



Département de Mathématiques d'Orsay



Comprendre le monde,
construire l'avenir*



Analyse de Fourier

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

« Je propose, sans être ému, de déclamer à grande voix la strophe sérieuse et froide que vous allez entendre. » Isidore DUCASSE, Comte de LAUTRÉAMONT.

α	β	γ	δ	ϵ	ζ
Alpha	Beta	Gamma	Delta	Epsilon	Zeta
η	θ	ι	κ	λ	μ
Eta	Theta	Iota	Kappa	Lambda	Mu
ν	ξ	\omicron	π	ρ	σ
Nu	Xi	Omicron	Pi	Rho	Sigma
τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω
Tau	Upsilon	Phi	Chi	Psi	Omega

Table des matières

I. Espaces de Hilbert	6
1. Espace vectoriel complexe hermitien concret \mathbb{C}^n en dimension finie	6
2. Espace hermitien concret $\ell_{\mathbb{C}}^2 \equiv \mathbb{C}^{\infty}$ en dimension infinie	9
3. Espaces préhilbertiens	17
4. L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$	21
5. Définition des espaces de Hilbert abstraits et des bases hilbertiennes	30
6. Meilleure approximation et projection orthogonale	38
7. Bessel, Parseval, Plancherel : Développement dans une base hilbertienne	42
8. Polynômes orthogonaux	50
9. Projection sur un convexe fermé et théorème de représentation de Riesz	58
10. Exercices	69
II. Séries de Fourier	81
1. Espaces de fonctions 2π -périodiques	81
2. Coefficients de Fourier et problèmes naturels sur les séries de Fourier	84
3. Brève histoire dialectique des séries de Fourier	87
4. Lemme de Riemann-Lebesgue	89
5. Théorème d'unicité dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$	91
6. Théorème fondamental de la base hilbertienne sur $L^2(\mathbb{T})$	96
7. Produit de convolution et séries de Fourier	100
8. 'Bons noyaux' et convolution	107
9. Principe de localisation	110
10. Constantes de Lebesgue	111
11. Théorème de Dirichlet	114
12. Théorèmes de Dini et de Jordan	118
13. Séries trigonométriques versus séries de Fourier	125
14. Convergence normale des séries de Fourier et Théorème de Bernstein	130
15. Contre-exemple de du Bois-Reymond 1876	134
16. Sommation d'Abel et noyau de Poisson	137
17. Fonction en dents de scie	142
18. Équidistribution	146
19. Une fonction continue nulle part dérivable (avec les moyennes retardées)	154
20. Une fonction continue nulle part dérivable (d'après Lebesgue)	160
21. Exercices	164

III. Convolution et régularisation	175
1. Rappels sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$	175
2. Translations dans $L^p(\mathbb{R}^d)$	177
3. Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	179
4. Produit de convolution et support.....	181
5. Convolution dans $L^p(\mathbb{R}^d)$	184
6. Inégalité de Young.....	188
7. Non-existence d'une unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	191
8. Approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	191
9. Fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact.....	197
10. Convolution et dérivation.....	198
11. Fonctions-plateau (de Saclay ?).....	201
12. Théorème de Borel.....	206
13. Suites régularisantes et densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$	204
14. Exercices.....	210
IV. Transformée de Fourier	218
1. Naissance par analogie de la transformée de Fourier.....	218
2. Premier éclairage.....	219
3. Transformée de Fourier des fonctions à croissance modérée.....	221
4. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz.....	224
5. Formule d'inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz.....	230
6. Formule de Plancherel dans l'espace de Schwartz.....	233
7. Formule sommatoire de Poisson.....	236
8. Principe d'incertitude de Heisenberg.....	238
9. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et lemme de Riemann-Lebesgue.....	240
10. Translation, modulation, homothétie.....	242
11. Transformation de Fourier d'un produit de convolution et formule d'échange.....	244
12. Noyaux de Gauss.....	245
13. Injectivité de la transformation de Fourier.....	247
14. Formule d'inversion.....	247
15. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$	250
16. Exercices.....	254
XIII. Examens corrigés	264
1. Examen 1.....	264
2. Corrigé de l'examen 1.....	267
3. Examen 2.....	276
4. Corrigé de l'examen 2.....	279
5. Examen 3.....	287
6. Corrigé de l'examen 3.....	291
7. Examen 4.....	300
8. Corrigé de l'examen 4.....	303
9. Examen 5.....	310

10. Corrigé de l'examen 5	313
11. Examen 6	320
12. Corrigé de l'examen 6	323
13. Examen 7	336
14. Corrigé de l'examen 7	341
15. Examen 8	352
16. Corrigé de l'examen 8	355

Espaces de Hilbert

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

Dans ce chapitre, on commence par étudier l'espace de Hilbert concret et tangible $\ell_{\mathbb{C}}^2 \equiv \mathbb{C}^\infty$, avant d'introduire le concept général au moyen d'une définition mathématique abstraite.

1. Espace vectoriel complexe hermitien concret \mathbb{C}^n en dimension finie

Les espaces vectoriels sont omniprésents en mathématiques : algèbre linéaire ; matrices ; déterminants ; schémas numériques pour les équations différentielles ; et en physique : principe de superposition en mécanique quantique ; équations différentielles ordinaires ; électromagnétisme. Ce chapitre vise principalement l'étude des espaces vectoriels qui sont de dimension *infinie*. Ils interviennent fréquemment en Analyse.

Le corps des scalaires de tous les espaces vectoriels considérés sera toujours supposé égal à \mathbb{R} ou, le plus souvent, à \mathbb{C} . Soit donc E un espace vectoriel sur \mathbb{C} (ou sur \mathbb{R}). Les éléments de E sont des *vecteurs* que l'on peut :

- additionner : $v + w \in E$ si $v, w \in E$;
- multiplier par des scalaires : $\lambda v \in E$ si $\lambda \in \mathbb{C}$ (ou $\lambda \in \mathbb{R}$) et $v \in E$.

Définition 1.1. Une *norme* $\| \cdot \|$ sur E est une application à valeurs positives :

$$E \ni v \longmapsto \|v\| \in [0, \infty[$$

satisfaisant :

- positivité stricte : $\|v\| = 0$ si et seulement si $v = 0$;
- invariance par dilatation : $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ (ou $\lambda \in \mathbb{R}$) et tout $v \in E$;
- inégalité triangulaire : $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ pour tous $v, w \in E$.

La positivité stricte exclut que certains vecteurs non nuls puissent avoir une longueur nulle. Ensuite, l'invariance par dilatation est exigible pour des raisons à la fois structurales (compatibilité avec la multiplication par des scalaires λ) et « physiques » (changement d'unité de mesure). Enfin, l'inégalité triangulaire n'est pas seulement calquée sur la géométrie élémentaire dans le plan, elle exprime surtout une compatibilité du comportement avec l'addition $v + w$, et aussi, elle jouera un rôle technique crucial en tant que moyen de comparaison dans tous les calculs de majorations qui vont suivre.

Par exemple, pour tout entier $n \geq 1$, l'espace :

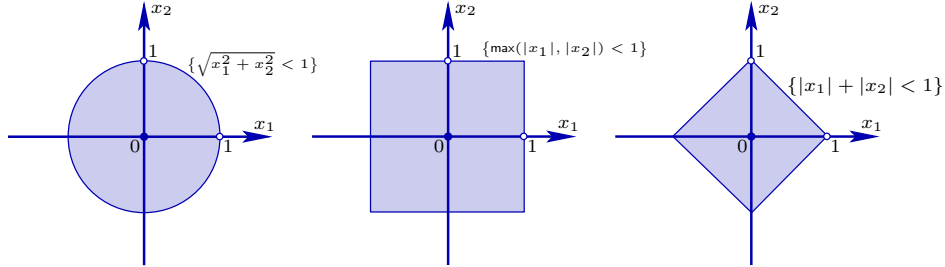
$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$$

est canoniquement muni de la norme dite *euclidienne* :

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

On peut aussi munir \mathbb{R}^n d'autres normes (vérifier que les trois axiomes sont satisfaits) :

$$\max(|x_1|, \dots, |x_n|) \quad \text{ou encore :} \quad |x_1| + \dots + |x_n|.$$



En fait, sur un espace vectoriel réel ou complexe de dimension finie, toutes les normes sont *équivalentes* entre elles au sens suivant.

Proposition 1.2. [Équivalence des normes en dimension finie] Soient $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes quelconques sur un espace vectoriel réel ou complexe E . Si la dimension de E est finie :

$$\dim E < \infty,$$

alors il existe deux constantes $0 < c \leq C < \infty$ telles que :

$$c\|v\|_2 \leq \|v\|_1 \leq C\|v\|_2,$$

pour tout vecteur $v \in E$.

Géométriquement parlant, les boules unités $\{\|v\|_1 \leq 1\}$ et $\{\|v\|_2 \leq 1\}$ pour les deux normes deviennent contenues l'une dans l'autre après une dilatation (contraction) appropriée : disque dans un carré ; carré dans un disque.

Cet énoncé exprime que, de toute majoration :

$$\|v\|_1 \leq \text{quelque chose},$$

obtenue avec la première norme, on peut déduire une majoration analogue :

$$\|v\|_2 \leq \text{même chose à la constante } C \text{ près},$$

avec la deuxième norme, et *vice-versa*.

Démonstration. On traite le cas d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Si $n := \dim E \geq 0$, on sait que $E \cong \mathbb{R}^n$. Puisque le cas $n = 0$ est trivial, supposons $n \geq 1$.

Fixons alors une norme de référence sur \mathbb{R}^n :

$$|x| := \max(|x_1|, \dots, |x_n|),$$

laquelle le munit de sa topologie standard. Il suffit de faire voir que toute norme quelconque $\|x\|$ sur \mathbb{R}^n est équivalente à $|x|$, puisque « être des normes équivalentes » est une relation d'équivalence (exercice).

Si (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{R}^n , en termes de laquelle tout vecteur $x = (x_1, \dots, x_n)$ s'écrit $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, il vient par inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|x\| &\leq |x_1| \|e_1\| + \dots + |x_n| \|e_n\| \\ &\leq C |x|, \end{aligned}$$

où la constante $C := \sum_i \|e_i\|$ est finie. Il reste à trouver $0 < c < \infty$ telle que $c|x| \leq \|x\|$ pour tout x .

Observons que l'inégalité valable pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x - y\| \leq C|x - y|,$$

montre la lipschitzianité, donc la continuité de l'application :

$$\mathbb{R}^n \ni z \longmapsto \|z\| \in \mathbb{R}_+.$$

Soit maintenant la 'sphère' unité pour la norme de référence :

$$S_{|\cdot|} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\},$$

qui est frontière de l'hypercube compact $[-1, 1]^n$. Étant image inverse du fermé $\{1\}$, cette 'sphère' $S_{|\cdot|}$ est fermée, donc compacte.

Par conséquent, la restriction à $S_{|\cdot|}$ de l'application *continue* $z \longmapsto \|z\|$ y atteint son minimum :

$$c := \min_{|x|=1} \|x\| = \|x_*\|,$$

en au moins un certain point $x_* \in S_{|\cdot|}$.

Or $x_* \neq 0$ n'est *pas* l'origine de \mathbb{R}^n — puisque $0 \notin S_{|\cdot|}$ —, donc $\|x_*\| > 0$, d'où nous déduisons que l'inégalité visée est au moins vraie sur $S_{|\cdot|}$:

$$c \cdot 1 = c|x| \leq \|x\| \quad (\forall |x|=1)$$

Pour un $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ non nul quelconque, en appliquant cette inégalité au vecteur $\frac{x}{|x|}$ qui appartient à $S_{|\cdot|}$, il vient :

$$c \left| \frac{x}{|x|} \right| \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\|,$$

d'où $c|x| \leq \|x\|$ après pulvérisation des dénominateurs.

Lorsque E est un \mathbb{C} -espace vectoriel, avec $n := \dim_{\mathbb{C}} E$, on se ramène à \mathbb{R}^{2n} . \square

Quand on travaille en dimension finie $n \geq 1$ sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C} = \mathbb{R} + \sqrt{-1}\mathbb{R}$ au lieu de \mathbb{R} , il faut remplacer la norme euclidienne ci-dessus par la norme dite *hermitienne* :

$$\|(z_1, z_2, \dots, z_n)\| := \sqrt{(|z_1|^2 + |z_2|^2 + \dots + |z_n|^2)},$$

où l'on a bien entendu :

$$|z_k|^2 := x_k^2 + y_k^2 \quad (k=1 \dots n),$$

si chaque nombre complexe z_k est décomposé en partie réelle et partie imaginaire :

$$z_k = x_k + \sqrt{-1}y_k \quad (k=1 \dots n).$$

Contrairement à ce qui va se passer en dimension infinie pour \mathbb{C}^∞ , dans \mathbb{C}^n , la somme $\sum_{i=1}^n |z_i|^2$ converge toujours, et de plus, on peut définir un produit scalaire dit *hermitien* par la formule :

$$\langle z, w \rangle := z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 + \dots + z_n \bar{w}_n,$$

où pour tout $w_k = u_k + \sqrt{-1}v_k$, le nombre complexe conjugué est :

$$\bar{w}_k := u_k - \sqrt{-1}v_k \quad (k=1 \dots n),$$

et ce produit scalaire hermitien redonne visiblement la norme hermitienne introduite à l'instant :

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}.$$

On constate aisément que ce produit hermitien satisfait les propriétés suivantes.

Lemme 1.3. [Propriétés du produit hermitien sur \mathbb{C}^n] Pour tous $z, z', z'', w, w', w'' \in \mathbb{C}^n$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

(i) $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$;

(ii) $\langle z' + z'', w \rangle = \langle z', w \rangle + \langle z'', w \rangle$,
 $\langle z, w' + w'' \rangle = \langle z, w' \rangle + \langle z, w'' \rangle$;

(iii) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$,
 $\langle z, \mu w \rangle = \overline{\mu} \langle z, w \rangle$;

(iv) $\langle z, z \rangle \in \mathbb{R}_+$;

(v) $\langle z, z \rangle = 0 \implies z = 0$. □

En renversant les rôles, ces cinq propriétés élémentaires peuvent aussi être envisagées comme cinq axiomes définissant la notion de produit hermitien abstrait sur un espace vectoriel complexe de dimension finie.

Dans le cas d'un \mathbb{R} -espace vectoriel, les barres de conjugaison disparaissent.

Maintenant, dehors la dimension finie !

2. Espace hermitien concret $\ell_{\mathbb{C}}^2 \equiv \mathbb{C}^{\infty}$ en dimension infinie

Car oui ! Notre objectif est d'étudier les espaces vectoriels normés qui sont de dimension *infinie*, i.e. qui ne sont pas de dimension finie, car ils seront très utiles en Analyse où l'on regarde des espaces de fonctions.

Contrairement à la dimension finie, sur les espaces vectoriels de dimension *infinie*, toutes les normes ne sont *pas* équivalentes.

Exemple 2.1. Soit $\mathcal{C}^0 := \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, muni des deux normes :

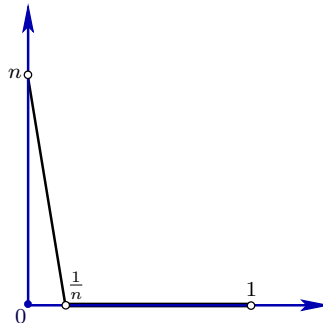
$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \text{et} \quad \|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)|.$$

Bien qu'une première inégalité soit vraie et souvent utile :

$$\|f\|_{L^1} = \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \max |f| dx = 1 \cdot \|f\|_{\mathcal{C}^0},$$

nous affirmons qu'il n'existe pas de constante $0 < C < \infty$ réalisant l'autre inégalité nécessaire à une équivalence :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} \leq C \|f\|_{L^1} \quad (\forall f \in \mathcal{C}^0).$$



En effet, pour $n \geq 1$ entier, soit la suite de fonctions continues positives :

$$f_n(x) := \begin{cases} -n^2x + n & \text{lorsque } 0 \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 0 & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\|f_n\|_{\mathcal{C}^0} = n \longrightarrow \infty,$$

tandis que par la formule donnant l'aire d'un triangle :

$$\|f_n\|_{L^1} = \frac{1}{2} \frac{1}{n} n = \frac{1}{2},$$

donc en particulier, pour ces $f_n \in \mathcal{C}^0$, une telle constante $0 < C < \infty$ n'existe pas. \square

Les espaces vectoriels normés de dimension infinie les plus 'simples' sont ceux qu'on appelle *espaces de Hilbert*, car leur norme dérive d'un produit scalaire entre vecteurs et le produit scalaire permet de faire beaucoup de géométrie comme en dimension finie, avec une notion naturelle d'orthogonalité, des projections orthogonales, des bases orthonormées, un bon comportement de la dualité, *etc.* En un certain sens, les espaces de Hilbert sont les espaces de dimension infinie les plus simples possibles, car ils sont dotés de la structure géométrique la plus riche.

L'espace \mathbb{C}^n de dimension quelconque $n \geq 1$ sur les nombres complexes est de dimension finie, mais c'est en partant de lui que nous allons nous diriger vers la dimension infinie. Le modèle le plus simple d'un espace hermitien de type \mathbb{C}^n et de dimension infinie serait bien entendu \mathbb{C}^∞ , i.e. \mathbb{C}^n avec $n = \infty$. Il a un autre nom : on l'appelle classiquement ℓ^2 , « petit- ℓ^2 » à l'oral pour le distinguer des espaces « grand- L^2 » de fonctions de carré intégrable :

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f \text{ fonctions mesurables sur } \mathbb{R} \text{ telles que } \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 dx < \infty \right\},$$

dont nous reparlerons dans peu de temps.

Définition 2.2. [Espace $\ell_{\mathbb{C}}^2$] L'espace ℓ^2 est constitué des suites *infinies* dénombrables :

$$z := (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots) \in \mathbb{C}^\infty$$

de nombres complexes $z_i \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty.$$

Bien entendu, cette quantité $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$, lorsqu'elle est finie, satisfait pour tout nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda z_i|^2 = |\lambda|^2 \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2.$$

Une définition similaire pour $\ell_{\mathbb{R}}^2$ peut aisément être formulée, mais nous travaillerons principalement avec $\ell_{\mathbb{C}}^2$, que nous noterons parfois ℓ^2 .

Immédiatement, une première question surgit :

- ℓ^2 ainsi défini est-il un espace vectoriel ?

Ce n'est pas évident, car il se pourrait très bien que $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i + w_i|^2$ ne soit pas $< \infty$ lorsque les deux sommes $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2$ sont toutes deux $< \infty$. Autre question :

- Existe-t-il aussi un produit scalaire hermitien sur $\ell^2 \equiv \mathbb{C}^\infty$ comme c'était le cas sur \mathbb{C}^n ?

Encore une fois, cela n'est pas clair, car il se pourrait que $\sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i$ ne soit pas $< \infty$ lorsque $\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty$ et $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 < \infty$.

Étudions donc cet espace ℓ^2 de suites infinies dont la somme des modules au carré converge.

Lemme 2.3. *Pour tous $z, w \in \ell_{\mathbb{C}}^2$, on a la convergence de :*

$$\langle z, w \rangle := \langle z, w \rangle_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i < \infty.$$

Démonstration. En effet, pour un indice quelconque fixé $i \geq 1$, on a la positivité :

$$(2.4) \quad 0 \leq (|z_i| - |w_i|)^2 = |z_i|^2 + |w_i|^2 - 2|z_i||w_i|,$$

d'où en faisant passer $|z_i||w_i| = |z_i \bar{w}_i|$ à gauche :

$$|z_i \bar{w}_i| \leq \frac{1}{2} (|z_i|^2 + |w_i|^2).$$

Sommons alors ces inégalités pour $i = 1$ jusqu'à l'infini, ce qui nous donne :

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^{\infty} |z_i \bar{w}_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (|z_i|^2 + |w_i|^2) < \infty,$$

et donc par inégalité triangulaire infinie, on obtient bien la finitude de :

$$|\langle z, w \rangle_{\ell^2}| := \left| \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i \bar{w}_i| < \infty. \quad \square$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i$ constitue un candidat naturel pour définir un produit scalaire hermitien sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$ qui sera formellement analogue à celui $\sum_{i=1}^n z_i \bar{w}_i$ qui existait sur \mathbb{C}^n , mais pour l'instant, on ignore encore que $\ell_{\mathbb{C}}^2$ possède une structure d'espace vectoriel !

En tout cas, on peut d'ores et déjà introduire la quantité :

$$\|z\| := \|z\|_{\ell^2} := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty,$$

laquelle va, dans un instant, s'avérer être une vraie norme sur le vrai espace vectoriel ℓ^2 .

Un examen plus approfondi du calcul précédent va nous montrer que la valeur absolue de la quantité $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i$ est toujours majorée par le produit $\|z\| \|w\|$. Cette inégalité élémentaire, en tout point analogue à l'inégalité :

$$|\vec{v} \cdot \vec{w}| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{w}\|,$$

satisfaite par le produit scalaire entre deux vecteurs $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ du plan euclidien, est tellement importante qu'elle a reçu un nom distinctif.

Théorème 2.6. [Inégalité de Cauchy-Schwarz] *Pour tous $z, w \in \ell_{\mathbb{C}}^2$, on a :*

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

c'est-à-dire en notation abrégée :

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \|w\|.$$

La démonstration qui suit est valable aussi bien en dimension finie sur \mathbb{C}^n que sur $\ell^2 \equiv \mathbb{C}^\infty$ en dimension infinie. On donnera même plus loin une autre démonstration de cette inégalité de Cauchy-Schwarz, en ajoutant l'information supplémentaire que l'inégalité \leq devient une égalité $=$ si et seulement si z et w sont colinéaires.

Démonstration. Puisque l'inégalité est trivialement satisfaite lorsque $z = 0$ ou $w = 0$, on peut supposer que $z \neq 0 \neq w$, ce qui permet d'introduire les deux éléments :

$$z' := \frac{z}{\|z\|} = \left(\frac{z_1}{\|z\|}, \frac{z_2}{\|z\|}, \dots, \frac{z_i}{\|z\|}, \dots \right)$$

et :

$$w' := \frac{w}{\|w\|} = \left(\frac{w_1}{\|w\|}, \frac{w_2}{\|w\|}, \dots, \frac{w_i}{\|w\|}, \dots \right)$$

de ℓ^2 construits en renormalisant convenablement z et w afin de se ramener à des éléments qui sont de 'norme' égale à 1 :

$$\|z'\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|z_i|^2}{\|z\|^2} = \frac{\|z\|^2}{\|z\|^2} = 1 \quad \text{et} \quad \|w'\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|w_i|^2}{\|w\|^2} = \frac{\|w\|^2}{\|w\|^2} = 1.$$

Lorsque nous aurons établi que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur l'espace vectoriel ℓ^2 , nous serons autorisés à dire que cette renormalisation nous ramène à considérer deux vecteurs z' et w' de ℓ^2 qui sont de norme 1.

Appliquons alors à z' et w' l'inégalité (2.5), ce qui nous donne formellement :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z'_i \bar{w}'_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} (|z'_i|^2 + |w'_i|^2).$$

Mais on peut immédiatement remplacer à gauche les valeurs des z'_i et des \bar{w}'_i :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{z_i}{\|z\|} \frac{\bar{w}_i}{\|w\|} \right| &\leq \frac{1}{2} (\|z'\|^2 + \|w'\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (1^2 + 1^2) = 1, \end{aligned}$$

et ensuite, si l'on fait basculer à droite le produit des normes $\|z\| \|w\|$ qui apparaît en facteur commun dans les dénominateurs de la somme à gauche, on obtient bien :

$$|\langle z, w \rangle| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |z_i \bar{w}_i| \leq \|z\| \|w\|. \quad \square$$

À présent, Cauchy-Schwarz nous va nous permettre d'établir que ℓ^2 est stable sous l'opération somme, donc que ℓ^2 est un espace vectoriel ; de plus, l'inégalité triangulaire va être vraie.

Lemme 2.7. *Comme en dimension finie, la quantité :*

$$\|z\| := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

définie pour tous les éléments $z = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots)$ de ℓ^2 satisfait :

$$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\| \quad (\forall z, w \in \ell^2).$$

On en déduit alors que $\|\cdot\|$ constitue une vraie norme sur le vrai espace vectoriel $\ell_{\mathbb{C}}^2$, puisque les deux autres conditions pour être une norme sont trivialement satisfaites, en particulier l'homogénéité $\|\lambda z\| = |\lambda| \|z\|$ sous dilatation.

Démonstration. En élevant au carré l'inégalité à établir :

$$\|z + w\|^2 \stackrel{?}{\leq} (\|z\| + \|w\|)^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\|z\|\|w\|,$$

on se ramène à considérer une inégalité qui lui est équivalente. Maintenant, si on explicite toutes les sommes infinies impliquées :

$$\sum_{i=1}^{\infty} (z_i + w_i)(\bar{z}_i + \bar{w}_i) \stackrel{?}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{z}_i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \bar{w}_i + 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

si on développe le membre de gauche :

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{z}_i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \bar{w}_i + \sum_{i=1}^{\infty} (z_i \bar{w}_i + w_i \bar{z}_i) \stackrel{?}{\leq} \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{z}_i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \bar{w}_i + 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

et si on soustrait de part et d'autre $\sum_i z_i \bar{z}_i + \sum_i w_i \bar{w}_i$, il reste à établir :

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i + \sum_{i=1}^{\infty} w_i \bar{z}_i \stackrel{?}{\leq} 2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mais cette dernière inégalité, vraie, est conséquence évidente de Cauchy-Schwarz. \square

Corollaire 2.8. *L'espace ℓ^2 est un espace vectoriel.* \square

Nous pouvons maintenant revenir à la définition possible $\langle z, w \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i$ d'un produit scalaire hermitien en dimension infinie. Grâce aux résultats précédents, on peut vérifier facilement que les relations suivantes sont satisfaites, car toutes les sommes infinies qui y sont impliquées convergent.

Lemme 2.9. [Propriétés du produit hermitien sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$] Pour tous $z, z', z'', w, w', w'' \in \ell_{\mathbb{C}}^2$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, on a :

- (i) $\langle w, z \rangle = \overline{\langle z, w \rangle}$;
- (ii) $\langle z' + z'', w \rangle = \langle z', w \rangle + \langle z'', w \rangle$,
 $\langle z, w' + w'' \rangle = \langle z, w' \rangle + \langle z, w'' \rangle$;
- (iii) $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$,
 $\langle z, \mu w \rangle = \bar{\mu} \langle z, w \rangle$;
- (iv) $\langle z, z \rangle \in \mathbb{R}_+$;
- (v) $\langle z, z \rangle = 0 \implies z = 0$. \square

On déduit naturellement de (ii) et de (iii) que :

$$\begin{aligned} \langle \lambda' z' + \lambda'' z'', w \rangle &= \lambda' \langle z', w \rangle + \lambda'' \langle z'', w \rangle, \\ \langle z, \mu' w' + \mu'' w'' \rangle &= \bar{\mu}' \langle z, w' \rangle + \bar{\mu}'' \langle z, w'' \rangle. \end{aligned}$$

Nous verrons dans un instant que ces propriétés peuvent être envisagées comme cinq axiomes abstraits pour définir les espaces hermitiens de dimension infinie.

Résumons ainsi toutes les propriétés que nous avons établies au sujet de $\ell_{\mathbb{C}}^2 \equiv \mathbb{C}^{\infty}$ qui sont en tout point analogues à celles des espaces \mathbb{C}^n de dimension finie.

Théorème 2.10. [Structure de $\ell^2_{\mathbb{C}}$] L'espace $\ell^2_{\mathbb{C}}$ des suites infinies dénombrables :

$$z := (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots) \in \mathbb{C}^{\infty}$$

de nombres complexes $z_i \in \mathbb{C}$ dont la somme des modules au carré converge :

$$\|z\|^2 := \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty$$

est un espace vectoriel complexe normé dont la norme :

$$\|z\| = \sqrt{\langle z, z \rangle}$$

dérive d'un produit scalaire hermitien naturel :

$$\langle z, w \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i \quad (z, w \in \ell^2).$$

La valeur absolue de ce produit scalaire hermitien est toujours contrôlée par le produit des normes grâce à l'inégalité dite de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \|w\| \quad (z, w \in \ell^2),$$

et de plus, cette inégalité est une égalité lorsque, et seulement lorsque z et w sont colinéaires, à savoir : lorsqu'il existe deux constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ telles que $0 = \lambda z + \mu w$.

Démonstration. Seul le cas d'égalité dans Cauchy-Schwarz n'a pas encore été établi. Nous allons en fait redémontrer l'inégalité d'une manière différente et traiter ensuite le cas d'égalité. Puisque tout est trivial lorsque $z = 0$ ou $w = 0$, on supposera que $z \neq 0$ et que $w \neq 0$.

Soit θ l'argument du nombre complexe $\langle z, w \rangle$. En remplaçant w par $w' := e^{i\theta} w$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste inchangée (puisque $|e^{i\theta}| = 1$) et le produit hermitien $\langle z, w' \rangle$ devient un nombre réel (puisque $\langle z, w' \rangle = e^{-i\theta} \langle z, w \rangle$). On peut donc supposer que $\langle z, w \rangle$ est réel.

Ensuite, pour $t \in \mathbb{R}$, le polynôme du second degré en t à coefficients réels :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|z + tw\|^2 &= \langle z + tw, z + tw \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \bar{t} \langle z, w \rangle + t \langle w, z \rangle + t\bar{t} \langle w, w \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + t \langle z, w \rangle + t \overline{\langle z, w \rangle} + t^2 \langle w, w \rangle = \underbrace{\|z\|^2 + 2t \langle z, w \rangle + t^2 \|w\|^2}_{=: P(t)}, \end{aligned}$$

à toujours des valeurs positives, puisque c'est un carré. Il est donc nécessaire que son discriminant soit négatif :

$$4 \langle z, w \rangle^2 - 4 \|z\|^2 \|w\|^2 \leq 0 \iff \text{Cauchy-Schwarz,}$$

ce qui redémontre l'inégalité.

Enfin, on a l'égalité $\langle z, w \rangle = \|z\| \|w\|$ qui signifie l'annulation du discriminant si et seulement si ce polynôme $P(t)$ a une racine double t_0 , et alors dans ce cas, pour cette racine t_0 , on a :

$$0 = P(t_0) = \|z + t_0 w\|^2,$$

c'est-à-dire justement, z et w sont colinéaires ! □

Définition 2.11. [Complétude] Un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{C} (ou sur \mathbb{R}) est dit *complet* si les suites de Cauchy sont en fait convergentes dans E , c'est-à-dire :

Pour toute suite $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ d'éléments $v_k \in E$ satisfaisant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad \text{tel que} \quad (k_1, k_2 \geq K \implies \|v_{k_1} - v_{k_2}\| \leq \varepsilon),$$

Il existe une (unique) limite $v_{\infty} \in E$, à savoir qui satisfait :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad \text{tel que} \quad (k \geq K \implies \|v_k - v_{\infty}\| \leq \varepsilon).$$

L'hypothèse que $(v_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite de Cauchy exprime que tous les v_{k_1} et v_{k_2} deviennent arbitrairement proches entre eux pourvu que k_1 et k_2 soient assez grands. Mais cela ne veut pas dire que les v_k convergent vers une valeur, car l'endroit où les v_k devraient « atterrir » pourrait fort bien ne pas appartenir à l'espace E dans lequel ils se situent.

Ainsi, demander que $(E, \|\cdot\|)$ soit complet, cela revient à demander que toute suite d'éléments de E qui est faite pour converger converge effectivement vers un élément (unique) appartenant à E . Intuitivement, E n'a aucun « trou » en lui-même, il n'a aucune trace d'« incomplétude ».

Rappelons aussi que toute suite convergente est de Cauchy (exercice de révision). Il est connu, aussi, que \mathbb{R}^n et $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ sont complets pour tout $n \geq 1$ (exercice de révision).

Qu'en est-il de $\ell_{\mathbb{C}}^2$? L'énoncé suivant montre que les propriétés de $\ell_{\mathbb{C}}^2$ sont très analogues à celles de \mathbb{C}^n .

Théorème 2.12. [Complétude de $\ell_{\mathbb{C}}^2$] *L'espace $\ell_{\mathbb{C}}^2$ est complet.*

Démonstration. Soit donc :

$$z_k = (z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,i}, \dots) \in \ell^2 \quad (k \geq 1),$$

une suite de Cauchy dans ℓ^2 , c'est-à-dire satisfaisant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad \text{tel que} \quad (k_1, k_2 \geq K \implies \|z_{k_1} - z_{k_2}\|_{\ell^2} \leq \varepsilon).$$

Alors pour tout i , on a la majoration triviale du i -ème terme par une série positive infinie, ce qui nous permet de déduire :

$$\begin{aligned} |z_{k_1,i} - z_{k_2,i}| &= (|z_{k_1,i} - z_{k_2,i}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_{k_1,i} - z_{k_2,i}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Grâce à cette inégalité, pour tout i fixé, la suite $(z_{k,i})_{k=1}^{\infty}$ d'éléments de \mathbb{C} est de Cauchy. Puisque \mathbb{C} est complet, il existe une unique limite :

$$z_{\infty,i} = \lim_{k \rightarrow \infty} z_{k,i}.$$

Posons alors :

$$z_{\infty} := (z_{\infty,1}, z_{\infty,2}, \dots, z_{\infty,i}, \dots).$$

On vient ainsi de démontrer que *chaque composante* $z_{k,i}$ de la suite $z_k = (z_{k,1}, z_{k,2}, \dots, z_{k,i}, \dots)$ de ℓ^2 converge vers un certain nombre complexe $z_{\infty,i}$. Maintenant, le problème qui se pose à nous, c'est de savoir si ce z_{∞} appartient vraiment à ℓ^2 , et ce n'est pas encore clair.

En effet, il se pourrait très bien que la somme $\sum_{i=1}^{\infty} |z_{\infty,i}|^2$ diverge vers ∞ et c'est bien là que le problème de la complétude se pose : l'élément-limite peut « sortir » de l'espace dans lequel la suite se situe. Il faut donc des arguments supplémentaires.

À cette fin, fixons maintenant un entier arbitraire $I \geq 1$. Pour tous $k_1, k_2 \geq K$, à nouveau pour la raison triviale que $\sum_{i=1}^I \leq \sum_{i=1}^{\infty}$, on a une majoration simple :

$$\sum_{i=1}^I |z_{k_1,i} - z_{k_2,i}|^2 \leq \|z_{k_1} - z_{k_2}\|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Or à présent, nous pouvons faire tendre k_2 vers ∞ , ce qui nous donne :

$$\sum_{i=1}^I |z_{k_1,i} - z_{\infty,i}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Mais l'entier I étant arbitraire, on peut le prendre arbitrairement grand, la somme $\sum_{i=1}^I$ reste toujours majorée par ε^2 , et alors pour $I = \infty$, en notant k au lieu de k_1 , on obtient tout simplement que pour tout $k \geq K$:

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_{k,i} - z_{\infty,i}|^2 \leq \varepsilon^2.$$

Ceci montre en particulier que $z_k - z_{\infty}$ appartient à ℓ^2 !

Mais comme nous avons déjà établi que ℓ^2 est un espace vectoriel, nous en déduisons que :

$$z_{\infty} = z_k - (z_k - z_{\infty}) \in \ell^2.$$

Enfin, $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, on conclut immédiatement de $\|z_k - z_{\infty}\|^2 \leq \varepsilon^2$ pour $k \geq K$ que $\lim_{k \rightarrow \infty} \|z_k - z_{\infty}\|^2 = 0$. \square

Dans le cas de $\mathbb{R}^{\infty} \equiv \ell_{\mathbb{R}}^2$, des raisonnements très analogues, et d'ailleurs légèrement plus simples, conduisent à un résultat qu'il vaut la peine d'énoncer explicitement afin de bien en apercevoir les petites nuances.

Théorème 2.13. [Structure de $\ell_{\mathbb{R}}^2$] *L'espace $\ell_{\mathbb{R}}^2$ des suites infinies dénombrables :*

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots) \in \mathbb{R}^{\infty}$$

de nombres réels $x_i \in \mathbb{R}$ dont la somme des carrés converge :

$$\|x\|^2 := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty,$$

est un \mathbb{R} -espace vectoriel normé complet dont la norme :

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

dérive du produit scalaire euclidien infini :

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i \quad (x, y \in \ell^2).$$

En sus de l'inégalité triangulaire, il jouit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\| \quad (x, y \in \ell^2),$$

qui n'est égalité que lorsque x et y sont colinéaires. \square

3. Espaces préhilbertiens

Toujours pour fixer les idées, nous travaillerons avec des \mathbb{C} -espaces vectoriels en précisant parfois les simplifications agréables dont bénéficient les \mathbb{R} -espaces vectoriels.

La plupart du temps, ces espaces seront entendus dans l'intuition comme étant de dimension infinie, puisque la dimension finie est (trop) simple !

Définition 3.1. Une application $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E est dite *anti-linéaire* si elle satisfait :

$$\begin{aligned} f(z+w) &= f(z) + f(w) && (z, w \in E), \\ f(\lambda z) &= \bar{\lambda} z && (\lambda \in \mathbb{C}, z \in E). \end{aligned}$$

Autrement dit, les multiplications par des scalaires sont *perturbées* par une conjugaison complexe.

Définition 3.2. Une application $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *sesquilinéaire* si elle est linéaire par rapport à la première variable et anti-linéaire par rapport à la seconde variable :

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda z + \mu w, t) &= \lambda \varphi(z, t) + \mu \varphi(w, t), \\ \varphi(z, \mu w + \nu t) &= \bar{\mu} \varphi(z, w) + \bar{\nu} \varphi(z, t), \end{aligned}$$

pour tous $z, w, t \in E$ et tous $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$.

Lorsque le corps de l'espace vectoriel est \mathbb{R} , une forme sesquilinéaire :

$$\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$$

est tout simplement une forme \mathbb{R} -bilinéaire

Définition 3.3. Une telle forme sesquilinéaire est dite *hermitienne* si l'on a de plus :

$$\varphi(z, w) = \overline{\varphi(w, z)},$$

pour tous $z, w \in E$.

Sur \mathbb{R} , une forme 'hermitienne' est tout simplement une forme symétrique :

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x) \quad (\forall x, y \in E).$$

Proposition 3.4. Toute forme sesquilinéaire hermitienne $\varphi: E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ est déterminée de manière unique par sa restriction à la diagonale :

$$\{(z, z) \in E \times E : z \in E\},$$

autrement dit par la connaissance de la fonction :

$$\mathbb{C} \ni z \mapsto \varphi(z, z) \in \mathbb{C},$$

grâce à la formule dite de polarisation :

$$4\varphi(z, w) = \varphi(z+w, z+w) - \varphi(z-w, z-w) + \sqrt{-1}\varphi(z+\sqrt{-1}w, z+\sqrt{-1}w) - \sqrt{-1}\varphi(z-\sqrt{-1}w, z-\sqrt{-1}w).$$

Démonstration. Vérifier cette formule qui est non seulement belle mais s'avérera très souvent utile ultérieurement est un jeu d'enfant, puisqu'il suffit de développer le membre de :

$$\begin{aligned}
 \text{droite} &= \varphi(z, z) + \varphi(z, w) + \varphi(w, z) + \varphi(w, w) - \\
 &\quad - \varphi(z, z) + \varphi(z, w) + \varphi(w, z) - \varphi(w, w) + \\
 &\quad + \sqrt{-1} \varphi(z, z) + \varphi(z, w) - \varphi(w, z) - \sqrt{-1} \varphi(w, w) - \\
 &\quad - \sqrt{-1} \varphi(z, z) + \varphi(z, w) - \varphi(w, z) + \sqrt{-1} \varphi(w, w) \\
 &= \quad 0 \quad + 4 \varphi(z, w) + \quad 0 \quad + \quad 0,
 \end{aligned}$$

et d'additionner chacune des 4 colonnes. \square

Observons au passage que cette démonstration n'a pas utilisé l'hermitianité de φ .

Lemme 3.5. Sur \mathbb{R} , toute forme bilinéaire symétrique est déterminée par ses valeurs sur la diagonale grâce à la formule de polarisation :

$$4 \varphi(x, y) = \varphi(x + y, x + y) - \varphi(x - y, x - y).$$

Démonstration. Mais ici, on utilise vraiment le caractère symétrique de φ :

$$\begin{aligned}
 \text{droite} &= \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) + \varphi(y, y) - \\
 &\quad - \varphi(x, x) + \varphi(x, y) + \varphi(y, x) - \varphi(y, y) \\
 &= \quad 0 \quad + 2 \varphi(x, y) + 2 \varphi(y, x) - \quad 0,
 \end{aligned}$$

sinon, le calcul n'aboutit pas. \square

En effet par (contre-)exemple, la forme *anti*-symétrique bilinéaire non nulle sur \mathbb{R}^2 :

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \longmapsto x_1 y_2 - x_2 y_1$$

s'annule identiquement sur la diagonale. Mais de toute manière, nous ne nous intéresserons qu'aux formes symétriques ou hermitiennes.

Définition 3.6. Un *produit scalaire hermitien* sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E — de dimension finie ou de dimension infinie — est une forme sesquilinéaire hermitienne :

$$\varphi: E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

qui est *définie positive* au sens où :

$$\varphi(z, z) > 0,$$

pour tout $z \in E \setminus \{0\}$ non nul.

La notion analogue existe également pour les \mathbb{R} -espaces vectoriels.

On définit aussi une forme hermitienne (faiblement) positive par :

$$\varphi(z, z) \geq 0 \quad (\forall z \in E).$$

Classiquement, on note de manière abrégée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ au lieu de $\varphi(\cdot, \cdot)$ un produit scalaire, complexe hermitien ou réel symétrique.

Définition 3.7. Un *espace pré-hilbertien* sur \mathbb{R} ou sur \mathbb{C} est un \mathbb{R} - ou \mathbb{C} -espace vectoriel E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Si E est défini sur \mathbb{R} , on peut lui associer son *complexifié* $E^{\mathbb{C}} = E + \sqrt{-1} E$, qui est le \mathbb{C} -espace vectoriel constitué des éléments :

$$x + \sqrt{-1} y \quad (x, y \in E)$$

que l'on additionne de manière évidente, et que l'on multiplie par des constantes complexes :

$$(\alpha + \sqrt{-1} \beta) \cdot (x + \sqrt{-1} y) := \alpha x - \beta y + \sqrt{-1} (\alpha y + \beta x).$$

Si $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ est un produit scalaire (réel) sur E , alors la formule :

$$\langle x + \sqrt{-1} y, u + \sqrt{-1} v \rangle_{E^{\mathbb{C}}} := \langle x, u \rangle_E + \langle y, v \rangle_E - \sqrt{-1} \langle x, v \rangle_E + \sqrt{-1} \langle y, u \rangle_E$$

offre un produit scalaire (hermitien : exercice !) sur $E^{\mathbb{C}}$.

Proposition 3.8. *Soit E un espace vectoriel complexe de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors l'application :*

$$z \mapsto \sqrt{\langle z, z \rangle} =: \|z\|$$

définit une norme sur E qui satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle z, w \rangle| \leq \|z\| \cdot \|w\| \quad (\forall z, w \in E),$$

avec égalité seulement lorsque z et w sont colinéaires.

Démonstration. Les arguments sont les mêmes que dans la démonstration du Théorème 2.10 — sans changer les symboles ! —, à ceci près que le produit scalaire est maintenant abstrait, général. \square

Il importe de noter que l'inégalité de Cauchy-Schwarz reste vraie sans hypothèse de stricte positivité, car cela est parfois utilisé.

Proposition 3.9. *Pour toute forme hermitienne faiblement positive $\varphi(z, z) \geq 0$ sur un \mathbb{C} -espace vectoriel E :*

$$|\varphi(z, w)| \leq \sqrt{\varphi(z, z)} \cdot \sqrt{\varphi(w, w)} \quad (\forall z, w \in E).$$

Démonstration. Le même argument utilisant un polynôme du second degré fonctionne (exercice), mais les cas d'égalités peuvent être (beaucoup) plus nombreux que les circonstances de colinéarité, à cause de la présence de vecteurs dits *isotropes* sur lesquels $\varphi(z, z) = 0$ dégénère. \square

Proposition 3.10. *Sur E muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on a l'inégalité triangulaire :*

$$\|z + w\| \leq \|z\| + \|w\| \quad (\forall z, w \in E),$$

avec égalité lorsque, et seulement lorsque $z = 0$, ou $w = 0$, ou encore lorsque $w = c z$ avec $c \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. On calcule, on majore :

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 &= \langle z + w, z + w \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \langle z, w \rangle + \langle w, z \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= \|z\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle z, w \rangle + \|w\|^2 \\ \text{[Cauchy-Schwarz !]} &\leq \|z\|^2 + 2 \|z\| \|w\| + \|w\|^2 \\ &= (\|z\| + \|w\|)^2, \end{aligned}$$

et on retrouve la triangulaire au carré !

Puisqu'on a trivialement égalité lorsque $z = 0$ ou $w = 0$, on peut supposer que $z \neq 0 \neq w$.

Si $w = cz$ avec $c > 0$, alors clairement :

$$\|z + w\| = \|(1 + c)z\| = (1 + c)\|z\| = \|z\| + c\|z\| = \|z\| + \|w\|.$$

Réciproquement, une inspection du calcul qui précède — lequel n'incorporait qu'une seule inégalité — montre qu'on aura égalité $\|z + w\| = \|z\| + \|w\|$ seulement si on a eu égalité au moment d'appliquer Cauchy-Schwarz, d'où la colinéarité $w = cz$ avec $c \in \mathbb{R}^*$, et si donc on demande que :

$$\|(1 + c)z\| \stackrel{?}{=} \|z\| + |c|\|z\|,$$

à savoir que $|1 + c| = 1 + |c|$, cela force $c > 0$. □

Théorème 3.11. Dans un \mathbb{C} - ou \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension finie ou infinie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, pour tous éléments $z, w \in E$, les identités remarquables suivantes sont satisfaites.

- Développement d'un carré :

$$\|z + w\|^2 = \|z\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle z, w \rangle + \|w\|^2.$$

- Identité de polarisation sur \mathbb{C} :

$$4 \langle z, w \rangle = \|z + w\|^2 - \|z - w\|^2 + \sqrt{-1} \|z + \sqrt{-1} w\|^2 - \sqrt{-1} \|z - \sqrt{-1} w\|^2.$$

- Identité de polarisation sur \mathbb{R} :

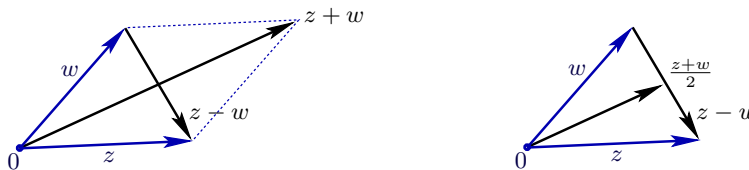
$$4 \langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$

- Identité du parallélogramme :

$$\|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2.$$

- Formule de la médiane :

$$2 \left\| \frac{z+w}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|z - w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$



Démonstration. Les trois premières identités ont déjà été vues et expliquées.

Pour le parallélogramme, il suffit de développer sans réfléchir :

$$\begin{aligned} \|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 &= \langle z + w, z + w \rangle + \langle z - w, z - w \rangle \\ &= \langle z, z \rangle + \langle z, w \rangle + \langle w, z \rangle + \langle w, w \rangle + \langle z, z \rangle - \langle z, w \rangle - \langle w, z \rangle + \langle w, w \rangle \\ &= 2\|z\|^2 + 2\|w\|^2. \end{aligned}$$

Chose amusante, la médiane et le parallélogramme sont une seule et même chose à dilatation près :

$$\begin{aligned} 2 \left\| \frac{z+w}{2} \right\|^2 + \frac{1}{2} \|z-w\|^2 &= \frac{2}{2^2} \|z+w\|^2 + \frac{1}{2} \|z-w\|^2 \\ &= \|z\|^2 + \|w\|^2, \end{aligned}$$

et donc, il est tout à fait permis de les confondre ! □

Définition 3.12. Deux éléments $z, w \in E$ d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont dits *orthogonaux*, ce qu'on abrège par $z \perp w$, lorsque :

$$0 = \langle z, w \rangle.$$

Même en dimension infinie, le plus antique des héros mathématiques parle d'or.

Théorème 3.13. [de Pythagore] Si $z \perp w$, alors :

$$\|z+w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2. \quad \square$$

4. L'espace de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^d)$

Il y a au moins deux raisons profondes qui expliquent l'importance et l'omniprésence des espaces de Hilbert dans les mathématiques.

Premièrement, ils apparaissent comme généralisation naturelle des espaces euclidiens de dimension finie : de même que le plan \mathbb{R}^2 , l'espace \mathbb{R}^3 ou l'espace \mathbb{R}^n (voire dans \mathbb{C}^n), ils bénéficient des propriétés familières telles que le produit scalaire, l'orthogonalité, les projections (orthogonale), le théorème de Pythagore, *etc.* Crucialement, on demande que les espaces de Hilbert abstraits soient *complets* pour la topologie qui dérive de leur norme. Cette condition de complétude est cruciale, et on la requiert afin que les constructions géométriques et les passages à la limite se passent aussi bien en dimension infinie qu'en dimension finie, et aussi, afin qu'il existe de bonnes bases orthonormées — de cardinal infini — le long desquelles on puisse décomposer chaque vecteur.

En fait, la complétude est une hypothèse naturelle qui est satisfaite par les objets mathématiques connus, puisque les espaces $\ell_{\mathbb{R}}^2$ et $\ell_{\mathbb{C}}^2$ sont complets, et puisque l'espace des fonctions $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ mesurables dites *de carré intégrable* :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty,$$

espace paradigmatique auquel cette section est consacrée, est tout aussi complet. Ici bien entendu, le point :

$$x = (x_1, \dots, x_d),$$

possède d coordonnées $\in \mathbb{R}$, et :

$$dx = dx_1 \cdots dx_d$$

désigne la mesure de Lebesgue.

Deuxièmement, la théorie des espaces de Hilbert s'est avérée au fil du temps être un cadre conceptuel très souple et très puissant, presque un langage à part entière voire une sorte d'*esperanto* mathématique, grâce auquel on peut formuler et résoudre élégamment des problèmes d'analyse mathématique, en les plaçant dans un espace fonctionnel adéquat riche de structures géométriques.

Soit donc un entier :

$$d \geq 1.$$

Après $\ell_{\mathbb{R}}^2$, le deuxième exemple canonique et ultra-concret d'espace de Hilbert est donc :

$$L^2(\mathbb{R}^d) := \left\{ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables: } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

De manière analogue, l'exemple des fonctions L^2 sur le cercle unité, ou, de manière équivalente, des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} :

$$L^2([-\pi, \pi]),$$

effectue un lien historique profond et originaire entre les séries de Fourier et les espaces de Hilbert (voir prochain chapitre).

En tout cas, sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ qui se comporte au mieux, la norme est naturellement définie par :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Une différence *cruciale* entre l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ des fonctions Lebesgue-intégrables sur \mathbb{R}^d et cet espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, c'est l'existence d'un *produit scalaire* :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

entre deux fonctions quelconques :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{C}, \\ g: \mathbb{R}^d &\longrightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

à partir duquel on retrouve la norme :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = (\langle f, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)})^{1/2}.$$

On démontre qu'il n'est en aucune manière possible de définir un produit scalaire sur l'espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui redonnerait sa norme naturelle $\int |f|$.

Toutefois, comme pour l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, la condition :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = 0$$

implique que $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$. Si donc on identifie comme il se doit les fonctions qui sont égales à un ensemble de mesure nulle près, l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ est alors muni d'une vraie norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$.

Or pour que la définition du produit scalaire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx$$

ait un sens, il faut au moins s'assurer que la fonction $f \bar{g}$ soit intégrable sur \mathbb{R}^d , à savoir que $f \bar{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Tel est bien le cas, grâce à des arguments très élémentaires.

Proposition 4.1. *L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ jouit des propriétés suivantes.*

(i) $L^2(\mathbb{R}^d)$ est un espace vectoriel.

(ii) $x \mapsto f(x) \overline{g(x)}$ est intégrable chaque fois que $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

est généralement satisfaite.

(iii) Si une fonction $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ est fixée, alors l'application :

$$L_g: \begin{array}{l} L^2(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{C} \\ f \longmapsto \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \end{array}$$

est \mathbb{C} -linéaire continue :

$$|L_g(f)| \leq \underbrace{\|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}}_{\text{constante}} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

avec de plus :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \overline{\langle g, f \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)}}.$$

(iv) L'inégalité du triangle est satisfaite :

$$\|f + g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Dans la suite, on s'autorisera à admettre l'équivalence notationnelle flottante :

$$\|\cdot\| \equiv \|\cdot\|_{L^2} \equiv \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

ainsi que :

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2} \equiv \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

suivant que l'on souhaite alléger l'écriture, ou que l'on préfère notifier explicitement de quelle norme précise il s'agit.

Démonstration. Pour $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, et $x \in \mathbb{R}^d$, de l'inégalité :

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)| &\leq |f(x)| + |g(x)| \\ &\leq 2 \max(|f(x)|, |g(x)|), \end{aligned}$$

on déduit :

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^2 &\leq 4 \max(|f(x)|^2, |g(x)|^2) \\ &\leq 4|f(x)|^2 + 4|g(x)|^2, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \int |f + g|^2 &\leq 4 \int |f|^2 + 4 \int |g|^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui montre que $f + g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Aussi, puisque pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$\|\lambda f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} = |\lambda| \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

on conclut que $L^2(\mathbb{R}^d)$ est bien un espace vectoriel.

Ensuite, concernant (ii), pour voir que $f \bar{g}$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, il suffit de se rappeler — réminiscence des mathématiques babyloniennes — que pour tous $A, B \geq 0$ réels positifs, on a :

$$2AB \leq A^2 + B^2,$$

de telle sorte que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) \overline{g(x)}| dx \leq \frac{1}{2} \left[\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 + \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 \right] < \infty.$$

Pour démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \overline{g(x)} dx \right| \stackrel{?}{\leq} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \|g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

observons d'abord que si $\|f\| = 0$ ou si $\|g\| = 0$, alors $f \overline{g} = 0$ presque partout, d'où $\langle f, g \rangle = 0$ et l'inégalité est triviale : $0 \leq 0$. Nous pouvons donc supposer que $\|f\| > 0$ et que $\|g\| > 0$, donc en divisant f et g par leurs normes respectives :

$$\tilde{f} := \frac{f}{\|f\|} \quad \text{et} \quad \tilde{g} := \frac{g}{\|g\|},$$

ce qui ne change pas l'inégalité à démontrer puisqu'elle est doublement homogène, l'inégalité à démontrer devient :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x) \overline{\tilde{g}(x)}| dx \stackrel{?}{\leq} 1,$$

mais l'inégalité que nous venons d'obtenir, appliquée à \tilde{f} et à \tilde{g} , donne justement le résultat voulu :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\tilde{f}(x) \overline{\tilde{g}(x)}| dx \leq \frac{1}{2} \left[\underbrace{\|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}_{=1^2} + \underbrace{\|\tilde{g}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2}_{=1^2} \right],$$

puisque $\frac{1}{2}[1^2 + 1^2] = 1!$

L'assertion **(iii)** découle de la linéarité de l'intégrale, et la continuité de L_g découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz (exercice de révision mentale sur les opérateurs linéaires continus d'un espace vectoriel normé, résolu en détail page 47).

Enfin, pour démontrer l'inégalité triangulaire **(iv)**, on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz simplement comme suit :

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= \langle f + g, f + g \rangle \\ &= \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2|\langle f, g \rangle| + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 \\ &= (\|f\| + \|g\|)^2 \end{aligned}$$

et il suffit de prendre la racine carrée de l'inégalité obtenue. \square

Tournons maintenant notre attention vers la notion de limite dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. La norme $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ induit une métrique naturelle en déclarant que la *distance* entre deux fonctions :

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad g \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

est la norme de leur différence :

$$\text{dist}(f, g) := \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Une suite de fonctions :

$$(f_n)_{n=1}^\infty \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

est dite *de Cauchy* si :

$$\text{dist}(f_{n_1}, f_{n_2}) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n_1, n_2 \longrightarrow \infty.$$

On dit aussi qu'une telle suite converge vers une fonction-limite :

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

si l'on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{dist}(f_n, f).$$

Théorème 4.2. *L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ est complet pour sa métrique :*

$$\text{dist}(f, g) = \|f - g\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

En d'autres termes, toute suite de Cauchy de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ admet une fonction-limite qui appartient encore à $L^2(\mathbb{R}^d)$. Ce théorème, qui contraste fortement avec la situation de l'intégrale de Riemann, montre à merveille toute la puissance et toute l'utilité de l'intégrale de Lebesgue.

Démonstration. L'argument est très analogue à la démonstration de la complétude de $L^1(\mathbb{R}^d)$, et nous en détaillons les ingrédients afin de mieux (ré-)intégrer mentalement la théorie.

Étant donné une suite arbitraire de fonctions mesurables de carré intégrable :

$$(f_n)_{n=1}^\infty \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

qui est *de Cauchy* pour la norme L^2 :

$$(4.3) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon) \gg 1 \\ (n, m \geq N) \implies \left(\|f_n - f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon \right),$$

l'objectif, pour établir la complétude de L^2 , est de trouver ou de construire une certaine fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

À cette fin, extrayons tout d'abord une sous-suite auxiliaire :

$$(f_{n_k})_{k=1}^\infty,$$

ayant la propriété de converger assez rapidement en norme L^2 :

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{1}{2^k} \quad (\forall k \geq 1),$$

pour que la fonction (mesurable) $F: \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ définie par :

$$F(x) := f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)|$$

ait une norme L^2 finie :

$$\begin{aligned} \|F\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f_{n_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \|f_{n_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \|f_{n_1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + 1 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui signifie que :

$$F \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Autrement dit, l'intégrale de son carré est finie :

$$\int_{\mathbb{R}^d} F(x)^2 dx < \infty,$$

et ceci force ses valeurs à être finies en presque tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leq F(x) < \infty.$$

Ensuite, pour tout entier $K \geq 1$, la fonction issue d'une simplification télescopique :

$$f_{n_K}(x) = f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

satisfait alors uniformément par rapport à K :

$$\begin{aligned} |f_{n_K}(x)| &\leq |f_{n_1}(x)| + \sum_{k=1}^{K-1} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| \\ &\leq F(x), \end{aligned}$$

et donc, en faisant $K \rightarrow \infty$, nous voyons que la série infinie $\sum_{k=1}^{\infty}$ converge absolument pour définir, en presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, une certaine fonction mesurable finie :

$$(4.4) \quad \lim_{K \rightarrow \infty} f_{n_K}(x) =: f(x) \in \mathbb{R}.$$

C'est elle, notre fonction désirée, nous l'avons façonnée ! Car de ce qui précède, l'inégalité valable presque partout :

$$|f| \leq F,$$

d'où $|f|^2 \leq F^2$ — souvenons-nous que f est à valeurs dans \mathbb{C} , ce qui justifie ici la notation module $|f|$ — nous assure cruciallement que :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} F(x)^2 dx < \infty,$$

ce qui montre que :

$$f \in L^2(\mathbb{R}^d).$$

Naturellement, on s'attend à ce que :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)},$$

et pour vérifier cela, on remarque que l'inégalité valable par construction presque partout :

$$|f_{n_k} - f| \leq 2F$$

assure la domination uniforme :

$$\begin{aligned} \|f_{n_k} - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq 2\|F\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

donc grâce au théorème de la convergence dominée de Lebesgue, on conclut que la sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ de la suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge en norme L^2 vers la fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_{n_k}(x) - f(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{k \rightarrow \infty} |f_{n_k}(x) - f(x)|^2 dx \\ \text{[Utiliser (4.4)]} &= 0. \end{aligned}$$

Pour achever la démonstration du théorème de complétude de $L^2(\mathbb{R}^d)$, il reste encore à faire voir que la suite entière $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge en norme L^2 vers la même fonction-limite f que la sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$.

Or cela découle logiquement de tout ce qui a été dit, puisque, si $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, en revenant à l'expression (4.3) de la Cauchycité de $(f_n)_{n=1}^\infty$, si un indice $N \gg 1$ de la sous-suite est choisi assez grand pour que :

$$n_k \geq N(\varepsilon),$$

et pour que, grâce à la convergence qui vient d'être établie :

$$\|f_{n_k} - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon,$$

alors pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, une simple inégalité du triangle :

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f_n - f_{n_k}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \|f_{n_k} - f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

offre la délivrance. □

Une propriété additionnelle de $L^2(\mathbb{R}^d)$, surprenante au premier abord mais très proche du théorème de Weierstrass d'approximation des fonctions continues par des polynômes, stipule qu'il suffit d'une famille *dénombrable* de fonctions pour approximer toutes les fonctions possibles.

Théorème 4.5. *Dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une suite de fonctions :*

$$(f_n)_{n=1}^\infty \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

qui est dense :

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_{N(\varepsilon)} \in (f_n)_{n=1}^\infty \quad \|f - f_{N(\varepsilon)}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Introduisons la famille de toutes les fonctions combinaisons linéaires finies :

$$\sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}}(x),$$

de fonctions indicatrices de rectangles d -dimensionnels compacts :

$$R_{\mathbb{Q}} = [a_{1,\mathbb{Q}}, b_{1,\mathbb{Q}}] \times \cdots \times [a_{d,\mathbb{Q}}, b_{d,\mathbb{Q}}] \quad (-\infty < a_{i,\mathbb{Q}} < b_{i,\mathbb{Q}} < \infty)$$

à coordonnées *rationnelles* :

$$a_{i,\mathbb{Q}}, b_{i,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q} \quad (1 \leq i \leq d),$$

et à coefficients complexes :

$$\lambda_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},$$

dont les parties réelles et imaginaires sont elles aussi rationnelles. Comme \mathbb{Q}^d et \mathbb{Q}^2 sont dénombrables, et comme une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est toujours dénombrable, cet ensemble de fonctions que l'on pourrait appeler *fonctions en escalier rationnelles* a la propriété miraculeuse d'être *dénombrable*. Après rénumérotation, nous pouvons donc le considérer comme étant une suite :

$$\left\{ \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} \right\} = (f_n)_{n=1}^{\infty},$$

et nous allons démontrer que cette suite est *dense* dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

Soit en effet une fonction quelconque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Pour tout entier $K \geq 1$, la fonction doublement tronquée définie par :

$$T_K f := \begin{cases} f(x) & \text{lorsque } \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \leq K \text{ et lorsque } |f(x)| \leq K, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

satisfait au moins ponctuellement :

$$|f - T_K f|^2 \leq 4|f|^2,$$

et comme les valeurs $f(x)$ sont nécessairement finies presque partout puisque $\int |f|^2 < \infty$, on a (exercice mental) :

$$f(x) = \lim_{K \rightarrow \infty} T_K f(x) \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d).$$

Le théorème de la convergence dominée assure alors que :

$$0 = \lim_{K \rightarrow \infty} \|f - T_K f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe donc $K = K(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\|f - T_K f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon/2.$$

Or la fonction doublement tronquée $T_K f$ est mesurable, elle est bornée et elle a comme support un ensemble borné. Par conséquent, elle est intégrable :

$$T_K f \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

On pense alors spontanément à un théorème censé être déjà connu au niveau de ce cours.

Théorème 4.6. [Densité de fonctions-types concrètes] *Les trois familles de fonctions suivantes sont chacune denses dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$ pour la norme L^1 :*

- les fonctions dites étagées, qui sont sommes finies d'ensembles caractéristiques de sous-ensembles mesurables quelconques $E \subset \mathbb{R}^d$:

$$\sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_E \quad (\lambda \in \mathbb{C});$$

- les fonctions dites en escalier, qui sont combinaisons linéaires finies de fonctions caractéristiques :

$$\sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R \quad (\lambda \in \mathbb{C}),$$

de rectangles d -dimensionnels bornés :

$$R = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d] \quad (a_i, b_i \in \mathbb{R});$$

- les fonctions continues à support compact :

$$\left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}) : f \equiv 0 \text{ sur } \mathbb{R}^d \setminus \left\{ \max_{1 \leq i \leq d} |x_i| \geq K \right\} \text{ pour } K \gg 1 \right\}. \quad \square$$

En appliquant la deuxième assertion de densité à la fonction bornée $T_K f$ de support borné donc intégrable :

$$T_K f \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

on trouve donc une fonction étagée :

$$\sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R,$$

telle que :

$$\left\| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon^2}{24K},$$

en norme L^1 , mais pas pour l'instant en norme L^2 , et c'est pourquoi on ajuste la contrainte d'approximation à être à l'avance aussi petite que $\frac{\varepsilon^2}{24K}$ afin que tout se passe comme il le faudra à la fin, notamment afin d'obtenir un majorant de la forme $\varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$.

