer que alors sous cette hypothèse que l'on a effectivement la conclusion désirée :

$$f(x) = \lim_{R \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^{+R} \widehat{f}(\xi) \, e^{ix\xi} \, d\xi.$$

(d) Vérifier que cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R})$, à savoir lorsque f satisfait de plus une condition de type Hölder : il existe un certain nombre réel $0 < \alpha < 1$ et une constante K tels que l'on ait :

$$\big|f(x'') - f(x')\big| \leqslant K\,\big|x'' - x'\big|^\alpha,$$

pour tous $x', x'' \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,dy = 1$. On pose :

$$\mathsf{c}_- := \int_{-\infty}^0 g(y)\,dy,$$
$$\mathsf{c}_+ := \int_0^{+\infty} g(y)\,dy.$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}\, g\big(\frac{x}{\varepsilon}\big)$.

(a) Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur $\mathbb{R}$, montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * g_\varepsilon(x) = \mathsf{c}_-\, f(x+0) + \mathsf{c}_+\, f(x-0).$$

(b) Si de plus f ne présente pas de points de discontinuité sur un intervalle fermé donné, montrer que la convergence est uniforme sur cet intervalle.

(c) Que se passe-t-il si l'intervalle en question contient un point de discontinuité de f ?

Exercice 8. **(a)** Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\cosh \pi x}.$$

(b) Calculer la transformée de Fourier de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \frac{e^{-i\pi x^2}}{\cosh \pi x}.$$

(c) Établir deux formules dues à Ramanujan :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\cosh \pi x} \cos \pi x^2\,dx = \frac{1 + \sqrt{2}\sin \pi t^2}{2\sqrt{2}\cosh \pi t},$$
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2\pi t x}{\cosh \pi x} \sin \pi x^2\,dx = \frac{-1 + \sqrt{2}\cos \pi t^2}{2\sqrt{2}\cosh \pi t}.$$

Exercice 9. **(1)** Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geqslant 0$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(y)\,dy = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon}\,\psi\big(\frac{y}{\varepsilon}\big)$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on a en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} f * \psi_\varepsilon(x) = f(x).$$

(2) Si f est de plus uniformément continue sur $\mathbb{R}$, montrer que la convergence est uniforme.

(3) On suppose à présent que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$.

(a) Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de e^{-ax^2}, où $a > 0$ est une constante réelle, et écrire en quelques mots comment s'est effectuée la démonstration en cours.

(b) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi(x-y)}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi.$$

(c) Montrer que (justifier d'abord l'existence de l'intégrale) :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi = f * \varphi_\varepsilon(x),$$

où l'on a posé : $\varphi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}$.

(d) En déduire la formule de type « inversion », valable pour toute $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{ix\xi}\, e^{-\frac{\varepsilon^2\xi^2}{2}}\, d\xi.$$

Exercice 10. (Examen 2011) L'objectif est de produire des exemples de séries trigonométriques qui ne sont série de Fourier d'aucune fonction intégrable (au sens de Lebesgue) sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. On rappelle l'expression : $\mathsf{D}_n(\theta) := \sum_{k=-n}^{k=+n} e^{ik\theta}$ du noyau de Dirichlet, et celle : $\mathsf{F}_n(\theta) := \frac{1}{n}\big[\mathsf{D}_0(\theta) + \cdots + \mathsf{D}_{n-1}(\theta)\big]$ du noyau de Fejér, somme de Cesàro des $\mathsf{D}_j(\theta)$.

(1) Montrer, pour toute fonction 2π-périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$n\,\mathsf{F}_n(\theta) = \sum_{|k|\leqslant n} \big(n - |k|\big)\, e^{ik\theta} \qquad \text{et que :} \qquad \mathsf{F}_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \Big(1 - \frac{|k|}{n}\Big)\, \widehat{f}(k)\, e^{ik\theta}.$$

où : $\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi}$ désigne le k-ème coefficient de Fourier de f.

(2) Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(0) = 0$ dont on considère la primitive $G(t) := \int_0^t g(s)\, ds$ s'annulant en 0. Vérifier que G est 2π-périodique et montrer que :

$$\widehat{G}(0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} s\, g(s)\, ds.$$

(3) Montrer que :

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{ik}\,\widehat{g}(k) \qquad\qquad {\scriptstyle (k\,\in\,\mathbb{Z}^*)}.$$

(4) Montrer que :

$$\mathsf{F}_n * G(0) = \widehat{G}(0) - i \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n}\bigg(\sum_{k=1}^{k=n} \widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1} \widehat{g}(k)\bigg).$$

(5) Établir que :

$$\mathrm{lim}_{n\to+\infty}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{\widehat{g}(k)}{k}=\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}s\,g(s)\,ds.$$

(6) Pour tout couple d'entiers (p,q) tels que $0\leqslant p\leqslant q$ et tout $\theta\not\equiv 0 \mod (2\pi)$, calculer :

$$\sum_{n=p}^{n=q}\mathsf{sin}(n\theta)=\sum_{n=p}^{n=q}\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i},$$

et montrer ensuite que cette somme est majorée par $\frac{1}{\mathsf{sin}(\frac{\theta}{2})}$.

(7) Montrer que la série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{\mathsf{log}n}$$

converge pour *tout* $\theta\in\mathbb{T}$ fixé ; par souci de complétude mais sans s'y attarder, établir auparavant que si $(a_k)_{k\geqslant 1}$ et $(b_k)_{k\geqslant 1}$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n\geqslant 2$:

$$\sum_{k=1}^{n-1}(a_k-a_{k+1})\big[b_k+\cdots+b_1\big]=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-a_n\big(b_1+\cdots+b_n\big),$$

et en déduire le critère de convergence d'Abel : si la suite a_n est positive, décroissante, convergente vers zéro, et si la suite $\big(\sum_{k=1}^n b_k\big)_{n\geqslant 1}$ est bornée, alors la série $\sum_{k=1}^{+\infty}a_kb_k$ converge.

(8) En admettant sans s'y attarder le principe de comparaison entre séries à termes décroissants et intégrales, montrer, en effectuant un changement de variables dans l'intégrale correspondante, que :

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k\mathsf{log}k}\sim\mathsf{loglog}n.$$

(9) Déduire de tout ce qui précède que la série trigonométrique en question $\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\mathsf{sin}(n\theta)}{\mathsf{log}n}$ n'est la série de Fourier d'aucune fonction $g\in L^1(\mathbb{T})$.

14. Partiel du Mercredi 12 mars 2014

-1 **point si copies doubles non numérotées** $1/4$**,** $2/4$**,** $3/4$**,** $4/4$
-1 **point si réponses correctes non soulignées ou encadrées**

Exercice 1 : Majoration uniforme de $\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$

(a) La famille des noyaux de Dirichlet sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est définie par $\mathsf{D}_n(t) := \sum_{|k|\leqslant n} e^{ikt}$. Montrer que :

$$\mathsf{D}_n(t) = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

(b) Que valent les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{D}_n(t)\,dt\,?$$

(c) Montrer que la fonction :

$$q\colon\quad t \longmapsto \frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

se prolonge continûment à $[-\pi,\pi]$.

(d) En déduire l'existence d'une constante $Q > 0$ telle que :

$$\bigg|\int_0^\theta q(t)\sin\big(n\,t+\tfrac{t}{2}\big)\,dt\bigg| \leqslant Q,$$

pour tout $|\theta| \leqslant \pi$.

(e) On rappelle que le lemme de Riemann-Lebesgue stipule que pour toute fonction continue $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\sin(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta)\cos(n\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Déterminer alors :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} q(t)\sin\big(n\,t+\tfrac{t}{2}\big)\,dt.$$

(f) En admettant que $\lim\limits_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin u}{u}\,du$ existe, utiliser **(b)**, **(c)** et **(e)** pour établir que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{\pi}{2}.$$

(g) En déduire qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $\big|\int_0^b \frac{\sin(ct)}{t}\,dt\big| \leqslant R$ pour tous $b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

(h) Montrer que $\Big|\int_0^\theta \frac{\sin(n\,t+t/2)}{\sin(t/2)}\,dt\Big| \leqslant Q + 2\,R$ pour tout $|\theta| \leqslant \pi$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que :

$$\frac{1}{2i}\sum_{1\leqslant |k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)dt.$$

(j) Donner une preuve alternative du fait signalé et utilisé en cours que les sommes :

$$\bigg|\sum_{1\leqslant |k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k}\bigg|$$

sont uniformément bornées en n et en θ.

Exercice 2 : Théorème de James

Soit $\big(E, \|\cdot\|\big)$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé complet. La *norme* d'une fonctionnelle linéaire $L\colon E \to \mathbb{R}$:

$$|||L||| := \sup_{u\in E\backslash\{0\}}\frac{\big|L(u)\big|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1}\big|L(u)\big|$$

est finie $|||L||| < \infty$ si et seulement si L est continue, d'après un théorème connu.

L'espace $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est dit *uniformément convexe* lorsque, pour tout $0 < \delta < 1$, la quantité :

$$\varepsilon(\delta) := \inf\Big\{1 - \big\|\tfrac{u+v}{2}\big\| \colon\ \|u\| = \|v\| = 1,\ \ \|u-v\| \geqslant \delta\Big\} \;>\; 0$$

est strictement positive.

(a) Illustrer cette propriété par un diagramme parlant et esthétique.

(b) On considère maintenant une fonctionnelle linéaire continue non nulle $L\colon \big(E, \|\cdot\|\big) \longrightarrow \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$. Montrer qu'il existe une suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que $L(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |||L|||$.

(c) Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, montrer qu'il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1, n_2 \geqslant N$ entraîne :

$$|||L|||\big(1-\varepsilon\big) \;<\; \frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2}.$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$, en déduire :

$$(1-\varepsilon) \;<\; \bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\|.$$

(e) En utilisant l'uniforme convexité de $\big(E, \|\cdot\|\big)$, montrer que la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ est de Cauchy.

(f) Justifier l'existence de $u_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$ et montrer que $L(u_\infty) = |||L|||$.

(g) Montrer l'unicité d'un élément v_∞ de norme $\|v_\infty\| = 1$ satisfaisant $L(v_\infty) = |||L|||$. Indication: Entrelacer $\big(u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots, u_n, v_n, \ldots\big)$ et appliquer **(b)**.

(h) En notant donc maintenant $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L\big(u_L\big) = \|\!|L|\!\|$, montrer que pour tout $v \in E$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|\!|L|\!\| \cdot \big\|u_L + tv\big\| - L\big(u_L + t\,v\big) \end{aligned}$$

admet un minimum global en $t = 0$.

(i) L'espace vectoriel normé complet $\big(E, \|\cdot\|\big)$ est dit *lisse* lorsque, pour tout $u \in E\backslash\{0\}$, l'application :

$$M_u\colon \quad \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \dfrac{d}{dt}\Big|_{t=0} \big\|u + tv\big\| \end{cases}$$

définit une fonctionnelle linéaire continue sur E. Conclure du point précédent (Théorème de James) que dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse $\big(E, \|\cdot\|\big)$, à toute fonctionnelle linéaire continue non nulle $L\colon E \to \mathbb{R}$ est associé un unique élément $u_L \in E$ de norme 1 tel que :

$$L(\cdot) = \|\!|L|\!\| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) Montrer qu'un espace de Hilbert $\big(H, \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big)$ est uniformément convexe. Indication: Utiliser l'identité du parallélogramme pour minorer, par exemple : $\varepsilon(\delta) \geqslant \frac{\delta^2}{8}$.

(k) Lorsque $\big(E, \|\cdot\|\big) = \big(H, \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}\big)$ est un espace de Hilbert, comparer $M_u(v)$ et $\big\langle \frac{u}{\|u\|}, v\big\rangle$.

(l) Comment s'énonce le Théorème de James dans un espace de Hilbert ?

Exercice 3 : Décroissance höldérienne des coefficients de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ au sens de Riemann.

(a) Rappeler la définition des k-èmes coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right)\right] e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

(c) Lorsque, pour un certain exposant réel $0 < \alpha \leqslant 1$, la fonction f est α-höldérienne :

$$\big|f(\theta + t) - f(\theta)\big| \leqslant \mathsf{constante} \cdot |t|^\alpha,$$

montrer que :

$$\widehat{f}(k) = \mathrm{O}\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

Il s'agit ensuite de faire voir qu'une telle décroissance ne peut pas être améliorée en général.

(d) Pour $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}}\, e^{i\,2^n\,\theta}.$$

est α-höldérienne. Indication: Découper la somme :

$$f(\theta + t) - f(\theta) = \sum_{2^n \leqslant \frac{1}{|h|}} (\,\cdot\,) + \sum_{2^n > \frac{1}{|h|}} (\,\cdot\,).$$

Pour estimer la première somme, utiliser après l'avoir justifié le fait que $\left|1 - e^{i\theta}\right| \leqslant |\theta|$ pour $|\theta| \leqslant \pi$. Pour estimer la seconde somme, utiliser l'inégalité $\left|e^{it_2} - e^{it_1}\right| \leqslant 2$.

15. Corrigé détaillé de l'Examen partiel du Mercredi 12 mars 2014

Exercice 1 : Majoration uniforme de $\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$

(a) Par définition :

$$\mathsf{D}_n(t) = e^{-in\,t} + \cdots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \cdots + e^{int}.$$

Dans le cours, en utilisant $1 + q + \cdots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$, on montre que :

$$\mathsf{D}_n(t) = \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

(b) Puisque pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$ non nul :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt,$$

il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \mathsf{D}_n(t)\,dt &= 0 + \cdots + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt + 0 + \cdots + 0 \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

(c) Sur $[-\pi, 0[\, \cup\,]0, \pi]$, cette fonction :

$$q(t) = \frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

est $\mathscr{C}^\infty$, puisque ni $\sin\big(\frac{t}{2}\big)$, ni t n'y ont de zéros. Mais au voisinage de $t = 0$, un développement limité utilisant $\frac{1}{1-\mathsf{x}} = 1 + \mathsf{x} + \mathrm{O}(\mathsf{x}^2)$ donne :

$$\begin{aligned}q(t) &= \frac{1}{\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + \mathrm{O}\big(t^5\big)} - \frac{1}{\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{t}{2}}\left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + \mathrm{O}\big(t^4\big)} - 1\right] \\ &= \frac{2}{t}\Big[1 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{t}{2}\right)^2 + \mathrm{O}\big(t^4\big) - 1\Big] \\ &= \mathrm{O}(t),\end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $q(t)$ se prolonge par continuité en $t = 0$ par la valeur nulle :

$$q(0) := 0.$$

(d) Bien entendu, on peut alors majorer :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\theta q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt\right| &\leqslant |\theta|\cdot\big(\max_{[0,\theta]} q\big)\cdot 1\\ &\leqslant \underbrace{\pi\cdot\|q\|_{\mathscr{C}^0([-\pi,\pi])}}_{=:\,Q}\\ &< \infty.\end{aligned}$$

(e) Une formule trigonométrique connue stipule que :

$$\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)=\mathsf{cos}(t/2)\,\mathsf{sin}(n\,t)+\mathsf{sin}(t/2)\,\mathsf{cos}(n\,t).$$

Alors une application directe du lemme de Riemann-Lebesgue donne la réponse :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{q(t)\,\mathsf{cos}(t/2)}_{\in\mathscr{C}^0}\,\mathsf{sin}(n\,t)\,dt+\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{q(t)\,\mathsf{sin}(t/2)}_{\in\mathscr{C}^0}\,\mathsf{cos}(n\,t)\,dt\\ &= 0+0\\ &= 0.\end{aligned}$$

(f) Pour tout $n\in\mathbb{N}$ on sait que :

$$2\pi=\int_{-\pi}^{\pi}\mathsf{D}_n(t)\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\mathsf{sin}\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Alors ce qui vient d'être vu permet de poursuivre :

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} q(t)\,\mathsf{sin}\big(n\,t+t/2\big)\,dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\mathsf{sin}\big(\frac{t}{2}\big)}-\underbrace{\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\frac{t}{2}}}_{\text{fonction paire}}\right)dt\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(2\pi-2\int_0^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{\frac{t}{2}}\,dt\right)\\ &= 2\pi-4\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\mathsf{sin}\big(n+\frac{1}{2}\big)t}{t}\,dt,\end{aligned}$$

puis le changement de variable :

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)t=:u,\qquad\qquad \text{d'où :}\quad \frac{dt}{t}=\frac{du}{u},$$

donne :

$$2\pi=4\lim_{n\to\infty}\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\mathsf{sin}u}{u}\,du,$$

d'où en admettant que $\lim\limits_{b\to\infty}\int_0^b\frac{\mathsf{sin}u}{u}\,du$ existe :

$$\frac{\pi}{2}=\int_0^{\infty}\frac{\mathsf{sin}u}{u}\,du.$$

(g) Le changement de variable similaire :

$$ct =: u, \qquad\qquad \text{d'où :} \quad \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

transforme :

$$\int_0^b \frac{\sin(ct)}{t}\,dt = \int_0^{bc} \frac{\sin u}{u}\,du.$$

Comme $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u}\,du$ existe et comme $bc > 0$, ces quantités sont uniformément bornées en valeur absolue :

$$\bigg|\int_0^b \frac{\sin ct}{t}\,dt\bigg| \leqslant R,$$

par, disons, une constante notée R.

(h) Maintenant, en faisant apparaître $q(t)$ dans une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned}\bigg|\int_0^\theta \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}\,dt\bigg| &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \sin\big(n\,t+t/2\big)\underbrace{\bigg(\frac{1}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}-\frac{1}{\frac{t}{2}}\bigg)}_{q(t)}\,dt\bigg| + \bigg|\int_0^\theta \frac{\sin\big(n+\frac{1}{2}\big)\,t}{\frac{t}{2}}\,dt\bigg| \\ &\leqslant Q + 2\,R \\ &< \infty,\end{aligned}$$

et ce, pour tout $|\theta| \leqslant \pi$, grâce aux résultats des questions **(d)** et **(g)**.

(i) On a bien :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^\theta \bigg(\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n} e^{ikt}\bigg)\,dt \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\bigg[\frac{e^{ikt}}{ik}\bigg]_0^\theta \\ &= \frac{1}{2}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\bigg(\frac{e^{ik\theta}}{ik}-\frac{1}{ik}\bigg),\end{aligned}$$

et en observant que $0 = \sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{1}{k}$ par imparité, il reste :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt &= \frac{1}{2i}\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\,\theta)}{k}.\end{aligned}$$

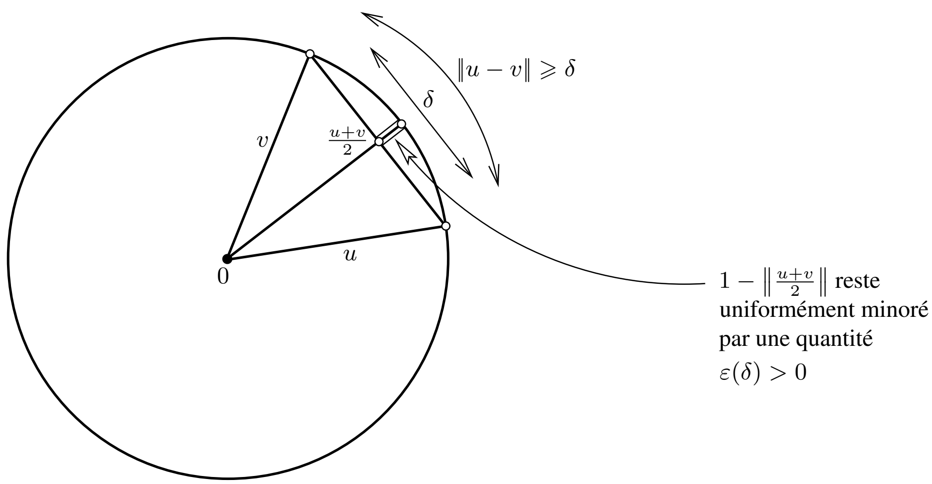
(j) En conclusion, en prenant les modules, et pour tout $|\theta| \leqslant \pi$:

$$\begin{aligned}\bigg|\sum_{1\leqslant|k|\leqslant n}\frac{e^{ik\theta}}{k}\bigg| &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \big(\mathsf{D}_n(t)-1\big)\,dt\bigg| \\ &\leqslant \bigg|\int_0^\theta \mathsf{D}_n(t)\,dt\bigg| + |\theta| \\ &\leqslant Q + 2\,R + \pi \\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve alternative du caractère uniformément borné de ces sommes, fait crucialement utilisé dans le cours magistral afin de construire avec du Bois Reymond une fonction continue dont la série de Fourier diverge en $\theta = 0$.

