Transformation de Fourier

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Dans les sections qui vont suivre, nous n'allons pas (tout de suite) utiliser la puissante et sophistiquée *théorie de l'intégration de Lebesgue*, mais plutôt, nous allons nous restreindre à l'intégration simple au sens de Riemann des fonctions continues. Historiquement parlant, en effet, les transformations de Fourier, de Laplace, ou de Poisson (fort utiles en ingénierie) sont apparues près d'un siècle avant l'aboutissement complet de la théorie abstraite de la mesure. En vérité, les aspects principaux de la transformation de Fourier peuvent être intégralement développés dans le royaume des fonctions les plus lisses et les plus régulières qui soient.

Ce n'est que dans un second moment du cours que nous étudierons la transformation de Fourier étendue aux espaces généraux $L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R}^d)$, et les raisonnements plus délicats que nous aurons alors à conduire dans ce contexte apparaîtront *transparents et limpides*, pour le plus grand bien de cette si précieuse *intuition de compréhension* que chacun de nous doit, ressentir, interroger, et cultiver en lui-même.

1. Naissance par analogie de la transformée de Fourier

La théorie des séries de Fourier s'applique aux fonctions définies sur le cercle unité, ou, de manière équivalente, aux fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$. Dans ce chapitre, une théorie de Fourier analogue est développée pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier mais qui ne sont *pas* périodiques. Les fonctions considérées devront décroître suffisamment rapidement à l'infini pour que les concepts initiaux de la théorie aient un sens. Il y a plusieurs manières de caractériser la décroissance à l'infini, décroissance qui sera essentiellement vitale pour la rigueur mathématique.

Rappelons que la série de Fourier d'une fonction périodique lui associe une suite de nombres, à savoir les coefficients de Fourier ; mais lorsqu'il s'agit d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, l'objet analogue associé devra être une autre fonction $\widehat{f}$ elle aussi définie sur $\mathbb{R}$. Puisque, donc, la tranformée de Fourier d'une fonction sur $\mathbb{R}$ est à nouveau une fonction sur $\mathbb{R}$, contrairement aux séries de Fourier, il va y avoir une *symétrie fondamentale* entre la fonction et sa transformée :

$$f \longleftrightarrow \widehat{f}.$$

Intuitivement, la transformée de Fourier est une *version continue* des coefficients de Fourier. En effet, pour toute fonction f de période 1 (au lieu de 2π) :

$$\widehat{f}(k) := \int_0^1 f(x)\, e^{-2i\pi kx}\, dx \qquad\qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

la variable utilisée précédemment $\theta = 2\pi x$ étant dilatée du facteur convenable, et alors, si la fonction f est suffisamment régulière (par exemple $\mathscr{C}^1$), elle est égale à sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\, e^{2i\pi kx}.$$

Maintenant et de manière très intuitive, tentons une métamorphose de ces formules dans lesquelles on *remplace* tous les symboles discrets, tels que nombres entiers et sommations, par leurs contreparties continues, telles que nombres réels et intégrales. En d'autres termes, étant donnée une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ tout entier, définissons sa transformée de Fourier en remplaçant le cercle sur lequel on intègre par $\mathbb{R}$, et en remplaçant $k \in \mathbb{Z}$ par $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx.$$

Cette formule va exactement être celle qui définit la *transformée de Fourier sur* $\mathbb{R}$. Mais poussons encore l'analogie plus loin, et traduisons aussi la formule qui exprime une fonction comme étant égale à série de Fourier : en remplaçant donc la somme par une intégrale, et $\widehat{f}(k)$ par $\widehat{f}(\xi)$, nous sommes conduits à une formule qui va s'avérer être vraie :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{+2i\pi\xi x}\, d\xi,$$

et qui sera appelée *formule d'inversion de Fourier*.

En fait, ces deux formules ne seront vraies, au début de la théorie, que sous certaines hypothèses de décroissance à l'infini, et une grande partie de la théorie va consister à s'occuper rigoureusement de questions de convergence.

À un niveau supérieur (par exemple en Master 1), la théorie dite des *distributions* (Sobolev, Schwartz) va clarifier considérablement les espaces d'objets mathématiques plus vastes dans lesquels une correspondance $f \longleftrightarrow \widehat{f}$ s'effectue de manière parfaitement symétrique et satisfaisante, sans restriction.

> La théorie des séries de Fourier et des intégrales de Fourier a toujours rencontré des difficultés majeures et nécessité un grand appareillage mathématique lorsqu'il s'agit de justifier la convergence des formules. Elle a engendré le développement de méthodes de sommation, bien que celles-ci n'aient pas réellement fournit une solution complètement satisfaisante au problème. [...] Pour la transformée de Fourier, l'introduction des distributions, et donc l'introduction de l'espace $\mathscr{S}$ [des fonctions à décroissance rapide à l'infini], est inévitable, que ce soit explicitement ou d'une manière cachée. Laurent SCHWARTZ, 1950.

Toutefois, il ne sera nullement question ici dans un cours élémentaire de développer la théorie des distributions.

2. Premier éclairage

En tout cas, pour une première compréhension en profondeur, il sera utile de faire voir que la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

un des buts principaux de ce chapitre, peut être démontrée en partant des connaissances acquises sur les séries de Fourier, avec des moyens simples, naïfs, éclairants, dans le cas particulier mais assez général où la fonction $f \in \mathscr{C}_c^1$ est continûment différentiable à support compact :

$$\mathsf{supp}(f) \subset \,]0, T_0] \qquad (T_0 > 0).$$

En effet, pour tout $T \geqslant T_0$, on peut introduire la T-périodisation de f, notée F, qui est alors $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}/(T\,\mathbb{Z})$. Le théorème de Dirichlet assure ensuite que F est égale en tout point à sa série de Fourier, ce qui, après renormalisation de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ en l'intervalle $[0, T]$, fournit (exercice) :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F}(n)\, e^{2i\pi\, n\, \frac{x}{T}},$$

où les coefficients de Fourier renormalisés sont :

$$\widehat{F}(n) = \int_0^T F(x)\, e^{-2i\pi\, n\, \frac{x}{T}}\, \frac{dx}{T}.$$

Maintenant, si on définit donc la transformée de Fourier de f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx,$$

dont on se convainc aisément qu'elle est continue par rapport à ξ, il se trouve qu'en posant $\xi = \frac{n}{T}$, on retrouve à un facteur $\frac{1}{T}$ près :

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{T}\, \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Ainsi donc puisque $F = f$ sur l'intervalle $[0, T_0]$, la formule laissée en chemin se traduit instantanément en :

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2i\pi\, n\, \frac{x}{T}}.$$

Il reste seulement à faire tendre $T \to \infty$ et à reconnaître des sommes de Riemann (voir aussi l'Exercice 1) pour obtenir la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

dans ce cas précis déjà très général où la fonction f est $\mathscr{C}_c^1$, au moins lorsque $\widehat{f}$ est Riemann-intégrable.

Théorème 2.1. *La transformée de Fourier de toute fonction continûment différentiable à support compact $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx,$$

est continue en tant que fonction de ξ à valeurs dans $\mathbb{C}$, et si de plus (hypothèse supplémentaire), $\widehat{f}$ est intégrable au sens de Riemann sur $\mathbb{R}$, alors la fonction f d'origine se retrouve grâce à la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi. \qquad \square$$

Le principe de permanence formelle des relations dans les espaces fonctionnels abstraits approximés par des sous-espaces vectoriels denses concrets nous permet d'ores et déjà de soupçonner que cette formule d'inversion sera vraie dans des espaces plus généraux. C'est au développement rigoureux de cette intuition d'anticipation que sont consacrées les sections qui suivent, le point mathématique délicat étant qu'il faut souvent faire une hypothèse supplémentaire sur $\widehat{f}$.

3. Transformée de Fourier des fonctions à croissance modérée

En admettant que l'intégration au sens de Riemann d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ est connue, la manière la plus naturelle de généraliser l'intégration à des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ *tout entier* est de définir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx := \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{0} f(x)\,dx + \lim_{N\to\infty} \int_{0}^{N} f(x)\,dx.$$

Bien entendu, cette limite peut ne pas exister comme nombre fini dans $\mathbb{R}$, par exemple lorsque $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Toutefois, de telles intégrales convergent lorsque f décroît suffisamment rapidement à l'infini, au sens suivant.

Définition 3.1. Une fonction continue f définie sur $\mathbb{R}$ est dite *à croissance modérée* s'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Par exemple, pour un entier $n \geqslant 2$, la fonction $1\big/(1+|x|^n)$ est clairement à croissance modérée. Autre exemple : la fonction $e^{-a|x|}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ (exercice mental).

On vérifie aisément que l'ensemble des fonctions à croissance modérée forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Comme on l'a souhaité, l'intégrale sur $\mathbb{R}$ tout entier d'une fonction à croissance modérée existe, grâce au critère de Riemann d'après lequel $\frac{1}{x^2}$ est intégrable à l'infini. Plus généralement, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les fonctions continues satisfaisant une inégalité du type :

$$\big|f(x)\big| \leqslant \frac{\mathsf{constante}}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$$

sont aussi telles que la limite :

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$$

existe. Les résultats qui vont suivre seraient donc tout aussi vrais pour de telles fonctions, mais nous choisissons ici $\varepsilon = 1$ pour fixer les idées. Énonçons sous forme résumée quelques propriétés élémentaires.

Proposition 3.2. *L'intégrale sur $\mathbb{R}$ des fonctions à croissance modérée satisfait :*

(i) *Linéarité :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big(a\,f(x) + b\,g(x)\big)\,dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx.$$

(ii) *Invariance par translation :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(iii) *Modification par dilatation :*

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta\, x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \qquad\qquad (\delta > 0).$$

(iv) *Continuité translationnelle :*

$$0 = \lim_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x-h) - f(x)\big|\,dx. \qquad \square$$

La preuve de cette dernière propriété est laissée au lecteur ; en fait, on a déjà établi précédemment dans le cours la continuité translationnelle pour les fonctions appartenant au vaste espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$. Ici, en nous restreignant aux fonctions Riemann-intégrables, nous introduirons la même notation :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \overset{\text{déf}}{:=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,dx,$$

pour définir la norme de Lebesgue restreinte à notre sympathique espace de fonctions à croissance modérée.

Définition 3.3. La *transformée de Fourier* d'une fonction $x \mapsto f(x)$ à croissance modérée est la fonction d'une variable auxiliaire $\xi \in \mathbb{R}$ définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\,dx,$$

l'intégrale étant convergente, puisque $\left|e^{-2i\pi x\xi}\right| \equiv 1$.

Qui plus est, l'inégalité triangulaire intégrale qui justifie cette convergence :

$$\begin{aligned} \big|\widehat{f}(\xi)\big| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\,dx\right| \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|\,dx \end{aligned}$$

montre qu'on a l'estimation fondamentale :

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}} \big|\widehat{f}(\xi)\,\big| \leqslant \big\|f\big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Proposition 3.4. *La transformée de Fourier d'une fonction f continue à croissance modérée est continue :*

$$\widehat{f} \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Le raisonnement détaillé, laissé au lecteur-étudiant puisqu'il est de niveau Licence deuxième année, consiste, en partant de l'intégrale définissant la différence :

$$\widehat{f}(\xi+\delta) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\left(e^{-2i\pi x(\xi+\delta)} - e^{-2i\pi x\xi}\right)dx$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ petit, à la découper en deux parties :

$$\int_{|x|\leqslant R} + \int_{|x|>R},$$

où $R \gg 1$ est assez grand pour que $\int_{|x|>R}$ soit très petit. $\square$

Proposition 3.5. [dite de Riemann-Lebesgue] *La transformée de Fourier d'une fonction f continue à croissance modérée sur $\mathbb{R}$ tend toujours vers zéro à l'infini :*

$$0 = \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration. Un raisonnement astucieux, dont les détails sont une seconde fois laissés au lecteur-étudiant, consiste à établir d'abord que :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(f(x) - f\big(x - \tfrac{1}{2\xi}\big)\Big)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx,$$

puis à raisonner encore en découpant l'intégrale en deux parties.

Un raisonnement alternatif plus sophistiqué consiste à établir d'abord la nullité de cette limite lorsque $f \in \mathscr{C}_c^1(\mathbb{R})$ est continûment dérivable à support compact, puis à raisonner en utilisant la densité (à vérifier soigneusement) de $\mathscr{C}_c^1$ dans l'espace des fonctions continues à croissance modérée. $\square$

Ces trois propriétés élémentaires de $\widehat{f}$ ne garantissent toutefois pas que $\widehat{f}$ jouisse d'une quelconque décroissance (modérée) à l'infini, comme le montre l'Exercice 3.

Pour cette raison, il n'est absolument pas clair que l'on puisse définir l'intégrale (noter le signe $+$ dans l'exponentielle) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{+2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

laquelle va en fait servir pour *inverser* la transformation de Fourier, puisqu'on va établir que l'on a toujours :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{+2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

dans certaines circonstances où l'intégrale en question a un sens.

Pour garantir cela, on introduit classiquement un espace plus raffiné de fonctions à croissance extrêmement modérée que Laurent Schwartz a étudié dans le cadre de la théorie dite des distributions, et qui est très utile puisqu'on peut développer tous les théorèmes fondamentaux de la théorie dans cet espace.

Le choix de l'espace de Schwartz et motivé par un principe important d'après lequel la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini est intimement reliée aux propriétés de différentiabilité de f, et *vice versa* : plus $\widehat{f}(\xi)$ décroît lorsque $|\xi| \longrightarrow \infty$, plus f doit être de classe $\mathscr{C}^k$ avec k grand. Un exemple simple illustrant ce principe apparaît dans l'Exercice 3. Bien entendu, on aura remarqué que cette relation entre f et $\widehat{f}$ est réminiscente d'une relation similaire entre la régularité d'une fonction sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et la décroissance de ses coefficients de Fourier.

4. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Définition 4.1. L'*espace de Schwartz* sur $\mathbb{R}$ est l'ensemble des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que f et toutes ses dérivées $f', f'', \dots, f^{(\ell)}, \dots$ sont *rapidement décroissantes* au sens où, pour tous entiers $k, \ell \geqslant 0$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k \left| f^{(\ell)}(x) \right| < \infty.$$

On notera alors :

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

cet espace, qui renforce considérablement l'exigence de décroissance modérée à l'infini.

On vérifie (exercice) que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus, on se convainc (exercice mental) que $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ est stable par différentiation et par multiplication monomiale :

$$f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \quad \Longrightarrow \quad \Big(f'(x) = \frac{df}{dx} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad x\,f(x) \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \Big).$$

Lemme 4.2. *Toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz jouit des propriétés d'intégrabilité :*

$$\left\| x^k\, f^{(\ell)}(x) \right\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k \left| f^{(\ell)}(x) \right| dx < \infty,$$

pour tous entiers $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Appliquons la définition aux entiers $k+2$ et ℓ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{k+2} \left| f^{(\ell)}(x) \right| =: M_{k+2,\ell} < \infty.$$

Alors l'intégrale en question, dont on excise la partie (évidemment finie) $\int_{|x| \leqslant 1}$, devient majorée par la quantité :

$$\begin{aligned} \int_{|x|>1} |x|^k \left| f^{(\ell)}(x) \right| dx &\leqslant 2\, M_{k+2,\ell} \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} \\ &= 2\, M_{k+2,\ell}, \end{aligned}$$

qui, manifestement, est elle aussi finie. □

Exemple 4.3. La fonction $e^{-|x|}$ décroît très vite à l'infini, mais elle n'est pas différentiable en 0. Mieux qu'elle, l'*exponentielle gaussienne* :

$$f(x) := e^{-x^2}$$

appartient à l'espace de Schwartz, puisqu'on vérifie par récurrence que pour tout entier $\ell \geqslant 0$, il existe un polynôme $P_\ell(x)$ de degré $\leqslant \ell$ tel que :

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell}\big(e^{-x^2}\big) = P_\ell(x)\, e^{-x^2},$$

et ceci montre immédiatement (micro-yoga mental) que $e^{-x^2} \in \mathscr{S}$.