Or un examen de la construction de cette approximante dans la démonstration du théorème de densité montre qu'on peut aisément supposer que sa taille et son support ne débordent pas trop de celui de $T_K f$:

- $\left| \sum \lambda \cdot \mathbf{1}_R \right| \leq 2K,$
- $R \subset \{|x| \leq 2K\},$

en abrégant $|x| := \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$.

Ensuite, on perturbe très légèrement ces coefficients $\lambda \in \mathbb{C}$ en des coefficients rationnels :

$$\lambda_{\mathbb{Q}} \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q},$$

et on perturbe aussi les extrémités des segments qui définissent les rectangles d -dimensionnels R pour obtenir de nouveaux rectangles $R_{\mathbb{Q}}$ à segments-extrémités dans \mathbb{Q} de telle sorte que :

$$\left\| \sum_{\text{finie}} \lambda \cdot \mathbf{1}_R - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon^2}{24K},$$

d'où par inégalité triangulaire :

$$\left\| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon^2}{24K} + \frac{\varepsilon^2}{24K} = \frac{\varepsilon^2}{12K},$$

avec de plus :

- $\left| \sum \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right| \leq 2K,$

- $R_{\mathbb{Q}} \subset \{|x| \leq 2K\}$.

En particulier, on a la majoration aisée utile :

$$\max_{|x| \leq 2K} \left| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right| \leq 3K,$$

Pour vérifier que la fonction ainsi obtenue $\sum \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}}$ approxime alors f en norme L^2 à ε près, il suffit de vérifier qu'elle approxime $T_K f$ à $\varepsilon/2$ près, ce qui repose sur des majorations-engrenages maintenant parfaitement huilées :

$$\begin{aligned} \left(\left\| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \right)^2 &= \int_{|x| \leq 2K} \left| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right|^{1+1} \\ &\leq \max_{|x| \leq 2K} \left| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right|^1 \int_{|x| \leq K} \left| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right|^1 \\ &\leq 3K \left\| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq 3K \frac{\varepsilon^2}{12K} \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{2} \right)^2, \end{aligned}$$

d'où au final par simple inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} &\leq \left\| f - T_K f \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \left\| T_K f - \sum_{\text{finie}} \lambda_{\mathbb{Q}} \cdot \mathbf{1}_{R_{\mathbb{Q}}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2, \end{aligned}$$

ce qui conclut. \square

5. Définition des espaces de Hilbert abstraits et des bases hilbertiennes

Nous pouvons maintenant définir les espaces de Hilbert abstraits et généraux, sans égard à leur dimension, *i.e.* sans mentionner qu'il soient ou bien de dimension finie, ou bien de dimension infinie (dénombrable ou non-dénombrable).

Résumons notre parcours. Nous avons établi que ℓ^2 est un espace vectoriel hermitien complet en tout point analogue à \mathbb{C}^n , afin de présenter et d'étudier un exemple concret et tangible d'espace de Hilbert *avant* toute définition abstraite. Cette stratégie de type inductif qui consiste à faire passer le concret avant l'abstrait n'est pas dénuée de sens, puisque nous verrons plus loin que *tout* espace de Hilbert abstrait de dimension infinie dénombrable est *isométriquement isomorphe* à ℓ^2 (Théorème dit de Riesz-Fischer qui sera vu ultérieurement). Nous utiliserons à présent les lettres f, g, h pour désigner des éléments d'un espace de Hilbert, en ayant à l'idée que les applications principales de la théorie ont cours dans certains espaces de *fonctions*.

Définition 5.1. [Espace de Hilbert] Un espace vectoriel normé $(H, \|\cdot\|)$ sur \mathbb{C} est un *espace de Hilbert* s'il est *complet* et si sa norme :

$$\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (f \in H)$$

provient d'un produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisfaisant les cinq axiomes suivants :

- (i) $\langle g, f \rangle = \overline{\langle f, g \rangle}$;
- (ii) $\langle f' + f'', g \rangle = \langle f', g \rangle + \langle f'', g \rangle$,
 $\langle f, g' + g'' \rangle = \langle f, g' \rangle + \langle f, g'' \rangle$;
- (iii) $\langle \lambda f, g \rangle = \lambda \langle f, g \rangle$,
 $\langle f, \mu g \rangle = \bar{\mu} \langle f, g \rangle$;
- (iv) $\langle f, f \rangle \in \mathbb{R}_+$;
- (v) $\langle f, f \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

En des termes équivalents, un *espace de Hilbert* est un \mathbb{C} -espace vectoriel hermitien $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ qui est *complet*, ou encore un espace préhilbertien *complet*.

Observons sans attendre que les conditions (iv) et (v) assurent que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ a un sens et ne s'annule que si $f = 0$, et donc :

$$\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

est un bon candidat pour une norme, mais deux axiomes doivent encore être vérifiés. Par (iii), on a l'homogénéité :

$$\|\lambda f\| = (\lambda \bar{\lambda})^{1/2} \|f\| = |\lambda| \|f\|.$$

En développant $\|f + tg\|^2$ et en raisonnant exactement comme dans la preuve du Théorème 2.10, on établit l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\forall f, g \in H \quad |\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|,$$

l'égalité n'étant satisfaite que lorsque f et g sont colinéaires. De cette inégalité en majorant les deux termes $\langle f, g \rangle$ et $\langle g, f \rangle$ dans :

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \|f\|^2 + \langle f, g \rangle + \langle g, f \rangle + \|g\|^2,$$

on déduit ensuite l'inégalité triangulaire :

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|,$$

ce qui achève de montrer que $\sqrt{\langle f, f \rangle}$ fournit une norme sur H .

La notion générale d'*espace de Hilbert* abstrait (du verbe « abstraire ») ces deux propriétés et les pose comme définition. Les espaces de Hilbert permettent de résoudre de nombreux problèmes d'analyse : équations intégrales, séries de Fourier, sans compter que les axiomes de la Mécanique Quantique postulent qu'il existe toujours un espace de Hilbert correspondant à une expérience de microphysique donnée.

Si un espace préhilbertien n'est pas complet, on peut le compléter d'une manière essentiellement unique en un espace de Hilbert (complet), comme le propose de l'établir l'Exercice 22.

Théorème 5.2. *Étant donné un espace préhilbertien $(H_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0})$, il existe un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ — complet! — unique à isomorphisme unitaire près satisfaisant :*

- (i) $H \supset H_0$;
- (ii) H_0 est dense dans H ;
- (iii) $\langle f, g \rangle_H = \langle f, g \rangle_{H_0}$ pour tous $f, g \in H_0$. □

5.3. Cinq concepts abstraits fondamentaux. Maintenant, introduisons les notions de *densité*, de *séparabilité*, de *totalité*, de *familles orthonormées* et de *bases hilbertiennes*.

Nous montons ici d'un cran en abstraction. Il est important de méditer la signification des définitions qui vont suivre. Le moment de leur première apparition exige de se forger des intuitions mathématiques rigoureuses. Le moment de leur compréhension exige aussi de revenir sur leur signification lorsque nous aurons démontré quelques théorèmes qui les utilisent.

Définition 5.4. [Densité] Une partie D de H est dite *dense dans H* si :

$$\forall h \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f \in D \quad \text{tel que} \quad \|f - h\| < \varepsilon.$$

Autrement dit, les éléments de D sont arbitrairement proches de tous les éléments de H . Ou encore : Pour la topologie sur H naturellement issue de la distance $d(f, g) := \|f - g\|$ associée à la norme, la *fermeture* $\overline{D} = H$ de D remplit H tout entier.

Cette notion de densité a aussi un sens dans les espaces vectoriels normés quelconques (qui ne sont pas forcément de Hilbert), et même dans les espaces métriques sur lesquels seule une distance existe.

Définition 5.5. [Séparabilité] Un espace de Hilbert est *séparable* s'il possède un sous-ensemble dénombrable dense. Autrement dit, H est séparable s'il existe une *suite* $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ d'éléments de H satisfaisant :

$$\forall h \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_k \quad \text{tel que} \quad \|h - f_k\| < \varepsilon.$$

À nouveau, cette notion a aussi un sens dans n'importe quel espace métrique, par exemple dans tout espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$. La plupart des espaces de Hilbert que l'on rencontre dans la théorie des fonctions sont en fait séparables, par exemple pour $p \geq 1$ les espaces $L^p(\mathbb{R}^n)$ de fonctions telles que $\int |f|^p < \infty$, puisque l'on sait que la famille des fonctions qui sont égales à une certaine constante rationnelle sur un hypercube à coordonnées rationnelles et nulles ailleurs sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$; le Théorème 4.5 a au moins démontré cela en détail dans le cas $p = 2$, et la démonstration pour $1 \leq p < \infty$ quelconque est similaire.

Quelques-uns des énoncés abstraits que nous démontrerons ci-dessous ne feront pas d'hypothèse de séparabilité, mais on peut fort bien les comprendre en supposant mentalement qu'ils sont séparables pour s'en faire une idée utile et adéquate.

On veillera à ne pas confondre le terme « séparable » avec la notion d'espace topologique X « séparé », qui par définition a la propriété que pour toute paire de points $x \neq y$ distincts, il existe deux voisinages ouverts non vides $U \ni x$ et $V \ni y$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

Toutefois, cette notion de séparabilité ainsi définie ne tient pas encore compte de la structure d'espace vectoriel de H , car on pourrait naturellement penser qu'avec une suite $(f_k)_{k=1}^{\infty}$, toutes les combinaisons linéaires des f_k sont aussi données. Voici donc une définition plus appropriée.

Définition 5.6. [Totalité] Une partie F d'un espace de Hilbert H est dite *totale* si l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de F est dense dans H . Autrement dit, la famille $F = (f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ indexée par un ensemble \mathcal{I} quelconque est totale si :

$$\begin{aligned} \forall h \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \in \mathbb{N}^* \quad \exists f_{i_1}, \dots, f_{i_k} \in F \quad \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C} \\ \text{tels que} \quad \|h - a_1 f_{i_1} - \dots - a_k f_{i_k}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Enfin, la notion de base d'un espace vectoriel se généralise aux espaces de Hilbert, qui sont le plus souvent de dimension infinie. Mais comme on dispose d'un produit scalaire, on peut même parler d'orthogonalité entre des vecteurs.

En géométrie euclidienne (dimension finie), toute famille de vecteurs qui est à la fois orthogonale et de norme 1 est dite *orthonormée*, concept qui se généralise à la dimension infinie.

Définition 5.7. [Famille orthonormée] Une famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ d'éléments d'un espace de Hilbert H est dite *orthonormée* si :

$$\forall i_1 \in \mathcal{I} \quad \forall i_2 \in \mathcal{I} \quad \langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle = \delta_{i_1, i_2} := \begin{cases} 1 & \text{si } i_1 = i_2; \\ 0 & \text{si } i_1 \neq i_2. \end{cases}$$

Mais parce qu'il n'est pas clair *a priori* que tout vecteur d'un espace de Hilbert H de dimension infinie puisse être décomposé comme somme *nécessairement infinie* de multiples de vecteurs d'une certaine base (puisque une telle somme pourrait fort bien ne pas converger), on définit un premier concept de base dans H en ne considérant que des combinaisons linéaires qui sont *finies*.

Définition 5.8. [Base hilbertienne] Une *base hilbertienne* de H , ou *base orthonormée*, est une famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de vecteurs de H qui est orthonormée, et qui est de plus totale.

En résumé, nous avons présenté cinq concepts fondamentaux au sujet des espaces de Hilbert qui culminent en une définition prudente de la notion de base par laquelle l'infini est rejeté dans la densité, à travers l'hypothèse que la famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est totale. Comme cela arrive très souvent en mathématiques, un champ définitionnel présenté au début d'une théorie se pose *en attente* de théorèmes plus informatifs qui vont métamorphoser l'appréhension des concepts en les rendant plus clairement concrets et manipulables. La suite des événements va donc rendre plus compréhensibles ces définitions.

5.9. Bases hilbertiennes et séparabilité. Maintenant, que peut-on dire lorsque H est séparable ? Naturellement, on peut s'attendre à ce que tous les concepts se ramènent à des collections dénombrables d'objets. Deux résultats fondamentaux confirment cette intuition.

Proposition 5.10. *Tout espace de Hilbert possédant une famille totale qui est une suite $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ (dénombrable) est séparable.*

Démonstration. Voici le problème : dans la définition de famille totale, les combinaisons linéaires finies autorisées sont à coefficients complexes arbitraires, et l'on sait que \mathbb{R} et \mathbb{C} ne sont *pas* dénombrables, d'après le fameux argument diagonal de Cantor. Toutefois, on sait aussi que le corps des nombres *rationnels* \mathbb{Q} , qui est dénombrable, est dense dans \mathbb{R} , d'où il découle immédiatement que $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dense dans \mathbb{C} . Fixons maintenant un entier $k \geq 1$. L'ensemble $\mathcal{C}'_k(f)$ des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des k premiers éléments de la suite :

$$a'_1 f_1 + \cdots + a'_k f_k \quad (a'_i \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$$

est égal à $(\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}) \times \cdots \times (\mathbb{Q} + i\mathbb{Q})$ avec exactement k facteurs, et comme le produit d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable, $\mathcal{C}'_k(f)$ est dénombrable. Puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles dénombrables est elle aussi dénombrable, l'ensemble :

$$\mathcal{C}'(f) := \mathcal{C}'_1(f) \cup \mathcal{C}'_2(f) \cup \cdots \cup \mathcal{C}'_k(f) \cup \cdots$$

est lui aussi dénombrable. Cet argument nous permet donc de remplacer les combinaisons linéaires finies à coefficients complexes par des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels. Mais il nous reste à vérifier scrupuleusement la densité.

Revenons donc à notre suite $(f_k)_{k=1}^\infty$, qui est totale par hypothèse. Ainsi :

$$\forall h \in H \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists k \geq 1 \quad \exists a_1, \dots, a_k \in \mathbb{C}$$

tels que $\|h - a_1 f_1 - \dots - a_k f_k\| < \varepsilon.$

Pour tout $j = 1, \dots, k$, choisissons alors un $a'_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ tel que :

$$|a'_j - a_j| \leq \frac{\varepsilon}{k \max(\|f_1\|, \dots, \|f_k\|)},$$

ce qui est possible (observons que nous avons ajusté à l'avance la très grande proximité de a'_j à a_j , cf. ce qui va suivre). Maintenant, majorons la différence entre h et la nouvelle combinaison linéaire à coefficients rationnels en faisant apparaître (artificiellement) la combinaison linéaire initiale que l'on contrôle par hypothèse :

$$\begin{aligned} \|h - a'_1 f_1 - \dots - a'_k f_k\| &= \|h - a_1 f_1 - \dots - a_k f_k - (a'_1 - a_1) f_1 - \dots - (a'_k - a_k) f_k\| \\ &\leq \|h - a_1 f_1 - \dots - a_k f_k\| + |a'_1 - a_1| \|f_1\| + \dots + |a'_k - a_k| \|f_k\| \\ &\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{k \max(\|f_1\|, \dots, \|f_k\|)} (\|f_1\| + \dots + \|f_k\|) \\ &\leq \varepsilon + \frac{\varepsilon}{k_\circ \max(\|f_1\|, \dots, \|f_k\|)_{\circ\circ}} (k_\circ \max(\|f_1\|, \dots, \|f_k\|)_{\circ\circ}) \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

On voit donc que tout élément $h \in H$ peut être approximé à 2ε près par un élément de $\mathcal{C}'_k(f)$. En conclusion, l'ensemble $\mathcal{C}'(f)$ des combinaisons linéaires finies à coefficients rationnels de la suite $(f_k)_{k=1}^\infty$, ensemble qui est dénombrable, est bien dense dans H , ce qui achève cette preuve très détaillée. \square

Commentons cette démonstration. Un premier moment nous a convaincu pour des raisons de théorie des ensembles que les combinaisons linéaires finies à coefficients complexes pouvaient être remplacées par des combinaisons à coefficients rationnels, ces dernières étant dénombrables. La densité de $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ dans \mathbb{C} est donc la cause principale de la vérité de cette proposition. Mais l'argument complet de preuve n'est pas terminé, et la seconde partie de la démonstration repose sur la manipulation d'inégalités. Toutefois, avec l'expérience, le mathématicien se forge l'intuition que normes et valeurs absolues sont faites pour que la densité passe au travers sans problème, et donc il se convainc que la deuxième partie de la démonstration va de soi.

Corollaire 5.11. *L'espace $\ell_{\mathbb{C}}^2 = \{z = (z_i)_{i=1}^\infty : z_i \in \mathbb{C}, \sum |z_i|^2 < \infty\}$ est séparable.*

Démonstration. Pour $i \geq 1$ entier, soit $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ le i -ème vecteur de base, avec 1 à la i -ème position, et 0 ailleurs, de telle sorte que l'on peut écrire :

$$z = (z_1, \dots, z_i, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i.$$

La convergence $\sum |z_i|^2 < \infty$ assure que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $I = I(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\sum_{i=I+1}^{\infty} |z_i|^2 \leq \varepsilon^2,$$

d'où l'approximation :

$$\left\| z - \sum_{i=1}^I z_i e_i \right\|_{\ell_2} \leq \varepsilon,$$

qui montre que la famille dénombrable de vecteurs $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ est totale dans $\ell_{\mathbb{C}}^2$. La Proposition 5.10 qui précède achève alors le travail. \square

Voici maintenant le premier résultat fondamental de la théorie des espaces de Hilbert.

Théorème 5.12. *Tout espace de Hilbert H de dimension infinie qui est séparable possède une base hilbertienne qui est dénombrable.*

Extrayons le sens de cet énoncé : la séparabilité de H (dénombrabilité d'un sous-ensemble dense) est *cause* de la dénombrabilité d'au moins une base hilbertienne. Est-ce vrai pour *toute* base hilbertienne ? Oui, et nous le verrons juste après.

Démonstration. Soit donc $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite dense dans H . Pour commencer, en inspectant ces éléments les uns à la suite des autres :

$$g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, \dots,$$

on décide de ne conserver un élément g_{n+1} que s'il n'appartient pas à l'espace vectoriel engendré par les n précédents éléments g_1, g_2, \dots, g_n . De la sorte, on extrait facilement une sous-suite $(g_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ telle que les k vecteurs $g_{n_1}, g_{n_2}, \dots, g_{n_k}$ sont toujours linéairement indépendants entre eux, quel que soit $k \geq 1$, en se souvenant que par construction, on a aussi :

$$\text{Vect}(g_{n_1}, g_{n_2}, \dots, g_{n_{k-1}}, g_{n_k}) = \text{Vect}(g_1, g_2, g_3, \dots, g_{n_{k-1}}, g_{n_k}).$$

Maintenant, en appliquant le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, on peut construire une nouvelle suite $(\tilde{g}_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que :

- $\text{Vect}(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k) = \text{Vect}(g_{n_1}, \dots, g_{n_k})$,
- Les k vecteurs $(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_k)$ forment une base orthonormée,

et ce, pour tout $k \geq 1$. Sachant qu'une base hilbertienne est une famille orthonormée qui est de plus totale, l'assertion suivante conclura la preuve du théorème.

Assertion 5.13. *Alors la suite infinie dénombrable $(\tilde{g}_k)_{k=1}^{\infty}$ est totale dans H .*

En effet, soit $h \in H$ quelconque et soit $\varepsilon > 0$ arbitraire. Comme par hypothèse la suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ est dense dans H , il existe un entier $N \geq 1$ tel que $\|h - g_N\| < \varepsilon$. Mais par construction, il existe un certain autre entier inférieur ou égal $n_K \leq N$ tel que :

$$g_N \in \text{Vect}(g_1, \dots, g_N) = \text{Vect}(g_{n_1}, \dots, g_{n_K}) = \text{Vect}(\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_K).$$

Donc il existe des constantes a_1, \dots, a_K telles que ce vecteur g_N s'écrive comme la combinaison linéaire finie :

$$g_N = a_1 \tilde{g}_1 + \dots + a_K \tilde{g}_K,$$

On a donc démontré que pour tout $h \in H$, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire finie $a_1 \tilde{g}_1 + \dots + a_K \tilde{g}_K$ de la suite $(\tilde{g}_k)_{k=1}^{\infty}$ telle que :

$$\|h - a_1 \tilde{g}_1 - \dots - a_K \tilde{g}_K\| < \varepsilon.$$

Ceci exprime précisément que la suite orthonormée $(\tilde{g}_k)_{k=1}^{\infty}$ est totale et la preuve du théorème s'achève. \square

Mentalisons à nouveau la démonstration en essayant de la reparcourir pour embrasser ses causalités et surtout, la résumer adéquatement. Comme on part d'une suite dénombrable dense et que l'on veut construire une base, on peut supprimer les vecteurs inutiles. Bien entendu, il faut orthonormaliser. Mais cette opération change complètement les vecteurs. Heureusement, tout reste dans une suite grandissante d'espaces vectoriels, et l'on ne perd pas les éléments de H atteints par densité pourvu que l'on s'autorise des combinaisons linéaires quelconques (notion de totalité).

Proposition 5.14. *Si H est un espace de Hilbert séparable, toute famille orthonormée de H est de cardinal au plus dénombrable.*

Démonstration. Soit donc $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une famille orthonormée dans H . Pour prouver que \mathcal{I} est au plus dénombrable, il suffit de démontrer l'existence d'une injection de \mathcal{I} dans \mathbb{N}^* .

Remarquons tout d'abord que si i_1 et i_2 sont deux éléments distincts de \mathcal{I} , on a :

$$\begin{aligned} \|e_{i_1} - e_{i_2}\|^2 &= \langle e_{i_1} - e_{i_2}, e_{i_1} - e_{i_2} \rangle \\ &= \langle e_{i_1}, e_{i_1} \rangle - \langle e_{i_2}, e_{i_1} \rangle - \langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle + \langle e_{i_2}, e_{i_2} \rangle \\ &= 2, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|e_{i_1} - e_{i_2}\| = \sqrt{2}$.

Par séparabilité de H , il existe une suite dénombrable $(g_n)_{n=1}^\infty$ dense dans H . Pour chaque indice $i \in \mathcal{I}$, il existe donc un élément $g_{n(i)}$ de cette suite qui approche assez bien e_i :

$$\|e_i - g_{n(i)}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{3},$$

et ici, $\frac{\sqrt{2}}{3}$ qui semble une marge d'erreur assez grossière sera en fait une quantité assez petite.

En choisissant pour chaque $i \in \mathcal{I}$ un seul entier $n(i)$ parmi tous ceux qui vérifient cette inégalité, on définit alors une application $\mathcal{I} \rightarrow \mathbb{N}^*$, $i \mapsto n(i)$.

En insérant $-g_{n(i_1)} + g_{n(i_1)} - g_{n(i_2)} + g_{n(i_2)}$ et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a alors pour tous $i_1 \neq i_2$:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} = \|e_{i_1} - e_{i_2}\| &\leq \|e_{i_1} - g_{n(i_1)}\| + \|g_{n(i_1)} - g_{n(i_2)}\| + \|g_{n(i_2)} - e_{i_2}\| \\ &\leq \|g_{n(i_1)} - g_{n(i_2)}\| + 2 \frac{\sqrt{2}}{3}, \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{\sqrt{2}}{3} \leq \|g_{n(i_1)} - g_{n(i_2)}\|.$$

On en déduit immédiatement que $g_{n(i_1)} \neq g_{n(i_2)}$ et donc que $n(i_1) \neq n(i_2)$ pour tous $i_1 \neq i_2$ distincts. Ainsi, l'application $i \mapsto n(i)$ de \mathcal{I} à valeurs dans \mathbb{N}^* est injective, ce qui implique $\text{Card}(\mathcal{I}) \leq \text{Card}(\mathbb{N}^*)$ et termine la preuve. \square

Corollaire 5.15. *Si H est séparable, toutes ses bases hilbertiennes sont de cardinal fini ou infini dénombrable.* \square

Proposition 5.16. *Soit H un espace de Hilbert ayant une base hilbertienne $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$. Si $f \in H$ est orthogonal à tous les e_i , $i \in \mathcal{I}$, alors $f = 0$.*

Cet énoncé, valable sans aucune hypothèse sur le cardinal de \mathcal{I} , implique qu'à une base hilbertienne, on ne peut jamais ajouter un vecteur de norme 1 qui est orthogonal à tous les vecteurs de ladite base. En termes plus abstraits : une base hilbertienne est une famille orthonormée qui est toujours maximale pour l'inclusion.

Dans la démonstration de cette proposition et aussi dans les énoncés qui suivront, nous serons amenés à calculer la norme au carré de la somme de deux ou plusieurs éléments, comme nous l'avons déjà fait quelques fois auparavant. Observons donc à l'avance que l'on a la formule :

$$\begin{aligned}\|f_1 + f_2 + \cdots + f_k\|^2 &= \langle f_1 + f_2 + \cdots + f_k, f_1 + f_2 + \cdots + f_k \rangle \\ &= \|f_1\|^2 + \|f_2\|^2 + \cdots + \|f_k\|^2 + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \langle f_{i_2}, f_{i_1} \rangle.\end{aligned}$$

Comme $\langle f_{i_2}, f_{i_1} \rangle = \overline{\langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle}$, le résultat peut être contracté en :

$$\|f_1 + \cdots + f_k\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_k\|^2 + 2 \operatorname{Re} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq k} \langle f_{i_1}, f_{i_2} \rangle.$$

Définition 5.17. Deux vecteurs z et w d'un espace hermitien $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ sont dits *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul :

$$0 = \langle z, w \rangle.$$

Lorsque les f_i sont orthogonaux entre eux, cette formule se réduit à une simple expression du théorème de Pythagore :

$$\|f_1 + \cdots + f_k\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_k\|^2.$$

De plus, si chaque f_i est dilaté d'un facteur $\lambda_i \in \mathbb{C}$, on a aussi :

$$\|\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k\|^2 = |\lambda_1|^2 \|f_1\|^2 + \cdots + |\lambda_k|^2 \|f_k\|^2.$$

Dans le cas de deux éléments ($k = 2$), la formule se réduit bien entendu à :

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle f, g \rangle + \|g\|^2,$$

et lorsque f est orthogonal à g , on a le théorème de Pythagore :

$$\|f + g\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2.$$

C'est quand on élève les normes au carré que le formalisme se prête le mieux aux calculs : souvenons-nous en !

Démonstration. Comme la famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est totale dans H , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire finie $\sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j$ pour j variant dans un sous-ensemble fini $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$, telle que :

$$\left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\| < \varepsilon.$$

Élevons les deux membres de cette inégalité au carré. L'orthogonalité de f à tous les e_j et l'orthonormalité de la sous-famille $\{e_j\}_{j \in \mathcal{J}}$ nous permettent alors d'éliminer les termes

croisés :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\|^2 &= \|f\|^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle f, \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\rangle + \sum_{j \in \mathcal{J}} \|a_j e_j\|^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{j \in \mathcal{J}} 2\operatorname{Re} [\bar{a}_j \langle f, e_j \rangle] + \sum_{j \in \mathcal{J}} |a_j|^2 \|e_j\|^2 \\ &= \|f\|^2 + \sum_{j \in \mathcal{J}} |a_j|^2. \end{aligned}$$

Mais comme par hypothèse, cette quantité est $< \varepsilon^2$, et que les termes obtenus $\|f\|^2$ et $\sum_{j \in \mathcal{J}} |a_j|^2$ sont tous deux positifs, on en déduit que $\|f\|^2 < \varepsilon^2$ (et aussi que $\sum_{j \in \mathcal{J}} |a_j|^2 < \varepsilon^2$, mais cela servira pas). L'inégalité $\|f\| < \varepsilon$ étant valable pour tout $\varepsilon > 0$, on en déduit $\|f\| = 0$, puis $f = 0$, comme annoncé. \square

6. Meilleure approximation et projection orthogonale

Comme nous l'avons dit lorsque nous anticipions avec ℓ^2 l'étude des espaces de Hilbert H abstraits et généraux, l'intérêt principal du produit scalaire hermitien, c'est la possibilité de *faire de la géométrie* quasiment comme en dimension finie. En particulier, on peut conceptualiser la notion de projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie de H , en s'imaginant intuitivement que tout se passe comme, par exemple, dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions (réelles ou complexes). Mais l'intérêt principal de la vision géométrique appliquée aux espaces de Hilbert, lesquels sont la plupart du temps des espaces de *fonctions*, c'est que la géométrie va apporter des informations nouvelles et très intéressantes sur les fonctions.

Dans l'étude de la géométrie euclidienne en dimensions deux et trois, on utilise régulièrement les projections orthogonales sur une droite ou sur un plan. Il en va de même pour la géométrie dans un espace vectoriel complexe de dimension finie muni d'un produit scalaire hermitien. Qu'en est-il en dimension infinie ? Comme on le sait, les calculs et la géométrie sont simples lorsqu'on rapporte toutes les quantités à une certaine base orthonormée fixée à l'avance.

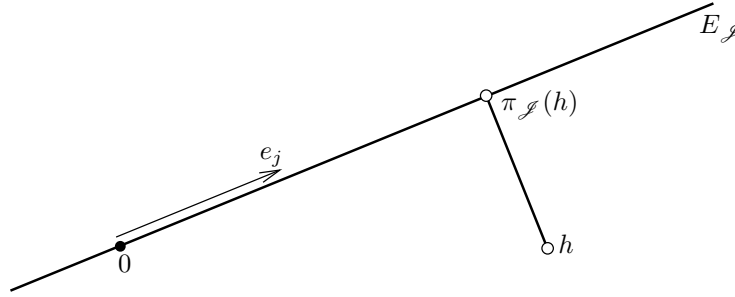
Pour raisonner avec un peu plus de généralité, considérons une famille orthonormée quelconque $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ dans un espace de Hilbert, sans aucune hypothèse sur le cardinal de \mathcal{I} . Bien entendu, on pourra s'imaginer mentalement pour fixer les idées que H est séparable (puisque c'est dans ce cas-là que la théorie possède des applications riches et nombreuses aux espaces de fonctions), que \mathcal{I} est dénombrable et même que $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une base hilbertienne.

Pour déchiffrer le sens d'un théorème mathématique, et à un niveau supérieur, pour appréhender plus globalement une théorie mathématique donnée, il est recommandé (gymnastique intellectuelle nécessaire) de lire régulièrement les énoncés qui sont un peu trop généraux en les reformulant mentalement avec des hypothèses plus concrètes.

En tout cas, soit $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une famille orthonormée de H . Considérons alors un sous-espace vectoriel E de dimension finie de H . On peut, sans réelle perte de généralité, supposer que E est engendré par un certain nombre fini des e_i , car cela revient à s'imaginer que la famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ a été adaptée à l'avance à E . Soit donc $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble fini et :

$$E = E_{\mathcal{J}} := \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(e_j : j \in \mathcal{J}).$$

Soit h un vecteur quelconque de H . Comment projette-t-on h orthogonalement sur E ? Y a-t-il une formule? Certainement oui en dimension finie, mais rappelons les idées géométriques et vérifions que tout se généralise bien à la dimension infinie.



Le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{J}}(h)$ de h sur $E_{\mathcal{J}}$ doit vérifier deux conditions suivantes :

• $\pi_{\mathcal{J}}(h) \in \text{Vect}(e_j : j \in \mathcal{J})$, c'est-à-dire qu'il existe des constantes $a_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathcal{J}$, telles que :

$$\pi_{\mathcal{J}}(h) = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j;$$

• c'est un projeté *orthogonal*.

Mais que veut dire orthogonal, ici? Élaborons une figure, H étant représenté par un plan, E étant représenté par une droite (comme H et E sont tous deux des espaces vectoriels, on doit spécifier l'origine sur la figure). La seule manière de s'imaginer que $\pi_{\mathcal{J}}(h)$ est un projeté orthogonal, c'est de dire, comme le fait voir la figure, que :

le vecteur $h - \pi_{\mathcal{J}}(h)$ est orthogonal à tous les vecteurs e_k , $k \in \mathcal{J}$.

Et cette simple condition géométrique impose une équation sur les coefficients inconnus a_j :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle h - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j, e_k \right\rangle \\ &= \langle h, e_k \rangle - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j \underbrace{\langle e_j, e_k \rangle}_{\delta_{j,k}} \end{aligned}$$

qui permet de les déterminer tous uniquement :

$$a_k = \langle h, e_k \rangle \quad (k \in \mathcal{J}).$$

Proposition 6.1. [Projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie] Soit $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ une famille orthonormée d'un espace de Hilbert H et soit $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$ un sous-ensemble fini quelconque. Alors le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{J}}(h)$ de h sur le sous-espace vectoriel de dimension finie :

$$E_{\mathcal{J}} := \text{Vect}_{\mathbb{C}}(e_j : j \in \mathcal{J})$$

est donné par :

$$\pi_{\mathcal{J}}(h) = \sum_{j \in \mathcal{J}} \langle h, e_j \rangle e_j.$$

Cette formule est exactement la même que celle connue en géométrie euclidienne : les coefficients de la combinaison linéaire sont de simples produits scalaires. Il est important d'observer que c'est l'orthonormalité de la famille qui a rendu aussi facile la détermination des coefficients a_l , car sinon, si les produits scalaires $\langle e_j, e_k \rangle$ avaient été quelconques, il aurait fallu inverser la matrice $(\langle e_j, e_k \rangle)_{j,k \in \mathcal{J}}$ pour déterminer tous les a_l .

N'oublions pas de noter au passage que le théorème de Pythagore s'applique :

$$\|h\|^2 = \|\pi_{\mathcal{J}}(h)\|^2 + \|h - \pi_{\mathcal{J}}(h)\|^2,$$

puisque $h - \pi_{\mathcal{J}}(h)$ est orthogonal (d'après la définition) à $\pi_{\mathcal{J}}(h)$.

Ainsi par anticipation, on pourrait dire que le vecteur $h - \pi_{\mathcal{J}}(h)$ est la projection orthogonale de h , parallèlement à $E_{\mathcal{J}}$, dans l'orthogonal :

$$E_{\mathcal{J}}^{\perp} := \{f \in H : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall g \in E_{\mathcal{J}}\},$$

mais il y a une petite subtilité de la théorie : lorsqu'un sous-espace vectoriel $E \subset H$ est de dimension *infinie* (ce qui n'est pas le cas ici !), on ne peut pas en général parler de supplémentaire orthogonal E^{\perp} , car il faut supposer de plus que E est *fermé* pour que la formule :

$$H = E \oplus E^{\perp}$$

soit vraie, nous en dirons plus ultérieurement. Pour l'instant, nos sous-espaces $E_{\mathcal{J}}$ sont de dimension *finie*, car nous avançons (très) prudemment vers la dimension infinie.

Maintenant que nous avons bien conceptualisé la notion géométrique de projeté orthogonal, nous pouvons le caractériser en termes analytiques de la manière suivante.

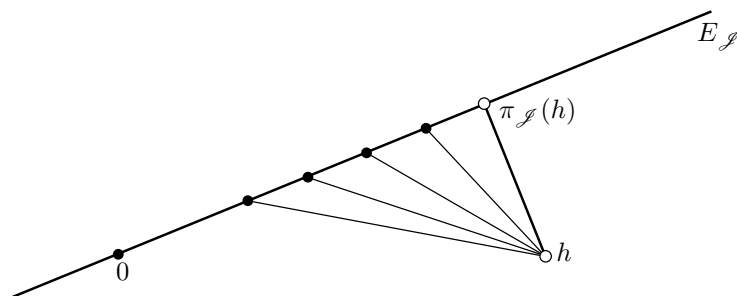
Théorème 6.2. [Meilleure approximation] *Soit $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ une famille orthonormée quelconque dans espace de Hilbert H . Pour toute partie finie non vide $\mathcal{J} \neq \emptyset$ de \mathcal{I} , si l'on introduit une notation abrégée pour le produit scalaire de f avec chaque e_i :*

$$c_i(f) := \langle f, e_i \rangle \quad (i \in \mathcal{J}),$$

alors pour tout vecteur $f \in H$ et pour toutes constantes quelconques $a_j \in \mathbb{C}$, $j \in \mathcal{J}$, on a l'inégalité :

$$\left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j(f) e_j \right\| \leq \left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\|.$$

De plus, cette inégalité est une égalité lorsque et seulement lorsque $a_j = c_j(f)$ pour tout $j \in \mathcal{J}$.



Géométriquement parlant, l'inégalité exprime que la distance de f à sa projection orthogonale est toujours inférieure à la distance de f à un élément *quelconque* de l'espace vectoriel $E_{\mathcal{J}}$, à savoir :

$$\|f - \pi_{\mathcal{J}}(f)\| \leq \|f - g\|$$

pour tout $g \in E_{\mathcal{J}}$ de la forme $g = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j$. Par ailleurs, la notation $c_i(f)$ pour dire « i -ème coefficient de f » est quelque peu inspirée de la théorie des séries de Fourier, nous en reparlerons.

Avant la démonstration, voici une interprétation en termes de théorie des fonctions de ce théorème. Si l'on définit la distance de f à $E_{\mathcal{J}}$ par :

$$d(f, E_{\mathcal{J}}) := \inf_{g \in E_{\mathcal{J}}} \|f - g\|,$$

le théorème précédent nous dit alors que cet infimum est un *minimum* et que ce minimum est atteint en l'unique point $g := \pi_{\mathcal{J}}(f)$. Autrement dit, la projection orthogonale de f sur $E_{\mathcal{J}}$ est la meilleure approximation de f par un élément de l'espace vectoriel $E_{\mathcal{J}}$. Ainsi, lorsque H est un espace de fonctions « compliquées » et lorsque \mathcal{J} indexe un ensemble fini de fonctions-types « simples », le théorème dit que $\pi_{\mathcal{J}}(f)$ est la meilleure approximation de la fonction f comme combinaison linéaire de ces fonctions-types simples.

Démonstration. Comme nous l'avons déjà signalé, il est avantageux d'élever au carré toute inégalité entre normes, car les normes au carré se prêtent mieux aux calculs grâce à leur expression $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ en fonction du produit scalaire hermitien. Nous avons d'ailleurs déjà établi à ce sujet la formule élémentaire :

$$\|z + w\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2 + 2\operatorname{Re} \langle z, w \rangle.$$

Ici, dans le terme à étudier $\|f - \sum_j a_j e_j\|^2$, faisons apparaître $-\pi_{\mathcal{J}}(f) + \pi_{\mathcal{J}}(f)$ comme terme central, appliquons la formule élémentaire et changeons en $\sum_{k \in \mathcal{J}}$ l'indice de sommation pour la deuxième somme :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\|^2 &= \left\| \underbrace{f - \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j(f) e_j}_{z = f - \pi_{\mathcal{J}}(f)} + \underbrace{\sum_{j \in \mathcal{J}} (c_j(f) - a_j) e_j}_w \right\|^2 \\ &= \left\| f - \pi_{\mathcal{J}}(f) \right\|^2 + \left\| \sum_{k \in \mathcal{J}} (c_k(f) - a_k) e_k \right\|^2 + \\ &\quad + 2\operatorname{Re} \left\langle f - \pi_{\mathcal{J}}(f), \sum_{k \in \mathcal{J}} (c_k(f) - a_k) e_k \right\rangle. \end{aligned}$$

Or nous avons déjà vu que le terme souligné à la dernière ligne s'annule, puisque $f - \pi_{\mathcal{J}}(f)$ est, par définition, orthogonal à tous les e_k , $k \in \mathcal{J}$. D'autre part, grâce à l'orthonormalité des e_k (on a $\|e_k\| = 1$), on en déduit que :

$$\left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\|^2 = \left\| f - \pi_{\mathcal{J}}(f) \right\|^2 + \sum_{k \in \mathcal{J}} |c_k(f) - a_k|^2.$$

Le dernier terme à droite étant positif, on a bien l'inégalité annoncée :

$$\left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j e_j \right\|^2 \geq \left\| f - \pi_{\mathcal{J}}(f) \right\|^2,$$

et cette inégalité n'est une égalité que lorsque la somme $\sum_{k \in \mathcal{J}} |c_k(f) - a_k|^2$ à termes positifs que nous avons fait disparaître s'annule, ce qui implique $c_k(f) = a_k$ pour tout $k \in \mathcal{J}$. \square

Corollaire 6.3. *Soit $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ une famille orthonormée de H . Alors pour tout $f \in H$ et toutes parties finies $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}$ non vides de \mathcal{J} , on a :*

$$\left\| f - \sum_{j \in \mathcal{J}} c_j(f) e_j \right\| \leq \left\| f - \sum_{j \in \mathcal{K}} c_j(f) e_j \right\|$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer *logiquement* le théorème avec $a_j := c_j(f)$ pour $j \in \mathcal{K}$ et avec $a_j := 0$ pour $j \in \mathcal{J} \setminus \mathcal{K}$. \square

Puisque la logique mécanique n'éclaire rien, dévoilons la signification géométrique de cette inégalité :

$$\|f - \pi_{\mathcal{J}}(f)\| \leq \|f - \pi_{\mathcal{K}}(f)\|.$$

Autrement dit, plus un espace vectoriel grossit par inclusions croissantes, plus par projection orthogonale, l'approximation offerte s'améliore.

7. Bessel, Parseval, Plancherel, Développement dans une base hilbertienne

Dans le théorème ci-dessous, il faut observer que la famille $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ n'est pas supposée totale et qu'elle peut même être finie. En fait, lorsque $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ est une base hilbertienne, l'inégalité de Bessel deviendra une *égalité* que l'on appellera l'identité de Plancherel, voir la suite.

Théorème 7.1. [Inégalité de Bessel] *Si $\{e_i\}_{i \in \mathcal{J}}$ est une famille orthonormée au plus dénombrable de H , alors pour tout vecteur $f \in H$:*

$$\sum_{i \in \mathcal{J}} |\langle f, e_i \rangle|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Démonstration. Soit $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ un sous-ensemble d'indices *fini* quelconque. Nous avons déjà vu que la projection orthogonale $\pi_{\mathcal{J}'}(f)$ de f sur $E_{\mathcal{J}'} = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(e_i : i \in \mathcal{J}')$ est orthogonale au vecteur $f - \pi_{\mathcal{J}'}(f)$, donc le théorème de Pythagore appliqué deux fois nous donne :

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \left\| \sum_{i \in \mathcal{J}'} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 + \left\| f - \sum_{i \in \mathcal{J}'} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &\geq \left\| \sum_{i \in \mathcal{J}'} \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i \in \mathcal{J}'} |\langle f, e_i \rangle|^2, \end{aligned}$$

ce qui donne l'inégalité de Bessel pour toute famille *finie* $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$. Or \mathcal{J} est dénombrable, donc à la limite on obtient l'inégalité de Bessel (les sommes partielles finies d'une série numérique à termes ≥ 0 qui est bornée convergent vers une limite majorée par la même borne). \square

Proposition 7.2. [Convergence commutative] Soit $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert. Si l'on note $c_i(f) := \langle f, e_i \rangle$ pour tout $f \in H$, alors la série :

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i(f) e_i$$

converge commutativement dans H , à savoir, les deux conditions suivantes sont satisfaites :

- il existe un unique élément $g \in H$ tel que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{i=1}^n c_i(f) e_i \right\| = 0;$$

- pour toute bijection $\tau: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, on a aussi, avec le même élément g :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| g - \sum_{i=1}^n c_{\tau(i)}(f) e_{\tau(i)} \right\| = 0.$$

À nouveau, la suite orthonormée $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ n'est pas supposée totale afin de gagner en généralité.

Démonstration. Grâce à l'inégalité de Bessel, on sait déjà que :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(f)|^2 \leq \|f\|^2 < \infty.$$

Donc cette série de réels positifs converge dans \mathbb{R}_+ . Par conséquent, la suite de ses sommes partielles vérifie le critère de Cauchy dans \mathbb{R}_+ , à savoir :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists I \geq 1 \quad \left(i_1, i_2 \geq I \Rightarrow \sum_{i_1 \leq i \leq i_2} |c_i(f)|^2 \leq \varepsilon \right).$$

Mais en raison de l'orthonormalité de la suite $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, on a :

$$\left\| \sum_{i_1 \leq i \leq i_2} c_i(f) e_i \right\|^2 = \sum_{i_1 \leq i \leq i_2} |c_i(f)|^2 \leq \varepsilon.$$

Cette dernière inégalité montre donc que la série *vectorielle* $\sum_i c_i(f) e_i$ constituée d'éléments de H vérifie le critère de Cauchy. Comme tout espace de Hilbert est supposé complet par définition, cette série converge donc (pour la distance de H) vers un certain élément g de H , qui est bien sûr unique.

La convergence commutative est un phénomène général partagé par toutes les séries à termes positifs ou nuls, en particulier par $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i(f)|^2$.

Lemme 7.3. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ est une série à termes réels $a_k \geq 0$ qui converge vers un élément $\ell \in \mathbb{R}_+$, alors pour toute bijection quelconque $\tau: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, la série renumérotée $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\tau(k)}$ converge à nouveau vers le même élément $\ell \in \mathbb{R}_+$.

Démonstration. Afin de montrer que la limite est la même, considérons tout naturellement la différence des sommes partielles jusqu'à un (grand) entier n :

$$\left| \sum_{k_1=1}^n a_{k_1} - \sum_{k_2=1}^n a_{\tau(k_2)} \right|.$$

Si, pour deux indices k_1 et k_2 , on a $k_1 = \tau(k_2)$, le terme $a_{k_1} - a_{\tau(k_2)}$ s'annihile. Dans la différence entre les deux sommes, il reste donc, à un signe \pm près, seulement les termes qui n'apparaissent que dans une seule somme.

Rappelons que la *différence symétrique* $\mathcal{A} \Delta \mathcal{B}$ entre deux sous-ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} d'un ensemble \mathcal{E} est constituée de l'ensemble des éléments de \mathcal{E} qui n'appartiennent qu'à *un seul* des deux ensembles \mathcal{A} et \mathcal{B} . En utilisant la notation $\mathcal{D}^c := \mathcal{E} \setminus \mathcal{D}$ pour désigner le complémentaire d'un sous-ensemble $\mathcal{D} \subset \mathcal{E}$, on peut aussi écrire cette différence symétrique comme :

$$\mathcal{A} \Delta \mathcal{B} := (\mathcal{A} \cap \mathcal{B}^c) \cup (\mathcal{A}^c \cap \mathcal{B}).$$

En revenant à notre différence entre deux sommes, si nous notons :

$$\mathcal{K}_n := \{1, 2, 3, \dots, n\} \Delta \{\tau(1), \tau(2), \tau(3), \dots, \tau(n)\},$$

nous pouvons donc la majorer, en tenant compte du fait que $|\pm a_k| = a_k$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k_1=1}^n a_{k_1} - \sum_{k_2=1}^n a_{\tau(k_2)} \right| &\leq \sum_{k \in \mathcal{K}_n} a_k \\ &\leq \sum_{k=\min(\mathcal{K}_n)}^{\infty} a_k. \end{aligned}$$

Pour démontrer que cette dernière série majorante tend vers zéro avec n , il suffit donc de vérifier que $\min \mathcal{K}_n$ devient arbitrairement grand quand n tend vers l'infini.

Fixons alors un entier N quelconque. La condition $\min(\mathcal{K}_n) \geq N$ est réalisée dès que tous les entiers $j = 1, 2, 3, \dots, N-1$ sont aussi dans l'ensemble $\{\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(n)\}$. Mais pour garantir cela, il suffit que :

$$n \geq \max \{ \tau^{-1}(j) : 1 \leq j \leq N-1 \},$$

et cette dernière quantité est finie. Ceci démontre que $\min(\mathcal{K}_n)$ tend bien vers l'infini avec n , et conclut la preuve. \square

Avec les notations du lemme, l'orthonormalité de la suite $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ nous permet aussi de majorer pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} c_k(f) e_k - \sum_{k=1}^n c_{\tau(k)}(f) e_{\tau(k)} \right\|^2 = \sum_{k \in \mathcal{K}_n} |c_k(f)|^2 \leq \sum_{k=\min \mathcal{K}_n}^{\infty} |c_k(f)|^2$$

par un majorant qui tend tout aussi bien vers zéro quand n tend vers l'infini. Ceci achève la preuve du théorème. \square

Voici enfin l'énoncé qui présente les espaces de Hilbert séparables comme des espaces munis de vraies bases (infinies dénombrables) avec lesquelles on peut faire des calculs essentiellement comme en dimension finie.

Théorème 7.4. [Décomposition selon une base hilbertienne] *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie qui est séparable. Si $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne (dénombrable) de H , alors tout vecteur $f \in H$ se décompose de manière unique comme combinaison linéaire (infinie) des e_i :*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i,$$

où la série converge (commutativement) pour la topologie de H , à savoir : pour toute bijection $\tau: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f - \sum_{i=1}^n \langle f, e_{\tau(i)} \rangle e_{\tau(i)} \right\|.$$

Réciproquement, étant donné une famille orthonormée $\{e_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ de H (nécessairement de cardinal infini dénombrable), si l'on a $f = \sum_{i \in \mathcal{I}} \langle f, e_i \rangle e_i$ pour tout $f \in H$, alors la famille $\{e_i: i \in \mathcal{I}\}$ est en fait totale, et c'est donc une base hilbertienne.

Démonstration. Nous savons qu'il suffit d'établir la convergence vers f de la série lorsque $\tau: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est l'identité. Démontrons donc que la quantité :

$$\delta_n := \left\| f - \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \right\|$$

tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini. Observons d'ores et déjà que le Corollaire 6.3 nous informe que la suite δ_n est décroissante.

Puisque par hypothèse, la collection $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est totale dans H , pour tout $\varepsilon > 0$ de la forme $\varepsilon = \frac{1}{k} > 0$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ grand, il existe une combinaison linéaire finie :

$$\sum_{i=1}^{n_k} a_{k,i} e_i$$

des e_i jusqu'à un certain entier n_k (qui dépend de k) à coefficients complexes $a_{k,i}$ (qui dépendent aussi de k) telle que :

$$\left\| f - \sum_{i=1}^{n_k} a_{k,i} e_i \right\| \leq \frac{1}{k}.$$

Mais grâce à la propriété de meilleure approximation énoncée par le Théorème 6.2, on a automatiquement :

$$\delta_{n_k} = \left\| f - \sum_{i=1}^{n_k} \langle f, e_i \rangle e_i \right\| \leq \left\| f - \sum_{i=1}^{n_k} a_{k,i} e_i \right\| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Ainsi, la sous-suite $(\delta_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ des δ_n tend vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$, et comme $(\delta_n)_{n \geq 1}$ est décroissante, c'est donc la suite $(\delta_n)_{n=1}^{\infty}$ tout entière qui converge vers zéro. Ceci prouve la convergence dans H de la série $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$ vers f .

Pour ce qui est de la réciproque, si l'on indexe l'ensemble dénombrable \mathcal{I} par des entiers $i \geq 1$ la convergence de $\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$ vers f signifie précisément que les sommes partielles $\sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i$ peuvent être rendues arbitrairement proches de f , donc la famille $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est totale. \square

Lemme 7.5. [Continuité de la norme] Si $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ est une suite dans un espace de Hilbert quelconque H qui converge vers un élément $f_{\infty} \in H$, à savoir :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f_{\infty}\| = 0,$$

alors les normes de f_k convergent aussi vers la norme de f_{∞} :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\| = \|f_{\infty}\|.$$

Démonstration. En élevant au carré la norme de f_k , en faisant apparaître $-f_\infty + f_\infty$, en développant :

$$\|f_k\|^2 = \|f_k - f_\infty + f_\infty\|^2 = \|f_k - f_\infty\|^2 + \|f_\infty\|^2 + 2\operatorname{Re}\langle f_k - f_\infty, f_\infty \rangle,$$

et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz après une inégalité triangulaire :

$$\left| \|f_k\|^2 - \|f_\infty\|^2 \right| \leq \|f_k - f_\infty\|^2 + 2\|f_k - f_\infty\| \|f_\infty\|,$$

on majore la différence $\|f_k\|^2 - \|f_\infty\|^2$ par une quantité qui tend par hypothèse vers zéro lorsque $k \rightarrow +\infty$. \square

Théorème 7.6. [Identité de Plancherel] *Si H est un espace de Hilbert séparable de dimension infinie (dénombrable) muni d'une base hilbertienne $\{e_i\}_{i=1}^\infty$, alors la norme au carré de tout vecteur $f \in H$:*

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle e_i$$

qui est décomposé selon cette base s'obtient simplement en sommant les modules au carré de ses coefficients :

$$\|f\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2.$$

[Identité de Parseval] *Plus généralement, le produit scalaire $\langle f, g \rangle$ de f avec un autre élément quelconque g de H :*

$$g = \sum_{i=1}^{\infty} \langle g, e_i \rangle e_i$$

qui est lui aussi décomposé selon cette même base, s'obtient en sommant les produits (conjugués) de leurs coefficients :

$$\langle f, g \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}.$$

Ce qu'on appelle « identité de Plancherel » n'est donc autre que la version du Théorème de Pythagore en dimension infinie : immortalité et renouveau d'un théorème vieux de vingt-cinq siècles ! Et bien entendu aussi, l'identité de Parseval est la généralisation aux espaces de Hilbert de la règle bien connue de calcul du produit scalaire $x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ entre deux vecteurs de \mathbb{R}^n ayant les coordonnées (x_1, \dots, x_n) et (y_1, \dots, y_n) dans la base orthogonale canonique.

Démonstration. Si $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ est une base hilbertienne de H , on sait que : pour tout $f \in H$, la somme partielle :

$$\sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i$$

tend vers f lorsque n tend vers l'infini. Par continuité de la norme sur H , on en déduit aussi la convergence dans \mathbb{R}^+ :

$$\left\| \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \right\|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|^2,$$

ce qui, grâce à l'orthonormalité des e_i , signifie précisément que l'identité de Plancherel est satisfaite :

$$\sum_{i=1}^n |\langle f, e_i \rangle|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|^2.$$

Pour la preuve de l'identité de Parseval, nous avons besoin d'un énoncé sur les opérateurs continus entre espaces vectoriels normés qui nous permettra de réinterpréter la fameuse inégalité de Cauchy-Schwarz. Le théorème suivant, que nous rappelons avec sa démonstration, ramène les problèmes de continuité à des majorations sur les normes.

Théorème 7.7. . Soient $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ deux espaces vectoriels normés et soit L une application linéaire de F dans G . Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) l'application L est continue à l'origine ;
- (ii) l'application L est uniformément continue ;
- (iii) il existe une constante $C \geq 0$ telle que l'on ait :

$$\forall f \in F \quad \|L(f)\|_G \leq C \|f\|_F.$$

La dernière inégalité (iii) exprime que la norme d'opérateur de L , définie par :

$$\|L\|_{\text{Lin}(F,G)} := \sup_{f \neq 0} \frac{\|L(f)\|_G}{\|f\|_F} = \sup_{\|f\|_F \leq 1} \|L(f)\|_G$$

est finie et qu'elle est majorée par :

$$\|L\|_{\text{Lin}(F,G)} \leq C.$$

Dans les applications concrètes aux espaces de fonctions, on est souvent amené à essayer de majorer $\|L(f)\|_G$ en faisant apparaître $\|f\|_F$ à une constante près dans le majorant. Bien entendu, lorsqu'on manipule des inégalités strictes, on perd de l'information, et la constante que l'on obtient est presque toujours strictement supérieure à la norme d'opérateur $\|L\|$. Raffiner les calculs afin d'obtenir la meilleure constante C , c'est-à-dire $\|L\|$, ouvre souvent sur des questions mathématiques délicates.

Démonstration. Montrons que (i) implique (iii). La continuité à l'origine dit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\|f\|_F \leq \eta$ entraîne $\|L(f)\|_G \leq \varepsilon$. Prenons $\varepsilon = 1$. Soit maintenant $f \in F$ quelconque, mais non nul. Nous pouvons alors appliquer l'inégalité $\|L(f')\|_G \leq 1$ au vecteur $f' := \eta \frac{f}{\|f\|_F}$ qui satisfait bien sûr $\|f'\| \leq \eta$, ce qui nous donne :

$$\left\| L\left(\eta \frac{f}{\|f\|_F}\right) \right\|_G \leq 1 \iff \|L(f)\|_G \leq \frac{1}{\eta} \|f\|_F \quad (\forall f \in F \setminus \{0\}),$$

mais cette dernière égalité est aussi valable pour $f = 0$, puisque L est linéaire.

L'implication (ii) \Rightarrow (i) étant triviale, il reste à montrer que (iii) entraîne (ii). Mais en appliquant (iii) à $f - g$ avec $f, g \in H$, étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il suffit de choisir $\eta = \varepsilon/C$ pour garantir que :

$$(\|f - g\|_F \leq \eta) \implies (\|Lf - Lg\|_G \leq \varepsilon),$$

ce qui achève la preuve. □

Maintenant, l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \|g\|$$

montre *simultanément* que les deux applications suivantes, linéaire et sesquilinéaire, de H à valeurs dans \mathbb{C} et appelées « produit scalaire avec un vecteur fixé » :

$$L_g: f \mapsto \langle f, g \rangle \quad \text{et} \quad L_f: g \mapsto \langle f, g \rangle \\ H \longrightarrow \mathbb{C} \quad \quad \quad H \longrightarrow \mathbb{C}$$

sont continues.

Nous pouvons revenir maintenant à l'identité de Parseval. Tout d'abord, si on applique l'inégalité élémentaire déjà vue en (2.4) :

$$2|zz'| \leq |z|^2 + |z'|^2$$

satisfaite par deux nombres complexes arbitraires $z, z' \in \mathbb{C}$ au terme général de la série $\sum_i \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}$, on déduit que cette série est absolument convergente, puisque :

$$2 \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}| \leq \sum_{i=1}^{\infty} |\langle f, e_i \rangle|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} |\langle g, e_i \rangle|^2 \\ = \|f\|^2 + \|g\|^2 < \infty$$

grâce à l'identité de Plancherel. Comme $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ est une base hilbertienne, le Théorème 7.4 nous assure que :

$$\sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f \quad \text{et que :} \quad \sum_{i=1}^n \langle g, e_i \rangle e_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$$

pour la topologie définie par la norme de H . Mais comme nous venons de voir que le produit scalaire est une forme bilinéaire *continue* sur H (en raison de l'inégalité de Cauchy-Schwarz), on en déduit aussi que :

$$\left\langle \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle e_i, \sum_{i=1}^n \langle g, e_i \rangle e_i \right\rangle \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \langle f, g \rangle,$$

ce qui, grâce à l'orthonormalité des e_i et à la bilinéarité du produit scalaire :

$$\sum_{i_1=1}^n \sum_{i_2=1}^n \langle f, e_{i_1} \rangle \overline{\langle g, e_{i_2} \rangle} \underbrace{\langle e_{i_1}, e_{i_2} \rangle}_{\delta_{i_1, i_2}} = \sum_{i=1}^n \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle}$$

signifie précisément que l'identité de Parseval est satisfaite :

$$\sum_{i=1}^{\infty} \langle f, e_i \rangle \overline{\langle g, e_i \rangle} = \langle f, g \rangle.$$

La démonstration détaillée est terminée. □

Proposition 7.8. [Unicité du développement] Soit $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ une base hilbertienne dénombrable d'un espace de Hilbert séparable H de dimension infinie, et soit $(a_i)_{i=1}^{\infty}$ une famille de scalaires telle que la série $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ converge au sens de la topologie de H vers un élément $f = \sum a_i e_i$. Alors $a_i = \langle f, e_i \rangle$ pour tout $i \geq 1$.

Démonstration. Par hypothèse, nous avons donc :

$$f_k := \sum_{i=1}^k a_i e_i \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f$$

lorsque k tend vers l'infini. D'autre part, pour tous entiers $i \geq 1$ et $k \geq 1$, on a par orthonormalité des e_i :

$$\langle f_k, e_i \rangle = \begin{cases} a_i & \text{si } i \leq k \\ 0 & \text{si } i \geq k + 1. \end{cases}$$

Pour tout i fixé, la suite de nombres complexes $(\langle f_k, e_i \rangle)_{k=1}^{\infty}$ est donc constante égale à a_i à partir du rang $k \geq i$. Ainsi, elle converge (trivialement) vers a_i .

Par ailleurs, toujours avec i fixé, nous savons grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz que l'application $f \mapsto \langle f, e_i \rangle$ de H à valeurs dans \mathbb{C} est une forme linéaire *continue*. Comme f_k tend vers f pour la topologie de H , on en déduit que :

$$\langle f_k, e_i \rangle \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \langle f, e_i \rangle.$$

Par unicité de la limite dans \mathbb{C} , on en déduit finalement que $a_i = \langle f, e_i \rangle$ pour tout $i \geq 1$. \square

Une application linéaire L entre deux espace vectoriels normés $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ est une *isométrie* si on a :

$$\|L(f)\|_G = \|f\|_F$$

pour tout élément $f \in F$. Il en découle immédiatement que L est injective. Si elle est de plus surjective, on dit que L est un isomorphisme isométrique.

Théorème 7.9. [Riesz-Fischer] *Tout espace de Hilbert H séparable de dimension infinie est isométriquement isomorphe à ℓ^2 .*

Cet énoncé est la généralisation, en dimension infinie dénombrable, du théorème d'après lequel tout espace vectoriel hermitien de dimension finie n est isomorphe à \mathbb{C}^n muni du produit scalaire hermitien standard $z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_n \bar{w}_n$. Il est important d'ajouter qu'il y a autant d'isomorphismes isométriques entre H et ℓ^2 qu'il y a de bases hilbertiennes, et donc qu'aucun tel isomorphisme isométrique n'est canonique.

Démonstration. Rappelons que ℓ^2 est l'espace des suites infinies dénombrables $z = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots)$ de nombres complexes $z_i \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\|z\|_{\ell^2}^2 := \sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^2 < \infty,$$

et que c'est un espace de Hilbert pour le produit scalaire hermitien :

$$\langle z, w \rangle_{\ell^2} := \sum_{i=1}^{\infty} z_i \bar{w}_i,$$

de manière entièrement analogue à ce qui vaut en dimension finie.

Soit donc H un espace de Hilbert de dimension infinie qui est séparable. Bien entendu, nous savons grâce au Théorème 5.12 que H possède une base hilbertienne dénombrable ; notons-la comme auparavant $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$.

L'application qui va nous fournir l'isomorphisme isométrique est alors tout simplement celle qui, à un élément quelconque $f \in H$, associe tous les coefficients de son développement dans une telle base hilbertienne :

$$\Psi: H \longrightarrow \ell^2, \quad f \longmapsto (\langle f, e_i \rangle)_{i=1}^{\infty}.$$

En effet, l'identité de Plancherel montre que $\Psi(f)$ est bien un élément de ℓ^2 et que Ψ est une isométrie :

$$\|\Psi(f)\|_{\ell^2} = \|f\|_H. \quad (\forall f \in H).$$

L'injectivité de Ψ en découle immédiatement. Par ailleurs, Ψ étant clairement linéaire, cette égalité interprétée comme *inégalité* $\|\Psi(f)\|_{\ell^2} \leq \|f\|_H$ montre que Ψ est une application linéaire *continue*.

Il ne reste plus qu'à établir la surjectivité de Ψ . Soit donc $z = (z_i)_{i=1}^\infty$ un élément quelconque de ℓ^2 . Pour montrer l'existence d'un $f \in H$ tel que $\Psi(f) = z$, définissons une suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments de H par :

$$f_k := \sum_{i=1}^k z_i e_i \quad (k \geq 1).$$

Grâce à l'orthonormalité des e_i , on peut tester si le critère de Cauchy est satisfait :

$$\begin{aligned} \forall k_1, \quad \forall k_2 \geq k_1 + 1, \quad \|f_{k_2} - f_{k_1}\|^2 &= \sum_{k_1+1 \leq i \leq k_2} |z_i|^2 \|e_i\|^2 \\ &\leq \sum_{i=k_1+1}^{\infty} |z_i|^2 \xrightarrow[k_1 \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

et cette dernière quantité tend visiblement vers zéro lorsque k_1 tend vers l'infini. Donc la suite $(f_k)_{k=1}^\infty$ est bien de Cauchy, et comme H est complet par définition, cette suite possède une (unique) limite f dans H , ce qui s'écrit encore :

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} z_i e_i,$$

la série étant convergente pour la topologie de H . Mais d'après la Proposition 7.8, on a alors nécessairement $z_i = \langle f, e_i \rangle$ pour tout $i \geq 1$, et donc $\Psi(f) = z$, comme annoncé. Fin de la preuve ! \square

Comme nous l'avons dit par anticipation au début de ces considérations, la notion purement abstraite d'espace de Hilbert séparable se ramène, *via* le choix d'une base hilbertienne (orthonormée), à celle de l'espace ℓ^2 concret. Toutefois, comme les bases hilbertiennes sont nombreuses et variables, l'isomorphisme Ψ ci-dessus n'est en rien canonique ; il indique seulement que la combinatoire du calcul en coordonnées dans une base hilbertienne fixée est exactement la même que dans l'espace ℓ^2 , ce qui est néanmoins très satisfaisant pour l'intuition mathématique.