Exercice 2 : Théorème de James

(a) Voici un diagramme :



(b) Par définition de :

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} \big|L(u)\big|,$$

il existe une suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que :

$$\big|L(u_n)\big| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|L\|,$$

et quitte à changer u_n en $-u_n$, seulement lorsque $L(u_n) \in \mathbb{R}_-^*$, on peut supposer que $L(u_n) \geqslant 0$ pour tout n, et ainsi sans valeur absolue :

$$L(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|L\|.$$

(c) Comme la fonctionnelle L est non nulle, $\|L\| > 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe par conséquent $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que :

$$n \geqslant N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad \Big(L(u_n) > \|L\|\big(1-\varepsilon\big)\Big),$$

et alors par simple addition-moyennisation :

$$n_1,\, n_2 \,\geqslant\, N(\varepsilon) \qquad \Longrightarrow \quad \bigg(\frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2} \,>\, \|\!|L|\!\|\big(1-\varepsilon\big) \bigg).$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geqslant N(\varepsilon)$, supposons par l'absurde que :

$$\bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\| \,\leqslant\, \big(1-\varepsilon\big).$$

La propriété caractéristique $\big|L(v)\big| \,\leqslant\, \|\!|L|\!\| \cdot \|v\|$ valable pour tout $v \,\in\, E$ et directement issue de la définition de la norme d'opérateur $\|\!|L|\!\|$ implique alors :

$$\begin{aligned} \bigg|L\bigg(\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg)\bigg| &\,\leqslant\, \|\!|L|\!\| \cdot \bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\| \\ &\,\leqslant\, \|\!|L|\!\|\,\big(1-\varepsilon\big), \end{aligned}$$

d'où en éliminant la valeur absolue à gauche :

$$L\bigg(\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg) \,\leqslant\, \|\!|L|\!\|\,\big(1-\varepsilon\big),$$

inégalité manifestement contradictoire avec **(c)**.

(e) Soit $\delta > 0$ arbitrairement petit et associons-lui la quantité $\varepsilon(\delta)$ — appelée *module de convexité* — qui apparaît dans la définition de l'uniforme convexité. Nous affirmons que :

$$n_1,\, n_2 \,\geqslant\, N\big(\varepsilon(\delta)\big) \qquad \Longrightarrow \quad \Big(\big\|u_{n_1}-u_{n_2}\big\| < \delta\Big),$$

ce qui établira la *Cauchycité* de la suite $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$.

Sinon, si au contraire on avait :

$$\big\|u_{n_1}-u_{n_2}\big\| \,\geqslant\, \delta,$$

alors par uniforme convexité de l'espace $\big(E, \|\cdot\|\big)$, on devrait avoir le contrôle minorant :

$$1 - \bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\| \,\geqslant\, \varepsilon(\delta),$$

ce qui équivaudrait à :

$$1 - \varepsilon(\delta) \,\geqslant\, \bigg\|\frac{u_{n_1}+u_{n_2}}{2}\bigg\|,$$

et produirait une contradiction manifeste avec le résultat de la question **(d)** !

(f) La complétude de $\big(E, \|\cdot\|\big)$ assure l'existence de $u_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} u_n$. Comme $L(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\!|L|\!\|$, et comme L est continue, $L(u_\infty) = \|\!|L|\!\|$.

(g) Étant donné une *autre* suite $\big(v_n\big)_{n\geqslant 1}$ quelconque qui satisfait exactement comme $\big(u_n\big)_{n\geqslant 1}$ à la fois $\|v_n\| = 1$ et $L(v_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\!|L|\!\|$, les mêmes raisonnements s'appliquent sans modification et fournissent une limite $v_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ satisfaisant aussi $L(v_\infty) = \|\!|L|\!\|$. Or la suite entrelacée :

$$\big(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, \dots\big),$$

à savoir la suite :

$$w_n = \begin{cases} u_{\frac{n+1}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est impair,} \\ v_{\frac{n}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

satisfait elle aussi trivialement $\|w_n\| = 1$ et $L(w_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \|\!|L|\!\|$, donc les raisonnements qui précèdent s'appliquent aussi à elle, et ils fournissent sans effort une limite $w_\infty = \lim\limits_{n\to\infty} w_n$ qui satisfait encore et aussi $L(w_\infty) = \|\!|L|\!\|$. Ceci assure sans délai (exercice mental) que :

$$v_\infty = u_\infty,$$

et conclut la démonstration d'unicité. Bien entendu, $\|u_\infty\| = \|v_\infty\| = \|w_\infty\| = 1$.

(h) Avec $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L\big(u_L\big) = \|\!|L|\!\|$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|\!|L|\!\| \cdot \big\|u_L + t\,v\big\| - L\big(u_L + t\,v\big), \end{aligned}$$

est en fait à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, simplement parce que $\big|L(w)\big| \leqslant \|\!|L|\!\| \cdot \|w\|$ pour $w := u_L + t\,v$, et elle s'annule visiblement en $t = 0$. Son minimum global vaut donc 0, et si elle possédait un *autre* minimum :

$$0 = \|\!|L|\!\| \cdot \big\|u_L + t_0\,v\big\| - L\big(u_L + t_0\,v\big),$$

pour un certain autre $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $t_0 \neq 0$, cela contredirait l'unicité de u_L.

(i) Toute fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ qui admet un extremum (local ou global) en un point doit y avoir sa dérivée nulle. Ici en $t = 0$, on doit donc avoir :

$$0 = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \bigg(\|\!|L|\!\| \cdot \big\|u_L + t\,v\big\| - L(u_L) - t\,L(v)\bigg),$$

à savoir en termes de la fonctionnelle M_u supposée exister dans $\big(E, \|\cdot\|\big)$ lisse :

$$0 = \|\!|L|\!\| \cdot M_{u_L}(v) - L(v).$$

Nous avons donc établi le :

Théorème de James. *Dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse $\big(E, \|\cdot\|\big)$, à toute fonctionnelle linéaire continue $L\colon E \to \mathbb{R}$ est associé un unique élément $u_L \in E$ tel que :*

$$L(\cdot) = \|\!|L|\!\| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) L'identité du parallélogramme, valable dans tout $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire :

$$\big\|u + v\big\|^2 + \big\|u - v\big\|^2 = 2\,\|u\|^2 + 2\,\|v\|^2,$$

donne ici, en supposant donc que $\|u\| = \|v\| = 1$:

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^2 = 1,$$

et donc, pour tester l'uniforme convexité de notre espace de Hilbert $\big(H, \sqrt{<\cdot,\cdot>}\big)$, si :

$$\|u - v\| \,\geqslant\, \delta,$$

on en déduit la minoration :

$$\frac{\delta^2}{4} \leqslant \frac{\|u-v\|^2}{4} = 1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2,$$

puis en factorisant $1 - \mathsf{x}^2 = (1-\mathsf{x})\,(1+\mathsf{x})$:

$$\frac{\delta^2}{4} \leqslant \left(1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right) \underbrace{\left(1 + \left\|\frac{u+v}{2}\right\|\right)}_{\leqslant 2},$$

et finalement, on conclut l'uniforme convexité :

$$\frac{\delta^2}{4}\,\frac{1}{2} \leqslant 1 - \left\|\frac{u+v}{2}\right\|,$$

grâce au minorant-bonus indiqué :

$$\varepsilon(\delta) \geqslant \frac{\delta^2}{8} > 0.$$

(k) Rappelons la dérivée de la racine carrée d'une fonction $g(t) > 0$:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sqrt{g(t)} = \frac{1}{2\,\sqrt{g(0)}}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \big(g(t)\big).$$

Ici, avec $u \neq 0$ pour assurer que $g(0) > 0$, on calcule :

$$\begin{aligned}
M_u(v) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sqrt{\langle u + t\,v,\ u + t\,v\rangle} \\
&= \frac{1}{2\,\sqrt{\langle u, u\rangle}}\,\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Big(\langle u,u\rangle + 2\,t\,\langle u,v\rangle + t^2\,\langle v,v\rangle\Big) \\
&= \frac{1}{2\,\sqrt{\langle u, u\rangle}}\,2\,\langle u,v\rangle \\
&= \big\langle \tfrac{u}{\|u\|},\, v\big\rangle,
\end{aligned}$$

donc les deux expressions à comparer sont égales.

(l) Ainsi, tout espace de Hilbert, complet par définition, s'avère-t-il être aussi un espace vectoriel normé complet lisse uniformément convexe auquel le Théorème de James s'applique, montrant que toute fonctionnelle linéaire continue non nulle se représente comme :

$$\begin{aligned}
L(v) &= \|L\| \cdot M_{u_L}(v) \\
&= \|L\| \cdot \big\langle \tfrac{u}{\|u\|},\, v\big\rangle \\
&= \big\langle \|L\|\tfrac{u}{\|u\|},\, v\big\rangle \\
&= \text{produit scalaire de } v \text{ avec un vecteur fixe},
\end{aligned}$$

et l'on retrouve un énoncé central de la théorie, à savoir le Théorème de représentation de Riesz.

16. Examen du Jeudi 15 mai 2014

-1 point si copies doubles non numérotées $1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$
-1 point si réponses correctes non soulignées ou encadrées
-1 point si 2 devoirs sur 3 non rendus avant le 23 mai

Exercice 1 : Diviseurs de zéro dans l'algèbre de convolution

(a) Soient deux intervalles ouverts $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ d'intersection $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ vide. Utiliser deux fonctions non nulles $\varphi_1 \in \mathscr{C}_c^\infty(I_1)$, $\varphi_2 \in \mathscr{C}_c^\infty(I_2)$, pour construire deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ de l'espace de Schwartz satisfaisant $f_1 * f_2 = 0$, puis interpréter cette propriété. Indication: Utiliser la transformée de Fourier d'un produit de convolution.

(b) On introduit l'espace :

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+) := \Big\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \textstyle\int_J |f| < \infty \text{ pour tout intervalle borné } J \subset \mathbb{R}, \text{ et telle que } f\big|_{]-\infty,0[} \equiv 0 \Big\}.$$

Pour $f, g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$, montrer que $f * g(x) = 0$ lorsque $x < 0$, et, pour $x \geqslant 0$, que :

$$f * g(x) = \int_0^x f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

(c) Montrer que $f * g \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$.

(d) Soit maintenant $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant :

$$f * f = 0.$$

Pour tout réel $A > 0$ et tout entier $n \geqslant 1$, montrer que :

$$\bigg(\int_{-A}^{A} e^{nx} f(A-x)\, dx \bigg)^2 = \underbrace{\iint_{\substack{u \geqslant -A \\ v \geqslant -A \\ u+v \leqslant 0}} e^{n(u+v)} f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv}_{=:\, J_1} + \underbrace{\iint_{\substack{u \leqslant A \\ v \leqslant A \\ u+v \geqslant 0}} e^{n(u+v)} f(A-u)\, f(A-v)\, du\, dv}_{=:\, J_2}.$$

(e) Toujours avec $f * f = 0$, en posant $y := A - u$ et $x := A - v + y$, montrer que :

$$J_2 = \int_0^{2A} e^{n(2A-x)}\, (f * f)(x)\, dx = 0.$$

(f) Montrer qu'il existe une constante indépendante de n telle que :

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \int_0^A e^{nx} f(A-x)\,dx \right| \leqslant \mathsf{constante}_{f,A}.$$

(g) On admet maintenant qu'une fonction $g \in L^1([0,B])$, $B > 0$, satisfaisant $\left| \int_0^B e^{nt}\, g(t)\,dt \right| \leqslant$ constante pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement nulle : $g = 0$ presque partout. Déduire de ce qui précède que $f = 0$.

(h) Soient maintenant $f, g \in \mathscr{C}^0_+(\mathbb{R}) := \left\{ h \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})\colon h\big|_{]-\infty,0[} \equiv 0 \right\}$ satisfaisant :

$$f * g = 0.$$

En posant $f_1(x) := x\,f(x)$ et $g_1(x) := x\,g(x)$, montrer que :

$$f * g_1 + f_1 * g = 0.$$

(i) Montrer que $f * g_1 = 0$. Indication: Calculer $(f * g_1) * (f * g_1)$.

(j) Montrer, pour $x \geqslant 0$ et pour tout entier $n \geqslant 0$, que :

$$0 = \int_0^x f(x-y)\,y^n\,g(y)\,dy.$$

(k) Utiliser un théorème de densité pour montrer que :

$$0 = \int_0^x \big(f(x-y)\,g(y)\big)^2\,dy.$$

(l) Montrer que l'algèbre de convolution $\left(\mathscr{C}^0_+(\mathbb{R}),\, *\right)$ n'a pas de diviseur de zéro. En va-t-il de même pour $\left(L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+),\, *\right)$?

Exercice 2 : Transformée de Hilbert

Première étape. Dans la suite, on note $\widehat{u}$ la transformée de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

On note alors différemment $\mathscr{F}\colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ — théorème du cours — de cette transformation, qui se calcule donc comme $\mathscr{F}(u) = \widehat{u}$ seulement lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et qui établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse naturellement noté $\mathscr{F}^{-1}$.

(a) Montrer que pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to\infty} \left\| u - u\,\mathbf{1}_{[-n,n]} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où $\mathbf{1}_{[-n,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n,n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $\mathscr{F}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}\big(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}\big)$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, justifier que :

$$\mathscr{F}\big(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}\big)(\xi) = \int_{-n}^{n} u(x)\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \left\| \mathscr{F}(u)(\xi) - \int_{-n}^{n} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Deuxième étape. On définit la *transformée de Hilbert* $\mathscr{H} \colon L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathscr{H}(u)(x) := \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathsf{signe}(\xi)\, \mathscr{F}(u)(\xi)\Big)(x),$$

où signe $\in L^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathsf{signe}\,(\xi) := -1 \;\text{ lorsque } \xi < 0, \qquad \mathsf{signe}\,(0) := 0, \qquad \mathsf{signe}\,(\xi) := +1 \;\text{ lorsque } \xi > 0.$$

La transformée de Hilbert associe donc à une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ de carré sommable, la fonction de carré sommable dont la transformée de Fourier coïncide avec (resp. s'oppose à) celle de la fonction donnée sur les réels positifs (resp. négatifs).

(e) Montrer qu'une telle transformation $\mathscr{H}$ est bien définie et qu'elle établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$.

L'objectif principal de cet exercice est de montrer que l'on peut « représenter » $\mathscr{H}$ comme *opérateur intégral singulier*, à savoir que l'on peut écrire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y}\, dy,$$

à condition d'interpréter une telle intégrale éventuellement divergente comme « *valeur principale au sens de Hadamard* » — ne divergeant alors presque jamais —, à savoir comme la limite de l'intégrale suivante tronquée de manière équilibrée autour de x :

$$\mathscr{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\,\pi} \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y}\, dy + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y}\, dy \right).$$

Pour ce faire, on commence par fixer $\varepsilon > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \frac{u(x-y)}{y}\, dy = f_\varepsilon * u(x),$$

où $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{lorsque } |x| > \varepsilon, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Justifier rigoureusement le caractère bien défini de ce produit de convolution $f_\varepsilon * u$.

(g) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{i\,\pi} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y}\, dy = -\frac{1}{i\,\pi}\, \mathscr{F}^{-1}\Big[\mathscr{F}(f_\varepsilon) \cdot \mathscr{F}(u)\Big](x).$$

(h) Montrer que l'on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\varepsilon<|x|<n} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{x}\, dx = -\,2i\, \mathsf{signe}(\xi) \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{+\infty} \frac{\mathsf{sin}x}{x}\, dx.$$

(i) En utilisant la première étape, montrer que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}\big(f_\varepsilon\big)(\xi) = -\,2i\,\mathsf{signe}(\xi)\,\int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{+\infty} \frac{\mathsf{sin}x}{x}\,dx.$$

(j) En utilisant la valeur connue $\int_0^\infty \frac{\mathsf{sin}t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, montrer finalement que l'on a bien, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\,\frac{1}{i\,\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y-x|>\varepsilon}\frac{u(y)}{x-y}\,dy = \mathscr{H}(u)(x).$$

17. Partiel du Mercredi 12 novembre 2014

– 4 **points si sonnerie de téléphone portable se déclenche**
– 1 **point si copies doubles non numérotées** $1/4$**,** $2/4$**,** $3/4$**,** $4/4$
– 1 **point si réponses correctes non soulignées ou encadrées**
$+\,2$ **points-bonus si au moins 4 réponses accompagnées d'illustrations esthétiques**

Exercice 1. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives qui est Lebesgue-intégrable. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) > \alpha\big\}.$$

Montrer que (Figure-bonus possible) :

$$m\big(E_\alpha\big) \leqslant \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 2. En dimension $d \geqslant 1$, soit une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives finies.

(a) Rappeler la définition initiale de la mesurabilité d'une fonction, puis des caractérisations équivalentes.

(b) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les sous-ensembles :

$$E_k := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\big\}$$

sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Montrer que l'on a la réunion disjointe (Figure-bonus possible) :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k = \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) > 0\big\}.$$

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction étagée :

$$F_n := \sum_{k=-n}^{k=+n} 2^k\, \mathbf{1}_{E_k},$$

ainsi que $F := \lim_{n\to\infty} F_n$. Montrer que l'on a en tout point :

$$\tfrac{1}{2}\, F \leqslant f \leqslant F.$$

(e) Montrer que la fonction d'origine f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k\, m(E_k) < \infty$.

(f) On introduit les deux fonctions :

$$f(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^a} & \text{pour } 0 < |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^b} & \text{pour } |x| \geqslant 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant **(e)**, montrer que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $a < d$, et aussi, montrer que g est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$ exactement lorsque $b > d$.

Exercice 3. Sur un segment compact $[a, b] \Subset \mathbb{R}$, soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f, mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f satisfait $\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 4. Soient $E_1, E_2, E_3, \ldots \subset \mathbb{R}^d$ une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :

$$E_k \supset E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)}.$$

On suppose que pour un certain entier $k_0 \geqslant 1$, on a :

$$m\big(E_{k_0}\big) < \infty.$$

En utilisant un théorème fondamental énoncé avec soin concernant les réunions dénombrables disjointes d'ensembles mesurables, montrer que (Figure-bonus possible) :

$$m\bigg(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\bigg) = \lim_{K \to \infty} m\big(E_K\big),$$

puis trouver un exemple simple faisant voir que cette conclusion peut être mise en défaut sans l'existence de k_0 tel que $m(E_{k_0}) < \infty$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$. En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) = \inf \sum_{j=1}^{J} \big|I_j\big|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis :*

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{J} I_j,$$

par des intervalles fermés I_j.