Cette gaussienne joue un rôle vraiment central dans la théorie de la transformation de Fourier, et aussi en probabilités et en physique.

De même, pour tout réel $a > 0$, la fonction $e^{-a\,x^2}$ appartient aussi à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, et dans quelques instants, nous allons normaliser la gaussienne en choisissant $a = \pi$:

$$e^{-\pi x^2} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Exemple 4.4. Une autre classe importante de fonctions appartenant à l'espace de Schwartz est constituée des fonctions lisses à support compact :

$$\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Définition 4.5. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est la fonction définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

Quelques propriétés initiales simples de la transformation de Fourier peuvent être rassemblées dans un premier énoncé élémentaire. Pour abréger, nous utilisons la notation :

$$f(x) \longmapsto \widehat{f}(\xi)$$

pour signifier que $\widehat{f}$ est la transformée de Fourier de f.

Proposition 4.6. [Propriétés élémentaires] *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ qui décroissent rapidement à l'infini sur $\mathbb{R}$, alors on a :*

(i) $f(x+h) \longmapsto \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi h\xi}$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}$;

(ii) $f(x)\, e^{-2i\pi xh} \longmapsto \widehat{f}(\xi+h)$ *pour tout* $h \in \mathbb{R}$;

(iii) $f(\delta x) \longmapsto \frac{1}{\delta}\, \widehat{f}\big(\frac{1}{\delta}\,\xi\big)$ *pour tout* $\delta > 0$;

(iv) $f'(x) \longmapsto 2i\pi\,\xi\,\widehat{f}(\xi)$;

(v) $-2i\pi x\, f(x) \longmapsto \frac{d}{d\xi}\,\widehat{f}(\xi)$.

Les deux dernières propriétés sont particulièrement significatives : *à un facteur $2i\pi$ près, la tranformation de Fourier échange la différentiation et la multiplication par la variable ambiante*. Grâce à cela, toute équation aux dérivées partielles devient algébrique après transformation de Fourier !

Démonstration. Ces cinq relations découlent de transformations et de changements de variables algébriques élémentaires, en tenant compte du fait que la décroissance rapide à l'infini permet de négliger ce qui se passe en dehors d'un intervalle compact $[-R, R]$ assez large. □

Pourquoi avons-nous introduit l'espace de Schwartz plutôt que d'en rester aux fonctions à croissance modérée ? Parce que l'espace de Schwartz est stable par transformation de Fourier, ce qui va nous permettre d'introduire et d'utiliser la transformée de Fourier inverse.

Théorème 4.7. *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$,*

Démonstration. Il s'agit donc de montrer que pour tous entiers $k, \ell \geqslant 0$, l'expression :

$$\xi^k \left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\ell} \widehat{f}(\xi)$$

est bornée sur $\mathbb{R}$. L'argument (élégant) est une application conjointe du fait que si $H \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, sa transformé de Fourier $\widehat{H}$ est bornée :

$$\big|\big|\widehat{H}\,\big|\big|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \leqslant ||H||_{L^1(\mathbb{R})} < \infty,$$

alliée au fait que la transformation de Fourier échange différentiation et multiplication.

En effet, grâce aux propriétés élémentaires **(iv)** et **(v)** ci-dessus, notre expression à estimer s'avère être la transformée de Fourier de la fonction :

$$H_{k,\ell}(x) \;:=\; \frac{1}{(2i\pi)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k\Big[(-2i\pi x)^\ell\, f(x)\Big]$$

puisqu'on constate qu'on a effectivement (vérification visuelle) :

$$\widehat{H}_{k,\ell}(\xi) = \xi^k \left(\frac{d}{d\xi}\right)^\ell \widehat{f}(\xi).$$

En appliquant à cette fonction le contrôle de la norme $\mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ par la norme $L^1(\mathbb{R})$, on obtient formellement :

$$\begin{aligned}\big\|\widehat{H}_{k,\ell}\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \;&\leqslant\; \big\|H_{k,\ell}\big\|_{L^1(\mathbb{R})}\\ &=\; (2\pi)^{\ell-k}\left\|\left(\frac{d}{dx}\right)^k\big[x^\ell\, f(x)\big]\right\|_{L^1(\mathbb{R})},\end{aligned}$$

et il s'agit donc de vérifier que cette dernière norme L^1 est *finie*, ce qui va être le cas.

La formule de Leibniz pour la dérivée k-ème d'un produit de fonctions s'écrit ici, en oubliant volontairement la nature explicite des constantes :

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{dx}\right)^k\big[x^\ell\, f(x)\big] &= \sum_{k_1+k_2=k}\frac{k!}{k_1!\,k_2!}\,\big(x^\ell\big)^{(k_1)}(x)\, f^{(k_2)}(x)\\ &= \sum_{\substack{k'\leqslant\ell\\ \ell'\leqslant k}} x^{k'}\, f^{(\ell')}(x)\,\mathsf{constante}_{k',\ell'},\end{aligned}$$

et donc en revenant à l'inégalité laissée plus haut, et en introduisant une constante supérieure à toutes celles qui apparaissent :

$$\big\|\widehat{H}_{k,\ell}\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \;\leqslant\; \mathsf{constante}\sum_{k'\leqslant\ell,\;\ell'\leqslant k}\big\|x^{k'}\, f^{(\ell')}(x)\big\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Or on a déjà vu que toutes les normes L^1, finies en nombre, qui apparaissent ici, sont $<\infty$, d'où la conclusion visée. □

Maintenant, la démonstration (classique) de la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) \;\overset{?}{=}\; \int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

valable pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, que nous allons conduire, est basée sur une étude soignée des gaussiennes $e^{-a\,x^2}$, qui, comme nous l'avons vu, appartiennent à notre bon espace de Schwartz lorsque $a > 0$. *Il se trouve que ces gaussiennes sont en quelque sorte des points fixes de la transformée de Fourier et que simultanément aussi, elles peuvent servir comme noyaux régularisants approximant l'unité.*

Commençons par considérer le cas $a = \pi$, eu égard à la splendide formule classique :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\, dx,$$

qui — comme tout mathématicien doit absolument le savoir jusqu'à son assomption au paradis que Cantor a créé pour lui —, se démontre en prenant le carré et en passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy\right)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}\,dx\,dy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}\,r\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^{\infty} 2\pi\,e^{-\pi\,r^2}\,r\,dr\\ &= \Big[-\,e^{-\pi\,r^2}\Big]_0^{\infty}\\ &= 1,\end{aligned}$$

le miracle étant que $2\pi r\,e^{-\pi r^2}$ admet une primitive élémentaire évidente, *bien qu'aucune primitive de la fonction de départ* $e^{-\pi x^2}$ *n'existe au moyen de fonctions élémentaires connues*.

La propriété fondamentale du noyau de Gauss qui nous intéresse, et qui est conséquence de ce dernier calcul, est donc un résultat qui mérite d'être particulièrement souligné.

Théorème 4.8. *Si* $f(x)=e^{-\pi x^2}$*, alors* $\widehat{f}(\xi)=f(\xi)$ *:*

$e^{-\pi x^2}$ *est égale à sa propre transformée de Fourier !*

Démonstration. Donnons un autre nom à cette transformée de Fourier :

$$F(\xi):=\widehat{f}(\xi)=\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{e^{-\pi x^2}}_{f(x)}\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx,$$

et observons que $F(0)=1$, grâce au remarquable calcul en coordonnées polaires ci-dessus.

Une différentiation de cette intégrale par rapport à ξ — qui n'est autre que la propriété élémentaire **(v)** ci-dessus — donne :

$$\begin{aligned}F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{f(x)\big(-2i\pi x\big)}_{=\,i\,f'(x)}\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx\\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx.\end{aligned}$$

Mais alors un retour vers la propriété élémentaire **(iv)** ci-dessus — obtenue par simple intégration par parties — donne instantanément :

$$\begin{aligned}F'(\xi) &= i\,\big(2i\pi\,\xi\big)\,\widehat{f}(\xi)\\ &= -\,2\pi\xi\,F(\xi).\end{aligned}$$

Cette équation différentielle ordinaire s'intègre aisément :

$$F(\xi)=\mathsf{constante}\,e^{-\pi\xi^2},$$

et la constante vaut 1, puisque nous venons de dire que $F(0)=1$! □

Ensuite, la propriété de covariance formelle de la transformée de Fourier à travers les dilatations — propriété élémentaire **(iii)** ci-dessus —, donne (exercice de vérification laissé au lecteur-étudiant) :

Théorème 4.9. *La transformée de Fourier de la gaussienne générale :*

$$\mathsf{K}_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}},$$

où $\delta > 0$ est un réel quelconque, est encore une gaussienne dans laquelle le $\frac{1}{\delta}$ dans l'exposant se transforme en un δ :

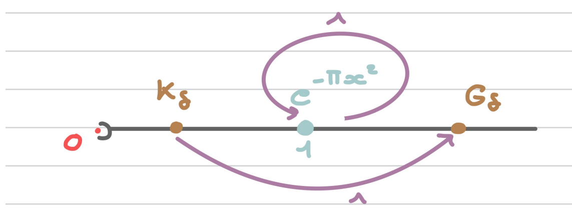
$$\begin{aligned}\widehat{\mathsf{K}_\delta}(\xi) &= e^{-\pi\delta\xi^2}\\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\,\mathsf{K}_{\frac{1}{\delta}}(\xi).\end{aligned}$$ □

Il est alors naturel de donner le nom suivant, avec l'initiale G de Gauss, à l'exponentielle dans laquelle apparaît δ plutôt que $\frac{1}{\delta}$:

$$\mathsf{G}_\delta(\xi) := e^{-\pi\delta\xi^2},$$

et l'on a alors en termes de ces notations, les relations agréables :

$$\widehat{\mathsf{K}_\delta}(\xi) = \mathsf{G}_\delta(\xi) \qquad \text{et} \qquad \widehat{\mathsf{G}_\delta}(\xi) = \mathsf{K}_\delta(\xi).$$



Maintenant, effectuons une pause sur les considérations techniques afin de méditer géométriquement sur l'arrondi délectable des formes courbes de ces gaussiennes.

Lorsque δ tend vers 0, il est clair que la fonction $\mathsf{K}_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$ fait un pic très elevé resserré autour de l'axe vertical $\{x = 0\}$ comme le geyser du Lac Léman à Genève, tandis qu'au contraire, sa transformée de Fourier $\widehat{\mathsf{K}}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$ devient de plus en plus étalée à hauteur 1 au-dessus de l'axe horizontal des ξ, comme une méduse flottant sur une mer d'huile. Ceci montre sur cet exemple particulier un phénomène général d'après lequel *une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent jamais être toutes deux simultanément concentrées (localisées) autour de l'origine*. Ce phénomène est en relation avec le célèbre *principe de Heisenberg*, issu de la Mécanique Quantique, dont nous donnerons une version ultérieurement.

Revenons alors à notre famille de noyaux-inverses de Gauss :

$$\big(\mathsf{K}_\delta(x)\big)_{\delta>0} = \Big(\tfrac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}\Big)_{\delta>0}$$

indicés par un paramètre continu strictement positif. Grâce au calcul qui précède et à des vérifications élémentaires, on se convainc que cette famille satisfait toutes les conditions que doit satisfaire une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$, à savoir :

(i) $\mathsf{K}_\delta > 0$ sur $\mathbb{R}$;

(ii) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{K}_\delta(x)\,dx$;

(iii) pour tout $\eta > 0$, on a :

$$0 = \lim_{\delta \to 0} \int_{|x|\geqslant\eta} \mathsf{K}_\delta(x)\,dx.$$

Démonstration. Le seul point qui doit être éclairci est que, pour tout $\eta > 0$, on a :

$$0 \;=\; \lim_{\delta \xrightarrow{>} 0} \int_{|x|\geqslant\eta} \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}\,dx.$$

Or un simple changement de variable donne — lorsque $\eta = 0$, on trouve **(ii)** — :

$$\begin{aligned}\int_{|x|\geqslant\eta} \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}\,dx \;&=\; 2\int_{\eta}^{\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}\,\frac{dx}{\sqrt{\delta}} \\ \text{[Poser } x =: y\sqrt{\delta}] \qquad &=\; 2\int_{\frac{\eta}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy,\end{aligned}$$

et la convergence (déjà vue !) de l'intégrale $2\int_0^\infty e^{-\pi y^2}\,dy = 1$ implique par définition des intégrales généralisées que l'on doit avoir — noter que $\mathrm{M} := \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}$ tend ici maintenant vers ∞ — :

$$0 \;=\; \lim_{\mathrm{M}\to\infty} \int_{\mathrm{M}}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy,$$

ce qu'on peut d'ailleurs voir directement en utilisant par exemple la majoration :

$$(0 \leqslant) \qquad e^{-\pi y^2} \;\leqslant\; e^{-\pi y} \qquad\qquad (\forall\, y \geqslant 1),$$

d'où pour $\mathrm{M} \geqslant 1$, en particulier lorsque $\mathrm{M} \longrightarrow \infty$:

$$(0 \leqslant) \qquad \int_{\mathrm{M}}^{\infty} e^{-\pi y^2}\,dy \;\leqslant\; \int_{\mathrm{M}}^{\infty} e^{-\pi y}\,dy \;=\; \frac{e^{-\pi \mathrm{M}}}{\pi} \;\underset{\mathrm{M}\to\infty}{\longrightarrow}\; 0. \qquad \square$$

Le lecteur-étudiant vérifiera qu'une application d'un théorème déjà vu en cours donne un théorème de convergence de la famille des convolées :

$$f * \mathsf{K}_\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)\,\mathsf{K}_\delta(t)\,dt.$$

Théorème 4.10. *Pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz à décroissance rapide, on a la convergence uniforme :*

$$0 = \lim_{\delta \to 0} \big\| f * \mathsf{K}_\delta - f \big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et soit $\eta > 0$ petit. Comme $1 = \int \mathsf{K}_\delta$, on peut absorber la soustraction suivante dans l'intégrale de convolution :

$$\begin{aligned} f * \mathsf{K}_\delta(x) - f(x) &= f * \mathsf{K}_\delta(x) - f(x) \cdot 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \big(f(x-t) - f(x)\big)\, \mathsf{K}_\delta(t)\, dt \\ &= \int_{|t| \leqslant \eta} + \int_{|t| \geqslant \eta}, \end{aligned}$$

puis la découper.