8. Polynômes orthogonaux

Soit un intervalle ouvert $]a, b[$ non nécessairement borné avec :

$$-\infty \leq a < b \leq \infty.$$

Définition 8.1. Un *poids* sur $]a, b[$ est une fonction continue strictement positive :

$$w :]a, b[\longrightarrow]0, \infty[,$$

dont tous les *moments d'ordre* $n \in \mathbb{N}$, à savoir les intégrales :

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx < \infty$$

sont supposés *finis*.

Avec une telle fonction-poids w , lettre-initiale du mot anglais correspondant *weight*, introduisons l'espace vectoriel :

$$\mathcal{H}_w := \left\{ f \in \mathcal{C}^0(]a, b[, \mathbb{C}) : \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx < \infty \right\}.$$

On vérifie aisément que \mathcal{H}_w est un espace préhilbertien muni du produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle_w := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} w(x) dx,$$

et de la norme naturelle :

$$\|f\|_w := \left(\int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Toutefois, \mathcal{H}_w n'est pas forcément complet en général, et afin que ce soit un vrai espace de Hilbert, il faut étudier des conditions spécifiques qui assureraient sa complétude.

Avant d'entamer une telle étude, discutons le cas simple où $-\infty < a < b < \infty$ où l'intervalle considéré $[a, b]$ est compact, et où le poids $w \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R}_+^*)$ est continu sur $[a, b]$, de telle sorte que :

$$0 < c := \min_{a \leq x \leq b} w(x) \leq \max_{a \leq x \leq b} w(x) =: C < \infty.$$

Dans ce cas, nous allons argumenter que l'on a l'isomorphisme :

$$(\mathcal{H}_w, \|\cdot\|_w) \cong (L^2([a, b], \mathbb{C}), \|\cdot\|_{L^2}).$$

Définition 8.2. Une application \mathbb{C} -linéaire $U : H \rightarrow H'$ entre deux espaces de Hilbert — ou simplement préhilbertiens — $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ et $(H', \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est dite *unitaire* lorsque :

- (i) U est bijective ;
- (ii) $\|U(f)\|_{H'} = \|f\|_H$ pour tout $f \in H$.

En particulier, U est une application linéaire *continue*.

De plus, $U^{-1} : H' \rightarrow H$ existe, est une application \mathbb{C} -linéaire (exercice), et pour tout $f' \in H'$, on a :

$$\begin{aligned} \|U^{-1}(f')\|_H &= \|U(U^{-1}(f'))\|_{H'} \\ &= \|f'\|_{H'}, \end{aligned}$$

donc l'inverse :

$$U^{-1} : H' \rightarrow H$$

est aussi unitaire.

Ensuite, grâce aux identités de polarisation énoncées dans le Théorème 3.11, on démontre (exercice) que $U : H \rightarrow H'$ est unitaire si et seulement si :

$$\langle U(f), U(g) \rangle_{H'} = \langle f, g \rangle_H \quad (\forall f \in H, \forall g \in H).$$

Terminologie 8.3. Deux espaces de Hilbert — ou simplement préhilbertiens — H et H' sont dits *unitairement équivalents* lorsqu'il existe une application unitaire $U : H \rightarrow H'$.

On se convainc alors aisément (exercice) que H est complet si et seulement si H' l'est. Avec tous ces concepts, on s'aperçoit (exercice) que l'application :

$$I: L^2([a, b]) \longrightarrow \mathcal{H}_w \\ f \longmapsto w^{-\frac{1}{2}} f$$

est une équivalence unitaire, ce qui offre le fait que \mathcal{H}_w est complet. Une autre manière de procéder (solution de l'exercice) est de regarder l'application identité (!) :

$$I: L^2([a, b]) \longrightarrow \mathcal{H}_w \\ f \longmapsto f,$$

qui n'est pas en général une équivalence unitaire entre espaces préhilbertiens, mais qui satisfait quand même une première inégalité :

$$\|I(f)\|_w^2 = \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx \leq C \|f\|_{L^2}^2,$$

et une seconde inégalité :

$$c \|f\|_{L^2}^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 w(x) dx = \|f\|_w^2$$

qui remplissent le même rôle argumentatif que l'égalité des normes dans le contexte unitaire en établissant un isomorphisme, et donc, puisque $L^2([a, b])$ est de Hilbert, nous déduisons que \mathcal{H}_w est bien un espace de Hilbert lorsque $[a, b]$ est compact, et lorsque w est continue sur $[a, b]$.

Revenons maintenant au cas général d'un intervalle ouvert $]a, b[$ non nécessairement borné. Au moins pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace \mathcal{H}_w contient manifestement le sous-espace :

$$\mathcal{P}_n \subset \mathcal{H}_w$$

constitué des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq n$.

Proposition 8.4. *Il existe une unique famille :*

$$(P_n)_{n=0}^\infty$$

de polynômes unitaires $P_n = P_n(x)$ de degré n qui sont orthogonaux deux à deux :

$$\langle P_{n_1}, P_{n_2} \rangle_w = 0 \quad \text{lorsque } n_1 \neq n_2, \\ \langle P_{n_1}, P_{n_2} \rangle_w > 0 \quad \text{lorsque } n_1 = n_2.$$

Démonstration. Puisque P_0 est unitaire, nécessairement $P_0(x) := 1$, puis :

$$\langle P_0, P_0 \rangle_w = \int_a^b 1^2 w(x) dx > 0.$$

Construisons P_n par récurrence sur l'entier $n \geq 1$, en supposant déjà connus P_0, \dots, P_{n-1} . Comme $\deg(P_k) = k$, ces polynômes P_0, \dots, P_{n-1} forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{P}_{n-1} . On peut donc chercher P_n sous la forme :

$$P_n(x) = x^n - \lambda_{n-1} P_{n-1}(x) - \dots - \lambda_0 P_0(x),$$

où les constantes $\lambda_{n-1}, \dots, \lambda_0 \in \mathbb{C}$ sont inconnues. Mais les n conditions d'orthogonalité supposées :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle P_n, P_0 \rangle_w \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \langle P_n, P_{n-1} \rangle_w \end{aligned}$$

se lisent comme le système linéaire :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x^n, P_0 \rangle_w - \lambda_{n-1} \underbrace{\langle P_{n-1}, P_0 \rangle_w}_\circ - \dots - \lambda_0 \langle P_0, P_0 \rangle_w, \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \langle x^n, P_{n-1} \rangle_w - \lambda_{n-1} \langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_w - \dots - \lambda_0 \underbrace{\langle P_0, P_{n-1} \rangle_w}_\circ, \end{aligned}$$

lequel se réduit manifestement à un système diagonal par orthogonalité (hypothèse de récurrence) :

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x^n, P_0 \rangle_w - \lambda_0 \underbrace{\langle P_0, P_0 \rangle_w}_{\neq 0}, \\ &\dots\dots\dots \\ 0 &= \langle x^n, P_{n-1} \rangle_w - \lambda_{n-1} \underbrace{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_w}_{\neq 0}, \end{aligned}$$

la solution en les λ_k étant visiblement unique. □

Exemple 8.5. Quatre familles de polynômes orthogonaux interviennent fréquemment :

- Polynômes de Laguerre : poids $w(x) = e^{-x}$ sur l'intervalle $[0, \infty[$.
- Polynômes de Hermite : poids $w(x) = e^{-x^2}$ sur l'intervalle $[-\infty, \infty[$.
- Polynômes de Legendre : poids $w(x) = 1$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.
- Polynômes de Tchebychev : poids $w(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ sur l'intervalle $[-1, +1]$.

En revenant à un poids $w(x)$ général dont les moments d'ordre $n \in \mathbb{N}$ quelconque sont finis, un calcul simple montre (exercice) que :

$$P_0(x) = 1,$$

et que :

$$P_1(x) = x - \frac{\int_a^b x w(x) dx}{\int_a^b w(x) dx}.$$

Des formules générales simples permettent, dans les applications, de calculer rapidement les polynômes orthogonaux uniques de $P_n(x)$.

Proposition 8.6. Les polynômes orthogonaux associés à un poids w comme ci-dessus vérifient les relations de récurrence :

$$P_{n+1}(x) = (x - \alpha_n) P_n(x) - \beta_n P_{n-1}(x) \quad (\forall n \geq 1),$$

avec les constantes :

$$\begin{aligned} \alpha_n &:= \frac{\int_a^b x P_n(x)^2 w(x) dx}{\int_a^b P_n(x)^2 w(x) dx}, \\ \beta_n &:= \frac{\int_a^b P_n(x)^2 w(x) dx}{\int_a^b P_{n-1}(x)^2 w(x) dx}, \end{aligned}$$

Démonstration. Fixons $n \geq 1$. On sait que P_0, \dots, P_{n+1} forment une base de l'espace vectoriel \mathcal{P}_{n+1} des polynômes de degré $\leq n+1$. Comme les polynômes sont unitaires, la différence :

$$x P_n(x) - P_{n+1}(x)$$

n'a plus de monôme en x^{n+1} , donc elle appartient à \mathcal{P}_n , à savoir elle s'exprime sous la forme :

$$x P_n(x) - P_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^n c_k P_k(x),$$

avec certaines constantes $c_k \in \mathbb{C}$. On doit donc démontrer que :

$$\begin{aligned} c_n &= \alpha_n, \\ c_{n-1} &= \beta_n, \\ c_k &= 0 \quad \text{pour } k = n-2, \dots, 1, 0. \end{aligned}$$

À cette fin, pour un entier $l \leq n$ quelconque, multiplions l'équation précédente par $P_l(x) w(x)$, intégrons sur $]a, b[$:

$$\langle x P_n, P_l \rangle_w - \langle P_{n+1}, P_l \rangle_w = \sum_{k=0}^n c_k \underbrace{\langle P_k, P_l \rangle_w}_{= \delta_{k,l}}$$

ce qui, en tenant compte des orthogonalités, se simplifie agréablement comme :

$$\langle x P_n, P_l \rangle_w = c_l \underbrace{\langle P_l, P_l \rangle_w}_{\neq 0},$$

et se résout en :

$$c_l = \frac{\langle x P_n, P_l \rangle_w}{\langle P_l, P_l \rangle_w}.$$

Lorsque $l = n$, on obtient l'expression annoncée :

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{\langle x P_n, P_n \rangle_w}{\langle P_n, P_n \rangle_w} \\ &= \alpha_n. \end{aligned}$$

Ensuite, lorsque $l = n-1$, on obtient :

$$c_{n-1} = \frac{\langle x P_n, P_{n-1} \rangle_w}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle_w},$$

mais le numérateur n'est pas encore celui de la constante annoncée β_n . Qu'à cela ne tienne, l'astuce consiste à faire passer x de l'autre côté :

$$\langle x P_n, P_{n-1} \rangle_w = \langle P_n, x P_{n-1} \rangle_w,$$

puis à faire observer que :

$$P_n - x P_{n-1} \in \mathcal{P}_{n-1}$$

est de degré $\leq n-1$ par unitarité des polynômes, d'où l'orthogonalité :

$$\langle P_n, P_n - x P_{n-1} \rangle_w = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\langle P_n, x P_{n-1} \rangle_w = \langle P_n, P_n \rangle_w$$

et au final, on a bien transformé le numérateur de c_{n-1} pour faire voir qu'il est égal à celui annoncé de $\beta_n = c_{n-1}$.

Enfin et très facilement, lorsque $l \leq n - 2$, il est clair que le numérateur de :

$$c_l = \frac{\langle P_n, xP_l \rangle_w}{\langle P_l, P_l \rangle_w}$$

est nul, puisque $xP_l \in \mathcal{P}_{n-1}$, et puisque P_n est orthogonal à ce sous-espace. \square

L'intérêt principal des polynômes orthogonaux est leur application aux équations différentielles, en analyse numérique, en analyse complexe, en analyse harmonique, en probabilités. En se restreignant ici au cadre des espaces de Hilbert élémentaires, on trouve un résultat de meilleure approximation naturelle, conséquence directe d'un théorème déjà vu, et qui a le mérite de s'appliquer dans des contextes très variés.

Théorème 8.7. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{H}_w$ appartenant à l'espace L^2 à poids :*

$$\mathcal{H}_w = L^2(]a, b[, w),$$

il existe un unique polynôme $R_n(f)$ de degré $\leq n$ qui minimise la distance à f dans l'espace \mathcal{P}_n des polynômes de degré $\leq n$:

$$\|f - R_n(f)\|_w = \inf_{g \in \mathcal{P}_n} \|f - g\|_w.$$

Plus précisément, $R_n(f)$ est le projeté orthogonal de f sur \mathcal{P}_n . \square

Ce polynôme est appelé *polynôme de meilleure approximation quadratique de f à l'ordre n* .

Démonstration. Comme le système $(P_n)_{n=0}^\infty$ de polynômes précédemment construits n'est pas nécessairement orthonormé — il est juste orthogonal —, une légère précision concernant l'expression du projeté orthogonal $R_n(f)$ sera bienvenue.

Si on cherche en effet $R_n(f)$ sous la forme :

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^n \mu_k P_k,$$

alors les conditions :

$$0 = \langle R_n(f), P_0 \rangle_w,$$

.....

$$0 = \langle R_n(f), P_n \rangle_w,$$

permettent aisément (exercice) de déterminer les $(n + 1)$ constantes μ_0, \dots, μ_n , et l'on trouve :

$$R_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{\langle f, P_k \rangle_w}{\langle P_k, P_k \rangle_w} P_k(x),$$

ce qui conclut. \square

Maintenant, qu'en est-il de la *complétude* de ces espaces L^2 à fonction-poids w ? Le cas où l'intervalle d'intégration est borné :

$$-\infty < a < b < \infty$$

est très accessible, tandis que le cas non borné, non traité ici, est plus délicat.

Théorème 8.8. *Si l'intervalle ouvert $]a, b[$ est borné, alors pour un poids continu quelconque :*

$$w:]a, b[\longrightarrow]0, \infty[$$

dont tous les moments d'ordre $n \in \mathbb{N}$ sont finis :

$$\int_a^b |x|^n w(x) dx < \infty,$$

la suite unique de polynômes orthogonaux unitaires $(P_n)_{n=0}^\infty$ de degré n pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_w$ est toujours une base hilbertienne de \mathcal{H}_w .

Notons que la notion de base hilbertienne a un sens dans tout espace préhilbertien, sans en supposer la complétude.

Démonstration. Il s'agit d'établir que la famille des polygones orthogonaux $(P_n)_{n=0}^\infty$ est totale.

Supposons d'abord que $f \in \mathcal{C}^0([a, b])$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Notons $Q_n(f)$ le polynôme de meilleure approximation de degré $\leq n$ de f , pas pour la norme $\|\cdot\|_w$, mais pour la norme du sup :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([a, b])} := \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Le théorème de Weierstrass stipule que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - Q_n(f)\|_{\mathcal{C}^0([a, b])}.$$

Alors par l'inégalité évidente :

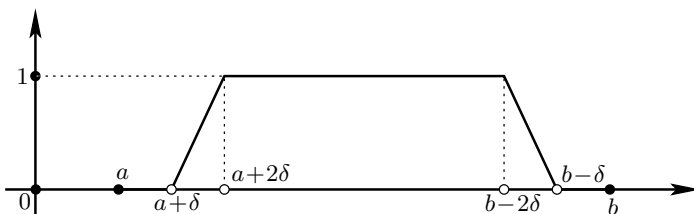
$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |f(x) - Q_n(f)(x)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} &\leq \max_{x \in [a, b]} |f(x) - Q_n(f)(x)| \left(\int_a^b w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f - Q_n(f)\|_{\mathcal{C}^0([a, b])} \underbrace{\left(\int_a^b w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{quantité finie}}, \end{aligned}$$

on déduit instantanément que l'on a aussi :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - Q_n(f)\|_w.$$

Dans le cas général, rappelons que f est seulement supposée continue sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. Soit alors pour $\delta > 0$ petit avec $\delta \ll b - a$, la fonction affine par morceaux

$$\chi_\delta(x): \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$$



dont on trouvera l'expression par formules (exercice). La différence :

$$f - f \chi_\delta$$

vaut 0 près de a et près de b . En utilisant :

$$0 \leq 1 - \chi_\delta \leq 1,$$

On estime alors :

$$\begin{aligned} \left(\|f - f \chi_\delta\|_w \right)^2 &= \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f(1 - \chi_\delta)(x)|^2 w(x) dx + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |f(1 - \chi_\delta)(x)|^2 w(x) dx \\ &\leq \int_{a+\delta}^{a+2\delta} |f|^2 w + \int_{b-2\delta}^{b-\delta} |f|^2 w, \end{aligned}$$

et ce dernier majorant tend vers 0 lorsque $\delta \rightarrow 0$, parce que :

$$\int_a^b |f|^2 w < \infty,$$

et parce que :

$$\text{mesure} \left([a + \delta, a + 2\delta] \cup [b - 2\delta, b - \delta] \right) = 2\delta \rightarrow 0;$$

Par conséquent :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0, \quad \|f - f \chi_\delta\|_w \leq \varepsilon.$$

Ensuite, avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, puisque la fonction $f \chi_\delta$ est continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$, la première partie de la démonstration assure qu'il existe un polynôme :

$$R \in \mathcal{P}_{N(\varepsilon)}$$

de degré $\leq N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$\|f \chi_\delta - R\|_w \leq \varepsilon.$$

Alors l'inégalité du triangle :

$$\begin{aligned} \|f - R\|_w &\leq \|f - f \chi_\delta\|_w + \|f \chi_\delta - R\|_w \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

montre que l'on peut toujours approximer f en norme $\|\cdot\|_w$ avec une précision arbitraire par des polynômes, ce qui veut dire que la famille :

$$(1, x, x^2, \dots) = (P_0, P_1, P_2, \dots)$$

est bien *totale* dans $(\mathcal{H}_w, \|\cdot\|_w)$. □

Toutefois, malgré la beauté du Théorème 8.8, lorsque l'intervalle $]a, b[$ n'est pas borné, la suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n=0}^\infty$ construits généralement n'est pas toujours totale.

Exemple 8.9. Sur l'intervalle $]0, \infty[$, soit le poids :

$$w(x) := x^{-\log x} = e^{-\log x \log x}.$$

Nous affirmons que la fonction non identiquement nulle :

$$f(x) := \sin(2\pi \log x)$$

est orthogonale à tous les monômes x^n avec $n \geq 0$ entier, donc à tous les P_n : elle n'est alors approximable à $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit près par aucune combinaison linéaire des P_n .

En effet, le changement de variable $y = \log x$, d'où $e^y dy = dx$, permet tout d'abord de vérifier que tous les moments d'ordre $n \geq 0$ de la fonction f :

$$\int_0^\infty x^n x^{-\log x} dx = \int_{-\infty}^\infty e^{ny} e^{-y^2} e^y dy < \infty$$

sont finis, grâce à la petitesse écrasante de e^{-y^2} lorsque $|y| \rightarrow \infty$.

Ensuite, ce même changement de variable permet de calculer comme suit le produit scalaire :

$$\begin{aligned} \langle x^n, f \rangle_w &= \int_{-\infty}^\infty e^{ny} \sin(2\pi y) e^{-y^2} e^y dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{(n+1)y-y^2} \sin(2\pi y) dy \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^{-(y+\frac{n+1}{2})^2 + \frac{(n+1)^2}{4}} \sin(2\pi y) dy \\ &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} \int_{-\infty}^\infty e^{-(y+\frac{n+1}{2})^2} \sin(2\pi y) dy \\ \text{[Changer } t := y + \frac{n+1}{2}] &= e^{\frac{(n+1)^2}{4}} (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^\infty e^{-t^2} \sin(2\pi t) dt \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour confirmer, par simple imparité de $t \mapsto \sin(2\pi t)$, toutes les orthogonalités affirmées.

En utilisant des résultats d'analyse complexe (non admis dans ce cours), on peut démontrer le résultat suivant.

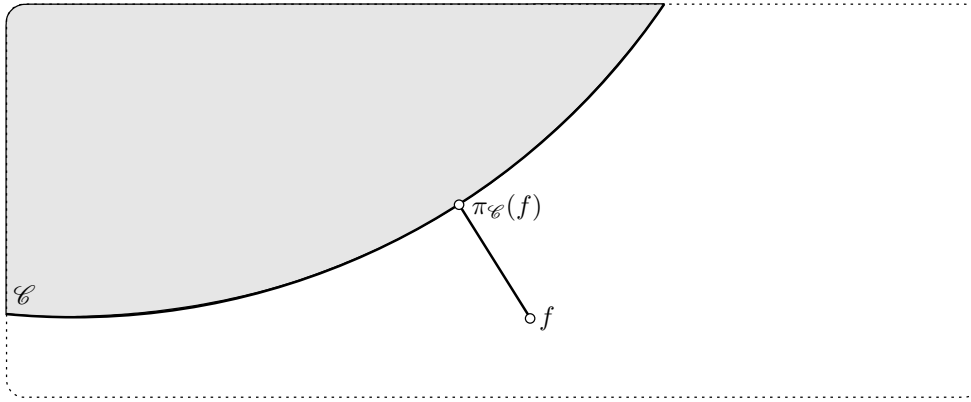
Théorème 8.10. *Sur un intervalle non borné $]a, b[\subset \mathbb{R}$, si la fonction-poids $w :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^+$ satisfait pour une certaine constante $\alpha > 0$:*

$$\int_a^b w(x) e^{\alpha|x|} dx < \infty,$$

alors la suite de polynômes orthogonaux $(P_n)_{n=0}^\infty$ construits dans la Proposition 8.4 constitue une base hilbertienne de l'espace préhilbertien \mathcal{H}_w , qui est alors un espace de Hilbert en tant que tel. \square

9. Projection sur un convexe fermé et théorème de représentation de Riesz

Le théorème suivant joue un rôle très important dans les applications aux espaces fonctionnels : tout comme le théorème du point fixe, il affirme l'existence d'un unique élément vérifiant une certaine (in)égalité. Il sert notamment à établir l'existence de solutions pour des équations ou inéquations fonctionnelles.



Définition 9.1. Un sous-ensemble $\mathcal{C} \subset E$ d'un \mathbb{R} - ou \mathbb{C} -espace vectoriel E est dit *convexe* si le segment fermé défini par deux points quelconques lui appartenant :

$$\forall c_1 \in \mathcal{C} \quad \forall c_2 \in \mathcal{C} \quad \forall 0 \leq t \leq 1 \quad t c_1 + (1 - t) c_2 \in \mathcal{C}$$

est encore entièrement contenu en lui.

Le théorème suivant, qui requiert réellement que \mathcal{C} soit *fermé*, sera principalement appliqué au cas où \mathcal{C} est un sous-espace vectoriel fermé.

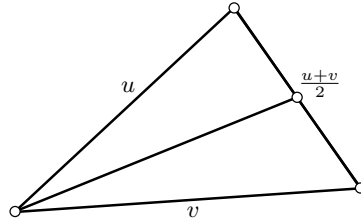
Théorème 9.2. [Projection orthogonale sur un convexe fermé] Soit H un espace de Hilbert quelconque (pas nécessairement séparable) et soit \mathcal{C} une partie convexe non vide de H qui est de plus fermée. Alors pour tout $f \in H$, il existe un unique point de \mathcal{C} , appelé projection de f sur \mathcal{C} et noté $\pi_{\mathcal{C}}(f)$, dont la distance à f soit minimale :

$$\|f - \pi_{\mathcal{C}}(f)\| = \min_{g \in \mathcal{C}} \|f - g\|.$$

Démonstration. En se souvenant du Théorème 3.11, ou en développant les carrés scalaires du membre de droite, le lecteur vérifiera facilement la *formule de la médiane* :

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2 \quad (u, v \in H),$$

qui remonte à Pythagore et à Euclide



Posons maintenant :

$$d := \inf \{ \|f - g\| : g \in \mathcal{C} \},$$

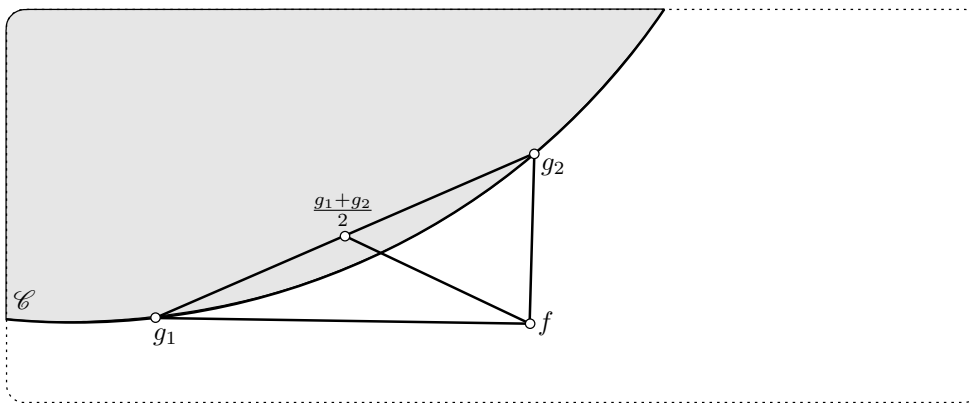
et établissons l'*unicité* de $\pi_{\mathcal{C}}(f)$ (l'existence viendra ensuite). Par contradiction, s'il existait deux éléments *distincts* g_1 et g_2 de \mathcal{C} réalisant cette borne inférieure :

$$d = \|f - g_1\| = \|f - g_2\|,$$

alors leur milieu $\frac{g_1+g_2}{2}$, qui appartiendrait aussi à l'ensemble convexe \mathcal{C} , satisfèrait, via l'identité de la médiane appliquée à $u := f - g_1$ et à $v := f - g_2$:

$$\begin{aligned} 2\left\|f - \frac{g_1+g_2}{2}\right\|^2 &= \|f - g_1\|^2 + \|f - g_2\|^2 - \frac{1}{2}\|g_2 - g_1\|^2 \\ &= 2d^2 - \frac{1}{2}\|g_2 - g_1\|^2 < 2d^2, \end{aligned}$$

et donc le vecteur médian $\frac{g_1+g_2}{2} \in \mathcal{C}$ satisfèrait $\|f - \frac{g_1+g_2}{2}\| < d$, ce qui contredirait manifestement la définition de l'infimum d .



Géométriquement parlant, nous avons seulement utilisé le fait que, dans un triangle ABC isocèle en A , la hauteur AH issue de A est strictement inférieure à la longueur isocèle $AB = AC$.

À présent, établissons l'existence. Par définition de toute borne inférieure telle que d , il existe une suite $(g_k)_{k=1}^\infty$ d'éléments de \mathcal{C} telle que $\|f - g_k\|$ tende vers d lorsque k tend vers ∞ . Alors nous allons voir que la convexité de \mathcal{C} produit une espèce de « miracle » qui impose à toute telle suite d'être automatiquement de Cauchy.

En effet, si l'on introduit à nouveau le milieu $\frac{g_{k_1}+g_{k_2}}{2}$ entre deux éléments quelconques g_{k_1} et g_{k_2} d'une telle suite, on peut à nouveau appliquer l'identité de la médiane à $u := f - g_{k_1}$ et à $v := f - g_{k_2}$:

$$\frac{1}{2}\|g_{k_1} - g_{k_2}\|^2 = \|f - g_{k_1}\|^2 + \|f - g_{k_2}\|^2 - 2\left\|\frac{g_{k_1}+g_{k_2}}{2} - f\right\|^2.$$

Mais puisque ce milieu $\frac{g_{k_1}+g_{k_2}}{2}$ appartient encore au convexe \mathcal{C} , sa distance $\left\|\frac{g_{k_1}+g_{k_2}}{2} - f\right\|$ à f est automatiquement $\geq d$, donc on en déduit une inégalité :

$$\frac{1}{2}\|g_{k_1} - g_{k_2}\|^2 \leq \|f - g_{k_1}\|^2 + \|f - g_{k_2}\|^2 - 2d^2$$

qui montre que $\|g_{k_1} - g_{k_2}\|$ peut être rendu arbitrairement petit, pourvu que $k_1, k_2 \geq K$ soient assez grands, puisque l'on a par hypothèse :

$$\|f - g_{k_1}\|^2 \xrightarrow[k_1 \rightarrow \infty]{} d^2 \quad \text{et} \quad \|f - g_{k_2}\|^2 \xrightarrow[k_2 \rightarrow \infty]{} d^2.$$

Ainsi, la suite $(g_k)_{k=1}^\infty$ est bien de Cauchy. Mais l'espace de Hilbert H est complet, donc il existe un unique élément $g_\infty \in H$ qui est la limite des g_k lorsque k tend vers l'infini. Et comme \mathcal{C} a été supposé fermé, cette limite g_∞ appartient automatiquement à \mathcal{C} , ce qu'il fallait démontrer. \square

Théorème 9.3. [Hyperplan de support] *Sous la même hypothèse que H est un espace de Hilbert quelconque (pas forcément séparable) et que \mathcal{C} est une partie convexe fermée non vide de H , le projeté $\pi_{\mathcal{C}}(f)$ sur \mathcal{C} d'un élément quelconque $f \in H$ vérifie les inégalités :*

$$\operatorname{Re} \langle f - \pi_{\mathcal{C}}(f), h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle \leq 0, \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{C}.$$

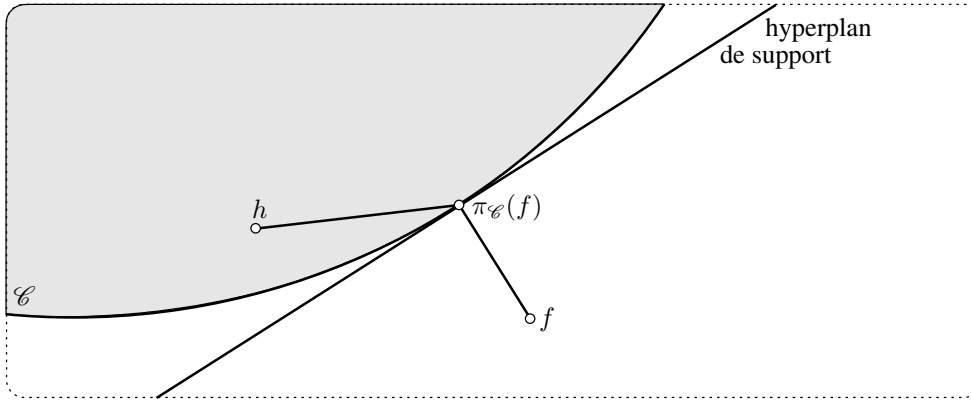
Réciproquement, si $g \in \mathcal{C}$ est un point du convexe fermé qui vérifie les mêmes inégalités :

$$\operatorname{Re} \langle f - g, h - g \rangle \leq 0 \quad \text{pour tout } h \in \mathcal{C},$$

alors nécessairement g est unique et n'est autre que le projeté de f :

$$g = \pi_{\mathcal{C}}(f).$$

Lorsque l'espace de Hilbert H est défini sur \mathbb{R} , on enlève les parties réelles 'Re'.



Géométriquement parlant et si on l'interprète dans un espace hilbertien réel, cette dernière caractérisation exprime que l'angle entre le vecteur $f - \pi_{\mathcal{C}}(f)$ et tout autre vecteur $h - \pi_{\mathcal{C}}(f)$ d'extrémité un autre élément quelconque $h \in \mathcal{C}$ est toujours $\geq \frac{\pi}{2}$.

Autrement dit, tous les points h du convexe fermé \mathcal{C} se situent dans le demi-espace fermé :

$$\{h \in H : \operatorname{Re} \langle f - \pi_{\mathcal{C}}(f), h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle \leq 0\}$$

dont le bord, défini par l'équation :

$$\operatorname{Re} \langle f - \pi_{\mathcal{C}}(f), h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle = 0,$$

est lui-même un *hyperplan* réel passant par le point projeté $\pi_{\mathcal{C}}(f) \in \mathcal{C}$, hyperplan qui est orthogonal au vecteur $f - \pi_{\mathcal{C}}(f)$. Ainsi, le projeté sur le convexe fermé \mathcal{C} s'identifie à un simple projeté sur cet hyperplan réel. On nomme parfois « *hyperplan de support* » tout hyperplan qui garantit qu'un objet géométrique se situe entièrement dans un, et dans un seul des deux côtés (fermés) qu'il définit.

Démonstration. Soit donc $h \in \mathcal{C}$ quelconque. Pour tout réel t avec $0 \leq t \leq 1$, le point :

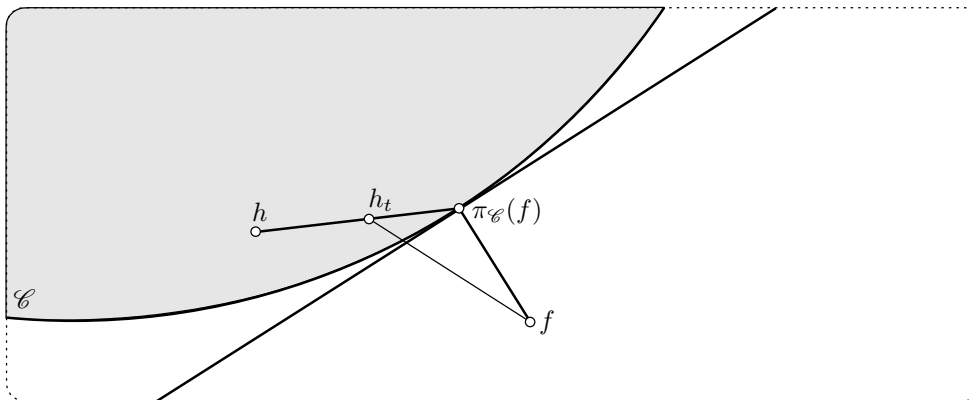
$$h_t := \pi_{\mathcal{C}}(f) + t(h - \pi_{\mathcal{C}}(f))$$

appartient aussi au convexe fermé \mathcal{C} . On a donc une inégalité automatique que l'on peut développer :

$$\begin{aligned} \|\pi_{\mathcal{C}}(f) - f\|^2 &\leq \|h_t - f\|^2 \\ &= \|\pi_{\mathcal{C}}(f) - f + t(h - \pi_{\mathcal{C}}(f))\|^2 \\ &= \|\pi_{\mathcal{C}}(f) - f\|^2 + 2t \operatorname{Re} \langle \pi_{\mathcal{C}}(f) - f, h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle + t^2 \|h - \pi_{\mathcal{C}}(f)\|^2, \end{aligned}$$

et après simplification évidente, cette inégalité se réduit à :

$$0 \leq 2t \operatorname{Re} \langle \pi_{\mathcal{C}}(f) - f, h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle + t^2 \|h - \pi_{\mathcal{C}}(f)\|^2.$$



Avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < 0$, nous savons que $at + bt^2 \sim at < 0$ est négatif pour $0 < t \leq \varepsilon$ petit. En faisant aussi $0 < t \leq \varepsilon$ ci-dessus, on déduit donc que le coefficient de t ci-dessus ne peut pas être < 0 , donc est ≥ 0 , ce qui établit l'inégalité voulue (noter le changement de signe) :

$$\operatorname{Re} \langle f - \pi_{\mathcal{C}}(f), h - \pi_{\mathcal{C}}(f) \rangle \leq 0,$$

valable pour tout $h \in \mathcal{C}$.

Il reste à établir l'unicité d'un élément $g \in \mathcal{C}$ satisfaisant :

$$\operatorname{Re} \langle f - g, h - g \rangle \leq 0,$$

pour tout $h \in \mathcal{C}$. Or si g satisfait de telles inégalités, nous pouvons estimer la distance à f d'un élément quelconque $h \in \mathcal{C}$ en y insérant $-g + g$:

$$\begin{aligned} \|h - f\|^2 &= \|h - g + g - f\|^2 = \underbrace{\|h - g\|^2}_{\geq 0} + \underbrace{2\operatorname{Re} \langle h - g, g - f \rangle}_{\geq 0} + \|g - f\|^2 \\ &\geq \|g - f\|^2, \end{aligned}$$

et déduire qu'elle est toujours supérieure ou égale à la distance de f à g . Or d'après le Théorème 9.2 qui précède, un tel élément g existe, est unique, et n'est autre que $g = \pi_{\mathcal{C}}(f)$, comme annoncé. \square

Définition 9.4. [Orthogonal à une partie quelconque] Dans un espace de Hilbert H quelconque, l'orthogonal d'un sous-ensemble $B \subset H$ arbitraire est défini en toute généralité comme étant constitué des vecteurs qui sont orthogonaux à *tous* les éléments de B :

$$B^\perp := \{h \in H : \langle h, b \rangle = 0 \ \forall b \in B\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de H (exercice). On notera que $B_1 \subset B_2$ implique $B_1^\perp \supset B_2^\perp$.

Lemme 9.5. [Trivial mais important] Soit B une partie arbitraire d'un espace de Hilbert H quelconque. Alors son orthogonal :

$$B^\perp = \{h \in H : \langle h, b \rangle = 0 \quad \forall b \in B\}$$

est un sous-espace vectoriel de H qui est toujours fermé dans H .

Démonstration. En effet, si $(h_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de Cauchy quelconque dans B^\perp satisfaisant donc $\langle h_k, b \rangle = 0$, pour tout b fixé, l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure (exercice direct laissé au lecteur) que, si l'on note h_∞ son unique limite dans H (qui est complet), on a encore $\langle h_\infty, b \rangle = 0$, ce qui montre bien que $h_\infty \in B^\perp$. \square

Proposition 9.6. [Supplémentaire orthogonal] Soient H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel de H qui est fermé. Alors son orthogonal :

$$F^\perp = \{g \in H : \langle f, g \rangle = 0 \quad \forall f \in F\}.$$

est un sous-espace vectoriel de H qui est lui aussi fermé, appelé supplémentaire orthogonal de F . Surtout, tout élément $h \in H$ se décompose de manière unique sous la forme :

$$h = f + g \quad \text{avec} \quad f \in F \quad \text{et} \quad g \in F^\perp.$$

En outre, les éléments f et g de cette décomposition sont orthogonaux entre eux et sont les projections (orthogonales) de h sur les deux ensembles convexes fermés F et sur F^\perp , respectivement, à savoir l'on peut écrire :

$$H = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp, \quad F \cap F^\perp = \{0\}.$$

Démonstration. Observons que tout sous-espace vectoriel fermé de H est, en particulier, un sous-ensemble convexe fermé de H .

Soit donc $h \in H$ et notons comme précédemment $\pi_F(h)$ sa projection sur le fermé convexe F (cette projection existe grâce au Théorème 9.2). Pour tout élément $f' \in F$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$, le point $\pi_F(h) + \lambda f'$ appartient à F et on a donc d'après le Théorème 9.3 ci-dessus :

$$\operatorname{Re} \langle h - \pi_F(h), \pi_F(h) + \lambda f' - \pi_F(h) \rangle \leq 0,$$

à savoir :

$$\operatorname{Re} \langle h - \pi_F(h), \lambda f' \rangle \leq 0.$$

Or un nombre complexe z qui vérifie $\operatorname{Re}(\bar{\lambda} z) \leq 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est nécessairement nul (exercice élémentaire). Donc il vient :

$$\langle h - \pi_F(h), f' \rangle = 0,$$

et ce, pour tout $f' \in F$. Ceci montre que $h - \pi_F(h)$ appartient à F^\perp et prouve donc l'existence de la décomposition :

$$h = \underbrace{\pi_F(h)}_{=: f \in F} + \underbrace{h - \pi_F(h)}_{=: g \in F^\perp}.$$

Quant à l'unicité, s'il existait une autre décomposition $h = f' + g'$ du même type avec $f' \in F$ et $g' \in F^\perp$, le vecteur $u := f' - f = g' - g$ appartiendrait à la fois à F et à F^\perp . Or si $u \in F$ appartient aussi à F^\perp , on doit avoir $\langle u, u \rangle = 0$, donc $u = 0$, et enfin $f' = f$ et $g' = g$. La preuve est terminée. \square

Corollaire 9.7. *Comme à l'instant, soit H un espace de Hilbert quelconque et soit F un sous-espace vectoriel de H qui est fermé. Alors les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $F = H$;
- (ii) $F^\perp = \{0\}$.

Démonstration. Cette équivalence découle par simple logique (exercice mental) de la décomposition orthogonale qui précède $H = F \oplus F^\perp$ et de son unicité. \square

Lemme 9.8. *Soit B une partie quelconque d'un espace de Hilbert H . Alors l'orthogonal de B coïncide avec l'orthogonal de son adhérence \overline{B} :*

$$B^\perp = \overline{B}^\perp.$$

Démonstration. En effet, l'inclusion $B \subset \overline{B}$ donne immédiatement par retour à la définition :

$$\overline{B}^\perp \subset B^\perp.$$

Pour établir l'inclusion inverse $B^\perp \subset \overline{B}^\perp$, étant donné un vecteur quelconque $h \in B^\perp$, à savoir $\langle h, b \rangle = 0$ pour tout $b \in B$, on doit démontrer que $h \in \overline{B}^\perp$, à savoir que $\langle h, \bar{b} \rangle = 0$ pour tout $\bar{b} \in \overline{B}$. Si donc $(b_k)_{k=1}^\infty$ est une suite de Cauchy d'éléments de B qui converge vers un élément arbitraire $\bar{b} \in \overline{B}$ dans H complet :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \geq 1 \quad (k \geq K \implies \|\bar{b} - b_k\| \leq \varepsilon),$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz (à nouveau elle !) nous assure que le nombre réel positif :

$$\begin{aligned} |\langle h, \bar{b} \rangle| &= |\langle h, \bar{b} \rangle - \langle h, b_k \rangle| \\ &\leq \|h\| \|\bar{b} - b_k\| \\ &\leq \|h\| \varepsilon \end{aligned}$$

peut être rendu arbitrairement petit, donc h est bien orthogonal aussi à tous les éléments $\bar{b} \in \overline{B}$. \square

Corollaire 9.9. [Critère de totalité] *Soit H un espace de Hilbert quelconque et soit $A \subset H$ une partie quelconque. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est totale ;
- (ii) l'espace vectoriel $\text{Vect}_{\text{fini}}(A)$ constitué des combinaisons linéaires finies d'éléments de A à coefficients complexes possède une adhérence :

$$\overline{\text{Vect}_{\text{fini}}(A)} = H$$

égale à tout l'espace de Hilbert ambiant ;

- (iii) l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de A se réduit au vecteur nul, à savoir :

$$\{0\} = A^\perp = \{h \in H : \langle h, a \rangle = 0 \forall a \in A\}.$$

Démonstration. L'équivalence entre (i) et (ii) est une reformulation de la notion de totalité telle qu'elle a été définie au début de ce cours sur les espaces de Hilbert (exercice mental).

Montrons l'équivalence entre (ii) et (iii). Par linéarité du produit scalaire, il est clair que l'orthogonal de A coïncide avec l'orthogonal de ses combinaisons linéaires finies :

$$A^\perp = [\text{Vect}_{\text{fini}}(A)]^\perp.$$

Mais nous venons de voir que prendre l'orthogonal d'une partie B quelconque revient à prendre l'orthogonal de sa fermeture \overline{B} , donc :

$$A^\perp = [\text{Vect}_{\text{fini}}(A)]^\perp = [\overline{\text{Vect}_{\text{fini}}(A)}]^\perp.$$

Le Corollaire 9.7 vu il y a quelques instants appliqué à l'espace vectoriel fermé :

$$F := \overline{\text{Vect}_{\text{fini}}(A)}$$

disait alors que $F = H$ si et seulement si $F^\perp = \{0\}$, ce qui nous donne l'équivalence désirée. \square

Théorème 9.10. [Théorème de représentation de Riesz] Soit H un espace de Hilbert quelconque. À tout vecteur fixé $g_0 \in H$, on peut faire correspondre la forme linéaire continue :

$$\begin{aligned} L_{g_0} : f &\longmapsto \langle f, g_0 \rangle \\ H &\longrightarrow \mathbb{C} \end{aligned}$$

« produit scalaire avec g_0 ».

Réciproquement, étant donné une forme linéaire continue arbitraire L sur H , il existe un et un seul vecteur $g_0 \in H$ tel que l'on ait :

$$L = L_{g_0} = \langle \cdot, g_0 \rangle.$$

Démonstration. Vérifions tout d'abord que L_{g_0} est une forme linéaire continue. Pour tout $f \in H$, Cauchy-Schwarz donne :

$$|L_{g_0}(f)| = |\langle f, g_0 \rangle| \leq \underbrace{\|g_0\|_H}_{\text{constante}} \|f\|_H.$$

Ceci prouve que L_{g_0} est continue, et de plus, que sa norme d'opérateur satisfait :

$$\|L_{g_0}\| = \sup_{f \neq 0} \frac{|L_{g_0}(f)|}{\|f\|_H} \leq \|g_0\|_H.$$

Qui plus est, en considérant $L_{g_0}(g_0)$, on constate facilement que $\|L_{g_0}\| = \|g_0\|_H$.

Soit maintenant L une forme linéaire continue sur H non identiquement nulle. Le sous-espace vectoriel noyau :

$$F := L^{-1}(0)$$

est fermé (puisque L est continue) et distinct de H (puisque $L \neq 0$). Grâce au Corollaire 9.7, l'orthogonal F^\perp n'est donc pas réduit à $\{0\}$ et il existe par conséquent un élément non nul :

$$g \in F^\perp \setminus \{0\}.$$

Cet élément n'appartient alors pas à F , donc le nombre complexe :

$$\lambda := L(g)$$

est non nul.

Ensuite, pour tout $f \in H$ on peut poser :

$$f = \frac{L(f)}{L(g)} g + \left(f - \frac{L(f)}{L(g)} g \right) =: f_1 + f_2.$$

On remarque que le second terme f_2 , qui vérifie $L(f_2) = 0$, appartient à $F = L^{-1}(0)$ tandis que f_1 , qui est un multiple de g , appartient à F^\perp . En effectuant le produit scalaire avec g , on obtient donc :

$$\langle f, g \rangle = \langle f_1, g \rangle + \langle f_2, g \rangle = \frac{L(f)}{L(g)} \|g\|^2 + 0.$$

Il suffit maintenant de poser $g_0 := \frac{\overline{L(g)}}{\|g\|^2} g$ pour obtenir $L(f) = \langle f, g_0 \rangle$ quel que soit f . Cela montre que L est égale à L_{g_0} .

Enfin, l'unicité (facile) est laissée en exercice à tout(e) étudiant(e) consciencieux(se) qui souhaite réussir à l'examen. \square

Pour terminer ce chapitre, discutons brièvement les notions d'opérateurs linéaires et de leurs adjoints. Soient H_1 et H_2 deux \mathbb{C} -espaces de Hilbert.

Définition 9.11. Une application $T: H_1 \longrightarrow H_2$ est appelée un *opérateur linéaire*, ou une *transformation linéaire*, lorsqu'elle est \mathbb{C} -linéaire :

$$T(\lambda f + \mu g) = \lambda T(f) + \mu T(g) \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{C}, \forall f, g \in H_1),$$

d'où $T(0) = 0$.

Définition 9.12. On dit qu'un opérateur linéaire $T: H_1 \longrightarrow H_2$ est *borné* lorsqu'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$\|T(f)\|_{H_2} \leq C \|f\|_{H_1} \quad (\forall f \in H_1).$$

La *norme d'opérateur* de T , l'infimum de telles constantes C , vaut alors :

$$\|T\| := \sup_{\|f\|_{H_1} \leq 1} \|T(f)\|_{H_2}.$$

On a alors une majoration fondamentale :

$$\|T(f)\|_{H_2} \leq \|T\| \cdot \|f\|_{H_1} \quad (\forall f \in H_1).$$

Avec $H_1 = H_2 =: H$, un exemple trivial est l'opérateur identité Id de norme $\|\text{Id}\| = 1$.

Lemme 9.13. La norme d'un opérateur linéaire borné $T: H_1 \longrightarrow H_2$ vaut aussi :

$$\|T\| = \sup \{ |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \}.$$

Démonstration. Si $\|T\| \leq C$ pour une constante $0 \leq C < \infty$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne, pour tout $\|f\|_{H_1} \leq 1$ et tout $\|g\|_{H_2} \leq 1$:

$$|\langle T(f), g \rangle_{H_2}| \leq \|T(f)\|_{H_2} \cdot \|g\|_{H_2} \leq C \|f\|_{H_1} \|g\|_{H_2} \leq C,$$

et ainsi, en faisant tendre $\|T\| \leftarrow C$:

$$\sup \{ |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \} \leq \|T\|.$$

Pour l'inégalité inverse, faisons l'hypothèse, pour une constante $0 \leq C < \infty$, que :

$$\sup \{ |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \} \leq C,$$

et montrons que $\|T(f)\|_{H_2} \leq C \|f\|_{H_1}$ pour tout $f \in H_1$, d'où découlera $\|T\| \leq C$, ce qui donnera bien en faisant tendre C vers ce supremum :

$$\|T\| \leq \sup \{ |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \}.$$

Lorsque $f = 0$ ou $T(f) = 0$, il n'y a rien à faire.

Supposons donc que $f \neq 0$ et que $T(f) \neq 0$, introduisons alors les deux éléments de norme 1 :

$$f' := \frac{f}{\|f\|_{H_1}} \quad \text{et} \quad g' := \frac{T(f)}{\|T(f)\|_{H_2}},$$

et appliquons-leur l'hypothèse :

$$\begin{aligned} C &\geq |\langle T(f'), g' \rangle_{H_2}| \\ &= \frac{|\langle T(f), T(f) \rangle_{H_2}|}{\|f\|_{H_1} \|T(f)\|_{H_2}}, \end{aligned}$$

ce qui donne $\|T(f)\|_{H_2} \leq C \|f\|_{H_1}$, conclusion ! \square

Définition 9.14. Une transformation linéaire $T: H_1 \rightarrow H_2$ entre espaces de Hilbert est dite *continue* si, pour toute suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ d'éléments $f_n \in H_1$ qui converge vers un élément $f_\infty \in H_1$, on a aussi convergence dans H_2 :

$$T(f_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} T(f_\infty).$$

Proposition 9.15. On a équivalence entre :

$$\left(T: H_1 \rightarrow H_2 \text{ est borné} \right) \iff \left(T: H_1 \rightarrow H_2 \text{ est continu} \right).$$

Démonstration. Si T est borné, et si $f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f_\infty$, il est clair que :

$$\|T(f_n) - T(f_\infty)\|_{H_2} \leq \|T\| \cdot \|f_n - f_\infty\|_{H_1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc T est continu.

Réciproquement, si T est continu, supposons par l'absurde qu'il ne soit pas borné, c'est-à-dire que pour tout $n \geq 1$, il existe $f_n \in H_1 \setminus \{0\}$ avec :

$$\|T(f_n)\|_{H_2} \geq n \|f_n\|_{H_1}.$$

Alors le vecteur :

$$f'_n := \frac{f_n}{n \|f_n\|_{H_1}}$$

est de norme $\|f'_n\|_{H_1} = \frac{1}{n}$, donc $f'_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, et comme T est continu (en 0), on doit aussi avoir $T(f'_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, ce qui n'est manifestement pas cohérent avec :

$$\|T(f'_n)\|_{H_2} = \frac{\|T(f_n)\|_{H_2}}{n \|f_n\|_{H_1}} \geq 1. \quad \square$$

L'application la plus immédiate du Théorème 9.10 de représentation de Riesz est la construction, pour tout opérateur linéaire borné $T: H_1 \rightarrow H_2$, d'un adjoint $H_1 \leftarrow H_2: T^*$.

Théorème 9.16. [Adjoint] Si $T: H_1 \rightarrow H_2$ est un opérateur linéaire borné (continu) entre espaces de Hilbert, il existe un unique opérateur linéaire borné (continu) :

$$H_1 \leftarrow H_2: T^*,$$

appelé l'adjoint de T , satisfaisant :

$$\langle T(f), g \rangle_{H_2} = \langle f, T^*(g) \rangle_{H_1} \quad (\forall f \in H_1, \forall g \in H_2).$$

De plus :

$$(1) \|T^*\| = \|T\|;$$

$$(2) (T^*)^* = T.$$

Démonstration. Pour montrer (simultanément) l'existence et l'unicité de T^* , observons que pour tout $g \in H_2$ fixé, l'application linéaire :

$$\begin{aligned} \Lambda_g: H_1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto \langle T(f), g \rangle_{H_2} \end{aligned}$$

est bornée, parce que, comme T est borné, on peut estimer :

$$\begin{aligned} |\Lambda_g(f)| &= |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| \\ \text{[Cauchy-Schwarz]} &\leq \|T(f)\|_{H_2} \cdot \|g\|_{H_2} \\ &\leq \|T\| \cdot \|g\|_{H_2} \cdot \|f\|_{H_1} \\ &= \text{constante} \cdot \|f\|_{H_1}. \end{aligned}$$

Le Théorème 9.10 (magique !) de représentation de Riesz fournit alors un unique élément $h \in H_2$ tel que $\Lambda_g(\cdot)$ coïncide avec le produit scalaire avec h :

$$\Lambda_g(f) = \langle f, h \rangle_{H_1} \quad (\forall f \in H_1).$$

On se convainc aisément (exercice) que la dépendance de h vis-à-vis de g est alors \mathbb{C} -linéaire, ce qui justifie de noter $h = T^*(g)$, avec un certain opérateur adjoint T^* qui est \mathbb{C} -linéaire et qui satisfait bien au final l'identité fondamentale :

$$\langle T(f), g \rangle_{H_2} = \langle f, T^*(g) \rangle_{H_1} \quad (\forall f \in H_1, \forall g \in H_2),$$

qu'il est avisé de lire en voyant T « passer de l'autre côté du produit scalaire en cueillant une étoile ».

La propriété (1) s'obtient instantanément comme suit grâce au Lemme 9.13 :

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup \{ |\langle T(f), g \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle f, T^*(g) \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \} \\ \text{[Conjuguer]} &= \sup \{ |\langle T^*(g), f \rangle_{H_2}| : \|f\|_{H_1} \leq 1, \|g\|_{H_2} \leq 1 \} \\ &= \|T^*\|. \end{aligned}$$

Enfin pour la propriété (2), le bi-adjoint $(T^*)^*$ de T , i.e. l'adjoint de T^* , étant défini par :

$$\langle T^*(g), h \rangle_{H_1} = \langle g, (T^*)^*(h) \rangle_{H_2} \quad (\forall g \in H_2, \forall h \in H_1),$$

ou, de manière équivalente après une simple conjugaison complexe, par :

$$\langle h, T^*(g) \rangle_{H_1} = \langle (T^*)^*(h), g \rangle_{H_2} \quad (\forall g \in H_2, \forall h \in H_1),$$

une comparaison avec les identités qui définissent T^* donne :

$$\langle T(h), g \rangle_{H_2} = \langle (T^*)^*(h), g \rangle_{H_2} \quad (\forall g \in H_2, \forall h \in H_1),$$

ce qui force $T(h) = (T^*)^*(h)$, d'où comme annoncé $T = (T^*)^*$. \square

Une *identité de polarisation*, que l'on peut vérifier par un calcul direct, va s'avérer utile dans un instant :

$$\begin{aligned} 4 \langle T(f), g \rangle &= \langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle + \\ &\quad + i \langle T(f+ig), f+ig \rangle - i \langle T(f-ig), f-ig \rangle. \end{aligned}$$

Définition 9.17. Un opérateur linéaire $T: H \rightarrow H$ d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert H à valeurs dans lui-même est dit *auto-adjoint* lorsque :

$$T^* = T.$$

Proposition 9.18. La norme d'opérateur $\|T\|$ d'un opérateur linéaire $T: H \rightarrow H$ auto-adjoint $T^* = T$ peut être calculée comme :

$$\|T\| = \sup \{ |\langle T(f), f \rangle| : \|f\| = 1 \}.$$

Ce résultat doit être comparé à la formule du Lemme 9.13, valable pour tout opérateur linéaire.

Démonstration. D'après ce lemme, on a tout d'abord une inégalité dans un sens facile :

$$\begin{aligned} N &:= \sup \{ |\langle T(f), f \rangle| : \|f\|_H = 1 \} \\ &\leq \sup \{ |\langle T(f), g \rangle| : \|f\|_H = 1, \|g\|_H = 1 \} \\ &= \|T\|. \end{aligned}$$

Pour l'inégalité inverse $N \geq \|T\|$ — qui requiert plus de travail —, observons tout d'abord que pour tout vecteur $h \in H$, grâce à $T^* = T$, la quantité :

$$\langle T(h), h \rangle = \langle h, T^*(h) \rangle = \langle h, T(h) \rangle = \overline{\langle T(h), h \rangle}$$

est *réelle*, et donc lorsqu'on prend la partie réelle dans l'identité de polarisation ci-dessus :

$$\operatorname{Re} [\langle T(f), g \rangle] = \frac{1}{4} [\langle T(f+g), f+g \rangle - \langle T(f-g), f-g \rangle] + 0 + 0,$$

deux termes s'évanouissent pour notre plus grand bien.

Car ensuite, l'inégalité $|\langle T(h), h \rangle| \leq N \|h\|^2$ découlant de la définition de N donne :

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re} [\langle T(f), g \rangle]| &\leq \frac{N}{4} [\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2] \\ \text{[Identité du parallélogramme]} &= \frac{N}{2} [\|f\|^2 + \|g\|^2]. \end{aligned}$$

En supposant $\|f\| \leq 1$ et $\|g\| \leq 1$, nous obtenons :

$$|\operatorname{Re} \langle T(f), g \rangle| \leq N.$$

Enfin, pour nous débarrasser de cette partie réelle, il suffit de remplacer g par $e^{i\theta}g$ avec θ égal à l'argument de $\langle T(f), g \rangle$, et nous obtenons :

$$|\langle T(f), g \rangle| \leq N \quad (\forall \|f\|=1, \forall \|g\|=1),$$

donc en prenant le supremum comme dans Lemme 9.13, l'inégalité inverse visée $\|T\| \leq N$ arrive — et clôt ce chapitre ! \square

10. Exercices

Exercice 1. Sur le \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension finie 2 :

$$\mathbb{Q}[\sqrt{2}] := \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\},$$

on introduit les deux normes :

$$\|a + b\sqrt{2}\|_1 := |a| + |b| \quad \text{et} \quad \|a + b\sqrt{2}\|_2 := |a + b\sqrt{2}|,$$

et on se propose d'établir qu'elles ne sont *pas* équivalentes.

(a) Commencer par vérifier que $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ est bien un \mathbb{Q} -espace vectoriel de dimension 2, et que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont bien des normes.

(b) Trouver une constante $0 < c < \infty$ assurant que :

$$c\|z\|_2 \leq \|z\|_1 \quad (\forall z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]).$$

(c) Pour $n \geq 1$ entier, montrer que les deux éléments :

$$x_n := (1 - \sqrt{2})^n \quad \text{et} \quad y_n := (1 + \sqrt{2})^n$$

appartiennent à $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

(d) Montrer qu'il n'existe pas de constante $0 < C < \infty$ telle que :

$$\|z\|_1 \leq C\|z\|_2 \quad (\forall z \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]).$$

Indication: Si $x_n = a_n - b_n\sqrt{2}$ et si $y_n = a_n + b_n\sqrt{2}$, avec a_n, b_n entiers, montrer que $a_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$, puis, réaliser que $\|x_n\|_1 \rightarrow \infty$ tandis que $\|x_n\|_2 \rightarrow 0$.

Exercice 2. Montrer qu'une forme sesquilinéaire quelconque φ sur un espace vectoriel complexe E est hermitienne si et seulement si l'on a $\varphi(z, z) \in \mathbb{R}$ pour tout $z \in E$. Indication: Considérer $\varphi(z, w) + \varphi(w, z)$ et aussi $\varphi(\sqrt{-1}z, w) + \varphi(w, \sqrt{-1}z)$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe aucun produit scalaire dans \mathbb{R}^2 dont la norme associée serait :

$$\|(x, y)\| := \max(|x|, |y|).$$

Exercice 4. Soit un intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Montrer que l'application :

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

définit un produit scalaire hermitien sur l'espace :

$$\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$$

des fonctions continues sur $[a, b]$ à valeurs complexes.

(b) Cet espace $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ est-il complet pour la norme associée $(\int_a^b |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$?

Exercice 5. (a) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé sur \mathbb{C} . Démontrer que sa norme $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire hermitien si et seulement si elle satisfait l'identité du parallélogramme :

$$\forall (z, w) \in E^2 \quad \|z + w\|^2 + \|z - w\|^2 = 2(\|z\|^2 + \|w\|^2),$$

et que dans ce cas, le produit scalaire hermitien qui définit $\|\cdot\|$ est nécessairement de la forme suivante :

$$\langle z, w \rangle = \frac{1}{4} (\|z + w\|^2 - \|z - w\|^2 + \sqrt{-1}\|z + \sqrt{-1}w\|^2 - \sqrt{-1}\|z - \sqrt{-1}w\|^2).$$

Indication: Pour démontrer que la condition est suffisante, on pourra considérer l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ainsi définie et démontrer successivement qu'elle satisfait les cinq propriétés suivantes :

- pour tout $z \in E$, on a $\langle z, z \rangle = \|z\|^2$;
- pour tout $(z, w) \in E^2$, on a $\langle z, w \rangle = \overline{\langle w, z \rangle}$;
- pour tout $(z, w, t) \in E^3$, on a $\langle z + w, t \rangle = 2\langle z, t/2 \rangle + 2\langle w, t/2 \rangle$;
- pour tout $(z, w, t) \in E^3$, on a $\langle z + w, t \rangle = \langle z, t \rangle + \langle w, t \rangle$;
- pour tout $(z, w) \in E^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\langle \lambda z, w \rangle = \lambda \langle z, w \rangle$.

(b) En déduire que pour tout $p \in [1, \infty[$ tel que $p \neq 2$, il n'existe aucun produit scalaire hermitien sur l'espace $L^p([0, 1], dx)$ des fonctions $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de p -ème puissance intégrable dont dériverait sa norme :

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Indication: On pourra examiner ce que donne l'identité du parallélogramme appliquée aux deux fonctions :

$$f: x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, 1/2] \\ 0 & \text{si } x \in]1/2, 1] \end{cases} \quad \text{et} \quad g := 1 - f.$$

Exercice 6. Soient E et F deux espaces vectoriels réels munis chacun d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$. Soit $f: E \rightarrow F$ une application avec $f(0_E) = 0_F$ telle que :

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|x - y\|_E,$$

pour tous $x, y \in E$. Montrer que f est nécessairement linéaire. **Indication:** Montrer tout d'abord que f préserve le produit scalaire.

Exercice 7. Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels réels (ou complexes) chacun munis d'un produit scalaire (hermitien) qui préserve la norme. Vérifier que f préserve alors aussi le produit scalaire (hermitien).

Exercice 8. On note $\ell_{\mathbb{R}}^2$ l'espace des suites infinies $x = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$ de nombres réels $x_i \in \mathbb{R}$ telles que $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty$ et on le munit du produit scalaire habituel $\langle x, y \rangle_{\ell_{\mathbb{R}}^2} := \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$. On considère aussi la collection de suites infinies :

$$E := \left\{ (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} : \alpha_n \in \mathbb{R}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n^2}{n^2} < \infty \right\}.$$

(a) Vérifier que $\ell_{\mathbb{R}}^2$ est contenu dans E .

(b) Montrer que E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} pour la loi de linéarité composante-par-composante :

$$\lambda (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} + \mu (\beta_n)_{n=1}^{\infty} := (\lambda \alpha_n + \mu \beta_n)_{n=1}^{\infty}.$$

(c) Montrer que :

$$\langle \alpha, \beta \rangle_E := \sum_{n \geq 1} \frac{\alpha_n \beta_n}{n^2}$$

définit aussi un produit scalaire sur E .

(d) Montrer que l'application :

$$\varphi: \begin{cases} \ell_{\mathbb{R}}^2 \longrightarrow E \\ (x_i)_{i=1}^{\infty} \longmapsto (i x_i)_{i=1}^{\infty} =: (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \end{cases}$$

est un isomorphisme isométrique, i.e. un isomorphisme linéaire satisfaisant $\|\varphi(x)\|_E = \|x\|_{\ell_{\mathbb{R}}^2}$ pour tout $x \in \ell_{\mathbb{R}}^2$.