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*\big(\overline{E}\big)$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0, 1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que sa mesure extérieure de Lebesgue vaut $m^*(E) = 0$.

Exercice 6. Dans $\mathbb{R}^d$, soit un nombre fini quelconque $n \geqslant 1$ de sous-ensembles mesurables $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesures finies :

$$m(A_1) < \infty, \quad m(A_2) < \infty, \quad \dots\dots, \quad m(A_n) < \infty.$$

Montrer que (Figure-bonus possible) :

$$m\Big(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n\Big) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} m\Big(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}\Big).$$

Exercice 7. Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense dans $\mathbb{R}$ tel que $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction réelle continue à support compact. Montrer que :

$$0 = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^d} \big|f(x-h) - f(x)\big| \, dx.$$

Indication: Si $\mathrm{supp}(f) \subset B(0,R)$ pour un rayon $R \gg 1$ assez grand, se limiter à $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < 1$ et se ramener à $\int_{B(0,R+1)}$.

Exercice 9. Trouver une suite de fonctions en escalier $f_n \colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx,$$

mais telle que, en *tout* point $x \in [0,1]$, la suite numérique :

$$\big(f_n(x)\big)_{n=1}^{\infty}$$

soit bornée et ne converge vers aucune valeur réelle. Indication: Utiliser la suite double $F_{k,m}(x) := \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]}$ pour $1 \leqslant k \leqslant m$, illustrer son comportement pour $m = 1, 2, 3, 4$, décrire en mots les idées qui viennent à l'esprit, et enfin, rédiger en détail une démonstration rigoureuse.

18. Corrigé du partiel du Mercredi 12 novembre 2014

Claire LACOUR et Jean-Jacques MARTIANO

Exercice 1. Pour tout $\alpha > 0$, comme $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est Lebesgue-intégrable, $E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : \quad f(x) > \alpha\}$ est mesurable et $f \geqslant \alpha \mathbf{1}_{E_\alpha}$. En effet :

- si $x \in E_\alpha, \quad f(x) > \alpha \Rightarrow f(x) \geqslant \alpha \mathbf{1}_{E_\alpha}(x)$,
- si $x \notin E_\alpha, \quad \mathbf{1}_{E_\alpha}(x) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) \geqslant 0.$

Dans tous les cas $f(x) \geqslant \alpha \mathbf{1}_{E_\alpha}(x)$ et par croissance de l'intégrale, $\int f \geqslant \alpha . m(E_\alpha)$.

Exercice 2. (a) Une fonction f définie sur un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}\big([-\infty,\, a[\big) \;=\; \big\{x \in E\colon\ f(x) < a\big\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de $\mathbb{R}^d$. On obtient des caractérisations équivalentes suivantes :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :
$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \leqslant a\big\} \;=\; \big\{f \leqslant a\big\}$$
est mesurable.
- pour tout $a \in \mathbb{R}$,
$$\big\{x \in E\colon\ f(x) \geqslant a\big\} \;=\; \big\{f \geqslant a\big\}$$
est mesurable
- pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :
$$\big\{x \in E\colon\ f(x) > a\big\} \;=\; \big\{f > a\big\}$$
est mesurable.
- pour tout couple de nombres réels finis :
$$-\infty \;<\; a \;<\; b \;<\; +\infty,$$
les ensembles-tranches :
$$\big\{a < f < b\big\}$$
sont mesurables. Plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ par l'un des trois ensembles :
$$\big\{a \leqslant f < b\big\}, \qquad \big\{a < f \leqslant b\big\}, \qquad \big\{a \leqslant f \leqslant b\big\}.$$

(b) On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles $E_k := \{x \in \mathbb{R}^d : \quad 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\}$ sont mesurables dans $\mathbb{R}^d$.

(c) Pour tout entier relatif k, $E_k \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \quad f(x) > 0\}$ d'où $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} E_k \subset \{x \in \mathbb{R}^d : \quad f(x) > 0\}$. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $f(x) > 0$. Posons $k = \left\lceil \dfrac{\ln(f(x))}{\ln 2} \right\rceil$. Alors $x \in E_k$ par définition de la partie entière par excès du réel $\ln(f(x))/\ln 2$. D'où $\bigcup\limits_{k=-\infty}^{+\infty} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \quad f(x) > 0\}$. De plus cette réunion est bien disjointe par unicité de la partie entière d'un réel.

(d) Soit x fixé dans $\mathbb{R}^d$.
- Si $f(x) = 0$ alors pour tout entier n, $F_n(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} 2^k \mathbf{1}_{E_k}(x) = 0$ et, par passage à la limite, $F(x) = 0$. D'où l'égalité $\frac{1}{2}F(x) = f(x) = F(x) = 0$.
- Si $f(x) \neq 0$, il existe un unique entier $n_0 \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in E_{n_0}$ et $F_{n_0}(x) = 2^{n_0}$. Par définition de la suite $(F_n)_n$, on a aussi $\forall n \geqslant n_0, \quad F_n(x) = F_{n_0}(x) = 2^{n_0}$. D'où $F(x) = 2^{n_0}$. Par définition de l'entier n_0, on a $2^{n_0-1} < f(x) \leqslant 2^{n_0}$ ou encore $\frac{1}{2}F(x) < f(x) \leqslant F(x)$.

Dans tous les cas , on a bien : $\frac{1}{2}F(x) \leqslant f(x) \leqslant F(x)$.

(e) Comme $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ est mesurable à valeurs positives finies, f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\int f < +\infty$. La question précédente nous donne (par croissance de l'intégrale) l'encadrement suivant :

$$\int \frac{1}{2}F \leqslant \int f \leqslant \int F.$$

Ainsi f est Lebesgue-intégrable si et seulement si F est Lebesgue-intégrable.

(F_n) est une suite croissante de fonctions mesurables et positives. D'après le théorème de Beppo-Lévi

$$\int F = \lim_{n\to+\infty} \int F_n.$$

Or $\int F_n = \sum\limits_{k=-n}^{n} 2^k m(E_k)$. On en déduit que $\int F = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k)$. Ce qui permet d'assurer l'équivalence suivante :

f Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} 2^k m(E_k) < +\infty$.

(f) • La fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mid x \mid^a} & \text{pour } 0 < |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est mesurable et positive.

Si $a \leqslant 0$, f est clairement intégrable.

Si $a > 0$,

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : \quad 2^{k-1} < f(x) \leqslant 2^k\} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leqslant 1 \text{ et } \quad \frac{1}{2^{k/a}} \leqslant \mid x \mid < \frac{1}{2^{(k-1)/a}}\}.$$

Remarquons que si $k < 1$ alors $E_k = \emptyset$ et $m(E_k) = 0$. D'après (e), f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^k m(E_k) < +\infty$.

Or E_k apparaît comme un dilaté d'un facteur $\dfrac{1}{2^{k/a}}$ de l'anneau $\mathscr{A}_a = \{x \in \mathbb{R}^d : 1 \leqslant |x| < 2^{1/a}\}$. Ainsi $m(E_k) = \left(\dfrac{1}{2^{k/a}}\right)^d m(\mathscr{A}_a)$ et $2^k m(E_k) = m(\mathscr{A}_a) 2^{k(1-\frac{d}{a})}$, avec $0 < m(\mathscr{A}_a) < \infty$. On reconnait ici une série géométrique. On en déduit que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} 2^k m(E_k) < +\infty$ si et seulement si $\frac{d}{a} - 1 > 0$ soit $a < d$.

Ainsi f Lebesgue-intégrable si et seulement si $a < d$.

- De même g définie par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|\, x\,|^b} & \text{pour } |x| \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ est mesurable et positive .

Si $b \leqslant 0$, g est clairement intégrable et si $b > 0$,

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \geqslant 1 \text{ et } \quad \frac{1}{2^{k/b}} \leqslant |\, x\,| < \frac{1}{2^{(k-1)/b}}\}.$$

Remarquons que si $k > 0$ alors $E_k = \emptyset$. D'après (e), g est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} 2^k m(E_k) < +\infty$.

De nouveau, $m(E_k) = \left(\dfrac{1}{2^{k/b}}\right)^d m(\mathscr{A}_b)$ et $2^k m(E_k) = 2^{k(1-\frac{d}{b})} m(\mathscr{A}_b)$, avec $0 < m(\mathscr{A}_b) < \infty$. On en déduit que $\sum\limits_{k=-\infty}^{0} 2^k m(E_k) < +\infty$ si et seulement si $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \left(2^{\frac{d}{b}-1}\right)^k < +\infty$.

Ainsi f Lebesgue-intégrable si et seulement si $\frac{d}{b} - 1 < 0$ soit $b > d$.

Exercice 3. *Dans cet exercice, on utilisera les notations du cours sur l'intégrale de Riemann.*

Soit $f \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Dans la définition des sommes de Darboux, il se peut alors que l'infimum de f sur un intervalle de la subdivision (ou son supremum) soit infini, auquel cas la somme de Darboux corespondante est infinie. Dans tous les cas rien ne nous empêche de vérifier si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que :

$$\Sigma^{\Delta}(f) - \Sigma_{\Delta}(f) \leqslant \varepsilon.$$

Supposons cette condition verifiée pour un $\varepsilon > 0$ fixé, et montrons qu'alors f est nécessairement bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons f non bornée, par exemple $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Alors il existe un entier k tel que $\sup_{I_k} f = +\infty$ et donc $\Sigma^{\Delta}(f) = +\infty$. Mais alors

$$\Sigma_{\Delta}(f) \geqslant \Sigma^{\Delta}(f) - \varepsilon = +\infty.$$

Cela entraîne que sur un certain intervalle I_l, $\inf_{I_l} f = +\infty$, ce qui est impossible (on considère des fonctions dont toutes les valeurs sont réelles). Ainsi, si une fontion vérifie la définition de Riemann-intégrabilité, elle est nécessairement bornée.

On peut aussi adopter la définition 4.8 du poly du cours :

Une fonction $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier encadrant f :

$$f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant f \leqslant f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}}$$

telles que :

$$\big(0 \leqslant\big) \qquad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\mathsf{esc}} \leqslant \varepsilon.$$

La fonction f sera de nouveau implicitement bornée puisque les fonctions en escalier sont (par nature) bornées.

Exercice 4. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après éliminination des ensembles $E_1, \dots, E_{k_0-1}$ qui ne comptent pas dans l'intersection infinie. Posons $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k$. Considérons alors les différences :

$$E_k \big\backslash E_{k+1} \qquad\qquad {\scriptstyle (k \geqslant 1)},$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} \big(E_k \big\backslash E_{k+1}\big).$$

Grâce au théorème d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m\big(E_1\big) &= m(E) + \lim_{K\to\infty} \sum_{k=1}^{K-1} \Big[m\big(E_k\big) - m\big(E_{k+1}\big)\Big] \\ &= m(E) + m\big(E_1\big) - \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big). \end{aligned}$$

Puisque $m\big(E_1\big) < \infty$, à gauche et à droite, on a des nombre réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) = \lim_{K\to\infty} m\big(E_K\big),$$

Sans l'hypothèse que $m\big(E_k\big) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geqslant k_0$, l'énoncé est faux. Si on prend par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$, alors $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ tandis que $m(E_k) = \infty$.

Exercice 5. (a) Pour prouver l'égalité demandée, on va raisonner par double inégalité.

- Soit $\cup_{j=1}^{J} I_j$ un recouvrement de E par un nombre fini intervalles fermés. Alors

$$\overline{E} \subset \overline{\cup_{j=1}^{J} I_j} = \cup_{j=1}^{J} I_j$$

(on utilise ici qu'une union *finie* de fermés est fermée). Donc $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est aussi un recouvrement de $\overline{E}$ par un nombre fini d'intervalles fermés, ce qui implique par définition de $m_J^*(\overline{E})$:

$$m_J^*(\overline{E}) \leqslant \sum_{j=1}^{J} |I_j|.$$

Cette inégalité étant vrai pour tout recouvrement de E, on peut passer à l'infimum, et on obtient $m_J^*(\overline{E}) \leqslant m_J^*(E)$.

• De même, si $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est un recouvrement de $\overline{E}$ par un nombre fini intervalles fermés, alors

$$E \subset \overline{E} \subset \cup_{j=1}^{J} I_j.$$

Donc $\cup_{j=1}^{J} I_j$ est aussi un recouvrement de E ce qui implique $m_J^*(E) \leqslant \sum_{j=1}^{J} |I_j|$, puis $m_J^*(E) \leqslant m_J^*(\overline{E})$. En réalité on vient simplement d'utiliser que $E \subset \overline{E}$ et que la mesure extérieure de Jordan est croissante.

(b) On cherche ici un ensemble dénombrable de mesure nulle dont l'adhérence soit de mesure grande. On pose donc

$$E = \mathbb{Q} \cap [0, 1],$$

qui a pour adhérence $\overline{E} = [0, 1]$.

L'ensemble E est dénombrable donc mesurable de mesure $m(E) = m^*(E) = 0$.

De plus, d'après la question précédente,

$$m_J^*(E) = m_J^*(\overline{E}) = m_J^*([0, 1]).$$

Or tout recouvrement $\cup_{j=1}^{J} I_j$ de $[0, 1]$ par des intervalles verifie nécessairement $\sum_{j=1}^{J} |I_j| \geqslant 1$, et on a même égalité en utilisant le recouvrement $I_1 = [0, 1]$. Donc $m_J^*([0, 1]) = 1$ et ainsi $m_J^*(E) = 1$.

Exercice 6. • Traitons d'abord le cas $n = 2$ qui sera la base pour la suite. Il s'agit de prouver que pour tous ensembles mesurables A et B de mesures finies, on a

$$m(A \cup B) = m(A) + m(B) - m(A \cap B).$$

On a va utiliser les notations suivantes : pour tout ensemble E, E^c désigne son complémentaire dans $\mathbb{R}^d$, et si E et F sont deux ensembles disjoints ($E \cap F = \emptyset$), on note $E \sqcup F$ leur union disjointe.

Cette égalité repose sur les deux égalités ensemblistes :

$$A \cup B = (A \cap B^c) \sqcup B,$$
$$A = (A \cap B) \sqcup (A \cap B^c).$$

L'aspect disjoint provient du fait qu'un élément ne peut être à la fois dans B et dans B^c, et les égalités se prouvent rapidement par double inclusion.

La mesure de deux ensembles disjoints étant la somme des deux mesures, on obtient

$$m(A \cup B) = m(A \cap B^c) + m(B),$$
$$m(A) = m(A \cap B) + m(A \cap B^c)$$

et la différence de ces deux inégalités (licite car tout ces réels sont finis puisque $m(A) < \infty$ et $m(B) < \infty$) donne

$$m(A \cup B) - m(A) = m(B) - m(A \cap B),$$

ce qui est l'égalité cherchée.

• On va maintenant prouvée l'égalité demandée dans le cas général, par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ est évident. On suppose maintenant l'égalité vrai au rang n, et on cherche à la démontrer au rang $n+1$. Soient donc $A_1, \dots, A_{n+1}$ des ensembles mesurables de mesures finies. Notons

$$B = A_1 \cup \cdots \cup A_n, \qquad B_i = A_i \cap A_{n+1}, \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

D'après le point précédent, on a

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= m(B) + m(A_{n+1}) - m(B \cap A_{n+1}) \\ &= m(A_1 \cup \cdots \cup A_n) + m(A_{n+1}) - m(B_1 \cup \cdots \cup B_n). \end{aligned}$$

On utilise alors l'hypothèse de récurrence, à la fois pour les (A_i) et pour les (B_i) :

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + m(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n} (-1)^{l-1} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_l \leqslant n} m(B_{j_1} \cap \cdots \cap B_{j_l}). \end{aligned}$$

On fait maintenant le changement de variables $k = l + 1$ dans la deuxième somme :

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) + m(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{k-1} \leqslant n} m(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_{k-1}} \cap A_{n+1}). \end{aligned}$$

Par ailleurs, la première somme du membre de droite peut être séparée en : le terme pour $k = 1$, qui vaut $\sum_{1 \leqslant i \leqslant n} m(A_i)$, plus les termes pour $k \geqslant 2$. En faisant des regroupements, on peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
m(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} m(A_i) + m(A_{n+1}) \\
&\quad + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&\quad - \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-2} \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{k-1} \leqslant n} m(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_{k-1}} \cap A_{n+1}) \\
&= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} m(A_i) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_{k-1} \leqslant n} m(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_{k-1}} \cap A_{n+1}) \right) \\
&\quad + (-1)^n m(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1}).
\end{aligned}$$

On retrouve dans la grande parenthèse les mesures de toutes les intersections possibles de k éléments, d'abord celles ne contenant pas A_{n+1} puis celles le contenant. De plus le dernier terme $m(A_1 \cap \cdots \cap A_n \cap A_{n+1})$ peut aussi s'écrire $\sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_{n+1} \leqslant n+1} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_{n+1}})$. Ainsi

$$\begin{aligned}
m(A_1 \cup \cdots \cup A_{n+1}) &= \sum_{1 \leqslant i \leqslant n+1} m(A_i) + \sum_{k=2}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n+1} m(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).
\end{aligned}$$

ce qui est la formule attendue au rang $n+1$.

Exercice 7. Pour construire un ouvert dense, on va partir de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels (qu'on sait dense dans $\mathbb{R}$) et former des boules ouvertes de taille ajustable autour de ses points. Soit donc $(r_n)_{n \geqslant 1}$ une énumération des rationnels, et soit

$$\Omega = \bigcup_{n \geqslant 1}]r_n - \alpha_n, r_n + \alpha_n[,$$

où pour tout $n \geqslant 1$, α_n est un réel strictement positif que l'on déterminera plus tard. Ω est un ouvert en tant que réunion d'ouverts. De plus, il est dense dans $\mathbb{R}$ car il contient $\mathbb{Q}$ par construction. Calculons maintenant sa mesure. Puisque l'union est dénombrable :

$$m(\Omega) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} m\left(]r_n - \alpha_n, r_n + \alpha_n[\right) = \sum_{n \geqslant 1} 2\alpha_n.$$

Il suffit alors de choisir $\alpha_n = \varepsilon 2^{-(n+1)}$ pour obtenir $m(\Omega) \leqslant \varepsilon$.