Comme $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ décroît très vite à l'infini, l'Exercice 8 garantit son uniforme continuité, à savoir, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|y - x| \leqslant \eta(\varepsilon) \implies \big|f(y) - f(x)\big| \leqslant \varepsilon.$$

De plus, toujours parce que $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a la finitude $\|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} < \infty$, et ainsi avec $\eta(\varepsilon) > 0$ fixé, on peut majorer :

$$\begin{aligned} \big|f * \mathsf{K}_\delta(x) - f(x)\big| &\leqslant \int_{|t| \leqslant \eta(\varepsilon)} \big|f(x-t) - f(x)\big|\, \mathsf{K}_\delta(t)\, dt + \int_{|t| \geqslant \eta(\varepsilon)} \big|f(x-t) - f(x)\big|\, \mathsf{K}_\delta(t)\, dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_{|t| \leqslant \eta(\varepsilon)} \mathsf{K}_\delta(t)\, dt + 2\, \|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \int_{|t| \geqslant \eta(\varepsilon)} \mathsf{K}_\delta(t)\, dt \\ &\leqslant \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \mathsf{K}_\delta(t)\, dt + \text{même chose} \\ &= \varepsilon \cdot 1 + 2\, \|f\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})} \underbrace{\int_{|t| \geqslant \eta(\varepsilon)} \mathsf{K}_\delta(t)\, dt}_{\underset{\delta \to 0}{\longrightarrow}}, \end{aligned}$$

et puisque ce dernier terme tend vers 0 lorsque $\delta \overset{>}{\longrightarrow} 0$ grâce à une propriété fondamentale de K_δ, on peut trouver $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que tout ceci soit $\leqslant \varepsilon + \varepsilon$, pour tout $0 < \delta \leqslant \delta(\varepsilon)$, ce qui montre bien la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de $f * \mathsf{K}_\delta$ vers f. □

En résumé, donc, les noyaux de Gauss jouissent simultanément de deux qualités remarquables :

- ils sont formellement invariants par transformation de Fourier ;
- ils peuvent servir à l'approximation par convolution ;

et ces qualités vont s'avérer exceptionnellement utiles pour prolonger la transformation de Fourier à des espaces de fonctions beaucoup moins régulières, par exemple à $L^2(\mathbb{R})$.

5. Formule d'inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz

Le résultat qui suit est parfois appelé aussi *formule de multiplication*, et ce n'est qu'un avatar du théorème de Fubini.

Proposition 5.1. [Formule d'échange] *Étant donné deux fonctions appartenant à l'espace de Schwartz $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, on a toujours :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,g(y)\,dy.$$

Démonstration. Pour établir cette formule, effectuons quelques rappels sur les intégrales doubles de fonctions à croissance modérée de deux variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, à savoir les fonctions continues $F(x, y)$ satisfaisant une estimée à l'infini du type :

$$\big|F(x,y)\big| \leqslant \frac{\text{constante}}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Visiblement, pour tout x fixé, la fonction $y \longmapsto F(x, y)$ est à décroissance modérée, et par symétrie aussi, pour tout y fixé, $x \longmapsto F(x, y)$ l'est aussi. De plus, la fonction intégrée par rapport y :

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy$$

est à croissance modérée en x (exercice mental), et il en va de même pour :

$$F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx.$$

Enfin et finalement, le théorème de Fubini (dans le cadre simple de l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues qui date d'avant 1800 !) donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy.$$

Ces rappels élémentaires étant faits, appliquons ces formules à la fonction :

$$F(x,y) := f(x)\,g(y)\,e^{-2i\pi xy},$$

qui, bien entendu, est à décroissance rapide, donc modérée, ce qui, avec nos notations, donne (capture visuelle) :

$$F_1(x) = f(x)\,\widehat{g}(x) \qquad \text{et} \qquad F_2(y) = \widehat{f}(y)\,g(y),$$

et en définitive, la formule de Fubini écrite il y a un instant devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)\,g(y)\,dy.$$

ce qui est l'assertion de la proposition. □

Le résultat tant attendu qui tombe enfin comme un fruit mûr est le :

Théorème 5.2. [Formule d'inversion de Fourier] *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide à l'infini, de telle sorte que sa transformée de Fourier (noter le signe $-$) :*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx$$

existe et appartient aussi à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors on retrouve la fonction f en effectuant la transformée de Fourier inverse sur $\widehat{f}$ (noter le signe $+$) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,e^{+2i\pi\xi x}\,d\xi.$$

Démonstration. Une application de la formule d'échange :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,d\xi$$

à notre fonction f et à la fonction gaussienne :

$$g(\xi) := \mathsf{G}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$$

donne, puisqu'on connaît bien sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{K}_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathsf{G}_\delta(\xi)\,d\xi.$$

Mais on peut voir astucieusement l'intégrale à gauche comme étant égale à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathsf{K}_\delta(0-x)\,dx = f * \mathsf{K}_\delta(0)$$

puisque le noyau de Gauss est pair ! Maintenant, lorsque $\delta > 0$ tend vers 0, on connaît la limite de cette convolée :

$$f * \mathsf{K}_\delta(0) \underset{\delta \to 0}{\longrightarrow} f(0),$$

et en revenant au membre de droite de l'équation laissée en chemin plus haut, on obtient que :

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,\mathsf{G}_\delta(\xi)\,d\xi \\ &= \lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,e^{-\pi\delta\xi^2}\,d\xi \\ \text{[Interversion justifiée, car } \widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})\text{]} \qquad &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,e^{0}\,d\xi. \end{aligned}$$

C'est donc que la formule d'inversion de Fourier que nous cherchons à établir est au moins vraie en $x = 0$!

Ensuite, le cas général d'un point arbitraire $x \in \mathbb{R}$ va avoir l'élégance de se déduire sans effort de ce cas $x = 0$ grâce à une simple translation.

Si nous posons en effet :

$$F(y) := f(y + x),$$

de telle sorte que :

$$\widehat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y+x)\,e^{-2i\pi y\xi}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)\,e^{-2i\pi(z-x)\xi}\,dz = \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi\xi x},$$

ce que nous venons d'obtenir s'écrit alors :

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi\xi x}\,d\xi,$$

ce qui conclut cette démonstration limpide, et sublime ! □

Comme ce théorème le fait voir, l'inverse de la transformée de Fourier coïncide avec elle-même, à un changement près de signe dans l'exponentielle complexe de l'intégrande. Il convient de préciser cela.

On définit deux applications de transformation de Fourier :

$$\mathscr{F} : \quad \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathscr{F}} : \quad \mathscr{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{S}(\mathbb{R})$$

au moyen des intégrales en question :

$$\mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \qquad \text{et} \qquad \overline{\mathscr{F}}(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, e^{+2i\pi \xi x}\, d\xi.$$

De la sorte, le théorème que nous venons d'obtenir énonce que :

$$\overline{\mathscr{F}} \circ \mathscr{F} = \mathsf{Identit\acute{e}} = \mathscr{F} \circ \overline{\mathscr{F}},$$

la deuxième égalité découlant de la première grâce à l'observation déjà mentionnée :

$$\mathscr{F}(f)(\xi) = \overline{\mathscr{F}}(f)(-\xi).$$

Nous pouvons aussi déduire du théorème d'inversion une information très satisfaisante que nous généraliserons ensuite à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Corollaire 5.3. *La transformation de Fourier est une application* bijective *de l'espace de Schwartz dans lui-même.* □

6. Formule de Plancherel dans l'espace de Schwartz

Un autre résultat-clé de la transformation de Fourier, notamment en vue d'applications aux équations aux dérivées partielles, c'est qu'elle échange la convolution avec les produits ponctuels, un résultat qui a déjà été vu dans le contexte des séries de Fourier de fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 6.1. *La convolée entre deux fonctions quelconques de l'espace de Schwartz $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient toujours à l'espace de Schwartz :*

$$f * g \,\in\, \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

et sa transformée de Fourier est le produit ponctuel des transformée de Fourier de ses membres :

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).$$

Démonstration. Tout d'abord, les démonstrations que nous avons conduites dans le chapitre sur la convolution restent valables quand on travaille dans l'espace de Schwartz au lieu de supposer qu'une des deux fonctions f ou g est à support compact (en effet, puisque toutes les intégrandes considérées décroissent très vite à l'infini, les interversions entre différentiation et intégration sont justifiables avec des raisonnements usuels).

En particulier, la convolution entre deux fonctions $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et commutative :

$$f * g = g * f \,\in\, \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

De plus, les opérations de dérivation se transfèrent sur l'un ou l'autre membre du produit :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \big[f * g\big] = f^{(\ell)} * g = f * g^{(\ell)}.$$

Il s'agit maintenant d'établir que, pour tous entiers $k, \ell \geqslant 0$, les quantités :

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \left(\frac{d}{dx}\right)^{\ell} \big[f * g\big](x) \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^k \underbrace{f^{(\ell)}}_{\substack{\text{encore} \\ \text{dans } \mathscr{S}}} * g\,(x) \right|$$

sont $< \infty$. Or puisque $f^{(\ell)} \in \mathscr{S}$, si on démontre cela pour $\ell = 0$, le cas général s'en déduira sans effort, pour une raison purement logique.

Soit donc à estimer la quantité intégrale :

$$x^k \big[f * g\big](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \, f(x-y)\, g(y)\, dy.$$

Lemme 6.2. *Il existe deux constantes positives telles que :*

$$\begin{aligned}\big|x^k \, f(x-y)\big| &\leqslant \text{constante}\,\big(1+|y|\big)^k, \\ \big|g(y)\big| &\leqslant \frac{\text{constante}}{(1+|y|)^{k+2}}.\end{aligned}$$

Démonstration. En effet, en appliquant la formule du binôme, on atteint la première inégalité :

$$\begin{aligned}\big|(x-y+y)^k \, f(x-y)\big| &\leqslant \sum_{j=0}^{k} \underbrace{|x-y|^j \, \big|f(x-y)\big|}_{\leqslant \text{ constante, car } f \in \mathscr{S}\,!} |y|^{k-j} \, \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \\ &\leqslant \text{constante} \sum_{j=0}^{k} |y|^{k-j} \, \frac{k!}{j!\,(k-j)!} \\ &= \text{constante}\,\big(1+|y|\big)^k.\end{aligned}$$

La seconde inégalité provient directement (exercice mental) du fait que $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. $\square$

Ainsi, il est maintenant aisé de majorer notre quantité intégrale par :

$$\big|x^k \big[f * g\big](x)\big| \leqslant \text{constante} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+|y|)^2} \; < \; \infty,$$

ce qui conclut la démonstration détaillée du fait que :

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}) * \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subset \mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

Ensuite, toujours avec $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, introduisons la fonction de deux variables :

$$F(x,y) := f(x-y)\, g(y)\, e^{-2i\pi x\xi}.$$

Grâce au fait que f et g décroissent toutes deux rapidement vers zéro à l'infini, on a :

$$\big|F(x,y)\big| \leqslant \text{constante}\, \frac{1}{1+(x-y)^2} \, \frac{1}{1+y^2},$$

cette fonction majorante étant d'ailleurs intégrable sur $\mathbb{R}^2$ (en posant $z := x - y$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x-y)^2} \, \frac{dy}{1+y^2} \; < \; \infty.$$

Donc si l'on pose :

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\, dy = (f * g)(x)\, e^{-2i\pi x\xi},$$

et si l'on pose aussi :

$$F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\, dx = g(y)\, e^{-2i\pi y\xi}\, \widehat{f}(\xi),$$

le théorème de Fubini s'applique :

$$\widehat{(f*g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy = \widehat{g}(\xi)\,\widehat{f}(\xi),$$

ce qui nous offre la relation désirée sur un plateau doré. □

L'espace de Schwartz peut être muni du produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx,$$

auquel est associée la norme :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'analogue de la formule de Plancherel pour la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ de carré intégrable sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, à savoir la formule :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \big|f(\theta)\big|^2\,\frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \big|\widehat{f}(k)\big|^2 \qquad \left(\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\,e^{-ik\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}\right)$$

est le résultat suivant dans la théorie de la transformée de Fourier sur $\mathbb{R}$, très important car très souvent utilisé.

Théorème 6.3. [Formule de Plancherel] *Si $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, alors :*

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Pour une telle $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ quelconque, on introduit la nouvelle fonction :

$$f^\flat(x) := \overline{f(-x)}.$$

Un calcul simple permet d'exprimer sa transformée de Fourier au moyen de celle de f :

$$\begin{aligned}
\widehat{f^\flat}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^\flat(x)\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\,e^{-2i\pi x\xi}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)}\,e^{+2i\pi y\xi}\,dy \\
&= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-2i\pi y\xi}\,dy} \\
&= \overline{\widehat{f}(\xi)}.
\end{aligned}$$

Maintenant, introduisons la fonction convolée appartenant à $\mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$h := f^\flat * f,$$

de telle sorte que sa transformée de Fourier vaut, grâce au théorème qui précède :

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{\big(f^\flat * f\big)}(\xi) = \widehat{f^\flat}(\xi)\,\widehat{f}(\xi) = \big|\widehat{f}(\xi)\big|^2.$$

Ensuite, on a d'un premier côté :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^\flat(0-y)\, f(y)\, dy = \big(\|f\|_{L^2}\big)^2,$$

tandis que d'un second côté, une application de la formule d'inversion de Fourier à h en $x=0$ poursuit le mouvement :

$$\big(\|f\|_{L^2}\big)^2 = h(0) \overset{\text{inversion}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\, e^0\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \big|\widehat{f}(\xi)\big|^2 = \Big(\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^2}\Big)^2,$$

qui nous fait aboutir à l'achèvement de la preuve. □

Théorème 6.4. [Formule de Parseval] *Si* $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$*, alors :*

$$\big\langle \widehat{f},\, \widehat{g}\big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f,\, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,.$$

Démonstration. Appliquer le théorème précédent à $f := f + t\,g$ avec $t \in \mathbb{R}$, simplifier, et faire tendre $t \to 0$ (exercice). □

7. Formule sommatoire de Poisson

La définition de la transformation de Fourier est motivée par le désir de trouver une version continue de la théorie des séries de Fourier, applicable aux fonctions définies sur la droite $\mathbb{R}$ tout entière. Dans cette section, nous montrons qu'il existe un lien remarquable entre l'analyse des fonctions définies sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ et celles qui sont définies sur $\mathbb{R}$.

En effet, étant donné une fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide sur $\mathbb{R}$, on peut construire une nouvelle fonction sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ par la recette :

$$F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Bien entendu, comme f est à décroissance rapide, cette série converge absolument et uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}$, donc F_1 est continue. De plus, il est visiblement clair qu'elle est 1-périodique :

$$F_1(x+1) = F_1(x),$$

puisque le décalage $n \to n+1$ se noie dans les limbes infinies de la sommation, à gauche comme à droite.

Définition 7.1. La fonction $F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ est appelée la 1-*périodisation* de $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Mais il y a une *autre* manière de parvenir à une fonction *périodique* à partir de f, cette fois *via* l'Analyse de Fourier. Elle consiste à partir de la formule d'inversion satisfaite par toute $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi,$$

et à la traduire dans le langage discret, en appliquant les principes exposés au début de ce chapitre, ce qui fournit :

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi n x}.$$

Puisque $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, cette deuxième série converge elle aussi absolument et uniformément, donc F_2 est aussi continue. Qui plus est, F_2 est aussi 1-périodique, puisque chaque exponentielle $x \longmapsto e^{2i\pi nx}$ l'est !

Le théorème fondamental, c'est que ces deux approches, qui produisent F_1 et F_2, conduisent en fait à la *même* fonction !

Théorème 7.2. [Formule sommatoire de Poisson] *Pour toute fonction $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide, on a :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi nx},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En particulier, en $x = 0$, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

En d'autres termes, la première formule générale, relue comme :

$$\begin{aligned}\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)}_{\text{périodisation } F_1 \text{ de } f} \,&=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F_1}(n)\, e^{2i\pi nx} && [F_1 \text{ est égale à sa série de Fourier}] \\ &=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi nx},\end{aligned}$$

exprime que *les coefficients de Fourier $\widehat{F_1}(n)$ de la périodisation F_1 de f coïncident avec les valeurs $\widehat{f}(n)$ aux entiers de la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.*

Démonstration. Il suffit de faire voir que les deux membres de l'équation à établir :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \,=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e^{2i\pi nx},$$

qui sont tous deux des fonctions continues, ont les mêmes coefficients de Fourier, puisque ces deux fonctions définies sur $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ seront alors égales grâce à un théorème élémentaire d'unicité vu au début de la théorie.