Exercice 9. Soit $\ell^{\infty} = \ell_{\mathbb{C}}^{\infty}$ l'espace vectoriel des suites $z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \mathbb{C}^{\infty}$ vérifiant :

$$\sup_{i \geq 1} |z_i| < \infty.$$

(a) Montrer que la formule $\|z\|_{\ell^{\infty}} := \sup_{i \geq 1} |z_i|$ définit une norme sur ℓ^{∞} .

(b) Montrer que $(\ell^{\infty}, \|\cdot\|_{\ell^{\infty}})$ n'est pas séparable. **Indication:** Utiliser le fait que $\{0, 1\}^{\mathbb{N}^*}$ n'est pas dénombrable, et, pour deux éléments $z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ et $z' = (z'_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^{\infty}$ de composantes $z_i, z'_i \in \{0, 1\}$ égales seulement aux deux lettres dont le langage infra-primitif des ordinateurs est constitué, utiliser aussi le fait que les deux boules ouvertes :

$$\left\{ w \in \ell^{\infty} : \|w - z\|_{\ell^{\infty}} < \frac{1}{2} \right\} \quad \text{et} \quad \left\{ w' \in \ell^{\infty} : \|w' - z'\|_{\ell^{\infty}} < \frac{1}{2} \right\}$$

sont disjointes.

Exercice 10. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel muni d'une norme $\|\cdot\|$.

(a) Montrer que deux vecteurs $x, y \in E$ quelconques satisfont toujours l'inégalité :

$$\|x\|, \|y\| \leq \max\{\|x + y\|, \|x - y\|\}.$$

(b) Montrer qu'une boule fermée entièrement contenue dans une autre boule fermée a toujours un rayon qui est inférieur ou égal à celui de la première ; précisément, si $x_1, x_2 \in E$, si $r_1, r_2 > 0$ et si :

$$\{x \in E : \|x - x_1\| \leq r_1\} =: B_1 \subset B_2 := \{x \in E : \|x - x_2\| \leq r_2\},$$

montrer que $r_1 \leq r_2$.

Exercice 11. Montrer qu'aucune des deux normes suivantes sur \mathbb{C}^n :

$$\|z\|_\infty := \max\{|z_1|, \dots, |z_n|\} \quad \text{et} \quad \|z\|_1 := |z_1| + \dots + |z_n|$$

ne dérive d'un produit scalaire.

Exercice 12. Soit un nombre $1 \leq p < \infty$. On note $\ell_{\mathbb{C}}^p$ l'ensemble des suites infinies de nombres complexes :

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_i, \dots) \in \mathbb{C}^\infty,$$

dont la somme des puissances p -èmes des composantes converge :

$$\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p < \infty.$$

(a) En utilisant le fait que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto t^p \in \mathbb{R}_+$ est convexe (lorsque $p \geq 1$!), montrer pour tout $0 < \alpha < 1$ l'inégalité :

$$|z + w|^p \leq \alpha \left| \frac{z}{\alpha} \right|^p + (1 - \alpha) \left| \frac{w}{1 - \alpha} \right|^p.$$

(b) Montrer que la quantité :

$$\|z\|_p := \left(\sum_{i=1}^{\infty} |z_i|^p \right)^{1/p}$$

définit une norme sur ℓ^p et que ℓ^p est un \mathbb{C} -espace vectoriel. Indication: Pour établir l'inégalité triangulaire, poser $\alpha := \frac{\|z\|_p}{\|z\|_p + \|w\|_p}$ ci-dessus.

(c) Montrer que ℓ^p est complet pour $\|\cdot\|_p$.

(d) Lorsque $p < 1$, a-t-on une norme avec cette définition ?

(e) Soit à nouveau $p \geq 1$. On considère le sous-espace :

$$M_p := \left\{ z = (z_i)_{i=1}^{\infty} \in \ell^p : \sum_{i=1}^{\infty} z_i = 0 \right\}.$$

Pour quelles valeurs de $p \geq 1$ ce sous-espace est-il dense dans ℓ^p ?

Exercice 13. On note X l'espace des fonctions continues $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont sommes finies quelconques d'exponentielles trigonométriques :

$$f(t) = \sum_{k=1}^n a_k e^{i\theta_k t},$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $a_k \in \mathbb{C}$, $\theta_k \in \mathbb{R}$ quelconques. Étant donné deux fonctions $f, g \in X$ dans cet espace, on pose :

$$\langle f, g \rangle := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \overline{g(t)} dt.$$

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définit un produit scalaire sur X .

(b) Montrer que la famille $(t \mapsto e^{i\theta t})_{\theta \in \mathbb{R}}$ est orthonormée.

(c) L'espace X est-il de Hilbert ?

(d) L'espace X est-il séparable ?

Exercice 14. Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un \mathbb{C} -espace de Hilbert.

(a) Si $z, w \in H$ satisfont $\operatorname{Re} \langle z, w \rangle = \|z\|^2 = \|w\|^2$, montrer que $z = w$.

(b) Soient maintenant deux suites $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ et $(w_n)_{n=1}^{\infty}$ satisfaisant $\|z_n\| \leq 1$ et $\|w_n\| \leq 1$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle z_n, w_n \rangle = 1$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - w_n\| = 0$.

(c) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n + w_n\| = 2$, montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|z_n - w_n\| = 0$.

Exercice 15. On munit le \mathbb{R} -espace vectoriel $\mathbb{R}[x] \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des polynômes réels d'un produit scalaire quelconque $\langle \cdot, \cdot \rangle$, dont on note $\|\cdot\|$ la norme associée. À partir de la famille génératrice libre $(x^k)_{k=0}^{\infty}$ de tous les monômes, le procédé de Gram-Schmidt construit une famille orthonormée $(P_k(x))_{k=0}^{\infty}$ avec $\deg P_k = k$ pour tout $k \geq 0$. Soit alors $(Q_k(x))_{k=0}^{\infty}$ la famille :

$$Q_k(x) := \sum_{0 \leq i \leq k} \frac{1}{i+1} P_i(x).$$

(a) Montrer que la suite $(Q_k(x))_{k=0}^\infty$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$.

(b) Montrer que $(\mathbb{R}[x], \|\cdot\|)$ n'est pas un espace de Hilbert.

Exercice 16. On considère $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{R})$ muni du produit scalaire L^2 :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (f, g \in \mathcal{C}^0[-1, 1]),$$

et on note $\|\cdot\|_{L^2}$ la norme associée, distincte de celle intrinsèque aux fonctions continues :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{-1 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad (f \in \mathcal{C}^0[-1, 1]).$$

(a) Montrer que la suite, définie pour $n \geq 1$, de fonctions :

$$f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx & \text{lorsque } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n}, \\ 1 & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

est de Cauchy dans $(\mathcal{C}^0[-1, 1], \|\cdot\|_{L^2})$.

(b) Montrer que $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge en norme L^2 vers la fonction :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \\ 1 & \text{lorsque } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

(c) Qu'en est-t-il en norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$? Interpréter.

Exercice 17. Une fonctionnelle linéaire :

$$L: L^2([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est dite *positive* si :

$$(f \geq 0 \text{ presque partout}) \implies L(f) \geq 0.$$

L'objectif est de démontrer que toute fonctionnelle linéaire positive est continue.

(a) Montrer que $L(g) \geq L(f)$ dès que $f, g \in L^2[0, 1]$ satisfont $g \geq f$ presque partout.

(b) Montrer que $L(|f|) \geq |L(f)|$, pour toute $f \in L^2[0, 1]$.

(c) On raisonne par l'absurde, à savoir on suppose qu'il existe une fonctionnelle linéaire positive L sur $L^2[0, 1]$ qui n'est pas continue. Montrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k=1}^\infty$ de fonctions $u_k \in L^2[0, 1]$ avec $u_k \geq 0$ presque partout satisfaisant :

$$\|u_k\|_{L^2} = 1 \quad \text{et} \quad L(u_k) \geq k 2^k \quad (\forall k \geq 1).$$

(d) Montrer que la série $\sum_{k=1}^\infty \frac{u_k}{2^k}$ est normalement convergente dans $L^2[0, 1]$.

(e) Soit donc $\sum_{k=1}^\infty \frac{u_k}{2^k} =: u \in L^2[0, 1]$. Montrer que l'on a presque partout :

$$\frac{u_k}{2^k} \leq u \quad (\forall k \geq 1).$$

Indication: Si une suite converge dans L^2 en norme L^2 vers une certaine fonction-limite de carré intégrable, on peut toujours en extraire une sous-suite qui converge ponctuellement presque partout vers cette même fonction-limite.

(f) Montrer que $L(u) \geq k$ pour tout $k \geq 1$, et conclure.

(g) Lorsqu'on change la norme sur $L^2[0, 1]$, l'énoncé :

$$L \text{ positive} \implies L \text{ continue},$$

peut devenir faux. Après avoir vérifié que $L^2[0, 1] \subset L^1[0, 1]$, donner un exemple de fonctionnelle linéaire positive sur :

$$(L^2[0, 1], \|\cdot\|_{L^1}),$$

qui n'est pas continue.

Exercice 18. Dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 1]$, muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x)| \quad (f \in \mathcal{C}^0[0, 1]),$$

trouver une famille $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ qui est libre et totale, ainsi qu'une fonction $g \in \mathcal{C}^0[0, 1]$, telles que l'on ait deux représentations :

$$\begin{aligned} g &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k e_k, \end{aligned}$$

pour deux collections *distinctes* de coefficients réels $(\lambda_k)_{k=1}^{\infty}$ et $(\mu_k)_{k=1}^{\infty}$. Cela serait-il possible dans un espace de Hilbert ? Indication: Penser à écrire $e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 19. Déterminer les trois constantes réelles $a, b, c \in \mathbb{R}$ qui minimisent la valeur de :

$$\int_{-1}^1 |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx.$$

Exercice 20. On munit l'espace $\mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ des fonctions continûment dérivables sur $[0, 1]$ du produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 (f(x)g(x) + f'(x)g'(x)) dx \quad (f, g \in \mathcal{C}^1[0, 1]),$$

et on note $\|\cdot\|$ la norme associée.

(a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire.

(b) Montrer que les deux sous-espaces suivants de $\mathcal{C}^1[0, 1]$ — noter que $\mathcal{C}^2 \subset \mathcal{C}^1$ — :

$$V := \{g \in \mathcal{C}^1[0, 1] : g(0) = g(1) = 0\} \quad \text{et} \quad W := \{h \in \mathcal{C}^2[0, 1] : h'' = h\},$$

sont orthogonaux entre eux.

(c) Vérifier que :

$$W = \{x \mapsto \lambda e^x + \mu e^{-x} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\},$$

et exprimer la norme d'un tel élément général de W .

(d) Montrer, pour tout $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$, qu'il existe deux réels $\lambda_f, \mu_f \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(x \mapsto f(x) - \lambda_f e^x - \mu_f e^{-x}) \in V.$$

(e) Établir que V et W sont supplémentaires orthogonaux dans $\mathcal{C}^1[0, 1]$.

(f) Exprimer l'opérateur de projection orthogonale :

$$\pi_W : \mathcal{C}^1[0, 1] \longrightarrow W.$$

(g) Maintenant, pour deux constantes réelles $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ fixées, on regarde :

$$E_{\alpha, \beta} := \{f \in \mathcal{C}^1[0, 1] : f(0) = \alpha, f(1) = \beta\}.$$

Déterminer :

$$\inf_{f \in E_{\alpha, \beta}} \|f\|^2.$$

Indication: Appliquer le théorème de Pythagore à la décomposition d'éléments $f \in E_{\alpha, \beta}$ sur $V \oplus W$.

Exercice 21. Soit $(H, \|\cdot\|_H)$ un espace de Hilbert. Montrer que sa boule unité fermée $\{f \in H : \|f\|_H \leq 1\}$ est compacte si et seulement si $\dim H < \infty$.

Exercice 22. [Complétion d'un espace préhilbertien] Soit H_0 un \mathbb{C} -espace vectoriel préhilbertien (pas nécessairement complet), de produit scalaire hermitien $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}$ défini positif. On considère la collection de toutes les suites $(f_n)_{n=1}^\infty$ d'éléments $f_n \in H_0$ qui sont de Cauchy pour $\| \cdot \|_{H_0}$, on introduit la relation :

$$(f_n)_{n=1}^\infty \sim (f'_n)_{n=1}^\infty \iff 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f'_n\|_{H_0},$$

et on définit le quotient :

$$H := \left\{ (f_n)_{n=1}^\infty \in H_0 \right\} / \sim.$$

(a) Vérifier que \sim est une relation d'équivalence. On notera F la classe d'équivalence d'une suite $(f_n)_{n=1}^\infty \in H_0$.

(b) Montrer que H hérite d'une structure de \mathbb{C} -espace vectoriel.

(c) Montrer que H hérite du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$ défini par :

$$\langle F, G \rangle_H := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g_n \rangle_{H_0},$$

où F et G sont représentés par $(f_n)_{n=1}^\infty$ et $(g_n)_{n=1}^\infty$.

(d) Avec des suites constantes, vérifier que $H \supset H_0$, et que $\langle f, g \rangle_H = \langle f, g \rangle_{H_0}$ pour tous $f, g \in H_0$.

(e) Montrer que H_0 est dense dans H .

(f) Montrer que H est complet. Indication: Étant donné une suite de Cauchy $(F^k)_{k=1}^\infty$ dans $(H, \| \cdot \|_H)$, chaque F^k étant représenté par une suite de Cauchy $(f_n^k)_{n=1}^\infty$ d'éléments $f_n^k \in H_0$, montrer que l'élément $F \in H$ représenté par la suite — dont on vérifiera qu'elle est bien de Cauchy — :

$$(f_{N(n)}^n)_{n=1}^\infty,$$

où $N(k) \gg 1$ est choisi suffisamment grand pour que :

$$\|f_n^k - f_{N(k)}^k\|_{H_0} \leq \frac{1}{k} \quad (\forall n \geq N(k)),$$

satisfait :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|F - F^k\|_H.$$

(g) Enfin, soient H et H' deux espaces de Hilbert (complets) qui sont des *complétions* de H_0 au sens où :

$$\begin{aligned} H_0 \subset H, & \quad \overline{H_0}^{\| \cdot \|_H} = H, & \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_H|_{H_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}, \\ H_0 \subset H', & \quad \overline{H_0}^{\| \cdot \|_{H'}} = H', & \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{H'}|_{H_0} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0}. \end{aligned}$$

Montrer qu'il existe un isomorphisme \mathbb{C} -linéaire $\Phi: H \rightarrow H'$ avec $\Phi|_{H_0} = \text{Id}_{H_0}$ qui est *unitaire* au sens où :

$$\|\Phi(F)\|_{H'} = \|F\|_H \quad (\forall F \in H).$$

Indication: Si $F \in H$ est représenté par une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de Cauchy dans H_0 , montrer que $(f_n)_{n=1}^\infty$ définit aussi un élément $F' \in H'$.

Exercice 23. Montrer que les deux ensembles suivants de fonctions sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d)$.

(a) Les fonctions étagées.

(b) Les fonctions continues à support compact.

Exercice 24. On note E le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $L^2([0, 1])$ constitué des fonctions $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2([0, 1])$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \Lambda_f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty([0, 1])$ de classe \mathcal{C}^∞ sur $[0, 1]$ et dont le support :

$$\text{supp}(\varphi) \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\{t \in [0, 1]: \varphi(t) \neq 0\}}$$

est un sous-ensemble *compact* de $[0, 1]$.

(a) Montrer que E est un sous-ensemble dense de $L^2([0, 1])$.

(b) Montrer que :

$$\langle f, g \rangle := \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx + \int_0^1 \Lambda_f(x) \overline{\Lambda_g(x)} dx$$

définit un produit scalaire sur E .

(c) Montrer que E , muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 25. [Polynômes de Hermite] On appelle n -ème *polynôme de Hermite* le résultat de :

$$H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}).$$

Obtient-on bien des polynômes ? Pourquoi ?

(a) Calculer $H_0, H_1, H_2, H_3, H_4, H_5$. Deviner des régularités qui semblent générales.

(b) Montrer que l'on a, pour tout $n \geq 1$:

$$H_n(x) = 2x H_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x).$$

(c) Raisonner par récurrence pour obtenir l'expression explicite :

$$H_n(x) = n! \sum_{0 \leq j \leq \frac{n}{2}} (-1)^j \frac{1}{j! (n-2j)!} (2x)^{n-2j},$$

et confirmer ce qui avait été deviné en (a).

(d) Montrer que les polynômes de Hermite forment un système orthogonal par rapport au poids $w(x) = e^{-x^2}$ et que leur norme au carré vaut :

$$\|H_n\|_w^2 = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Exercice 26. [Polynômes de Legendre] Soit $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ l'espace des fonctions mesurables sur $[-1, 1]$ dont le module au carré est d'intégrale $< \infty$, que l'on munit du produit scalaire usuel. On appelle *polynôme de Legendre* de degré $n \geq 0$ le polynôme :

$$L_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n].$$

(a) Pour deux entiers $m > n \geq 0$, intégrer n fois par partie l'intégrale :

$$\int_{-1}^1 \frac{d^m}{dx^m} [(x^2 - 1)^m] \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n] dx,$$

en prenant itérativement la primitive du premier facteur et en déduire que L_m est orthogonal à L_n .

(b) Par la même méthode, calculer $\|L_n\|_{L^2[-1,1]}^2$.

(c) En déduire qu'il existe une constante strictement positive $c_n > 0$ — que l'on précisera ! — telle que $(c_n L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un système *orthonormal* de $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$.

Exercice 27. On dit qu'un sous-ensemble \mathcal{A} d'un espace métrique est *précompact* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de parties $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k$ de \mathcal{A} toutes de diamètre $\leq \varepsilon$ dont la réunion $\cup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ est égale à \mathcal{A} . Soit alors \mathcal{A} un sous-ensemble quelconque d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. Démontrer que \mathcal{A} est précompact si et seulement si \mathcal{A} est borné et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel F_ε de E de dimension finie tel que pour tout $a \in \mathcal{A}$, on a $\text{dist}(a, F_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Exercice 28. Soit $a = (a_n)_{n=1}^\infty$ une suite quelconque de nombres réels strictement positifs. On note ℓ_a^2 la collection des suites de nombres complexes $z = (z_n)_{n=1}^\infty$ telles que la série $\sum_{n=1}^\infty a_n |z_n|^2$ soit convergente.

(a) Vérifier que ℓ_a^2 est un espace vectoriel sur \mathbb{C} .

(b) Démontrer que l'expression :

$$\langle z_n, w_n \rangle_{\ell_a^2} := \sum_{n=1}^\infty a_n z_n \overline{w_n}$$

définit un produit scalaire sur ℓ_a^2 .

(c) Démontrer que l'application :

$$\iota_a : (z_n)_{n=1}^\infty \mapsto (\sqrt{a_n} z_n)_{n=1}^\infty$$

est un isomorphisme isométrique de ℓ_a^2 sur $\ell_{\mathbb{C}}^2$. En déduire que ℓ_a^2 est aussi un espace de Hilbert.

(d) Soient $(a_n)_{n=1}^\infty$ et $(b_n)_{n=1}^\infty$ deux suites de nombres réels strictement positifs. Démontrer que, si $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, alors la boule unité fermée de ℓ_b^2 est un sous-ensemble compact de ℓ_a^2 . Indication: Utiliser l'Exercice 27.

Exercice 29. Montrer qu'un opérateur linéaire $T: H_1 \rightarrow H_2$ est automatiquement borné lorsque H_1 est de dimension finie, et que tel n'est pas le cas autrement.

Exercice 30. Soit $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Montrer que la collection doublement infinie :

$$(\varphi_j(x) \varphi_k(y))_{j,k=1}^\infty$$

constitue une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Indication: Commencer par vérifier l'orthonormalité. Ensuite, avec $F \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ et pour tout $k \geq 1$ fixé, introduire $F_k(x) := \int_{\mathbb{R}^d} F(x, y) \overline{\varphi_k(y)} dy$. En supposant $0 = \langle F, \varphi_j \varphi_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)}$ pour tout j , obtenir $0 = \int_{\mathbb{R}^d} F_k(x) \overline{\varphi_j(x)} dx$.

Exercice 31. Soit $E \subset H$ un sous-espace vectoriel d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert H . Montrer que son bi-orthogonal $(E^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace fermé de H qui contient E .

Exercice 32. Soit H un espace de Hilbert et soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe fermé non vide. Montrer, en utilisant un théorème du cours, que l'opérateur de projection π_C sur C est 1-lipschitzien, au sens où il satisfait :

$$\|\pi_C(x_2) - \pi_C(x_1)\| \leq \|x_2 - x_1\|,$$

pour tous $x_1, x_2 \in H$.

Exercice 33. Soit π_F la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel fermé $F \subset H$ d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert H :

$$\pi_F|_F = \text{Id}_F \quad \text{et} \quad \pi_F|_{F^\perp} = 0.$$

(a) Vérifier que $\pi_F \circ \pi_F = \pi_F$ et montrer que $\pi_F^* = \pi_F$.

(b) Réciproquement, si $P: H \rightarrow H$ est un opérateur linéaire borné satisfaisant $P \circ P = P$ ainsi que $P^* = P$, montrer que P est la projection orthogonale sur un certain sous-espace fermé de H .

(c) Démontrer que tout sous-espace fermé $F \subset H$ d'un espace de Hilbert séparable H est aussi un espace de Hilbert séparable.

Exercice 34. Soit $E \subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble mesurable, et soit $F \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ le sous-espace des fonctions qui s'annulent presque partout dans le complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus E$. Montrer que la projection orthogonale $\pi_F: L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow F$ est donnée par :

$$\pi_F(f) = f \cdot \mathbf{1}_E \quad (f \in L^2(\mathbb{R}^d)).$$

Exercice 35. Soient π_{F_1} et π_{F_2} deux projections orthogonales sur deux sous-espaces fermés $F_1, F_2 \subset H$ d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert H .

(a) Montrer que leur composition $\pi_{F_1} \circ \pi_{F_2}$ est encore une projection orthogonale si et seulement si $\pi_{F_1} \circ \pi_{F_2} = \pi_{F_2} \circ \pi_{F_1}$ commutent.

(b) Dans ce cas, montrer que $\pi_{F_1} \circ \pi_{F_2}$ est la projection orthogonale sur $F_1 \cap F_2$.

Exercice 36. Soit H un \mathbb{C} -espace de Hilbert. On note $\mathcal{L}(H)$ l'espace vectoriel de tous les opérateurs $T: H \rightarrow H$ (linéaires) bornés, muni de la norme d'opérateur :

$$\|T\| := \inf \{0 \leq C < \infty : \|T(f)\| \leq C \|f\|, \forall f \in H\}.$$

(a) Montrer que $\|T_1 + T_2\| \leq \|T_1\| + \|T_2\|$ pour tous $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(H)$.

(b) Établir que la quantité :

$$d(T_1, T_2) := \|T_1 - T_2\|$$

définit une métrique sur $\mathcal{L}(H)$.

(c) Montrer que $\mathcal{L}(H)$ est complet pour cette métrique.

Exercice 37. [Déterminants de Gram] Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $= \mathbb{C}$ le corps des nombres réels ou le corps des nombres complexes. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel préhilbertien, *i.e.* muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mais qui n'est pas nécessairement complet (dans le cas où E est de dimension infinie !). Soient e_1, \dots, e_n des vecteurs de E . On appelle *matrice de Gram* de e_1, \dots, e_n la matrice :

$$\text{Gram}(e_1, \dots, e_n) := \left(\langle e_i, e_j \rangle \right)_{\substack{1 \leq j \leq n \\ 1 \leq i \leq n}},$$

l'indice i numérotant ici les lignes. Son déterminant :

$$\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle \end{vmatrix}$$

est naturellement appelé *déterminant de Gram* de e_1, \dots, e_n .

(a) Vérifier que cette matrice est *symétrique* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ou *hermitienne* dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, à savoir par définition égale à la conjuguée de sa transposée.

(b) Dans le cas de $n = 2$ vecteurs, que peut-on dire de $\text{Gram}(e_1, e_2)$? Quel théorème fondamental le Sherlock Holmes reconnaît-il ici sans aucune aide de son cher Watson ? Et qu'est-on tenté alors de conjecturer pour tout $n \geq 2$?

(c) Soit maintenant $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ un vecteur-ligne quelconque et soit :

$$(\text{Gram}(e) \cdot X)_i$$

la i -ème composante du vecteur-colonne $\text{Gram}(e) \cdot X$. Montrer par le calcul que l'on a :

$$\langle X, \text{Gram}(e) \cdot X \rangle = \left\| \sum_{i=1}^n \bar{x}_i e_i \right\|^2.$$

(d) Montrer que la matrice $\text{Gram}(e_1, \dots, e_n)$ est toujours positive, et qu'elle est *définie* positive lorsque et seulement lorsque e_1, \dots, e_n sont \mathbb{K} -linéairement indépendants.

(e) Le but principal de cet exercice est de montrer que si $F \subset E$ est un K -sous-espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ muni d'une base (e_1, \dots, e_n) qui n'est pas nécessairement orthogonale, alors pour tout $x \in E$, la distance au carré de x à F est donnée comme le quotient suivant de déterminants de Gram :

$$[\text{dist}(x, F)]^2 = \frac{\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n, x)}{\det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n)}.$$

Cette formule vient donc compléter le cours, dans lequel on a systématiquement supposé que les vecteurs étaient orthogonaux entre eux afin de simplifier grandement les formules. Commencer alors par justifier l'existence d'un unique vecteur $\pi_F(x) \in F$ qui réalise la distance de x à F :

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, F) &\stackrel{\text{def}}{=} \inf_{y \in F} \|x - y\| \\ &= \|x - \pi_F(x)\|. \end{aligned}$$

(f) Montrer par le calcul que :

$$\begin{aligned} \det \text{Gram}(e_1, \dots, e_n, x) &= \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle & \overline{\langle \pi_F(x), e_1 \rangle} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle & \overline{\langle \pi_F(x), e_n \rangle} \\ \langle \pi_F(x), e_1 \rangle & \cdots & \langle \pi_F(x), e_n \rangle & \|\pi_F(x)\|^2 \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} \langle e_1, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_1, e_n \rangle & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \langle e_n, e_1 \rangle & \cdots & \langle e_n, e_n \rangle & 0 \\ \langle \pi_F(x), e_1 \rangle & \cdots & \langle \pi_F(x), e_n \rangle & \|x - \pi_F(x)\|^2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

et conclure.

Exercice 38. On considère ici comme connu le théorème de Weierstrass d'après lequel la suite des monômes standard $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est totale dans $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ de la borne supérieure. Puisque l'on a (exercice rapide) :

$$\|f\|_{L^2} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0},$$

pour toute $f \in L^2([0, 1])$, la totalité de cette suite est instantanément héritée par L^2 .

Étant alors donnée une suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ de nombres strictement positifs $\alpha_n \in \mathbb{R}_+^*$ qui est strictement croissante : $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, on considère la famille, indexée par $n \in \mathbb{N}^*$, des fonctions-monômes :

$$[0, 1] \ni x \mapsto x^{\alpha_n} \in \mathbb{R},$$

qui appartiennent tous au sous-espace vectoriel dense :

$$\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \subset L^2([0, 1], \mathbb{R})$$

des fonctions continues sur le segment $[0, 1]$ dans l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$ muni de la norme standard $\int_0^1 f(x)^2 dx$ notée $\|f\|_{L^2}$, et on se demande : *quand donc une telle suite est-elle (aussi) totale dans $L^2([0, 1])$?*

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on introduit l'espace vectoriel :

$$E_N := \text{Vect}_{\mathbb{R}}(x^{\alpha_1}, x^{\alpha_2}, \dots, x^{\alpha_N}).$$

(a) Soit maintenant une fonction-monôme x^m avec $m \in \mathbb{R}_+$ quelconque. Montrer que :

$$\inf_{f \in E_N} \|x^m - f\|_{L^2} = \frac{1}{\sqrt{2m+1}} \prod_{i=1}^N \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right|.$$

Indication: En appliquant le résultat de l'exercice précédent, on se ramènera à deux déterminants de Gram que l'on calculera par des techniques d'algèbres linéaire ; notamment, on démontrera, en commençant au besoin par examiner les petites valeurs $N = 1, 2, 3$, que :

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_1 + 1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_1 + \alpha_N + 1} & \frac{1}{\alpha_1 + m + 1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\alpha_N + \alpha_1 + 1} & \cdots & \frac{1}{\alpha_N + \alpha_N + 1} & \frac{1}{\alpha_N + m + 1} \\ \frac{1}{m + \alpha_1 + 1} & \cdots & \frac{1}{m + \alpha_N + 1} & \frac{1}{m + m + 1} \end{vmatrix} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq N} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \prod_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i - m)^2}{(2m + 1) \prod_{1 \leq i, j \leq N} (\alpha_i + \alpha_j + 1) \prod_{1 \leq i \leq N} (\alpha_i + m + 1)^2}.$$

(b) Montrer que la famille des fonctions-monômes $(x^{\alpha_n})_{n \geq 1}$ est totale dans l'espace $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ si et seulement si — joli Théorème dû à Müntz et à Szász — la série suivante diverge :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty.$$

Indication: Premièrement, dans la circonstance spéciale (la moins significative) où la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est majorée :

$$\sup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n =: A < \infty,$$

de telle sorte que l'on a automatiquement $\sum_n \frac{1}{\alpha_n} = \infty$, montrer que pour tout $m \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N \left| \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} \right| = 0.$$

Deuxièmement, dans la circonstance (plus fréquente et plus naturelle) où $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n} = \infty$, montrer tout d'abord que l'on a aussi pour toute constante positive :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\alpha_n + \text{constante}} = \infty.$$

Ensuite, pour tout $m \in \mathbb{R}^+$ fixé quelconque, choisir un entier $N_1 \gg 1$ assez grand pour que $\alpha_i > m$ pour tout $i \geq N_1$, prendre $N_2 \geq N_1$ arbitraire, et montrer que :

$$\left(\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \prod_{N_1 \leq i \leq N_2} \frac{\alpha_i - m}{\alpha_i + m + 1} = 0 \right) \iff \left(\lim_{N_2 \rightarrow \infty} \sum_{i=N_1}^{N_2} \frac{1}{\alpha_i + m + 1} = \infty \right)$$

(On pourra prendre le logarithme de ce produit et utiliser la majoration $\log(1 - x) < -x$ valable pour tout $0 < x < 1$.) Pour conclure, effectuer une synthèse lumineuse qui répond de manière rigoureuse et complète à la question **(b)**, en remplissant tous les raisonnements qui n'ont pas été explicitement indiqués.

Séries de Fourier

François DE MARÇAY
 Département de Mathématiques d'Orsay
 Université Paris-Saclay, France

1. Espaces de fonctions 2π -périodiques

Les espaces de Hilbert abstraits peuvent se réaliser concrètement dans de nombreuses situations où ils permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles en un certain sens. Mais la première réalisation historique et naturelle des espaces de Hilbert provient des séries de Fourier.

1.1. Fonctions sur le cercle unité (ou tore unidimensionnel). On note parfois $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont continues et 2π -périodiques :

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \quad (\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}).$$

Pourquoi la lettre \mathbb{T} ? Parce qu'elle est l'initiale du mot « *Tore* » (de dimension un), et qu'un tore de dimension k est par définition homéomorphe au produit topologique $(S^1)^k \equiv \mathbb{T}^k$ de k copies du cercle unité :

$$\mathbb{T} \equiv S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Pour $k = 2$, on retrouve le tore 2-dimensionnel $\mathbb{T}^2 \equiv S^1 \times S^1$ qui est homéomorphe à la partie en caoutchouc d'une chambre à air gonflée (grand cercle de la roue \times petit cercle d'une section orthogonale à la jante). Grâce à la 2π -périodicité de f qui prend des valeurs bien définies sur le quotient :

$$\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \cong S^1 \equiv \mathbb{T},$$

on peut en effet considérer que la donnée de f équivaut à la donnée d'une fonction :

$$\tilde{f}(e^{i\theta}) := f(\theta)$$

qui est en fait vraiment définie sur le cercle unité (tore unidimensionnel) :

$$\mathbb{T} \equiv S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C} : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Le résultat de ces considérations préliminaires, c'est qu'il revient au même de considérer des fonctions continues \tilde{f} qui sont définies sur le cercle unité, et des fonctions 2π -périodiques définies sur \mathbb{R} tout entier. En vérité, il s'avère plus pratique de travailler avec des fonctions 2π -périodiques, notamment parce que l'application de la règle de Chasles permet de modifier aisément les bornes d'intégration dans toutes les intégrales (nombreuses) que nous rencontrerons, comme par exemple :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta,$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$, identité que nous vérifions à l'instant comme suit.

Soit k l'entier unique tel que $a \leq 2k\pi < a + 2\pi$. L'intégrale de droite se découpe alors en :

$$\int_a^{a+2\pi} = \int_a^{2k\pi} + \int_{2k\pi}^{a+2\pi},$$

mais comme f est 2π -périodique, lorsqu'on remplace θ par $\theta - 2(k-1)\pi$ dans la première intégrale et θ par $\theta - 2k\pi$ dans la seconde, l'intégrande reste inchangé et les bornes d'intégration pour les deux morceaux se recollent :

$$\begin{aligned} \int_a^{a+2\pi} f(\theta) d\theta &= \int_{a-2(k-1)\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta + \int_0^{a+2\pi-2k\pi} f(\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Ainsi, intégrer de 0 à 2π , c'est la même chose que d'intégrer sur n'importe quel segment $[a, a + 2\pi]$ de longueur 2π , car tout revient à intégrer sur le cercle S^1 tout entier. Nous travaillerons donc avec des fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} en nous souvenant toujours que le cercle S^1 est le vrai domaine d'existence (compact) de ces fonctions.

1.2. Espaces fonctionnels. On peut alors munir l'espace $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ des fonctions continues 2π -périodiques $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de la norme de la convergence uniforme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| = \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)|.$$

Une seconde illustration du fait que la 2π -périodicité ramène toute telle fonction f à la fonction $\tilde{f}(e^{i\theta}) := f(\theta)$ définie sur le cercle unité est la suivante.

Lemme 1.3. *Toute fonction 2π -périodique $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est uniformément continue sur \mathbb{R} .*

Démonstration. Il est connu que toute fonction continue $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un espace métrique compact (X, d) est automatiquement uniformément continue. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier soigneusement que le lemme en découle. \square

Au-delà des espaces de fonctions continues, il y a les espaces de fonctions *intégrables* sur le cercle. Rappelons que ces fonctions sont définies à un ensemble de mesure nulle près, et qu'en toute rigueur, une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ de module intégrable sur le cercle est une *classe d'équivalence* de fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale. Dans la suite de ce cours, nous ne nous embarasserons pas avec la distinction entre classes d'équivalences et représentants d'une classe, et nous travaillerons avec les fonctions L^1 comme si elles possédaient une valeur bien définie en tout point.

Définition 1.4. [Espaces de fonctions sommables] Pour tout réel p avec $1 \leq p < +\infty$, on définit l'espace $L^p(\mathbb{T})$ comme l'espace des fonctions mesurables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont 2π -périodiques :

$$f(\theta + 2k\pi) = f(\theta) \text{ pour } d\theta\text{-presque tout } \theta \in \mathbb{R}$$

et dont l'intégrale du module puissance p converge :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} < \infty.$$

On peut alors vérifier que l'on a, comme pour toute fonction continue :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{a-\pi}^{a+\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi},$$

pour tout a quelconque dans \mathbb{R} . De plus l'inégalité de Minkowski nous assure que $L^p(\mathbb{T})$, muni de la norme naturelle :

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p}$$

est un espace vectoriel normé, complet qui plus est grâce à un théorème dû à Riesz.

Qu'obtient-on lorsque $p = +\infty$? On sait vérifier par un exercice que :

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \left(\int_a^b |g(t)| \right)^{1/p} = \sup_{x \in [a,b]} |g(x)|,$$

pour toute fonction mesurable bornée $g \in L^\infty([a, b])$, et donc il est naturel d'introduire aussi l'espace des fonctions (essentiellement) bornées sur le tore :

$$L^\infty(\mathbb{T}) := \left\{ f \text{ mesurable } 2\pi\text{-périodique} : \|f\|_{L^\infty} := \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta)| < \infty \right\},$$

où le « sup » est bien entendu pris à un ensemble de mesure nulle près. La norme pour les fonctions $L^\infty(\mathbb{T})$ est donc la même que pour les fonctions $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, mais avec la clause du « presque partout ».

Alors ces espaces sont emboîtés les uns dans les autres, l'espace $L^1(\mathbb{T})$ des fonctions simplement intégrables étant le plus grand d'entre eux, et l'espace $L^2(\mathbb{T})$ se trouvant en quelque sorte « au milieu de tous ».

Proposition 1.5. [Hiérarchie d'espaces fonctionnels sur le cercle] *Pour tous entiers p et q tels que $1 \leq p < q \leq \infty$, on a les inclusions ensemblistes :*

$$(1.6) \quad \mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^q(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{T}) \hookrightarrow L^1(\mathbb{T})$$

qui sont de plus des injections topologiques, au sens où un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|_E)$ s'injecte topologiquement dans un autre espace topologique $(F, \|\cdot\|_F)$ s'il existe une application linéaire injective $\iota: E \rightarrow F$ et une constante $C < +\infty$ telle que :

$$\|\iota(e)\|_F \leq C \|e\|_E,$$

pour tout vecteur $e \in E$ (autrement dit, s'il existe une application linéaire continue injective de E dans F).

Démonstration. Vérifions seulement ici que $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et $L^\infty(\mathbb{T})$ s'injectent topologiquement dans $L^2(\mathbb{T})$, ou même plus généralement dans $L^p(\mathbb{T})$. En effet, on peut majorer trivialement toute intégrale d'une fonction par l'intégrale de son « sup », ce qui donne ici :

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/p} &\leq \left(\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)|^p \right)^{1/p} \\ &= \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)|. \end{aligned}$$

puisque la mesure $\frac{d\theta}{2\pi}$ est de probabilité : $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1$. □

Théorème 1.7. *Pour tout exposant $1 \leq p < \infty$, les fonctions continues sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ sont denses dans $L^p(\mathbb{T})$:*

$$\forall g \in L^p(\mathbb{T}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \quad \|g - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Dans un cours d'intégration, en dimension quelconque $d \geq 1$ sur \mathbb{R}^d , on démontre (rappel) que l'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, pour tout $1 \leq p < \infty$ — mais comment procède-t-on ?

Par densité dans L^p des fonctions dites *étagées*, lesquelles sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_R$ de rectangles fermés bornés :

$$R = \prod_{1 \leq i \leq d} [a_i, b_i] \quad (-\infty < a_i < b_i < \infty),$$

la démonstration se ramène à faire voir que le résultat est vrai pour $g = \mathbf{1}_R$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \quad \|\mathbf{1}_R - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon,$$

ce qui est aisé, car il suffit de « lisser légèrement les angles » du graphe de $\mathbf{1}_R$ pour le rendre continu en s'assurant de ne perdre que très peu de volume, au sens L^1 , ou au sens L^p .



Sur le cercle unité \mathbb{T} à la place de \mathbb{R}^d , pour les fonctions $g \in L^p(\mathbb{T})$, la densité des fonctions étagées étant certainement tout aussi vraie puisque $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, il s'agit de lisser légèrement les angles de graphes de fonctions indicatrices $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'intervalles :

$$[a, b] \subset [-\pi, \pi],$$

ce qui n'est qu'un cas particulier de ce qui vient d'être vu, seulement en dimension $d = 1$! □

2. Coefficients de Fourier de fonctions $f \in L^1([-\pi, \pi])$ ou $f \in L^2([-\pi, \pi])$

À partir de 1802, Joseph Fourier conduit des expériences sur la propagation de la chaleur dans les corps solides, et ces expériences lui permettront d'en donner un modèle de physique mathématique fondé sur la représentation des solutions en séries de fonctions trigonométriques $\sin kx$ et $\cos kx$. Aujourd'hui, les séries Fourier et les transformées de Fourier jouent un rôle omniprésent en analyse, en arithmétique et aussi pour la transmission de tous les signaux de télécommunications.

On notera parfois dans la suite pour abrégé :

$$e_n := e^{in\theta} \quad (\theta \in \mathbb{R})$$

la famille des fonctions $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ exponentielles complexes de pulsation un entier $n \in \mathbb{Z}$ positif ou négatif quelconque. Ce sont les fonctions-modèles 2π -périodiques avec lesquelles nous allons travailler. Rappelons que la mesure de Lebesgue renormalisée :

$$\frac{d\theta}{2\pi}$$

est une mesure *de probabilité* sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \equiv S^1$, puisque 2π est (par définition depuis l'Antiquité pré-hellénique) la circonférence du cercle S^1 de rayon 1. Entre les fonctions de carré intégrable sur le cercle, on a bien entendu un produit scalaire naturel :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{g(\theta)} \frac{d\theta}{2\pi}$$

qui satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Lemme 2.1. *La famille de toutes les fonctions exponentielles-modèles $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}} = (e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{T})$, à savoir :*

$$\langle e_{n_1}, e_{n_2} \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{in_1\theta} \overline{e^{in_2\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \delta_{n_1, n_2}.$$

Démonstration. En effet, si $n_1 \neq n_2$, la fonction $e^{i(n_1-n_2)\theta}$ admet la primitive $\frac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)}$, et l'intégrale s'annule par 2π -périodicité :

$$\left[\frac{e^{i(n_1-n_2)\theta}}{i(n_1-n_2)} \right]_0^{2\pi} = 0.$$

Et lorsque $n_2 = n_1$, on a bien $\int_0^{2\pi} 1 \frac{d\theta}{2\pi} = 1$. □

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la famille de fonctions *réelles*

$$\{1\} \cup \{\sqrt{2} \cos(k\theta)\}_{k \geq 1} \cup \{\sqrt{2} \sin(k\theta)\}_{k \geq 1}$$

est elle aussi orthonormée sur le cercle.

La définition qui suit est formulée pour les fonctions dans $L^1(\mathbb{T})$ qui sont les plus nombreuses dans notre échelle topologique (1.6) ci-dessus.

Définition 2.2. Étant donné une fonction 2π -périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ quelconque, on appelle k -ème coefficient de Fourier de f le nombre complexe :

$$\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

l'intégrale étant convergente :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)| \cdot \underbrace{|e^{-ik\theta}|}_{\equiv 1} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Les progrès les plus importants de la théorie des séries trigonométriques ont été réalisés dès la première moitié du vingtième siècle et ont été impulsés grâce au développement considérable de la théorie des fonctions d'une variable réelle, en particulier grâce à la popularisation de l'intégrale de Lebesgue. En fait, il existe des fonctions intégrables au sens de Lebesgue qui ne le sont pas au sens de Riemann et dont la série de Fourier converge partout vers la fonction, ce qui montre l'intérêt qu'il y a à mettre la notion d'intégrale de Lebesgue au fondement de la théorie des séries de Fourier.

Réinterprétation 2.3. Lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$, tout coefficient de Fourier s'interprète aussi comme étant le *produit scalaire* de f avec l'exponentielle-modèle correspondante :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \overline{e^{ik\theta}} \frac{d\theta}{2\pi} = \langle f, e_k \rangle.$$

Il est important de remarquer que les coefficients de Fourier existent pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ appartenant au plus gros des espaces de la hiérarchie topologique (1.6), donc aussi pour tous les autres espaces fonctionnels $L^p(\mathbb{T})$, $L^2(\mathbb{T})$, $L^\infty(\mathbb{T})$, $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ contenus en lui. Or cet espace L^1 des fonctions intégrables au sens de Lebesgue contient énormément de fonctions, et c'est la raison pour laquelle il est à l'origine de certaines pathologies qui ont beaucoup troublé de nombreux mathématiciens.

Définition 2.4. À toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$, on associe sa *série de Fourier* qui est la somme infinie purement formelle, peut-être non convergente, et au sujet de laquelle on ne dit rien pour l'instant :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Lorsque $f \in L^2(\mathbb{T})$, la série de Fourier de f s'écrit aussi :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, e_k \rangle e_k$$

comme la somme de ses projections orthogonales $\langle f, e_k \rangle e_k$ sur toutes les exponentielles-modèles e_k .

Dans les travaux originaux de Fourier, la série de Fourier est définie, de manière alternative, en termes purement réels comme :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)\},$$

où les coefficients a_0, a_k, b_k s'expriment sous la forme des intégrales suivantes :

$$a_0 := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta, \quad a_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) d\theta, \quad b_k := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) d\theta \quad (k=1, 2, 3, \dots).$$

Nous privilégierons toujours le formalisme en termes des exponentielles $e^{ik\theta}$, et nous laissons au lecteur le soin de se convaincre que ces deux types de formules pour les coefficients de Fourier et pour la série de Fourier sont en fait équivalentes.

Question 2.5. [principale sur les séries de Fourier] Étant donné une fonction raisonnable $f(\theta)$ définie sur le cercle, est-ce que sa série de Fourier permet de la reconstituer, au sens où f serait la limite :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\theta)$$

des sommes partielles de sa série de Fourier, définies par :

$$S_n(f)(\theta) := \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Puisque cette question, particulièrement difficile, est riche d'une très longue histoire, nous allons nous appesantir un peu sur elle avant de revenir aux espaces de Hilbert dans lesquels beaucoup de difficultés s'estomperont.

3. Brève histoire dialectique des séries de Fourier

Afin d'attiser l'appétit de connaissances mathématiques, ouvrons ici une parenthèse historique et spéculative

(Il est clair que dans ce cours de niveau Licence 3 dont l'horaire est limité par un arbitrage hiérarchique désincarné, à une vingtaine d'heures, nous sommes dans l'incapacité d'aborder en détail les considérations passionnantes qui vont suivre. Soyez donc curieux, non seulement sur Internet, mais surtout en étudiant de vrais livres écrits par des professeurs spécialistes. Lisez ! Vous deviendrez intelligents !)

En 1753, Euler a observé que les travaux de Bernoulli sur les mouvements d'une corde fixée à ses extrémités semblaient impliquer que toute fonction se développe en série infinie de sinus et de cosinus. À cette époque, les courbes étaient classifiées comme *continues* lorsqu'elles étaient définies par une formule, et comme *géométriques* lorsqu'elles pouvaient être tracées à la main.

Joseph Fourier affirmait au début du 19^{ème} siècle, en se basant sur des arguments de nature physique que toute fonction continue f sur le cercle pouvait être reconstituée comme étant égale à la série infinie $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{f}(k) e^{ik\theta}$. Plus précisément, Fourier était essentiellement persuadé que toute fonction 2π -périodique « raisonnable », ou du moins issue de la physique, devrait être développable en série trigonométrique infinie, c'est-à-dire que l'on aurait :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \hat{f}(k) e^{ik\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Toutefois, de nombreux « troubles dialectiques » se sont interposés sur le chemin des mathématiciens à travers l'histoire, et les choses se sont avérées ne jamais être aussi simples que l'on aurait bien voulu le croire au premier abord. Pour cette raison, nous allons évoquer partiellement la complexité des réponses qui ont pu leur être apportées à travers l'histoire.

Il fallut attendre 1829 pour que le mathématicien allemand Peter Lejeune-Dirichlet démontre un premier théorème véritablement général et rigoureux de convergence, sous l'hypothèse que la fonction f ne possède qu'un nombre fini de minima et de maxima sur le cercle. Le Théorème 11.2 ci-dessous qu'on appelle aujourd'hui « de Dirichlet » est en fait un résultat différent, plus faible en quelque sorte, puisqu'il suppose que la fonction est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, alors que le théorème original de Dirichlet admet éventuellement une infinité dénombrable de points de discontinuité.

La question pour les fonctions qui sont seulement continues est restée ouverte très longtemps, étant donné que l'approfondissement du concept général de continuité a fait découvrir à Weierstrass (1861) des fonctions continues qui ne possèdent de dérivées en *aucun* point, par exemple :

$$F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x),$$

où $|b| < 1$ pour assurer la convergence uniforme, donc la continuité, mais où a est un entier impair tel que le produit ab est $\geq 1 + \frac{3\pi}{2}$. Weierstrass a démontré que F n'est néanmoins dérivable en aucun point.

La vérité, que ne soupçonnait guère Fourier puisqu'il pensait en termes eulériens aux fonctions analytiques sauf éventuellement en un nombre fini de points de discontinuité,

c'est que le concept général de fonction continue au sens de la définition weierstrassienne « ε - δ » cache une ontologie extrêmement riche et difficile à étudier.

Toujours est-il qu'il fallut attendre 1876 pour qu'un autre mathématicien allemand, du Bois Reymond, construise une fonction continue dont la série de Fourier diverge (tend vers l'infini) en un point. En modifiant et en adaptant cet exemple, on peut construire des exemples un peu plus pathologiques de fonctions continues dont la série de Fourier diverge en un nombre fini, voire infini dénombrable, de points sur le cercle.

Au final, en 1923, Kolomogorov a produit un exemple de fonction intégrable au sens de Lebesgue, *i.e.* appartenant à $L^1(\mathbb{T})$, dont la série de Fourier diverge presque partout sur le cercle \mathbb{T} , et en 1926, il améliore ce contre-exemple, de telle sorte que la série de Fourier diverge en *tout* point de \mathbb{T} .

Entretemps, Lusin avait conjecturé en 1913 que la série de Fourier des fonctions L^2 sur le cercle converge presque partout vers la fonction. Ainsi Kolomogorov semblait détruire totalement les croyances « mystiques » de Lusin. En fait, c'était certainement la structure harmonieuse d'espace Hilbert dont jouit $L^2(\mathbb{T})$ qui avait insufflé à Lusin cette idée-là.

Après de nombreuses tentatives inabouties de pousser les techniques de Kolmogorov à s'appliquer à certaines fonctions pathologiques du sous-espace $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, ce fut une surprise fort surprenante lorsque le mathématicien suédois Carleson (récent récipiendaire du Prix Abel) établit en 1966, après sept années de recherches arides, acharnées et opposées aux croyances partagées, la véracité de la conjecture de Lusin : *Pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, on a :*

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

pour presque tout $\theta \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Cet énoncé fait partie du trésor des « démonstrations mythiques parmi les plus difficiles de toutes les mathématiques ». Corollaire immédiat puisque $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$: la série de Fourier d'une fonction continue sur \mathbb{T} converge presque partout vers la fonction.

Ainsi du Bois Reymond n'aurait-il de toute façon pas pu faire mieux que de faire diverger sur un ensemble de mesure *nulle* la série de Fourier d'une fonction continue !

Dans la foulée, un an après Carleson, le mathématicien américain Hunt montra que la série de Fourier d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ converge presque partout vers f , dès que $p > 1$, mais avec $p < +\infty$ aussi.

Donc Kolomogorov n'aurait pas pu faire mieux que de construire des contre-exemples dans $L^1(\mathbb{T})$!

3.1. Conclusion intermédiaire. *Le problème de la convergence de la série de Fourier est un problème difficile.*

□ Dans $L^p([-\pi, \pi])$, pour $p > 1$, des théorèmes positifs existent, mais ils requièrent des démonstrations qui vont bien au-delà d'un cours de L3 à l'Université.

□ Dans le plus gros espace $L^1([-\pi, \pi])$ des fonctions Lebesgue-intégrables, des contre-exemples pathologiques existent.

□ Dans $L^2([-\pi, \pi])$, la structure d'espace de Hilbert aide considérablement, car elle apporte à l'Analyse toute la puissance et l'élégance de la Géométrie.

□ Un théorème accessible en L3, qui est l'énoncé le plus important de ce chapitre sur les séries de Fourier, et que nous allons démontrer complètement, va nous apprendre que *la*

série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

converge en norme L^2 vers la fonction :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

□ Lors de la démonstration de ce théorème, nous allons découvrir qu'il vaut mieux *accélérer* la convergence des séries de Fourier afin d'éviter tous les phénomènes pathologiques qu'elles recellent, et alors, par une sorte de « miracle » absolument imprévisible, de magnifiques théorèmes simples de convergences vont s'avérer être vrais, théorèmes qu'il est tout à fait possible d'enseigner en L3 !

4. Lemme de Riemann-Lebesgue

Reprenons maintenant le cours à son rythme habituel. Dans l'éventualité d'une réponse positive à la Question Principale, à savoir, dans les cas favorables où la série de Fourier d'une fonction redonne la fonction, *i.e.* lorsque :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

ne serait-ce qu'en un seul point $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, la convergence d'une telle série implique, comme on le sait, que son terme général tend vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$, avec les fonctions les plus générales possibles, c'est-à-dire avec les fonctions L^1 .

En fait, cette propriété est toujours vraie, sans même supposer que la série converge.

Proposition 4.1. [Lemme de Riemann-Lebesgue] *Les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ de toute fonction 2π -périodique intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ tendent toujours vers zéro à l'infini :*

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Démonstration. Si l'on effectue le changement affine de variable angulaire :

$$t = \theta + \pi/k, \quad dt = d\theta$$

dans l'intégrale définissant $\widehat{f}(k)$, l'exponentielle $e^{-ik(-\frac{\pi}{k})} = -1$ introduit un signe négatif en facteur :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi+\pi/k}^{\pi+\pi/k} f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik\left(t - \frac{\pi}{k}\right)} \frac{dt}{2\pi} = - \int_{-\pi}^{\pi} f\left(t - \frac{\pi}{k}\right) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

Donc astucieusement, on peut représenter le coefficient de Fourier en question comme $\frac{1}{2}$ que multiplie la somme de ses deux représentations :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f\left(\theta - \frac{\pi}{k}\right) \right] e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Mais si la fonction 2π -périodique f est supposée continue sur le compact $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc uniformément continue, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K \in \mathbb{N}^* \quad \text{tel que} \quad \left(|k| \geq K \implies \sup_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta) - f(\theta - \frac{\pi}{k})| \leq \varepsilon \right),$$

d'où par une majoration évidente de l'intégrale, il en découle alors que $|\widehat{f}(k)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $k \geq K$, donc $\lim_{|k| \rightarrow \infty} |\widehat{f}(k)| = 0$.

Maintenant, si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est seulement supposée intégrable, on sait par densité de \mathcal{C}^0 dans L^1 que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que :

$$\|g_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \varepsilon.$$

Mais alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il est immédiatement clair que le k -ème coefficient de Fourier de g_ε est ε -proche de celui de f :

$$\begin{aligned} |\widehat{g}_\varepsilon(k) - \widehat{f}(k)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (g_\varepsilon(\theta) - f(\theta)) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g_\varepsilon(\theta) - f(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \|g_\varepsilon - f\|_{L^1} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Or puisque g_ε est continue, il existe d'après ce que l'on vient de voir K assez grand tel que $k \geq K$ implique $|\widehat{g}_\varepsilon(k)| \leq \varepsilon$. On en déduit $|\widehat{f}(k)| \leq 2\varepsilon$ pour $k \geq K$, et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a enfin $0 = \lim_{|k| \rightarrow +\infty} |\widehat{f}(k)|$, ce qui était le but. \square

Pourquoi ce Lemme s'appelle-t-il de *Riemann-Lebesgue*? Tout simplement parce qu'il avait déjà été compris dans le cadre de la théorie de l'intégration de Riemann, bien avant que Lebesgue ne le généralise (aisément) à sa théorie nouvelle englobante.

Corollaire 4.2. *En notation complexe comme en notation réelle pour les séries de Fourier, on a pour toute fonction dans $L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$:*

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos(k\theta) \frac{d\theta}{\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin(k\theta) \frac{d\theta}{\pi}.$$

Démonstration. Si $f = u + iv$ est la décomposition de f en deux fonctions à valeurs réelles $u, v \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$, la première limite, qui vient d'être démontrée, donne, pour $k \rightarrow \infty$ positif, en prenant aussi la limite de la suite conjuguée :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} + i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

et elle donne aussi pour $-k \rightarrow -\infty$ négatif :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} + i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} - i \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right), \end{aligned}$$

d'où au moyen de quatre combinaisons linéaire visibles à l'œil nu :

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} u(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} v(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

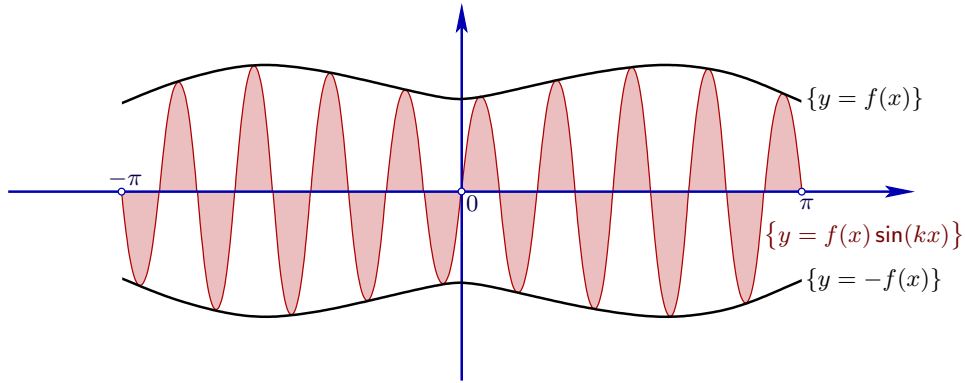
et ceci reconstitue les deux limites restantes, en prenant parties réelles et imaginaires. \square

La raison principale de $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \widehat{f}(k) = 0$ n'est pas complètement visible dans ces démonstrations, car elle a en vérité une origine *purement géométrique*. Pour fixer les idées, prenons f à valeurs réelles continue et examinons le cas de :

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx) \frac{dx}{2\pi}.$$

Traçons les trois courbes :

$$\{y = f(x)\}, \quad \{y = -f(x)\}, \quad \{y = f(x) \sin(kx)\}.$$



La courbe $\{y = f(x) \sin(kx)\}$ que l'on intègre, *i.e.* dont on calcule l'aire de son hypographe, coupe l'axe horizontal un grand nombre de fois aux $(2k + 1)$ points :

$$\ell \frac{\pi}{k} \quad (-k \leq \ell \leq k).$$

Elle forme donc une série d'arches alternativement positives et négatives, d'autant plus nombreuses que k est grand. Les aires de deux arches successives ont tendance à se compenser, car ces arches ont même base, et des hauteurs très voisines.

5. Théorème d'unicité dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$

Comme nous allons le voir dans la Section 15 consacrée au contre-exemple de du Bois Reymond, la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ ne converge *pas* en général en tout point vers la fonction.

Toutefois, on s'attend à ce que lorsque la convergence est satisfaite, la série de Fourier détermine la fonction de manière unique. Nous formulons alors un résultat d'unicité, valable pour les fonctions continues. Dans la démonstration de ce résultat, on va voir apparaître un certain nombre d'idées nouvelles importantes et réutilisables.

Théorème 5.1. *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est une fonction continue sur le cercle dont tous les coefficients de Fourier :*

$$0 = \widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

s'annulent, quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, alors la fonction est identiquement nulle.

La réciproque, vraie, est triviale.

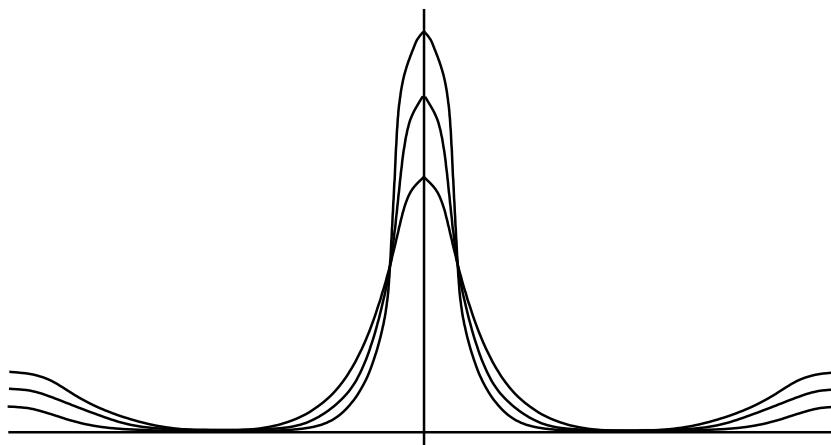
Démonstration. En décomposant $f = u + iv$ en sa partie réelle et imaginaire, on peut manifestement se ramener à supposer que f est à valeurs dans \mathbb{R} .

Raisonnons par contradiction : avec l'hypothèse que $\widehat{f}(k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, supposons néanmoins, quitte à changer f en $-f$, qu'il existe $\theta_0 \in [-\pi, \pi]$ tel que :

$$f(\theta_0) > 0.$$

Après translation, on se ramène à $\theta_0 = 0$, et :

$$f(0) > 0.$$



L'idée maintenant est de construire une famille de polynômes trigonométriques :

$$p_n(\theta) = \sum_{\text{finie}} \text{coefficients } e^{ik\theta} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

à savoir une famille de combinaisons linéaires finies des $e^{ik\theta}$, ce qui par linéarité des annulations supposées $0 = \int f e^{-ik\theta}$ donne toujours :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

mais de telle sorte que le graphe des $p_n(\theta)$ s'élève comme un « *volcan colonnaire* » resserré autour de $\theta = 0$ de manière à satisfaire simultanément la divergence :

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty,$$

ce qui sera la contradiction recherchée.

Puisque f est continue en 0, il existe $0 < \delta \leq \frac{\pi}{2}$ petit tel que :

$$f(\theta) \geq \frac{1}{2} f(0) \quad \text{pour tout } |\theta| \leq \delta.$$

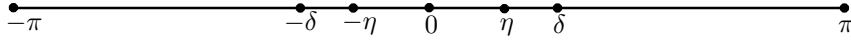
Ensuite, introduisons la fonction :

$$p(\theta) := \varepsilon + \cos \theta,$$

où $\varepsilon > 0$ est choisi assez petit pour que :

$$|p(\theta)| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } \delta \leq |\theta| \leq \pi,$$

ce qui est possible (exercice : dessiner ce que donne une petite translation verticale positive du graphe de $\theta \mapsto \cos \theta$ sur $[-\pi, \pi]$).



Puis, choisissons un $\eta > 0$ avec $\eta < \delta$ tel que :

$$p(\theta) \geq 1 + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour tout } |\theta| \leq \eta,$$

ce qui est tout aussi possible puisque $p(0) = \varepsilon + 1$. Enfin, introduisons des puissances n -èmes élevées :

$$p_n(\theta) := [p(\theta)]^n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Puisque f est continue, elle est en particulier bornée :

$$M_f := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| < \infty.$$

En développant les puissances :

$$\begin{aligned} p_n(\theta) &= \left(\varepsilon + \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \right)^n \\ &= \sum_{-n \leq k \leq n} \text{coefficient} \cdot e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

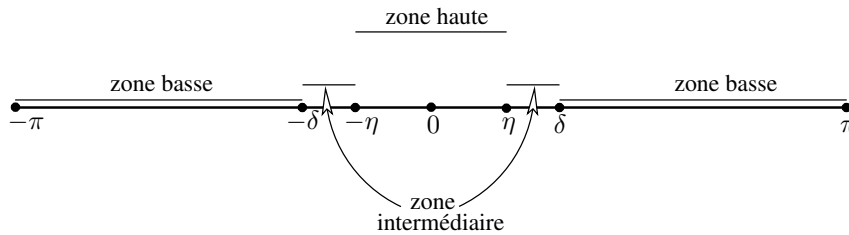
l'hypothèse que $\widehat{f}(k) = 0$ pour *tout* $k \in \mathbb{Z}$ implique bien par linéarité de l'intégrale que :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} p_n(\theta) f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Mais par ailleurs, on a une première majoration de la partie de cette intégrale qui concerne la « base du volcan » :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq M_f \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |p_n(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq M_f \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \right)^n, \end{aligned}$$

ce dernier majorant tendant visiblement vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$.



De plus, notre choix de δ garantit que $p(\theta)$ et $f(\theta)$ prennent des valeurs positives pour tout $|\theta| \leq \delta$, d'où la positivité de l'intégrale sur la zone intermédiaire :

$$\int_{\eta \leq |\theta| \leq \delta} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \geq 0.$$

Enfin et surtout, sur la zone haute, l'intégrale est *minorée* par une quantité :

$$\int_{|\theta| \leq \eta} f(\theta) p_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \geq 2\eta \frac{f(0)}{2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{2} \right)^n$$

qui tend visiblement vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Au total :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f p_n = \underbrace{\int_{|\theta| \leq \eta} f p_n}_{\substack{\text{zone haute} \\ \rightarrow \infty}} + \underbrace{\int_{\eta \leq |\theta| \leq \delta} f p_n}_{\substack{\text{zone intermédiaire} \\ \geq 0}} + \underbrace{\int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} f p_n}_{\substack{\text{zone basse} \\ \rightarrow 0}},$$

et donc on a bien établi que cette intégrale tend vers ∞ lorsque $n \rightarrow \infty$, en contradiction flagrante avec le fait qu'elle doit par hypothèse s'annuler. \square

Corollaire 5.2. Deux fonctions continues f et g sur le cercle unité \mathbb{T} sont égales :

$$f(\theta) = g(\theta) \quad (\forall \theta \in \mathbb{T})$$

si et seulement si tous leurs coefficients de Fourier coïncident :

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}). \quad \square$$

L'idée de construire des familles de fonctions, à savoir ici des polynômes trigonométriques, qui pointent fortement à l'origine, mais qui s'écrasent ailleurs vers 0, joue un rôle important et omniprésent en Analyse de Fourier, comme nous allons le voir dans la suite du cours.