Exercice 8. Puisque f est à support compact, il existe $R > 0$ tel que son support est inclus dans $B(0, R)$. Soit $h \in \mathbb{R}^d$ de norme $|h| < 1$. Montrons d'abord que la fonction

$x \mapsto |f(x-h)-f(x)|$ est à support inclus dans $B(0, R+1)$. Soit x un vecteur n'appartenant pas à $B(0, R+1)$. Alors, en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$|x-h| \geqslant |x| - |h| > (R+1) - 1 = R,$$

ce qui implique $f(x-h) = 0$. De plus $|x| \geqslant R+1 > R$ ce qui implique cette fois $f(x) = 0$ et donc $|f(x-h) - f(x)| = 0$. Ainsi $x \mapsto |f(x-h) - f(x)|$ est à support inclus dans $B(0, R+1)$, et ceci quelque soit $h \in \mathbb{R}^d$ de norme $|h| < 1$.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. La fonction f étant continue, elle est uniformément continue sur le compact $B(0, R+1)$. Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$ et pour tout $x \in B(0, R+1)$:

$$|h| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x-h) - f(x)| < \varepsilon.$$

Posons maintenant $\delta' = \mathsf{min}(\delta, 1)$, de telle sorte que si $|h| < \delta'$, h vérifie à la fois $|h| < \delta$ et $|h| < 1$. Pour un tel h, en utilisant d'abord la compacité du support, puis la continuité :

$$\int |f(x-h)-f(x)|dx = \int_{B(0,R+1)} |f(x-h)-f(x)|dx \leqslant \int_{B(0,R+1)} \varepsilon = \varepsilon\, m\left(B(0, R+1)\right),$$

où $m\left(B(0, R+1)\right) = C_{R,d}$ est une constante qui ne dépend que de R et d (voir remarque ci-dessous). Finalement, on a prouvé : il existe $\delta' > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{R}^d$:

$$|h| < \delta' \quad \Rightarrow \quad \int |f(x-h) - f(x)|dx \leqslant C_{R,d}\, \varepsilon.$$

Cela prouve

$$\mathsf{lim}_{h\to 0} \int |f(x-h) - f(x)|dx = 0.$$

Remarque : on peut en fait calculer $C_{R,d} = \pi^{d/2} R^d / \Gamma(d/2+1)$ où Γ est la fonction Gamma d'Euler. Cette fonction, que l'on peut considérer comme un prolongement de la factorielle aux réels (et même à tous les complexes excepté les entiers négatifs), est définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Exercice 9 –

Corrigé. Considérons pour $0 \leq k < m$ entiers la fonction

$$F_{k,m}(x) = \mathbf{1}_{[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}[}(x)$$

et posons

$$\begin{array}{l} f_0 = F_{0,1} \\ f_1 = F_{0,2}, \quad f_2 = F_{1,2} \\ f_3 = F_{0,3}, \quad f_4 = F_{1,3}, \quad f_5 = F_{2,3} \end{array}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$f_{\frac{m(m-1)}{2}} = F_{0,m}, \ \ldots \ , f_{\frac{m(m-1)}{2}+k} = F_{k,m}, \ \ldots \ , f_{\frac{m(m-1)}{2}+m-1} = F_{m-1,m}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Un simple dessin convaincra le lecteur que pour x fixé, la suite $f_n(x)$ prend une infinité de fois les valeurs 0 et 1, ce qui montre sa divergence. Néanmoins dans la suite, nous nous sommes efforcés de donner les détails du problème de numérotation auquel on doit faire face pour traiter exhaustivement cette question. La complexité apparente de la rédaction donne malheureusement l'impression qu'une difficulté réelle est dissimulée dans ce problème, ce qui n'est pas le cas.
On remarque que la suite $\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)_{m \geq 1}$ est strictement croissante, vaut 0 pour $m = 1$ et tend vers $+\infty$. Par conséquent, pour tout entier $n \geq 0$, il existe un unique entier $m_n \geq 1$ tel que

$$\frac{m_n(m_n-1)}{2} \leq n < \frac{m_n(m_n+1)}{2}$$

et par conséquent

$$n = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k_n, \quad \text{avec } 0 \leq k_n < \frac{m_n 2}{2} = m_n.$$

Remarquons que $\lim_{n\to+\infty} m_n = +\infty$ car $m_n + 1 > \sqrt{2n}$. Pour $n \geq 0$, posons

$$f_n(x) = F_{k_n,m_n}(x).$$

On a

$$\int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 F_{k_n,m_n}(x)dx = 1/m_n \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \to \infty.$$

Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \geq 3$ tel que $f_n(x) = 1$: alors $\frac{k_n}{m_n} \leq x < \frac{1+k_n}{m_n}$ et si $k_n < m_n - 1$, on a

$$\frac{m_n(m_n-1)}{2} \leq n < n+1 = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k_n + 1 < \frac{m_n(m_n-1)}{2} + m_n = \frac{m_n(m_n+1)}{2},$$

ce qui donne $m_{n+1} = m_n$ et $f_{n+1}(x) = F_{1+k_n,m_n}(x) = 0$. Si $f_n(x) = 1$ et $k_n = m_n - 1$, on a $\frac{m_n-1}{m_n} \leq x < 1$ et

$$n+1 = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + m_n = \frac{m_n(m_n+1)}{2}, \quad \text{et donc} \quad m_{n+1} = 1 + m_n,\ k_{n+1} = 0,$$

ce qui donne

$$f_{n+1}(x) = F_{0,1+m_n}(x) = 0 \quad \text{car } \frac{1}{1+m_n} \leq \frac{m_n-1}{m_n} \text{ car } m_n \geq 2.$$

Par suite,

$$\text{(e3.11.1)} \qquad \text{pour } n \geq 3, \quad f_n(x) = 1 \Longrightarrow f_{n+1}(x) = 0.$$

Par ailleurs, pour $x \in [0,1[$ et $n \geq 0$, on a $0 \leq m_n x < m_n$ et par conséquent

$$k = E(m_n x) \in \{0, \ldots, m_n - 1\}.$$

Considérons $n' = \frac{m_n(m_n-1)}{2} + k \geq \frac{m_n(m_n-1)}{2}$. On a

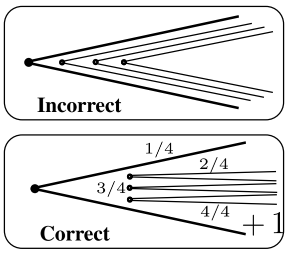
$$k \leq m_n x < 1 + k, \quad \frac{k}{m_n} \leq x < \frac{1+k}{m_n}$$

et par suite

$$\text{(e3.11.2)} \qquad f_{n'}(x) = F_{k,m_n}(x) = 1,$$

ce qui implique que la suite $f_n(x)$ prend une infinité de fois la valeur 1. Comme elle prend aussi une infinité de fois la valeur 0 à cause de (e3.11.2-1), elle ne peut converger. Le cas $x = 1$ se traite de manière analogue. En utilisant des fonctions affines par morceaux, on peut modifier l'exemple ci-dessus de sorte que les fonctions f_n soient continues.

Restitution des copies :



19. Examen du Jeudi 8 janvier 2015

-4 points si sonnerie de téléphone portable se déclenche
-1 point si copies doubles non numérotées $1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$
-1 point si réponses correctes non soulignées ou encadrées
$+1$ points-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations élégantes

Exercice 1. (a) Montrer que ni l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, ni celle $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ne sont vraies. Indication : supposer $d = 1$ et penser à $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}$ ainsi qu'à $\frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty[}$.

(b) Montrer que si une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, alors $f \in L^2(E, \mathbb{C})$ implique $f \in L^1$ avec :

$$\|f\|_{L^1} \leqslant \sqrt{m(E)}\, \|f\|_{L^2}.$$

(c) Montrer que si f est bornée, *i.e.* si $|f(x)| \leqslant C < \infty$, et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|f\|_{L^2} \leqslant \sqrt{C}\, \sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. (a) Établir l'existence de la limite suivante, et déterminer sa valeur :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{4\,t^3 + 12}{12\,t^6 + 3\,n\,t + 2}\, dt.$$

Indication: Utiliser le théorème de convergence dominée.

(b) Faire de même pour :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{n \sin x}\, dx.$$

Indication: Découper l'intégrale en $\int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2}$.

Exercice 3. (a) Montrer pour $f \in \mathscr{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ continue à support compact que l'on a :

$$0 = \lim_{\delta\to 1} \big\| f(x) - f(\delta\, x) \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) Généraliser cela aux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ Lebesgue-intégrables quelconques.

Exercice 4. [Inégalité de Hardy dans L^{p}] Soit un nombre réel $1 < \mathsf{p} < \infty$. L'objectif est d'étudier l'opérateur qui, à une fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(]0, \infty[, \mathbb{C})$, associe la fonction :

$$x \longmapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t)\, dt \qquad \scriptstyle{(0<x<\infty)}.$$

(a) Rappeler la valeur de l'exposant conjugué de p, dans l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que cette fonction $x \longmapsto T(f)(x)$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$, alors g et $T(g)$ sont liées par une équation différentielle, que l'on explicitera.

(d) Montrer que si $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{C})$ est à support dans $[a,A]$ avec $0 < a \leqslant A < \infty$, alors :

$$\big|T(g)(x)\big| \leqslant \frac{(A-a)^{1-\frac{1}{\mathsf{p}}}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}}{x}.$$

(e) Montrer que $x\big[T(g)(x)\big]^{\mathsf{p}}$ tend vers 0 quand $x \longrightarrow \infty$.

(f) On suppose temporairement que $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}^+)$ prend des valeurs réelles positives. En exécutant une intégration par parties, et en utilisant ce qui précède, montrer que :

$$\big(\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}}\big)^{\mathsf{p}} = -\,\mathsf{p}\int_0^\infty g\,T(g)^{\mathsf{p}-1} + \mathsf{p}\int_0^\infty T(g)^{\mathsf{p}}.$$

(g) Toujours pour $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{R}^+)$, montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que :

$$\big\|T(g)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|g\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(h) Montrer maintenant que cette inégalité est valable pour toute $g \in \mathscr{C}_c^0(]0,\infty[,\mathbb{C})$.

(i) Montrer que si une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $g_n \in L^{\mathsf{p}}$ converge en norme L^{p} vers une fonction-limite $f \in L^{\mathsf{p}}$, alors :

$$T(g_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} T(f).$$

(j) Montrer que pour toute fonction $f \in L^{\mathsf{p}}(]0,\infty[,\mathbb{C})$, on a :

$$\big\|T(f)\big\|_{L^{\mathsf{p}}} \leqslant \frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}\,\|f\|_{L^{\mathsf{p}}}.$$

(h) Trouver un exemple de fonction $f \in L^1(]0,\infty[)$ telle que $T(f) \notin L^1(]0,\infty[)$.

(k) Montrer qu'il n'est pas possible de remplacer la constante $\frac{\mathsf{p}}{\mathsf{p}-1}$ par une constante plus petite. Indication: On pourra considérer la suite de fonctions $\big(t \mapsto t^{-\frac{1}{\mathsf{p}}}\cdot \mathbf{1}_{[1,n]}\big)_{n=1}^\infty$.

(l) Examiner le cas $\mathsf{p} = \infty$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables $f_n \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrables satisfaisant :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^d} f_n = \int_{\mathbb{R}^d} f,$$

pour une certaine fonction Lebesgue-intégrable $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$.

(a) Lorsque toutes les fonctions f_n sont à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, montrer que si $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ en presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, alors $0 = \lim\limits_{n\to\infty}\int |f_n - f|$. Indication: Considérer la suite auxiliaire $g_n := \mathsf{min}(f_n, f)$.

(b) Montrer que la suite :

$$h_n(x) = n\,\mathbf{1}_{]0,\frac{1}{n}[^d}(x) - n\,\mathbf{1}_{]-\frac{1}{n},0[^d}(x)$$

converge ponctuellement vers 0 et que $0 = \lim\limits_{n\to\infty}\int h_n$.

(c) La suite $(h_n)_{n=1}^\infty$ converge-t-elle vers 0 dans un $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$?

Exercice 6. [Espaces de Sobolev] On note $\mathscr{S}$ le $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $L^2\big(]0,1[\big)$ constitué des fonctions $f\colon\,]0,1[\longrightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2\big(]0,1[\big)$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x)\,\varphi'(x)\,dx = -\int_0^1 \Lambda_f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathscr{C}_c^1\big(]0,1[,\mathbb{C}\big)$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,1[$ et dont le support :

$$\mathsf{Supp}(\varphi) \overset{\text{def}}{:=} \overline{\big\{t \in]0,1[:\ \varphi(t) \neq 0\big\}}$$

est un sous-ensemble *compact* de $]0,1[$.

(a) En admettant la densité de $\mathscr{C}_c^1$ dans $\mathscr{C}_c^0$, montrer que $\mathscr{S}$ est un sous-ensemble dense de $L^2\big(]0,1[\big)$.

(b) Montrer que :

$$\langle f,\, g\rangle := \int_0^1 f(x)\,\overline{g(x)}\,dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)\,\overline{\Lambda_g(x)}\,dx$$

définit un produit scalaire sur $\mathscr{S}$.

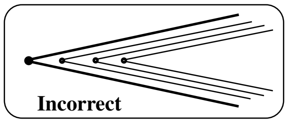
(c) Montrer que $\mathscr{S}$, muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

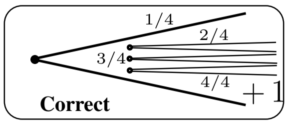
Exercice 7. [Bases produits] Montrer que si $(\varphi_i(x))_{i=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1})$ et si $(\psi_j(y))_{j=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_2})$, alors :

$$\big(\varphi_i(x)\,\psi_j(y)\big)_{i,j=1}^{\infty}$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$.

Restitution des copies :





20. Rattrapage du Vendredi 19 juin 2015

-4 points si sonnerie de téléphone portable se déclenche
-1 point si copies doubles non numérotées $1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$
-1 point si réponses correctes non soulignées ou encadrées
$+1$ points-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations élégantes

Exercice 1. [Intégrales dépendant d'un paramètres] Soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$, soit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide et soit une fonction mesurable :

$$f\colon \quad E \times I \longrightarrow \mathbb{C}.$$

(a) Si, au voisinage d'un point fixé $t_0 \in I$, les trois conditions suivantes sont satisfaites :
• pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;
• pour presque tout $x \in E$:

$$\lim_{t \to t_0} f(x,t) \,=\, f(x,t_0);$$

• il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E qui, pour tout $t \neq t_0$ proche de t_0 et pour presque tout $x \in E$, satisfait :

$$\big|f(x,t)\big| \,\leqslant\, g(x);$$

montrer que la fonction $x \longmapsto f(x,t_0)$ est Lebesgue-intégrable sur E.

(b) Montrer que :

$$\lim_{t \to t_0} \int_E f(x,t)\,dx \,=\, \int_E f(x,t_0)\,dx.$$

(c) Avec E et I comme précédemment, si les trois conditions suivantes sont satisfaites :
• pour tout $t \in I$, la fonction $x \longmapsto f(x,t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;
• pour tout $x \in E$, la fonction $t \longmapsto f(x,t)$ est dérivable ;
• il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ Lebesgue-intégrable sur E satisfaisant $\big|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\big| \,\leqslant\, g(x)$, pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;
montrer que pour tout $t \in I$ fixé, la fonction : $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est Lebesgue-intégrable sur E, et que :

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx \,=\, \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx\,.$$

Exercice 2. [Convergence en mesure] On dit qu'une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonction $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ de fonctions mesurables définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ *converge en mesure* vers une fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$0 = \lim_{n\to\infty} m\big(\{x \in E \colon |f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon\}\big).$$

(a) Lorsque f_n converge en norme L^1 vers une fonction $f \in L^1(E, \mathbb{C})$, montrer que f_n converge en mesure vers f, et généraliser ensuite cela aux espaces L^{p} avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$.

(b) Avec l'hypothèse supplémentaire que $m(E) < \infty$, montrer que si $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une fonction f, alors $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge aussi en mesure vers f.

(c) En considérant la suite de fonctions :

$$g_n(x) := \frac{x}{n}\, \mathbf{1}_{[0,n^2]}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

montrer que l'hypothèse $m(E) < \infty$ dans **(b)** est en général nécessaire.

Exercice 3. Soit $f \colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction mesurable intégrable satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} f \in]0, \infty[$. Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On introduit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ définie par :

$$a_n := \int_{\mathbb{R}^d} n \log\left[1 + \left(\frac{f(x)}{n}\right)^{\alpha}\right] dx.$$

(a) Montrer que $m\big(\{x \in \mathbb{R}^d \colon\ f(x) \neq 0\}\big) > 0$, où m désigne la mesure de Borel-Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

(b) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer que $\infty = \lim_{n\to\infty} a_n$. Indication: Utiliser le lemme de Fatou après en avoir soigneusement rappelé l'énoncé exact.

(c) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $\int f = \lim_{n\to\infty} a_n$.

(d) Lorsque $\alpha > 0$, montrer que $0 = \lim_{n\to\infty} a_n$. Indication: Montrer que la fonction $x \longmapsto \frac{\log(1+x^{\alpha})}{x}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 4. Soit $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables sur $[0,1] \subset \mathbb{R}$ satisfaisant :
- il existe une constante $C > 0$ telle que $\int_0^1 |f_n|\, dx \leqslant C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$;
- pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout sous-ensemble mesurable $E \subset [0,1]$ avec $m(E) \leqslant \delta$, on a :

$$\int_0^1 \big|f_n\big| \cdot \mathbf{1}_E \leqslant \varepsilon.$$

(a) Pour une constante fixée $K > 0$, étudier

$$\lim_{p\to\infty} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n\leqslant p} \big|f_n\big| \cdot \mathbf{1}_{\left\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| \leqslant K\right\}}\right).$$

(b) Montrer que :

$$\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p} \big|f_n\big|\Big) \cdot \mathbf{1}_{\left\{\sup_{n\leqslant p} |f_n| > K\right\}} \leqslant \sum_{0\leqslant n\leqslant p} \int_0^1 \big|f_n\big| \cdot \mathbf{1}_{\left\{|f_n| > K\right\}}.$$

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une constante $K > 0$ telle que :

$$\frac{1}{p}\int_0^1 \Big(\sup_{n\leqslant p}\big|f_n\big|\Big)\cdot \mathbf{1}_{\big\{\sup\limits_{n\leqslant p}|f_n|>K\big\}} \;\leqslant\; \varepsilon.$$

(d) Montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{p\to\infty}\bigg(\frac{1}{p}\int_0^1 \sup_{n\leqslant p}\big|f_n\big|\bigg).$$

Exercice 5. Pour $y \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$I(y) \;:=\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,dx.$$

(a) Calculer $I(y)$ et montrer que $y \longmapsto I(y)$ est une fonction continue bornée.

(b) Soit $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ une suite de nombres réels. Pour $x \in [0,1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$g_n(x) \;:=\; \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-y_k}}.$$

Montrer que la suite numérique $\big(\int_0^1 g_n(x)\,dx\big)_{n=0}^{\infty}$ est bornée.

(c) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ converge simplement vers une certaine fonction g_∞ mesurable et intégrable sur $[0,1]$.

(d) Montrer que la série de fonctions de $[0,1]$ à valeurs dans $[0,\infty]$:

$$x \longmapsto \sum_k \frac{1}{k^2}\cdot\frac{1}{|\sqrt{x-y_k}|}$$

converge presque partout vers une fonction finie.

(e) Montrer que si $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ est une suite à valeurs dans $[0,1]$ qui est dense dans $[0,1]$, alors la fonction g_∞ est discontinue en presque tout point.

(f) Montrer que si $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ est à valeurs dans $[2,\infty]$, alors la fonction g_∞ est indéfiniment dérivable sur $[0,1]$.