Clairement, le m-ème coefficient de Fourier du membre de droite est $\widehat{f}(m)$. Pour ce qui concerne le membre de gauche, on calcule très aisément :

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)\right) e^{-2i\pi mx}\, dx \,&=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n)\, e^{-2i\pi mx}\, dx \\ &=\, \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y)\, e^{-2i\pi my}\, dy \\ &=\, \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{-2i\pi my}\, dy \\ &=\, \widehat{f}(m),\end{aligned}$$

l'interversion de la sommation et de l'intégration étant manifestement permise, puisque f est à décroissance rapide. $\square$

On observe que ce théorème s'étend sans difficulté au cas où les deux fonctions f et $\widehat{f}$ sont à décroissance modérée, puisque l'interversion est alors encore autorisée.

De plus, l'opération de périodisation reste utile et importante y compris lorsque la formule de Poisson ne s'applique pas. Par exemple, considérons la fonction élémentaire $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $x \neq 0$. Un résultat très classique détaillé dans l'Exercice 6, calcule la limite des sommes symétriques :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{x+m} \;=\; \pi \, \cot\big(\pi x\big).$$

Autre exemple, avec la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on obtient dans le même exercice :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi\, x)\big)^2},$$

pour $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$ non entier.

Voici encore une application de la formule sommatoire de Poisson. Pour $x > 0$ réel, définissons une fonction $\psi(x)$ par la série doublement infinie :

$$\psi(x) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

qui converge clairement. Un fait crucial est que cette fonction spéciale, cas particulier des fonctions dites *thêta* de Jacobi, satisfait une belle équation fonctionnelle.

Théorème 7.3. *Pour tout $x > 0$, on a $x^{-1/2}\,\psi\big(\frac{1}{x}\big) = \psi(x)$, c'est-à-dire :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{x}}.$$

Démonstration. Rappelons que le Théorème 4.8 a fait voir que $e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier :

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) \;=\; e^{-\pi \xi^2}.$$

Ensuite, la Proposition 4.6 **(iii)** élémentaire montre que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi a x^2}$, où $a > 0$ est une constante, est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\pi \xi^2 \frac{1}{a}}$.

Alors en renotant cette constante $a := x$, l'identité fonctionnelle à justifier est une application directe de la formule sommatoire de Poisson. □

8. Principe d'incertitude de Heisenberg

L'idée mathématique générale du principe peut être formulée comme une relation entre une fonction et sa transformée de Fourier. La loi générale sous-jacente dit intuitivement qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément concentrées, ou localisées, dans un même intervalle. Plus précisément, si la masse d'une fonction f est prépondérante dans un intervalle de longueur L, alors la majeure partie de la masse de sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne peut essentiellement pas se trouver localisée dans un intervalle de longueur inférieure à $\frac{1}{L}$.

Théorème 8.1. [Inégalité de Heisenberg] *Soit une fonction $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide qui appartient à l'espace de Schwartz et qui satisfait la condition de normalisation :*

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} \big|\psi(x)\big|^2 \, dx.$$

Alors :

$$\bigg(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, \big|\psi(x)\big|^2 \, dx \bigg) \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \, \big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2 \, d\xi \bigg) \;\geqslant\; \frac{1}{16\,\pi^2},$$

avec égalité lorsque et seulement lorsque :

$$\psi(x) = a\, e^{-b\,x^2},$$

avec $b > 0$ et avec $a \in \mathbb{C}$ de module $|a|^2 = \sqrt{2b/\pi}$.

En fait, on a même généralement pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}$ arbitraires :

$$\bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \big(x - x_0\big)^2 \, \big|\psi(x)\big|^2 \, dx \bigg) \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \big(\xi - \xi_0\big)^2 \, \big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2 \, d\xi \bigg) \;\geqslant\; \frac{1}{16\,\pi^2},$$

cette inégalité se déduisant du théorème en remplaçant :

$$\psi(x) \;\longrightarrow\; e^{-2i\pi x \xi_0}\, \psi(x + x_0),$$

et en effectuant un changement de variables (exercice).

Démonstration. Partant de $1 = \int |\psi|^2$ et en rappelant que ψ et ψ' sont toutes deux à décroissance rapide, une intégration par parties (justifiée, donc, et sans aucun terme au bord) donne :

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} \big|\psi(x)\big|^2 \, dx &= \Big[x\, \psi(x)\, \overline{\psi(x)} \Big]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} x\, \frac{d}{dx} \Big(\psi(x)\, \overline{\psi(x)} \Big)\, dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \Big(x\, \psi'(x)\, \overline{\psi(x)} + x\, \overline{\psi'(x)}\, \psi(x) \Big)\, dx. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de minorer :

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant\; 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, \big|\psi(x)\big|\, \big|\psi'(x)\big|\, dx \\ &\leqslant\; 2 \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \, \big|\psi(x)\big|^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}} \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} \big|\psi'(x)\big|^2 \, dx \bigg)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, la propriété élémentaire **(iv)** de la Proposition 4.6 :

$$\widehat{\psi'}(\xi) = 2i\pi\, \xi\, \widehat{\psi}(\xi),$$

re-vérifiable par simple intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x)\, e^{-2i\pi x \xi}\, dx = -\,(-2i\pi\, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\, e^{-2i\pi x \xi}\, dx,$$

et l'identité de Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|\psi'(x)\big|^2 \, dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \big|\widehat{\psi'}(\xi)\big|^2 \, d\xi \;=\; 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 \, \big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2 \, d\xi$$

concluent l'inégalité après élévation au carré.

Le cas d'égalité ne peut se produire que s'il y a égalité dans l'application de Cauchy-Schwarz, et l'on sait que cela a lieu lorsque et seulement lorsque les deux fonctions en jeu sont multiples l'une de l'autre :

$$\psi'(x) = \mathsf{constante}\, x\, \psi(x).$$

Pour que $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, la constante doit être < 0, donc $\psi(x) = a\, e^{-bx^2}$ avec $b > 0$, et la normalisation :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |a|^2\, e^{-2bx^2}\, dx \\ \text{[Poser } x =: y\sqrt{\pi/2b}\text{]} \qquad &= |a|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2}\, dy}_{=1} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}, \end{aligned}$$

impose $|a|^2 = \sqrt{2\, b/\pi}$, comme annoncé. □

9. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Dorénavant, on travaillera en dimension finie quelconque $d \geqslant 1$ sur $\mathbb{R}^d$ muni des coordonnées canoniques $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, avec des fonctions $f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ à valeurs complexes. Si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ est un autre vecteur de $\mathbb{R}^d$, on notera :

$$x \cdot \xi \;:=\; x_1\, \xi_1 + \cdots + x_d \xi_d$$

le produit scalaire euclidien canonique de x avec ξ, et on notera aussi, avec de simples barres verticales la norme euclidiennes associée :

$$|x| := \big(x_1^2 + \cdots + x_d^2\big)^{\frac{1}{2}} = \big(x \cdot x\big)^{\frac{1}{2}},$$

afin de ne pas empiéter notationnellement sur les normes $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$, $\|\cdot\|_{\mathscr{C}^0}$ des espaces fonctionnels.

Les sections suivantes vont maintenant transférer la théorie riemannienne de la transformée de Fourier au cadre plus englobant développé par Borel et Lebesgue.

Lemme 9.1. [Riemann-Lebesgue dans L^1] *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f définie comme étant la fonction de $\xi \in \mathbb{R}^d$:*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx$$

a un sens et constitue une fonction continue et bornée :

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{L^1}$$

de la variable ξ qui tend de plus vers zéro lorsque $|\xi| \to \infty$:

$$0 = \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration. L'existence de $\widehat{f}$ est évidente, puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, la majoration simple du module du facteur exponentiel $e^{-2i\pi x\cdot\xi}$ par 1 montre que :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big| \;\leqslant\; \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx \;<\; \infty,$$

donc l'intégrale définissant $\widehat{f}(\xi)$ converge, et ceci montre aussi en bonus l'inégalité :

$$\max_{\xi\in\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \|f\|_{L^1}.$$

assurant que $\widehat{f}$ est bornée. Ensuite, la fonction $\xi \mapsto e^{-ix\cdot\xi}$ étant continue, le théorème classique concernant les intégrales à paramètres assure que $\widehat{f}$ est continue.

Il reste à établir que $\widehat{f}(\xi)$ tend vers zéro à l'infini. Comme nous l'avons déjà fréquemment fait dans ce cours, nous allons d'abord établir que tel est le cas lorsque $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est indéfiniment différentiable à support compact, et ensuite vérifier que la densité de $\mathscr{C}_c^\infty$ dans L^1 permet d'atteindre sans difficulté le cas général où f n'est qu'intégrable.

Si donc $f \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $\mathrm{supp}\, f \subset [-R, R]^d$ pour $R \gg 1$ assez grand, en effectuant d intégrations par parties relativement à chaque variable, il vient par le calcul :

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{[-R,R]^d} f(x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx \\
&= \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_1\xi_1}\, dx_1 \cdots \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_d\xi_d}\, f(x_1,\dots,x_d)\, dx_d \\
&= \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_1\xi_1}\, dx_1 \cdots \bigg(\underline{\bigg[\frac{e^{-2i\pi x_d\xi_d}}{-2i\pi\xi_d}\, f(x_1,\dots,x_d) \bigg]_{-R}^{R}} \\
&\quad + \frac{1}{2i\pi\xi_d} \int_{-R}^{R} e^{-2i\pi x_d\xi_d}\, \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_1,\dots,x_d)\, dx_d \bigg) \\
&= \frac{1}{2i\pi\xi_1} \cdots \frac{1}{2i\pi\xi_d} \int_{[-R,R]^d} \frac{\partial^d f}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx,
\end{aligned}$$

donc l'existence supposée de $\frac{\partial^d f}{\partial x_1\cdots\partial x_d} \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nous permet de majorer simplement l'intégrale restante par :

$$\begin{aligned}
\big|\widehat{f}(\xi)\big| &\leqslant \frac{1}{(2\pi)^d}\, \frac{1}{|\xi_1\cdots\xi_d|}\, \underbrace{(2R)^d \max_{x\in\mathbb{R}^d} \bigg| \frac{\partial^d f}{\partial x_1\cdots\partial x_d}(x) \bigg|}_{\text{constante} < \infty} \\
&\xrightarrow[|\xi|\to\infty]{} 0,
\end{aligned}$$

où le majorant tend vers 0 si le produit $\xi_1\cdots\xi_d \longrightarrow \infty$.

Or ce produit ne tend pas toujours vers ∞ sous l'hypothèse que $|\xi| = \big(\xi_1^2 + \cdots + \xi_d^2\big)^{1/2} \longrightarrow \infty$, par exemple si une cordonnée $\xi_k = 0$ reste constamment nulle. Dans ces cas spéciaux, on effectue des intégrations par parties seulement le long des axes ξ_k qui grandissent infiniment.

Examinons à présent le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \qquad \exists\, g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \qquad \|g - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons donc un tel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et prenons une telle fonction g à laquelle le raisonnement précédent s'applique bien sûr pour donner :

$$0 = \lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{g}(\xi),$$

ce qui revient plus précisément à dire que :

$$\exists\, \Xi = \Xi(\varepsilon) \gg 1 \qquad \Big(|\xi| \geqslant \Xi \Longrightarrow \big|\widehat{g}(\xi)\big| \leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} \Big).$$

Ainsi, pour tous ces $\xi \in \mathbb{R}^d$ avec $|\xi| \geqslant \Xi$, en faisant apparaître sous le chapeau un terme $-g + g$ qui s'additionne à 0, on peut majorer :

$$\begin{aligned}
\big|\widehat{f}(\xi)\big| &\leqslant \big|\widehat{g}(\xi)\big| + \big|\widehat{g-f}(\xi)\big| \\
&\leqslant \big|\widehat{g}(\xi)\big| + \|g - f\|_{L^1} \\
&\leqslant \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}$$

ce qui achève d'établir le Lemme dit « de Riemann-Lebesgue », dont le contenu est entièrement analogue à ce que nous avons vu, en d'autres circonstances, pour les séries de Fourier de fonctions sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. □

Dans la suite, on notera occasionnellement :

$$\mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot|\to\infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R}^d)$$

l'espace des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$ qui tendent vers zéro lorsque la norme de l'argument tend vers $+\infty$. Pour des raisons de convenance notationnelle et afin de se prémunir contre l'inélégance ou l'illisibilité de trop grands chapeaux $\widehat{\cdots\cdots}$, on notera non pas toujours $\widehat{\cdot}$ la transformation de Fourier, mais parfois :

$$\mathscr{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot|\to\infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R}^d) \\[2ex] \qquad\quad f \longmapsto \mathscr{F}(f) \equiv \widehat{f}. \end{cases}$$

Corollaire 9.2. *La transformation de Fourier ainsi définie :*

$$\mathscr{F} : \quad \Big(L^1(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{L^1} \Big) \longrightarrow \Big(\mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot|\to\infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R}^d),\ \|\cdot\|_{\mathscr{C}^0} \Big)$$

est une application linéaire continue. □

Voici maintenant un exemple simple, classique, et inspirationnel. En dimension $d = 1$, la transformée de Fourier de la densité de Poisson $x \longmapsto \frac{1}{2}\, e^{-|x|}$ — une mesure de probabilité ! — se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^{+x}\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-y}\, e^{2i\pi y\xi}\, dy + \frac{1}{2} \int_{0}^{\infty} e^{-x}\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{y(-1+2i\pi\xi)}}{-1+2i\pi\xi} \right]_0^\infty + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{x(-1-2i\pi\xi)}}{-1-2i\pi\xi} \right]_0^\infty \\
&= \frac{1/2}{1-2i\pi\xi} + \frac{1/2}{1+2i\pi\xi} \\
&= \frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}.
\end{aligned}$$

10. Translation, modulation, homothétie

Le but de cette courte section est d'étudier, sous forme élémentaire et plaisante, comment se comporte la transformation de Fourier sous l'effet de certaines opérations naturelles.

Si f est une fonction mesurable à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^d$, on note :

- $\overline{f}$ sa *conjuguée*, définie par $\overline{f}(x) := \overline{f(x)}$;
- f_σ sa *symétrisée*, définie par $f_\sigma(x) := f(-x)$;
- $\tau_a f$ sa *translatée* par un vecteur fixe quelconque $a \in \mathbb{R}^d$, définie par :

$$\tau_a f(x) := f(x-a).$$

On peut aussi introduire la *transformation de Fourier conjuguée :*

$$\overline{\mathscr{F}}(f)(\xi) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{2i\pi x\cdot\xi}\, dx,$$

dans laquelle la conjugaison porte (exclusivement) sur le facteur exponentiel, si l'on compare avec $\mathscr{F}$.

Proposition 10.1. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\mathscr{F}\big(f_\sigma\big) = \big(\mathscr{F}(f)\big)_\sigma, \qquad \mathscr{F}\big(\overline{f}\big) = \Big(\overline{\mathscr{F}(f)}\Big)_\sigma, \qquad \overline{\mathscr{F}}\big(\overline{f}\big) = \overline{\mathscr{F}(f)}.$$

De plus, pour tout réel non nul fixé $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathscr{F}\big(f(\lambda\, x)\big)(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d}\, \mathscr{F}(f)\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big).$$

Enfin, pour tout vecteur constant fixé $a \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\tau_a f)(\xi) &= e^{-2i\pi a\cdot\xi}\, \mathscr{F}(f)(\xi),\\ \mathscr{F}\big(e^{2i\pi a\cdot x}\, f(x)\big)(\xi) &= \tau_a\big(\mathscr{F}(f)\big)(\xi).\end{aligned}$$

Démonstration. En effectuant de très simples changements de variables et en conjugant au besoin la formule définitionnelle :

$$\mathscr{F}(f)(\xi) \ := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx,$$

les trois premières formules s'obtiennent aisément.