En tout cas maintenant, nous pouvons déduire une conséquence élémentaire, intéressante, utile, que nous redémontrerons d'une manière légèrement différente ultérieurement comme corollaire du Théorème de Fejér.

Théorème 5.3. Si une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est telle que sa série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

est absolument convergente au sens où :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty,$$

alors f est limite uniforme ponctuelle des sommes partielles de sa série de Fourier en tout point du cercle :

$$f(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

c'est-à-dire :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{\theta \in \mathbb{T}} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|.$$

Démonstration. Puisqu'une série uniformément convergente de fonctions continues possède une limite qui est encore une fonction continue, la majoration uniforme triviale :

$$|e^{ik\theta}| \leq 1,$$

assure que la série de Fourier de f converge normalement, donc uniformément sur le cercle \mathbb{T} . Notons alors :

$$g(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

la fonction continue dont cette série est la limite. Il s'agit maintenant juste de faire voir que $g = f$!

Mais la convergence normale-uniforme — à nouveau elle — garantit *via* un théorème connu que lorsqu'on calcule les coefficients de Fourier de g , on peut intervertir sommation et intégration pour réaliser que la fonction continue g possède les mêmes coefficients de Fourier :

$$\begin{aligned}\widehat{g}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta} \right) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-k)\theta} \frac{d\theta}{2\pi}}_{=0 \text{ lorsque } n \neq k} \\ &= \widehat{f}(k),\end{aligned}$$

que la fonction continue f , et le corollaire que nous venons d'obtenir nous assure sans délai que $g = f$! \square

Maintenant, mentionnons une condition suffisante pour que f soit égale à sa série de Fourier, et beaucoup plus simple que la convergence absolue, puisqu'elle repose sur de simples intégrations par parties.

Théorème 5.4. [Élémentaire] *Les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ deux fois continûment différentiable sur le cercle unité décroissent à l'infini comme :*

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^2}\right) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow \infty,$$

de telle sorte que la série de Fourier $\sum \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f converge absolument sachant que $\sum \frac{1}{|k|^2} < \infty$.

Démonstration. En effet, puisque f est de classe \mathcal{C}^2 , dans l'intégrale qui définit son k -ème coefficient de Fourier :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

on peut en intégrant par parties primitiver deux fois l'exponentielle de manière à faire apparaître deux fois une division $\frac{1}{k}$:

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \left[\frac{f(\theta) e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 0 + \frac{1}{ik} \left[\frac{f'(\theta) e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{(ik)^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= -\frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.\end{aligned}$$

Puisque f'' est continue, elle est en particulier bornée :

$$M_{f''} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f''(\theta)| < \infty,$$

et donc on obtient bien :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(k)| &\leq \frac{1}{k^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{k^2} M_{f''} \\ &= O\left(\frac{1}{|k|^2}\right), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

En utilisant des intégrations par parties itérées, on démontre le résultat général suivant.

Théorème 5.5. [Décroissance des coefficients de Fourier] *Les coefficients de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^\ell(\mathbb{T})$ qui est continûment différentiable jusqu'à un ordre $\ell \geq 1$ satisfont :*

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\ell}\right) \quad \text{lorsque } |k| \rightarrow \infty. \quad \square$$

Corollaire 5.6. *Lorsque $\ell \geq 2$, la série de Fourier $\sum \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f converge absolument vers $f(\theta)$ en tout point $\theta \in \mathbb{T}$. □*

6. Théorème fondamental de la base hilbertienne sur $L^2(\mathbb{T})$

Contrairement aux phénomènes pathologiques possibles dans $L^1(\mathbb{T})$, lorsqu'on travaille dans $L^2(\mathbb{T})$, la théorie des séries de Fourier se comporte de manière remarquablement harmonieuse : tel est l'objet de la Section qui débute. L'une des raisons « métaphysiques » profondes de cet état de fait tient à ce que toutes les formules ont, grâce au produit scalaire, un *sens géométrique intrinsèque* lorsque les fonctions appartiennent à $L^2(\mathbb{T})$.

Nous laisserons donc pour l'instant de côté la démonstration des critères classiques de convergence (voir par exemple la Section 11 pour le Théorème célèbre de Dirichlet), afin de revenir à la famille élémentaire des fonctions exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$, qui est orthonormée dans $L^2(\mathbb{T})$. Cette famille est de plus *totale*, comme l'énonce le *résultat fondamental du cours* qui fournit la première illustration vraiment intéressante d'espace de Hilbert qui sera utile ultérieurement dans les applications.

Théorème 6.1. [Convergence en norme L^2 des séries de Fourier] *La famille de toutes les fonctions exponentielles-modèles $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}} = (e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$:*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

et donc toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ se développe en une série trigonométrique :

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

qui est convergente vers f pour la norme L^2 sur le cercle, au sens précis où :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(\theta) - \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \right|^2 \frac{d\theta}{2\pi}.$$

De plus, rappelons que nous savons déjà qu'une telle série qui est convergente en norme dans un certain espace de Hilbert est aussi automatiquement commutativement convergente, à savoir dans notre cas : pour toute bijection $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, on a de même :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f - \sum_{k=-n}^{k=+n} c_{\tau(k)}(f) e_{\tau(k)} \right|^2.$$

Mise en garde importante. Toutefois, insistons sur le fait que la convergence en norme L^2 vers f de la série de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ ne signifie aucunement que l'on ait $f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ pour tout, ou même pour presque tout, $\theta \in \mathbb{R}$. La convergence affirmée par le Théorème 6.1 fondamental a lieu *seulement au sens d'une intégrale*. En fait, il se pourrait très bien qu'en tout point θ_0 , les valeurs de $S_n(f)(\theta_0)$ « sautent tout le temps » sans jamais converger.

Démonstration du Théorème 6.1 fondamental. L'idée consiste à faire un détour par les fonctions continues, en utilisant le plongement topologique de $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dans $L^2(\mathbb{T})$ exprimé par l'inégalité $\|\cdot\|_{L^2} \leq \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ (facile) :

$$\|h\|_{L^2(\mathbb{T})} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \right)^{1/2} \leq \max_{|\theta| \leq \pi} |h(\theta)| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = \|h\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})},$$

valable pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Toutefois, un ingrédient important va nous manquer pour la démonstration complète et nous l'admettons temporairement avant d'être en mesure d'en donner une preuve *infra* dans le Corollaire 7.7.

Affirmation 6.2. [admise temporairement] La famille des exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale dans l'espace $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$.

Autrement dit, pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une combinaison linéaire *finie* à coefficients complexes des $e^{ik\theta}$ qui satisfait :

$$\left\| \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} - h \right\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant $f \in L^2(\mathbb{T})$ une fonction de carré intégrable quelconque, comme dans le théorème. Grâce à la densité de l'espace des fonctions continues dans $(L^2(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{L^2})$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ qui est ε -proche de f en norme L^2 :

$$\|h - f\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

Mais alors on peut majorer grâce à l'inégalité du triangle et au plongement de \mathcal{C}^0 dans L^2 :

$$\begin{aligned} \left\| f - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{L^2} &\leq \|f - h\|_{L^2} + \left\| h - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon + \left\| h - \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \right\|_{\mathcal{C}^0} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Ainsi, toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ s'identifie, *au sens L^2* , à son développement en série de Fourier $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$. Nous avons donc là l'exemple le plus paradigmatique d'espace de Hilbert, et il en découle que tous les théorèmes de la théorie abstraite des espaces de Hilbert s'appliquent à $L^2(\mathbb{T})$. En particulier, nous avons le :

Corollaire 6.3. [Bessel, Plancherel, Parseval] Pour toutes fonctions $f, g \in L^2(\mathbb{T})$, on a :

- inégalité de Bessel : pour tout sous-ensemble $\mathcal{J} \subset \mathbb{Z}$:

$$\sum_{k \in \mathcal{J}} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathcal{J}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi};$$

- identité de Plancherel :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi};$$

- identité de Parseval :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) \overline{\widehat{g}(k)} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{g(t) e^{-ikt}} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} \frac{dt}{2\pi}.$$

Signifions à nouveau que le Théorème de Riesz-Fischer, d'après lequel tout espace de Hilbert complexe séparable est isométriquement isomorphe à $\ell^2_{\mathbb{C}}$, s'interprète en théorie des séries de Fourier d'une manière absolument nette, explicite et remarquable.

Théorème 6.4. Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'espace des fonctions de carré intégrable :

$$L^2(\mathbb{T}) = \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables } \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} < \infty \right\}$$

s'identifie à l'espace :

$$\ell_2(\mathbb{C}) := \left\{ z = (z_k)_{k \in \mathbb{Z}} : \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |z_k|^2 < \infty \right\}$$

via l'application « prise de coefficients de Fourier » :

$$\begin{aligned} L^2(\mathbb{T}) &\longrightarrow \ell_2(\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \left(\widehat{f}(k) \right)_{k \in \mathbb{Z}} = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right)_{k \in \mathbb{Z}}, \end{aligned}$$

de telle sorte qu'on peut écrire, seulement au sens L^2 :

$$f(\cdot) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik(\cdot)}.$$

6.5. Renormalisation. Tous les concepts et théorèmes qui précèdent et qui suivent concernant les fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} se transfèrent aux fonctions $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui sont périodiques $f(x+T) = f(x)$ d'une certaine période $T > 0$ quelconque grâce au changement de variable évident :

$$\theta := x \frac{2\pi}{T},$$

qui les rend 2π -périodiques. Pour $k \in \mathbb{Z}$, les coefficients de Fourier de f valent alors :

$$\widehat{f}(k) := \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-ikx \frac{2\pi}{T}} dx,$$

et la série de Fourier de f est, sans parler de sa convergence :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx \frac{2\pi}{T}}.$$

En particulier, les identités de Plancherel et de Parseval, ainsi que le théorème de convergence en norme L^2 vers f lorsque $f \in L^2[0, T]$, sont vrais. D'autres théorèmes qui suivent seront tout aussi vrais, et nous nous contenterons de les énoncer seulement dans le cas standard où $T = 2\pi$.

6.6. Remarque sur la convergence des séries de Fourier. Nous avons insisté et nous réinsistons ici sur le fait que le Théorème 6.1 fondamental énonce seulement que $\sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ik \cdot}$ converge vers $f(\cdot)$ en norme L^2 , *et non pas ponctuellement, même au sens de la convergence simple*. Toutefois, un résultat fondamental de la théorie de l'intégrale de Lebesgue est le suivant.

Théorème 6.7. *Soit $f_n \in L^p([a, b], \mathbb{C})$ une suite ($n \geq 1$) de fonctions de puissance p -ème intégrable ($1 \leq p < \infty$) définies sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. S'il existe une fonction $f \in L^p[a, b]$ vers laquelle les f_n convergent en norme L^p :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b |f(x) - f_n(x)|^p dx = 0,$$

alors il existe au moins une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que :

$$f_{n_k}(x) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(x),$$

pour presque tout $x \in [a, b]$. □

Par conséquent, puisque nous venons donc de démontrer — en admettant temporairement le Corollaire 7.7 — que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f)(\theta) - f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = 0,$$

il découle de ce résultat qu'il existe toujours une *sous-suite* $(S_{n_k}(f))_{k=1}^{\infty}$ de la suite $(S_n(f))_{n=1}^{\infty}$ des sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ telle que l'on ait convergence ponctuelle simple :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S_{n_k}(f)(\theta) = f(\theta),$$

en presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$ du cercle unité.

C'est vraisemblablement pour cette raison, et en connaissance de ce résultat, que Lusin a dû émettre sa conjecture en 1913. Mais il faut bien insister sur le fait que ce qu'a démontré Carleson en 1966 était vraiment beaucoup plus fort, puisqu'il a démontré que la suite *complète* $(S_n(f))_{n \geq 1}$ convergeait presque partout vers f , *sans avoir besoin de passer à aucune sous-suite extraite*.

La convergence d'une sous-suite ne prouve rien sur le comportement de la suite complète. Fixez-vous par exemple une sous-suite constante, donc trivialement convergente, mais sur les autres termes, choisissez n'importe quelles valeurs qui sautent n'importe comment, qui divergent dans tous les sens, vers $-\infty$, vers $+\infty$, sans aucun contrôle : vous avez alors une sous-suite qui se comporte de la meilleure manière tout à fait «*suitement correcte*», mais alors que dire de la sauvagerie de la vraie suite complète !

7. Produit de convolution et séries de Fourier

Contrairement à ce qui se passe dans $L^2(\mathbb{T})$, lorsqu'on travaille dans le « gros » espace $L^1(\mathbb{T})$, il n'existe aucun produit scalaire, mais il est quand même possible d'écrire la « projection » $\widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ de f sur la k -ème exponentielle-modèle sous la forme d'une intégrale :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} e^{ik\theta} \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{ik(\theta-t)} \frac{dt}{2\pi} \\ & \quad \text{[Poser } t := \theta - t] &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) e^{ikt} \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

les arguments t et $\theta - t$ des deux fonctions $f(\cdot)$ et $e^{ik\cdot}$ étant *interchangeables* grâce à un simple changement de variable affine dans l'intégrale. Cette écriture nous sera extrêmement utile dans la suite.

Définition 7.1. Le produit de convolution $f * g$ entre deux fonctions intégrables $f \in L^1(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$ est la fonction visiblement 2π -périodique définie par :

$$f * g(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}.$$

Avant de revenir (plus tard !) à l'espace de Hilbert intéressant $L^2(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, il s'avère en effet plus naturel d'étudier le produit de convolution dans le plus gros espace $L^1(\mathbb{T})$, à cause d'un résultat qui justifie *in fine* le bien-fondé de cette définition.

Théorème 7.2. Le produit de convolution $f * g$ entre deux fonctions $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ est une fonction qui appartient encore à $L^1(\mathbb{T})$, et dont la norme L^1 satisfait l'inégalité simple :

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^1(\mathbb{T})}.$$

De plus, il est commutatif :

$$f * g = g * f.$$

Démonstration. Tout d'abord, pour vérifier que $\int_{\mathbb{T}} |f * g| < \infty$, c'est au théorème de Tonelli qu'il faut faire appel, puisqu'une intégrale double apparaît nécessairement :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f * g(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| |g(\theta - t)| \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ & \quad \text{[Poser } \vartheta := \theta - t], &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} \int_{-t}^{2\pi-t} |g(\vartheta)| \frac{d\vartheta}{2\pi}, \end{aligned}$$

et cette inégalité montre directement que la norme L^1 de $f * g$ est contrôlée par le produit des normes L^1 de f et de g :

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Ensuite, puisque le fait que $f * g$ est L^1 garantit que $f * g(\theta)$ prend des valeurs finies $\in \mathbb{C}$ en presque tout $\theta \in \mathbb{T}$, le même changement de variable $t := \theta - t$ que plus haut montre que le produit de convolution est commutatif :

$$f * g(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) g(t) \frac{dt}{2\pi} = g * f(\theta).$$

On voit d'ailleurs aussi que $f * g$ est bilinéaire par rapport à chacun de ses deux arguments. L'associativité, que nous n'utiliserons pas, est satisfaite, et peut être envisagée comme l'Exercice 2. \square

Ainsi, toujours avec $f \in L^1(\mathbb{T})$, en posant :

$$e_k(t) := e^{ikt},$$

le produit de convolution nous permet d'écrire la « projection » $\widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ simplement comme :

$$\widehat{f}(k) e^{ik\theta} = f * e_k(\theta) = e_k * f(\theta).$$

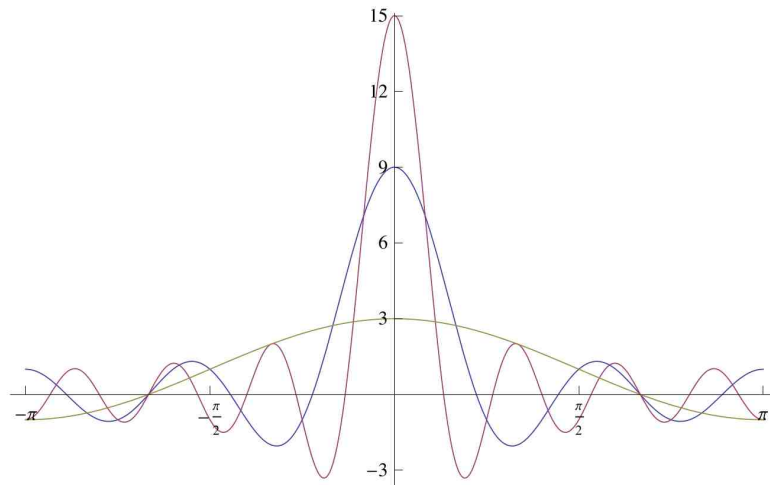
Mais alors la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f peut s'abrégier sous la forme de la convolution de f avec une certaine fonction :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=-n}^{k=+n} f * e_k(\theta) = f * \left(\sum_{k=-n}^{k=+n} e_k \right) (\theta)$$

qui est la *somme des exponentielles-modèles* e_k pour $|k| \leq n$, que l'on appelle habituellement *noyau de Dirichlet*, et que l'on calcule très facilement :

$$\begin{aligned} D_n(\theta) &:= \sum_{k=-n}^{k=+n} e^{ik\theta} = e^{-in\theta} [1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i2n\theta}] \\ &= e^{-in\theta} \frac{e^{i(2n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{i(n+\frac{1}{2})\theta} - e^{-i(n+\frac{1}{2})\theta}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}} \\ &= \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}. \end{aligned}$$

Pour $n = 1, 4, 7$, les graphes de $D_n(\theta)$ sur $[-\pi, \pi]$ peuvent être représentés comme suit.



Proposition 7.3. Si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est une fonction Lebesgue-intégrable quelconque sur le cercle unité, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ème somme partielle $S_n(f)(\theta)$ de la série de

Fourier de f s'écrit comme le produit de convolution :

$$S_n(f)(\theta) = D_n * f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}$$

de f avec le noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) := \begin{cases} \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Démonstration. Il nous reste seulement à observer que la limite $D_n(t)$, lorsque t tend vers $2\pi l$ avec $l \in \mathbb{Z}$ est bien égale à $\frac{(n+\frac{1}{2})}{\frac{1}{2}} = 2n + 1$, puisque $\sin t = t + O(t^3)$ en $t = 0$. \square

Cette représentation intégrale compacte de la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f est le point de départ des démonstrations de tous les critères de convergence classiques, que nous traiterons ultérieurement.

Pour compléter la démonstration du Théorème fondamental 6.1 dans L^2 , revenons maintenant aux sommes de Fejér, qui ne sont autres que les sommes de Cesàro des $S_k(f)$:

$$\sigma_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Nous avons dit que cette simple idée de faire les sommes de Cesàro *accélérait remarquablement la convergence*, ce que nous allons voir en détail maintenant.

Par simple linéarité et de manière très similaire à ce que nous venons de faire pour réexprimer $S_n(f)(\theta)$ sous forme compacte, on peut représenter la n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f)$ sous la forme d'une convolution de f (à gauche) avec une certaine fonction :

$$\sigma_n(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k * f = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k \right) * f$$

qui n'est autre que la moyenne de Cesàro des noyaux de Dirichlet :

$$F_n := \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} D_k.$$

et que l'on appelle habituellement *noyau de Fejér* $F_n(\theta)$.

À nouveau, ce noyau se calcule explicitement en fonction de θ , et il va se produire un *spectaculaire miracle*, découvert par Fejér en 1908, qui fut à l'origine de développements majeurs dans l'Analyse mathématique.

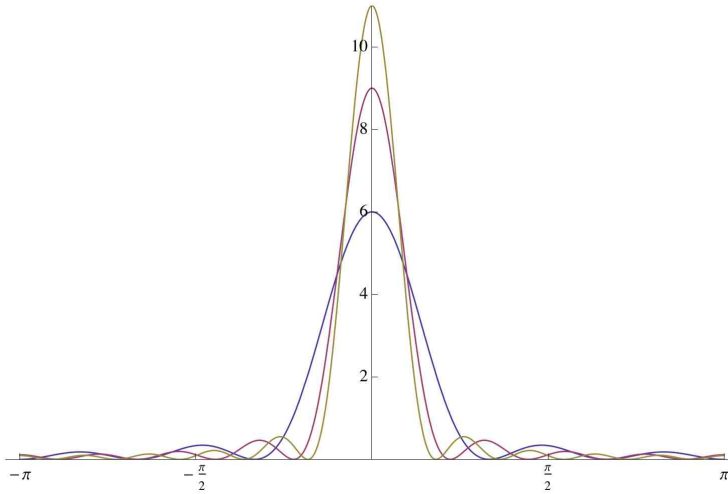
Lorsque $\theta = 0$ (et d'ailleurs aussi, lorsque $\theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), on a tout d'abord :

$$F_n(0) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (2k + 1) = \frac{1}{n} n^2 = n.$$

Mais génériquement, on a $\theta \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et alors en utilisant l'expression explicite de $D_n(\theta)$, on peut calculer progressivement :

$$\begin{aligned}
 n F_n(\theta) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin\left(\left(k + \frac{1}{2}\right)\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im}\left(e^{ik\theta} e^{i\theta/2}\right) \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left\{\left(\sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta}\right) e^{i\theta/2}\right\} \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left\{\frac{e^{in\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} e^{i\theta/2}\right\} \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left\{e^{in\theta/2} \frac{e^{in\theta/2} - e^{-in\theta/2}}{e^{i\theta/2} - e^{-i\theta/2}}\right\} \\
 &= \frac{1}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \operatorname{Im}\left\{e^{in\theta/2} \frac{\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\right\} \\
 &= \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right]^2,
 \end{aligned}$$

et il est remarquable de constater alors que ce noyau prend des valeurs qui sont *toujours positives*. Pour $n = 5, 8, 10$, les graphes des F_n sont les suivants.



Proposition 7.4. [Propriétés du noyau de Fejér] Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ et tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ème somme de Cesàro :

$$\sigma_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_{n-1}(f)}{n}$$

des sommes partielles $S_k(f)(\theta) = \sum_{l=-k}^{l=+k} \widehat{f}(l) e^{il\theta}$ de la série de Fourier de f s'exprime comme la convolution (à droite ou à gauche) :

$$\sigma_n(f) = F_n * f = f * F_n$$

de f avec le noyau de Fejér :

$$F_n(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

qui ne prend que des valeurs positives. De plus, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale sur $[-\pi, +\pi]$ de ce noyau positif est toujours égale à 1 :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \|F_n\|_{L^1},$$

ce qui montre que la fonction 2π -périodique continue $\theta \mapsto F_n(\theta)$ est une densité de probabilité sur tout intervalle de longueur 2π . Enfin, pour tout réel $\delta > 0$ fixé et arbitrairement petit, la portion de l'aire du graphe de F_n située hors du petit intervalle $[-\delta, \delta]$ autour de 0 tend vers zéro quand n tend vers l'infini :

$$(7.5) \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

Cette dernière propriété montre que toute l'aire sous le graphe de F_n se concentre autour de zéro, et c'est surtout grâce à elle que nous allons pouvoir démontrer que la série de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ de toute fonction continue 2π -périodique converge uniformément vers la fonction f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, un résultat inaccessible (et d'ailleurs faux) lorsqu'on ne considère que les sommes de Fourier $S_n(f)(\theta)$.

Démonstration. Le fait que $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ provient évidemment de la même propriété $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = 1$ qui est satisfaite, comme on l'a déjà vu, par le noyau de Dirichlet :

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} D_k(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{n} n = 1.$$

Fixons maintenant $\delta > 0$ petit. La parité du noyau $F_n(\theta)$ nous ramène à estimer :

$$\int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{\pi}.$$

Or la fonction $\theta \mapsto \sin^2(\theta/2)$ est croissante sur l'intervalle $[0, \pi]$, puisque sa dérivée $\sin(\theta/2) \cos(\theta/2)$ y est positive, donc on a :

$$\forall \theta \in [\delta, \pi] \quad \sin^2(\theta/2) \geq \sin^2(\delta/2),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \leq \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} = \frac{1}{\text{Constante}_\delta} \quad \forall \theta \in [\delta, \pi].$$

En majorant alors simplement $\sin^2(n\theta/2) \leq 1$, on en déduit une majoration de la quantité à estimer par un majorant :

$$\begin{aligned} 0 \leq \int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{\pi} &= \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin^2(n\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} \frac{d\theta}{\pi} \leq \frac{1}{n} \int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\text{Constante}_\delta} \frac{d\theta}{\pi} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\text{Constante}_\delta} \end{aligned}$$

qui tend visiblement vers 0 comme $\frac{1}{n}$ lorsque n tend vers $+\infty$ (le petit nombre réel $\delta > 0$ restant fixé). Ceci achève la preuve de la proposition. \square

Nous pouvons enfin énoncer et démontrer le fameux théorème de convergence qui est utilisé de manière cruciale dans le Théorème 6.1 fondamental d'après lequel — rappelons-le — la famille des exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$.

Théorème 7.6. [Fejér] *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est une fonction continue 2π -périodique sur \mathbb{R} , alors ses sommes de Fejér $\sigma_n(f)$ convergent uniformément vers f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ (donc aussi sur \mathbb{R} tout entier) :*

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \quad \|\sigma_n(f) - f\|_{\mathcal{C}^0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

C'est en effet la conséquence (presque immédiate) suivante que nous avons utilisée en l'admettant temporairement dans l'Affirmation 6.2.

Corollaire 7.7. *La famille des exponentielles-modèles $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale dans l'espace $(\mathcal{C}^0(\mathbb{T}), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$.*

Bien entendu, la notion de totalité que nous avons définie dans un espace de Hilbert se généralise, dans les mêmes termes, aux espaces vectoriels normés dont la norme ne dérive pas d'un produit scalaire : exercice d'assimilation conceptuelle.

Démonstration. En effet, les sommes $\sigma_n(f)$ sont les moyennes de Cesàro des sommes partielles $S_n(f)$ de la série de Fourier de f ; ces dernières étant manifestement des combinaisons linéaires finies des $e^{ik\theta}$, il en va de même pour les premières. D'ailleurs, il y a même une formule explicite :

$$n F_n(\theta) = \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) e^{ik\theta},$$

qui se démontre en créant une pyramide que l'on additionne verticalement :

$$\begin{aligned} n F_n(\theta) &= D_0 + D_1 + \dots + D_{n-1} \\ &= \begin{array}{l} 1 + \\ + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + \\ + e^{-2i\theta} + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \\ \dots \\ + e^{-i(n-1)\theta} + \dots + e^{-2i\theta} + e^{-i\theta} + 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \dots + e^{i(n-1)\theta} \end{array} \\ &= \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) e^{ik\theta}, \end{aligned}$$

les deux termes pour $|k| = n$ s'annulant, puis par convolution :

$$\sigma_n(f)(\theta) = F_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

cette dernière formule montrant bien que $\sigma_n(f)(\theta)$ est un polynôme (trigonométrique) en les deux variables $(e^{-i\theta}, e^{i\theta})$.

Le théorème que nous venons d'énoncer stipule donc bien la convergence vers f en norme \mathcal{C}^0 de la suite $\sigma_n(f)(\theta)$ de combinaisons linéaires finies d'exponentielles-modèles $e^{ik\theta}$. \square

Démonstration du Théorème 7.6. Toutes les considérations préliminaires qui précèdent nous permettent maintenant d'écrire la différence entre la fonction f et sa n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f)$ sous la forme d'une seule intégrale :

$$\begin{aligned}\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta) &= (\mathbb{F}_n * f)(\theta) - f(\theta) \\ &= (\mathbb{F}_n * f)(\theta) - f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{F}_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{F}_n(t) [f(\theta - t) - f(\theta)] \frac{dt}{2\pi},\end{aligned}$$

dans laquelle apparaissent les différences $f(\theta - t) - f(\theta)$ entre les valeurs de f . Et comme le noyau de Fejér est positif, on en déduit la majoration, valable pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$|\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{F}_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi}.$$

Examinons ce majorant : on voudrait bien qu'il tende vers zéro lorsque n tend vers ∞ ; or nous nous rappelons que la masse de $\mathbb{F}_n(t)$ est concentrée autour de $t = 0$, et pour les valeurs petites de t , il est clair par continuité de f que $|f(\theta - t) - f(\theta)|$ est petit, uniformément en $\theta \in [-\pi, \pi]$. Il faudra donc découper l'intégrale $\int_{-\pi}^{\pi}$ en un premier morceau $\int_{-\delta}^{\delta}$ autour de 0 qui va être petit grâce à la petitesse de $|f(\theta - t) - f(\theta)|$ pour $|t| \leq \delta$, et un second morceau $\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}$ qui va lui aussi être petit grâce à petitesse de \mathbb{F}_n exprimée par l'équation (7.5) :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(\delta) \quad \text{où :} \quad I_n(\delta) := \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \mathbb{F}_n(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

Formalisons rigoureusement cette stratégie de démonstration.

Ainsi, puisque la fonction 2π -périodique f est *uniformément* continue sur \mathbb{R} tout entier d'après le Lemme 1.3, on a :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \text{tel que} \quad (|t| \leq \delta \implies \max_{\theta \in \mathbb{R}} |f(\theta - t) - f(\theta)| \leq \varepsilon).$$

Fixons donc un $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Bien entendu, on peut toujours imposer au δ ci-dessus d'être inférieur à π . Découpons alors l'intégrale majorante en question selon $|t| \leq \delta$ et selon $\delta \leq |t| \leq \pi$ et appliquons les majorations que nous avons anticipées :

$$\begin{aligned}|\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| &\leq \int_{|t| \leq \delta} \mathbb{F}_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \mathbb{F}_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \max_{\substack{|t| \leq \delta \\ \theta \in \mathbb{R}}} |f(\theta - t) - f(\theta)| \int_{|t| \leq \delta} \mathbb{F}_n(t) \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \mathbb{F}_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \mathbb{F}_n(t) \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta) \\ &\leq \varepsilon + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta).\end{aligned}$$

Or puisque $I_n(\delta)$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, avec le même $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit que nous avons fixé à l'instant, il existe un entier $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$n \geq N \implies 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} I_n(\delta) \leq \varepsilon.$$

En conclusion, nous avons établi que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $N \gg 1$ assez grand pour que :

$$(n \geq N \implies |\sigma_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq 2\varepsilon) \quad \forall \theta \in \mathbb{R},$$

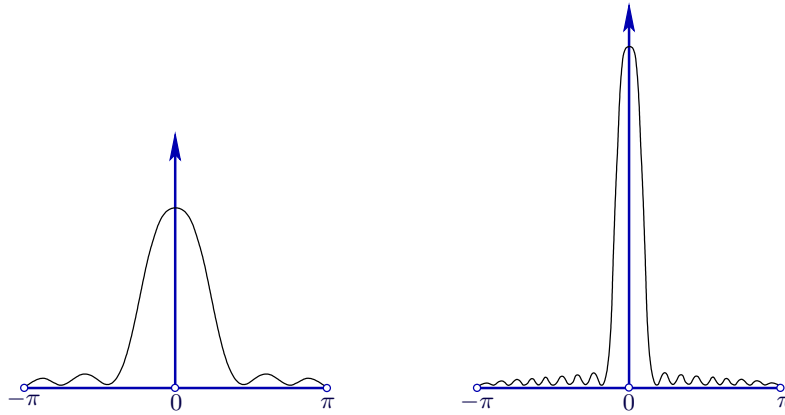
et ceci termine de démontrer que $\sigma_n(f)$ converge uniformément vers f en norme \mathcal{C}^0 . \square

8. 'Bons noyaux' et convolution

Dans la démonstration du théorème de Fejér, nous avons construit une suite de polynômes trigonométriques :

$$F_n(\theta) = \sum_{-n \leq k \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ik\theta}$$

qui pointait fortement à l'origine $\theta = 0$, et s'abaissait vers 0 sur tout $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ avec $0 < \delta \leq \pi$ arbitrairement petit. Comme résultat, nous avons pu extraire le comportement d'une fonction au voisinage d'un point. Maintenant, nous abstrayons les propriétés du noyau de Fejér, et nous formulons un cadre *a priori* beaucoup plus général dans lequel des résultats de convergence de type Fejér seront valables, presque sans aucun effort supplémentaire.



Définition 8.1. Une famille de fonctions-noyaux :

$$\{\mathbf{K}_n(\theta)\}_{n \geq 1}$$

définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et au moins de classe \mathcal{C}^0 est dite être une famille de *bons noyaux* lorsqu'elle satisfait les *trois* propriétés suivantes :

(a) pour tout $n \geq 1$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{K}_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi};$$

(b) il existe une constante $M > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\mathbf{K}_n(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi} \leq M;$$

(c) pour tout $0 < \delta < \pi$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} |\mathbf{K}_n(\theta)| \frac{d\theta}{2\pi}.$$

En pratique, on rencontre surtout des fonctions-noyaux à valeurs $\mathbf{K}_n(\theta) \geq 0$ positives, et alors (b) est conséquence triviale de (a).

On peut interpréter de tels $\mathbf{K}_n(\theta)$ comme des distributions de poids sur le cercle unité : la propriété (a) signifie que \mathbf{K}_n assigne la masse 1 à la totalité du cercle $[-\pi, \pi]/2\pi\mathbb{Z}$, et la propriété (c) signifie que cette masse se concentre de plus en plus autour de l'origine $\theta = 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$.

Voici donc la généralisation naturelle du Théorème de Fejér.

Théorème 8.2. *Étant donné une famille de bons noyaux sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$:*

$$\{\mathbf{K}_n(\theta)\}_{n \geq 1},$$

pour toute fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, la suite des convolées :

$$f * \mathbf{K}_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) \mathbf{K}_n(t) \frac{dt}{2\pi}$$

converge en norme \mathcal{C}^0 vers f :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\max_{\theta \in \mathbb{T}} |f * \mathbf{K}_n(\theta) - f(\theta)| \right).$$

Classiquement, une telle famille $\{\mathbf{K}_n\}$ de bons noyaux est appelée une *approximation de l'identité*, puisqu'elle redonne la fonction à la limite.

Ici, la convolution :

$$f * \mathbf{K}_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) \mathbf{K}_n(t) \frac{dt}{2\pi}$$

s'interprète naturellement comme une moyennisation à poids, à savoir la valeur moyenne de $f(\theta - t)$ sur le cercle affectée de la distribution de poids $\mathbf{K}_n(t)$. Et cruciallement, cette distribution de poids $\mathbf{K}_n(t)$ se concentre de plus en plus au point $t = 0$, avec toujours une masse totale égale à 1, et donc à la limite, on extrait la valeur :

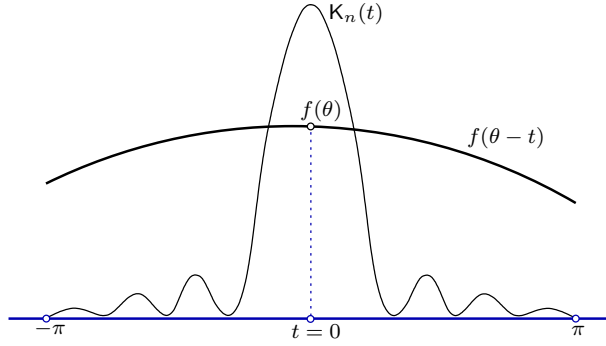
$$1 \cdot f(\theta - 0) = f(\theta).$$

Autrement dit, l'intégrale affecte à la limite *toute* la masse au point $t = 0$.

Démonstration. La preuve requiert une légère variation de la démonstration du théorème de Fejér.

Par uniforme continuité de la fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ continue sur le cercle compact \mathbb{T} , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$|t| \leq \delta \implies |f(\theta - t) - f(\theta)| \leq \varepsilon.$$



Grâce à la propriété **(a)** que la masse de K_n vaut toujours 1, on peut écrire la différence à estimer :

$$\begin{aligned} (f * K_n)(\theta) - f(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) K_n(t) \frac{dt}{2\pi} - f(\theta) \cdot 1 \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta - t) - f(\theta)] K_n(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ensuite, on découpe l'intégrale comme :

$$\begin{aligned} |(f * K_n)(\theta) - f(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(\theta - t) - f(\theta)] K_n(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta - t) - f(\theta)| |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(\theta - t) - f(\theta)| |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon M + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |K_n(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \varepsilon \cdot \text{constante} + (\text{Quantité} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0), \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Rappelons que les sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sont :

$$\begin{aligned} S_n(f)(\theta) &= (f * D_n)(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) D_n(t) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

en termes du noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2} + 1\right) t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

On pourrait alors se demander de manière tout à fait légitime si la famille $\{D_n\}_{n \geq 1}$ est une famille de bons noyaux au sens de la définition qui précède, mais malheureusement, ce n'est pas du tout le cas, car la condition **(b)** de bornitude uniforme des normes L^1 n'est pas satisfaite, et nous allons démontrer dans peu de temps que :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(t)| \frac{dt}{2\pi} = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1).$$

9. Principe de localisation

Maintenant, revenons au problème initial (Question 2.5) : étudier la convergence de la vraie série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$. Nous savons que la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f s'écrit comme le produit de convolution :

$$S_n(f)(\theta) = D_n * f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi}$$

de f avec le noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) := \begin{cases} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ 2n + 1 & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Proposition 9.1. [Principe de localisation] *Si $f, g \in L^1(\mathbb{T})$ sont deux fonctions Lebesgue-intégrables sur le cercle \mathbb{T} qui coïncident dans un intervalle ouvert non vide $]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[$, $\delta > 0$, centré en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, à savoir $f(\theta) = g(\theta)$ pour tout $\theta \in]\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta[$, alors leurs deux séries de Fourier en θ_0 ont le même comportement (convergence ou divergence) en ce point :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0)].$$

Démonstration. En soustrayant les deux formules de convolution avec le noyau de Dirichlet écrites pour f et pour g , on obtient :

$$\begin{aligned} S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0) &= D_n * (g - f)(\theta_0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) [g(\theta_0 - t) - f(\theta_0 - t)] \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\pi} D_n(t) [g(\theta_0 - t) + g(\theta_0 + t) - f(\theta_0 - t) - f(\theta_0 + t)] \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

puisque le noyau de Dirichlet est pair. Mais comme par hypothèse, $g(\theta) = f(\theta)$ pour tout θ avec $|\theta - \theta_0| < \delta$, l'intégrale \int_0^{δ} disparaît et il reste donc seulement :

$$\int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} h_{f,g}(t) \frac{dt}{2\pi},$$

pour une certaine fonction $h_{f,g} \in L^1(\mathbb{T})$ qui est écrite entre crochets ci-dessus. Mais il se trouve que pour tout δ avec $0 < \delta < \pi$ et pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$, le fait que le numérateur $\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$ du noyau de Dirichlet soit borné par $\frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}$ lorsque t varie seulement dans $[\delta, \pi]$ permet facilement de voir que la fonction $\frac{h(t)}{\sin(\frac{t}{2})}$ est intégrable sur $[\delta, \pi]$:

$$\int_{\delta}^{\pi} \left| \frac{h(t)}{\sin(t/2)} \right| \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta}^{\pi} |h(t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1}.$$

Enfin, le lemme de Riemann-Lebesgue (Corollaire 4.2) s'applique grâce à la présence de $\sin\left((n + \frac{1}{2})t\right)$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [S_n(g)(\theta_0) - S_n(f)(\theta_0)] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta}^{\pi} \sin\left((n + \frac{1}{2})t\right) \frac{h_{f,g}(t)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \frac{dt}{2\pi} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

Ce résultat montre que le comportement de la série de Fourier d'une fonction f en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ dépend seulement des valeurs qu'elle prend dans un voisinage ouvert autour de θ_0 , aussi petit soit-il. Cette propriété des séries de Fourier est quelque peu surprenante, car dans la série de Fourier de f , les valeurs des coefficients $\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$ dépendent visiblement de la définition de f dans un intervalle de périodicité *complet*, ici $[-\pi, \pi]$.

Corollaire 9.2. *Sous les mêmes hypothèses, si la série de Fourier de f converge vers une limite ℓ en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, alors la série de Fourier de g converge vers la même limite ℓ en ce point θ_0 . \square*

10. Constantes de Lebesgue

Un examen plus approfondi de la démonstration du principe de localisation ci-dessus permet d'observer, au-delà de similarités évidentes, une différence majeure entre les deux noyaux de Dirichlet D_n et de Fejér F_n .

Lemme 10.1. *Le noyau de Dirichlet et le noyau de Fejér sont tous deux pairs et ils satisfont, pour tout nombre arbitraire (petit) δ avec $0 < \delta < \pi$:*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\delta}^{\pi} D_n(t) \frac{dt}{2\pi},$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \int_{\delta}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

Plus généralement, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$, on a pour tout nombre arbitraire (petit) δ avec $0 < \delta < \pi$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} D_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi},$$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

Cependant, l'analogie entre les deux noyaux D_n et F_n s'arrête là, et tandis que F_n prend seulement des valeurs positives et que sa norme L^1 :

$$\|F_n\|_{L^1} = 1 \quad (n \geq 1)$$

est toujours égale à 1, le noyau de Dirichlet D_n quant à lui prend alternativement des valeurs positives et négatives, et surtout, sa norme L^1 tend vers l'infini :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + O(1) \quad (n \geq 1).$$

Là gît la raison profonde pourquoi les théorèmes de convergence pour les séries de Fourier sont difficiles.

Démonstration. Sans utiliser le Lemme de Riemann-Lebesgue, nous avons déjà vu que l'intégrale de F_n sur $\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ tend vers zéro lorsque $n \rightarrow \infty$, dans l'équation (7.5). Mais il y a en fait beaucoup mieux, son supremum sur $\{\delta \leq |\theta| \leq \pi\}$ est majoré par une quantité :

$$\max_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} F_n(\theta) = \max_{\delta \leq |\theta| \leq \pi} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}\theta\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \right]^2 \leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\delta}{2}\right)}}_{\text{constante}}$$

qui tend visiblement vers 0 lorsque $n \rightarrow +\infty$. Ensuite, comme $|F_n(t)| = F_n(t)$ pour tout $t \in \mathbb{T}$, on en déduit aisément :

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi} \right| &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |h(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$.

Les deux mêmes propriétés pour le noyau de Dirichlet D_n se démontrent de la même manière.

Estimons maintenant la norme L^1 du noyau de Dirichlet,

$$\|D_n\|_{L^1},$$

quantités appelées *constantes de Lebesgue* dont on doit donc démontrer qu'elles tendent vers $+\infty$ comme $\log n$. Commençons par établir les deux inégalités fonctionnelles préparatoires :

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t,$$

pour tout $t \in [0, \infty[$. Intégrer l'inégalité triviale $\cos t \leq 1$ donne l'inégalité connue $\sin t \leq t$ valable pour tout $t \geq 0$. Autrement dit : $-t \leq -\sin t$, inégalité que l'on intègre à nouveau pour obtenir, après transfert à gauche de la constante 1 d'intégration :

$$1 - \frac{t^2}{2} \leq \cos t,$$

inégalité valable sur $[0, \infty[$. Enfin, une troisième et dernière intégration donne l'inégalité désirée :

$$t - \frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t,$$

satisfaite sur $[0, \infty[$.

Ensuite, en remplaçant t par $\frac{t}{2}$, l'inégalité préparatoire devient :

$$\frac{t}{2} - \frac{t^3}{48} \leq \sin \frac{t}{2} \leq \frac{t}{2}.$$

Par inversion, les inégalités et les extrémités échangent leurs rôles :

$$\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leq \frac{2}{t} \frac{1}{1 - \frac{t^2}{24}}.$$

Or sur l'intervalle $[0, \pi]$, on a l'inégalité (légèrement grossière) $\frac{t^2}{24} \leq \frac{1}{2}$, et en appliquant l'inégalité :

$$\frac{1}{1-x} \leq 1 + 2x,$$

dont on vérifie qu'elle est trivialement satisfaite pour $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, on déduit que :

$$\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} \leq \frac{2}{t} + \frac{t}{6},$$

à nouveau pour tout $t \in [0, \pi]$.

Maintenant, par parité de la fonction qui définit le noyau de Dirichlet, sa norme est égale à :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{\sin(\frac{t}{2})} dt.$$

En appliquant les inégalités vues à l'instant, on déduit aisément :

$$\begin{aligned} 0 \leq \|D_n\|_{L^1} - \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi 2 \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt &\leq \frac{2}{2\pi} \int_0^\pi \frac{t}{6} |\sin(n + \frac{1}{2})t| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{t}{6} dt \\ &= \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

Dans l'intégrale considérée à l'instant qui approche donc $\|D_n\|_{L^1}$ à $O(1)$ près, on pose :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)t =: v, \quad \text{d'où : } \frac{dt}{t} = \frac{dv}{v},$$

ce qui la transforme en deux morceaux dont le second est d'une contribution négligeable :

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin(n + \frac{1}{2})t|}{t} dt &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v} dv \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv + \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_{n\pi}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \frac{|\sin v|}{v} dv}_{\leq \frac{1}{n\pi} \frac{\pi}{2} = O(\frac{1}{n})}. \end{aligned}$$

Naturellement, grâce aux changements de variables linéaires $v := k\pi + u$ effectués pour $k = 0, \dots, n-1$, l'intégrale restante (le premier morceau) se décompose en une somme d'intégrales sur $[0, \pi]$:

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi} \frac{|\sin v|}{v} dv = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin u|}{k\pi + u} du.$$

En définitive, on obtient (la valeur absolue disparaît) :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} du + O(1) + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

expression dans laquelle la constante qui se cache dans le $O(1)$ n'a pas été modifiée et peut être prise égale à $\frac{\pi}{12}$.

Tout d'abord, le terme pour $k = 0$ de cette dernière somme est majoré par :

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin u}{u} du \leq \pi.$$

Ensuite, pour tout entier k avec $1 \leq k \leq n-1$, les inégalités triviales :

$$\frac{1}{k\pi + \pi} \leq \frac{1}{k\pi + u} \leq \frac{1}{k\pi},$$

valables pour tout $u \in [0, \pi]$, multipliées par la quantité positive $\sin u$, intégrées sur $[0, \pi]$, puis sommées pour k allant de 1 à $n - 1$, donnent :

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + \pi} \underbrace{\int_0^\pi \sin u \, du}_{=2} \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} \, du \leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi} \underbrace{\int_0^\pi \frac{\sin u}{u} \, du}_{=2}.$$

Or on est en mesure de s'imaginer que l'étudiant sait pertinemment que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} = \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

où γ est la constante d'Euler (sinon, l'étudiant en question est prié de se cultiver sur la question). Donc on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{4}{\pi^2} \left(-\frac{1}{1} + \log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right) \right) &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{\sin u}{k\pi + u} \, du \\ &\leq \frac{4}{\pi^2} (\log n + \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right)). \end{aligned}$$

En faisant le bilan de toutes les inégalités établies jusqu'à présent, on conclut par exemple que :

$$\left| \|D_n\|_{L^1} - \frac{4}{\pi^2} \log n \right| \leq \frac{\pi}{12} + \pi + \frac{4}{\pi^2} \gamma + O\left(\frac{1}{n}\right),$$

ce qui conclut. □

Question laissée en suspens : quelle est la valeur *exacte* de la constante c telle que :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + c + O\left(\frac{1}{n}\right)?$$

11. Théorème de Dirichlet

Rappelons que l'on identifie les fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ avec les fonctions 2π -périodiques définies sur \mathbb{R} , de telle sorte qu'il suffit de considérer ces fonctions sur n'importe quel intervalle de longueur 2π .

Définition 11.1. Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, on dit qu'une fonction f à valeurs dans \mathbb{C} est \mathcal{C}^1 *par morceaux* s'il existe un nombre fini $\kappa \geq 0$ de points :

$$-\pi < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{\kappa-1} < \theta_\kappa < \pi$$

tels que les trois conditions suivantes sont satisfaites :

(i) il existe $\delta > 0$ (très petit) tel que f est de classe \mathcal{C}^1 , *i.e.* continûment différentiable, sur la réunion :

$$]-\pi - \delta, \theta_1[\cup]\theta_1, \theta_2[\cup \dots \cup]\theta_{\kappa-1}, \theta_\kappa[\cup]\theta_\kappa, \pi + \delta[;$$

(ii) pour tout $1 \leq \lambda \leq \kappa$, les deux limites suivantes à gauche et à droite existent :

$$f_-(\theta_\lambda) := \lim_{t \rightarrow 0^-} f(\theta_\lambda + t) \quad \text{et} \quad f_+(\theta_\lambda) := \lim_{t \rightarrow 0^+} f(\theta_\lambda + t);$$

(iii) pour tout $1 \leq \lambda \leq \kappa$, les deux dérivées suivantes à gauche et à droite existent :

$$f'_-(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_\lambda + t) - f_-(\theta_\lambda)}{t} \quad \text{et} \quad f'_+(\theta_\lambda) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_\lambda + t) - f_+(\theta_\lambda)}{t}.$$

Bien entendu, en tous les autres points $\theta \neq \theta_\lambda$, $\lambda = 1, \dots, \kappa$, la fonction est continue :

$$f_-(\theta) = f_+(\theta),$$

dérivable, avec dérivées à droite et à gauche qui coïncident :

$$f'_-(\theta) = f'(\theta) = f'_+(\theta).$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, rappelons l'expression de la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f :

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Ce fut un grand problème historique d'étudier quelles conditions la fonction f doit satisfaire pour être égale à sa série de Fourier :

$$\begin{aligned} f(\theta) &\stackrel{?}{=} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f), \end{aligned}$$

en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ donné, en presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$, voire même en tout point $\theta \in \mathbb{T}$.

En 1847, Peter Lejeune-Dirichlet fut l'un des premiers mathématiciens à avoir démontré un théorème *rigoureux* de convergence. Le théorème que Dirichlet a vraiment démontré stipulait que si, au voisinage d'un point θ_0 , la fonction f n'a qu'un nombre *fini* de maxima et de minima, autrement dit, si elle est en fait monotone à gauche et à droite dans des voisinages assez petits de θ_0 , alors la convergence désirée a lieu.

L'histoire des mathématiques étant faite de grands mystères inexplicables, actuellement, ce qu'on appelle *Théorème de Dirichlet* est un *autre* théorème, l'une des 'stars' de l'enseignement de l'Analyse de Fourier de par le monde, célébrité que voici.

Théorème 11.2. [de Dirichlet] *Si une fonction $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est \mathcal{C}^1 par morceaux, alors en tout point $\theta \in \mathbb{R}$, la série de Fourier de f converge vers la demi-somme de ses limites à gauche et à droite :*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f) = \frac{f_-(\theta) + f_+(\theta)}{2},$$

demi-somme qui est égale à $f(\theta)$ en tout point de continuité de f .

Lorsqu'on analyse finement la démonstration, on est naturellement amené à 'découvrir' un théorème légèrement plus général, que nous nous proposons maintenant d'expliquer.

Fixons $\theta_0 \in \mathbb{T}$. Tout d'abord, puisque toute fonction admettant une limite en un point reste localement bornée au voisinage de ce point, il est clair que les deux hypothèses d'existence de dérivées à gauche et à droite :

$$f'_-(\theta_0) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_0 + t) - f_-(\theta_0)}{t} \quad \text{et} \quad f'_+(\theta_0) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t}$$

— limites qui coïncident d'ailleurs lorsque $\theta_0 \neq \theta_1, \dots, \theta_\kappa$ —, assure qu'il existe $\delta > 0$ et $0 \leq C < \infty$ tels que :

$$\left| \frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t} \right| \leq C \quad (\forall 0 < t \leq \delta),$$

$$\left| \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t} \right| \leq C \quad (\forall 0 < t \leq \delta).$$

Ainsi, les hypothèses du théorème plus général suivant sont en fait satisfaites en *tout* point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ par le Théorème 11.2 de Dirichlet, et donc, nous pouvons nous concentrer à partir de maintenant sur ce nouvel énoncé.

Théorème 11.3. *Soit une fonction 2π -périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Lebesgue-intégrable, c'est-à-dire L^1 , sur $[-\pi, \pi]$. Si, en un point $\theta_0 \in \mathbb{R}$, les deux hypothèses suivantes sont satisfaites :*

(i) *les deux limites suivantes à gauche et à droite existent :*

$$f_-(\theta_0) := \lim_{t \underset{>}{\rightarrow} 0} f(\theta_0 + t) \quad \text{et} \quad f_+(\theta_0) := \lim_{t \underset{<}{\rightarrow} 0} f(\theta_0 + t);$$

(ii) *il existe $\delta > 0$ tel que :*

$$\int_0^\delta \left| \frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t} \right| dt < \infty \quad \text{et} \quad \int_0^\delta \left| \frac{f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)}{t} \right| dt < \infty;$$

alors la série de Fourier de f en θ_0 converge vers :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta_0} \right) = \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}.$$

Démonstration. Rappelons que la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f en un point quelconque $\theta \in \mathbb{T}$ se contracte comme la convolution :

$$S_n(f)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi},$$

de la fonction f avec le n -ème noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Or il se trouve que ce noyau, quotient de sinus, est une fonction *paire* de t , et par conséquent, on peut décomposer l'intégrale de convolution ci-dessus, changer de variable, et rassembler les termes :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} &= \underbrace{\int_{-\pi}^0 \text{idem}}_{\text{poser } u := -t} + \int_0^{\pi} \text{idem} \\ &= \int_0^{\pi} D_n(-u) f(\theta + u) \frac{du}{2\pi} + \int_0^{\pi} D_n(t) f(\theta - t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta - t) + f(\theta + t)] \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

En le point θ_0 où les deux hypothèses **(i)** et **(ii)** sont satisfaites, pour établir le théorème, il s'agit donc d'estimer la différence :

$$\begin{aligned} S_n(f)(\theta_0) - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} &= \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) f(\theta_0 - t) \frac{dt}{2\pi} - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} \\ &= \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t)] \frac{dt}{2\pi} - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}, \end{aligned}$$

et de montrer qu'elle tend vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$. Mais puisque :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_n = \int_{-\pi}^0 D_n + \int_0^{\pi} D_n = 2 \int_0^{\pi} D_n,$$

on peut, de manière très agréable et très astucieuse, ré-écrire le $\frac{1}{2}$ de la demi-somme $\frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}$ comme l'intégrale $\int_0^{\pi} D_n$ et *absorber-factoriser* le tout dans une *unique* intégrale :

$$S_n(f)(\theta_0) - \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} = \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0) + f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}.$$

La démonstration se terminera alors grâce à l'assertion suivante. \square

Assertion 11.4. *Les deux limites suivantes sont nulles :*

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}, \\ 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} D_n(t) [f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Démonstration. Par symétrie, il suffit bien entendu de traiter seulement la première. C'est alors à cet instant précis qu'il faut réinsérer l'expression explicite du noyau D_n , en faisant mieux apparaître le fait que la singularité qu'il incorpore au dénominateur se comporte simplement comme du $\frac{1}{t}$:

$$\begin{aligned} D_n(t) &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{t} \cdot \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}, \end{aligned}$$

puisqu'on se convainc aisément que la fonction $\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}$ se comporte comme $\frac{2}{t}$ en $t = 0$, et on se convainc tout aussi aisément que la fonction :

$$\begin{aligned} [0, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t &\longmapsto \frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \end{aligned}$$

est continue bornée sur $[0, \pi]$; en effet, il suffit de vérifier qu'elle se prolonge par continuité avec la valeur $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ en $t = 0$, mais aussi, on peut se rappeler que plus haut, on a même établi l'inégalité $\frac{2}{t} \leq \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{2}{t} + \frac{t}{6}$ valable pour $0 < t \leq \pi$, qui suffit manifestement aussi pour faire voir le caractère borné.

Alors la première intégrale dont il faut établir qu'elle converge vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ peut être ré-écrite sous une forme qui fait clairement apparaître la deuxième hypothèse (ii) :

$$\int_0^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \underbrace{\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}}_{\mathcal{C}^0 \text{ sur } [0,\pi]} \cdot \underbrace{\left[\frac{f(\theta_0 - t) - f_-(\theta_0)}{t}\right]}_{L^1 \text{ sur } [0,\pi]} \frac{dt}{2\pi}.$$

=: une certaine fonction $g \in L^1[0,\pi]$

On se retrouve alors dans la situation typique d'un énoncé simple et célèbre, ce qui conclura, la seconde intégrale se traitant de la même manière. \square

Lemme 11.5. [de Riemann-Lebesgue général] Sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une fonction $g \in L^1([a, b], \mathbb{C})$. Alors on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) e^{i\omega t} dt, \\ 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) \sin(\omega t) dt, \\ 0 &= \lim_{\substack{|\omega| \rightarrow \infty \\ \omega \in \mathbb{R}}} \int_a^b g(t) \cos(\omega t) dt. \end{aligned}$$

Démonstration. Par densité des fonctions en escalier dans L^1 , il suffit d'établir ceci pour une fonction indicatrice :

$$g = \mathbf{1}_{[c,d]},$$

avec $a \leq c < d \leq b$ quelconques.

Or, comme on connaît une primitive évidente de l'exponentielle (ou du sinus, ou du cosinus, la démonstration serait similaire), il est facile de calculer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathbf{1}_{[c,d]}(t) e^{i\omega t} dt &= \int_c^d e^{i\omega t} dt \\ &= \left[\frac{e^{i\omega t}}{i\omega} \right]_c^d \\ &= \frac{e^{i\omega d} - e^{i\omega c}}{i\omega}, \end{aligned}$$

et puisque les deux exponentielles au numérateur sont de module égal à 1 — l'hypothèse $\omega \in \mathbb{R}$ est importante ! —, il est instantané que la majoration :

$$\left| \int_c^d e^{i\omega t} dt \right| \leq \frac{2}{|\omega|}$$

montre bien la nullité de la limite ! Les sinus et les cosinus se traitent de manière analogue. \square

12. Théorèmes de Dini et de Jordan

Le Théorème de Dirichlet fut, historiquement parlant, le premier résultat sur les séries de Fourier qui ait été démontré de manière absolument rigoureuse. Il est important de noter que la fonction f est supposée *continûment différentiable* (à quelques exceptions près, finies en

nombre), et que cette hypothèse est *globale*, *i.e.*, la fonction f est supposée « raisonnable » sur tout intervalle de période ayant la longueur 2π .

Or Riemann (élève de Dirichlet) a observé, dans sa thèse d'habilitation en 1854, que la convergence de la série de Fourier d'une fonction *ne dépend en fait que du comportement de la fonction dans un intervalle ouvert arbitrairement petit autour de θ_0* , cf. le *Principe de localisation* 9.1. Ce phénomène mathématique peut déjà s'observer lorsqu'on examine attentivement la preuve du théorème de Dirichlet.

En tout cas, deux autres critères de convergence classiques pour les séries dus à Dini et à Jordan vont à présent ne faire que des hypothèses *locales* sur le comportement de la fonction.

Théorème 12.1. [de Dini] *Si, en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, une fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$ est telle que l'intégrale impropre suivante :*

$$\int_0^\pi \left| \frac{f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0)}{t} \right| \frac{dt}{2\pi} < \infty$$

converge, alors la série de Fourier de f converge au point θ_0 vers la valeur attendue $f(\theta_0)$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta_0} = f(\theta_0).$$

Démonstration. En fait, ce théorème découle d'une adaptation simple de la démonstration du Théorème 11.3 ci-dessus, puisque l'on peut écrire :

$$\begin{aligned} S_n(f)(\theta_0) - f(\theta_0) &= \int_0^\pi D_n(t) \left[f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0) \right] \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^\pi \sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)t\right) \cdot \underbrace{\frac{t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \left[\frac{f(\theta_0 - t) + f(\theta_0 + t) - 2f(\theta_0)}{t} \right]}_{\in L^1([0, \pi])} \frac{dt}{2\pi} \end{aligned}$$

et raisonner de la même manière en appliquant l'hypothèse de convergence de l'intégrale de la valeur absolue de la fonction entre crochets, et en appliquant à nouveau le Lemme 11.5 général de Riemann-Lebesgue \square

En particulier, l'hypothèse de Dini est satisfaite s'il existe un réel $\alpha > 0$ et une constante $C > 0$ tels que l'on ait, pour tout θ' dans un certain intervalle ouvert (non vide) centré en θ_0 :

$$|f(\theta') - f(\theta_0)| \leq C |\theta' - \theta_0|^\alpha,$$

puisque l'on peut alors majorer le numérateur par :

$$|f(\theta_0 - t) - f(\theta_0)| + |f(\theta_0 + t) - f(\theta_0)| \leq 2C t^\alpha,$$

et parce que l'on sait bien que l'intégrale impropre en zéro $\int_0^{\frac{\theta^\alpha}{\theta}} d\theta < +\infty$ converge.

Définition 12.2. Une fonction $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *höldérienne d'exposant $0 < \alpha \leq 1$* en un point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ s'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que :

$$|f(\theta') - f(\theta_0)| \leq C |\theta' - \theta_0|^\alpha.$$

Évidemment, f est alors *continue* en θ_0 . Hölder a globalisé ce type d'hypothèse de la manière suivante.

Définition 12.3. Une fonction $f: \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$ est dite *höldérienne d'exposant* $0 < \alpha \leq 1$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq C |\theta'' - \theta'|^\alpha,$$

pour tous $\theta', \theta'' \in \mathbb{R}$.

On notera alors :

$$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$$

l'espace des fonctions α -höldériennes sur \mathbb{T} , qui sont manifestement continues.

Définition 12.4. Lorsque $\alpha = 1$, c'est-à-dire lorsque :

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq C |\theta'' - \theta'|,$$

on dit que f est *Lipschitzienne*.

Donc le théorème de Dini avec une telle hypothèse globale nous donne comme corollaire le :

Théorème 12.5. *La série de Fourier de toute fonction $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ avec $0 < \alpha \leq 1$ converge vers la fonction en tout point du cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Mais ici, la convergence n'est pas forcément uniforme. Plus bas, on démontrera le Théorème dit « de Bernstein », d'après lequel la série de Fourier converge même *normalement* lorsque $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Par ailleurs, l'Exercice 20 donne la croissance :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

On notera au passage que notre hiérarchie d'espaces fonctionnels vient de s'enrichir par l'apparition de ce qui peut être considéré comme l'espace des fonctions qui ont une « dérivée d'ordre égal à un réel $\alpha \in]0, 1[$ quelconque » :

$$\mathcal{C}^1(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T}) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{T}).$$

On démontre, ce que nous laisserons en exercice, la complétude de ces trois espaces fonctionnels.

Proposition 12.6. *Les trois espaces vectoriels : $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ muni de la norme :*

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)|;$$

$\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ pour $0 < \alpha < 1$ muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^\alpha} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| + \sup_{\substack{\theta', \theta'' \in \mathbb{T} \\ \theta' \neq \theta''}} \frac{|f(\theta'') - f(\theta')|}{|\theta'' - \theta'|^\alpha}$$

et $\mathcal{C}^1(\mathbb{T})$ muni de la norme :

$$\|f\|_{\mathcal{C}^1} := \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f(\theta)| + \max_{\theta \in \mathbb{T}} |f'(\theta)|$$

sont chacun complet.

Mais alors, que se passe-t-il lorsque $\alpha \rightarrow 0$ dans les espace $\mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$? Il semblerait que l'on retrouve les fonction continues $\mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, et peut-être que le théorème de Dini-Hölder admet des généralisations qui s'appliqueraient aux fonctions qui sont seulement continues ?

Malheureusement, cette question de savoir si la série de Fourier d'une fonction continue (en tout point) converge *en tout point* vers la fonction, question motivée par la croyance du père de la théorie, Fourier lui-même, que tel devait être bien le cas, cette question a connu un destin particulièrement imprévisible, dialectique et chaotique — nous y reviendrons lorsque nous détaillerons le contre-exemple de du bois Reymond.