Exercice 6. [Lemme d'Austin] Un ensemble qui est réunion $I_1 \cup \cdots \cup I_n$ d'intervalles ouverts $I_i \subset \mathbb{R}$ est toujours de mesure :

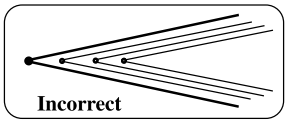
$$m(I_1\cup\cdots\cup I_n) \;\leqslant\; |I_1|+\cdots+|I_n|.$$

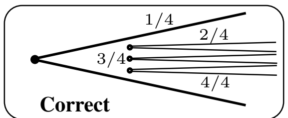
Montrer qu'il existe une sous-famille d'intervalles deux à deux *disjoints* $I_{i_1},\dots,I_{i_k}$ pour certains indices appropriés $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$ tels que :

$$|I_{i_1}|+\cdots+|I_{i_k}| \;=\; m\big(I_{i_1}\cup\cdots\cup I_{i_k}\big) \;\geqslant\; \frac{1}{3}\,m\big(I_1\cup\cdots\cup I_n\big).$$

Que dire lorsque les intervalles ne sont pas forcément ouverts à leurs extrémités ?

Restitution des copies :





21. Partiel du Mardi 10 novembre 2015

-4 **points si sonnerie de téléphone portable se déclenche**
-1 **point si copies doubles non numérotées** $1/4$**,** $2/4$**,** $3/4$**,** $4/4$
-1 **point si réponses correctes non soulignées ou encadrées**
$+1$ **point-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations esthétiques**

Exercice 1. [Convergence monotone en théorie de Riemann] Sur un intervalle $[a, b] \Subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite de fonctions $f_n \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ qui sont toutes *décroissantes* sur $[a, b]$. On suppose que $\lim_{n \to \infty} f_n(x) =: f(x)$ existe en tout point $x \in [a, b]$. L'objectif est d'établir que $\int_a^b f_n(x)\, dx \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(x)\, dx$, l'intégrale étant prise ici au sens de Riemann.

(a) Montrer que f est décroissante.

(b) Justifier que les f_n ainsi que f sont toutes Riemann-intégrables.

(c) Au moyen d'une figure soignée, esthétique et intelligente, faire voir sans mots qu'en un point $x_0 \in]a, b[$, la suite numérique $\big(f_n(x_0)\big)_{n=1}^{\infty}$ n'est pas forcément décroissante, ni même croissante.

(d) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \big\{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\big\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, dont on rappelera soigneusement la définition, satisfont :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(e) Montrer qu'il existe un entier $n = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant f_n(x_\kappa) \leqslant f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon,\, \forall\, \kappa = 1, \ldots, \nu)}.$$

(f) Toujours pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) \leqslant \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon.$$

(g) Toujours et encore pour $n \geqslant N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma_\Delta(f_n) \geqslant \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(h) Montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\, dx \leqslant \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon \qquad {\scriptstyle (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon)},$$

(i) Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x)\,dx - 2\,\varepsilon \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b f_n(x)\,dx + 2\,\varepsilon \qquad (\forall\, n \geqslant N_\varepsilon),$$

et conclure.

Exercice 2. [Borel-Cantelli] Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ de fonctions mesurables définies sur $\mathbb{R}^d$ satisfaisant toutes $a_k \geqslant 0$ presque partout.

(a) Pour $n \geqslant 1$, soit $f_n(x) := \sum_{k=1}^{n} a_k(x)$. Vérifier que $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ presque partout.

(b) Justifier l'existence de $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$.

(c) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)\,dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)\,dx.$$

(d) Sous l'hypothèse supplémentaire que la valeur du membre de gauche est $< \infty$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable *finie*.

(e) Soit maintenant une suite $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de $\mathbb{R}^d$ satisfaisant $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Montrer que l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Exercice 3. Pour $t > 0$, on pose :

$$k(t) := \int_0^{\infty} e^{-t\,x}\, \frac{\sin(x)}{x}\,dx.$$

(a) Montrer que k est une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(b) Montrer que $k'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$.

(c) Calculer la limite de $k(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

(d) En déduire $k(t)$.

(e) Calculer la limite quand $t \to 0$ de $k(t)$.

(f) La fonction $x \longmapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable sur $[0, \infty[$ pour la mesure de Lebesgue dx sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4. [Théorie de la mesure, Question de cours] Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(a) Justifier brièvement qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geqslant 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point, avec $\varphi_k \leqslant \varphi_{k+1}$.

(b) Montrer que :

$$0 = \lim_{k\to\infty} \big\| f - \varphi_k \big\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Sans rappeler toute la démonstration mais en rappelant les idées, justifier soigneusement qu'il existe une famille finie de rectangle fermés presque disjoints $R_1, \dots, R_J$ tels que :

$$m\bigg(E \,\Delta\, \bigcup_{j=1}^{J} R_j\bigg) \leqslant \varepsilon.$$

(d) Montrer que :

$$\bigg\| \mathbf{1}_E - \sum_{j=1}^{J} \mathbf{1}_{\mathsf{Int}\, R_j} \bigg\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon.$$

(e) Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(f) Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(g) Comment étendre ces deux résultats à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$?

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soient deux nombres réels $1 \leqslant \mathsf{p} < \mathsf{q} < \infty$.

(a) Pour $d = 1$, trouver un exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(\Omega) = \infty$ infinie tel que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C})$ n'est *pas* contenu dans $L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) Lorsque Ω est de mesure de Lebesgue *finie*, montrer au contraire que $L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}) \subset L^{\mathsf{p}}(\Omega, \mathbb{C})$.

(c) Toujours sous l'hypothèse $m(\Omega) < \infty$, montrer que :

$$\mathsf{sup}\, \Big\{ \|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \colon\ f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega, \mathbb{C}),\ \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} = 1 \Big\} = \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}} - \frac{1}{\mathsf{q}}}.$$

Indication: Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f \cdot 1$ avec un réel p_1 tel que $\mathsf{p}\,\mathsf{p}_1 = \mathsf{q}$.

Exercice 6. [Subdivisions verticales L^{p}] Étant donné une fonction mesurable $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty[$, soit pour tout réel $\lambda \geqslant 0$ l'ensemble :

$$E_\lambda := \big\{ x \in \mathbb{R} \colon\ f(x) > \lambda \big\}.$$

(a) Justifier la mesurabilité de ces E_λ.

(b) Montrer que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Pour tout exposant réel p avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\, dx = \mathsf{p} \int_{[0,\infty[} \lambda^{\mathsf{p}-1}\, m\big(E_\lambda\big)\, d\lambda.$$

22. Corrigé du partiel du Mardi 10 novembre 2015

Claire LACOUR et Jean-Jacques MARTIANO

Exercice 1. Voir le poly p. 53 à 57.

Exercice 2. **(a)** On calcule $f_{n+1}(x) - f_n(x) = a_{n+1}(x)$. Donc, par hypothèse, $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$ presque partout. On note A l'ensemble de mesure pleine sur lequel c'est vérifié.

(b) Soit $x \in A$. La suite $(f_n(x))$ est croissante donc elle converge vers une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On la note $f(x)$. fonction est mesurable comme limite de fonctions mesurables.

(c) Remarquons d'abord que $\int f_n(x)dx = \sum_{k=1}^n \int a_k(x)dx$ (somme finie) et donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx.$$

Puisque les a_k sont mesurables, les fonctions f_n le sont aussi. On applique le théorème de convergence monotone à la suite $(f_n(x))$ qui est croissante positive preque partout. On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)dx.$$

(d) Sous l'hypothèse supplémentaire que la valeur du membre de gauche est $< \infty$, le membre de droite l'est aussi. Or il vaut $\int f(x)dx$. Donc $f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est finie presque partout. Notons que cette fonction est mesurable comme limite de fonctions mesurables.

(e) Posons $a_k = frm[o]--_{E_k}$ la fonction indicatrice de l'ensemble E_k. Alors a_k est mesurable et positive. Donc les résultats précédents s'appliquent. On remarque que $\int a_k(x)dx = m(E_k)$ et ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty.$$

Donc on peut appliquer le résultat de la question (d) : $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est finie presque partout. Donc l'ensemble des x tels que $\sum_{k=1}^{\infty} frm[o]--_{E_k}(x) = +\infty$ est de mesure nulle, ce qui donne le résultat.

Exercice 3. Pour $t > 0$ et $x > 0$, on pose :

$$f(t,x) := e^{-t\,x} \, \frac{\sin(x)}{x}.$$

(a) $t \mapsto f(t,x)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$, de dérivée $-e^{-t\,x}\sin(x)$. De plus, pour $a > 0$, et pour tout $t > a$,

$$|-e^{-t\,x}\sin(x)| \leq e^{-a\,x}|\sin(x)|,$$

qui est une fonction intégrable sur $]0,\infty[$. D'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, k est $\mathscr{C}^1$ sur $]a,\infty[$ et

$$k'(t) = \int_0^\infty -e^{-t\,x}\,\mathsf{sin}(x)dx.$$

Puisque a est arbitrairement petit, k est $\mathscr{C}^1$ sur $]0,\infty[$.

(b) Il suffit de calculer l'intégrale précédente :

$$k'(t) = -\mathsf{Im}\left(\int e^{-t\,x}\,e^{ix}dx\right) = -\mathsf{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-t)\,x}}{i-t}\right]_0^\infty\right) = \mathsf{Im}\left(\frac{1}{i-t}\right) = -\frac{1}{t^2+1}$$

(c) Pour tout $x>0$,

$$f(t,x) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De plus, pour tout $t \geq 1$,

$$|f(t,x)| \leq e^{-x}\left|\frac{\mathsf{sin}(x)}{x}\right| \leq e^{-x}$$

qui est intégrable sur $]0,\infty[$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$k(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(d) On résoud l'équation différentielle donnée par les questions (b) et (c). On obtient

$$k(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan(t) \qquad \forall t>0.$$

(e) D'après la question précédente, $k(t)$ tend vers $\pi/2$ quand $t\to 0$.

(f) La question (e) donne la valeur de l'intégrale au sens des intégrales impropres de Riemann, mais la fonction $x \longmapsto \frac{\mathsf{sin}(x)}{x}$ n'est pas intégrable sur $[0,\infty[$ au sens de Lebesgue. En effet

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|\frac{\mathsf{sin}(x)}{x}\right| dx &= \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\left|\frac{\mathsf{sin}(x)}{x}\right| dx \geq \sum_{n=0}^\infty \int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{(n+1)\pi}\,|\mathsf{sin}(x)|\,dx \\ &\geq \sum_{n=0}^\infty \frac{2}{(n+1)\pi} = +\infty\end{aligned}$$

Exercice 4. Voir le poly.

Exercice 5. **(a)** Pour $d=1$, posons $\Omega =]0,+\infty[$. Il est clair que $m(\Omega)=\infty$. Soient a et b deux réels tels que $pa<qa<1$ et $p(a+b)<1<q(a+b)$, alors la fonction $x \to \dfrac{1}{x^a(1+x^b)}$ appartient $L^{\mathsf{q}}(\Omega)$ et n'appartient pas à $L^{\mathsf{p}}(\Omega)$.

(b) Lorsque Ω est de mesure de Lebesgue *finie*, soit $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)$. Appliquons l'inégalité de Hölder avec $r=\frac{q}{p}$, $(r>1)$ et r' tel que $\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}=1$, autrement dit, $r' = \dfrac{r}{r-1} = \dfrac{q}{q-p}$. On a

$$\int_\Omega |f(x)|^p\,dx \leq \left(\int_\Omega \left(|f(x)|^p\right)^r dx\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{r'}},$$

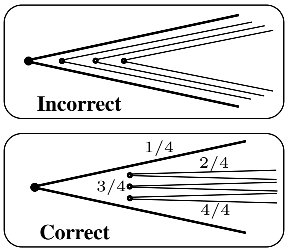
soit
$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,dx \leq \big(m(\Omega)\big)^{\frac{q-p}{q}} \big(\int\limits_{\Omega} \big(|f(x)|^q\,dx\big)^{\frac{p}{q}}.$$
Par conséquent, on a
$$\|f\|_p \leq \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}}\|f\|_q.$$
Par conséquent, si $f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega)$ et $m(\Omega) < +\infty$ alors $f \in L^{\mathsf{p}}(\Omega)$. Plus présicément on vient de montrer que l'injection $i : L^{\mathsf{q}}(\Omega) \to L^{\mathsf{p}}(\Omega)$ est continue, et la topologie définie par la norme $\|\ \|_p$ est plus fine que la topologie définie par la norme $\|\ \|_q$.
On pouvait aussi montrer directement l'inclusion en remarquant que $|f|^p \leq 1 + |f|^q$ et par suite
$$\int\limits_{\Omega} |f(x)|^p\,dx \leq m(\Omega) + \int\limits_{\Omega} |f(x)|^q\,dx.$$
(c) Toujours sous l'hypothèse $m(\Omega) < \infty$, la question précédente montre aussi que :
$$\sup\big\{\|f\|_{L^{\mathsf{p}}(\Omega)} \colon\ f \in L^{\mathsf{q}}(\Omega,\mathbb{C}),\ \|f\|_{L^{\mathsf{q}}(\Omega)} = 1\big\} \leq \big(m(\Omega)\big)^{\frac{1}{\mathsf{p}}-\frac{1}{\mathsf{q}}}.$$

On obtient l'égalité recherchée en prenant la fonction constante $f = \big(m(\Omega)\big)^{-\frac{1}{\mathsf{q}}}$.

Exercice 6. **(a)** f est une fonction mesurable et $E_\lambda = f^{-1}(]\lambda,+\infty[)$. Donc E_λ est mesurable.
(b) Comme f est une fonction mesurable, le théorème 3.6 (chapitre 10) du cours nous assure que l'ensemble
$$E =\colon \big\{(x,\lambda) \in \mathbb{R}\times]0,+\infty[\colon\ f(x) > \lambda\big\}.$$
est mesurable. Le théorème de Tonelli appliqué à $frm[o]--_E$ nous assure alors que l'application $\lambda \longmapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.
(c) Pour tout exposant réel p avec $1 \leqslant \mathsf{p} < \infty$, appliquons le théorème de Tonelli à la fonction mesurable positive $(x,\lambda) \to h(x,\lambda) := p\lambda^{p-1} frm[o]--_E(x,\lambda)$.

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} h(x,\lambda)\,dx\,d\lambda &= \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\int\limits_{]0,+\infty[} p\lambda^{p-1} frm[o]--_E(x,\lambda)\,d\lambda\big)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \big(\int\limits_{]0,+\infty[} p\lambda^{p-1} frm[o]--_{[0,f(x)]}(\lambda)\,d\lambda\\ &= \int_{\mathbb{R}} \big(f(x)\big)^{\mathsf{p}}\,dx.\end{aligned}$$

Restitution des copies :



23. Examen du Mardi 12 janvier 2016

$-\,4$ points si sonnerie de téléphone portable se déclenche
$-\,1$ point si copies doubles non numérotées $1/4$, $2/4$, $3/4$, $4/4$
$-\,1$ point si réponses correctes non soulignées ou encadrées
$-\,\frac{1}{2}$ point par affirmation erronée écrite au hasard pour tenter
$+\,1$ point-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations esthétiques

Recommandations générales

I. Différencier

- Questions rapides pour lesquelles il suffit d'invoquer un résultat connu.
- Questions moins rapides sur lesquelles il faut réfléchir.

II. Traiter les questions faciles au début d'un exercice de manière efficace et concise

Exercice 1. On note $\|x\| = \big(x_1^2 + \cdots + x_d^2\big)^{1/2}$ la norme d'un vecteur $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Soit un compact quelconque $K \subset \mathbb{R}^d$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on introduit $K_\varepsilon := \big\{x \in \mathbb{R}^d \colon \mathsf{dist}\,(x, K) \leqslant \varepsilon\big\}$.

(a) Justifier que les K_ε sont aussi compacts. Figure-bonus possible.

(b) Soit une famille $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ de fonctions $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ positives $\rho_\varepsilon \geqslant 0$ satisfaisant $\mathsf{supp}\,\rho_\varepsilon \subset \{x \in \mathbb{R}^d \colon \|x\| \leqslant \varepsilon\}$ et $\int \rho_\varepsilon = 1$. Écrire les deux expressions intégrales du produit de convolution :

$$\chi_\varepsilon := \mathbf{1}_{K_\varepsilon} * \rho_\varepsilon.$$

(c) Montrer que $0 \leqslant \chi_\varepsilon(x) \leqslant 1$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d$.

(d) Montrer que $\chi_\varepsilon(x) = 1$ en tout point $x \in K$.

(e) Justifier brièvement et rigoureusement que $\chi_\varepsilon \in \mathscr{C}^0$, puis que $\chi_\varepsilon \in \mathscr{C}^1$, et enfin que $\chi_\varepsilon \in \mathscr{C}^\infty$.

(f) Montrer que $\chi_\varepsilon(x) = 0$ en tout point $x \in \mathbb{R}^d$ tel que $\mathsf{dist}\,(x, K) \geqslant 2\,\varepsilon$. Figure-bonus possible.

(g) Interpréter le résultat obtenu en l'énonçant sous la forme d'un théorème clair et élégant. Figure-bonus possible.

Exercice 2. Soit un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide, c'est-à-dire avec $-\infty < a < b < \infty$, et soit une fonction continue *strictement* positive $w\colon [a, b] \longrightarrow]0, \infty[$.

(a) Montrer rapidement que tous les *moments* de w d'ordre un entier quelconque $k \in \mathbb{N}$ sont finis :

$$\int_a^b |x|^k \, w(x) \, dx \ < \ \infty \qquad\qquad (\forall \, k \in \mathbb{N}).$$

(b) Justifier en une (voire deux) ligne(s) que les deux espaces vectoriels :

$$\mathscr{C}_w^0([a,b]) \ := \ \left\{ f\colon \ [a,b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \text{ continue : } \ \int_a^b \big|f(x)\big|^2 \, w(x) \, dx \ < \ \infty \right\},$$

$$L_w^2([a,b]) \ := \ \left\{ f\colon \ [a,b] \ \longrightarrow \ \mathbb{R} \text{ mesurable : } \ \int_a^b \big|f(x)\big|^2 \, w(x) \, dx \ < \ \infty \right\},$$

satisfont $\mathscr{C}_w^0 \subset L_w^2$.

(c) Justifier de manière concise l'énoncé représenté symboliquement par :

$$\overline{\mathscr{C}_w^0}^{\,\|\cdot\|_{L_w^2}} \ = \ L_w^2.$$

Indication: Traiter le cas $w \equiv 1$, et ne pas s'attarder sur le cas où $w \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ (admettre l'énoncé ou dire quelques mots concernant la généralisation).

(d) Montrer brièvement que l'espace L_w^2, muni du produit scalaire :

$$\big\langle f, \, g \big\rangle_w \ := \ \int_a^b f(x) \, g(x) \, w(x) \, dx$$

est un espace *pré-hilbertien*, à savoir un espace qui satisfait tous les axiomes d'un espace de Hilbert, sauf la complétude. À la fin de cet Exercice, on démontrera que L_w^2 est en fait complet, question (sans indication) qui peut d'ailleurs être traitée indépendamment dès maintenant.

(e) Montrer de manière concise que l'espace vectoriel $\mathscr{P}_n\big|_{[a,b]}$ des polynômes de degré $\leqslant n$ restreints à $[a, b]$ est contenu dans $\mathscr{C}_w^0$.