Ensuite, pour un réel $\lambda > 0$, un calcul naturel donne :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\big(f(\lambda x)\big)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx\\ \text{[Poser } y := \lambda x\text{]} \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, e^{-2i\pi\, y\cdot\frac{\xi}{\lambda}}\, \frac{dy}{\lambda^d}\\ &= \frac{1}{\lambda^d}\, \mathscr{F}(f)\Big(\frac{\xi}{\lambda}\Big),\end{aligned}$$

tandis que dans le cas $\lambda < 0$, il faut juste prendre garde à l'interversion des bornes d'intégration qui force la présence de $\frac{1}{|\lambda|^d}$.

Enfin, l'avant-dernière propriété se vérifie comme suit :

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx \\ &= e^{-2i\pi a\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-a)\, e^{-2i\pi(x-a)\cdot\xi}\, dx \\ &= e^{-2i\pi a\cdot\xi}\, \mathscr{F}(f)(\xi),\end{aligned}$$

tandis que la dernière — verre de l'amitié — est laissée au lecteur. □

11. Transformation de Fourier d'un produit de convolution et formule d'échange

Cette nouvelle section courte démontre deux propriétés élémentaires qui ont déjà été vues en dimension $d=1$ dans le cadre de l'intégration au sens de Riemann.

Proposition 11.1. [Transformation de Fourier d'un produit de convolution] *Pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\, \widehat{f_2}.$$

Démonstration. Puisque $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, nous avons déjà vu dans le chapitre sur la convolution que la convolée $f_1 * f_2$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec l'inégalité $\|f_1 * f_2\|_{L^1} \leqslant \|f_1\|_{L^1}\, \|f_2\|_{L^1}$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, nous sommes tentés de décomposer :

$$\widehat{f_1 * f_2}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-t)\, f_2(t)\, dt \right) e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx,$$

et nous prétendons que cette intégrale double itérée a un sens ; en effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli et grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, si l'on majore la valeur absolue de l'exponentielle bêtement par 1, l'intégrale double des valeurs absolues converge :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|f_1(x-t)|\, |f_2(t)|\, dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(u)|\, du \int_{\mathbb{R}^d} |f_2(t)|\, dt = \|f_1\|_{L^1}\, \|f_2\|_{L^1} < \infty.$$

Notons au passage que nous venons de revoir ici que $\|f_1 * f_2\|_{L^1} \leqslant \|f_1\|_{L^1}\, \|f_2\|_{L^1}$ — tous les chemins mènent, et retournent, à Rome !

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini pour intervertir l'ordre de la double intégration dans l'expression de $\widehat{f_1 * f_2}$, ce qui nous donne ici en arrangeant convenablement les exponentielles :

$$\begin{aligned}\widehat{f_1 * f_2}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-t)\, f_2(t)\, e^{-2i\pi\xi\cdot(x-t)}\, dx \right) e^{-2i\pi\xi\cdot t}\, dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(u)\, e^{-2i\pi\xi\cdot u}\, du \int_{\mathbb{R}^d} f_2(t)\, e^{-2i\pi\xi\cdot t}\, dt \\ &= \widehat{f_1}(\xi)\, \widehat{f_2}(\xi),\end{aligned}$$

comme voulu. □

Théorème 11.2. [Formule d'échange] *Pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a la formule symétrique :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_1(u)\,\widehat{f_2}(u)\,du = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_1}(v)\,f_2(v)\,dv,$$

dans laquelle la transformée de Fourier porte, chaque fois seule, exclusivement sur l'un des deux facteurs.

Démonstration. En fait, cette relation est une conséquence immédiate du théorème de Fubini et ne mériterait pour cette raison presque pas de preuve. En effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_1(u)\,f_2(v)\,e^{-2i\pi v\cdot u}\big|\,du\,dv = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(u)|\,du \int_{\mathbb{R}^d} |f_2(v)|\,dv = \|f_1\|_{L^1}\,\|f_2\|_{L^1} < \infty,$$

donc le théorème de Fubini permet d'intervertir librement l'ordre de l'intégration double :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f_1(u)\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_2(v)\,e^{-2i\pi v\cdot u}\,dv\right)du &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(u)\,e^{-2i\pi v\cdot u}\,du\right)f_2(v)\,dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_1}(v)\,f_2(v)\,dv,\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la formule d'échange annoncée. □

12. Noyaux de Gauss

Ensuite, une généralisation aisée de la dimension $d = 1$ est la suivante.

Proposition 12.1. *Les noyaux de Gauss :*

$$\gamma_s(x) := \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\,e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}},$$

paramétrés par un nombre réel $s > 0$, appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, et satisfont toutes les propriétés requises pour constituer une approximation $\mathscr{C}^\infty$ de l'unité lorsque $s \to 0$, à savoir :

- *leurs valeurs sont positives : $\gamma_s(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$;*
- *leurs normes L^1 sont toujours égales à 1 :*

$$\|\gamma_s\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} \big|\gamma_s(x)\big|\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_s(x)\,dx = 1;$$

- *pour tout réel $\delta > 0$ arbitrairement petit :*

$$0 = \lim_{s\to 0} \int_{|x|>\delta} \gamma_s(x)\,dx.$$

De plus, la transformée de Fourier $\widehat{\gamma_s}(\xi)$ de $\gamma_s(x)$ vaut :

$$\widehat{\gamma_s}(\xi) \;=\; e^{-\pi s|\xi|^2} \;=\; \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\,\gamma_{s^{-1}}(\xi).$$

Enfin, sur les noyaux de Gauss $\gamma_s(x)$, le redoublement de la transformée de Fourier est involutif :

$$\widehat{\widehat{\gamma_s}}(x) \;=\; \gamma_s(x).$$

Démonstration. En dimension $d = 1$, nous avons déjà croisé les deux fonctions :

$$G_\delta(x) := e^{-\pi\delta x^2} \qquad \text{et} \qquad K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}}\, e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}},$$

qui satisfont :

$$\widehat{G_\delta}(\xi) = K_\delta(\xi) \qquad \text{et} \qquad \widehat{K_\delta}(\xi) = G_\delta(\xi).$$

Le cas multidimensionnel, abordé ici avec la notation différente $\gamma_s(x)$, se déduit de ces connaissances acquises par simple produit dans les intégrales impliquées, puisque :

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-\pi\frac{x_1^2}{s}} \cdots \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-\pi\frac{x_d^2}{s}} = K_s(x_1)\cdots K_s(x_d),$$

et notamment, le fait que $\big(\gamma_s(x)\big)_{s>0}$ constitue une approximation de l'identité pour la convolution est clair.

Concernant la transformée de Fourier, un calcul mettant bien en lumière le scindage par produit :

$$\begin{aligned}
\widehat{\gamma_s}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}}\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx \\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{s}}\, e^{-\frac{\pi x_i^2}{s}}\, e^{-2i\pi x_i\xi_i}\, dx_i \\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant d} \widehat{K_s}(\xi_i) \\
&= \prod_{1\leqslant i\leqslant d} G_s(\xi_i) \\
&= e^{-\pi s|\xi|^2}
\end{aligned}$$

fournit le résultat annoncé.

Nous savons donc dorénavant, après échange des noms des deux variables $x \longleftrightarrow \xi$, que :

$$\widehat{\gamma_s}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}\, e^{-2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi = e^{-\pi s|x|^2}.$$

Changeons ici le paramètre $x \longmapsto \frac{1}{s}\, x$, ce qui est loisible car $s > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}}\, e^{-2i\pi\,\frac{1}{s}\,\xi\cdot x}\, d\xi = e^{-\pi\frac{|x|^2}{s}}.$$

Ensuite dans cette intégrale, effectuons le changement de variable $\xi \longmapsto s\,\xi$, ce qui nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\pi s|\xi|^2}\, e^{-2i\pi\xi\cdot x}\; s^d\; d\xi = e^{-\pi\frac{|x|^2}{s}},$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s|\xi|^2}\, e^{-2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi = \tfrac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\pi\frac{|x|^2}{s}}.$$

En conclusion, nous obtenons bien l'invariance du noyau de Gauss par double transformation de Fourier :

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\gamma}}_s(x) &\overset{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\gamma}_s(\xi)\, e^{-2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s|\xi|^2}\, e^{-2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi \\ &= \tfrac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\pi\frac{|x|^2}{s}} \\ &= \gamma_s(x).\end{aligned}$$

□

13. Injectivité de la transformation de Fourier

Théorème 13.1. *La transformation de Fourier :*

$$\mathscr{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot|\to\infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R}^d) \\ \qquad f \longmapsto \widehat{f} \equiv \mathscr{F}(f) \end{cases}$$

est une application injective.

Démonstration. Soit donc $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} = 0$, le but étant de démontrer que $\|f\|_{L^1} = 0$. Avec le noyau de Gauss étudié ci-dessus $\gamma_s(x) = \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}}$, introduisons, pour un $a \in \mathbb{R}^d$ fixé, la fonction :

$$g_s(x) \,:=\, e^{2i\pi a\cdot x}\, \gamma_s(x).$$

En partant de la formule d'échange, on peut engager un calcul :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(v)\, g_s(v)\, dv &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, \widehat{g_s}(u)\, du \\ \text{[Proposition 10.1 : } \widehat{g_s} = \tau_a(\widehat{\gamma_s})] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, \widehat{\gamma_s}(u-a)\, du \\ [\widehat{\gamma_s} \text{ est paire}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} f(u)\, \widehat{\gamma_s}(a-u)\, du \\ &= f * \widehat{\gamma_s}(a) \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, f * \gamma_{s^{-1}}(a), \end{aligned}$$

à l'issue duquel on déduit que :

$$\forall\, s \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \forall\, a \in \mathbb{R}^d, \qquad f * \gamma_{s^{-1}}(a) = 0.$$

Or, comme $\big(\gamma_{s^{-1}}\big)_{s\to\infty}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, l'un des théorèmes fondamentaux connus sur la convolution assure que :

$$0 = \lim_{s\to\infty} \big\| f * \gamma_{s^{-1}} - f \big\|_{L^1} = \lim_{s\to\infty} \|0 - f\|_{L^1} = \|f\|_{L^1},$$

et $\|f\|_{L^1} = 0$ était justement la conclusion désirée ! □

En définitive, deux propriétés-clé sont satisfaites par la famille γ_s des noyaux de Gauss :

• leurs transformées de Fourier $\widehat{\gamma}_s$ sont à peu de choses près (remplacer s par $\frac{1}{s}$ et négliger les constantes) égales à elles-mêmes ;

• lorsque $s \to 0$, la famille $\big(\gamma_s\big)_{s>0}$ constitue une approximation de l'identité.

Voilà un outil « pivotal » qui va nous permettre d'étudier la transformation de Fourier de fonctions générales.

14. Formule d'inversion

Un résultat fondamental montre que, lorsque la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ est inversible, son inverse $\mathscr{F}^{-1}$ s'exprime très simplement à partir de $\mathscr{F}$, à savoir au changement de x en $-x$ près, l'inverse $\mathscr{F}^{-1}$ s'identifie à la transformation de Fourier $\mathscr{F}$! Tout reflet double restitue (presque !) l'image d'origine.

Théorème 14.1. *Si une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\widehat{\widehat{f}}(x) \,=\, f(-x).$$

*En d'autres termes qui mettent en lumière l'*inversion de Fourier *— et toujours sous cette hypothèse que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ —, la valeur de $f(x)$ se* reconstitue *(inversion) en calculant la transformée de Fourier $\mathscr{F}\big(\widehat{f}\,\big)$ de $\widehat{f}$, prise en $-x$:*

$$\begin{aligned} f(x) \,&=\, \mathscr{F}\big(\mathscr{F}(f)\big)(-x) \\ &=\, \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi)\, e^{+2i\pi\xi\cdot x}\, d\xi. \end{aligned}$$

Démonstration. Trois moments, magistralement intéressants, articulent l'argumentation démonstrative.

Premier moment. Lorsque $f = \gamma_s$ est un noyau de Gauss, avec $s > 0$ quelconque fixé, nous avons déjà vu inconsciemment dans la Proposition 12.1 que la formule d'inversion :

$$\frac{1}{(\sqrt{s})^d}\, e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}} \,=\, \gamma_s(x) \,=\, \gamma_s(-x) \,=\, \widehat{\widehat{\gamma}}_s(x),$$

est effectivement satisfaite, car grâce à la parité de $x \longmapsto |x|^2$, on a $\gamma_s(-x) = \gamma_s(x)$. Ainsi, la famille des noyaux de Gauss a la propriété remarquable d'être complètement invariante par transformation de Fourier !

Deuxième moment. Nous allons mettre à profit cette connaissance du comportement des noyaux de Gauss pour établir que le théorème est satisfait pour toute fonction de la forme $f = g * \gamma_s$ qui est la convolée avec γ_s d'une certaine fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$; ensuite (troisième moment), nous traiterons le cas général d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Soit donc $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a alors $\widehat{g * \gamma_s} = \widehat{g}\,\widehat{\gamma_s} \in L^1$, car $\widehat{\gamma_s} \leqslant 1$ partout, puisque $\widehat{\gamma_s}(\xi) = e^{-\pi s |\xi|^2}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on calcule alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{\widehat{g * \gamma_s}}(-a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g * \gamma_s}(\xi)\, e^{2i\pi a \cdot \xi}\, d\xi \\
[\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1}\,\widehat{f_2}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi)\, \widehat{\gamma_s}(\xi)\, e^{2i\pi a \cdot \xi}\, d\xi \\
[\text{Théorème 11.2 d'échange}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mathscr{F}\Big(\widehat{\gamma_s}(\xi)\, e^{2i\pi a \cdot \xi}\Big)(x)\, dx \\
[\text{Proposition 10.1}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \widehat{\widehat{\gamma_s}}(x-a)\, dx \\
[\text{Proposition 12.1}] \qquad &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \gamma_s(a-x)\, dx \\
&= g * \gamma_s(a),
\end{aligned}$$

ce qui montre que le théorème est satisfait lorsque $f = g * \gamma_s$.

Troisième moment. Maintenant, soit généralement $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Commençons par une observation. Puisque $(\gamma_s)_{s \underset{>}{\to} 0}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, on a convergence vers f en norme L^1 des convolées $f * \gamma_s$:

$$0 = \lim_{s \to 0} \big\| f * \gamma_s - f \big\|_{L^1}.$$

Le théorème de Fischer-Riesz assure alors qu'il existe une suite de paramètres $s_k \to 0$ telle que :

$$f * \gamma_{s_k}(a) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a),$$

pour presque tout $a \in \mathbb{R}^d$. Mémorisons donc ce fait.