Pour revenir aux critères classiques de convergence, présentons pour terminer un dernier espace fonctionnel classique. Soient $-\infty < a < b < \infty$, et soit une fonction réelle :

$$f: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Partager $[a, b]$ en sous-segments revient à se pourvoir d'une collection d'un certain nombre fini $\nu \geq 1$ de points :

$$\Delta := \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}.$$

Définition 12.7. La *variation (absolue)* de f sur Δ est la quantité positive :

$$\begin{aligned} V_f(\Delta) &:= |f(a) - f(x_1)| + |f(x_1) - f(x_2)| + \cdots + |f(x_{\nu-1}) - f(b)| \\ &= \sum_{1 \leq \kappa \leq \nu} |f(x_{\kappa-1}) - f(x_\kappa)|. \end{aligned}$$

Par inégalité triangulaire, il est clair que :

$$\begin{aligned} |f(a) - f(b)| &= |f(a) - f(x_1) + f(x_1) - f(x_2) + \cdots + f(x_{\nu-1}) - f(b)| \\ &\leq V_f(\Delta). \end{aligned}$$

Définition 12.8. La *variation totale* de f sur $[a, b]$ est la quantité positive :

$$\begin{aligned} V_f[a, b] &:= \sup_{\Delta} V_f(\Delta) \\ &= \sup_{a < x_1 < \cdots < x_{\nu-1} < b} \sum_{1 \leq \kappa \leq \nu} |f(x_{\kappa-1}) - f(x_\kappa)|, \end{aligned}$$

nombre éventuellement infini appartenant à $[0, \infty]$.

On dit que f est à *variation bornée* lorsque cette quantité est *finie* :

$$0 \leq V_f[a, b] < \infty.$$

De ce qui précède, on déduit l'inégalité assez grossière $|f(a) - f(b)| \leq V_f[a, b]$, qui peut devenir intéressante lorsqu'on l'applique à la restriction de f à de petits intervalles $[c, d] \subset [a, b]$:

$$(12.9) \quad |f(c) - f(d)| \leq V_f[c, d].$$

Lemme 12.10. *Toute fonction monotone (croissante ou décroissante) $g: [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée égale à :*

$$V_g[a, b] = |g(a) - g(b)|.$$

Démonstration. Si, par exemple, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est décroissante, pour toute collection $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$, on a alors sans valeurs absolues :

$$\begin{aligned} 0 &\leq V_g(\Delta) = g(a) - g(x_1) + g(x_1) - g(x_2) + \dots + g(x_{\nu-1}) - g(b) \\ &= g(a) - g(b) < \infty, \end{aligned}$$

la somme étant télescopique, calculable, constante, finie, indépendante de Δ . \square

La somme $f = g_1 + \dots + g_k$ d'un nombre fini $k \geq 1$ quelconque de fonctions (monotones ou pas) possède une variation totale toujours majorée (exercice) par :

$$V_f[a, b] \leq V_{g_1}[a, b] + \dots + V_{g_k}[a, b],$$

et donc, lorsque g_1, \dots, g_k sont toutes à variation bornée, f l'est aussi.

Ce qui est remarquable, c'est que les fonctions à variation bornée se ramènent de cette manière à des fonctions monotones.

Théorème 12.11. *Toute fonction à variation bornée $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ peut être représentée comme différence :*

$$f = g - h,$$

entre deux fonctions $g, h: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ (faiblement) croissantes.

Démonstration. Pour tout $x \in [a, b]$, et toute collection finie $\Delta \subset [a, b]$ qui contient le point x , de telle sorte que $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2$ se partage alors en deux sous-collections concernant $[a, x]$ et $[x, b]$, on a trivialement :

$$V_f(\Delta_1) + V_f(\Delta_2) = V_f(\Delta_1 \cup \Delta_2),$$

et en prenant le supremum sur Δ_1 et sur Δ_2 , sachant qu'il y a plus de collection $\Delta \subset [a, b]$ que celles qui contiennent le point x , on obtient :

$$(12.12) \quad 0 \leq V_f[a, x] + V_f[x, b] \leq V_f[a, b] < \infty.$$

Pour $a \leq x' \leq x'' \leq b$, le même raisonnement sur $[a, x'']$ donne :

$$V_f[a, x'] + \underbrace{V_f[x', x'']}_{\geq 0} \leq V_f[a, x''],$$

ce qui montre que la fonction qui interprétera le premier rôle :

$$g: x \mapsto V_f[a, x]$$

est croissante !

Pour montrer que la deuxième fonction h qui vaut alors nécessairement $h := g - f$ et s'exprime donc manifestement comme :

$$h: x \mapsto V_f[a, x] - f(x),$$

est elle aussi (faiblement) croissante, avec $a \leq x' \leq x'' \leq b$, il suffit de minorer la différence :

$$h(x'') - h(x') = V_f[a, x''] - V_f[a, x'] - f(x'') + f(x')$$

$$\text{[Appliquer (12.12) sur } [a, x'']] \quad \geq V_f[x', x''] - (f(x'') - f(x')) \quad \square$$

$$\text{[Appliquer (12.9) sur } [x', x'']] \quad \geq 0.$$

Puisque les fonctions monotones sont Riemann-intégrables, les fonctions à variation bornée le sont elles aussi, et pour cette raison, il est naturel de quitter temporairement le cadre de la théorie de Lebesgue, pour revenir au cadre riemannien plus ancien.

Comme on sait que les fonctions monotones admettent en tout point des limites à gauche et à droite, il en va de même pour les fonctions à variation bornée.

Théorème 12.13. [de Jordan] *Si $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation bornée sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ vers la moyenne des limites à gauche et à droite de f en ce point :*

$$\frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(f)(\theta_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} \widehat{f}(k) e^{ik\theta_0}.$$

Démonstration. Par linéarité, il suffit de traiter le cas où f est monotone, puis croissante quitte à remplacer f par $-f$, ce que nous supposons dorénavant.

Pour atteindre cette convergence, comme dans la preuve de l'Assertion 11.4, on se ramène à démontrer que :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\pi [f(\theta_0 + t) - f_+(\theta_0)] \frac{\sin(\omega t)}{t} dt,$$

et en introduisant la fonction croissante :

$$g(t) := f(\theta_0 + t) - f(\theta_0),$$

qui satisfait $0 = g_+(0)$, il s'agit donc d'établir que :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \int_0^\pi g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt.$$

En remplaçant au besoin $g(0)$ par $g_+(0)$, ce qui ne change pas la valeur de l'intégrale à droite, on peut même supposer que g est continue à droite en 0.

Découpons alors l'intégrale en deux morceaux, au moyen d'un certain $0 < \delta < \pi$ très proche de 0 :

$$\int_0^\pi g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt + \underbrace{\int_\delta^\pi \frac{g(t)}{t} \sin(\omega t) dt}_{\xrightarrow{|\omega| \rightarrow \infty} 0},$$

la seconde intégrale tendant vers 0 lorsque $|\omega| \rightarrow \infty$, grâce au Lemme de Riemann-Lebesgue, puisque $\frac{g(t)}{t}$ devient Riemann-intégrable sur $[\delta, \pi]$ pour tout choix de $0 < \delta < \pi$.

Pour atteindre l'objectif, il suffira donc de faire voir que la première intégrale peut être rendue arbitrairement petite par un choix de $0 < \delta$ suffisamment petit. Commençons par un préliminaire utile.

Lemme 12.14. *La limite $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt$ existe.*

On peut même démontrer qu'elle vaut $\frac{\pi}{2}$, ce à quoi l'Exercice 19 se consacre, mais nous n'aurons pas besoin ici d'une information aussi précise.

Démonstration. Observons que $\frac{\sin t}{t}$ est continue en $t = 0$, et y prend la valeur 1, donc est continue sur $[0, \infty]$. Soit $M \geq 0$. Il existe un unique entier $n \geq 1$ tel que $(n-1)\pi \leq M < n\pi$, et alors :

$$\int_0^M \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt}_{=: a_k} + \underbrace{\int_{(n-1)\pi}^M \frac{\sin t}{t} dt}_{\xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0}$$

l'intégrale rémanente tendant vers 0 lorsque M (donc n) tend vers ∞ , puisque :

$$\left| \int_{(n-1)\pi}^M \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \int_{(n-1)\pi}^M \frac{dt}{t} \leq \int_{(n-1)\pi}^{n\pi} \frac{dt}{t} \leq \frac{\pi}{(n-1)\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Quant à la somme (contribution principale), vue comme série numérique $\sum_{k=1}^{n-1} a_k$, elle est *alternée*, car $\sin t$ est de signe $(-1)^{k-1}$ sur $](k-1)\pi, k\pi[$, et car :

$$\begin{aligned} 0 < |a_{k+1}| &= \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \\ \text{[Poser } u &=: \pi + t] &= \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{\pi + t} dt < \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt = |a_k|, \end{aligned}$$

donc grâce à un théorème connu, la série infinie alternée $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ converge. \square

Corollaire 12.15. *Il existe une constante $0 < C < \infty$ telle que $\left| \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq C$, pour tout $M \geq 0$.*

Démonstration. En effet, en tant que fonction de M , cette intégrale est continue (et même \mathcal{C}^1), et comme elle possède une limite à l'infini, hors d'un gros intervalle compact $[0, M_1]$, elle doit rester proche de sa limite à l'infini, donc être bornée. \square

Si nous revenons maintenant à la première intégrale $\int_0^\delta g(t) \frac{\sin t}{t} dt$ laissée sur le bord de notre route, un instrument puissant permettant de raccourcir de nombreuses démonstrations — censé être déjà assimilé grâce au cours d'Intégration — déclenche alors l'*instant magique* tant attendu.

Théorème 12.16. [Deuxième formule de la moyenne] *Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, étant donné deux fonctions :*

- $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-intégrable,
- $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ monotone (donc Riemann-intégrable),

il existe toujours un point intermédiaire $a \leq c \leq b$ tel que :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = g_+(a) \int_a^c f(x) dx + g_-(b) \int_c^b f(x) dx. \quad \square$$

L'intérêt majeur de cette deuxième formule de la moyenne, c'est que la fonction monotone g sort de l'intégrale ! Si donc nous l'appliquons à notre intégrale délicate, nous obtenons l'existence de $0 \leq \xi \leq \delta$ tel que :

$$\int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt = \underbrace{g_+(0)}_{\circ} \int_0^\xi \frac{\sin(\omega t)}{t} dt + g_-(\delta) \int_\xi^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt,$$

le premier terme disparaissant, puisqu'on s'était ramené à l'avance à $0 = g_+(0) = g(0)$, et le second terme tendant vers 0 avec $\delta > 0$:

$$0 = \lim_{\delta \xrightarrow{>} 0} g_-(\delta),$$

puisqu'il y a croissance et positivité de g :

$$0 \leq g_-(\delta) \leq \underbrace{g(\delta)}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0}.$$

Ainsi grâce à tout ce qui précède, et en supposant $\omega > 0$, puisque le cas $\omega < 0$ est équivalent, nous pouvons majorer l'intégrale 'sur le gril' en question :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\delta g(t) \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_\xi^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| \\ &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_0^\delta \frac{\sin(\omega t)}{t} dt - \int_0^\xi \frac{\sin(\omega t)}{t} dt \right| \\ \text{[Poser } u := \omega t \text{]} &= |g_-(\delta)| \cdot \left| \int_0^{\omega\delta} \frac{\sin u}{u} du - \int_0^{\omega\xi} \frac{\sin u}{u} du \right| \\ \text{[Corollaire 12.15]} &\leq |g_-(\delta)| \cdot 2C, \end{aligned}$$

par une quantité qui tend effectivement vers 0 lorsque $\delta \xrightarrow{>} 0$. □

13. Séries trigonométriques versus séries de Fourier

Une question naturelle est la suivante.

Question 13.1. *Toute série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ à coefficients $a_k \in \mathbb{C}$ est-elle la série de Fourier d'une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$?*

Cette question est tout à fait naturelle, puisqu'il faut connaître la généralité et l'extension des êtres mathématiques.

En fait, la réponse s'avère être négative pour une raison assez simple : le Lemme 4.1 de Riemann-Lebesgue énonce en effet que les coefficients de Fourier $\hat{f}(k)$ de toute fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ tendent vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$.

Par ailleurs, Cantor a démontré en 1870 qu'une série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ ne peut converger pour toute valeur de $\theta \in \mathbb{T}$ que si $a_k \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow \infty$. Plus généralement, Lebesgue a démontré que cette condition est encore nécessaire pour que la série trigonométrique converge en tout point d'un ensemble de mesure positive sur \mathbb{T} .

Donc la question peut être relancée.

Question 13.2. *Toute série trigonométrique $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ dont les coefficients complexes a_k satisfont :*

$$0 = \lim_{|k| \rightarrow \infty} |a_k|$$

est-elle la série de Fourier d'une certaine fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$?

La réponse est : *non !*, car Fatou a construit un contre-exemple qui apparaît dans le livre de Lebesgue en 1906.

Théorème 13.3. *La série trigonométrique :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

dont les coefficients tendent vers 0 n'est la série de Fourier d'aucune fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$.

Démonstration. Rappelons pour commencer que les noyaux de Fejér s'écrivent :

$$n F_n(\theta) = \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) e^{ik\theta}$$

et, pour toute fonction 2π -périodique Lebesgue-intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$(13.4) \quad F_n * f(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

où $\widehat{f}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$ désigne le k -ème coefficient de Fourier de f .

Lemme 13.5. *Soit g une fonction dans $L^1(\mathbb{T})$ telle que $\widehat{g}(0) = 0$, et soit $G(t) := \int_0^t g(s) ds$ sa primitive s'annulant en 0. Alors G est 2π -périodique et :*

$$\widehat{G}(0) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds.$$

Démonstration. Étant l'intégrale d'une fonction L^1 , la fonction $G(t) = \int_0^t g(s) ds$ est continue, et sa 2π -périodicité équivaut à $\widehat{g}(0) = 0$:

$$G(t+2\pi) = \int_0^{2\pi+t} g(s) ds = \int_0^t g(s) ds + \int_t^{2\pi+t} g(s) ds = G(t).$$

Pour calculer $\widehat{G}(0)$, il vaut mieux considérer $\int_0^{2\pi}$ au lieu de $\int_{-\pi}^{\pi}$. La fonction $(t, s) \mapsto g(s)$ étant intégrable sur le triangle $\{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq s \leq t \leq 2\pi\}$, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet d'échanger l'ordre de l'intégration double qui apparaît naturellement, et en prenant bon soin des bornes, on obtient la réponse :

$$\begin{aligned} \widehat{G}(0) &= \int_0^{2\pi} G(t) \frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^t g(s) ds \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds \int_s^{2\pi} g(s) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} ds (2\pi - s) g(s) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds, \end{aligned}$$

car l'intégrale correspondant au terme souligné s'annule, puisque $\widehat{g}(0) = 0$ par hypothèse (encore elle !). \square

Assertion 13.6. *Pour tout $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a :*

$$\widehat{G}(k) = \frac{1}{ik} \widehat{g}(k).$$

Démonstration. Envisageons l'identité affirmée sous la forme équivalente $\widehat{g}(k) = ik \widehat{G}(k)$, ce qui revient à dire que nous partons de la définition :

$$\widehat{g}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi},$$

et que nous prenons avantage du fait que la primitive G de g s'annulant en zéro peut être considérée, ce qui nous permet d'intégrer par parties :

$$\begin{aligned} \widehat{g}(k) &= \left[G(t) e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} G(t) (-ik) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= ik \int_{-\pi}^{\pi} G(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \\ &= ik \widehat{G}(k), \end{aligned}$$

le terme souligné s'annulant grâce à la 2π -périodicité de G observée à l'instant. \square

Nous affirmons maintenant que :

$$F_n * G(0) = \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1} \widehat{g}(k) \right).$$

En effet, en posant $\theta = 0$ dans l'identité (13.4) ci-dessus que l'on applique présentement à notre primitive G , en utilisant les relations démontrées jusqu'à ce point, et en réorganisant, on obtient effectivement :

$$\begin{aligned} F_n * G(0) &= \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{G}(k) = \widehat{G}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{G}(k) \\ &= \widehat{G}(0) + \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \frac{1}{ik} \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{|k|}{k} \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{G}(0) - i \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} + \frac{i}{n} \left(\sum_{k=1}^{k=n} \widehat{g}(k) - \sum_{k=-n}^{k=-1} \widehat{g}(k) \right). \end{aligned}$$

Assertion 13.7. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds.$$

Démonstration. Il devient enfin possible de raisonner sur l'identité intéressante obtenue à l'instant.

Comme la fonction G est continue, le théorème de Fejér assure que $F_n * G(0)$ converge vers $G(0) = 0$ lorsque n tend vers $+\infty$. Par ailleurs, le lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à la fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ fournit les deux limites :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \widehat{g}(k) \quad \text{et} \quad 0 = \lim_{k \rightarrow -\infty} \widehat{g}(k).$$

Le théorème de Cesàro, d'après lequel les moyennes arithmétiques de toute suite ayant une limite déterminée ont forcément la même limite nous donne alors aussi :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(1) + \cdots + \widehat{g}(n)}{n} \quad \text{et} \quad 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\widehat{g}(-1) + \cdots + \widehat{g}(-n)}{n}.$$

Il découle donc de notre identité intéressante que la limite, quand n tend vers ∞ , de la somme $\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k}$ existe et qu'elle n'est autre que $-i \widehat{G}(0)$, c'est-à-dire si l'on revient à son expression intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} s g(s) ds,$$

comme asserté. □

À présent, pour tout couple d'entiers (p, q) tels que $0 \leq p \leq q$ et tout $\theta \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, on se propose de calculer :

$$\sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) = \sum_{n=p}^{n=q} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i}.$$

en procédant comme suit :

$$\begin{aligned} \sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) &= \sum_{n=p}^{n=q} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \frac{e^{ip\theta} [1 + e^{i\theta} + \cdots + e^{i(q-p)\theta}] - e^{-ip\theta} [1 + e^{-i\theta} + \cdots + e^{-i(q-p)\theta}]}{2i} \\ &= \frac{e^{ip\theta}}{2i} \frac{e^{i(q-p+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} - \frac{e^{-ip\theta}}{2i} \frac{e^{-i(q-p+1)\theta} - 1}{e^{-i\theta} - 1} \\ &= \frac{e^{ip\theta}}{2i} \frac{e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} + e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)}}{e^{i\frac{\theta}{2}} - e^{-i\frac{\theta}{2}}} - \frac{e^{-ip\theta}}{2i} \frac{e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{-i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} - e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)} + e^{i(\frac{q-p+1}{2}\theta)}}{e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}} \\ &= \frac{e^{i(\frac{q+p}{2}\theta)}}{2i} \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} - \frac{e^{-i(\frac{q+p}{2}\theta)}}{2i} \frac{\sin(-\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(-\frac{\theta}{2})} \\ &= \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \frac{e^{i(\frac{q+p}{2}\theta)} - e^{-i(\frac{q+p}{2}\theta)}}{2i} \\ &= \frac{\sin(\frac{q-p+1}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \sin(\frac{q+p}{2}\theta). \end{aligned}$$

De cette dernière expression explicite découle que la somme en question est majorée par :

$$\frac{1}{\sin(\frac{\theta}{2})},$$

à savoir on a la majoration :

$$\left| \sum_{n=p}^{n=q} \sin(n\theta) \right| \leq \frac{1}{\left| \sin(\frac{\theta}{2}) \right|}$$

Rappelons maintenant un critère de convergence de séries, qui sera redémontré en détail plus bas.

Théorème 13.8. [Critère de convergence d'Abel] *Si une suite $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ est positive, décroissante, convergente vers zéro :*

$$a_n \geq a_{n+1} \geq 0, \quad \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

et si la suite $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n \geq 1}$ est bornée, alors la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$$

converge.

Indications de preuve. Si $(a_k)_{k \geq 1}$ et $(b_k)_{k \geq 1}$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geq 2$, on établit très facilement par récurrence l'identité élémentaire :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \cdots + b_1] = \sum_{k=1}^n a_k b_k - a_n (b_1 + \cdots + b_n),$$

sorte d'intégration par parties discrète.

Ensuite, puisque \mathbb{R} est complet, il suffit de montrer que la suite :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)_{n \geq 2}$$

est de Cauchy. Mais la suite $-a_n (b_1 + \cdots + b_n)$ est de Cauchy, puisque $a_n \rightarrow 0$ et puisque par hypothèse, il existe une constante $B > 0$ telle que $|b_1 + \cdots + b_n| \leq B$ pour tout $n \geq 1$.

Il reste alors à examiner le membre de gauche dans l'identité d'intégration par parties discrète, et pour tout couple d'entiers (p, q) avec $1 \leq p \leq q \leq n - 1$, on estime :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{p \leq k \leq q} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \cdots + b_1] \right| &\leq B \sum_{p \leq k \leq q} |a_k - a_{k+1}| \\ &= B \sum_{p \leq k \leq q} a_k - a_{k+1} = B(a_p - a_{q+1}), \end{aligned}$$

quantité qui peut être rendue arbitrairement petite pourvu que p soit assez grand, puisque $a_k \rightarrow 0$. \square

De ce théorème de convergence, on déduit que le

Lemme 13.9. *La série trigonométrique :*

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

est convergente en tout point $\theta \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Notons tout d'abord que pour $\theta \equiv 0 \pmod{\pi}$, la série considérée $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$ est bien entendu convergente, puisque tous ses termes sont nuls.

Nous pouvons donc supposer que $\theta \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, d'où $\frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} < +\infty$.

Or nous avons vu plus haut que les sommes partielles $\sum_{n=p}^q \sin(n\theta)$ sont majorées, en valeur absolue, par une quantité finie qui est indépendante de p et de q . Comme de plus la suite positive $n \mapsto \frac{1}{\log n}$ est décroissante pour $n \geq 2$ et tend vers 0, le critère d'Abel assure bien que la série trigonométrique :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{\log n}$$

converge pour tous ces autres $\theta \in \mathbb{T}$ fixés non égaux à 0 modulo π . \square

Lemme 13.10. *On a :*

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} \sim \log \log n.$$

Démonstration. Grâce au principe de comparaison entre \sum et \int , par le simple changement de variable $y := \log x$, $dy = \frac{dx}{x}$, on trouve :

$$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k} \sim \int_2^n \frac{1}{x \log x} dx = \int_{\log 2}^{\log n} \frac{1}{y} dy \sim \log \log n,$$

et cet équivalent tend vers l'infini quand n tend vers ∞ . \square

Fin de la démonstration du Théorème 13.3. Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{g}(k) e^{ik\theta}$$

est cette série trigonométrique :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=-2} \frac{-1}{2i \log(-k)} e^{ik\theta} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2i \log k} e^{ik\theta},$$

c'est-à-dire dont les coefficients de Fourier $\widehat{g}(k)$ seraient donnés par :

$$\widehat{g}(k) = \begin{cases} 0 & \text{pour } |k| \leq 1; \\ \frac{1}{2i \log k} & \text{pour } k \geq 2; \\ \frac{-1}{2i \log(-k)} & \text{pour } k \leq -2. \end{cases}$$

On en déduit l'imparité de ces coefficients :

$$\widehat{g}(-k) = -\widehat{g}(k),$$

et donc aussi, la parité de la fonction $k \mapsto \frac{\widehat{g}(k)}{k}$, pour $|k| \geq 1$. D'après l'Assertion 13.7, si une telle fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$ existait, la suite indexée par un entier n :

$$\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{\widehat{g}(k)}{k} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{\widehat{g}(k)}{k} = \frac{1}{2i} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \log k}$$

devrait avoir une limite *finie* lorsque $n \rightarrow +\infty$, mais nous venons de voir dans la question précédente que la série à termes positifs $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ divergeait — contradiction conclusive !

14. Convergence normale des séries de Fourier et Théorème de Bernstein

Revenons maintenant au Théorème de Fejér pour en dévoiler une belle et élémentaire application. Soit à nouveau $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Si la série de Fourier :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

de f converge normalement, i.e. si $\sum_{|k| \leq n} |\widehat{f}(k)|$ converge, alors $S_n(f)(\theta)$ converge uniformément sur le cercle unité (majorer $|e^{ik\theta}|$ simplement par 1) vers une certaine limite $\ell(\theta)$, donc les sommes de Cesàro de la série de Fourier de f :

$$\frac{S_0(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell(\theta)$$

convergent vers la même limite $\ell(\theta)$, mais le Théorème de Fejér dit justement que cette limite n'est autre que $f(\theta)$! Ceci redémontre le Théorème 5.3.

Proposition 14.1. *Toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier converge normalement :*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$$

est égale à sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

en tout point $\theta \in \mathbb{T}$ du cercle unité. □

Mais ce n'est pas seulement par chance que la série de Fourier d'une fonction continue donnée converge normalement, car un théorème assure que tel est le cas, pourvu que la fonction soit höldérienne d'exposant assez grand.

Théorème 14.2. [Bernstein] *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue 2π -périodique sur le cercle unité pour laquelle il existe une constante $K > 0$ et un exposant α avec $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$ telle que :*

$$|f(\theta'') - f(\theta')| \leq K |\theta'' - \theta'|^\alpha,$$

pour tous $\theta', \theta'' \in \mathbb{T}$. Alors la série de Fourier de f converge normalement vers f sur \mathbb{T} .

Démonstration. Ainsi, le but est d'établir que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < +\infty$. À cette fin, pour tout $h \in \mathbb{R}$, introduisons la fonction :

$$g_h(\theta) := f(\theta + h) - f(\theta - h),$$

qui est continue sur le cercle et 2π -périodique. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le k -ème coefficient de Fourier de cette fonction se calcule aisément comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{g}_h(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta + h) e^{-ik\theta} - f(\theta - h) e^{-ik\theta} \right] \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik(\theta-h)} \frac{d\theta}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik(\theta+h)} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= (e^{ikh} - e^{-ikh}) \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 2i \sin(kh) \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

L'identité de Plancherel, qui s'applique à notre fonction f puisque $\mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, nous donne ensuite :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |g_h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{g}_h(k)|^2 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 4 |\sin(kh)|^2 |\widehat{f}(k)|^2. \end{aligned}$$

Or par hypothèse d'hölderianité de f , la fonction g_h satisfait l'inégalité fondamentale :

$$|g_h(\theta)| = |f(\theta + h) - f(\theta - h)| \leq K (2h)^\alpha,$$

donc sa norme L^2 au carré sur le cercle peut être majorée bêtement par :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g_h(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \leq K^2 2^{2\alpha} h^{2\alpha},$$

et en revenant à ce que Parseval nous avait fourni, on obtient une inégalité (on place le $\frac{1}{4}$ à droite) :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\sin(kh)|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{1}{4} K^2 2^{2\alpha} h^{2\alpha},$$

qui va constituer le vrai point de départ de la démonstration.

Ici, eu égard à notre objectif d'établir la convergence normale de la série de Fourier de f , nous aurions bien aimé voir à gauche de cette inégalité la bonne somme :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2,$$

mais hélas, chaque terme de cette série est pondéré par un facteur perturbateur $|\sin(kh)|^2$, et l'on sait que la fonction sinus peut prendre des valeurs proches de 0. De plus, il y a même aussi un exposant carré qui nous gêne quelque peu, car c'est la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|$ avec exposant 1 qui nous intéresse ; heureusement, ce second problème sera réglé ultérieurement grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Pour corriger le problème, nous allons nous focaliser sur les termes pour lesquels le sinus perturbateur a en fait des valeurs proches de 1, disons $\geq \frac{1}{2}$ pour fixer les idées, de telle sorte qu'on ait, à un facteur $\frac{1}{2}$ près, la bonne somme.

Plus précisément, posons $h := \frac{\pi}{2^{p+1}}$ avec $p \geq 1$ entier dans l'inégalité obtenue à l'instant en supprimant le terme correspondant à $k = 0$, ce qui nous donne l'inégalité :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \left| \sin\left(\frac{k\pi}{2^{p+1}}\right) \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 &\leq \frac{K^2}{4} \frac{2^{2\alpha}}{2^{2p\alpha}} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2p\alpha+2\alpha}} \\ &= \frac{K^2}{4} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}}, \end{aligned}$$

et décomposons la somme $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*}$ en :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} = \sum_{2^0 \leq |k| < 2^1} + \sum_{2^1 \leq |k| < 2^2} + \sum_{2^2 \leq |k| < 2^3} + \dots$$

En particulier, la même inégalité est alors satisfaite trivialement par la sous-somme $\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p}$ puisque tous les termes de $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*}$ sont positifs :

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} \left| \sin \left(\frac{k\pi}{2^{p+1}} \right) \right|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2}{4} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}},$$

Maintenant, si la valeur absolue $|k|$ de l'entier $k \in \mathbb{Z}$ satisfait donc :

$$2^{p-1} \leq |k| < 2^p,$$

pour un tel entier positif quelconque $p \geq 1$ relié au choix de $h = \frac{\pi}{2^{p+1}}$, il est clair alors que $\frac{\pi}{4} \leq \frac{|k|\pi}{2^{p+1}} < \frac{\pi}{2}$, d'où :

$$\left| \sin \left(\frac{k\pi}{2^{p+1}} \right) \right|^2 \geq \frac{1}{2},$$

et l'on en déduit l'inégalité plus intéressante :

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leq \frac{K^2}{2} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}},$$

valable pour tout entier $p \geq 1$.

Certes, l'exposant de $|\widehat{f}(k)|$ est égal à 2 ici, mais l'astuce classique qui consiste à faire apparaître un facteur 1 dans l'inégalité (finie) de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n a_i \right| &= \left| \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

pour se débarrasser, au prix d'un facteur \sqrt{n} , de l'exposant 2, donne dans notre situation :

$$\begin{aligned} \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)| &\leq \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq (2(2^p - 2^{p-1}))^{\frac{1}{2}} \left(\frac{K^2}{2} \frac{\pi^{2\alpha}}{2^{2\alpha p}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{\frac{p}{2}} \frac{K}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\alpha}{2^{\alpha p}} \\ \text{[Utiliser } 2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1} \text{ !]} &= \frac{K}{2^{\frac{1}{2}}} \frac{\pi^\alpha}{2^{p(\alpha - \frac{1}{2})}}. \end{aligned}$$

Si donc l'exposant d'hölderianité α est strictement supérieur à $\frac{1}{2}$ comme on l'a supposé dans le théorème, il est clair que la série à considérer :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} |\widehat{f}(k)| &= \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |\widehat{f}(k)| \\ &\leq \underbrace{\frac{K}{2^{\frac{1}{2}}}}_{\text{constante}} \pi^\alpha \sum_{p=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha - \frac{1}{2}}} \right)^p \\ &< \infty \end{aligned}$$

est majorée par la série géométrique infinie convergente de raison le réel $\frac{1}{2^{\alpha - \frac{1}{2}}}$ qui est < 1 . La démonstration du théorème est terminée, maintenant. \square

15. Contre-exemple de du Bois-Reymond 1876

Comme nous l'avons déjà signalé, la théorie des séries de Fourier a connu un bouleversement spectaculaire au moment où ont été découvertes des fonction *continues* dont la série de Fourier ne re-converge *pas* vers la fonction de départ. Ces phénomènes surprenants ouvraient un champ d'investigation, notamment en direction de nouveaux espaces fonctionnels tels que les espaces de fonctions höldériennes $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ sur le cercle.

Rappelons que lorsque $\frac{1}{2} < \alpha \leq 1$, le théorème de Bernstein — démontré plus haut dans le cours — stipule qu'on a la convergence absolue : $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)| < \infty$, qui assure que la fonction $f(\theta) \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$ coïncide avec sa série de Fourier en tout point du cercle unité. *C'est donc lorsque l'exposant de régularité est inférieur : $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ que des phénomènes nouveaux sont susceptibles d'apparaître.*

Afin de transmettre au mieux la substantifique mœlle des choses, nous allons *inverser volontairement* l'ordre logique de la présentation, en admettant (provisoirement) que pour tout entier $K \geq 1$, on a la majoration uniforme de la somme *symétrique* suivante :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Ces inégalités uniformes seront établies par la suite.

Théorème 15.1. [Contre-exemple de du Bois-Reymond 1876] *Il existe une fonction continue :*

$$g_{\text{BR}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$$

sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dont les sommes partielles de la série de Fourier :

$$S_K(g_{\text{BR}})(\theta) = \sum_{|k| \leq K} \widehat{g_{\text{BR}}}(k) e^{ik\theta}$$

n'ont pas de limite finie en $\theta = 0$ lorsque K tend vers l'infini, à savoir plus précisément, il existe une fonction continue $g_{\text{BR}} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle qu'il existe une sous-suite $(K_j)_{j \geq 1}$ satisfaisant :

$$S_{2K_j}(g_{\text{BR}})(0) \longrightarrow -\infty.$$

En particulier, il n'y a aucune chance que la série de Fourier de g_{BR} prenne la même valeur que g_{BR} en $\theta = 0$!

Démonstration. La recette consiste à *briser la symétrie* de la somme uniformément bornée ci-dessus, et plus précisément à observer que sa partie négative :

$$\sum_{-K \leq k \leq -1} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

n'est absolument pas uniformément bornée sur \mathbb{T} , puisque sa valeur en $\theta = 0$:

$$-\sum_{k=1}^K \frac{1}{k} = -\log(K) - \gamma_{\text{Euler}} + o(1)$$

tend vers $-\infty$ comme $-\log K$.

Introduisons alors les deux notations suivantes pour la somme symétrique initiale et pour celle qu'on a obtenue en capturant sa partie négative :

$$\left. \begin{aligned} f_K(\theta) &:= \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \\ f_K^-(\theta) &:= \sum_{-K \leq k \leq -1} \frac{e^{ik\theta}}{k} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{tous deux des polynômes trigonométriques,} \\ \text{à savoir appartenant à } \mathbb{Q}[e^{i\theta}, e^{-i\theta}]. \end{array}$$

Ensuite, effectuons un *déplacement-translation* de toutes les fréquences de ces deux polynômes trigonométriques en les multipliant tous deux par $e^{i(2K)\theta}$, ce qui nous donne deux nouveaux polynômes trigonométriques :

$$\begin{aligned} P_K(\theta) &:= e^{i(2K)\theta} f_K(\theta), \\ P_K^-(\theta) &:= e^{i(2K)\theta} f_K^-(\theta). \end{aligned}$$

Exercice rapide : calculer leurs expressions sous forme de somme.

Utilisons alors l'assertion suivante, dont la démonstration est laissée au lecteur-étudiant soucieux de tout détailler.

Lemme 15.2. *Étant donné un polynôme trigonométrique quelconque :*

$$Q(\theta) := \sum_{\text{finie}} Q_k e^{ik\theta}$$

alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, la n -ème somme partielle de sa série de Fourier :

$$S_n(Q)(\theta) = \sum_{|k| \leq n} Q_k e^{ik\theta}$$

collecte seulement les fréquences de valeur absolue inférieure ou égale à n . □

Nous nous intéresserons non pas à toutes les sommes partielles de la série de Fourier de P_K , mais seulement aux trois familles suivantes (exercice rapide : vérifier que les formules sont correctes grâce l'expression de P_K calculée ci-dessus) :

$$S_n(P_K) = \begin{cases} P_K & \text{lorsque } n \geq 3K, \\ P_K^- & \text{lorsque } n = 2K, \\ 0 & \text{lorsque } n \leq K - 1. \end{cases}$$

Ce qui est intéressant dans ces formules, c'est que pour $n = 2K$, on trouve P_K^- qui a une valeur absolue élevée $\approx \log(K)$ en $\theta = 0$.

La suite de l'argument consiste à itérer cette construction jusqu'à l'infini au moyen d'une suite d'entiers $(K_j)_{j \geq 1}$, ce qui produit donc une suite de polynômes trigonométriques :

$$P_{K_j}(\theta) := e^{i(2K_j)\theta} f_{K_j}(\theta),$$

mais on veut assurer en même temps que leurs fréquences ne se mélangent absolument pas. Comme P_K contient des $e^{ik\theta}$ seulement pour $K \leq k \leq 3K$ (d'après la solution à un exercice laissé en chemin plus haut), il est clair qu'il suffit de demander que :

$$K_{j+1} > 3K_j$$

pour tout $j \geq 1$. Nous choisirons plus précisément une telle suite K_j plus bas.

Voici alors notre candidat pour produire une fonction *continue* de type du Bois-Reymond dont la série de Fourier ne convergera pas en 0 :

$$g_{\text{BR}}(\theta) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} P_{K_j}(\theta).$$

Ici, on a mis un facteur-poids $\frac{1}{j^2}$ parce que la somme $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} = \frac{\pi^2}{6}$ converge, et parce que nous avons admis avant d'énoncer le théorème que l'on a les majorations uniformes :

$$|P_{K_j}(\theta)| \leq \pi + 4,$$

pour tout $j \geq 1$ et tout $\theta \in \mathbb{T}$, de telle sorte que la série que nous venons d'écrire *converge normalement donc uniformément vers une certaine fonction continue* (qui va être pathologique !).

Maintenant, qu'en est-il des sommes partielles :

$$S_n(g_{\text{BR}})(\theta)$$

de sa série de Fourier ?

Choisissons directement $n := 2K_j$ pour « pointer là où ça fait mal ». Comme dans le lemme ci-dessus, prendre la n -somme partielle d'une série normalement convergente d'exponentielles $e^{ik\theta}$ revient à capturer seulement ses fréquences satisfaisant $|k| \leq n$. Pour en capurant donc les fréquences satisfaisant $|k| \leq 2K_j$, on prend d'abord tous les polynômes $P_{K_1}, \dots, P_{K_{j-1}}$ dans g_{BR} , puisque la plus haute fréquence, celle qui est la plus haute dans $P_{K_{j-1}}$, est $e^{i(3K_{j-1})}$ et l'on a par hypothèse $3K_{j-1} < K_j$, donc $< 2K_j$. On se convainc alors aisément (exercice de compréhension) que :

$$S_{2K_j}(g_{\text{BR}})(\theta) = \underbrace{\sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} P_{K_l}(\theta)}_{\text{somme gentille uniformément bornée}} + \underbrace{\frac{1}{j^2} P_{K_j}^-(\theta)}_{\text{terme potentiellement méchant}},$$

où, fait important, on n'a conservé que la moitié inférieure-négative $P_{K_j}^-$ de P_{K_j} .

Mais alors la première somme est à nouveau uniformément bornée en valeur absolue, puisqu'elle est :

$$\begin{aligned} \text{somme gentille} &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} |P_{K_l}(\theta)| \\ &\leq \sum_{l=1}^{j-1} \frac{1}{l^2} (\pi + 4) \\ &\leq \frac{\pi^2}{6} (\pi + 4) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Au contraire, le dernier terme possède une valeur en $\theta = 0$:

$$\frac{1}{j^2} P_{K_j}^-(0) \approx -\frac{1}{j^2} \log(K_j)$$

qui n'a pas de raison particulière d'être bornée. À vrai dire, en prenant pour K_j les valeurs doublement exponentielles :

$$K_j := 3^{2^j},$$

on se convainc mentalement que la condition $K_{j+1} > K_j$ est (largement) satisfaite, tandis que la valeur en $\theta = 0$ du « terme potentiellement méchant » :

$$-\frac{1}{j^2} \log(3^{2^j}) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} -\infty$$

tend vers l'infini négatif (exercice visuel). Donc en $\theta = 0$, c'est le terme effectivement méchant qui entraîne avec lui la somme gentille pour les précipiter tous deux ensemble vers l'infini négatif !

En conclusion, nous avons donc bien construit une fonction continue g_{BR} sur le cercle et une suite d'entiers $(2K_j)_{j \geq 1}$ telles que :

$$-\infty = \lim_{j \rightarrow \infty} S_{2K_j}(g_{\text{BR}})(0),$$

ce qui conclut la démonstration. \square

Exercice de compréhension mathématique : effectuer un résumé mental des arguments utilisés.

Exercice de réflexion plus profonde : méditer sur le fait que la fonction g_{BR} ne peut pas être de classe \mathcal{C}^1 , eu égard au théorème de Dirichlet.

16. Sommation d'Abel et noyau de Poisson

Pour se convaincre complètement de la véracité de ce contre-exemple, il reste encore à établir l'uniforme majoration :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Plusieurs approches existent, et nous choisirons celle — classique — qui nous fera faire un détour par la théorie du noyau de Poisson, puisque cette théorie montre des similarités frappantes avec la théorie du noyau de Fejér. Nous effectuerons ainsi une bonne transition

avec le chapitre suivant dans lequel les « bon noyaux de convolution » seront étudiés en tant que tels et dans toute leur généralité.

Soit pour commencer une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ qui appartient à l'espace le plus « gros » des fonctions sur le cercle dans la hiérarchie des espaces fonctionnels dont nous sommes partis. Elle possède donc des coefficients de Fourier, et l'on peut considérer sa série de Fourier complète :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Fejér a eu cette idée géniale de prendre les sommes de Cesàro des sommes partielles de cette série de Fourier pour en accélérer la convergence, ce qui donnait un résultat spectaculaire de convergence uniforme lorsque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Fejér a « taclé » du Bois-Reymond !

Or un *autre* procédé d'accélération de convergence avait été mis au point bien auparavant par Abel au début du 19^{ème} siècle, lequel que voici !

Définition 16.1. Une série de nombres complexes $\sum_{k \geq 1} c_k$ est dite *sommable au sens d'Abel* de somme un nombre complexe $\ell \in \mathbb{C}$ lorsque les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) pour tout rayon r satisfaisant $0 \leq r < 1$, la série :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k =: A(r) \in \mathbb{C}$$

converge vers un nombre complexe $A(r)$ dépendant de r ;

(ii) ce nombre possède une limite quand r tend vers 1 par valeurs inférieures :

$$\ell = \lim_{r \rightarrow 1^-} A(r).$$

On a alors un résultat général dont nous n'aurons pas réellement besoin mais qu'il est naturel de citer ici, et qui pourrait tout à fait faire l'objet d'un exercice à un moment donné amusant de l'année.

Théorème 16.2. [Admis] *Pour toute série $\sum_{k \geq 1} c_k$ de nombres complexes, les implications suivantes sont satisfaites :*

$$\text{convergence classique} \implies \text{Cesàro-sommabilité} \implies \text{Abel-sommabilité},$$

à savoir plus précisément :

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^K c_k =: \ell \text{ existe} \right) \implies \begin{cases} \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^1 c_k + \sum_{k=1}^2 c_k + \cdots + \sum_{k=1}^K c_k}{K} = \ell \text{ aussi,} \\ \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi,} \end{cases}$$

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^1 c_k + \sum_{k=1}^2 c_k + \cdots + \sum_{k=1}^K c_k}{K} = \ell \text{ existe} \right) \implies \lim_{r \rightarrow 1^-} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi.} \quad \square$$

Aucune de ces implications ne peut être renversée, comme le montrent les deux séries (divergentes !) :

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots \quad \text{et} \quad 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + \cdots ,$$

ce dont on se convainc par une réflexion-exercice. Et si l'auto-exercitation ne fonctionne pas, pour bénéficier de l'aide d'un coach sportif, on se reportera à l'Exercice 14.

Ce théorème général nous donne alors instantanément l'idée de *soumettre au procédé d'Abel* la série de Fourier de toute fonction sur le cercle, en espérant voir apparaître là aussi une accélération bénéfique de convergence. C'est à ce moment-là que va entrer en scène le célèbre *noyau de Poisson*.

Soit donc un rayon r satisfaisant $0 \leq r < 1$. Avec Abel, on modifie comme promis la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ en multipliant ses monômes par une puissance correspondante de r :

$$A_r(f)(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}.$$

Noter que le facteur d'écrasement des coefficients de Fourier $r^{|k|}$ est symétrique par rapport à l'origine dans \mathbb{Z} , ce qui assure que les termes de la série tendent rapidement vers 0 dans les deux directions, négative et positive.

Or si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est intégrable au sens de Lebesgue, ses coefficients de Fourier satisfont la majoration uniforme (exercice mental) :

$$|\widehat{f}(k)| \leq \|f\|_{L^1},$$

donc par conséquent, $A_r(f)(\theta)$ converge *normalement* grâce à la majoration élémentaire :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} |\widehat{f}(k)| \leq 2 \|f\|_{L^1} \frac{r}{1-r}.$$

Ensuite, comme pour les sommes de Cesàro de la Série de Fourier de f , le point-clé c'est que ces sommes d'Abel peuvent elles aussi être écrites comme des convolutions avec un (nouveau !) noyau qui « naît spontanément dans un calcul » :

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} \right) e^{ik\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{-ik(t-\theta)}}_{=: P_r(\theta-t)} \right) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

où interversion de la sommation et de l'intégration sont bien entendu aisément justifiables (exercice). On voit alors en effet apparaître ici une *convolution* de f avec une certaine fonction nouvelle (qu'on appelle *noyau de Poisson*) :

$$P_r(\theta) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ik\theta}$$

qui admet en fait aussi une expression explicite contractée :

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}.$$

Il est manifestement clair qu'on doit s'attendre à une telle contraction, puisque l'expression sommatoire de $P_r(\theta)$ montre deux séries géométriques ! Pour conduire le calcul à la manière astucieuse des « sioux-mathématiciens », posons :

$$\omega := r e^{i\theta},$$

de telle sorte que la somme à calculer s'écrit (exercice visuel) :

$$P_r(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{\omega}^k + \sum_{k=0}^{\infty} \omega^k.$$

Mais comme $0 \leq r < 1$, ces deux séries sont égales, respectivement, à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\omega} + \frac{\bar{\omega}}{1-\bar{\omega}} &= \frac{1-\bar{\omega} + (1-\omega)\bar{\omega}}{(1-\omega)(1-\bar{\omega})} \\ &= \frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2} \\ &= \frac{1-r^2}{1-2r\cos\theta+r^2}, \end{aligned}$$

ce qui était annoncé. On vérifie d'un seul coup d'œil que le dénominateur ne s'annule jamais, puisque $0 \leq r < 1$ et puisque $|\cos\theta| \leq 1$.

Maintenant que ce calcul a été effectué, nous pouvons revenir en arrière et exprimer, donc, que la sommation au sens d'Abel de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ intégrable au sens de Lebesgue sur le cercle revient à effectuer une *convolution avec le noyau de Poisson* :

$$\begin{aligned} A_r(f)(\theta) &\stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \widehat{f}(k) e^{ik\theta} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) P_r(\theta-t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= f * P_r(\theta). \end{aligned}$$

Le second « miracle » après celui (similaire) des noyaux de Fejér $(F_n)_{n \geq 1}$ est alors que cette famille de noyaux de Poisson $(P_r)_{0 \leq r < 1}$ — indexée par un paramètre continu $r \in [0, 1[$ au lieu d'être indexée par un entier $n \geq 1$, ce qui ne constitue pas une différence essentielle — satisfait des propriétés qui sont exactement les mêmes que celles que nous connaissons déjà.

Proposition 16.3. *Lorsque $r \rightarrow 1^-$ tend vers 1 par valeurs inférieures, la famille des noyaux de Poisson :*

$$(P_r(\theta))_{0 \leq r < 1}$$

constitue un bon noyau de convolution au sens où elle jouit des trois propriétés fondamentales suivantes :

(i) $P_r(\theta) > 0$ est strictement positif 2π -périodique pour tout $\theta \in \mathbb{T}$ et tout $0 \leq r < 1$;

(ii) son intégrale totale sur le cercle :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

est constamment égale à 1 ;

(iii) pour tout $\delta > 0$ petit, on a convergence uniforme :

$$\|P_r\|_{\mathcal{C}^0([- \pi, -\delta] \cup [\delta, \pi])} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0,$$

ce qui implique notamment aussi l'annulation des valeurs intégrales :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

Démonstration. On vient de voir que le dénominateur du noyau de Poisson ne s'annule jamais sur le cercle — qui est compact — donc cette fonction :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2},$$

manifestement 2π -périodique, est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{T} , et visiblement aussi, elle est strictement positive, puisque $r < 1$.

Par convergence normale-uniforme, on peut intégrer terme à terme la définition initiale de $P_r(\theta)$ sous forme de série infinie, ce qui donne presque sans effort :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= 0 + r^{|0|} + 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

[Annihilations évidentes pour $|k| \geq 1$]

Enfin, si on suppose pour fixer les idées que $\frac{1}{2} \leq r < 1$, alors pour $\delta \leq |\theta| \leq \pi$ on peut minorer :

$$\begin{aligned} 1 - 2r \cos \theta + r^2 &= \underbrace{(1 - r)^2}_{\substack{\text{négliger} \\ \text{cela}}} + 2r(1 - \cos \theta) \\ &\geq 2r(1 - \cos \theta) \\ &\geq \underbrace{1 - \cos \delta}_{\substack{\text{minorant} > 0 \\ \text{uniforme en } r}}. \end{aligned}$$

Ainsi donc, grâce à une telle minoration qui produit une majoration de la contribution du dénominateur dans le noyau de Poisson $\frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}$, nous déduisons que :

$$P_r(\theta) \leq \frac{1 - r^2}{1 - \cos \delta} \xrightarrow{r \rightarrow 1^-} 0$$

ce qui conclut la vérification de (iii). □

Grâce à ces trois propriétés dont jouit la famille des noyaux de Poisson, exactement la même démonstration qu'avec le noyau de Fejér produit sans effort le théorème fondamental suivant.

Théorème 16.4. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue 2π -périodique sur le cercle unité et soit la famille :

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \theta + r^2}$$

indexée par $0 \leq r < 1$ des noyaux de Poisson. Alors on a :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - f * P_r\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}.$$

Dans l'examen partiel 2012 apparaît la version L^p du théorème de Fejér que nous n'avons pas démontrée dans le cours magistral.

Théorème 16.5. Pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * F_n\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

Nous ne produirons pas la démonstration ici (se reporter au corrigé qui a été rédigé). Une démonstration entièrement similaire donne le même résultat avec le noyau de Poisson.

Théorème 16.6. Pour toute $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $1 \leq p < \infty$, on a :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1^-} \|f - f * P_r\|_{L^p(\mathbb{T})}.$$

17. Fonction en dents de scie

Maintenant que cette petite excursion divertissante s'achève, on commence à s'impatienter de savoir pourquoi et comment une majoration uniforme du type :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4$$

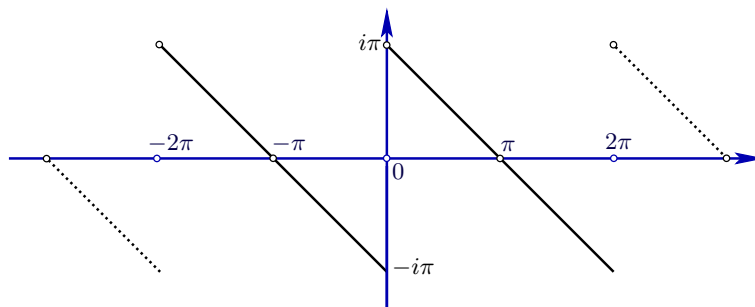
peut être satisfaite ?

La réponse que nous allons proposer — il y en a d'autres — va utiliser le noyau de Poisson en observant pour commencer que la série infinie complète :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

est la série de Fourier d'une fonction extrêmement simple (dangereuse ?), dite *fonction en dents de scie* définie par :

$$f_{\text{DS}}(\theta) := \begin{cases} i(\pi - \theta) & \text{lorsque } 0 \leq \theta \leq \pi \\ i(-\pi - \theta) & \text{lorsque } -\pi < \theta < 0 \end{cases}$$



Cette fonction, que l'on prolonge bien entendu à $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ en la rendant 2π -périodique, est impaire :

$$f_{\text{DS}}(-\theta) = -f_{\text{DS}}(\theta).$$

Elle est discontinue précisément en tous les points de $2\pi\mathbb{Z}$.

Lemme 17.1. *Le 0-ème coefficient de Fourier de cette fonction en dents de scie s'annule :*

$$0 = \widehat{f_{\text{DS}}}(0),$$

tandis que pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, il vaut :

$$\widehat{f_{\text{DS}}}(k) = \frac{1}{k}.$$

Démonstration. Il s'agit d'un calcul au cours duquel il est facile de se tromper — et de s'énerver — plusieurs fois, donc nous le détaillerons lentement comme suit :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^0 \frac{i(-\pi - \theta)}{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta + \int_0^{\pi} \frac{i(\pi - \theta)}{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \left[\frac{i(-\pi - \theta)}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_{-\pi}^0 + \int_{-\pi}^0 \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} d\theta + \left[\frac{i(\pi - \theta)}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{-ik} d\theta \\ &= -\frac{i\pi}{2\pi} \frac{1}{-ik} + 0 + \left[\frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^2} \right]_{-\pi}^0 + 0 - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{-ik} + \left[\frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\theta}}{(-ik)^2} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2k} + \frac{i}{2\pi} \frac{1}{(ik)^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{e^{ik\pi}}{-k^2} + \frac{1}{2k} + \frac{i}{2\pi} \frac{e^{-ik\pi}}{-k^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{1}{-k^2}. \end{aligned}$$

À ce moment-là, les deux termes soulignés s'annulent visiblement ensemble. Il reste deux exponentielles intempestives. Mais comme :

$$-e^{i\pi} + e^{-i\pi} = 0$$

elles s'annihilent aussi ensemble ! Au final :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k},$$

ce qui termine ce calcul qui de toute façon ne peut pas ne pas être quelque peu laborieux. \square

Ainsi donc, les sommes partielles de la série de Fourier de cette fonction en dents de scie sont justement les sommes :

$$S_K(f_{\text{DS}})(\theta) = \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

que nous voulons majorer uniformément par une constante telle que $\pi + 4$.

Sachant que cette fonction en dents de scie est manifestement \mathcal{C}^1 par morceaux — et même \mathcal{C}^∞ par morceaux —, on pourrait se dire qu'une application du Théorème de Dirichlet qui assure que sa série de Fourier converge vers la somme des demi-valeurs limites à gauche et à droite en tout point va produire une majoration uniforme, *mais cela ne suffit pas !*

En effet, la convergence ponctuelle (non uniforme !) :

$$h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

d'une suite de fonctions $h_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ vers une fonction $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ en tout point $x \in [0, 1]$ n'implique pas en général que la suite des fonctions h_n est uniformément bornée sur $[0, 1]$ (exercice : trouver un exemple).

Il nous faut donc d'autres arguments pour démontrer l'énoncé tant repoussé grâce auquel nous avons pu construire une fonction continue g_{BR} dont la série de Fourier diverge en un point :

Proposition 17.2. *Les sommes partielles de la série de Fourier de la fonction f_{DS} en dents de scie satisfont la majoration uniforme :*

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 4.$$

Démonstration. Comme promis, commençons pas soumettre cette série de Fourier :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f_{\text{DS}}}(k) e^{ik\theta}$$

au procédé de sommation-accélération d'Abel avec bien sûr $0 \leq r < 1$:

$$\begin{aligned} f_{\text{DS}} * P_r(\theta) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \widehat{f_{\text{DS}}}(k) e^{ik\theta} = \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \frac{e^{ik\theta}}{k}. \end{aligned}$$

Grâce au fait que le noyau de Poisson possède de bonnes propriétés, on en déduit la majoration :

$$\begin{aligned} |f_{\text{DS}} * P_r(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f_{\text{DS}}(\theta - t) P_r(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &\leq \max_{[-\pi, \pi]} |f_{\text{DS}}| \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} P_r \frac{dt}{2\pi}}_{\text{vaut 1!}} \\ &= \pi \cdot 1. \end{aligned}$$

Ceci montre donc que pour tout $0 \leq r < 1$ et pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, on a la majoration uniforme :

$$\left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} r^{|k|} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi.$$

Grâce donc à une utilisation du noyau de Poisson — qui nous a permis de faire une excursion touristique intéressante —, nous sommes dans la situation de pouvoir appliquer l'assertion suivante.

Lemme 17.3. *Soit une série numérique $\sum_{k \geq 1} c_k$ de nombres complexes $c_k \in \mathbb{C}$. S'il existe une première constante positive A telle que :*

$$\sup_{0 \leq r < 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k \right| \leq A < \infty$$

et s'il existe aussi une deuxième constante positive M telle que :

$$\sup_{k \geq 1} k |c_k| \leq M < \infty,$$

alors on a :

$$\sup_{K \geq 1} \left| \sum_{k=1}^K c_k \right| \leq A + 2M.$$

Démonstration. Donnons alors un nom à la sommation d'Abel de la série initiale :

$$A(r) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$$

qui converge (exercice mental), et estimons sa proximité à la K -ème somme partielle que l'on veut majorer avec $K \gg 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K c_k - \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k &= \sum_{k=1}^K c_k - \sum_{k=1}^K c_k r^k - \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k r^k \\ &= \sum_{k=1}^K (c_k - c_k r^k) - \sum_{k=K+1}^{\infty} c_k r^k. \end{aligned}$$

En abrégant aussi cette K -ème somme partielle au moyen de la notation :

$$C_K := \sum_{k=1}^K c_k,$$

on obtient donc grâce à l'inégalité triangulaire :

$$|C_K - A_r| \leq \sum_{k=1}^K |c_k| (1 - r^k) + \sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k| r^k.$$

Or une factorisation élémentaire suivie des majorations triviales $r^l \leq 1$ donne :

$$\begin{aligned} 1 - r^k &= (1 - r) (1 + r + \dots + r^{k-1}) \\ &\leq (1 - r) \cdot k, \end{aligned}$$

inégalité que l'on reporte pour obtenir une inégalité comportant deux sommes :

$$|C_K - A_r| \leq (1 - r) \sum_{k=1}^K k |c_k| + \sum_{k=K+1}^{\infty} |c_k| r^k.$$

Utilisons à présent *deux fois* la deuxième hypothèse, d'abord sous la forme inchangée $k |c_k| \leq M$ pour la première somme, et ensuite sous une forme légèrement adaptée pour la deuxième somme :

$$|c_k| \leq \frac{M}{k} \leq \frac{M}{K} \quad (k \geq K+1),$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} |C_K - A_r| &\leq (1 - r) \sum_{k=1}^K M + \frac{M}{K} \sum_{k=K+1}^{\infty} r^k \\ &\leq (1 - r) K M + \frac{M}{K} \frac{r^{K+1}}{1 - r} \\ &\leq (1 - r) K M + \frac{M}{K} \frac{1}{1 - r}. \end{aligned}$$

[Majorer simplement $r^{K+1} \leq 1$]

Maintenant, choisissons alors le rayon d'une manière très astucieuse pour que le membre de droite soit borné, ce qui est possible (youpi !) :

$$r := 1 - \frac{1}{K}.$$

On obtient en effet :

$$\begin{aligned} |C_K - A_{1-\frac{1}{K}}| &\leq \frac{1}{K} K M + \frac{M}{K} \frac{1}{K} \\ &= 2M. \end{aligned}$$

Pour conclure la démonstration, il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^K c_k \right| &= |C_K| \\ &\leq |A_{1-\frac{1}{K}}| + 2M \\ &\leq A + 2M, \end{aligned}$$

ce dernier majorant étant uniforme (et explicite !). □

Ainsi donc une application de ce lemme à notre série :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

que nous devons ré-écrire sous la forme d'une seule sommation :

$$\sum_{k \geq 1} \underbrace{\left(\frac{e^{-ik\theta}}{-k} + \frac{e^{ik\theta}}{k} \right)}_{=: c_k}$$

avec les deux constantes $A := \pi$ et $M := 2$ (exercice visuel) nous donne la majoration uniforme :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| \leq \pi + 2 \cdot 2$$

annoncée. □

18. Équidistribution

Définition 18.1. Si x est un nombre réel, on notera :

$$[x] \equiv \text{Ent } x$$

la *partie entière* de x , à savoir le plus grand entier inférieur ou égal à x . En soustrayant à x sa partie entière, on obtient la *partie fractionnaire* de x :

$$\langle x \rangle := x - [x],$$

qui est un réel appartenant à $[0, 1[$.

Définition 18.2. Deux nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ sont dits *congrus modulo \mathbb{Z}* :

$$x \equiv y \pmod{\mathbb{Z}},$$

lorsque leur différence $x - y \in \mathbb{Z}$ est un entier.

Ainsi, tout nombre réel $x \in \mathbb{R}$ est équivalent à un unique nombre réel appartenant à $[0, 1[$, qui est précisément sa partie fractionnaire $\langle x \rangle$. En fait, réduire un nombre modulo \mathbb{Z} , c'est oublier son chiffre avant la virgule.

Maintenant, étant donné un nombre réel $\gamma \in \mathbb{R}$, regardons la suite de ses multiples :

$$\gamma, \quad 2\gamma, \quad 3\gamma, \quad 4\gamma, \quad 5\gamma, \quad \dots,$$

Une question est alors de déterminer ce que devient cette suite lorsqu'on la réduit modulo \mathbb{Z} :

$$\langle \gamma \rangle, \quad \langle 2\gamma \rangle, \quad \langle 3\gamma \rangle, \quad \langle 4\gamma \rangle, \quad \langle 5\gamma \rangle, \quad \dots$$

Voici deux observations préliminaires.

Lemme 18.3. (i) Si $\gamma \in \mathbb{Q}$ est rationnel, seulement un nombre fini de $\langle k\gamma \rangle$ sont distincts.

(ii) Si $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est irrationnel, tous les nombres $\langle k\gamma \rangle$ sont mutuellement distincts.

Démonstration. En effet pour **(i)**, lorsque :

$$\gamma = \frac{p}{q},$$

les q premiers termes de la suite sont :

$$\langle p/q \rangle, \quad \langle 2p/q \rangle, \quad \langle 3p/q \rangle, \quad \dots, \quad \langle (q-1)p/q \rangle, \quad \langle qp/q \rangle = 0,$$

et visiblement, la suite commence à se répéter elle-même, puisque :

$$\begin{aligned} \langle (q+1)p/q \rangle &= \langle 1 + p/q \rangle \\ &= \langle p/q \rangle, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Mieux encore, lorsque $\gamma = p/q \in \mathbb{Q}$ est rationnel l'Exercice 29 montre que la suite périodique de tous les points $\langle kp/q \rangle$ visite tous les points :

$$0, \quad \frac{1}{q}, \quad \frac{2}{q}, \quad \dots, \quad \frac{q-1}{q},$$

de manière essentiellement équilibrée, cf. ce qui va suivre.

Pour **(ii)**, si au contraire il existait deux entiers distincts $k_1 \neq k_2$ tels que :

$$\langle k_1 \gamma \rangle = \langle k_2 \gamma \rangle,$$

ceci voudrait dire que :

$$k_1 \gamma - k_2 \gamma \in \mathbb{Z},$$

d'où γ est rationnel, contradiction. \square

En fait, on peut même montrer à moindres frais que pour $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel, la suite :

$$\langle k\gamma \rangle$$

est *dense* dans $[0, 1[$: c'est le théorème dit *de Kronecker*, mais ici, il s'agit de viser un énoncé plus profond d'après lequel la suite $\langle k\gamma \rangle$ visite en moyenne tout sous-intervalle $[a, b] \subset [0, 1[$ en proportion exacte à la mesure de cet intervalle.

Définition 18.4. Une suite de nombres réels :

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \dots \in [0, 1[$$

est dite *équidistribuée* lorsque, pour tous :

$$0 \leq a < b < 1$$

on a :

$$b - a = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Card} \{1 \leq k \leq n : \xi_k \in [a, b]\}}{n}.$$

Autrement dit, pour $n \gg 1$ grand, la proportion des n nombres $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ qui appartiennent à l'intervalle quelconque $[a, b]$ devient asymptotiquement égale au quotient :

$$\frac{\text{mesure}([a, b])}{\text{mesure}([0, 1])},$$

c'est-à-dire que les ξ_k se distribuent de manière équitable et homogène partout dans les sous-intervalles de l'intervalle complet $[0, 1[$.

En vérité, l'ordre dans lequel apparaissent les ξ_k est important, comme le montrent deux illustrations.

La suite :

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots,$$

est équidistribuée (exercice), car elle se déplace dans l'intervalle de manière très régulière.

Toutefois, étant donné une énumération quelconque :

$$(r_k)_{k \geq 1}$$

de tous les nombres rationnels $\mathbb{Q} \ni r_k$, si on perturbe artificiellement l'ordre d'apparition de ses termes par exemple comme :

$$\xi_k = \begin{cases} r_{k/2} & \text{lorsque } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{lorsque } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

alors il est clair qu'aucune équidistribution ne peut avoir lieu, puisque la 'moitié' de la suite se voit contrainte de visiter le seul point 0.

Théorème 18.5. *Pour tout nombre irrationnel :*

$$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

la suite des parties fractionnaires :

$$\langle 1\gamma \rangle, \langle 2\gamma \rangle, \langle 3\gamma \rangle, \dots, \langle k\gamma \rangle, \dots,$$

est équidistribuée dans $[0, 1[$, et, en particulier, elle est dense.

Démonstration. Soient donc :

$$0 \leq a < b < 1,$$

et soit la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x)$$

de l'intervalle $[a, b]$.