(f) Pour deux suites $(\alpha_n)_{n=0}^\infty$ et $(\beta_n)_{n=0}^\infty$ de nombres réels, soit la suite de polynômes $\big(P_n(x)\big)_{n=0}^\infty$ commençant avec $P_0(x) \ := \ 1$ et $P_1(x) \ := \ x - \alpha_0$, qui est définie ensuite par récurrence via :

$$P_{n+1}(x) \ := \ (x - \alpha_n) \, P_n(x) - \beta_{n-1} \, P_{n-1}(x) \qquad\qquad (\forall \, n \geqslant 1).$$

Vérifier que tous ces P_n sont de degré n *unitaires*, c'est-à-dire ont pour monôme de tête $1 \cdot x^n$.

(g) On définit :

$$P_1(x) \ := \ x - \frac{\int_a^b x \, w(x) \, dx}{\int_a^b w(x) \, dx},$$

ce qui correspond à un choix déterminé de α_0. Montrer que P_0 et P_1 sont orthogonaux entre eux pour $< \cdot, \cdot >_w$.

(h) Montrer qu'avec le choix successif de constantes :

$$\alpha_n := \frac{\int_a^b x\, P_n(x)^2\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_n(x)^2\, w(x)\, dx} \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\beta_{n-1} := \frac{\int_a^b x\, P_n(x)\, P_{n-1}(x)\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_{n-1}(x)^2\, w(x)\, dx} \qquad (n \geqslant 1),$$

les polynômes $\big(P_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$ sont alors orthogonaux deux à deux :

$$0 \;=\; \big\langle P_{n_1},\, P_{n_2}\big\rangle_w \qquad (\forall\, n_1 \neq n_2).$$

(i) Montrer (au passage) qu'une expression alternative pour β_{n-1} est :

$$\beta_{n-1} := \frac{\int_a^b P_n(x)^2\, w(x)\, dx}{\int_a^b P_{n-1}(x)^2\, w(x)\, dx}.$$

(j) En partant de la suite $\big(P_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$, trouver (en une ligne) une suite $\big(E_n(x)\big)_{n=0}^{\infty}$ de polynômes qui sont *orthonormés* pour $< \cdot, \cdot >_w$.

(k) Soit une fonction quelconque $f \in L^2_w$. Montrer, en utilisant un théorème du cours, qu'il existe un unique polynôme $R_n(f)$ de degré $\leqslant n$ tel que :

$$\big\| f - R_n(f) \big\|_w \;=\; \inf_{g \in \mathscr{P}_n} \| f - g \|_w.$$

(l) En utilisant sans le re-démontrer le Théorème de Weierstrass d'après lequel :

$$\overline{\cup_{n \geqslant 0}\, \mathscr{P}_n\big|_{[a,b]}}^{\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0}} \;=\; \mathscr{C}^0([a,b]),$$

et en admettant temporairement que $L^2_w([a,b])$ est complet, montrer que la suite de polynômes orthogonaux unitaires $\big(E_n\big)_{n=0}^{\infty}$ est une base hilbertienne de $L^2_w([a,b])$.

(m) Montrer que les deux espaces normés suivants sont isomorphes :

$$\Big(L^2\big([a,b],\, \mathbb{R}\big),\; \|\cdot\|_{L^2}\Big) \;\cong\; \Big(L^2_w\big([a,b],\, \mathbb{R}\big),\; \|\cdot\|_{L^2_w}\Big),$$

et montrer ensuite que $\big(L^2_w,\, \|\cdot\|_{L^2_w}\big)$ est complet.

Exercice 3. On admettra qu'il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que :

$$\Bigg| \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ 1 \leqslant |k| \leqslant K}} \frac{e^{ik\theta}}{k} \Bigg| \leqslant C \;<\; \infty,$$

uniformément pour *tout* réel $\theta \in \mathbb{R}$ et pour *tout* entier $K \geqslant 1$. On introduit les polynômes trigonométriques :

$$E_K^-(\theta) \;:=\; \sum_{-K \leqslant k \leqslant -1} \frac{e^{ik\theta}}{k},$$

$$E_K^+(\theta) \;:=\; \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \frac{e^{ik\theta}}{k},$$

$$P_K^-(\theta) \;:=\; e^{i2K\theta}\, E_K^-(\theta),$$

$$P_K^+(\theta) \;:=\; e^{i2K\theta}\, E_K^+(\theta).$$

(a) Montrer que $P_K(\theta) := P_K^-(\theta) + P_K^+(\theta)$ est uniformément borné, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et tout $K \geqslant 1$.

(b) Montrer que la suite $\big(E_K^-(0)\big)_{K=1}^\infty$ est *non bornée*, et trouver un équivalent d'icelle lorsque $K \longrightarrow \infty$.

(c) Pour une fonction Lebesgue-intégrable $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$, et pour tout entier $n \geqslant 0$, on rappelle l'expression :

$$S_n(f)(\theta) := \sum_{k=-n}^{k=+n} \bigg(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-ikt}\, \frac{dt}{2\pi} \bigg)\, e^{ik\theta}$$

de la n-ème somme partielle de la série de Fourier de f. Montrer que (figure-bonus possible) :

$$S_n\big(P_K\big) = \begin{cases} P_K & \text{lorsque } n \geqslant 3K, \\ P_K^- & \text{lorsque } n = 2K, \\ 0 & \text{lorsque } n \leqslant K-1. \end{cases}$$

(d) Soit une suite $(a_\ell)_{\ell=1}^\infty$ de nombres réels $a_\ell > 0$ telle que la série $\sum_{\ell=1}^\infty a_\ell < \infty$ converge. Montrer qu'il existe une suite $(K_\ell)_{\ell=1}^\infty$ d'entiers avec $K_{\ell+1} \geqslant 4\, K_\ell$ satisfaisant :

$$\infty = \lim_{\ell\to\infty} \big(a_\ell \cdot \log K_\ell\big).$$

(e) On introduit la série :

$$W(\theta) := \sum_{\ell=1}^\infty a_\ell\, P_{K_\ell}(\theta).$$

Montrer qu'elle définit une fonction continue $W \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}, \mathbb{C})$.

(f) En $\theta = 0$, montrer que :

$$-\infty = \lim_{j\to\infty} S_{2K_j}(W)(0).$$

(g) Énoncer le résultat obtenu sous la forme d'un théorème clair, élégant, parlant.

Exercice 4. Soit une fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à valeurs complexes satisfaisant $1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi|^2$, et soit $\widehat{\psi}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} \psi(x)\, e^{-2i\pi\, x\xi}\, dx$ sa transformée de Fourier.

(a) Rappeler la définition de l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que :

$$1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \big(x\, \psi'(x)\, \overline{\psi(x)} + x\, \overline{\psi'(x)}\, \psi(x)\big)\, dx.$$

(c) Montrer que :

$$1 \leqslant 4 \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, |\psi(x)|^2\, dx \bigg) \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} \big|\psi'(x)\big|^2\, dx \bigg).$$

(d) Montrer l'inégalité :

$$\frac{1}{16\,\pi^2} \leqslant \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\, |\psi(x)|^2\, dx \bigg) \bigg(\int_{-\infty}^{+\infty} \xi^2\, |\widehat{\psi}(\xi)|^2\, d\xi \bigg).$$

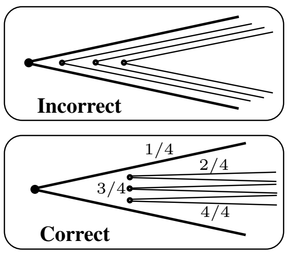
(e) Montrer qu'il y a égalité dans cette inégalité lorsque, et seulement lorsque, $\psi(x) = a\, e^{-bx^2}$, en termes de deux nombres réels a et b satisfaisant $b > 0$ et $a^2 = \sqrt{2b/\pi}$.

Exercice 5. Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}\big/2\pi\mathbb{Z}$, soit une fonction continue $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{T})$. Montrer que la série :

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

est absolument convergente.

Restitution des copies :



24. Rattrapage du Jeudi 14 juin 2016

-4 **points si sonnerie de téléphone portable se déclenche**
-1 **point si copies doubles non numérotées** $1/4$**,** $2/4$**,** $3/4$**,** $4/4$
-1 **point si réponses correctes non soulignées ou encadrées**
$-\frac{1}{2}$ **point par affirmation erronée écrite au hasard pour tenter**
$+1$ **point-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations esthétiques**

Recommandations générales

I. Différencier

- Questions rapides pour lesquelles il suffit d'invoquer un résultat connu.
- Questions moins rapides sur lesquelles il faut réfléchir.

II. Traiter les questions faciles au début d'un exercice de manière efficace et concise

Exercice 1. Soit dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable.

(a) Justifier que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| = \infty\}$ est de mesure nulle.

(b) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,n} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx.$$

(c) En produisant un contre-exemple, montrer que cette limite n'est pas toujours égale à 0 (voire n'existe pas toujours) lorsque la fonction mesurable f n'est pas supposée intégrable.

(d) Maintenant, soit $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction $h := \lim_{n\to\infty} h_n$. Justifier que h est mesurable.

(e) On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$. Après en avoir justifié l'utilisation, appliquer le Lemme de Fatou aux deux fonctions $g_n - h_n$ et $g_n + h_n$.

(f) Montrer l'implication :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\bigg) \;\;\Longrightarrow\;\; \bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx\bigg).$$

(g) Soit enfin $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Établir l'équivalence :

$$\left(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x) - f(x)\big|\, dx \;=\; 0\right) \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)\big|\, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx\right).$$

Indication: Introduire $g_n := 2\,\big(|f_n| + |f|\big)$ ainsi que $h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Exercice 2. Soit une fonction mesurable intégrable $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto e^{-xt}\, f(x)$ est aussi mesurable intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On introduit alors la *transformée de Laplace* de f :

$$L_f(t) \;:=\; \int_0^{\infty} e^{-xt}\, f(x)\, dx \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) \in \mathbb{R}$ est finie et continue.

(c) Montrer que $0 = \lim_{t\to\infty} L_f(t)$.

(d) Calculer une expression explicite de $L_f(t)$ pour $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$, puis faire de même pour $f(x) := \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant 1\}} \cdot \sin(x)$.

(e) Soient maintenant un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn).$$

(f) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;=\; \int_T^{\infty} f(x)\, dx.$$

(g) Soit un nombre réel $a > 0$. Existe-t-il une fonction mesurable intégrable f sur $\mathbb{R}_+$ telle que $L_f(t) = e^{-at}$ pour tout $t \geqslant 0$?

Exercice 3. On considère l'espace $\mathscr{C} := \mathscr{C}^0([-1,1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur le segment $[-1,1] \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes, et on le muni du produit sesquilinéaire :

$$\langle f,\, g\rangle \;:=\; \int_{-1}^{1} f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \qquad\qquad (f, g \in \mathscr{C}).$$

(a) Justifier en quelques mots le caractère sesquilinéaire de $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et expliquer brièvement pourquoi $\|f\| := \sqrt{\langle f, f\rangle}$ définit une norme sur les éléments $f \in \mathscr{C}$.

(b) En les énonçant soigneusement, rappeler au moins trois théorèmes fondamentaux du cours concernant l'espace $L^2\big([-1,1],\, \mathbb{C}\big)$.

(c) On s'intéresse à la suite, indexée par un entier $n \geqslant 1$, de fonctions (impaires) $f_n\colon [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de $\mathscr{C}$ qui sont définies par :

$$f_n(t) \;:=\; \begin{cases} n\,t & \text{lorsque} \quad |t| < \frac{1}{n} \\ \mathrm{sgn}(t) \cdot 1 & \text{lorsque} \quad \frac{1}{n} \leqslant |t| \leqslant 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tous entiers $1 \leqslant n \leqslant m$, on a la majoration (non optimale) :

$$\big\| f_m - f_n \big\| \leqslant \tfrac{2}{\sqrt{3\,n}}.$$

Indication: Majorer séparément $\int_0^{\frac{1}{m}}$ et $\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}$, ou trouver une majoration alternative simple qui pourra interpréter le rôle qu'on attend d'elle.

(d) Montrer que cette suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $L^2([-1,1],\mathbb{C})$ vers une fonction qui vaut presque partout 1 sur $]0,1]$ et presque partout -1 sur $[-1,0[$.

(e) L'espace $\mathscr{C}$ muni de la norme $\|\cdot\|$ est-il un espace de Hilbert ? Interpréter intelligemment la réponse proposée.

Exercice 4. Sur la droite numérique complète $\mathbb{R}$, on considère l'*équation de la chaleur* définie en temps $t \geqslant 0$ par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) && {\scriptstyle (x\in\mathbb{R},\ t\geqslant 0)},\\ u(x,0) &= f(x) && {\scriptstyle (x\in\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

avec distribution de température $u(x,0)$ prescrite à l'origine des temps comme étant une certaine fonction intégrable donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$. On suppose qu'il en existe une solution $u = u(x,t)$ de classe $\mathscr{C}^2$ par rapport à x pour t fixé s'amenuisant ainsi que ses dérivées à l'infini :

$$0 = \lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) \qquad {\scriptstyle (\forall\, t\geqslant 0)}$$

et qui est de plus contrôlée ainsi que sa dérivée temporelle en termes d'une certaine fonction-majorante positive intégrable fixée $g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{R}_+)$:

$$\big|u(x,t)\big| \leqslant g(x) \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x) \qquad {\scriptstyle (\text{pour presque tout } x\in\mathbb{R})},$$

uniformément pour tout $t \geqslant 0$. On rappelle que la *transformée de Fourier* d'une fonction $h \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{h}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

(a) La transformée de Fourier de u par rapport à x s'exprimant alors comme :

$$\widehat{u}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx,$$

vérifier qu'elle est bien définie et qu'elle prend des valeurs finies.

(b) Montrer, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $t \geqslant 0$, que :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

(c) Concocter une équation différentielle du premier ordre satisfaite par $\widehat{u}(\xi,t)$.

(d) Montrer que la fonction $t \longmapsto \widehat{u}(\xi,t)$ est continue en $t = 0$, $t \geqslant 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

(e) Montrer que :

$$\widehat{u}(\xi, t) \,=\, \widehat{u}(\xi, 0)\, e^{-4\pi^2\xi^2 t} \qquad\qquad (\forall\, \xi \in \mathbb{R},\, \forall\, t \geqslant 0).$$

(f) Soient deux fonctions intégrables $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comment s'exprime la transformée de Fourier $\widehat{h_1 * h_2}$ du produit de convolution — dont on rappellera la définition précise — en termes de $\widehat{h}_1$ et de $\widehat{h}_2$?

(g) Trouver une expression de la solution u au problème de la chaleur unidimensionnel sous la forme d'un produit de convolution. Indication: On rappelle que pour tout paramètre réel $\sigma > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est la fonction $\xi \longmapsto e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$.

(h) Conclure que la solution obtenue ainsi est bien de classe $\mathscr{C}^2$ en x, et montrer que pour tout $t > 0$ fixé, elle est bornée en x.

Exercice 5. Soit l'espace $\mathscr{C}$ défini dans l'Exercice 3.

(a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on note $\mathscr{P}_n$ le sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ qui est constitué des fonctions polynomiales de degré $\leqslant n$ restreintes à $[-1, 1]$, et on note $\pi_n \colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{P}_n$ le projecteur orthogonal, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. À l'aide du cours, justifier soigneusement que :

$$0 \,=\, \lim_{n \to \infty} \big\| f - \pi_n(f) \big\| \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{C}).$$

(b) Soit $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ une famille infinie d'éléments $p_n \in \mathscr{P}_n$ qui est de plus orthonormale. Justifier que la sous-famille finie $\{p_0, \dots, p_n\}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer ensuite que $\{p_0, \dots, p_n\}$ forme une base de $\mathscr{P}_n$, quel que soit n.

(c) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathscr{C}$, que :

$$\pi_n(f) \,=\, \sum_{i=0}^{n} \langle f,\, p_i \rangle \cdot p_i$$

puis que :

$$\big\| \pi_n(f) \big\|^2 \,=\, \sum_{i=0}^{n} \langle f,\, p_i \rangle^2.$$

(d) Montrer, pour une fonction $f \in \mathscr{C}$ quelconque, que la série de terme général $\langle f, p_n \rangle^2$ est convergente.

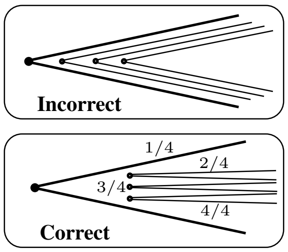
(e) Montrer en fait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \langle f,\, p_n \rangle^2 \,=\, \|f\|^2 \qquad\qquad (\forall\, f \in \mathscr{C}).$$

(f) Tout en établissant son existence, déterminer la limite :

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-1}^{1} f(t)\, p_n(t)\, dt.$$

Restitution des copies :



25. Partiel du jeudi 10 novembre 2016

-4 **points si sonnerie de téléphone portable se déclenche**
-1 **point si copies doubles non numérotées** $1/4$**,** $2/4$**,** $3/4$**,** $4/4$
-1 **point si réponses correctes non soulignées ou encadrées**
-1 **point par affirmation erronée écrite au hasard pour tenter**
$+1$ **point-bonus si au moins 2 réponses accompagnées d'illustrations esthétiques**

Recommandations générales

I. Différencier

- Questions rapides pour lesquelles il suffit d'invoquer un résultat connu.
- Questions moins rapides sur lesquelles il faut réfléchir.

II. Traiter les questions faciles au début d'un exercice de manière efficace et concise

Exercice 1. Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, si une fonction quelconque $g \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est bornée, on rappelle qu'il existe une suite minimisante $(y_\ell^-)_{\ell=1}^\infty$ et une suite maximisante $(y_\ell^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E g = \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^-) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell\to\infty} g(y_\ell^+) = \sup_E g.$$

On suppose donnée une suite de fonctions bornées $f_n \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, qui convergent uniformément vers une certaine fonction $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \quad \forall\, x \in E \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Si deux fonctions $h_1, h_2 \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ bornées satisfont :

$$h_1(x) \leqslant h_2(x) \qquad\qquad (\forall\, x \in E),$$

montrer que :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad \text{et} \qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Big|\inf_E f_n - \inf_E f\Big| \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \Big|\sup_E f_n - \sup_E f\Big| \leqslant \varepsilon.$$

On travaille dorénavant sur un intervalle réel $E = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste $\mathrm{N}(\varepsilon)$ pour que :

$$n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon) \implies \left(\forall\, x \in [a, b] \quad \big|f_n(x) - f(x)\big| \leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}\right).$$

Soit $g \colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

(d) Si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$ est une subdivision quelconque de $[a, b]$ avec $\nu \geqslant 1$, rappeler les deux définitions des sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(g)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(g)$ de g.

(e) Montrer que pour tout $n \geqslant \mathrm{N}_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Montrer que toute fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

(g) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Établir que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien réel standard $\mathbb{R}^d$ de dimension $d \geqslant 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une fonction $f \colon E \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels est dite *mesurable* si *tous* ses ensembles de sous-niveau :

$$\big\{x \in E \colon\; f(x) < a\big\} \qquad\qquad (\forall\, a \in \mathbb{R}),$$

sont mesurables.

(a) Montrer que $\{x \in E \colon\; f(x) \geqslant a\}$ est mesurable, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\{f = -\infty\}$ et $\{f = +\infty\}$ sont mesurables.

(c) Montrer, pour tous réels $-\infty < a < b < +\infty$, que l'ensemble :

$$\big\{x \in E \colon\; a < f(x) < b\big\}$$

est mesurable.