Ensuite, puisque :

$$\widehat{\gamma_s}(\xi) = e^{-\pi\, s\, |\xi|^2},$$

on voit clairement, lorsque $s \longrightarrow 0$, que $\widehat{\gamma_s}(\xi) \leqslant 1$ tend vers 1 en croissant :

$$1 = \lim_{s \to 0} \widehat{\gamma_s}(\xi),$$

et ce, en tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé. Ainsi :

$$\lim_{s \to 0} \widehat{f * \gamma_s}(\xi) = \lim_{s \to 0} \widehat{f}(\xi)\, \widehat{\gamma_s}(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

et comme on peut majorer trivialement ce produit :

$$\big| \widehat{f}(\xi)\, \widehat{\gamma_s}(\xi) \big| \leqslant \big| \widehat{f}(\xi) \big|$$

par la fonction intégrable $\big|\widehat{f}\big| \in L^1$, le théorème de convergence dominée assure alors que :

$$0 = \lim_{s \to 0} \big\| \widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f} \big\|_{L^1}. \tag{14.2}$$

Considérons maintenant la transformée de Fourier de $\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}$, à savoir la fonction définie par :

$$\widehat{\widehat{f * \gamma_s}}(a) - \widehat{\widehat{f}}\,(a) = \int_{\mathbb{R}^d} \Big(\widehat{f * \gamma_s}(\xi) - \widehat{f}(\xi) \Big)\, e^{-2i\pi a \cdot \xi}\, d\xi,$$

expression dans laquelle apparaît $\widehat{\widehat{f}}\,(a)$ que l'on veut calculer et égaler à $f(-a)$. La majoration générale élémentaire $\big\|\widehat{g}\big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|g\|_{L^1}$ qui donne ici :

$$\Big\|\widehat{\widehat{f * \gamma_s}} - \widehat{\widehat{f}}\,\Big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \big\|\,\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}\,\big\|_{L^1} \underset{s \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

et la convergence (14.2) que nous venons d'obtenir, montrent alors que :

$$\widehat{\widehat{f * \gamma_s}} \text{ converge uniformément vers } \widehat{\widehat{f}} \text{ sur } \mathbb{R}^d.$$

En restreignant le paramètre s à la suite $s_k \to 0$, en appliquant le résultat du deuxième moment sous la forme d'une égalité que nous plaçons au centre, et en rappelant ce que nous avons mémorisé au début, il vient enfin un diagramme à quatre termes :

$$\widehat{\widehat{f}}\,(-a) \underset{\infty \leftarrow k}{\longleftarrow} \widehat{\widehat{f * \gamma_{s_k}}}(-a) \;=\; f * \gamma_{s_k}(a) \underset{k \to \infty}{\longrightarrow} f(a),$$

qui conclut élégamment la démonstration de la formule d'inversion :

$$\widehat{\widehat{f}}\,(-a) \;=\; f(a)$$

affirmée par le théorème. □

Ainsi la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ induit un automorphisme de l'espace vectoriel $\big\{f \in L^1(\mathbb{R}^d) \colon\ \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\big\}$, dont l'inverse est donné par $\mathscr{F}^{-1} = \overline{\mathscr{F}}$. Cependant, ce théorème n'est pas totalement satisfaisant car l'hypothèse d'intégrabilité sur $\widehat{f}$ s'avère restrictive pour la raison suivante : en appliquant $\mathscr{F}$ à $\widehat{f}$, ce qui redonne f à quelques modifications mineures près, on voit à cause du Lemme 9.1 que f était nécessairement continue sur $\mathbb{R}^d$, et tendait nécessairement vers 0 lorsque $|x| \to \infty$, et cette restriction écarte sans raison des fonctions d'usage très fréquent, aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il faut donc *prolonger* la transformation de Fourier, ce qui est l'objet de la prochaine section.

15. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Contrairement à ce qui se passait sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ où l'on avait $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^{\mathsf{p}}(\mathbb{T}) \subset L^{\mathsf{q}}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour tous exposants $1 < \mathsf{q} < \mathsf{p} < \infty$, et ce, grâce à la compacité du cercle unité, sur l'espace *non compact* $\mathbb{R}^d$, les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont *étrangers l'un à l'autre*, à savoir : aucun des deux n'est contenu dans l'autre ; il suffit en effet de penser à $\mathbf{1}_{]0,1]} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$, ainsi qu'à $\mathbf{1}_{[1,\infty[} \cdot \frac{1}{x}$, non dans $L^1(\mathbb{R})$ mais dans $L^2(\mathbb{R})$; l'Exercice 9 donne plus d'information.

Donc comme $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on ne peut en général pas utiliser la fomule intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-2i\pi x \cdot \xi}\, dx$ pour définir les transformées de Fourier de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$. Pourtant, la nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables a été fortement motivée, dans les travaux de Plancherel au début des années 1910, par le fait que les espaces de Hilbert séparables, dont ℓ^2 est le prototype universel, possèdent une structure géométrique riche, flexible et très utile (équation de la chaleur ; équations intégro-différentielles ; mécanique quantique ; opérateur $\overline{\partial}$; *etc.*). Ce fut une réussite, et le théorème dit « de Parseval-Plancherel » qui prolonge la transformation de Fourier $\mathscr{F}$ à tout $L^2(\mathbb{R}^d)$ en partant du sous-espace dense :

$$L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d),$$

confère à $\mathscr{F}$ un statut plus harmonieux et plus symétrique, puisque $\mathscr{F}$ devient alors un *isomorphisme* de $L^2(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\big\|\mathscr{F}(f)\big\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Théorème 15.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction de carré intégrable quelconque. Alors :*
(1) *il existe une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$;*
(2) *pour toute suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions de cette espèce telle que :*

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^2},$$

la suite des transformées de Fourier intégrales standard de ces fonctions f_n :

$$\widehat{f_n}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\, e^{-2i\pi x\cdot\xi}\, dx$$

converge en norme L^2 vers une certaine fonction-limite $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|\widetilde{f} - \widehat{f_n}\big\|_{L^2}$$

qui est indépendante de la suite f_n et qu'on appelle transformée de Fourier *de f. De plus :*

$$\big\|\widetilde{f}\,\big\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Il est clair pour des raisons de cohérence que dans la circonstance où la fonction f appartient déjà à $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est tout simplement donnée par la formule intégrale standard, puisqu'il suffit de prendre $f_n = f$ pour tout n ci-dessus. Mais le fond de l'affaire, c'est que le théorème permet de parler de transformation de Fourier sans formule intégrale.

Par *convention notationnelle distinctive*, la transformée de Fourier d'une fonction Lebesgue-intégrable $\phi \in L^1(\mathbb{R})$ sera notée de manière équivalente :

$$\widehat{\phi}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad \mathscr{F}(\phi),$$

tandis que la transformée de Fourier (généralisée) d'une fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ (qui n'appartient pas forcément à $L^1(\mathbb{R})$), sera toujours notée :

$$\mathscr{F}(\psi).$$

Démonstration. La partie **(1)** est bien sûr conséquence du fait que l'espace $\mathscr{C}^0_c(\mathbb{R}^d)$ — voire même $\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^d)$ — est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque de telles fonctions continues (ou infiniment différentiables à support compact) sont évidemment d'intégrale finie. Toutefois, voici un argument de démonstration indépendant et plus économique.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, notons $B(0,n)$ la boule ouverte de rayon n centrée à l'origine et introduisons tout simplement la troncature f_n de f par la fonction indicatrice de cette boule :

$$f_n := f\, \mathbf{1}_{B(0,n)}.$$

On a évidemment $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, avec $\|f_n\|_{L^2} \leqslant \|f\|_{L^2}$. De plus, f_n appartient également à $L^1(\mathbb{R}^d)$, comme on peut s'en assurer grâce à l'application un peu artificielle mais récurrente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui consiste à faire apparaître un facteur 1 virtuel :

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} \big|f_n(x)\big|\,dx &= \int_{B(0,n)} |f(x)|\,dx \\ &= \int_{B(0,n)} |f(x)|\cdot 1\,dx \\ &\leqslant \underbrace{\bigg(\int_{B(0,n)} |f(x)|^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}}_{\leqslant \|f\|_{L^2}} \underbrace{\bigg(\int_{B(0,n)} 1^2\,dx\bigg)^{\frac{1}{2}}}_{\text{constante} < \infty} \\ &< \infty.\end{aligned}$$

On a donc $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, une application du théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\big\|f_n - f\big\|_{L^2}\Big)^2 = \lim_{n\to\infty} \int_{|x|\geqslant n} |f(x)|^2\,dx = 0,$$

ce qui prouve bien que la suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On remarquera que cet argument de preuve n'utilise aucun théorème d'approximation de la théorie de l'intégration. Ainsi, **(1)** est démontré.

Maintenant que l'on a une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$ et convergeant vers f en norme L^2, donc de Cauchy en norme L^2, il faut s'assurer que la suite des transformées de Fourier des f_n fournies par la formule intégrale standard ($f_n \in L^1$!) :

$$\widehat{f_n}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x)\,e^{-2i\pi x\cdot\xi}\,dx$$

converge de quelque façon vers quelque chose en norme L^2. C'est là qu'intervient l'argument crucial :

Théorème 15.2. [Formule de Plancherel] *La transformée de Fourier $\widehat{f}$ de toute fonction :*

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d),$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et possède la même norme L^2 que f :

$$\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Admettons provisoirement cet énoncé et achevons la preuve du théorème en cours. Ainsi, $\widehat{f_n}$ appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \geqslant 1$, et qui plus est, la suite $\big(\widehat{f_n}\big)_{n=1}^{\infty}$ est de Cauchy, à nouveau grâce à cette formule :

$$\lim_{n_1,n_2\to\infty} \big\|\widehat{f_{n_2}} - \widehat{f_{n_1}}\big\|_{L^2} = \lim_{n_1,n_2\to\infty} \big\|f_{n_2} - f_{n_1}\big\|_{L^2} = 0.$$

L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant complet, il existe donc une unique fonction $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est la limite des $\widehat{f_n}$.

Montrons enfin que $\widetilde{f}$ ne dépend pas du choix d'une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $0 = \lim_{n\to+\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^2}$. Soit en effet $(f_n')_{n=1}^{\infty}$ une autre suite de fonctions $f_n' \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $0 = \lim_{n\to+\infty} \big\|f_n' - f\big\|_{L^2}$. Alors $f_n' - f_n$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \geqslant 1$ et converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque :

$$\big\|f_n' - f_n\big\|_{L^2} \leqslant \big\|f_n' - f\big\|_{L^2} + \big\|f - f_n\big\|_{L^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

La formule de Plancherel (encore elle !) permet alors de voir que la limite $\widetilde{f'}$ des $\widehat{f'_n}$ (qui existe d'après ce qui vient d'être vu) est la même, dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, que la limite $\widetilde{f}$ des $\widehat{f_n}$:

$$\big\|\widetilde{f'} - \widetilde{f}\big\|_{L^2} \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|\widehat{f'_n} - \widehat{f_n}\big\|_{L^2} \,=\, \lim_{n\to\infty} \big\|f'_n - f_n\big\|_{L^2} \,=\, 0,$$

c'est-à-dire $\widetilde{f'} = \widetilde{f}$ en tant qu'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$, conclusion de la preuve. □

Démonstration du Théorème 15.2. Il ne reste plus qu'à établir cette formule de Plancherel. Supposons d'abord que f et $\widehat{f}$ soient dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction $\widehat{f}$ est bornée grâce à l'inégalité élémentaire $\big\|\widehat{f}\,\big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant \|f\|_{L^1}$, et on va montrer que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, aussi. En effet, si $\widehat{f}$ n'est pas partout nulle, quitte à la diviser par sa norme $\big\|\widehat{f}\,\big\|_{\mathscr{C}^0}$ — une simple constante > 0 —, on peut supposer que $\big\|\widehat{f}\big\|_{\mathscr{C}^0} \leqslant 1$. Dans ces conditions, sachant que $\alpha^2 \leqslant \alpha$ pour tout nombre réel $\alpha \in [0,1]$, on a :

$$\big|\widehat{f}(\xi)\big|^2 \leqslant \big|\widehat{f}(\xi)\big|,$$

d'où, puisque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(\xi)\big|^2\, d\xi \leqslant \int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(\xi)\big|\, d\xi < \infty,$$

ce qui prouve bien que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ceci étant dit, on peut à présent entreprendre le calcul qui nous dirige vers la formule désirée :

$$\begin{aligned}
\big(\|f\|_{L^2}\big)^2 \,&=\, \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\, f(x)\, dx \\
\text{[Théorème 14.1 d'inversion]} \qquad &=\, \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)}\, \widehat{\widehat{f}}\,(-x)\, dx \\
\text{[Théorème 11.2 d'échange]} \qquad &=\, \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}\big(\overline{f}\big)(\xi)\, \widehat{f}(-\xi)\, d\xi \\
&=\, \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathscr{F}(f)}(-\xi)\, \widehat{f}(-\xi)\, d\xi \\
&=\, \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathscr{F}(f)}(\xi)\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\
&=\, \big(\big\|\widehat{f}\,\big\|_{L^2}\big)^2.
\end{aligned}$$

Traitons à présent le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, sans supposer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $f_\varepsilon := f * \gamma_\varepsilon$ la convolée de f avec le noyau de Gauss γ_ε. Comme $\gamma_\varepsilon \in L^1$ et comme $f \in L^2$, sachant que $L^1 * L^2 \subset L^2$ grâce à un théorème vu dans le chapitre consacré à la convolution, nous avons $f_\varepsilon = \gamma_\varepsilon * f \in L^2$.

Comme f et γ_ε appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, il en va de même de $f * \gamma_\varepsilon$. De plus, on a :

$$\widehat{f_\varepsilon} \,=\, \widehat{f}\,\widehat{\gamma_\varepsilon} \,\in\, L^1(\mathbb{R}^d),$$

car $\widehat{f}$ est bornée et $\widehat{\gamma_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

La fonction f_ε relève donc du cas précédent, et par conséquent, nous recevons l'égalité « gratuite » :

$$\big(\big\|\widehat{f_\varepsilon}\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \big(\big\|f_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2. \tag{15.3}$$

Ensuite, en tenant compte de :

$$\big|\widehat{\gamma}_\varepsilon(t)\big|^2 \,=\, \big(e^{-\pi\varepsilon|t|^2}\big)^2 \,=\, e^{-2\pi\varepsilon|t|^2},$$

nous avons :

$$\begin{aligned}\big(\big\|\widehat{f}_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}_\varepsilon(t)\big|^2\,dt \,&=\, \int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(t)\big|^2\,\big|\widehat{\gamma}_\varepsilon(t)\big|^2\,dt\\ &=\, \int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(t)\big|^2\,e^{-2\pi\varepsilon|t|^2}\,dt.\end{aligned}$$

Alors en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, le théorème de la convergence monotone nous offre :

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\big\|\widehat{f}_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2 \,&=\, \int_{\mathbb{R}^d} \big|\widehat{f}(t)\big|^2\cdot 1\,dt\\ &=\, \big(\big\|\widehat{f}\big\|_{L^2}\big)^2 \ \in\, \mathbb{R}_+\cup\{\infty\},\end{aligned} \tag{15.4}$$

cette dernière quantité pouvant *a priori* être infinie !

Mais par ailleurs, puisque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, comme $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon\to 0}$ est une approximation de l'unité, $f_\varepsilon = f * \gamma_\varepsilon$ converge vers f en norme L^2 :

$$0 \,=\, \lim_{\varepsilon\to 0}\,\big(\big\|f_\varepsilon - f\big\|_{L^2}\big)^2,$$

d'où il découle grâce à la continuité de la norme :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\big(\big\|f_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \big(\big\|f\big\|_{L^2}\big)^2. \tag{15.5}$$

Pour terminer, une synthèse des trois égalités (15.4), (15.3), (15.5), nous offre l'égalité désirée :

$$\big(\big\|\widehat{f}\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\big\|\widehat{f}_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \lim_{\varepsilon\to 0}\big(\big\|f_\varepsilon\big\|_{L^2}\big)^2 \,=\, \big(\big\|f\big\|_{L^2}\big)^2,$$

toutes ces quantités étant finies, ce qui conclut en beauté la démonstration. □

Pour terminer ce chapitre, voici une conséquence directe de l'identité de Plancherel et de la formule de Parseval, valables dans $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, donc valables dans $L^2(\mathbb{R})$ par passage à la limite avec des suites approximantes.