Si on étend cette fonction comme fonction 1-périodique sur \mathbb{R} , alors (exercice mental) :

$$\text{Card} \{1 \leq k \leq n : \langle k\gamma \rangle \in [a, b]\} = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma),$$

et l'énoncé du théorème peut être reformulé comme la propriété de convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\int_0^1 \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx}_{= b-a}.$$

Une telle reformulation élimine la difficulté technique de travailler avec des parties fractionnaires, et — plus en profondeur dans le cœur unitaire des mathématiques —, elle remet un problème d'Arithmétique entre les mains puissantes de l'Analyse.

L'énoncé crucial ci-dessous est en fait une généralisation de la propriété de convergence désirée, et sa démonstration — élégante dans sa manière d'emprunter un raccourci séduisant — repose sur une mobilisation de l'Analyse de Fourier !

Lemme 18.6. *Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est une fonction continue 2π -périodique, alors pour tout nombre irrationnel :*

$$\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},$$

on a la convergence :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx.$$

Démonstration. Divisons les arguments en deux parties.

Dans la première étape, vérifions la validité du résultat lorsque f est une fonction exponentielle quelconque :

$$e^{2i\pi\ell x}$$

avec :

$$\ell \in \mathbb{Z},$$

et dans ce cas nous allons être aidé par la simplification majeure qu'offre la contraction d'une sommation géométrique :

$$q + q^2 + \cdots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1).$$

Pour $\ell = 0$, à savoir pour $f = 1$, on a bien (sans limite) :

$$\frac{1}{n} [1 + \cdots + 1] = 1 = \int_0^1 1 dx.$$

Pour $\ell \neq 0$ entier, puisque γ est par hypothèse irrationnel, on est certain que :

$$e^{2i\pi\ell\gamma} \neq 1,$$

et après sommation géométrique :

$$\frac{1}{n} \left[e^{2i\pi\ell\gamma} + e^{2i\pi 2\ell\gamma} + \cdots + e^{2i\pi n\ell\gamma} \right] = e^{2i\pi\ell\gamma} \frac{1 - e^{2i\pi n\ell\gamma}}{1 - e^{2i\pi\ell\gamma}},$$

on peut majorer :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\ell\gamma} \right| &= \frac{1}{n} \left| e^{2i\pi\ell\gamma} \frac{1 - e^{2i\pi n\ell\gamma}}{1 - e^{2i\pi\ell\gamma}} \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \underbrace{\frac{2}{|1 - e^{2i\pi\ell\gamma}|}}_{\text{constante}} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

donc on a bien :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi k\ell\gamma} \\ &= \int_0^1 e^{2i\pi\ell\gamma} dx, \end{aligned}$$

cette dernière intégrale étant connue pour s'annuler !

Ensuite, la propriété de convergence énoncée par le lemme étant manifestement linéaire par rapport à la fonction f , on en déduit instantanément que pour tout polynôme trigonométrique :

$$Q(x) = \sum_{\text{finie}} Q_\ell e^{2i\pi\ell x},$$

on a aussi :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 Q(x) dx.$$

Pour conclure, la deuxième étape consiste simplement à mobiliser un raisonnement par densité.

En effet, grâce à la densité des polynômes trigonométriques comme ci-dessus dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ — conséquence du théorème de Fejér renormalisé de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ à \mathbb{R}/\mathbb{Z} —, étant donné une fonction continue 1-périodique quelconque f sur \mathbb{R} comme dans le lemme, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un polynôme trigonométrique $Q = Q_\varepsilon$ tel que :

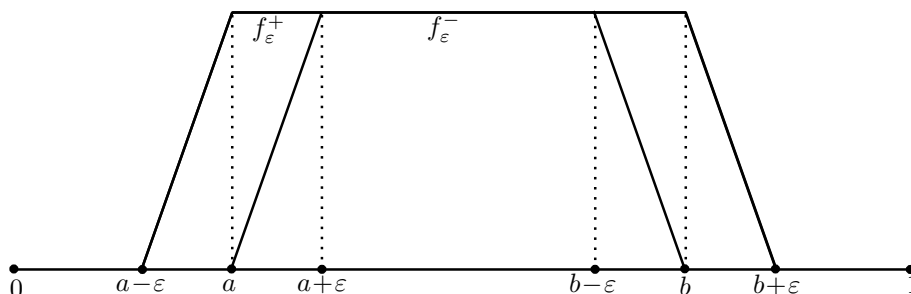
$$\max_{x \in [0,1]} |f(x) - Q(x)| \leq \varepsilon.$$

Mais alors on peut aisément estimer en insérant Q deux fois :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) - \int_0^1 f(x) dx \right| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) - \int_0^1 Q(x) dx + \int_0^1 Q(x) dx - \int_0^1 f(x) dx \right| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \underbrace{|f(k\gamma) - Q(k\gamma)|}_{\leq \varepsilon} + \underbrace{\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Q(k\gamma) - \int_0^1 Q(x) dx \right|}_{\substack{\text{tend vers } 0 \\ \text{par ce qui précède}}} + \int_0^1 \underbrace{|Q(x) - f(x)|}_{\leq \varepsilon} dx \\ &\leq \varepsilon + (\text{Quantité} \rightarrow 0) + \varepsilon, \end{aligned}$$

et donc quand n est assez grand, le tout est $\leq 3\varepsilon$, ce qui conclut. \square

Pour achever la démonstration du théorème d'équidistribution, sachant que la fonction indicatrice $1_{[a,b]}(x)$ n'est pas continue de telle sorte que le lemme ne s'y applique pas directement, c'est encore un raisonnement par densité qui va permettre de conclure.



En effet, choisissons deux fonctions 1-périodiques positives *continues* affines par morceaux :

$$f_\varepsilon^+ \quad \text{et} \quad f_\varepsilon^-$$

qui encadrent $\mathbf{1}_{[a,b]}$ — en supposant $0 < a < b < 1$, le cas où $a = 1$ étant laissé au lecteur — :

$$f_\varepsilon^- \leq \mathbf{1}_{[a,b]} \leq f_\varepsilon^+,$$

qui sont bornées par 1, et qui coïncident avec $\mathbf{1}_{[a,b]}$ excepté sur les deux intervalles :

$$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cup]b-\varepsilon, b+\varepsilon[$$

de longueur totale petite 2ε , de telle sorte que :

$$b - a - 2\varepsilon \leq \int_0^1 f_\varepsilon^-(x) dx \leq \int_0^1 f_\varepsilon^+(x) dx \leq b - a + 2\varepsilon.$$

Une sommation sur les inégalités d'encadrement donne alors :

$$\underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\varepsilon^-(k\gamma)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f_\varepsilon^-} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_\varepsilon^+(k\gamma)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f_\varepsilon^+},$$

mais puisque les deux fonctions f_ε^- et f_ε^+ sont continues, le lemme principal ci-dessus a déjà démontré que les extrémités gauche et droite tendent vers les intégrales correspondantes, et donc :

$$b - a - 2\varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{[a,b]}(k\gamma) \leq b - a + 2\varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, c'est que la limite existe bel et bien et qu'elle vaut :

$$b - a = \int_a^b \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx,$$

comme programmé par la reformulation effectuée plus haut. \square

Observons que le dernier résultat établi, est tout aussi vrai — avec une démonstration quasiment identique — pour la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]a,b]}$ d'un intervalle ouvert.

Corollaire 18.7. *Pour toute fonction 1-périodique $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ qui est Riemann intégrable, on a encore la convergence :*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_0^1 f(x) dx.$$

Démonstration. La Riemann-intégrabilité de f s'exprime, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, par l'existence d'une subdivision $\Delta = \Delta(\varepsilon)$ de $[a, b]$:

$$\Delta = \{0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{\nu-1} < a_\nu = 1\},$$

telle que, si on définit une fonction en escalier inférieure :

$$f_\Delta^{\text{esc}}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x = a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \\ \inf_{[a_{\lambda-1}, a_\lambda]} f & \text{si } a_{\lambda-1} < x < a_\lambda \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \end{cases}$$

ainsi qu'une fonction en escalier supérieure :

$$f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x = a_{\lambda} \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \\ \sup_{[a_{\lambda-1}, a_{\lambda}]} f & \text{si } a_{\lambda-1} < x < a_{\lambda} \text{ pour un unique } 1 \leq \lambda \leq \nu, \end{cases}$$

alors la différence entre leurs intégrales est petite :

$$0 \leq \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx - \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx \leq \varepsilon,$$

et l'intégrale de f s'en trouve enfermée :

$$(18.8) \quad \int f_{\Delta}^{\text{esc}} \leq \int f \leq \int f_{\text{esc}}^{\Delta}.$$

Mais pour une fonction indicatrice d'intervalle (ouvert ou fermé), on a vu à la fin de la démonstration du théorème précédent que :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (a_{\lambda} - a_{\lambda-1}),$$

ceci étant vrai pour tout $1 \leq \lambda \leq \nu$, et si ensuite, on se rappelle que les fonctions en escalier sont combinaisons linéaires finies de fonctions indicatrices d'intervalles :

$$\begin{aligned} f_{\Delta}^{\text{esc}} &= \sum_{1 \leq \lambda \leq \kappa} \inf_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[} f \cdot \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(x) + \underbrace{f(0) \cdot \mathbf{1}_{\{0\}} + \cdots + f(1) \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}}_{\text{d'intégrale} = 0}, \\ f_{\text{esc}}^{\Delta} &= \sum_{1 \leq \lambda \leq \kappa} \sup_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[} f \cdot \mathbf{1}_{]a_{\lambda-1}, a_{\lambda}[}(x) + \underbrace{f(0) \cdot \mathbf{1}_{\{0\}} + \cdots + f(1) \cdot \mathbf{1}_{\{1\}}}_{\text{d'intégrale} = 0}, \end{aligned}$$

on déduit (exercice) de toutes ces visions explicites agréables que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\Delta}^{\text{esc}}(k\gamma) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx, \\ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\text{esc}}^{\Delta}(k\gamma) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx. \end{aligned}$$

Pour terminer, en revenant à l'inégalité $f_{\Delta}^{\text{esc}} \leq f \leq f_{\text{esc}}^{\Delta}$, des sommations-moyennisations finies donnent :

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx & \leq & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) & \leq & \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx \\ \infty \leftarrow n \downarrow & & & & \downarrow n \rightarrow \infty \\ \int_0^1 f_{\Delta}^{\text{esc}}(x) dx & & & & \int_0^1 f_{\text{esc}}^{\Delta}(x) dx, \end{array}$$

puis en tenant compte de $\int (f_{\text{esc}}^{\Delta} - f_{\Delta}^{\text{esc}}) \leq \varepsilon$ et de (18.8), sachant que $\varepsilon > 0$ était arbitraire, cet impitoyable pressoir vertical extrait en son centre la liqueur substantifique terminale :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k\gamma) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx. \quad \square$$

Notons que ce résultat n'est pas satisfait par les fonctions plus générales qui sont intégrables au sens de Lebesgue, comme le montre la fonction indicatrice :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Z}+\gamma\mathbb{Z}},$$

toujours avec $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irrationnel, fonction 1-périodique nulle presque partout qui montre la *non-coïncidence* :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\mathbb{Z}+\gamma\mathbb{Z}}(k\gamma) = 1 \neq 0 = \int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Z}+\gamma\mathbb{Z}}.$$

Voici maintenant l'interprétation du lemme et de son corollaire, en termes de ce qu'on appelle des *systèmes dynamiques*. Ici, le contexte est celui du cercle unité centré en 0 dans \mathbb{C} paramétré par un angle θ . Or une rotation d'angle $2\pi\gamma$:

$$\rho: \theta \longmapsto \theta + 2\pi\gamma$$

envoie le cercle unité sur lui-même.

Comment cette action-rotation évolue-t-elle avec le temps ?

En d'autres termes, comment les rotations itérées qui sont les compositions :

$$\rho, \rho^{\circ 2}, \rho^{\circ 3}, \dots, \rho^{\circ k}, \dots,$$

et sont elles-mêmes des rotations :

$$\rho^{\circ k} = \underbrace{\rho \circ \dots \circ \rho}_{k \text{ fois}}: \theta \longmapsto \theta + 2\pi k\gamma,$$

se comportent-elles en moyenne lorsque $k \rightarrow \infty$?

À toute fonction Riemann-intégrable, on peut associer l'effet par composition de ces rotations itérées :

$$f(\rho(\theta)), \quad f(\rho^{\circ 2}(\theta)), \quad f(\rho^{\circ 3}(\theta)), \quad \dots, \quad f(\rho^{\circ k}(\theta)), \quad \dots,$$

où bien entendu pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$f(\rho^{\circ k}(\theta)) = f(\theta + 2\pi k\gamma).$$

Dans ce contexte paradigmatiquement simple, le *théorème ergologique de Birkhoff* pour ce système dynamique stipule que la '*moyenne temporelle*' :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\rho^{\circ k}(\theta))$$

existe pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et est égale à la '*moyenne spatiale*' :

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta,$$

toutes les fois que $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est *irrationnel*. Bien entendu, cette assertion n'est autre qu'une reformulation du corollaire qui précède, une fois qu'on a effectué le changement de variable :

$$\theta = 2\pi x.$$

Si l'on revient au problème des suites équidistribuées, on observe que la démonstration du théorème précédent fournit aussi le résultat suivant.

Théorème 18.9. [Critère d'équidistribution de Weyl] Une suite de nombres réels de l'intervalle $[0, 1[$:

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots, \xi_k, \dots,$$

est équidistribuée si et seulement si, pour tout entier non nul $\ell \in \mathbb{Z}^*$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ell \xi_k}$$

Démonstration. Une direction de cette condition nécessaire et suffisante a en fait déjà été rigoureusement établie, tandis que l'autre direction réciproque (aisée) est proposée dans l'Exercice 31. \square

19. Une fonction continue nulle part dérivable (avec les moyennes retardées)

Dans cette section, nous exhibons une fonction continue qui n'admet de dérivée en aucun point.

Théorème 19.1. Étant donné un nombre réel $0 < \alpha < 1$, la fonction :

$$f_\alpha(\theta) = f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta}$$

définie par une série normalement — donc uniformément — convergente, est continue mais elle n'admet de dérivée en aucun point $\theta \in \mathbb{R}$.

Intuitivement, la série dérivée terme à terme :

$$i \sum_n \underbrace{2^{n(1-\alpha)}}_{\rightarrow \infty} e^{i2^n \theta}$$

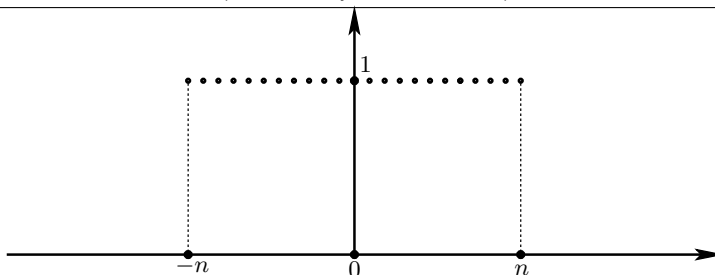
a de très fortes chances de ne pas converger, puisque le module de son terme général tend vers l'infini ! Toutefois, cette observation n'est pas une démonstration, et c'est afin de réaliser réellement une telle divergence qu'apparaît une somme d'exponentielles $e^{ik\theta}$ qui est très *lacunaire*, au sens où seules les fréquences $k = 2^n$ qui sont des puissances de 2 sont présentes.

Démonstration. La preuve raconte d'une manière fort éloquente trois méthodes différentes de sommation d'une série de Fourier.

Premièrement, la méthode ordinaire de convergence des sommes partielles d'une fonction $g \in L^1(\mathbb{T})$:

$$S_n(g)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \widehat{g}(k) e^{ik\theta}$$

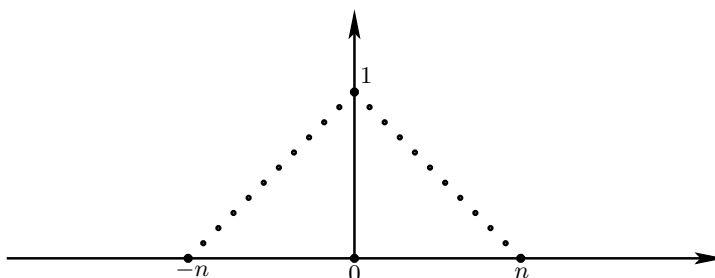
se représente graphiquement en plaçant des points à hauteur 1 au dessus des entiers k compris entre $-n$ et $+n$.



Deuxièmement, la ‘césarorisation’ de $S_n(f)$ due à Fejér :

$$\begin{aligned} \sigma_n(g)(\theta) &= \frac{S_0(g)(\theta) + S_1(g)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(g)(\theta)}{n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\ell=0}^{n-1} \sum_{|k| \leq \ell} \widehat{g}(k) e^{ik\theta} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{|k| \leq n} (n - |k|) \widehat{g}(k) e^{ik\theta} \\ &= \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{g}(k) e^{ik\theta} \end{aligned}$$

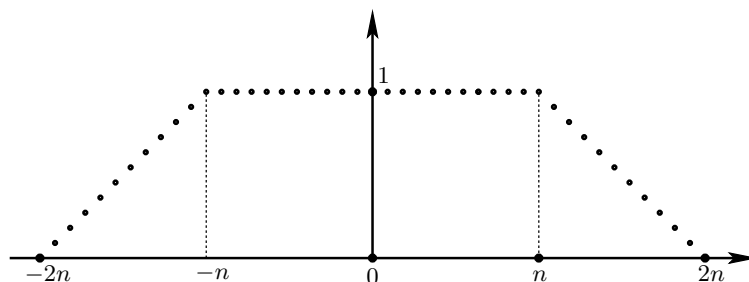
possède une allure graphique symétrique de forme triangulaire.



Troisièmement et dernièrement, la *sommation par moyennes retardées* :

$$\Delta_n(g) = 2\sigma_{2n}(g) - \sigma_n(g)$$

possède une allure graphique symétrique de forme trapézoïdale :



car l’on vérifie (exercice) que :

$$\Delta_n(g)(\theta) = \sum_{|k| \leq n} \widehat{g}(k) e^{ik\theta} + \sum_{n+1 \leq |k| \leq 2n} \left(2 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{g}(k) e^{ik\theta}.$$

Ces sommations par moyennes retardées $\Delta_n(g)$ cumulent les avantages des sommes de Fourier $S_n(g)$ et de Cesàro-Fejér $\sigma_n(g)$: elles conservent la propriété d'être représentées par des 'bons noyaux', positifs, centrés en 0 et de masse constamment égale à 1, tandis que pour les séries qui ont des propriétés lacunaires, elles redonnent essentiellement les sommes partielles simples de Fourier.

En particulier pour notre série trigonométrique lacunaire :

$$f = f_\alpha(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

en observant par convergence uniforme que, pour $k \leq -1$:

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta} \right) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(2^n - k)\theta} \frac{d\theta}{2\pi}, \end{aligned}$$

car $2^n - k \geq 1$, et que, pour des entiers $n \equiv 2^n$ qui sont puissances de 2, on a (exercice) :

$$(19.2) \quad \Delta_{2^n}(f)(\theta) = S_{2^n}(f)(\theta) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k\alpha}} e^{i2^n \theta}.$$

Lemme 19.3. *La famille des noyaux de Fejér :*

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \sum_{|k| \leq n} \left(1 - \frac{|k|}{n} \right) e^{ikt} \\ &= \frac{1}{n} \left[\frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right]^2 \end{aligned}$$

possède des dérivées qui satisfont :

$$|F'_n(t)| \leq n(2n+1),$$

et simultanément aussi :

$$|F'_n(t)| \leq \frac{1}{t^2} \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right),$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Démonstration. En effet, dans l'expression explicite :

$$F_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \underbrace{\left(1 - \frac{|k|}{n} \right)}_{|\cdot| \leq 1} e^{ikt},$$

les coefficients-poids sont tous ≤ 1 en valeur absolue, donc quand on dérive terme à terme cette somme finie :

$$F'_n(t) = \sum_{|k| \leq n} \underbrace{ik \left(1 - \frac{|k|}{n} \right)}_{|\cdot| \leq n} e^{ikt},$$

et quand on majore sans finesse par $\leq n$ le module de ces nouveaux coefficients-poids, on obtient bien, vu qu'il y a $2n + 1$ termes :

$$|F'_n(t)| \leq n(2n + 1).$$

Deuxièmement, une dérivation de l'autre expression (close) :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \frac{\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)},$$

donne (exercice visuel) :

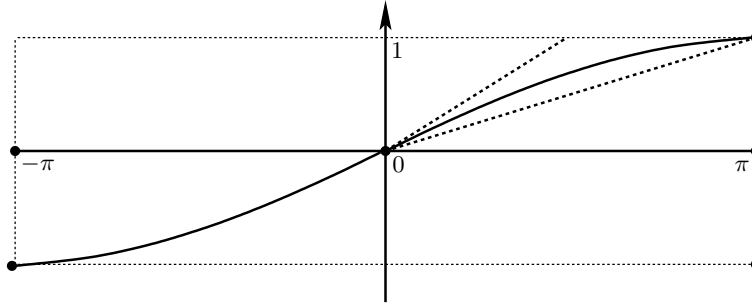
$$F'_n(t) = \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right) \cos\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{n} \frac{\cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin^2\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Maintenant, dans le deuxième numérateur à droite, on décompose le carré :

$$\sin^2\left(\frac{n}{2}t\right) = \sin\left(\frac{n}{2}t\right) \cdot \sin\left(\frac{n}{2}t\right),$$

et on majore dans un premier temps en négligeant au numérateur les deux cosinus ≤ 1 et aussi deux sinus numérateuriaux sur trois tous ≤ 1 en valeur absolue :

$$|F'_n(t)| \leq \frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} + \frac{1}{n} \frac{\sin\left(\frac{n}{2}t\right)}{\sin^3\left(\frac{t}{2}\right)}.$$



Ensuite, la fonction impaire :

$$\begin{aligned} [-\pi, \pi] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \sin\left(\frac{t}{2}\right) \end{aligned}$$

étant en-dessous de sa tangente d'équation $t \longmapsto \frac{t}{2}$ sur $[0, \pi]$, et au-dessus de sa corde d'équation $t \longmapsto \frac{1}{\pi}t$, à savoir satisfaisant l'encadrement classique :

$$\frac{1}{\pi}|t| \leq \left|\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right| \leq \frac{1}{2}|t| \quad (|t| \leq \pi),$$

on poursuit et on termine la majoration par :

$$\begin{aligned} |F'_n(t)| &\leq \frac{\pi^2}{t^2} + \frac{1}{n} \frac{n_0}{2} |t| \frac{\pi^3}{|t|^3} \\ &= \frac{1}{t^2} \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right), \end{aligned}$$

comme annoncé. □

Supposons maintenant en raisonnant par contradiction que la série trigonométrique lacunaire :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta}$$

admette une dérivée en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$ du cercle unité.

Proposition 19.4. *Étant donné une fonction $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ continue sur le cercle, si sa dérivée :*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\theta_0 + t) - g(\theta_0)}{t} =: g'(\theta_0),$$

existe en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, alors en ce même point les dérivées des sommes de Fejér sont contrôlées comme :

$$\sigma_n(g)'(\theta_0) = O(\log n),$$

et de même pour les sommes retardées :

$$\Delta_n(g)'(\theta_0) = O(\log n).$$

Démonstration. Comme $\sigma_n(g)$ est le résultat de la convolution de f avec les noyaux de Fejér :

$$\sigma_n(g)(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta_0 - t) g(t) \frac{dt}{2\pi},$$

une dérivation sous le signe somme donne :

$$\begin{aligned} \sigma_n'(g)(\theta_0) &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(\theta_0 - t) g(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= F_n' * g(\theta_0) \\ &= g * F_n'(\theta_0) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) g(\theta_0 - t) \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

car l'opérateur $*$ de convolution est commutatif. Mais puisque F_n est 2π -périodique :

$$0 = \left[\frac{F_n(t)}{2\pi} \right]_{-\pi}^{\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) \frac{dt}{2\pi}$$

on a par soustraction astucieuse :

$$\sigma_n(g)'(\theta_0) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n'(t) [g(\theta_0 - t) - g(\theta_0)] \frac{dt}{2\pi}.$$

Maintenant, g étant supposée dérivable en $\theta = \theta_0$, il existe une constante $C_0 > 0$ finie telle que (exercice) :

$$|g(\theta_0 - t) - g(\theta_0)| \leq C_0 |t|,$$

pour tout $|t| \leq \pi$. Il en découle instantanément que :

$$|\sigma_n(g)'(\theta_0)| \leq C_0 \int_{-\pi}^{\pi} |F_n'(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi}.$$

Alors une application intelligente des deux inégalités du lemme qui précède permet de majorer en découpant l'intégrale :

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(g)'(\theta_0)| &\leq C_0 \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} |F'_n(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi} + C_0 \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} |F'_n(t)| \cdot |t| \frac{dt}{2\pi} \\
&\leq C_0 n(2n+1) \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} |t| \frac{dt}{2\pi} + C_0 \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right) \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{|t|} \frac{dt}{2\pi} \\
&= \frac{C_0}{2\pi} \frac{n(2n+1)}{n^2} + C_0 \left(\pi^2 + \frac{\pi^3}{2} \right) \frac{2}{2\pi} \left[\log \pi - \log \frac{1}{n} \right] \\
&\leq \text{constante} + \text{constante} \cdot \log n \\
&= O(\log n).
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
\Delta_n(g)'(\theta_0) &= 2\sigma_{2n}(g)'(\theta_0) - \sigma_n(g)'(\theta_0) \\
&= O(\log n) + O(\log n) \\
&= O(\log n),
\end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Qui plus est, on a aussi pour la même raison :

$$\Delta_{2n}(g)'(\theta_0) - \Delta_n(g)'(\theta_0) = O(\log n).$$

Maintenant, en revenant à notre série trigonométrique lacunaire :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

et en prenant dans ce qui vient d'être obtenu :

$$n := 2^{n-1},$$

on obtient en supposant (par l'absurde) que $f = g$ est dérivable en point θ_0 :

$$|\Delta_{2^n}(f)'(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)'(\theta_0)| \leq \text{constante} \cdot \log(2^n).$$

Mais par ailleurs, le fait que la série soit lacunaire assure, en revenant à (19.2), que cette soustraction ne consiste qu'en un seul terme pour tout θ :

$$\Delta_{2^n}(f)(\theta) - \Delta_{2^{n-1}}(f)(\theta) = \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta},$$

dont la dérivée en $\theta = \theta_0$ vaut manifestement :

$$\Delta_{2^n}(f)'(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)'(\theta_0) = i 2^{n(1-\alpha)} e^{i2^n \theta_0},$$

et donc son module :

$$|\Delta_{2^n}(f)(\theta_0) - \Delta_{2^{n-1}}(f)(\theta_0)| = 2^{n(1-\alpha)}$$

ne peut absolument pas être majoré par :

$$\text{constante} \cdot \log(2^n)$$

lorsque $n \rightarrow \infty$, puisque $0 < \alpha < 1$, ce qui est la contradiction conclusive. □

20. Une fonction continue nulle part dérivable (d'après Lebesgue)

, Département de Mathématiques d'Orsay, Université Paris-Sud

La première fonction continue sans dérivée découverte par Weierstrass :

$$W(x) := \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(b^n x),$$

avec $0 < a < 1$ et $b \geq 2$ entier satisfaisant :

$$ab > 1 + \frac{3\pi}{2},$$

ne convient pas pour un enseignement élémentaire, ce qui a conduit Lebesgue à rechercher, en 1939, à améliorer cet exemple en simplifiant au maximum les arguments et en réduisant les connaissances requises au strict minimum. L'exemple de Lebesgue est inspiré des développements en série de Fourier lacunaires, et il possède l'avantage de montrer que des fonctions non dérivables peuvent se présenter au cours d'un calcul d'allure tout à fait normale. Nous allons détailler très scrupuleusement chaque étape du raisonnement afin d'en assurer l'élémentarité.

Théorème 20.1. *La fonction :*

$$L(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(2^{n^2} x)$$

est continue 2π -périodique sur \mathbb{R} par convergence normale, mais elle n'admet de dérivée en aucun point $x \in \mathbb{R}$, à savoir plus précisément, en tout point $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite :

$$(h_m)_{m \geq 1} \longrightarrow 0$$

qui tend vers zéro telle que :

$$\infty = \lim_{m \rightarrow \infty} \left| \frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} \right|.$$

Démonstration. Pour $x \in \mathbb{R}$ quelconque il s'agit donc d'examiner la limite :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{L(x + h) - L(x)}{h} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h)) - \sin(2^{n^2} x)}{h}.$$

La première astuce simplificatrice de Lebesgue consiste à choisir des $h \in \mathbb{R}$ petits et suffisamment spéciaux pour annihiler tous les termes de cette somme de quotients différentiels, à partir d'un certain ordre $m + 1 \geq 2$ arbitraire, et nous prétendons (avec Lebesgue) que cela est possible avec par exemple :

$$\begin{aligned} h &:= h_m \\ &:= \frac{\pi}{2^{m^2+1}}, \end{aligned}$$

sachant qu'un autre choix similaire suivra ultérieurement pour compléter l'argumentation :

$$\begin{aligned} h &:= h'_m \\ &:= \frac{3\pi}{2^{m^2+1}}, \end{aligned}$$

Ainsi donc avec $h = h_m$, dans la somme infinie que l'on découpe :

$$\sum_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=1}^m + \sum_{n=m+1}^{\infty}$$

tous les quotients différentiels de la deuxième somme-reste infinie pour $n \geq m + 1$:

$$\frac{\sin\left(2^{n^2}\left(x + \frac{\pi}{2^{m^2+1}}\right)\right) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m} = \frac{\sin\left(2^{n^2}x + \overbrace{\frac{2^{n^2}}{2^{m^2+1}}\pi}^{\geq 2}\right) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m} = 0$$

disparaissent simplement grâce au fait que $y \mapsto \sin y$ est 2π -périodique, et donc le quotient à examiner se réduit à :

$$\frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m}.$$

De même, on vérifie aisément que l'on a aussi pour les mêmes raisons la troncature similaire :

$$\frac{L(x + h'_m) - L(x)}{h'_m} = \sum_{n=1}^m \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h'_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h'_m}.$$

Maintenant, la seconde idée qui était implicitement cachée dans les 2^{n^2} , c'est de faire en sorte que dans ces sommes finies :

$$\sum_{n=1}^m = \sum_{n=1}^{m-1} + m\text{-ème terme},$$

le dernier terme non nul surpasse considérablement la somme de tous ceux qui le précèdent afin de faire diverger à souhait les quotients différentiels.

Plus précisément :

$$\frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x + h_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m}}_{\text{somme à contrôler}} + \underbrace{\frac{1}{2^m} \frac{\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{\pi}{2^{m^2+1}}}}_{\text{dernier terme à faire diverger}},$$

avec des expressions similaires lorsque h_m est remplacé par h'_m .

Puisqu'il s'agit de contrôler une somme $\sum_{n=1}^{m-1}$ de quotients du type :

$$\frac{\sin(a(x + h)) - \sin(ax)}{h},$$

un énoncé auxiliaire élémentaire sera le bienvenu.

Lemme 20.2. *Étant donné $a > 0$ fixé, pour tout x et tout $0 < h \leq \frac{2}{a}$, on a :*

$$\left| \frac{\sin(a(x + h)) - \sin(ax)}{h} \right| \leq 2a.$$

Démonstration. La formule :

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

permet de développer :

$$\begin{aligned} \sin(a(x+h)) - \sin(ax) &= \sin(ax) \cos(ah) + \cos(ax) \sin(ah) - \sin(ax) \\ &= \cos(ax) \sin(ah) + \sin(ax) [\cos(ah) - 1]. \end{aligned}$$

Ensuite, les majorations standard :

$$\begin{aligned} |\sin y| &\leq y, \\ |\cos y - 1| &\leq \frac{y^2}{2}, \end{aligned}$$

valables pour tout $y \in \mathbb{R}$ (exercice de révision) permettent de déduire :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sin(ax+ah) - \sin(ax)}{h} \right| &\leq 1 \cdot |ah| + \frac{1 \cdot \frac{(ah)^2}{2}}{|h|} \\ &= a + \frac{a^2}{2} |h| \\ &\leq 2a, \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Pour les termes de la somme à contrôler avec $1 \leq n \leq m-1$, on a :

$$a = 2^{n^2},$$

et alors :

$$h = \frac{\pi}{2^{m^2+1}}$$

satisfait bien $0 < h \leq \frac{2}{a}$ (exercice mental), donc le lemme s'applique pour majorer la somme en question :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} \frac{\sin(2^{n^2}(x+h_m)) - \sin(2^{n^2}x)}{h_m} \right| &\leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{2^n} (2 \cdot 2^{n^2}) \\ &= 2 \sum_{n=1}^{m-1} 2^{n^2-n} \\ &= 2 \left[2^0 + 2^{2^2-2} + 2^{2^3-3} + \dots + 2^{(m-1)^2-(m-1)} \right] \\ &\leq 2 \sum_{k=0}^{(m-1)^2-(m-1)} 2^k \\ &= 2 \cdot 2^{(m-1)^2-(m-1)+1} \\ &= 2^{m^2-3m+4}. \end{aligned}$$

En revenant donc au quotient différentiel laissée en chemin plus haut :

$$\begin{aligned} \frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} &= O(2^{m^2-3m+4}) + \underbrace{\frac{1}{2^m} \frac{\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{\pi}{2^{m^2+1}}}}_{\text{dernier terme}} \\ &= O(2^{m^2-3m+4}) + \underbrace{2^{m^2-m+1}}_{\substack{\text{dominant} \\ \text{lorsque } m \rightarrow \infty}} \underbrace{\frac{1}{\pi} \left[\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) \right]}_{\text{assurer que cela soit non nul}}, \end{aligned}$$

il suffirait d'assurer que le terme entre crochets soit uniformément non nul pour que la domination de 2^{m^2-m+1} contraigne ce quotient à diverger vers l'infini, comme cela a été annoncé.

Cependant, ce terme entre crochets :

$$\sin\left(2^{m^2}x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) = \underbrace{\cos(2^{m^2}x)}_{=:\alpha_m} - \underbrace{\sin(2^{m^2}x)}_{=:\beta_m},$$

n'est pas forcément uniformément minoré, en valeur absolue :

$$|\alpha_m - \beta_m|.$$

Mais c'est là qu'intervient l'idée anticipée d'effectuer aussi les constructions avec l'autre suite :

$$h'_m = \frac{3\pi}{2^{m^2+1}},$$

puisqu'alors l'autre terme entre crochets afférent :

$$\begin{aligned} \frac{L(x + h'_m) - L(x)}{h'_m} &= O(2^{m^2-3m+4}) + \frac{1}{2^m} \frac{\sin\left(2^{m^2}x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x)}{\frac{3\pi}{2^{m^2+1}}} \\ &= O(2^{m^2-3m+4}) + 2^{m^2-m+1} \frac{1}{3\pi} \left[\sin\left(2^{m^2}x + \frac{3\pi}{2}\right) - \sin(2^{m^2}x) \right], \end{aligned}$$

devient égal à :

$$-\cos(2^{m^2}x) - \sin(2^{m^2}x) = -\alpha_m - \beta_m.$$

Lemme 20.3. Deux nombres réels α et β contraints par la relation :

$$\alpha^2 + \beta^2 = 1$$

satisfont toujours :

$$\max(|\alpha - \beta|, |\alpha + \beta|) \geq 1.$$

Démonstration. En effet :

$$\begin{aligned} |\alpha - \beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \\ &= 2, \end{aligned}$$

donc l'une au moins des valeurs absolues est ≥ 1 . □

Ainsi, au moins une des deux suites de quotients différentiels :

$$\left| \frac{L(x + h_m) - L(x)}{h_m} \right| = \frac{2^{m^2-m+1}}{\pi} |\alpha_m - \beta_m| + O(2^{m^2-3m+4}),$$

ou :

$$\left| \frac{\mathbf{L}(x + h'_m) - \mathbf{L}(x)}{h'_m} \right| = \frac{2^{m^2-m+1}}{\pi} [-\alpha_m - \beta_m] + O(2^{m^2-3m+4}),$$

diverge vers ∞ lorsque $m \rightarrow \infty$, fin de la démonstration ! □

21. Exercices

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ une fonction 2π -périodique sur \mathbb{R} Lebesgue-intégrable.

(a) Montrer qu'avec ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$, la série de Fourier de f :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

peut se ré-écrire sous la forme :

$$\widehat{f}(0) + \sum_{k=1}^{\infty} [\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k)] \cos k\theta + \sum_{k=1}^{\infty} i [\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)] \sin k\theta.$$

(b) Lorsque f est paire, montrer que $\widehat{f}(k) = \widehat{f}(-k)$ pour tout $k \geq 0$, de telle sorte qu'on obtient une série de cosinus.

(c) Lorsque f est impaire, montrer que $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k)$ pour tout $k \geq 0$, de telle sorte qu'on obtient une série de sinus.

(d) Lorsque $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f}(k) = 0$ pour $k \in \mathbb{Z}$ impair.

(e) Montrer que $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ est à valeurs dans \mathbb{R} lorsque, et seulement lorsque :

$$\overline{\widehat{f}(k)} = \widehat{f}(-k) \quad (\forall k \in \mathbb{Z}).$$

Exercice 2. Soient $f, g, h \in L^1(\mathbb{T})$ trois fonctions Lebesgue-intégrables sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Montrer l'associativité du produit de convolution :

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Exercice 3. Soit la fonction 2π -périodique impaire définie sur $[0, \pi]$ par $\theta (\pi - \theta)$.

(a) Dessiner le graphe de f .

(b) Calculer les coefficients de Fourier de f .

(c) Montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\theta) = \frac{8}{\pi} \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{\sin(k\theta)}{k^3}.$$

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := |\theta|$.

(a) Dessiner le graphe de f .

(b) Montrer, en les calculant, que les coefficients de Fourier de f valent :

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{pour } k = 0, \\ \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2} & \text{lorsque } k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

(c) Écrire la série de Fourier de f en termes de sinus et de cosinus.

(d) Au point $\theta = 0$, en déduire les deux formules d'Euler :

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 5. Sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, avec $\delta > 0$, on considère la fonction :

$$f(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } \delta \leq |\theta| \leq \pi, \\ 1 - \frac{|\theta|}{\delta} & \text{lorsque } 0 \leq |\theta| \leq \delta. \end{cases}$$

(a) Dessiner le graphe de f .

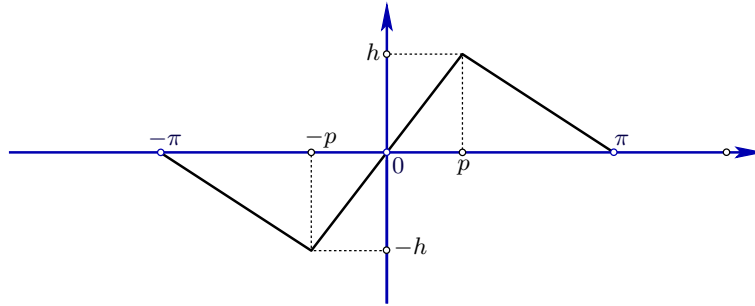
(b) Montrer que :

$$f(\theta) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2 \pi \delta} \cos(n\theta) \quad (\forall \theta \in [-\pi, \pi]).$$

Exercice 6. Soient deux réels positifs $0 < p < \pi$ et $h > 0$, et soit, sur le segment $[0, \pi]$, la fonction *corde pincée* définie par :

$$f(\theta) := \begin{cases} \frac{\theta h}{p} & \text{lorsque } 0 \leq \theta \leq p, \\ \frac{h(\pi - \theta)}{\pi - p} & \text{lorsque } p \leq \theta \leq \pi, \end{cases}$$

que l'on prolonge ensuite par imparité sur $[-\pi, 0]$, puis par 2π -périodicité sur \mathbb{R} tout entier.



Montrer que l'on a, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$:

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(m\theta),$$

avec :

$$A_m := \frac{2h}{m^2} \frac{\sin(mp)}{p(\pi - p)} \quad (\forall m \geq 1).$$

Exercice 7. (a) Effectuer la démonstration complète du Théorème 5.5.

(b) En appliquant le Lemme de Riemann-Lebesgue, montrer qu'on a en fait, lorsque $|k| \rightarrow \infty$:

$$\widehat{f}(k) = o\left(\frac{1}{|k|^\ell}\right).$$

Exercice 8. Soit la suite $(a_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ définie par :

$$a_k := \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{lorsque } k \geq 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Vérifier que $(a_k) \in \ell_2(\mathbb{Z})$, mais qu'il n'existe aucune fonction intégrable dont les coefficients de Fourier sont égaux aux a_k .

Exercice 9. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction continue $f_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ avec $|f_n| \leq 1$ telle que :

$$S_n(f_n)(0) \geq c \log n.$$

Indication: La fonction g_n égale à 1 là où le noyau de Dirichlet D_n est > 0 et égale à -1 là où D_n est < 0 conviendrait, si elle n'était pas discontinue. Approximer alors g_n par une fonction continue appropriée f_n .

Exercice 10. (a) Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ réel non entier, la série de Fourier de la fonction définie sur $[0, 2\pi]$ par :

$$\theta \mapsto \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} e^{i(\pi-\theta)\alpha}$$

est égale à :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n+\alpha}.$$

(a) Appliquer l'identité de Plancherel pour en déduire que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}.$$

Exercice 11. (a) Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Indication: Introduire la fonction f définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := |\theta|$, calculer ses coefficients de Fourier, et appliquer l'identité de Plancherel.

(b) Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Indication: Utiliser la fonction 2π -périodique impaire g définie sur $[0, \pi]$ par $g(\theta) := \theta(\pi - \theta)$.

Exercice 12. Soit $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ un nombre complexe non égal à un entier.

(a) Calculer les coefficients de Fourier et la série de Fourier de la fonction 2π -périodique définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(\theta) := \cos(\alpha\theta)$.

(b) Obtenir la formule suivante due à Euler :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \alpha^2} = \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{\pi}{2\alpha \tan(\alpha\pi)}.$$

(c) Pour $u \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, montrer que :

$$\cotan u = \frac{1}{u} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u}{u^2 - n^2\pi^2}.$$

(d) Pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\frac{\alpha\pi}{\sin(\alpha\pi)} = 1 + 2\alpha^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 - \alpha^2}.$$

(e) Pour $0 < \alpha < 1$, montrer que :

$$\int_0^{\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}.$$

Indication: Découper l'intégrale \int_0^{∞} en $\int_0^1 + \int_1^{\infty}$, puis effectuer le changement de variable $t = \frac{1}{u}$ dans la seconde intégrale. Ensuite, les deux intégrales étant de la forme :

$$\int_0^1 \frac{t^{\gamma-1}}{1+t} dt \quad (0 < \gamma < 1),$$

montrer que cette dernière vaut :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+\gamma}.$$

Enfin, pour conclure, appliquer la question (d).

Exercice 13. Au-delà de ce qui précède, l'objectif est de trouver une formule générale pour les *sommes d'Euler* :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2m}},$$

où $m \geq 1$ est un entier quelconque. Le cas des puissances impaires, pour lequel aucune formule close n'est connue, ouvre sur de nombreux problèmes qui excitent toujours la sagacité des mathématiciens contemporains.

On définit les *nombre de Bernoulli* comme apparaissant dans le développement en série entière de :

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

(a) Vérifier par un calcul manuel que :

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0.$$

(b) Obtenir la formule de récurrence suivante pour $n \geq 1$:

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k.$$

(c) En écrivant :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n,$$

montrer que $B_n = 0$ pour tout entier impair $n \geq 3$.

(d) Montrer que :

$$z \cotan z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} z^{2n}.$$

(e) Soit la *fonction zêta* définie pour $s > 1$ réel par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

En utilisant l'Exercice 12 qui précède, montrer que :

$$x \cotan x = 1 - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\zeta(2m)}{\pi^{2m}} x^{2m}.$$

(f) Conclure en obtenant la formule explicite générale suivante, valable pour un entier $m \geq 1$ quelconque :

$$2 \zeta(2m) = (-1)^{m+1} \frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!} B_{2m}.$$

Exercice 14. [Cesàro, Abel, Tauber] (a) Si la série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k =: \ell$ converge vers une limite finie, montrer qu'elle est aussi *Abel-sommable*, i.e. qu'on a aussi $\ell = \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$. Indication: Vérifier qu'on peut supposer $\ell = 0$. Avec :

$$s_k := c_1 + \dots + c_k \quad (k \geq 1),$$

montrer, pour tout $K \geq 1$, l'*identité d'Abel* :

$$\sum_{k=1}^K c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^K s_k r^k + s_K r^{K+1}.$$

Laisser s'envoler $K \rightarrow \infty$ pour obtenir :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r) \sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

Enfin, montrer que le membre de droite tend vers 0 lorsque $r \nearrow 1$.

(b) Trouver une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ qui ne converge pas, tandis que $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ existe.

(c) Montrer l'implication « Cesàro-sommable \implies Abel-sommable » :

$$\left(\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K} = \ell \text{ existe} \right) \implies \lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = \ell \text{ aussi.}$$

Indication: Vérifier qu'on peut supposer $\ell = 0$, et établir l'identité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2 \sum_{k=1}^{\infty} k \sigma_k r^k,$$

les moyennes de Cesàro des sommes partielles de la série étant abrégées par :

$$\sigma_k := \frac{s_1 + \dots + s_k}{k} \quad (k \geq 1).$$

(d) Trouver une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ telle que $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K}$ n'existe pas, tandis que $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k$ existe. Indication: Observer que si $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ est *Cesàro-sommable*, i.e. si $\lim_{K \rightarrow \infty} \frac{s_1 + \dots + s_K}{K} =: \ell$ existe, alors $\frac{c_k}{k}$ tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

(e) Montrer que si une série $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ est Cesàro-sommable, et si $c_k = o(\frac{1}{k})$, c'est-à-dire si de plus $0 = \lim_{k \rightarrow \infty} k c_k$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge aussi vers ℓ . Indication: Établir et utiliser l'identité :

$$s_k - \sigma_k = \frac{(k-1)c_k + \dots + c_2}{k} \quad (k \geq 2).$$

(f) Montrer que si $\lim_{r \rightarrow 1} \sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k =: \ell$ existe et si $c_k = o(\frac{1}{k})$, alors $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ converge aussi vers ℓ .

Indication: Estimer la différence entre $\sum_{k=1}^K c_k$ et $\sum_{k=1}^K c_k r^k$ en choisissant $r = 1 - \frac{1}{K}$.

Exercice 15. Pour $0 \leq r < 1$ et pour $\theta \in \mathbb{R}$, soit comme précédemment le noyau de Poisson :

$$P_r(\theta) = \frac{1-r^2}{1-2r \cos \theta + r^2}.$$

(a) Montrer que l'opérateur laplacien $\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ s'écrit en coordonnées polaires :

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}.$$

(b) Montrer que la fonction :

$$u := \frac{\partial P_r}{\partial \theta}$$

satisfait dans le disque unité ouvert $\mathbb{D} := \{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 < 1\} = \{re^{i\theta} : 0 \leq r < 1, \theta \in \mathbb{R}\}$ l'équation :

$$0 = \Delta u.$$

(c) Montrer, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, que :

$$0 = \lim_{r \rightarrow 1} u(r, \theta).$$

Autrement dit, u est une fonction non identiquement nulle dans le disque unité \mathbb{D} solution de l'équation de Laplace $\Delta u = 0$, et qui possède pourtant une valeur au bord identiquement nulle sur le cercle unité $\mathbb{T} = \partial \mathbb{D}$.

Exercice 16. (a) Démontrer rigoureusement le Théorème 16.4, d'abord sous la forme suivante : si $f \in L^1(\mathbb{T})$ est intégrable, et si $\theta_0 \in \mathbb{T}$ est un point en lequel f est continue, alors les sommes d'Abel de f y convergent vers $f(\theta_0)$:

$$\lim_{r \rightarrow 1} A_r(f)(\theta_0) = \lim_{r \rightarrow 1} (P_r * f)(\theta_0) = f(\theta_0).$$

(b) Ensuite, démontrer complètement le Théorème 16.4, avec convergence uniforme, sous l'hypothèse que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est continue en tout point du cercle unité \mathbb{T} .

(c) Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ qui possède, en un certain point $\theta_0 \in \mathbb{T}$, une *discontinuité de première espèce*, au sens où les deux limites à gauche et à droite :

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} f(\theta_0 + h) =: f_-(\theta_0) \quad \text{et} \quad \lim_{h \rightarrow 0^+} f(\theta_0 + h) =: f_+(\theta_0)$$

existent. Montrer que :

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} A_r(f)(\theta_0) = \frac{f_-(\theta_0) + f_+(\theta_0)}{2}.$$

Indication: Après les avoir justifiées, utiliser les valeurs :

$$\frac{1}{2} = \int_{-\pi}^0 P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^\pi P_r(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Exercice 17. Soit $f(x) = \mathbf{1}_{[a,b]}(x)$ la fonction indicatrice d'un intervalle fermé $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ avec $a < b$, définie par :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) := \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in [a, b], \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

(a) Montrer par le calcul que la série de Fourier de f vaut :

$$\frac{b-a}{2\pi} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{e^{-ina} - e^{-inb}}{2i\pi n} e^{in\theta}.$$

(b) Montrer que si $a \neq -\pi$ ou si $b \neq \pi$, cette série de Fourier ne converge pas absolument en certains points θ . Indication: Il suffit de faire voir que pour de nombreuses valeurs de n , on a $|\sin(n\theta_0)| \geq c > 0$, au point central $\theta_0 := (b-a)/2$.

(c) Toutefois, montrer en utilisant les sommations par parties d'Abel que cette série de Fourier converge en tout point $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Que se passe-t-il lorsque $a = -\pi$ et $b = \pi$? Indication: Si $(a_k)_{k=1}^\infty$ et $(b_k)_{k=1}^\infty$ sont deux suites de nombres réels quelconques, alors pour tout $n \geq 2$ on a la sommation par parties :

$$\sum_{k=1}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) [b_k + \dots + b_1] = \sum_{k=1}^n a_k b_k - a_n (b_1 + \dots + b_n),$$

ce qui permet de déduire le *Critère de convergence d'Abel* : Si la suite $(a_k)_{k=1}^\infty$ est positive, décroissante, convergente vers zéro, et si la suite $(\sum_{k=1}^n b_k)_{n=1}^\infty$ est bornée, alors la série $\sum_{k=1}^\infty a_k b_k$ converge.

Exercice 18. [Poincaré, Wirtinger] Deux inégalités établissent une relation entre la norme intégrale L^2 d'une fonction et celle de sa dérivée.

(a) Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction T -périodique avec $T > 0$ de classe \mathcal{C}^1 de moyenne $0 = \int_0^T f(x) dx$ nulle, montrer que :

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(x)|^2 dx.$$

Indication: Utiliser Bessel, Plancherel, Parseval.

(b) Montrer qu'on a égalité lorsque, et seulement lorsque $f(x) = A \sin(\frac{2\pi}{T} x) + B \cos(\frac{2\pi}{T} x)$ avec $A, B \in \mathbb{C}$.

(c) Toujours avec f comme ci-dessus, et avec g de classe \mathcal{C}^1 et T -périodique (sans être nécessairement de moyenne nulle), montrer que :

$$\left| \int_0^T \overline{f(x)} g(x) dx \right|^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f(x)|^2 dx \int_0^T |g'(x)|^2 dx.$$

(d) Sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, pour toute fonction de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant $0 = f(a) = f(b)$, montrer que :

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(x)|^2 dx.$$

Indication: Prolonger f à l'intervalle $[2a-b, a]$ comme fonction impaire de $x-a$ sur $[2a-b, b]$, puis comme fonction T -périodique de période $T := 2(b-a)$, afin de pouvoir appliquer la question (a).

(e) Montrer qu'on a égalité lorsque, et seulement lorsque $f(x) = A \sin\left(\pi \frac{x-a}{b-a}\right)$ avec $A \in \mathbb{C}$.

(f) Montrer que la constante $\frac{(b-a)^2}{\pi^2}$ ne peut pas être améliorée.

Exercice 19. Montrer que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Indication: Partir du fait que l'intégrale de $D_n(\theta)$ sur $[-\pi, \pi]$ vaut 2π , utiliser le fait que la différence :

$$\frac{1}{\sin \frac{\theta}{2}} - \frac{2}{\theta}$$

est continue sur $[-\pi, \pi]$, et appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue.

Exercice 20. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction 2π -périodique intégrable.

(a) Pour $k \in \mathbb{Z}$, montrer que :

$$\widehat{f}(k) = - \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi},$$

puis que :

$$\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\theta) - f\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right)}{2} e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(b) Lorsque $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ est α -höldérienne, avec $0 < \alpha \leq 1$, à savoir lorsqu'il existe une constante $0 \leq C < \infty$ telle que, pour tous $\theta, h \in \mathbb{R}$:

$$|f(\theta + h) - f(\theta)| \leq C |h|^\alpha,$$

montrer que :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

(c) Montrer que cette estimation de croissance des coefficients de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$ avec $0 < \alpha < 1$ ne peut pas être améliorée, en utilisant la fonction :

$$f(\theta) := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\ell\alpha}} e^{i2^\ell \theta}.$$

Indication: Vérifier d'abord que $f \in \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{T})$, puis que $\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^\alpha}$ quand $k = 2^\ell$ est une puissance de 2. Ensuite, découper :

$$f(\theta + h) - f(\theta) = \sum_{2^\ell \leq \frac{1}{|h|}} + \sum_{2^\ell > \frac{1}{|h|}}.$$

Pour estimer la première somme, utiliser la majoration $|1 - e^{i\theta}| \leq |\theta|$, valable pour θ petit. Pour estimer la seconde somme, utiliser l'inégalité triviale $|e^{i\theta} - e^{i\eta}| \leq 2$.

Exercice 21. Si f est une fonction réelle bornée monotone sur $[-\pi, \pi]$, montrer que :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|}\right).$$

Indication: On peut supposer que f est croissante, avec $|f| \leq M < \infty$. Commencer par vérifier que les coefficients de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un segment quelconque $[a, b] \subset [-\pi, \pi]$ croissent au plus en $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$. Ensuite, montrer que toute combinaison linéaire finie de telles fonctions indicatrices :

$$\sum_{j=1}^J \lambda_j \mathbf{1}_{[a_{j-1}, a_j]},$$

avec :

$$-M \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_J \leq M,$$

et avec :

$$-\pi = a_0 < a_1 < \dots < a_{J-1} < a_J = \pi,$$

a des coefficients de Fourier qui croissent au plus en $O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, *uniformément* en le nombre $J \geq 1$ de termes. En sommant par parties (Abel), utiliser le fait que la somme télescopique $\sum (\lambda_j - \lambda_{j-1})$ est bornée par $2M$. Enfin, approximer la fonction monotone f par de telles sommes.

Exercice 22. Montrer que les coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ d'une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ sur le cercle unité peuvent tendre vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$ d'une manière arbitrairement lente, en montrant que pour toute suite $(\varepsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ convergeant vers 0 lorsque $|k| \rightarrow \infty$, il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ telle que $|\widehat{f}(k)| \geq \varepsilon_k$ pour un nombre infini de valeurs de k . Indication: Sélectionner une sous-suite $(\varepsilon_{k_n})_{n=1}^\infty$ satisfaisant $\sum_{n=1}^\infty \varepsilon_{k_n} < \infty$.

Exercice 23. L'objectif est de donner une preuve alternative de la Proposition 17.2, d'après laquelle les expressions :

$$\sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k}$$

sont bornées uniformément, indépendamment de $K \geq 1$ et de $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Si $D_K(\theta)$ désigne le noyau de Dirichlet, vérifier que :

$$\frac{1}{2i} \sum_{1 \leq |k| \leq K} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^K \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2} \int_0^\theta (D_K(t) - 1) dt.$$

(b) Conclure en utilisant le fait, déjà éclairci dans l'Exercice 19, que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt < \infty$,

Exercice 24. Soit D_n le noyau de Dirichlet. Déterminer la constante c telle que :

$$\|D_n\|_{L^1} = \frac{4}{\pi^2} \log n + c + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Quelle serait la constante suivante dans le reste $O\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{d}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$?

Exercice 25. [Phénomène de Gibbs] Soit f la fonction en dents de scie définie sur $[0, 2\pi[$ par :

$$f(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{en } \theta = 0, \\ \frac{\pi - \theta}{2} & \text{lorsque } 0 < \theta < 2\pi, \end{cases}$$

et prolongée à \mathbb{R} tout entier par 2π -périodicité.

(a) Vérifier que :

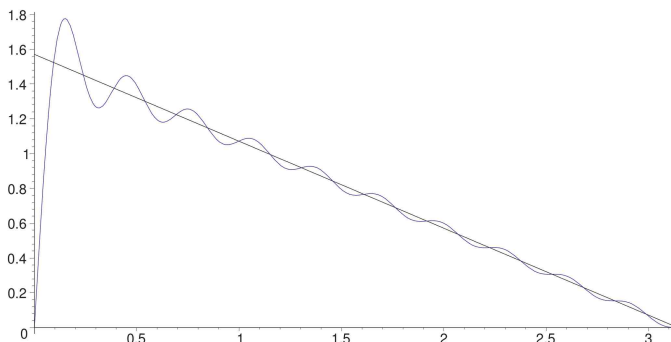
$$\pi = f_+(0) - f_-(0).$$

(b) Montrer que la série de Fourier de f est :

$$\frac{1}{2i} \sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^\infty \frac{\sin(k\theta)}{k}.$$

(c) Montrer, pour tout entier $K \geq 1$, que la K -ème somme partielle $S_K(f)(\theta) = \sum_{k=1}^K \frac{\sin(k\theta)}{k}$ de cette série de Fourier satisfait :

$$\max_{0 < \theta \leq \frac{\pi}{K}} S_K(f)(\theta) - \frac{\pi}{2} = \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - \frac{\pi}{2}.$$



Ce résultat est la manifestation d'un phénomène universel concernant la convergence des séries de Fourier de fonctions \mathcal{C}^1 par morceaux, au voisinage de toute discontinuité de première espèce. Lorsque K devient grand, l'amplitude des oscillations tend vers une limite strictement plus grande que l'amplitude — le saut $f_+(0) - f_-(0)$ — de la discontinuité, atteignant jusqu'à 8,9% de ce saut, alors que la largeur de la zone d'oscillation tend vers zéro, c'est-à-dire que les soubressauts s'évanouissent en se déplaçant vers le trou de la discontinuité, ce qui est nécessaire à cause du théorème de convergence de Dirichlet.

Exercice 26. L'objectif est de produire de manière très élémentaire une fonction continue qui n'est dérivable en aucun point, grâce à des « empilements fractal » de singularités non dérivables simples. Sur $[-1, 1]$, soit la fonction $\varphi(x) := |x|$ non dérivable en 0 que l'on prolonge à \mathbb{R} tout entier comme fonction périodique de période 2.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \varphi(4^n x)$$

est continue sur \mathbb{R} .

(b) On fixe $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour tout entier $m \geq 1$, soit $\delta_m := \pm \frac{1}{2} \frac{1}{4^m}$, où le signe \pm est choisi de telle sorte qu'aucun entier ne se trouve entre $4^m x_0$ et $4^m(x_0 + \delta_m)$. On considère le quotient :

$$\gamma_n := \frac{\varphi(4^n(x_0 + \delta_m)) - \varphi(4^n x_0)}{\delta_m}.$$

Montrer que si $n \geq m + 1$, on a $\gamma_n = 0$, tandis que pour $0 \leq n \leq m$, on a $|\gamma_n| \leq 4^n$ avec égalité $|\gamma_m| = 4^m$.

(c) En utilisant ce qui précède, obtenir l'estimée :

$$\left| \frac{f(x_0 + \delta_m) - f(x_0)}{\delta_m} \right| \geq \frac{1}{2} (3^m + 1).$$

(d) Conclure que f n'est pas dérivable en x_0 .

Exercice 27. [Théorème de Dirichlet original] Montrer que la série de Fourier d'une fonction continue sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ qui ne possède qu'un nombre fini de minima et de maxima converge vers la fonction en tout point, et ce, qui plus est, uniformément.

Exercice 28. L'objectif est de démontrer qu'avec $0 < \alpha < 1$ quelconque, la série trigonométrique :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^\alpha},$$

qui converge pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, n'est la série de Fourier d'aucune fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$.

(a) On introduit le noyau de Dirichlet conjugué :

$$\tilde{D}_n(\theta) := i \sum_{|k| \leq n} \text{sign}(k) e^{ik\theta} = \sum_{k=1}^n \sin(k\theta),$$

où la fonction signe est définie par :

$$\text{sign}(k) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } k \leq -1, \\ 0 & \text{pour } k = 0, \\ 1 & \text{lorsque } k \geq 1. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\tilde{D}_n(\theta) = \frac{\cos(\theta/2) - \cos((n + \frac{1}{2})\theta)}{\sin(\theta/2)}.$$

(b) Montrer qu'il existe une constante $0 < c < \infty$ telle que pour tout $n \geq 2$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(\theta)| d\theta \leq c \log n.$$

(c) Montrer, pour toute fonction intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, que :

$$(f * \tilde{D}_n)(0) = O(\log n).$$

(d) Aboutir à la contradiction :

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} = O(\log n).$$

Exercice 29. Soit p/q un nombre rationnel avec p et q deux entiers premiers entre eux, et, sans perte de généralité, avec $q \geq 1$. On définit une suite de nombres réels appartenant à $[0, 1[$ par :

$$\xi_k := \langle k p/q \rangle,$$

où $\langle y \rangle := y - [y] = y - \text{Ent } y$ est la partie fractionnaire d'un nombre réel quelconque $y \in \mathbb{R}$. Montrer que la suite $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ est équirépartie sur les q points de la forme :

$$0, \quad 1/q, \quad 2/q, \quad \dots, \quad (q-1)/q,$$

à savoir précisément, montrer que pour tout entier $0 \leq a < q$, on a :

$$\frac{\text{Card}\{k : 1 \leq k \leq n, \langle k p/q \rangle = a/q\}}{n} = \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Indication: En utilisant une identité de Bézout $1 = rp + sq$ avec $r, s \in \mathbb{Z}$, montrer que pour tout entier $l \geq 0$ il existe un unique entier k satisfaisant les deux conditions :

- $lq \leq k \leq (l+1)q$,
- $\langle k p/q \rangle = a/q$.

Ensuite, diviser $n \gg 1$ par q :

$$n = sq + r,$$

avec $s \geq 0$ et $0 \leq r < q$, et établir que :

$$s \leq \text{Card}\{k : 1 \leq k \leq n, \langle k p/q \rangle = a/q\} \leq s + 1.$$

Exercice 30. Montrer que la suite $(\gamma_k)_{k=1}^\infty$, où γ_k est la partie fractionnaire de :

$$\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k$$

n'est pas équirépartie dans $[0, 1[$. **Indication:** Montrer que :

$$u_k := \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k$$

est solution de la récurrence de Fibonacci :

$$u_{k+2} = u_{k+1} + u_k,$$

avec conditions initiales $u_0 = 2$ et $u_1 = 1$.

Exercice 31. Montrer la réciproque du théorème de Weyl : si une suite de nombres réels ξ_1, ξ_2, \dots dans $[0, 1[$ est équirépartie, alors pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}^*$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2i\pi \ell \xi_k}.$$

Indication: Il suffit de montrer que pour toute fonction continue sur $[0, 1[$:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) dx,$$

et on pourra commencer par vérifier cela dans le cas où f est la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset [0, 1[$.

Exercice 32. Montrer que pour tout réel $a \neq 0$, et tout réel $0 < \sigma < 1$, la suite des parties fractionnaires :

$$\langle a 1^\sigma \rangle, \quad \langle a 2^\sigma \rangle, \quad \dots, \quad \langle a k^\sigma \rangle, \quad \dots,$$

est équidistribuée dans $[0, 1[$. **Indication:** Établir que pour tout réel $b \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b k^\sigma} = O(n^\sigma) + O(n^{1-\sigma}),$$

en montrant tout d'abord que :

$$\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b k^\sigma} - \int_1^n e^{2i\pi b x^\sigma} dx = O\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^{1-\sigma}}\right).$$

Exercice 33. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, la suite des parties fractionnaires :

$$\langle a \log 1 \rangle, \quad \langle a \log 2 \rangle, \quad \langle a \log 3 \rangle, \quad \dots, \quad \langle a \log k \rangle, \quad \dots,$$

n'est pas équidistribuée dans $[0, 1[$. **Indication:** Comparer la somme $\sum_{k=1}^n e^{2i\pi b \log k}$ avec une intégrale.

Exercice 34. Soit f une fonction périodique sur \mathbb{R} de période 1, et soit $(\xi_k)_{k=1}^\infty$ une suite qui est équidistribuée dans $[0, 1[$.