(d) Lorsque $f \colon E \longrightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, montrer que f est mesurable si et seulement si l'image inverse $f^{-1}(\mathscr{O})$ par f de tout sous-ensemble ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3. [Questions d'assimilation du cours] Énoncer précisément sans démonstrations :

(a) le théorème de Tonelli, suivi du théorème de Fubini, en explicitant l'articulation logique naturelle qui existe entre eux lorsqu'on doit les appliquer dans des situations concrètes ;

(b) le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue.

Exercice 4. Soit dx la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable.

(a) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \colon |f(x)| = \infty\}$ est de mesure nulle.

(b) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\,n} \int_{-n}^{n} f(x)\,dx.$$

(c) En produisant un contre-exemple, montrer que cette limite n'est pas toujours égale à 0 (voire n'existe pas toujours) lorsque la fonction mesurable f n'est pas supposée intégrable.

(d) Maintenant, soit $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction $h := \lim_{n\to\infty} h_n$. Justifier que h est mesurable.

(e) On suppose de plus que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$. Après en avoir justifié l'utilisation, appliquer le Lemme de Fatou aux deux fonctions $g_n - h_n$ et $g_n + h_n$.

(f) Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ de nombres réels $a_n \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\liminf_{n\to\infty} \big(-a_n\big) = -\limsup_{n\to\infty} a_n.$$

(g) Montrer l'implication :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx\bigg) \implies \bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x)\,dx\bigg).$$

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Établir l'équivalence :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x) - f(x)\big|\,dx = 0\bigg) \iff \bigg(\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f_n(x)\big|\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx\bigg).$$

Indication: Pour l'implication « $\Longleftarrow$ », introduire $g_n := 2\,\big(|f_n| + |f|\big)$ ainsi que $h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Pour l'implication « $\Longrightarrow$ », utiliser l'inégalité $\big||a| - |b|\big| \leqslant \big|a - b\big|$ valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit une fonction mesurable intégrable $f \colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \longmapsto e^{-xt}\, f(x)$ est aussi mesurable intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(b) On introduit alors la *transformée de Laplace* de f :

$$L_f(t) := \int_0^{\infty} e^{-xt}\, f(x)\,dx \qquad\qquad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) \in \mathbb{R}$ est finie et continue.

(c) Montrer que $0 = \lim_{t\to\infty} L_f(t)$.

(d) Calculer une expression explicite de $L_f(t)$ pour $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$.

(e) Faire de même pour $f(x) := \mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant 1\}} \cdot \sin(x)$.

(f) Soient maintenant un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^\infty e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn).$$

(g) Montrer que :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-\,e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;=\; \int_T^\infty f(x)\, dx.$$

(h) Soit un nombre réel $a > 0$. Établir qu'il n'existe pas de fonction mesurable intégrable f sur $\mathbb{R}_+$ dont la transformée de Laplace vaut $L_f(t) = e^{-at}$ pour tout $t \geqslant 0$.

(i) Pour $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mesurable intégrable, montrer que $t \longmapsto L_f(t)$ est $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \infty[$.

(j) Quand $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, montrer que :

$$\Big(x \longmapsto x\, f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big) \iff \Big(t \longmapsto L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big).$$

26. Corrigé détaillé du partiel du jeudi 10 novembre 2016

Exercice 1. **(a)** Faisons $\varepsilon := 1$, prenons $n := \mathrm{N}(1)$, et, pour tout $x \in E$, par majoration triangulaire, déduisons le résultat voulu :

$$\begin{aligned}|f(x)| &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x) + f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant \big|f(x) - f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| + \big|f_{\mathrm{N}(1)}(x)\big| \\ &\leqslant 1 + \sup_E \big|f_{\mathrm{N}(1)}\big| \\ &< \infty,\end{aligned}$$

car par hypothèse, $f_{\mathrm{N}(1)}$ est bornée sur E !

(b) Clairement, de $h_1 \leqslant h_2$, on déduit pour tout $x \in E$ que :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_1(x) \leqslant h_2(x) \leqslant \sup_E h_2,$$

d'où deux extraits intéressants pour la suite :

$$\inf_E h_1 \leqslant h_2(x) \qquad \text{et} \qquad h_1(x) \leqslant \sup_E h_2 \qquad (\forall\, x \in E).$$

En prenant deux suites $(y_{2,\ell}^-)_{\ell=1}^\infty$ et $(y_{1,\ell}^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E h_2 = \lim_{\ell\to\infty} h_2\big(y_{2,\ell}^-\big) \qquad \text{et} \qquad \lim_{\ell\to\infty} h_1\big(y_{1,\ell}^+\big) = \sup_E h_1,$$

il vient comme désiré :

$$\inf_E h_1 \leqslant \inf_E h_2 \qquad \text{et} \qquad \sup_E h_1 \leqslant \sup_E h_2.$$

(c) En appliquant le résultat de la question **(b)** qui précède aux deux inégalités :

$$f_n(x) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f_n(x) + \varepsilon \qquad (\forall\, x \in \mathbb{E}),$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\inf_E f_n - \varepsilon &\leqslant \inf_E f, \\ \sup_E f_n - \varepsilon &\leqslant \sup_E f,\end{aligned} \qquad \text{et} \qquad \begin{aligned}\inf_E f &\leqslant \inf_E f_n + \varepsilon, \\ \sup_E f &\leqslant \sup_E f_n + \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où :

$$-\varepsilon \leqslant \inf_E f_n - \inf_E f \leqslant \varepsilon \qquad \text{et} \qquad -\varepsilon \leqslant \sup_E f_n - \sup_E f \leqslant \varepsilon,$$

et on reconstitue l'inégalité demandée en se souvenant que $-|\alpha| \leqslant \alpha \leqslant |\alpha|$ pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Pour qui n'a pas oublié son cours :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} g,\\ \Sigma^\Delta(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} g.\end{aligned}$$

(e) Grâce à la question **(c)** appliquée sur $E := [x_{\kappa-1}, x_\kappa]$, en tenant compte de la normalisation de l'epsilon, nous avons, pour tout $1 \leqslant \kappa \leqslant \nu$:

$$\inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \leqslant \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f,$$

ainsi que :

$$\sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f \leqslant \sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned}\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n - \varepsilon\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1})\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a}\right]\\ &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f\\ &= \Sigma_\Delta(f),\end{aligned}$$

ce qui est la première inégalité demandée.

La seconde inégalité $\Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f)$, abondamment vue en cours, est essentiellement évidente, donc pourrait être revue en instantané ici en notant que l'infimum de f sur chaque intervalle $[x_{\kappa-1}, x_\kappa]$ est bien entendu majoré par son supremum sur ce même segment.

Pour ce qui est de la troisième inégalité, on procède de manière similaire quoique légèrement différente :

$$\begin{aligned}\Sigma^\Delta(f) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f\\ &\leqslant \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \left[\sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}\right]\\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_\kappa]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\kappa=1}^{\nu}(x_\kappa - x_{\kappa-1})\\ &= \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de :

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leqslant \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Soit comme ci-dessus $f = \lim f_n$, la convergence étant uniforme sur $[a, b]$. L'objectif est de trouver, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, une subdivision Δ de $[a, b]$ assez fine pour que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant 3\,\varepsilon.$$

Rien de plus facile ! Sachant que pour tout quadruplet de nombres réels :

$$\alpha \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \beta,$$

le petit segment $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ a une longueur inférieure au grand :

$$\delta - \gamma \leqslant \beta - \alpha,$$

on tire des inégalités de la question précédente, pour tout $n \geqslant \mathrm{N}(\varepsilon)$:

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leqslant \Sigma^\Delta(f_n) - \Sigma_\Delta(f_n) + 2\,\varepsilon,$$

puis en prenant $n := \mathrm{N}(\varepsilon)$, il suffit de choisir Δ telle que :

$$\Sigma^\Delta\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) - \Sigma_\Delta\big(f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}\big) \leqslant \varepsilon,$$

ce qui est possible, puisque $f_{\mathrm{N}(\varepsilon)}$ est Riemann-intégrable par hypothèse !

(g) Dans le cours, on a démontré que les fonctions en escalier sont Riemann-intégrables, donc la dernière question **(f)** vient d'établir que leurs limites uniformes — les fonctions réglées — sont aussi Riemann-intégrables.

Exercice 2. **(a)** D'après un théorème du cours, le complémentaire dans $\mathbb{R}$ d'un ensemble mesurable est toujours mesurable, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{f \geqslant a\} &= E \big\backslash \{f < a\} \\ &= E \cap \big(\mathbb{R} \big\backslash \{f < a\}\big) \end{aligned}$$

est bel et bien mesurable !

(b) La mesurabilité étant préservée par réunions et par intersections dénombrables, les deux écritures :

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f < -n\} \qquad \text{et} \qquad \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \geqslant 1} \{f \geqslant n\}$$

font voir le résultat, en utilisant d'ailleurs furtivement **(a)** qui précède.

(c) On écrit :

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} \cap \{f > a\},$$

puis, afin de faire voir que le deuxième ensemble est lui aussi mesurable, on le récrit sous la forme adéquate :

$$\begin{aligned}\{f > a\} &= \bigcup_{n\geqslant 1} \{f \geqslant a + \tfrac{1}{n}\} \\ &= \underbrace{\bigcup_{n\geqslant 1} \Bigg(\underbrace{E \Big\backslash \underbrace{\{f < a + \tfrac{1}{n}\}}_{\text{mesurable par définition}}}_{\text{mesurable par un théorème connu}} \Bigg)}_{\text{mesurable par un théorème connu}}.\end{aligned}$$

(d) Dans l'un des tous premiers théorèmes du cours sur les ensembles mesurables, on a montré en dimension $d = 1$ que tout ouvert $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints :

$$\mathscr{O} = \bigcup_{n\geqslant 1}]a_n, b_n[\qquad\qquad (-\infty \leqslant a_n < b_n \leqslant \infty),$$

d'où :

$$f^{-1}(\mathscr{O}) = \underbrace{\bigcup_{n\geqslant 1} \underbrace{f^{-1}\big(]a_n, b_n[\big)}_{\text{mesurable par }(\mathbf{c})}}_{\text{donc mesurable !}}.$$

Exercice 3. (a) Comme cela a été dit en cours, dans la pratique réelle des exercices, c'est-à-dire dans la vraie vie des mathématiques, on rencontre parfois une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie sur un espace-produit :

$$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \qquad\qquad (d_1 \geqslant 1,\, d_2 \geqslant 1),$$

dont on ignore si elle est Lebesgue-intégrable — telle est la question que l'on se pose !

Alors on lui associe la fonction mesurable positive $|f| \geqslant 0$, fonction dont on voudrait déterminer si elle est d'intégrale finie, ce qui rendrait l'étudiant(e) très content(e).

Mais comme on peut toujours calculer l'intégrale de $|f| \geqslant 0$ *puisqu'on accepte, dans la théorie, que les intégrales de fonctions mesurables* $\geqslant 0$ *puisse valoir* ∞, on espère, en utilisant le Théorème de Tonelli qui permet de se ramener à deux intégrales emboîtées en dimensions inférieures $d_1 < d_1 + d_2$ et $d_2 < d_1 + d_2$, pouvoir calculer ou estimer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \big|f(x,y)\big|\, dx \right) dy,$$

et alors — bingo ! —, si le résultat numérique s'avère être *fini*, on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}^d$! Quel contentement !

Car ensuite, le Théorème de Fubini peut être appliqué puisque l'hypothèse (cruciale) $\int |f| < \infty$ qui apparaît dans son énoncé est satisfaite, et on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x,y)\, dx \right) dy}_{\text{en général calculable}} = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Bien entendu, ces énoncés sont tout aussi vrais pour l'ordre inverse d'intégration itérée :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \big| f(x,y) \big| \, dy \bigg) \, dx,$$

puis :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \bigg(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x,y) \, dy \bigg) \, dx,$$

et la pratique enseigne que si on a fait un mauvais premier choix d'ordre, il y a de bonnes chances que l'ordre inverse ouvre les portes secrètes.

(b) Le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures, s'énonce comme suit — attention à la frappe sur les doigts de qui oublie l'hypothèse $f_n \leqslant 0$!

Théorème. [Inégalité généralissime de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur* $\mathbb{R}^d$ *:*

$$f_n \leqslant 0 \qquad\qquad {\scriptstyle (n \geqslant 1)},$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$*, on a :*

$$\limsup_{n \to \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) \, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \to \infty} f_n. \qquad \square$$

(c) Éh bien, le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue s'énonce comme suit.

Théorème. [Changement de variables] *Soit* $\varphi \colon U \overset{\sim}{\longrightarrow} V$ *un difféomorphisme* $\mathscr{C}^1$ *entre deux ouverts* $U \subset \mathbb{R}^d$ *et* $V \subset \mathbb{R}^d$*. Alors pour toute fonction mesurable* $f \colon V \longrightarrow \mathbb{C}$*, la composée* $f \circ \varphi$ *:*

$$U \overset{\varphi}{\underset{\sim}{\longrightarrow}} V \overset{f}{\longrightarrow} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f *est de plus Lebesgue-intégrable,* $f \circ \varphi$ *est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :*

$$\int_V f(y) \, dy = \int_U f \circ \varphi(x) \, \big| \mathrm{Jac}\, \varphi(x) \big| \, dx. \qquad \square$$

(d) Le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dont l'intégrande est de classe $\mathscr{C}^1$ par rapport à la variable et au paramètre s'énonce comme suit.

Théorème. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Si* $E \times I \ni (x,t) \longmapsto f(x,t) \in \mathbb{C}$ *est une fonction définie sur le produit d'un sous-ensemble mesurable* $E \subset \mathbb{R}^d$ *par un intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ *d'intérieur non vide telle que :*

(i) *pour tout* $t \in I$*, la fonction* $x \longmapsto f(x,t)$ *est Lebesgue-intégrable en la variable* x *sur* E *;*

(ii) *pour tout* $x \in E$*, la fonction* $t \longmapsto f(x,t)$ *est* $\mathscr{C}^1$*, de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t);$$

(iii) *il existe une fonction positive $g\colon E \longrightarrow \mathbb{R}^+$ mesurable Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant g(x),$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;

Alors en tout $t \in I$ fixé, la fonction :

$$x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E, et surtout, la fonction :

$$t \longmapsto \int_E f(x,t)\,dx$$

est dérivable sur I de dérivée égale à :

$$\frac{d}{dt}\int_E f(x,t)\,dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx. \qquad \square$$

Exercice 4. Soit donc $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable, à savoir dont l'intégrale de la valeur absolue est finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx < \infty.$$

(a) Le fait que $\{|f| = \infty\}$ est de mesure nulle est un théorème du cours, mais redémontrons-le. Pour tout entier $\mathrm{N} \geqslant 1$, la majoration :

$$\mathrm{N} \cdot m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \leqslant \int |f| < \infty,$$

donne l'*inégalité de Tchebytchev :*

$$m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \leqslant \frac{\int |f|}{\mathrm{N}},$$

dont le membre de droite tend visiblement vers zéro lorsque $\mathrm{N} \longrightarrow \infty$. Mais puisque :

$$\big\{|f| = \infty\big\} = \bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \big\{|f| \geqslant \mathrm{N}\big\},$$

un théorème du cours sur les intersections dénombrables décroissantes d'ensembles mesurables de mesure finie à partir d'un certain rang — ce qui est le cas ici ! — fait voir la nullité demandée :

$$\begin{aligned} m\big(\{|f| = \infty\}\big) &= m\bigg(\bigcap_{\mathrm{N}\geqslant 1} \{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\bigg) \\ &= \lim_{\mathrm{N}\to\infty} m\big(\{|f| \geqslant \mathrm{N}\}\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On pourrait aussi raisonner de manière plus directe, mais quelque peu moins rigoureuse, par l'absurde, en supposant que $m(\{|f| = \infty\}) > 0$, ce qui, puisque f est supposée

Lebesgue-intégrable, conduirait à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$\begin{aligned}\infty \;>\; \int_{\mathbb{R}} |f| \;&\geqslant\; \infty\cdot m\big(\{|f|=\infty\}\big)\\ &=\; \infty.\end{aligned}$$

Notons qu'il serait impossible d'en puiser une contradiction lorsque $0 = m(\{|f|=\infty\})$, puisque $\infty \cdot 0$ n'a pas de valeur fixe attribuable.

(b) Puisque le sujet demande d'*appliquer* le théorème de convergence dominée, introduisons la suite de fonctions mesurables :

$$f_n(x) \;:=\; \frac{1}{2n}\, f(x)\, \mathbf{1}_{[-n,+n]}(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

lesquelles sont constamment dominées par la fonction intégrable f :

$$\big|f_n(x)\big| \;\leqslant\; |f(x)| \qquad\qquad (\forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, n\geqslant 1),$$

donc le célèbre théorème de Lebesgue s'applique pour offrir sur un plateau ce qui était demandé :

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx \;&=\; \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx\\ &=\; \int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx\\ &=\; \int_{\mathbb{R}} 0\\ &=\; 0\,!\end{aligned}$$

Subrepticement, on a utilisé ici $0 = m(\{|f|=\infty\})$ de la question **(a)**.

On peut en fait se passer du théorème de convergence dominée, grâce à la majoration élémentaire :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2n}\left|\int_{-n}^{n} f(x)\,dx\right| \;&\leqslant\; \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n}\big|f(x)\big|\,dx\\ &\leqslant\; \underbrace{\frac{1}{2n}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\big|f(x)\big|\,dx}_{\text{constante}\,<\,\infty}}_{\underset{n\,\to\,\infty}{\longrightarrow}\,0},\end{aligned}$$

inégalité qui démontre bien :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\,n}\int_{-n}^{n} f(x)\,dx \;=\; 0.$$

(c) La fonction $f(x) := 1$ constante égale à 1 n'est bien sûr pas intégrable sur $\mathbb{R}$ (elle est d'intégrale infinie, ce qui est exclu), et la suite :

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} 1\cdot dx \;=\; 1,$$

est constante égale à 1, donc ne converge pas vers 0.

Plus subtilement, soit $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{N}$ la fonction *paire* définie, pour $x \geqslant 0$, par :

$$f(x) \,:=\, \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \ x = k \,\in\, \mathbb{N}, \\ (-1)^k \, k & \text{lorsque } \ k-1 < x < k \quad \text{ pour un entier } \ k \geqslant 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} f(x)\, dx \ &= \ \frac{2}{2n} \int_{0}^{n} f(x)\, dx \\ &= \ \frac{1}{n} \big(-1 + 2 - \cdots + (-1)^n \, n \big), \end{aligned}$$

somme dont les creux de vague croissent et décroissent alternativement, égale, lorsque $n = 2n' - 1$ avec $n' \geqslant 1$, à :

$$\begin{aligned} \frac{[-1+2] + [-3+4] + \cdots + [-(2n'-3) + (2n'-2)] - (2n'-1)}{2n'-1} \ &= \ \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n'-1 \text{ fois}} - (2n'-1)}{2n'-1} \\ &= \ \frac{-\,n'}{2n'-1} \\ &\underset{n'\to\infty}{\longrightarrow} \ -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et autrement, lorsque $n' = 2n$ est pair, constamment égale à :

$$\begin{aligned} \frac{[-1+2] + [-3+4] + \cdots + [-(2n'-3) + (2n'-2)] + [-(2n'-1) + (2n')]}{2n'} \ &= \ \frac{\overbrace{1+1+\cdots+1+1}^{n' \text{ fois}}}{2n'} \\ &= \ \frac{n'}{2n'} \\ &= \ \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et là, il y a deux limites possibles, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Un exemple encore plus convaincant faisant voir que la limite de $\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} f$ n'existe pas forcément est la fonction dérivée :

$$f(x) := \frac{d}{dx}\big(x \sin x\big),$$

non intégrable sur $\mathbb{R}$ au sens de Lebesgue (exercice non immédiat) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\sin x + x \cos x\big| \, dx \ = \ \infty,$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \frac{d}{dx}\big(x \sin x\big)\, dx \ &= \ \frac{n \sin n - n \sin(-n)}{2n} \\ &= \ \sin n \end{aligned}$$

oscille sans limite entre -1 et $+1$ lorsque $n \longrightarrow \infty$, grâce à un théorème de densité des entiers naturels modulo 2π.