Théorème 15.6. [Plancherel-Parseval dans $L^2(\mathbb{R})$] *La transformée de Fourier $\mathscr{F}(f) \in L^2(\mathbb{R})$ de toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R})$ possède la même norme L^2 que f :*

$$\big\|\mathscr{F}(f)\big\|_{L^2(\mathbb{R})} \,=\, \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

De plus, la transformation de Fourier est une isométrie *pour le produit scalaire L^2, à savoir, pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, on a conservation du produit scalaire :*

$$\big\langle\mathscr{F}(f),\,\mathscr{F}(g)\big\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f,\,g\rangle_{L^2(\mathbb{R})}\,,$$

c'est-à-dire en détail :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \,=\, \int_{\mathbb{R}^d} \mathscr{F}(f)(\xi)\,\overline{\mathscr{F}(g)(\xi)}\,d\xi.$$ □

Goodbye darling, and work hard for the final exam !

16. Exercices

Exercice 1. On se propose ici d'établir une version économique de la formule d'inversion de Fourier.

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ à support compact contenu dans l'intervalle $[-M, M]$, avec $M > 0$, et dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est à croissance modérée, *i.e.* satisfait $\big|\widehat{f}(\xi)\big| \leqslant \mathsf{constante}\big/(1+\xi^2)$.

(a) Pour L fixé avec $L/2 > M$, en associant à f une fonction L-périodique, en posant $\delta := \frac{1}{L}$, en introduisant pour $n \in \mathbb{Z}$ les quantités :

$$\widehat{f}(n) \;:=\; \frac{1}{L}\int_{-L/2}^{L/2} f(x)\, e^{-2i\pi \frac{nx}{L}}\, dx,$$

montrer en utilisant le théorème de Dirichlet de la théorie des séries de Fourier que l'on a :

$$f(x) \;=\; \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\big(k\delta\big)\, e^{2i\pi k\delta x} \qquad\qquad (|x| \leqslant \tfrac{L}{2}).$$

(b) Montrer que si une fonction g est continue et à croissance modérée, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\, d\xi \;=\; \lim_{\substack{\delta \to 0 \\ \delta > 0}} \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} g\big(k\delta\big).$$

(c) Conclure que l'on a bien la formule d'inversion de Fourier dans cette circonstance :

$$f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

Exercice 2. Montrer que la convolée $f * g$ de deux fonctions continues $f, g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée est encore à croissance modérée. Indication: Découper :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy \;=\; \int_{|y| \leqslant \frac{|x|}{2}} + \int_{|y| > \frac{|x|}{2}},$$

et utiliser $f(x-y) = \mathrm{O}\big(\frac{1}{1+x^2}\big)$ dans la première intégrale, puis $g(y) = \mathrm{O}\big(\frac{1}{1+x^2}\big)$ dans la seconde.

Exercice 3. Cet exercice illustre le principe d'après lequel la décroissance de $\widehat{f}$ à l'infini est reliée à la régularité de f.

(a) Soit f une fonction à croissance modérée : $|f(x)| \leqslant A\big/(1+x^2)$ sur $\mathbb{R}$ avec $A > 0$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est continue et satisfait :

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\Big), \qquad\qquad (|\xi| \longrightarrow \infty),$$

pour un certain réel $0 < \alpha < 1$. En admettant que la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

est alors satisfaite, montrer que f est $\mathscr{C}^\alpha$-höldérienne, à savoir qu'elle satisfait une estimée uniforme du type :

$$\big|f(x+h) - f(x)\big| \;\leqslant\; M\, |h|^\alpha \qquad\qquad (x, h \in \mathbb{R}),$$

avec une constante $M > 0$. Indication: Découper l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ qui exprime $f(x+h) - f(x)$ en les deux morceaux $\int_{|\xi| \leqslant \frac{1}{|h|}} + \int_{|\xi| > \frac{1}{|h|}}$.

(b) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule pour $|x| \geqslant 1$, satisfait $f(0) = 0$, et est égale à :

$$\frac{1}{\log(1/|x|)}$$

dans un petit intervalle $[-\delta_0, \delta_0]$ avec $\delta_0 > 0$. Vérifier que f est à croissance modérée, mais que $\widehat{f}$ ne l'est pas, et plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \mathrm{O}\Big(\frac{1}{|\xi|^{1+\varepsilon}}\Big) \qquad\qquad (|\xi| \longrightarrow \infty).$$

Exercice 4. **(a)** En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f'}(\xi) = 2i\pi\,\xi\,\widehat{f}(\xi).$$

Si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R})$ avec $k \geqslant 1$, en déduire que pour tout entier positif $\ell \leqslant k$, on a :

$$\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (2i\pi\,\xi)^\ell\,\widehat{f}(\xi).$$

(b) En dimension $d \geqslant 1$, quelconque, si $f \in \mathscr{C}^k(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout multiindice $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $\ell_1 + \cdots + \ell_d \leqslant k$, on a :

$$\mathscr{F}\left(\frac{\partial^{\ell_1+\cdots+\ell_d}}{\partial x_1^{\ell_1}\cdots\partial x_d^{\ell_d}} f\right)(\xi_1, \dots, \xi_d) = (2i\pi)^{\ell_1+\cdots+\ell_d}\,\xi_1^{\ell_1}\cdots\xi_d^{\ell_d}\,\mathscr{F}(f)(\xi_1, \dots, \xi_d).$$

(c) En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction produit $x \mapsto xf(x)$ appartienne encore à $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $\widehat{f}$ admet une dérivée $\widehat{f}'$ continue et bornée sur $\mathbb{R}$ qui est donnée par la formule :

$$\widehat{f}'(\xi) = -\,2i\pi\,(\widehat{xf})(\xi).$$

(c) En dimension $d \geqslant 1$ quelconque, si, pour un entier $k \geqslant 1$, toutes les fonctions produits f, $x_{i_1}\,f$, $x_{i_1}x_{i_2}f$, …, $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ pour tous indices $1 \leqslant i_1, i_2, \dots, i_k \leqslant d$, montrer que l'on a pour tout multiindice $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $\ell_1 + \cdots + \ell_d \leqslant k$:

$$\frac{\partial^{\ell_1+\cdots+\ell_d}\big(\widehat{f}\big)}{\partial\xi_1^{\ell_1}\cdots\partial\xi_d^{\ell_d}}(\xi) = (-2i\pi)^{\ell_1+\cdots+\ell_d}\,\mathscr{F}\big(x_{\ell_1}\cdots x_{\ell_\ell}\,f\big)(\xi).$$

Exercice 5. Soit la fonction indicatrice :

$$f(x) \;=\; \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{lorsque } \; |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et soit la fonction :

$$g(x) \;=\; \begin{cases} 1 - |x| & \text{lorsque } \; |x| \leqslant 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Bien que f ne soit pas continue, l'intégrale qui définit sa transformée de Fourier a un sens.

(a) Montrer qu'elle vaut :

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; \frac{\sin(2\pi\,\xi)}{\pi\,\xi},$$

avec bien entendu $\widehat{f}(0) = 2$.

(b) Montrer aussi que :

$$\widehat{g}(\xi) \;=\; \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\,\xi}\right)^2,$$

avec $\widehat{g}(0) = 1$.

Exercice 6. **(a)** Appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction g de l'Exercice 5 pour obtenir la formule :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \;=\; \frac{\pi^2}{\big(\sin(\pi\,x)\big)^2},$$

lorsque $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$ n'est pas un entier.

(b) En déduire :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{m=-n}^{n} \frac{1}{x+m} \;=\; \frac{\pi}{\tan(\pi x)}.$$

Indication: Se ramener à $0 < x < 1$, puis intégrer la formule qui précède. Quel résultat donne l'évaluation en $x = \frac{1}{2}$?

Exercice 7. Soit un paramètre réel $a > 0$.

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$:

$$f_a(x) := e^{-2\pi a|x|}.$$

(b) En déduire, pour tous $a, b > 0$, les cinq formules suivantes :

$$\frac{a}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(2\pi x\xi)}{a^2+\xi^2}\,d\xi = e^{-2\pi a|x|},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(a^2+\xi^2)^2} = \frac{\pi}{2\,a^3},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\xi}{(a^2+\xi^2)\,(b^2+\xi^2)} = \frac{\pi}{ab\,(a+b)},$$

$$\Big(\frac{a}{\pi}\,\frac{1}{a^2+x^2}\Big)*\Big(\frac{b}{\pi}\,\frac{1}{b^2+x^2}\Big) = \frac{a+b}{\pi}\,\frac{1}{(a+b)^2+x^2},$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{1}{a^2+k^2} = \frac{\pi}{a}\,\frac{1+e^{-2\pi a}}{1-e^{-2\pi a}}.$$

Exercice 8. Montrer que toute fonction $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée, en particulier dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. Indication: Sur un grand intervalle fermé $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ avec $\mathrm{M} \gg 1$, on a uniforme continuité, tandis que sur $]-\infty, -\mathrm{M}] \cup [\mathrm{M}, \infty[$, les valeurs de f sont « *écrasées* » par l'hypothèse $f(x) \leqslant \frac{A}{1+x^2}$.

Exercice 9. Établir les relations suivantes entre $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(a) Aucune des deux inclusions $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est vraie. Indication: Penser à des fonctions de la forme $\frac{1}{|x|^\alpha}$ sur $\{|x| \leqslant 1\}$ et sur $\{|x| \geqslant 1\}$.

(b) Toutefois, lorsqu'une fonction mesurable $f\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C}$ a un support $\operatorname{supp} f \subset E$ contenu dans un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie, montrer que :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sqrt{m(E)}\,\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Montrer aussi que lorsqu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est bornée $|f(x)| \leqslant M < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a aussi $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec l'estimation :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \sqrt{M}\,\sqrt{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}.$$

Exercice 10. Montrer que si une fonction continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée satisfait :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\,e^{-y^2}\,e^{2xy}\,dy \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

alors $f \equiv 0$. Indication: Convoler $f * e^{-x^2}$.

Exercice 11. [Noyau de Fejér sur $\mathbb{R}$] Soit la fonction dépendant d'un paramètre $R > 0$ définie par :

$$\mathscr{F}_R(t) := \begin{cases} R\left(\dfrac{\sin(\pi R t)}{\pi R t}\right)^2 & \text{lorsque } t \neq 0, \\ R & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

(a) Établir, pour toute fonction continue $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée, la formule :

$$\big(f * \mathscr{F}_R\big)(x) = \int_{-R}^{R}\Big(1 - \frac{|\xi|}{R}\Big)\,e^{2i\pi x\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

(b) Montrer que $\big(\mathscr{F}_R\big)_{R>0}$ est une famille de bons noyaux lorsque $R \longrightarrow \infty$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{R\to\infty}\big\|f * \mathscr{F}_R - f\big\|_{\mathscr{C}^0(\mathbb{R})}.$$

Exercice 12. Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que la périodisation du noyau de Fejér $\mathscr{F}_n$ sur la droite réelle $\mathbb{R}$ coïncide avec le noyau de Fejér trigonométrique pour les fonctions de période 1, à savoir, montrer que :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathscr{F}_n(x+k) \;=\; \frac{1}{n}\left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)}\right)^2 \;=\; \mathsf{F}_n(\pi\, x).$$

Exercice 13. **[Fonction zêta]** Soit la fonction :

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \qquad\qquad (s>1),$$

soit la fonction :

$$\Gamma(s) \;:=\; \int_0^{\infty} x^{s-1}\, e^{-x}\, dx \qquad\qquad (s>0),$$

et soit :

$$\vartheta(x) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \qquad\qquad (s>0).$$

Pour $s>1$, établir l'identité fonctionnelle :

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\,\Gamma\big(\tfrac{s}{2}\big)\,\zeta(s) \;=\; \frac{1}{2}\int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1}\,\big(\vartheta(x)-1\big)\,dx.$$

Exercice 14. L'objectif est de donner une formule pour les valeurs $\zeta(2m)$ de la fonction $\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ aux entiers pairs $s=2m\geqslant 2$.

(a) Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x):=\frac{1}{\pi}\,\frac{t}{t^2+x^2}$ avec un paramètre $t>0$ vaut :

$$\widehat{f}(\xi) \;=\; e^{-2\pi t|\xi|}.$$

(b) Appliquer la formule sommatoire de Poisson pour obtenir :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+n^2} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|}.$$

(c) Pour $0<t<1$, établir la formule :

$$\frac{1}{\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{t}{t^2+n^2} \;=\; \frac{1}{\pi t}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\,\zeta(2m)\,t^{2m-1}.$$

(d) Toujours pour $0<t<1$, vérifier aussi :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|} \;=\; \frac{2}{1-e^{-2\pi t}}-1.$$

(e) Appliquer enfin la définition des *nombres de Bernouilli* comme apparaissant dans le développement en série entière :

$$\frac{z}{e^z-1} \;=\; 1-\frac{z}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m!)}\,z^{2m},$$

pour atteindre :

$$\zeta(2m) \;=\; \pi^{2m}\,\frac{2^{2m-1}}{(2m)!}\,(-1)^{m+1}\,B_{2m} \qquad\qquad (\forall\, m\geqslant 1).$$

Exercice 15. Soit $A\in\mathscr{M}_{d\times d}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ${}^{\mathsf{T}}\!A=A$ définie positive à coefficients réels. Calculer la valeur :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x\cdot Ax}\,dx \;=\; \frac{1}{\sqrt{\det A}},$$

qui généralise celle connue $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x\cdot x}\,dx = 1$ lorsque $A=\mathsf{Id}$. Indication: Utiliser une diagonalisation $A=R^{-1}DR$, où R est une matrice orthogonale satisfaisant $\mathsf{Id}={}^{\mathsf{T}}\!RR$, et où $D=\mathsf{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_d)$ avec $0<\lambda_1\leqslant\cdots\leqslant\lambda_d$ est la matrice diagonale des valeurs propres (ordonnées) de A.

Exercice 16. Pour $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 = 1$, établir le principe d'incertitude de Heisenberg en dimension quelconque $d \geqslant 1$:

$$\bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 \, \big|\psi(x)\big|^2 \, dx\bigg) \bigg(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 \, \big|\widehat{\psi}(\xi)\big|^2 \, d\xi\bigg) \geqslant \frac{d^2}{16\,\pi^2}.$$

Exercice 17. Pour $\beta \geqslant 0$, démontrer la formule :

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} \, e^{-\frac{\beta^2}{4u}} \, du.$$

Exercice 18. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction continue. Montrer que f et sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ ne peuvent pas toutes deux être à support compact, sauf lorsque $f \equiv 0$. Indication: Supposer que f est à support dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, développer f en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$, et observer qu'alors, f est un polynôme trigonométrique.

Exercice 19. Étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur consiste à déterminer les fonctions $u \in \mathscr{C}^2\big(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*\big)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 & \text{pour tous } (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ \lim\limits_{y \to 0} u(x,y) = f(x) & \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \\ \sup\limits_{y>0} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \big|u(x,y)\big| \, dx < \infty. \end{cases}$$

On suppose que, pour tout $y > 0$, les quatre fonctions :

$$x \longmapsto u(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y), \qquad x \longmapsto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)$$

sont intégrables au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

(a) Si $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$ désigne la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x dont on explicitera d'abord la définition, montrer que l'on a, pour tout $y > 0$:

$$\begin{cases} 4\pi\xi^2 \, \widehat{u}(\xi,y) - \dfrac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi,y) = 0, \\ \lim\limits_{y \to 0} \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \\ \sup\limits_{y>0} \big|\widehat{u}(\xi,y)\big| < +\infty. \end{cases}$$

(b) Montrer qu'il existe des fonctions A et B telles que :

$$\widehat{u}(\xi,y) = A(\xi)\, e^{-2\pi\xi y} + B(\xi)\, e^{2\pi\xi y}.$$

(c) Établir que l'on a en fait :

$$\widehat{u}(\xi,y) = \widehat{f}(\xi)\, e^{-2\pi|\xi|\, y}.$$

(d) Vérifier, pour tout $y > 0$ fixé, que la fonction $\xi \longmapsto \widehat{u}(\xi,y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier que l'on a :

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi,y)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

(f) On pose $g_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2+y^2}$. Calculer la transformée de Fourier :

$$\widehat{g_y}(\xi) = e^{-|\xi|\, y}.$$

(g) Déduire de ce qui précède que l'on a :

$$\widehat{u}(\xi,y) = \mathscr{F}\big(f * g_y\big).$$

(h) Montrer que la solution recherchée est donnée par la formule intégrale :

$$u(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)\, \frac{y}{\pi(y^2 + (x-s)^2)}\, ds,$$

qu'elle est de classe en fait $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et qu'elle satisfait toutes les conditions requises.

Exercice 20. [Condition de Dini] La transformée de Fourier $g := \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'appartient pas en général à $L^1(\mathbb{R})$, ce qui fait que la transformée de Fourier seconde :

$$\widehat{\widehat{f}} = \widehat{g}$$

ne peut *pas* en général être calculé au moyen de la formule classique $\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, e^{-2i\pi\xi x}\, dx$. On rappelle que l'intérêt d'une double transformation est la formule d'inversion de Fourier :

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x),$$

vraie par exemple lorsque $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ est dans l'espace de Schwartz.

(a) Montrer en effet que la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé borné $[a,b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$ n'appartient *pas* à $L^1(\mathbb{R})$.

Le but ici est d'énoncer une condition spécifique sur f, dite « de Dini », qui assurera que l'on puisse néanmoins inverser la transformée de Fourier en écrivant :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi,$$

cette intégrale impropre étant définie comme valeur principale au sens de Cauchy :

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

(b) Avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose donc pour $R > 0$:

$$S_R(x) := \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

En admettant que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2}$, montrer que l'on a :

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2}\right] \frac{\sin(2\pi R t)}{t}\, dt.$$

(c) On pose donc :

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2\,f(x)}{2},$$

et on suppose — hypothèse de type « Dini » — qu'il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)|}{t}\, dt < \infty.$$

Montrer que l'on a alors effectivement la conclusion désirée :

$$f(x) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi x\xi}\, d\xi.$$

(d) Vérifier que cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}^\alpha(\mathbb{R})$ est de plus höldérienne, au sens où il existe $0 < \alpha < 1$ et $0 \leqslant K < \infty$ tels que :

$$\big|f(x'') - f(x')\big| \leqslant K\,\big|x'' - x'\big|^\alpha \qquad (\forall\, x', x'' \in \mathbb{R}).$$

Exercice 21. [Transformée de Hilbert] Rappelons que la transformée de Fourier $\widehat{u}$ d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

On note alors différemment $\mathscr{F} \colon L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ — théorème du cours — de cette transformation, qui se calcule donc comme $\mathscr{F}(u) = \widehat{u}$ seulement lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et qui établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse naturellement noté $\mathscr{F}^{-1}$.

(a) Montrer que pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n\to\infty} \big\|u - u\,\mathbf{1}_{[-n,n]}\big\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où $\mathbf{1}_{[-n,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n,n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $\mathscr{F}(u) = \lim_{n\to\infty} \mathscr{F}\big(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}\big)$ *dans* $L^2(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, justifier que :

$$\mathscr{F}\big(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]}\big)(\xi) = \int_{-n}^{n} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \bigg\| \mathscr{F}(u)(\xi) - \int_{-n}^{n} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx \bigg\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On définit maintenant la *transformée de Hilbert* $\mathscr{H} \colon L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow L^2(\mathbb{R})$ pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathscr{H}(u)(x) := \mathscr{F}^{-1}\Big(\mathrm{sign}(\xi)\, \mathscr{F}(u)(\xi)\Big)(x),$$

où sign $\in L^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\mathrm{sign}\,(\xi) := -1 \quad \text{lorsque } \xi < 0, \qquad \mathrm{sign}\,(0) := 0, \qquad \mathrm{sign}\,(\xi) := +1 \quad \text{lorsque } \xi > 0.$$

La transformée de Hilbert associe donc à une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ de carré sommable, la fonction de carré sommable dont la transformée de Fourier coïncide avec (resp. s'oppose à) celle de la fonction donnée sur les réels positifs (resp. négatifs).

(e) Montrer qu'une telle transformation $\mathscr{H}$ est bien définie et qu'elle établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$.

L'objectif principal de cet exercice est de montrer que l'on peut « représenter » $\mathscr{H}$ comme *opérateur intégral singulier*, à savoir que l'on peut écrire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\,\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y}\, dy,$$

à condition d'interpréter une telle intégrale éventuellement divergente comme « *valeur principale au sens de Hadamard* » — ne divergeant alors presque jamais —, à savoir comme la limite de l'intégrale suivante tronquée de manière équilibrée autour de x :

$$\mathscr{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\,\pi} \lim_{\varepsilon\to 0^+} \bigg(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y}\, dy + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y}\, dy \bigg).$$

Pour ce faire, on commence par fixer $\varepsilon > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \frac{u(x-y)}{y}\, dy = f_\varepsilon * u(x),$$

où $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{lorsque } |x| > \varepsilon, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \leqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Justifier rigoureusement le caractère bien défini de ce produit de convolution $f_\varepsilon * u$.

(g) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{i\,\pi} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y}\, dy = -\frac{1}{i\,\pi}\, \mathscr{F}^{-1}\Big[\mathscr{F}(f_\varepsilon) \cdot \mathscr{F}(u)\Big](x).$$

(h) Montrer que l'on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\varepsilon<|x|<n} \frac{e^{-2i\pi x\xi}}{x}\, dx = -\,2i\, \mathrm{sign}(\xi) \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\mathrm{sin} x}{x}\, dx.$$

(i) En utilisant la première étape, montrer que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathscr{F}\big(f_\varepsilon\big)(\xi) = -\,2i\, \mathrm{sign}(\xi) \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\mathrm{sin} x}{x}\, dx.$$

(j) En utilisant la valeur connue $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, montrer finalement que l'on a bien, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{i\,\pi}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{|y-x|>\varepsilon}\frac{u(y)}{x-y}\,dy = \mathscr{H}(u)(x).$$

Exercice 22. [Sans indication] Montrer qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est impaire, est nécessairement aussi impaire. Indication: Traiter d'abord le cas où $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz, puis effectuer un raisonnement par densité.

Exercice 23. [Signaux à spectre borné] Soit l'intervalle $\mathbb{I} := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{I}}$.

(b) Soit la fonction *sinus cardinal :*

$$\operatorname{sinc} x := \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{lorsque } x \not\equiv 0 \mod 1, \\ 1 & \text{pour } x \equiv 0 \mod 1. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc}^2 x\,dx = 1.$$

(c) On considère à présent l'ensemble des 'signaux' à spectre borné contenu dans $\mathbb{I}$:

$$BL^2 := \big\{f \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{C}) \colon\ \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{I}\big\}.$$

Justifier que l'on peut écrire, pour tout $f \in BL^2$:

$$f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi)\,e^{2i\pi x\xi}\,d\xi.$$

(d) On munit BL^2 du produit scalaire hermitien usuel :

$$\langle f, g\rangle_{BL^2} := \langle f, g\rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\overline{g(x)}\,dx \qquad (f, g \in BL^2).$$

Montrer que BL^2 est complet (est un espace de Hilbert).

(e) Montrer que $BL^2 \subset \mathscr{C}^0_{\underset{|\cdot|\to\infty}{\longrightarrow 0}}(\mathbb{R},\mathbb{C})$, l'espace des fonctions continues tendant vers 0 aux deux infinis de $\mathbb{R}$, et même, que $BL^2 \subset \mathscr{C}^\infty$.

(f) Si, pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h f$ la fonction-translatée $(\tau_h f)(x) := f(x-h)$, montrer que la famille :

$$\big(\tau_k \operatorname{sinc}\big)_{k\in\mathbb{Z}}$$

constitue une base hilbertienne de BL^2. Indication: Observer que $\tau_k\operatorname{sinc} = \widehat{e_k}$, où la fonction $e_k \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$e_k(x) := \begin{cases} e^{2i\pi kx} & \text{lorsque } |x| \leqslant \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

puis, pour établir que cette famille $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est totale, en supposant qu'une fonction $g \in BL^2$ satisfait :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\tau_k\operatorname{sinc}(x)\,dx \qquad (\forall\, k \in \mathbb{Z}),$$

utiliser la formule d'échange pour déduire $g(x) = 0$ presque partout.

(g) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi\colon\quad BL^2 &\longrightarrow \ell^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto \big(f(k)\big)_{k\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique.

(h) Montrer que toute fonction $f \in BL^2$ se représente comme :

$$f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)\,\tau_k\operatorname{sinc}(x) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}),$$

où la série converge simultanément :

- en norme BL^2 ;
- uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. [Théorème de Plancherel et signaux à spectre borné] La *transformée de Fourier* d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction $\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$. On rappelle que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est contenu dans l'espace de Schwartz $\mathscr{S}(\mathbb{R})$.

(a) Soit une fonction quelconque $u \in L^2(\mathbb{R})$, et soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de fonctions de $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge, au sens de la norme L^2, vers u. À l'aide du Théorème de Plancherel pour $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ — dont on rappellera l'énoncé —, montrer que la suite $(\widehat{u}_n)_{n\geqslant 1}$ converge aussi vers une certaine fonction dans $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette fonction-limite dépend seulement de u, *i.e.* elle ne dépend pas du choix de la suite approximante $(u_n)_{n\geqslant 1}$. On la note alors $\mathscr{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\|\mathscr{F}(u)\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, puis vérifier que l'application $u \mapsto \mathscr{F}(u)$, dite *transformée de Fourier dans* L^2, est $\mathbb{C}$-linéaire.

(d) On pose maintenant $\mathbb{I} := [-1/2, 1/2]$ et on définit le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des *signaux à spectre borné* :

$$BL^2(\mathbb{R}) := \Big\{ u \in L^2(\mathbb{R}) \colon\ \mathscr{F}(u)(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{I} \Big\}.$$

Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartient à $BL^2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathscr{F}(u) \in L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier soigneusement que l'on peut écrire $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathscr{F}(u)(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) En déduire qu'après correction éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, une fonction $u \in BL^2(\mathbb{R})$ est toujours $\mathscr{C}^\infty$.

Exercice 25. [Espace de Wiener] Étant donné la transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\, e^{-2i\pi x\xi}\, dx$ définie par une formule intégrale sur $L^1(\mathbb{R})$, on considère l'*espace de Wiener* :

$$\mathscr{W} := L^1(\mathbb{R}) \cap \widehat{L^1(\mathbb{R})}.$$

(a) Pour $f \in \mathscr{W}$, montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, puis, en écrivant $|f(x)|^{\mathsf{p}} = |f(x)|^{\mathsf{p}-1}\, |f(x)|$, que $f \in L^{\mathsf{p}}(\mathbb{R})$ pour tout $1 < \mathsf{p} < \infty$.

(b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathscr{W}$ *si et seulement si* $\widehat{f} \in \mathscr{W}$. On utilisera, après en avoir soigneusement justifié la validité, la formule $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)\, e^{2i\pi\xi x}\, d\xi$.

(c) Montrer que pour $f, g \in \mathscr{W}$, on a aussi $f * g \in \mathscr{W}$ et $f\, g \in \mathscr{W}$.

(d) Vérifier que la quantité $\|f\|_{\mathscr{W}} := \|f\|_{L^1} + \big\|\widehat{f}\big\|_{L^1}$ définit une norme sur $\mathscr{W}$.

(e) Soit maitenant $\big(f_n\big)_{n\geqslant 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $\big(\mathscr{W}, \|\cdot\|_{\mathscr{W}}\big)$.

(f) Justifier qu'il existe deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que :

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big\|f_n - f\big\|_{L^1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} \big\|\widehat{f}_n - g\big\|_{L^1} = 0$$

(g) Montrer que $\widehat{f} = g$ (presque partout).

(h) Montrer que la suite $\big(f_n\big)_{n\geqslant 1}$ converge dans $\mathscr{W}$ et qu'ainsi, $\mathscr{W}$ est *complet*.

Exercice 26. [Échantillonage de signaux] Soit $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à croissance modérée dont la transformée de Fourier $\widehat{f}$ est à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. L'objectif, utile en théorie de l'information lorsqu'on cherche à reconstituer un signal en partant d'échantillons, est de faire voir que f est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathbb{Z}$, au sens précis où toute autre fonction g continue à croissance modérée avec $\mathsf{supp}\, g \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui satisfait $g(n) = f(n)$ en tout $n \in \mathbb{Z}$ doit coïncider avec $f = g$.

(a) En introduisant $\mathsf{K}(y) := \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$, établir la *formule de reconstitution* suivante :

$$f(x) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, \mathsf{K}(x-n) \qquad\qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Indication: Observer que $\mathsf{K}(y) = \mathrm{O}(\frac{1}{|y|})$ lorsque $|y| \longrightarrow \infty$, abréger $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, introduire la fonction indicatrice $\mathbf{1}_I$, et montrer que :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathbf{1}_I(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\, e^{-2i\pi n\xi}.$$

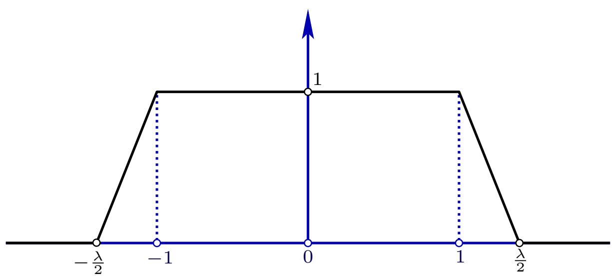
(b) Pour $\lambda > 1$, en introduisant la fonction :

$$\mathsf{K}_\lambda(y) := \frac{\cos(\pi y) - \cos(\pi\lambda y)}{\pi^2(\lambda - 1)\, y^2},$$

qui satisfait $\mathsf{K}_\lambda(y) = \mathrm{O}(\frac{1}{y^2})$ lorsque $|y| \longrightarrow \infty$, établir la formule générale :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\, f\Big(\frac{n}{\lambda}\Big)\, \mathsf{K}_\lambda\Big(x - \frac{n}{\lambda}\Big) \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}).$$

Indication: Au lieu de $\mathbf{1}_I$, utiliser la fonction continue affine par morceaux dont le graphe est le suivant.



Cette identité donne une formule de reconstruction qui converge plus rapidement que la précédente, puisque $\mathsf{K}_\lambda = \mathrm{O}(\frac{1}{y^2})$, et comme $\lambda > 1$, l'échantillonage de f est plus resserré, *i.e.* on considère comme connues les valeurs $f(\frac{n}{\lambda})$ plus nombreuses que les $f(n)$ de la question **(a)**.

(c) Vérifier que $\mathsf{K}_\lambda(y) \longrightarrow \mathsf{K}(y)$ lorsque $\lambda \xrightarrow{>} 1$.

(d) Pour conclure, établir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big|^2\, dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|f(n)\big|^2.$$