(d) D'après un théorème du cours, toute suite $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout sur $\mathbb{R}$ a toujours pour limite une fonction qui est mesurable. D'ailleurs, la théorie de la mesure est en grande partie érigée dans l'objectif de stabiliser la mesurabilité par passage à des limites dénombrables quelconques.

Rappelons plus précisément que dans le cours, étant donné une suite quelconque $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables, on a démontré que les deux fonctions :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} h_n$$

sont mesurables, et lorsque ces deux fonctions coïncident — partout ou presque partout, cela revient au même —, *i.e.* lorsque h_n converge (presque partout) vers une certaine fonction-limite $h = \lim h_n$, on en a déduit que :

$$\liminf_{n\to\infty} h_n = \lim_{n\to\infty} = \limsup_{n\to\infty} h_n$$

est mesurable.

(e) On suppose maintenant que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leqslant g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=0}^{\infty}$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n\to\infty} g_n$ qui est *intégrable* sur $\mathbb{R}$.

Il est alors clair que les deux fonctions :

$$g_n - h_n \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad g_n + h_n \geqslant 0$$

combinaisons algébriques de fonctions mesurables sont mesurables, et de plus sont *positives*, hypothèse *requise* pour pouvoir appliquer le Théorème — généralissime ! — de Fatou, lequel donne ici deux fois :

$$\begin{aligned}
\int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n - h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n - h_n\big), \\
\int \liminf_{n\to\infty} \big(g_n + h_n\big) &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int \big(g_n + h_n\big).
\end{aligned}$$

Or $g_n \longrightarrow g$ et $h_n \longrightarrow h$, donc en faisant extrêmement attention à la manière dont les limites inférieures se distribuent à droite, *i.e.* en n'intervertissant pas le signe moins et la limite inférieure :

$$\begin{aligned}
\int g - \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int \big(-h_n\big), \\
\int g + \int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty} \int g_n + \liminf_{n\to\infty} \int h_n.
\end{aligned}$$

(f) Tout le monde sait en effet qu'il faut se méfier des signes « $-$ » ! Rappelons que les limites inférieure et supérieure d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ sont définies par :

$$\liminf_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\inf_{m\geqslant n} b_m\Big) \qquad \text{et} \qquad \limsup_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{m\geqslant n} b_m\Big).$$

Ici appliquée à la suite $b_n := -\,a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le résultat demandé :

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}\big(-\,a_n\big) &= \lim_{n\to\infty}\Big(\inf_{m\geqslant n}\,-\,a_m\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(-\,\sup_{m\geqslant n}a_m\Big) \\
&= -\,\lim_{n\to\infty}\Big(\sup_{m\geqslant n}a_m\Big) \\
&= -\,\limsup_{n\to\infty}a_n.
\end{aligned}$$

(g) Supposons donc que la suite g_n satisfait :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}g(x)\,dx.$$

En revenant alors à la fin de la question **(e)** :

$$\begin{aligned}
\underline{\int g}\;-\int h &\leqslant \underline{\int g}\;+\liminf_{n\to\infty}\int\big(-\,h_n\big), \\
\underline{\int g}\;+\int h &\leqslant \underline{\int g}\;+\liminf_{n\to\infty}\int h_n,
\end{aligned}$$

cela permet instantanément de simplifier et d'obtenir :

$$\begin{aligned}
-\int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\Big(-\int h_n\Big), \\
\int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int h_n.
\end{aligned}$$

Mais la question **(f)** qui précède avait justement préparé le terrain à l'avance pour que l'on puisse remplacer la première limite inférieure par une limite supérieure :

$$\begin{aligned}
-\int h &\leqslant -\,\limsup_{n\to\infty}\int h_n, \\
\int h &\leqslant \liminf_{n\to\infty}\int h_n,
\end{aligned}$$

et en regardant bien droit dans les yeux ces deux inégalités, l'aigle-étudiant qui sommeille en nous les voit s'articuler instantanément en un tryptique :

$$\limsup_{n\to\infty}\int h_n \;\leqslant\; \int h \;\leqslant\; \liminf_{n\to\infty}\int h_n,$$

ce qui lui permet d'attraper d'un seul coup d'œil sa proie-réponse :

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_n(x)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}h(x)\,dx,$$

puisqu'une limite inférieure est de toute façon toujours *inférieure* à une limite supérieure !

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur $\mathbb{R}$ qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Traitons d'abord l'implication facile :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx\;=\;0\bigg)\;\Longrightarrow\;\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg).$$

Pour cela, l'inégalité élémentaire valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$:

$$0\;\leqslant\;\big||a|-|b|\big|\;\leqslant\;\big|a-b\big|,$$

qui apparaissait — heureusement ! — comme indication dans le sujet, va expédier la démonstration comme suit :

$$\begin{aligned}0\;\leqslant\;\bigg|\Big|\int f_n\Big|-\Big|\int f\Big|\bigg|\;&\leqslant\;\bigg|\int f_n-\int f\bigg|\\&\leqslant\;\int\big|f_n-f\big|,\end{aligned}$$

car en effet, si le membre de droite tend vers zéro, le membre de gauche aussi !

Pour traiter l'autre implication, principale :

$$\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)-f(x)\big|\,dx\;=\;0\bigg)\;\Longleftarrow\;\bigg(\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\big|f_n(x)\big|\,dx\;=\;\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx\bigg),$$

introduisons, comme cela a été gentiment suggéré par le sujet, les deux fonctions auxiliaires :

$$g_n\;:=\;2\,\big(|f_n|+|f|\big)\qquad\text{et}\qquad h_n\;:=\;|f_n-f|+|f_n|-|f|,$$

lesquelles satisfont effectivement les conditions requises :

$$g_n\;\longrightarrow\;g:=4\,|f|,\qquad h_n\;\longrightarrow\;h:=0,\qquad |h_n|\;\leqslant\;g_n$$

— on a même $h_n \geqslant 0$, quoique cela ne serve pas spécialement —, ainsi que :

$$\lim_{n\to\infty}\int g_n\;=\;\int g,$$

et donc une application directe de la question **(g)** donne :

$$\lim_{n\to\infty}\int h_n\;=\;\int h\;=\;\int 0\;=\;0,$$

c'est-à-dire en remplaçant h_n :

$$0\;=\;\lim_{n\to\infty}\int\big|f_n-f\big|+\underbrace{\lim_{n\to\infty}\int|f_n|-\int|f|}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0},$$

d'où la conclusion :

$$0\;=\;\lim_{n\to\infty}\int\big|f_n-f\big|.\qquad\square$$

Exercice 5. (a) Les deux fonctions $x \longmapsto f(x)$ et $x \longmapsto e^{-xt}$ sont mesurables, et on a démontré en cours qu'un produit de fonctions mesurables est encore mesurable.

De plus, la majoration :

$$\big|e^{-xt}\,f(x)\big|\;\leqslant\;|f(x)|\qquad(t\in\mathbb{R}_+,\;x\geqslant 0),$$

donne après intégration :

$$\begin{aligned}\left|\int_0^\infty e^{-xt}\,f(x)\,dx\right| &\leqslant \int_0^\infty \left|e^{-xt}\,f(x)\right|dx\\ &\leqslant \int_0^\infty |f(x)|\,dx\\ &< \infty,\end{aligned}$$

ce qui démontre que $x \longmapsto e^{-xt}\,f(x)$ est Lebesgue-intégrable, puisque $x \longmapsto f(x)$ l'est.

(b) Posons :

$$g(x,t) := e^{-xt}\,f(x).$$

Pour tout t, nous venons de voir que $x \longmapsto g(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $t \longmapsto g(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ (et même $\mathscr{C}^\infty$!). Enfin, l'inégalité-clé ci-dessus :

$$\left|g(x,t)\right| \leqslant |f(x)|$$

fournit une fonction-dominatrice intégrable indépendante de t.

Toutes les hypothèses du Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètres sont ainsi satisfaites, et donc, la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) := \int_0^\infty e^{-xt}\,f(x)\,dx \in \mathbb{R}$$

est bel et bien continue !

(c) À nouveau grâce à la domination intégrable uniforme $|g(x,t)| \leqslant |f(x)|$, pour toute suite $(t_n)_{n=1}^\infty$ de réels $t_n \longrightarrow \infty$ divergeant vers l'infini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique pour donner :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty g(x,t_n)\,dx = \int_0^\infty \Big(\lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\,f(x)\Big)\,dx.$$

De l'Exercice 4 **(a)**, rappelons que $0 = m(\{|f| = \infty\})$, donc quitte à corriger f sur cet ensemble de mesure nulle, on peut (on pouvait) supposer (dès le départ !) que $f\colon \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ ne prend que des valeurs *finies*, et alors il est clair que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} e^{-xt_n}\,f(x) \qquad\qquad (\forall\, x > 0),$$

et puisque $\int_{]0,\infty[} = \int_{[0,\infty[}$, nous concluons que :

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty e^{-xt_n}\,f(x)\,dx = \int_0^\infty 0\cdot dx = 0.$$

Ceci étant valable quelle que soit la suite $t_n \longrightarrow \infty$, on a bien fait voir que :

$$\lim_{t\to\infty} L_f(t) = 0.$$

(d) La transformée de Laplace de la fonction $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$ est :

$$L_f(t) = \int_0^\infty e^{-xt}\,e^{-\theta x}\,dx = \left[\frac{e^{-x(t+\theta)}}{-t-\theta}\right]_0^\infty = \frac{1}{t+\theta}.$$

(e) Le calcul de la transformée de Laplace de la fonction $f(x) := \mathbf{1}_{\{0\leqslant x\leqslant 1\}} \cdot \sin(x)$ débute astucieusement en douceur comme suit :

$$\begin{aligned}
L_f(t) &= \int_0^1 e^{-xt} \sin x \, dx \\
&= \operatorname{Im}\bigg(\int_0^1 e^{-xt}\, e^{ix}\, dx\bigg) \\
&= \operatorname{Im}\bigg(\bigg[\frac{e^{x(i-t)}}{i-t}\bigg]_0^1\bigg) \\
&= \operatorname{Im}\bigg(\frac{e^{i-t}-1}{i-t}\bigg),
\end{aligned}$$

puis, pour faire disparaître les imaginaires au dénominateur, on multiplie en haut et à droite par $(-i-t)$, en notant que $(i-t)(-i-t) = 1+t^2$:

$$\begin{aligned}
L_f(t) &= \operatorname{Im} \frac{(e^{i-t}-1)(-i-t)}{(i-t)(-i-t)} \\
&= \operatorname{Im} \frac{e^{-t}(-ie^i - te^i) + i + t}{1+t^2} \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2} \operatorname{Im}\big(-i\, e^i - t\, e^i\big) + \frac{1}{1+t^2} + 0 \\
&= \frac{e^{-t}}{1+t^2}\big(-\cos 1 - t \sin 1\big) + \frac{1}{1+t^2} \\
&= \frac{1 - e^{-t}(\cos 1 + t\sin 1)}{1+t^2}.
\end{aligned}$$

(f) Le développement classique en série entière de l'exponentielle permet d'écrire :

$$e^{-e^{n(T-x)}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}.$$

Multiplions-le par $f(x)$:

$$e^{-e^{n(T-x)}} f(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x).$$

Soit la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$:

$$g_n\colon \quad x \longmapsto e^{-e^{n(T-x)}} f(x) \qquad\qquad (n \geqslant 1),$$

qui sont mesurables uniformément dominées par :

$$\begin{aligned}
\big|g_n(x)\big| &= \Big|e^{-e^{n(T-x)}} f(x)\Big| \\
&\leqslant |f(x)| \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}_+,\ \forall\, n \geqslant 1),
\end{aligned}$$

donc intégrables. D'un autre côté, les termes :

$$\frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x)$$

ont une somme absolument (car normalement) convergente, puisque :

$$\left|\frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\;\; f(x)\right| \;\leqslant\; \frac{e^{knT}}{k!}\, |f(x)|,$$

et puisque :

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(e^{nT})^k}{k!} \;=\; e^{e^{nT}} \;<\; \infty.$$

Cette convergence normale justifie l'interversion entre intégration et sommation infinie dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;&=\; \int_0^\infty \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, e^{-knx}\, f(x)\right) dx \\
&=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT} \int_0^\infty e^{-knx}\, f(x)\, dx \\
&=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!}\, e^{knT}\, L_f(kn),
\end{aligned}$$

qui aboutit à l'identité demandée.

(g) Lorsque $n \longrightarrow \infty$, la suite de fonction $(g_n)_{n=1}^\infty$ introduite dans la question précédente converge simplement vers :

$$g_\infty(x) \;:=\; \begin{cases} 0 & \text{lorsque }\; 0 \leqslant x < T, \\ e^{-1} f(T) & \text{lorsque }\; x = T, \\ f(x) & \text{lorsque }\; T \leqslant x. \end{cases}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\, f(x)\, dx \;=\; \int_T^\infty f(x)\, dx.$$

(h) Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ dont la transformée de Laplace vaut :

$$e^{-a\,t} \;=\; L_f(t) \;=\; \int_0^\infty e^{-xt}\, f(x)\, dx,$$

pour une certaine constante $a > 0$.

Prenons alors un nombre réel $0 < T$. Les questions **(g)** et **(f)** qui précèdent nous permettent alors de représenter la quantité finie :

$$\begin{aligned}
\int_T^\infty f(x)\,dx \;&=\; \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-e^{n(T-x)}}\,f(x)\,dx \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,L_f(kn)\bigg) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!}\,e^{knT}\,e^{-akn}\bigg) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} \bigg(\sum_{k=0}^\infty \frac{\big(-\;e^{n(T-a)}\big)^k}{k!}\bigg) \\
&=\; \lim_{n\to\infty} e^{-\,e^{n(T-a)}} \\
&=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque }\; 0 < T < a, \\ e^{-1} & \text{lorsque }\; T = a, \\ 0 & \text{lorsque }\; T > a. \end{cases}
\end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_a^\infty f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{e},$$

tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{a+\varepsilon}^\infty f(x)\,dx \;=\; 0,$$

ce qui contredit un théorème du cours d'après lequel $\int_a^{a+\varepsilon} g$ doit tendre vers 0 avec ε, pour toute fonction intégrable g.

(i) Soit $t_0 > 0$ et soit l'intervalle ouvert l'entourant sans toucher $\{0\}$ à gauche :

$$t_0 \;\in\; \big]\tfrac{t_0}{2},\, \tfrac{3\,t_0}{2}\big[\;\subset\;]0,\infty[.$$

La dérivée partielle de $x\,e^{-xt}\,f(x)$ par rapport à t est alors majorée par :

$$\begin{aligned}
\bigg|\frac{\partial}{\partial t}\big[e^{-xt}\,f(x)\big]\bigg| \;&\leqslant\; \big|-\,x\,e^{-xt}\,f(x)\big| \\
&\leqslant\; \big|x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}\big|\cdot|f(x)| \\
&\leqslant\; C_0\cdot|f(x)|,
\end{aligned}$$

la constante $0 < C_0 < \infty$ étant une majorante quelconque de la fonction continue $x \longmapsto x\,e^{-x\frac{t_0}{2}}$, laquelle vaut 0 en $x = 0$ et tend vers 0 lorsque $x \longrightarrow \infty$.

Grâce à cette majoration uniforme par la fonction-dominatrice $C_0\,|f(x)|$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et offre le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]\frac{t_0}{2}, \frac{3\,t_0}{2}[$, donc sur $]0,\infty[$, puisque le choix initial de $t_0 > 0$ était laissé à notre entière discrétion.

(j) Maintenant, lorsque $f \geqslant 0$ ne prend que des valeurs positives, la fonction $t \longmapsto L_f(t)$ est décroissante, puisque :

$$0 \leqslant t' \leqslant t'' < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad L_f(t') - L_f(t'') = \int_0^\infty \big(\underbrace{e^{-xt'} - e^{-xt''}}_{\geqslant 0\ \forall\, x \geqslant 0}\big)\, \underbrace{f(x)}_{\geqslant 0}\, dx$$
$$\geqslant 0.$$

De l'équivalence :

$$\Big(x \longmapsto x\, f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big) \iff \Big(t \longmapsto L_f(t) \text{ est } \mathscr{C}^1 \text{ sur } [0,\infty[\,\Big),$$

démontrons en premier lieu l'implication la plus délicate '$\Longleftarrow$'.

Puisque le caractère $\mathscr{C}^1$ de $t \longmapsto L_f(t)$ sur $]0,\infty[$ est toujours 'gratuitement' vrai, en vertu du résultat de la question **(i)** qui précède, c'est surtout la dérivabilité $t = 0$ qui est une hypothèse ici, et par la décroissance qui vient d'être observée, l'hypothèse en question est donc que la limite suivante existe et est positive finie :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant -L_f'(0) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx. \end{aligned}$$

Or pour faire voir que $x \longmapsto x\, f(x)$ est L^1 sur $[0,\infty[$, un bon Coup de Fatou là où il faut — qui s'applique car $\frac{1-e^{-xt}}{t}\, f(x) \geqslant 0$, mais de grâce ! Monsieur de Marçay ! pas de frappe sur nos doigts fragiles ! — permet de vérifier que l'on a effectivement la finitude de l'intégrale :

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_0^\infty x\, f(x)\, dx &\overset{?}{<} \infty \\ \text{[Reconnaître une dérivée]} \qquad &= \int_0^\infty \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\ \text{[}\lim = \liminf\text{]} \qquad &= \int_0^\infty \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\ \text{[Coup de Fatou !]} \qquad &\leqslant \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t}\, f(x)\, dx \\ &= \liminf_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ \text{[}\lim = \liminf\text{]} \qquad &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ >}} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ &= -L_f'(0) \\ &\overset{\textbf{oui}}{<} \infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \longmapsto x\, f(x)$ est bien L^1 sur $[0,\infty[$.

L'implication inverse '$\Rightarrow$' est en fait plus facile, et généralement vraie sans supposer que $f \geqslant 0$. Supposons donc $x \longmapsto x\, |f(x)|$ intégrable sur $[0,\infty[$. À nouveau grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral, comme dans la question **(i)**, mais maintenant sur $[0, \infty[$ en *incluant* l'extrémité gauche $\{0\}$, on a la majoration uniforme de la dérivée partielle par rapport à t :

$$\big| - x\, e^{-xt}\, f(x) \big| \ \leqslant\ x\, |f(x)|,$$

par une fonction indépendante de t qui *est* intégrable sur $[0, \infty[$, et donc — youpi ! c'est enfin fini ! —, le théorème de dérivation sous le signe intégral tord le coup à cette dernière implication !