(a) Lorsque f est continue de moyenne $\int_0^1 f(x) dx = 0$ nulle, montrer que l'on a uniformément en x :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + \xi_k).$$

Indication: Établir d'abord cela lorsque f est un polynôme trigonométrique.

(b) Lorsque f est seulement Riemann-intégrable sur $[0, 1]$ et à nouveau de moyenne $\int_0^1 f(x) dx = 0$ nulle, montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x + \xi_k) \right|^2 dx.$$

Convolution et régularisation

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Rappels sur les espaces $L^p(\mathbb{R}^d)$

Dans tout ce chapitre, nous travaillerons en dimension finie $d \geq 1$ sur \mathbb{R}^d avec des fonctions $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes. Bien entendu, la mesure de référence est la mesure de Lebesgue :

$$dx = dx_1 \cdots dx_d.$$

Pour un exposant $1 \leq p < \infty$, soit l'espace des fonctions de puissance p -ème intégrable :

$$L^p(\mathbb{R}^d) := \left\{ f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables telles que } \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

ces fonctions mesurables étant considérées à un ensemble de mesure nulle près, comme l'exige la théorie de l'intégration.

Lorsque $p = \infty$, l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ devient l'espace $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions mesurables $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ telles que la quantité suivante :

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf \left\{ M > 0 \text{ tel que } 0 = \text{mesure}(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| \geq M\}) \right\} < \infty,$$

est *finie*, quantité dont on démontre alors qu'elle constitue une *norme* sur $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mais la plupart du temps, nous excluons l'étude du cas $p = \infty$, car L^∞ n'est pas un véritable espace de fonctions intégrables.

En supposant donc $1 \leq p < \infty$, effectuons alors quelques rappels de résultats fondamentaux d'un cours d'intégration, sous forme de théorèmes énoncés sans démonstrations, résultats qui sont tout aussi valables en remplaçant \mathbb{R}^d par un sous-ensemble mesurable quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$.

Définition 1.1. Deux nombres réels p et p' appartenant à l'intervalle ouvert $]1, \infty[$ sont dits *conjugués* lorsque :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Par extension, on dit aussi que 1 et ∞ sont conjugués.

L'inégalité suivante dite « *de Hölder* » généralise la classique et basique *inégalité de Cauchy-Schwarz* :

$$(1.2) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

valable pour tout couple de fonctions f et g dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, sachant que $2' = 2$ puisque $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Théorème 1.3. [Inégalité de Hölder] *Pour toute paire d'exposants conjugués p, p' avec $1 < p, p' < \infty$ et toute paire de fonctions mesurables $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, le produit $f(x)g(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, et sa norme L^1 est contrôlée par le produit simple et nu des normes L^p et $L^{p'}$ de f et de g :*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},$$

à savoir en d'autres termes plus explicites mais complètement équivalents :

$$(1.4) \quad \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x) g(x) dx \right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

De cette inégalité, on déduit que $L^p(\mathbb{R}^d)$ constitue un vrai espace vectoriel normé.

Théorème 1.5. [Inégalité de Minkowski] *Pour tout exposant $p \in [1, \infty[$ et toute paire de fonctions mesurables f, g sur \mathbb{R}^d telles que $f(x)^p$ et $g(x)^p$ soient intégrables, i.e. appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$(1.6) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) + g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Grâce à cette inégalité triangulaire, la quantité :

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

constitue bien une *norme* sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$. Voici maintenant un résultat beaucoup plus profond.

Théorème 1.7. *Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace vectoriel normé $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p})$ est complet et séparable. \square*

Pour la distance $\text{dist}(f, g) := \|f - g\|_{L^p}$ issue de la norme, rappelons que la *complétude* signifie la convergence dans l'espace ambiant de toute suite de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (f_n)_{n=1}^\infty \text{ satisfaisant } \left(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \gg 1 \quad \forall n_2 \geq n_1 \geq N(\varepsilon) \quad \|f_{n_2} - f_{n_1}\|_{L^p} \leq \varepsilon \right) \\ \exists f_\infty \in L^p \text{ appartenant à l'espace en question avec } 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f_\infty\|_{L^p}, \end{array} \right.$$

et que la *séparabilité* signifie l'existence d'une suite dénombrable dense :

$$\exists (h_n)_{n=1}^\infty \in L^p \quad \forall g \in L^p \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \quad \|g - h_{n(\varepsilon)}\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

Un autre autre résultat utile se révèle incidemment lorsqu'on examine la démonstration de la complétude de $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 1.8. *Étant donné une suite quelconque de fonctions $(f_n)_{n=1}^\infty$ appartenant toutes à $L^p(\mathbb{R}^d)$ qui convergent en norme L^p vers une certaine fonction $f_\infty \in L^p(\mathbb{R}^d)$:*

$$0 = \|f_n - f_\infty\|_{L^p(\mathbb{R}^d)},$$

il existe au moins une sous-suite $(f_{n_k})_{k=1}^\infty$ qui converge ponctuellement presque partout :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f_\infty(x) \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d). \quad \square$$

Enfin, le résultat classique suivant de densité va s'avérer être l'outil le plus utile pour tout ce chapitre.

Théorème 1.9. *L'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact sur \mathbb{R}^d est dense dans $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^p})$:*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d) \quad \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon. \quad \square$$

2. Translations dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Définition 2.1. Soit $a \in \mathbb{R}^d$ un vecteur constant et soit $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. On appelle *translatée* de f par a , et on note $\tau_a f$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par :

$$(\tau_a f)(x) := f(x - a).$$

Théorème 2.2. *Si deux fonctions mesurables f et g vérifient $f(x) = g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, et si $a \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur constant, alors $\tau_a f(x) = \tau_a g(x)$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ aussi. On peut donc définir, pour tout $p \in [1, +\infty]$, l'application quotient τ_a sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ par la formule ci-dessus $\tau_a f(x) := f(x - a)$. De plus, τ_a est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même pour tout $p \in [1, +\infty]$:*

$$\|\tau_a f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}.$$

Enfin, pour tout $p \in [1, +\infty[$, à l'exclusion de $p = +\infty$, et pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on a :

$$(2.3) \quad 0 = \lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p}.$$

Démonstration. On a tout simplement :

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^d : \tau_a f(x) \neq \tau_a g(x)\} &= \{x \in \mathbb{R}^d : f(x - a) \neq g(x - a)\} \\ &= a + \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq g(x)\}, \end{aligned}$$

donc grâce à l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue, si le second ensemble est de mesure nulle, le premier l'est aussi. C'est pourquoi l'on peut définir τ_a sur $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Ensuite, si $1 \leq p < +\infty$, l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue est encore utilisée pour vérifier la conservation de la norme L^p (poser $y := x - a$, d'où $dy_1 \cdots dy_d = dx_1 \cdots dx_d$) :

$$(\|\tau_a f\|_{L^p})^p = \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - a)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|^p dy = (\|f\|_{L^p})^p.$$

Le cas $p = +\infty$ se traite séparément en notant que :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \{x \in \mathbb{R}^d : |\tau_a f(x)| > u\} = a + \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > u\}.$$

L'invariance de la mesure de Lebesgue par translation (à nouveau elle !) entraîne alors la conservation de la norme L^∞ à travers τ_a :

$$\begin{aligned}\|f\|_{L^\infty} &:= \inf\{M > 0 \text{ tel que } \text{mesure}(\{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| > M\}) = 0\} \\ &= \|\tau_a f\|_{L^\infty}.\end{aligned}$$

Soit maintenant $p \in [1, +\infty[$, à l'exclusion de $p = +\infty$. Pour démontrer la continuité de la norme L^p par rapport aux (petites) translations, à savoir pour établir (2.3) ci-dessus, nous commencerons par supposer que $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est continue à support compact, avant de vérifier qu'il suffit d'utiliser la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour conclure. La densité : souvenons-nous en !

Si donc f est continue à support compact, elle est uniformément continue sur \mathbb{R}^d tout entier, donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|a| \leq \eta \implies \left(\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad |f(x-a) - f(x)| \leq \varepsilon \right).$$

Par suite, dès que l'on suppose $|a| \leq \eta$, on peut estimer la puissance p -ème de la norme L^p de la différence entre $\tau_a f$ et f comme suit, en restreignant « bêtement » l'intégration à l'ensemble où ni f ni $\tau_a f$ ne s'annulent :

$$\begin{aligned}(\|\tau_a f - f\|_{L^p})^p &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-a) - f(x)|^p dx \\ &= \int_{(a + \{f \neq 0\}) \cup \{f \neq 0\}} |f(x-a) - f(x)|^p dx \\ &\leq (\text{mesure}(a + \{f \neq 0\}) + \text{mesure}(\{f \neq 0\})) \varepsilon^p \\ &\leq \underbrace{2 \text{mesure}(\{f \neq 0\})}_{\text{constante} < \infty} \varepsilon^p.\end{aligned}$$

Or la mesure (de Lebesgue) de la fermeture de l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^d$ en lesquels $f(x) \neq 0$ est évidemment finie, puisque cet ensemble est, disons, contenu dans une certaine boule fermée $\bar{B}(0, R)$ de rayon $R \gg 1$ assez grand. Comme tout terme :

$$\text{constante} \cdot \varepsilon^p$$

tend vers zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ceci montre, comme voulu et comme désiré, que :

$$0 = \lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p},$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$.

Supposons maintenant en toute généralité que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. D'après le résultat de densité rappelé et admis ci-dessus, il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telles que :

$$\|f_n - f\|_{L^p} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

Or on peut estimer la norme L^p de la différence entre $\tau_a f$ et f en y insérant les quatre termes $-\tau_a f_n + \tau_a f_n - f_n + f_n$ qui s'additionnent à 0, et en appliquant ensuite l'inégalité triangulaire (Minkowski !) à trois membres, ce qui donne :

$$\begin{aligned}\|\tau_a f - f\|_{L^p} &\leq \|\tau_a f - \tau_a f_n\|_{L^p} + \|\tau_a f_n - f_n\|_{L^p} + \|f_n - f\|_{L^p} \\ &= 2 \|f_n - f\|_{L^p} + \|\tau_a f_n - f_n\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Si maintenant $\varepsilon > 0$ est un nombre réel arbitrairement petit, il existe un entier N_ε tel que :

$$\|f_{N_\varepsilon} - f\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Mais puisque cette fonction f_{N_ε} est continue à support compact, la première partie de la démonstration assure qu'il existe un η_ε suffisamment petit pour que :

$$|a| \leq \eta_\varepsilon \implies \|\tau_a f_{N_\varepsilon} - f_{N_\varepsilon}\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Enfin, si l'on pose $n := N_\varepsilon$ dans le jeu d'inégalités triangulaires effectué à l'instant, on obtient qu'avec le même η_ε :

$$|a| \leq \eta_\varepsilon \implies \|\tau_a f - f\|_{L^p} \leq 2 \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

ce qui achève notre première démonstration basée sur un argument de densité — Dieu sait qu'il y en aura d'autres ! \square

3. Produit de convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 3.1. On dit que deux fonctions mesurables f et g de \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{C} sont *convolables* si, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$t \longmapsto f(x-t)g(t)$$

est intégrable, *i.e.* appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$. Lorsque c'est le cas, on définit alors le *produit de convolution* (ou la *convolée*) de f et de g par :

$$(f * g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt.$$

Le changement de variable $x \longmapsto x-t$ montre alors que g et f sont convolables dès lors que f et g le sont, avec en bonus la *commutativité* (exercice impératif : vérifier cela !) :

$$f * g = g * f,$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} g(x-t)f(t) dt.$$

Évidemment, si f est convolable avec deux fonctions g_1 et g_2 , alors pour toutes constantes $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, la convolée de f avec $\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2$ existe et l'on a la *linéarité* par rapport au second facteur :

$$f * (\lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2) = \lambda_1 f * g_1 + \lambda_2 f * g_2,$$

d'où il découle aussi, grâce à la commutativité, que le produit de convolution $*$ est en fait bilinéaire par rapport à chacun de ses facteurs gauche ou droite.

Cette définition du produit de convolution, qui est possible « si la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable », procède par abstraction d'une condition de définissabilité minimale. Lorsque les fonctions appartiennent à des espaces fonctionnels raisonnablement réguliers, par exemple l'espace des fonctions continues à support compact ou \mathcal{C}^1 à support compact, on vérifie grâce au théorème de Fubini et grâce à des changements de variables élémentaires — exercice impératif : vérifier cela ! — que le produit de convolution est de plus *associatif* :

$$f * (g * h) = (f * g) * h.$$

Toutefois, avec la définition minimale énoncée ci-dessus, quelques « pathologies » (à oublier rapidement ...) peuvent se produire, comme le montre l'Exercice 4 ci-dessous. En

tout cas, lorsqu'on suppose que les fonctions appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, tout se passe très bien comme le montre le premier théorème fondamental suivant.

Théorème 3.2. *Soient deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction :*

$$\mathbb{R}^d \ni t \longmapsto f(t) g(x - t) \in \mathbb{C}$$

est intégrable, i.e. elle appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc la convolution de f et de g a un sens, et, de plus, cette convolée :

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) g(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x - t) dt \end{aligned}$$

appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$ avec un contrôle de sa norme L^1 par le produit nu et simple des normes L^1 de f et L^1 de g :

$$\|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.$$

Démonstration. Nous traiterons le cas $d = 1$, les arguments pour d quelconque ne demandant qu'une adaptation mineure quant au formalisme des signes d'intégration.

Commençons par observer que l'intégrale double, étendue à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tout entier, du produit des deux fonctions positives $|f(x - t)|$ et $|g(t)|$ est finie :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t)| |g(t)| dt dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt |f(x - t)| dx \\ \text{[poser } y := x - t] &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \\ &= \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

majorée par le produit des normes L^1 de g et de f . Grâce au théorème de Fubini-Tonelli ceci entraîne que pour presque toute « tranche unidimensionnelle horizontale » $\{x = \text{constante}\}$, la restriction de la fonction de deux variables :

$$(t, x) \longmapsto f(x - t) g(t)$$

à ladite tranche, à savoir l'application d'une variable :

$$t \longmapsto f(x - t) g(t)$$

est (de valeur absolue) intégrable sur \mathbb{R} par rapport à dt . Aussi l'intégrale qui définit la convolution entre f et g existe-t-elle bien pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

Ensuite, l'inégalité triangulaire évidente entre intégrales :

$$|f * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t)| |g(t)| dt,$$

intégrée par rapport à dx sur \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x - t)| |g(t)| dt dx \\ &= \|g\|_{L^1} \|f\|_{L^1}, \end{aligned}$$

permet d'obtenir, grâce à une répétition du calcul qui précède, l'inégalité annoncée sur les normes L^1 . Ceci achève la simple et belle démonstration de notre tout premier résultat sur l'opération de convolution. \square

4. Produit de convolution et support

La notion de support joue un rôle important dans la théorie des opérateurs de convolution. Lorsqu'une fonction est continue, son *support* est tout simplement l'adhérence de l'ouvert constitué des points en lesquels elle prend des valeurs non nulles :

$$\text{si } f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d): \quad \text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \neq 0\}}.$$

L'idée sous-jacente, c'est qu'un point est dans le support d'une fonction si la fonction n'est pas nulle en ce point, où à la rigueur, s'il existe d'autres points arbitrairement proches en lesquels la fonction est non nulle, et cette idée est tout à fait adéquate lorsque la fonction est continue.

Cependant, on sait bien que la théorie des fonctions mesurables, des fonctions L^1 au sens de Lebesgue, des fonctions L^p , n'a un sens qu'à un ensemble de mesure nulle près, et la définition du support valable pour les fonctions continues ne peut alors plus avoir de sens cohérent. Par exemple, la fonction indicatrice de l'ensemble des nombres rationnels dans \mathbb{R} , à savoir :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

a la propriété évidente que la fermeture de l'ensemble des points où elle ne s'annule pas remplit \mathbb{R} tout entier :

$$\overline{\{x \in \mathbb{R}^d: \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) \neq 0\}} = \overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R},$$

bien que cette fonction indicatrice soit nulle *presque partout*, puisque l'ensemble des nombres rationnels est de mesure nulle dans \mathbb{R} . Il est clair qu'au sens de la mesure, cette fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ doit être considérée comme s'identifiant à la fonction identiquement nulle, et par conséquent, on ne peut pas définir la notion de support pour les fonctions mesurables ou intégrables en calquant la définition naturelle qui était valable pour les fonctions \mathcal{C}^0 , \mathcal{C}^1 , \mathcal{C}^2 ou \mathcal{C}^∞ .

La solution à toutes ces errances dialectiques n'est pourtant pas difficile. Il suffit de raisonner par passage au complémentaire, comme le dévoile très précisément la Proposition-Définition suivante.

Proposition 4.1. [Définition du support des fonctions définies à un ensemble de mesure nulle près] Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et soit f une fonction mesurable définie dans Ω et à valeurs dans \mathbb{C} . On considère la famille $(\omega_i)_{i \in \mathcal{I}}$ de tous les ouverts $\omega_i \subset \Omega$ tels que, pour chaque $i \in \mathcal{I}$, on ait :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour presque tout } x \in \omega_i,$$

et on introduit leur réunion ensembliste complète :

$$\omega := \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \omega_i,$$

qui est bien sûr un sous-ensemble ouvert de Ω . Alors (proposition) on a de même :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour presque tout } x \in \omega$$

et (définition) on définit le support de f :

$$\text{supp } f := \Omega \setminus \omega$$

comme étant le complémentaire, dans l'ouvert ambiant Ω , de ce plus gros ouvert ω sur lequel f s'annule identiquement (à un ensemble de mesure nulle près).

Démonstration. Par définition des ω_i , il existe, pour chaque $i \in \mathcal{I}$, un ensemble négligeable $\mathcal{N}_i \subset \omega_i$ en dehors duquel f ne prend que des valeurs exactement nulles :

$$\forall x \in \omega_i \setminus \mathcal{N}_i, \quad f(x) = 0.$$

Le « hic » ici, c'est que la famille des ω_i n'a aucune raison, en général, d'être dénombrable, et donc, qu'on ne peut pas conclure directement : la réunion des \mathcal{N}_i est de mesure nulle elle aussi (en appliquant l'énoncé bien connu que toute réunion dénombrable d'ensembles de mesure nulle est elle aussi de mesure nulle).

Heureusement, on va pouvoir se ramener au cas dénombrable par le procédé suivant, dit d'*exhaustion*, qui est classique en Analyse. Considérons à cet effet, pour tout $n \geq 1$, l'ensemble :

$$K_n := \left\{ x \in \omega : \text{dist}(x, \mathbb{R}^d \setminus \omega) \geq \frac{1}{n} \right\} \cap \overline{B}(0, n)$$

constitué de tous les points du gros ouvert ω qui sont :

- situés à une distance $\geq \frac{1}{n}$ de l'extérieur $\mathbb{R}^d \setminus \omega$, à savoir encastrés à l'intérieur de ω par une bande de sécurité d'épaisseur $\frac{1}{n}$;
- contenus dans une (grosse) boule fermée de rayon n , pour que tout soit compact.

Alors il est intuitivement suggestif que ces compacts K_n forment une famille dénombrable et que, lorsque n se rapproche de $+\infty$, les K_n « remplissent » de plus en plus ω tout entier. En effet, le lecteur est invité à vérifier rigoureusement que :

$$K_n \subset K_{n+1} \quad \text{et que :} \quad \omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n.$$

En particulier, on a pour tout $n \geq 1$ fixé :

$$K_n \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \omega_i.$$

Par compacité de K_n , on peut alors, pour tout $n \geq 1$ fixé, extraire de \mathcal{I} un sous-ensemble fini \mathcal{I}_n tel que :

$$K_n \subset \bigcup_{i \in \mathcal{I}_n} \omega_i.$$

Parce que toute réunion dénombrable d'ensemble finis est elle-même dénombrable, l'ensemble $\mathcal{J} := \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{I}_n$ est dénombrable et l'on voit ainsi :

$$\omega = \bigcup_{n \geq 1} K_n \subset \bigcup_{n \geq 1} \bigcup_{i \in \mathcal{I}_n} \omega_i = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \omega_i$$

que l'ensemble $\omega = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \omega_i$ (puisque l'inclusion inverse $\bigcup_{i \in \mathcal{J}} \omega_i \subset \omega$ est trivialement satisfaite) est réalisé comme réunion maintenant *dénombrable* d'ouverts ω_i . Comme par hypothèse $f(x) = 0$ pour tout $x \in \omega_i \setminus \mathcal{N}_i$ hors de l'ensemble de mesure nulle \mathcal{N}_i , et comme la réunion *dénombrable* :

$$\mathcal{N} := \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \mathcal{N}_i$$

des ensembles de mesure nulle \mathcal{N}_i lorsque l'indice i parcourt \mathcal{J} est encore de mesure nulle, nous en déduisons que :

$$f(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \omega \setminus \mathcal{N}$$

en dehors de cet ensemble \mathcal{N} . Ceci achève de démontrer que $f = 0$ presque partout sur ω , et conclut enfin l'argument qui devait donner un sens complètement cohérent à la définition généralisée du support. \square

Proposition 4.2. *Soient f et g deux fonctions convolables. Alors :*

$$\text{supp } f * g \subset \overline{\text{supp } f + \text{supp } g},$$

où la somme $A + B$ de deux sous-ensembles $A, B \subset \mathbb{R}^d$ est définie par :

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

et où \overline{C} désigne, comme à l'accoutumée, l'adhérence d'un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour tout x en lequel $f * g$ est bien définie, si l'on introduit l'ensemble :

$$A(x) := \{t \in \mathbb{R}^d : (x - t) \in \text{supp } f \text{ et } t \in \text{supp } g\},$$

alors pour $t \notin A(x)$, le produit $f(x - t)g(t) = 0$ s'annule, donc le domaine de l'intégrale de convolution se restreint spontanément à $A(x)$:

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t)g(t) dt = \int_{A(x)} f(x - t)g(t) dt.$$

Assertion 4.3. *Lorsque $x \notin (\text{supp } f + \text{supp } g)$, on a $A(x) = \emptyset$ — exercice mental laissé au lecteur —, donc $f * g(x) = \int_{\emptyset} = 0$. \square*

Si donc nous introduisons le sous-ensemble de \mathbb{R}^d :

$$E := \text{supp } f + \text{supp } g,$$

et si l'on désigne, comme à l'accoutumée son complémentaire par $E^c := \mathbb{R}^d \setminus E$, alors l'Assertion nous dit que :

$$f * g(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in E^c,$$

donc par conséquence directe, pour tout x dans l'intérieur de E^c .

Un exercice élémentaire de topologie générale montre alors¹ que pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}^d$, on a :

$$\text{intérieur}(E^c) = (\overline{E})^c.$$

On déduit de tout cela que :

$$f * g(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \left(\overline{\text{supp } f + \text{supp } g}\right)^c,$$

1. En voici la solution. Si $x \in \text{Int } E^c$, il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $\emptyset = B_\varepsilon(x) \cap E$, ce qui signifie $E \subset \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)$, et comme $\mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x)$ est fermé, cela implique :

$$\overline{E} \subset \mathbb{R}^d \setminus B_\varepsilon(x),$$

d'où il découle que $x \notin \overline{E}$, c'est-à-dire $x \in (\overline{E})^c$.

Inversement, si $x \in (\overline{E})^c$, ensemble qui est ouvert car complémentaire du fermé \overline{E} , il existe une boule ouverte $B_\varepsilon(x)$ de centre x et de rayon $\varepsilon > 0$ telle que $\emptyset = B_\varepsilon \cap \overline{E}$, d'où aussi $\emptyset = B_\varepsilon \cap E$, ce qui signifie $x \in \text{Int } E^c$.

et par définition exacte du support, cette dernière relation exprime précisément que :

$$\text{supp}(f * g) \subset \overline{\text{supp} f + \text{supp} g}. \quad \square$$

5. Convolution dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Théorème 5.1. Soient deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq p < \infty$. Alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, la fonction :

$$\mathbb{R}^d \ni y \longmapsto f(y)g(x-y) \in \mathbb{C}$$

est intégrable, i.e. elle appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc la convolution de f et de g a un sens.

De plus, cette convolée $f * g$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$ avec un contrôle de sa norme L^p par le produit nu et simple des normes L^1 de f et L^p de g :

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^p}.$$

Démonstration. Nous traiterons seulement le cas $d = 1$, car le cas d quelconque ne présente qu'une légère différence quant au formalisme.

Observons d'abord que le cas $p = 1$ a déjà été vu dans le Théorème 3.2 ci-dessus. Nous pouvons donc supposer que $p > 1$, d'où $1 < p < +\infty$ et aussi $1 < p' < +\infty$. Il va être nécessaire de restreindre pour commencer les considérations à un sous-ensemble compact de \mathbb{R} , donc nous introduisons la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé $[a, b] \subset \mathbb{R}$, avec $a < b$ (si l'on travaillait dans \mathbb{R}^d , on introduirait à la place un produit $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_d, b_d]$ de tels intervalles fermés), laquelle vaut bien entendu :

$$\mathbf{1}_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a, b]; \\ 0 & \text{si } x \notin [a, b]. \end{cases}$$

En effet, grâce au théorème de Fubini-Tonelli et grâce à l'inégalité de Hölder, on peut montrer que l'intégrable double suivante, tronquée par rapport à x au moyen de cette fonction indicatrice :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dy \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)| \mathbf{1}_{[a,b]}(x) dx \right) dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b 1^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} dy \\ &= \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} (b-a)^{\frac{1}{p'}} \\ &< \infty \end{aligned}$$

est convergente, i.e. est de valeur finie. Il découle alors du théorème de Fubini appliqué à l'intégrale double initiale que, pour presque tout $x \in [a, b]$, la fonction :

$$\begin{aligned} y &\longmapsto |f(y)| |g(x-y)| \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \\ &= |f(y)| |g(x-y)| \end{aligned}$$

est d'intégrale finie par rapport à y sur \mathbb{R} , et comme l'intervalle $[a, b]$ choisi à l'instant était arbitraire, on en déduit immédiatement sans effort que la même conclusion est en fait vraie pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, puisque tout x quelconque peut être inclus dans un tel intervalle $[a, b]$.

De plus, cette même inégalité, bien entendu, montre aussi que l'application :

$$x \longmapsto \mathbf{1}_{[a,b]}(x) \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy$$

est intégrable sur \mathbb{R} .

En appliquant alors l'inégalité de Hölder au produit suivant de deux fonctions (soulignées chacune pour plus de clarté) :

$$\begin{aligned} y \longmapsto & \frac{|f(y)|^{\frac{1}{p}} |g(x-y)|}{|f(y)|^{\frac{1}{p'}}} \\ & = |f(y)| |g(x-y)| \end{aligned}$$

on en déduit une inégalité auxiliaire à conserver en mémoire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy & \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \right)^{\frac{1}{p'}} \\ (5.2) \qquad \qquad \qquad & = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} (\|f\|_{L^1})^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant examiner la norme L^p du produit de convolution $f * g$, que nous élèverons à la puissance p -ème, afin de déterminer si elle est finie :

$$\begin{aligned} (\|f * g\|_{L^p})^p & = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \right|^p dx \\ & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)| dy \right)^p dx \\ \text{[Utiliser (5.2)]} & \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| |g(x-y)|^p dy (\|f\|_{L^1})^{\frac{p}{p'}} dx \\ \text{[Fubini-Tonelli]} & = (\|f\|_{L^1})^{\frac{p}{p'}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-y)|^p dx \right) |f(y)| dy \\ \text{[} x-y=:z \text{]} & = (\|f\|_{L^1})^{\frac{p}{p'}} \int_{-\infty}^{\infty} |g(z)|^p dz \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \\ & = (\|f\|_{L^1})^{\frac{p}{p'}} (\|g\|_{L^p})^p \|f\|_{L^1} \\ \text{[} \frac{p}{p'} + 1 = p \text{]} & = (\|f\|_{L^1})^p (\|g\|_{L^p})^p, \end{aligned}$$

et cette dernière inégalité, dont il ne reste plus qu'à prendre la racine p -ème, montre bien que $f * g$ appartient à $L^p(\mathbb{R}^d)$. \square

« Découvrons » maintenant dans ce cours la première manifestation d'une propriété particulièrement « magique » que possède le produit de convolution : il rend le résultat $f * g$ *plus régulier* que ne le sont séparément f et g , et c'est cette propriété de *régularisation* qui constitue le thème principal de ce chapitre. En effet, le théorème suivant montre que la convolution $f * g(x)$ de deux fonctions f et g qui appartiennent à des espaces L^p et $L^{p'}$ d'exposants conjugués n'est pas seulement définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ (comme nous le savions au niveau de la définition initiale du produit de convolution), mais mieux, que cette convolution $f * g(x)$ possède une valeur bien définie $\in \mathbb{C}$ pour *tout* $x \in \mathbb{R}^d$, et beaucoup mieux, que la fonction $x \mapsto f * g(x)$ est *continue*, et même beaucoup mieux encore, qu'elle est *uniformément continue* sur \mathbb{R}^d tout entier.

Théorème 5.3. *Soit un exposant $p \in [1, \infty]$ et soit p' son exposant conjugué. Alors pour toute paire de fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, la convolée :*

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(t) g(x-t) dt$$

est une fonction partout définie et bornée sur \mathbb{R}^d , avec le contrôle de sa norme L^∞ par le produit nu et simple des normes L^p de f et $L^{p'}$ de g :

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

*Qui plus est, cette convolée $f * g$ est même uniformément continue sur \mathbb{R}^d tout entier.*

Nous allons voir principalement que pour $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et pour $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$, la convolée $f * g$ est *uniformément continue* sur \mathbb{R}^d .

Un théorème général qui sera vu dans la suite du cours montrera que la convolution $f * g$ est essentiellement aussi régulière que l'est le plus régulier de ses deux facteurs f et g , par exemple, si f est \mathcal{C}^1 à support compact, alors $f * g$ est aussi \mathcal{C}^1 (mais pas forcément à support compact, en fait).

Démonstration. La première assertion découle aisément de l'inégalité de Hölder et montre que la meilleure circonstance dans laquelle on peut convoler deux fonctions intégrables, par exemple $|f|$ et $|g|$, c'est lorsque les exposants sont conjugués l'un et l'autre :

$$\begin{aligned} |f| * |g|(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(t)| |g(x-t)| dt \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(x-t)|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

donc pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, la valeur de $f * g(x)$ est bien définie par une intégrale qui est absolument convergente :

$$|f * g(x)| \leq |f| * |g|(x) \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}},$$

ce qui fournit immédiatement l'inégalité annoncée :

$$\|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}.$$

Traisons maintenant la continuité uniforme de $f * g$ sur \mathbb{R}^d . Comme souvent, un raisonnement par densité sera possible ensuite. Supposons donc d'abord que $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ est continue à support compact, toujours avec $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$.

Si la philosophie générale est respectée, on doit s'attendre par conséquent à ce que $f * g$ soit elle aussi continue (pas forcément à support compact) ; ce qui est remarquable ensuite, c'est que la densité (supposée connue dans ce cours) de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ va permettre de déduire que $f * g$ est aussi uniformément continue lorsqu'on suppose seulement que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, comme nous allons le voir à la fin de la démonstration.

Soit donc $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^d)$. Notons $K := \text{supp } f$, ensemble compact d'intérieur non vide (sinon $f \equiv 0$), et introduisons la fonction indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K . La fonction f étant continue sur ce compact K , elle y est en fait continue uniformément :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta = \eta(\varepsilon) > 0 \quad \left(\forall u, v \in K : |u - v| \leq \eta \implies |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon \right).$$

De cette inégalité, on peut déduire une inégalité légèrement plus attrayante car préparée sous forme très pratique pour la suite.

Réexpression de l'uniforme continuité. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}^d$ avec $|u - v| \leq \eta(\varepsilon)$, on a :

$$|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon (\mathbf{1}_K(u) + \mathbf{1}_K(v)).$$

Démonstration. Tout d'abord, lorsque u et v appartiennent tous deux à K , on trouve 2ε à droite, ce qui fonctionne puisque $2\varepsilon > \varepsilon$.

Ensuite, lorsque l'un des deux arguments u ou v appartient à K , disons v pour fixer les idées, tandis que l'autre, u , appartient à $\mathbb{R}^d \setminus K$, on trouve au moins un point $u' \in [u, v]$ qui appartient à $K \cap (\mathbb{R}^d \setminus K)$, d'où $f(u') = 0$ et $|u' - v| \leq \eta$ puis $|f(u) - f(v)| = |f(v)| = |f(u') - f(v)| \leq \varepsilon$.

Enfin, lorsque u et v appartiennent tous deux au complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus K$, on trouve $|f(u) - f(v)| = |0 - 0| = 0$ à gauche et 0 à droite aussi. \square

Grâce, donc, à cette inégalité auxiliaire générale, on peut alors estimer la différence entre les valeurs de la convolée en deux points quelconques u et v avec $|u - v| \leq \eta(\varepsilon)$ de \mathbb{R}^d qui sont η -proches l'un de l'autre :

$$\begin{aligned} |f * g(u) - f * g(v)| &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(u-t) - f(v-t)| |g(t)| dt \\ &\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(u-t) |g(t)| dt + \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_K(v-t) |g(t)| dt \right) \\ &\leq 2\varepsilon \|\mathbf{1}_K\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}, \end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Hölder. Mais comme $\|\mathbf{1}_K\|_{L^p} \neq 0$ puisque $\text{int}(K) \neq \emptyset$ par hypothèse (sinon $f \equiv 0$), et comme on peut supposer depuis le début que $\|g\|_{L^{p'}} \neq 0$ (sinon $f * g \equiv 0$), on déduit de cette inégalité que, quitte à choisir η plus petit, $f * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^d tout entier :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta = \eta\left(\frac{\varepsilon}{2\|\mathbf{1}_K\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}}\right) \quad \left(\forall u, v \in \mathbb{R}^d: |u-v| \leq \eta \implies |f * g(u) - f * g(v)| \leq \varepsilon\right).$$

Pour terminer, voici le raisonnement par densité annoncé ci-dessus. Puisque $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, l'un des deux exposants conjugués p ou p' est $< \infty$. Quitte à intervertir f et g , on peut donc supposer que $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p < \infty$. D'après un théorème connu, il existe une suite $(f_k)_{k \geq 1}$ de fonctions $f_k \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_{L^p}.$$

Grâce à la première partie de la démonstration, on sait déjà que pour tout entier $k \geq 1$, la convolée $f_k * g$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^d .

Estimons alors la différence entre $f * g$ et $f_k * g$, en appliquant naturellement l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \|f * g - f_k * g\|_{L^\infty} &= \|(f - f_k) * g\|_{L^\infty} \\ &\leq \|f - f_k\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}}. \end{aligned}$$

Or, puisque le membre de droite tend par hypothèse vers 0 lorsque k tend vers ∞ , il en découle que $f * g$ est *limite uniforme*, en norme L^∞ , de la suite de fonctions $f_k * g$ qui sont toutes *continues uniformément* sur \mathbb{R}^d .

Lemme 5.4. Si une fonction mesurable presque partout bornée $h \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ est *limite uniforme* :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|h - h_k\|_{L^\infty},$$

d'une suite $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ de fonctions h_k uniformément continues sur \mathbb{R}^d :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta_k(\varepsilon) > 0 \quad \left(|u - v| \leq \eta_k(\varepsilon) \implies |h_k(u) - h_k(v)| \leq \varepsilon \right),$$

alors h est elle-même continue sur \mathbb{R}^d aussi, et même, uniformément continue.

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Fixons un entier $k \gg 1$ assez grand pour que :

$$|h_k(u) - h(u)| \leq \varepsilon \quad (\forall u \in \mathbb{R}^d),$$

quitte à changer les valeurs de h sur un ensemble de mesure nulle.

Alors avec $\eta := \eta_k(\varepsilon)$ il vient :

$$\begin{aligned} |u - v| \leq \eta \implies |h(u) - h(v)| &= \left| h(u) - h_k(u) + h_k(u) - h_k(v) + h_k(v) - h(v) \right| \\ &\leq |h(u) - h_k(u)| + |h_k(u) - h_k(v)| + |h_k(v) - h(v)| \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que h est continue, uniformément sur \mathbb{R}^d . \square

En conclusion, il suffit d'appliquer ce lemme aux fonctions :

$$h := f * g, \quad h_k := f_k * g. \quad \square$$

6. Inégalité de Young

Le résultat suivant fournit une estimation améliorée lorsque les deux fonctions convoluées n'appartiennent pas exactement à des espaces conjugués.

Théorème 6.1. [Inégalité de Young] Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ trois nombres réels tels que :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1,$$

et soient deux fonctions $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$. Alors la convolée $f * g$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^d)$ et sa norme L^r satisfait la majoration :

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Observons que l'on a $p, q \leq r$ nécessairement, car si on avait par exemple $p > r$, d'où $\frac{1}{p} < \frac{1}{r}$, alors à l'aide de $0 \leq \frac{1}{q} \leq 1$ il viendrait par addition $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{r} + 1$, ce qui contredirait l'hypothèse $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, et le même argument s'applique pour justifier $q \leq r$.

Démonstration. Le cas $r = +\infty$ correspond exactement au Théorème 5.3 qui vient d'être démontré. Supposons donc désormais que $r < +\infty$. Comme on a (nécessairement) $p, q \leq r$, on a aussi $p, q < +\infty$.

Dans le cas où $p = q = 1$, le premier Théorème 3.2 assure que $f * g$ est intégrable et que :

$$(6.2) \quad \|f * g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^1}.$$

Traitons maintenant le cas général en admettant provisoirement que l'inégalité cruciale suivante :

$$(6.3) \quad \left((|f| * |g|)(x) \right)^r \leq \underbrace{(\|f\|_{L^p})^{r-p} (\|g\|_{L^q})^{r-q}}_{\text{constantes}} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x)$$

est satisfaite pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Dans le second membre de cette inégalité (6.3), on a par hypothèse $|f|^p \in L^1$ et $|g|^q \in L^1$, et puisque $L^1 * L^1 \subset L^1$, on voit que le membre à droite de l'inégalité est une fonction intégrable par rapport à x , d'où l'on déduit que le membre à gauche est dans L^1 , ce qui revient à dire que $|f| * |g|$ appartient à $L^r(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire en détail :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)| |g(t)| dt \right)^r dx < \infty.$$

Il découle en particulier de cette inégalité que la fonction $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé, et donc que la convolée $f * g(x)$ est définie pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$.

Maintenant, grâce à (6.2) et à (6.3), on peut estimer la puissance r -ème de la norme L^r de cette convolée :

$$\begin{aligned} (\|f * g\|_{L^r})^r &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)|^r dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) dt \right|^r dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)| |g(t)| dt \right)^r}_{|f|*|g|(x)} dx \\ &= \left(\| |f| * |g| \|_{L^r} \right)^r \\ \text{[appliquer (6.3)]} &\leq (\|f\|_{L^p})^{r-p} (\|g\|_{L^q})^{r-q} \cdot \underbrace{\| |f|^p * |g|^q \|_{L^1}}_{\substack{\in L^1 \\ \in L^1}} \\ \text{[appliquer (6.2)]} &\leq (\|f\|_{L^p})^{r-p} (\|g\|_{L^q})^{r-q} \| |f|^p \|_{L^1} \| |g|^q \|_{L^1} \\ &= (\|f\|_{L^p})^{r-p} (\|g\|_{L^q})^{r-q} (\|f\|_{L^p})^p (\|g\|_{L^q})^q \\ &= (\|f\|_{L^p})^r (\|g\|_{L^q})^r, \end{aligned}$$

et en prenant finalement la racine r -ème de cette dernière inégalité, on obtient la majoration annoncée dans le théorème.

Il reste maintenant à établir (6.3). Notons p' et q' les deux exposants conjugués de p et de q :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

De la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$ qui existe par hypothèse entre p , q et r , il vient :

$$\begin{aligned} 1 - \frac{p}{r} &= p \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r} \right) = p \left(1 - \frac{1}{q} \right) = \frac{p}{q'}, \\ 1 - \frac{q}{r} &= q \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{r} \right) = q \left(1 - \frac{1}{p} \right) = \frac{q}{p'}, \end{aligned}$$

d'où en regardant les deux membres extrêmes de ces deux jeux de trois égalités, on en déduit les deux relations auxiliaires utiles dans un instant :

$$(6.4) \quad \begin{aligned} 1 &= \frac{p}{r} + \frac{p}{q'}, \\ 1 &= \frac{q}{r} + \frac{q}{p'}. \end{aligned}$$

De la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, on déduit aussi immédiatement que :

$$1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r}.$$

Or il existe une :

Inégalité de Hölder généralisée à trois termes. *Pour tout triplet d'exposants réels $1 < s_1 < +\infty$, $1 < s_2 < +\infty$, $1 < s_3 < +\infty$ tels que :*

$$1 = \frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} + \frac{1}{s_3},$$

et tout triplet de fonctions mesurables sur \mathbb{R}^d :

$$f_1 \in L^{s_1}, \quad f_2 \in L^{s_2}, \quad f_3 \in L^{s_3},$$

le produit $f_1(x) f_2(x) f_3(x)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d)$, et sa norme L^1 est contrôlée par le produit simple et nu des trois normes L^{s_1} , L^{s_2} et L^{s_3} de f_1 , de f_2 et de f_3 :

$$\|f_1 f_2 f_3\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^{s_1}} \|f_2\|_{L^{s_2}} \|f_3\|_{L^{s_3}},$$

à savoir en d'autres termes plus explicites mais complètement équivalents :

(6.5)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x) f_2(x) f_3(x)| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_1(x)|^{s_1} dx \right)^{\frac{1}{s_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_2(x)|^{s_2} dx \right)^{\frac{1}{s_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f_3(x)|^{s_3} dx \right)^{\frac{1}{s_3}}.$$

En guise d'exercice, nous laissons au lecteur le soin d'établir indépendamment une telle inégalité, ou plus simplement, de la déduire de l'inégalité de Hölder à deux termes.

Pour l'appliquer avec la décomposition $1 = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r}$ ci-dessus, nous observons à dessein la décomposition suivante en trois termes dans laquelle les deux exposants de $|f(x-t)|$ et de $|g(t)|$ sont adaptés pour être chacun de somme égale à 1, si nous nous rappelons les deux relations (6.4) :

$$|f(x-t)| |g(t)| = \underbrace{(|f(x-t)|^p)^{\frac{1}{q'}}}_{=: h_1(x)} \underbrace{(|g(t)|^q)^{\frac{1}{p'}}}_{=: h_2(x)} \underbrace{(|f(x-t)|^p |g(t)|^q)^{\frac{1}{r}}}_{=: h_3(x)}.$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité de Hölder à trois termes, on obtient :

$$\begin{aligned} (|f| * |g|)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |h_1(x) h_2(x) h_3(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^p dt \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^p |g(t)|^q dt \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= (\|f\|_{L^p})^{\frac{p}{q'}} (\|g\|_{L^q})^{\frac{q}{p'}} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x)^{\frac{1}{r}}, \end{aligned}$$

d'où, en prenant la puissance r -ème de part et d'autre de cette dernière inégalité :

$$\begin{aligned} \left((|f| * |g|)(x) \right)^r &\leq (\|f\|_{L^p})^{\frac{rp}{q'}} (\|g\|_{L^q})^{\frac{rq}{p'}} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x) \\ &= (\|f\|_{L^p})^{r-p} (\|g\|_{L^q})^{r-q} \cdot (|f|^p * |g|^q)(x), \end{aligned}$$

ce qui est (6.3) comme désiré. Le théorème de Young est donc complètement démontré. \square

7. Non-existence d'une unité pour la convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Les théorèmes précédents vont maintenant nous permettre de constater qu'il n'existe aucune fonction $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui serait une unité pour la convolution, à savoir qui satisferait :

$$u * f = f * u = f,$$

pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Ce constat un peu gênant sera entièrement « réparé » dans la section suivante où l'on construira des *approximations de l'identité*, à savoir des *suites de fonctions* $(u_k)_{k \geq 1}$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ qui auront la propriété que pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - u_k * f\|_{L^1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - f * u_k\|_{L^1}.$$

En effet, supposons par l'absurde l'existence d'un tel élément $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ qui satisfasse $u * f = f * u = f$ pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et convolons alors u à une famille f_ρ bien choisie de fonctions, par exemple :

$$e^{-\rho|x|^2} = e^{-\rho(x_1^2 + \dots + x_d^2)},$$

où $\rho > 0$ est un paramètre réel que l'on fera tendre vers $+\infty$. Par hypothèse, on a donc :

$$(e^{-\rho|\cdot|^2} * u)(x) = e^{-\rho|x|^2},$$

pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, le paramètre ρ étant arbitraire.

Or le Théorème 5.3 avec $p = 1$ et $p' = +\infty$ montre que la fonction convolée à gauche est en fait (uniformément) continue sur \mathbb{R}^d , et puisque la fonction à droite est elle-même continue, l'identité en question :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho|x-y|^2} u(y) dy = e^{-\rho|x|^2}$$

est alors satisfaite *pour tout* $x \in \mathbb{R}^d$, ce qui devient avantageux.

En effet, on peut donc poser $x = 0$ et obtenir :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\rho|y|^2} u(y) dy = 1,$$

et ce, quel que soit le paramètre ρ . Mais comme il est clair grâce au théorème de la convergence dominée que l'intégrale à gauche tend vers zéro lorsque $\rho \rightarrow \infty$, cette absurdité informatique $0 = 1$ contredit l'hypothèse de l'existence d'une unité $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$ pour la convolution $*$. \square

8. Approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Définition 8.1. [Approximation de l'unité] On appelle *approximation de l'unité*, ou *unité approchée*, dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ toute suite $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ de fonctions mesurables intégrables sur \mathbb{R}^d telles que :

- pour tout entier $j \geq 1$:

$$\varphi_j \geq 0 \quad \text{sur } \mathbb{R}^d;$$

- pour tout entier $j \geq 1$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(x) dx = 1;$$

- pour tout réel $\delta > 0$ arbitrairement petit :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{|x| > \delta} \varphi_j(x) dx.$$

Nous avons déjà vu, dans le chapitre sur la convergence des série de Fourier sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, que le noyau de Fejér :

$$F_n(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 & \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}, \\ n & \text{si } \theta \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

avait toutes les propriétés requises pour être une approximation de l'unité, à savoir :

- ses valeurs sont positives : $F_n(\theta) \geq 0$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}$;
- ce noyau F_n est une mesure de probabilité sur le cercle unité pour tout $n \geq 1$:

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \|F_n\|_{L^1};$$

- pour tout réel $\delta > 0$ fixé et arbitrairement petit, la portion de l'aire du graphe de F_n située hors du petit intervalle $[-\delta, \delta]$ autour de 0 tend vers zéro quand n tend vers l'infini :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \int_{\delta}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right).$$

La seule différence entre $(F_n)_{n \geq 1}$ et les $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ définies ci-dessus, c'est le domaine : $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et \mathbb{R}^d sur lequel on les considère, compact dans le premier cas, non compact dans le second, mais nous allons voir et constater que les théorèmes fondamentaux sont essentiellement les mêmes. En effet, dans la partie du cours consacrée aux séries trigonométriques, nous avons établi le fameux et très fondamental *théorème de Fejér*, d'après lequel, pour toute fonction continue 2π -périodique $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - F_n * f\|_{\mathcal{C}^0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f * F_n\|_{\mathcal{C}^0},$$

les trois propriétés de F_n rappelées ci-dessus ayant été toutes utilisées dans la démonstration. Ce qui est remarquable ici, c'est que la 'découverte' faite par Fejér que les sommes de Cesàro permettent de contourner le difficile problème de la convergence des séries de Fourier des fonctions continues a révélé l'existence de trois propriétés élémentaires dont jouissent les approximations de l'unité φ_j et permet d'ériger une théorie assez simple (ci-dessous) qui a de nombreuses applications en Analyse.

En fait, il existe beaucoup d'approximations de l'unité $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ différentes dans leur forme, mais similaires dans leur principe fondamental.

Exemple 8.2. [Approximations de Laplace, de Cauchy, et de Gauss] En dimension $d = 1$, les trois exemples suivants jouent régulièrement un rôle en Analyse et dans les sujets d'examens ou de concours. Le troisième est particulièrement utile pour l'étude de la

transformation de Fourier.

$$\text{Approximation de Laplace : } \varphi_j(x) = \frac{j}{2} e^{-j|x|}.$$

$$\text{Approximation de Cauchy : } \varphi_j(x) = \frac{j}{\pi} \frac{1}{1 + j^2 x^2}.$$

$$\text{Approximation de Gauss : } \varphi_j(x) = \frac{j}{\sqrt{2\pi}} e^{-j^2 x^2}.$$

Exercice de lecture impératif : se convaincre, pour chaque famille, que les trois propriétés que doit satisfaire une approximation sont effectivement réalisées.

Théorème 8.3. Si $(\varphi_j)_{j \geq 1}$ est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, les deux énoncés suivants sont satisfaits.

(1) Pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^d :

$$f \in \mathcal{C}_{\text{unif}}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^d :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \varphi_j * f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

(2) Pour tout réel $p \in [1, +\infty[$ et toute fonction :

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $(f * \varphi_j)_{j \geq 1}$ converge vers f en norme L^p :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \varphi_j * f\|_{L^p}.$$

L'étudiant averti aura réalisé ici que nous n'avons pas parlé, dans le chapitre sur les séries trigonométriques, de convergence en norme L^p des convolées $F_n * f$ d'une fonction $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec le noyau de Fejér F_n , et il aura deviné tout seul qu'un énoncé entièrement analogue à (2) ci-dessus est aussi valable sur le cercle unité \mathbb{T} : *exercice requis*, en s'inspirant bien sûr de la démonstration qui suit ci-dessous.

Démonstration. Traitons d'abord (1). La fonction f étant uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^d , elle définit un élément de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Comme $\varphi_j \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le Théorème 5.3 montre que la fonction $\varphi_j * f$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^d et bornée. Il s'agit maintenant de démontrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists J \in \mathbb{N}^* \quad \left(\forall j \geq J, \quad \|f * \varphi_j - f\|_{\mathcal{C}^0} \leq \varepsilon \right).$$

À cette fin, majorons, pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, la différence à étudier, en insérant $1 = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_j(t) dt$ à la place du 1 dans $-f(x) = -f(x) \cdot 1$:

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_j)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} (f(x-t) - f(x)) \varphi_j(t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(x)| \varphi_j(t) dt. \end{aligned}$$

Mais comme $f \in \mathcal{C}_{\text{unif}}^0(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^d , on a :

$$\forall \varepsilon_1 > 0, \quad \exists \eta = \eta(\varepsilon_1) \quad \left(\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad |x - y| \leq \eta(\varepsilon_1) \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon_1 \right).$$

Il sera donc avantageux, comme dans la démonstration du théorème de Fejér, de découper l'intégrale majorante ci-dessus en deux morceaux :

$$\int_{\mathbb{R}^d} = \int_{|t| \leq \eta(\varepsilon_1)} + \int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)},$$

de manière à bénéficier de la petitesse des valeurs de $f(x - t) - f(x)$ lorsque t est petit, à savoir lorsque $|t| \leq \eta(\varepsilon_1)$, ce qui nous donne, en poursuivant la majoration commencée à l'instant :

$$\begin{aligned} |(f * \varphi_j)(x) - f(x)| &\leq \varepsilon_1 \int_{|t| \leq \eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t) dt + \int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)} |f(x - t) - f(x)| \varphi_j(t) dt \\ &\leq \varepsilon_1 + \int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)} |f(x - t) - f(x)| \varphi_j(t) dt. \end{aligned}$$

Toutefois, il reste un deuxième terme intégral à estimer qui pourrait poser problème, mais heureusement, il se trouve que la troisième condition à laquelle est soumise une approximation de l'unité est justement faite pour que ce deuxième terme soit lui aussi petit lorsque j est assez grand, puisque l'on peut en effet le majorer simplement par :

$$\int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)} |f(x - t) - f(x)| \varphi_j(t) dt \leq 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0} \int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t) dt;$$

plus précisément, choisissons $J \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que :

$$j \geq J \implies \int_{|t| > \eta(\varepsilon_1)} \varphi_j(t) dt \leq \frac{\varepsilon_1}{2 \|f\|_{\mathcal{C}^0}},$$

ce qui est possible, puisque $\eta(\varepsilon_1) > 0$ est strictement positif. En sommant donc les deux termes, on obtient que :

$$j \geq J \implies |(f * \varphi_j)(x) - f(x)| \leq \varepsilon_1 + \varepsilon_1,$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, et comme ε_1 était arbitrairement petit, on a bien démontré que $f * \varphi_j$ tend uniformément vers f sur \mathbb{R}^d tout entier.

Démontrons maintenant la deuxième assertion **(2)**. Si donc $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ avec $p \in [1, \infty[$, il s'agit d'établir que $f * \varphi_j$ converge vers f en norme L^p . Nous allons d'abord supposer que f est en fait continue à support compact, avant de raisonner par densité, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois.

Soit donc $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$. Évidemment, il existe un rayon positif R assez grand tel que la boule fermée de rayon R centrée à l'origine contienne le support de f :

$$\text{supp } f \subset \overline{B}(0, R).$$

Nous considérerons aussi la boule fermée de rayon double $2R$:

$$\overline{B}(0, 2R) = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \leq 2R\},$$

afin de se garantir une certaine « marge de sécurité ». Notons $\mathbf{1}_{|x| \leq 2R}$ la fonction indicatrice de cette boule fermée et $\mathbf{1}_{|x| > 2R}$ la fonction indicatrice de son complémentaire, l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus \overline{B}(0, 2R)$. Puisque l'on a trivialement :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{R}^d} = \mathbf{1}_{|x| \leq 2R} + \mathbf{1}_{|x| > 2R},$$

on peut décomposer :

$$f * \varphi_j - f = (f * \varphi_j - f) \mathbf{1}_{|x| \leq 2R} + (f * \varphi_j - f) \mathbf{1}_{|x| > 2R},$$

d'où en prenant les normes L^p via l'inégalité de Minkowski :

$$\|f * \varphi_j - f\|_{L^p} \leq \underbrace{\|(f * \varphi_j - f) \mathbf{1}_{|x| \leq 2R}\|_{L^p}}_{=: \text{I}} + \underbrace{\|(f * \varphi_j - f) \mathbf{1}_{|x| > 2R}\|_{L^p}}_{=: \text{II}}.$$

Montrons premièrement que le premier terme **I** du membre de droite de cette inégalité tend vers 0 lorsque $j \rightarrow +\infty$. Comme f est continue à support compact dans \mathbb{R}^d , elle y est uniformément continue et bornée, donc elle vérifie les hypothèses de la première assertion (**1**) du théorème, assertion que l'on peut alors appliquer, ce qui nous offre la convergence *uniforme* :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f * \varphi_j - f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

Mais en effectuant la majoration élémentaire d'une intégrale par la mesure du domaine d'intégration que multiplie le supremum de l'intégrande :

$$\begin{aligned} \|(f * \varphi_j - f) \mathbf{1}_{|x| \leq 2R}\|_{L^p} &= \left(\int_{|x| \leq 2R} |(f * \varphi_j - f)(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \underbrace{\left(\text{Vol}(\overline{B}(0, 2R)) \right)^{\frac{1}{p}}}_{\text{constante} < \infty} \cdot \|f * \varphi_j - f\|_{\mathcal{C}^0}, \end{aligned}$$

on voit bien alors que ce premier terme **I** tend vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$, puisque le facteur à droite $\|f * \varphi_j - f\|_{\mathcal{C}^0}$ tend vers 0.

Montrons deuxièmement que le second terme **II** du membre de droite de l'inégalité ci-dessus tend également vers 0 lorsque $j \rightarrow \infty$. Observons à cet effet que si $x \in \mathbb{R}^d$ satisfait $|x| > 2R$, alors $f(x) = 0$ et de plus :

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad |t| \leq R \implies |x - t| > R \implies f(x - t) = 0,$$

puisque $\text{supp } f \subset \overline{B}(0, R)$, d'où pour de tels x avec $|x| > 2R$:

$$\begin{aligned} (f * \varphi_j - f)(x) &= f * \varphi_j(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - t) \varphi_j(t) dt \\ &= \int_{|t| > R} f(x - t) \varphi_j(t) dt \\ (8.4) \qquad &= f * (\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R})(x). \end{aligned}$$

Mais comme $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et comme $\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, le Théorème 5.1 montre que cette dernière convolée $f * (\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R})$ appartient à L^p , avec de plus majoration suivante :

$$\|f * (\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R})\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \cdot \|\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R}\|_{L^1}.$$

À présent, le raisonnement est presque achevé, car on (on = l'étudiant qui commence à bien comprendre en profondeur la théorie) reconnaît à droite un facteur qui tend visiblement vers 0 lorsque $j \rightarrow +\infty$:

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R}\|_{L^1},$$

puisque φ_j est par hypothèse une approximation de l'unité². Ainsi, en revenant à (8.4) dont on intègre par rapport à x sur $\{|x| > 2R\}$ la puissance p -ème, on peut effectuer la majoration finale :

$$\begin{aligned} (\mathbf{II})^p &= \int_{|x| > 2R} |(f * \varphi_j - f)(x)|^p = \int_{|x| > 2R} |f * (\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R})(x)|^p dx \\ &\leq \left(\|f * (\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R})\|_{L^p} \right)^p \\ &\leq \underbrace{(\|f\|_{L^p})^p}_{\text{constante} < \infty} \cdot \underbrace{\left(\|\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R}\|_{L^1} \right)^p}_{\rightarrow 0 \text{ quand } j \rightarrow \infty}, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de l'assertion **(2)** dans le cas où f est supposée continue à support compact.

Il ne reste plus qu'à formuler le raisonnement basé sur la densité de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. Soit donc une fonction quelconque $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Quel que soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ telle que :

$$\|f - g\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Mais comme la première partie de la démonstration s'applique à la fonction $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$, on a aussi l'existence d'un entier $J = J_\varepsilon \gg 1$

$$j \geq J \implies \|g * \varphi_j - g\|_{L^p} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors avec ce même entier J , l'astuce déjà vue d'insertion de quatre termes et l'utilisation d'une inégalité triangulaire triple montre que pour tout $j \geq J$, on a aussi :

$$\begin{aligned} \|f * \varphi_j - f\|_{L^p} &\leq \|(f - g) * \varphi_j\|_{L^p} + \|g * \varphi_j - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ \text{[Théorème 5.1]} &\leq \|f - g\|_{L^p} \|\varphi_j\|_{L^1} + \|g * \varphi_j - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ \|\varphi_j\|_{L^1} = 1 &\leq 2 \|g - f\|_{L^p} + \|g * \varphi_j - g\|_{L^p} \\ &\leq 2 \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $0 = \lim_{j \rightarrow +\infty} \|f * \varphi_j - f\|_{L^p}$, et achève la preuve. \square

2. Remarque en passant : le lecteur averti pourra aussi faire remarquer ici que la « marge de sécurité » $R = 2R - R$ entre les deux boules que nous avons choisie au départ n'était pas obligatoire, et que tout autre marge de sécurité $R' = R + R' - R$ correspondant à des boules fermées $\overline{B}(0, R) \subset \overline{B}(0, R + R')$ avec $R' > 0$ aurait tout aussi bien convenu, puisqu'on se serait ramené à constater à la fin que :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|\varphi_j \mathbf{1}_{|\cdot| > R'}\|_{L^1},$$

ce qui est tout aussi vrai par hypothèse, quel que soit le choix d'un $R' > 0$ fixé.

9. Fonctions \mathcal{C}^∞ à support compact

Soient $x = (x_1, \dots, x_d)$ les coordonnées standard sur \mathbb{R}^d . On notera :

$$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$$

les espaces vectoriels de fonctions infiniment différentiables sur \mathbb{R}^d à valeurs dans \mathbb{R} et dans \mathbb{C} , respectivement. Les sous-espaces correspondants de fonctions dont le support est *compact* seront notés :

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}),$$

la lettre ‘ c ’ en indice inférieur étant l’initiale du mot compact.

Les dérivées partielles d’une fonction f de classe \mathcal{C}^∞ seront notées :

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}},$$

pour des multi-entiers $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$.

La norme euclidienne sur \mathbb{R}^d sera notée :

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}.$$

Lemme 9.1. [Existence de fonctions lisses à support compact] *La fonction définie par :*

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{lorsque } |x| < 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geq 1, \end{cases}$$

est indéfiniment différentiable à support compact, i.e. :

$$\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+).$$

Démonstration. Manifestement :

$$\text{supp } \psi \subset \overline{B(0, 1)},$$

est compact. Reste à voir que ψ est \mathcal{C}^∞ .

Introduisons à cet effet la fonction :

$$\varphi: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{lorsque } t \leq 0, \\ \exp(-1/t) & \text{lorsque } t > 0. \end{cases}$$

Clairement, φ est \mathcal{C}^∞ sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$. De plus, toutes ses dérivées s’annulent identiquement sur $] -\infty, 0[$.

Assertion 9.2. *Cette fonction φ est en fait \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} tout entier.*

Démonstration. Il s’agit donc de faire voir que toutes ses dérivées $\frac{d^k \varphi}{dt^k}$ sont continues en 0.

Pour $k = 0$, c’est clair. Pour $k = 1$, la dérivée sur $]0, \infty[$:

$$\frac{1}{t^2} e^{-1/t} \longrightarrow 0 \longleftarrow \frac{e^{-1/t} - 0}{t - 0}$$

tend bien, aussi, vers 0 avec $t > 0$, et la dérivée à droite en 0 aussi.

Maintenant, pour $k \geq 1$ quelconque, on se convainc aisément qu'il existe un polynôme P_k de degré $2k$ à coefficients entiers tel que :

$$\frac{d^k}{dt^k}(e^{-1/t}) = P_k\left(\frac{1}{t}\right) e^{-1/t},$$

donc la limite vaut encore 0 lorsque $t \xrightarrow[>0]{} 0$, et de même pour la dérivée à droite en 0 de :

$$\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(e^{-1/t}). \quad \square$$

Grâce à cette assertion, la fonction ψ s'avère alors être la composée :

$$\psi(x) = \varphi(1 - |x|^2)$$

de cette fonction φ qui est \mathcal{C}^∞ ! avec la fonction $x \mapsto 1 - |x|^2$, laquelle est aussi \mathcal{C}^∞ ! \square

10. Convolution et dérivation

Nous allons maintenant « découvrir » que la convolution $f * g$ est une opération *régularisante* « magique », au sens où si l'une des deux fonctions convoluées, disons f , jouit d'une régularité importante, alors *quelle que puisse être l'irrégularité de la fonction g* , le produit de convolution $f * g$ hérite entièrement de la régularité de f . Il peut même se produire que $f * g$ possède un type de régularité qui devient supérieur simultanément à celui de f et à celui de g , dans certaines circonstances où f et g mettent en commun leurs meilleures propriétés.

Commençons par le cas où f est continûment différentiable à support compact, et où g n'est qu'intégrable, donc éventuellement très irrégulière, très discontinue.

Théorème 10.1. *Étant donné deux fonctions :*

$$f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad g \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

*leur convolée $f * g$, qui existe dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, est en fait de classe \mathcal{C}^1 partout sur \mathbb{R}^d , et ses dérivées partielles d'ordre 1 s'obtiennent simplement en convolant g avec les dérivées partielles correspondantes de f :*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f * g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) * g \quad (i=1 \dots n).$$

Autrement dit, la dérivation passe sous le signe d'intégration :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(f * g)(x) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) g(t) dt \right) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x-t) g(t) dt \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * g(x). \end{aligned}$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas de la dimension $d = 1$. Soit $h \in \mathbb{R}^*$ petit. Par linéarité, on calcule :

$$\frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x+h-t) - f(x-t)}{h} \right) g(t) dt,$$

d'où sans effort en soustrayant $f' * g(x)$:

$$\frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} - f' * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{f(x-t+h) - f(x-t)}{h} - f'(x-t) \right) g(t) dt.$$

Maintenant, la formule de Taylor avec reste intégral — que nous allons reconstituer soigneusement — va nous permettre de justifier le fait que le quotient sous l'intégrale tend uniformément vers $f'(x - t)$.

À cet effet, posons :

$$z := x - t,$$

considéré comme constant. La primitive de f' est f :

$$f(z + h) - f(z) = \int_z^{z+h} f'(u) du,$$

donc en soustrayant $h f'(z)$, envisagé comme constant :

$$f(z + h) - f(z) - h f'(z) = \int_z^{z+h} (f'(u) - f'(z)) du.$$

En effectuant le changement de variable d'intégration :

$$u =: z + h v,$$

$$\text{d'où : } du = 0 + h dv,$$

on introduit une nouvelle variable d'intégration v qui varie dans $[0, 1]$, ce qui donne :

$$f(z + h) - f(z) - h f'(z) = h \underbrace{\int_0^1 (f'(z + h v) - f'(z)) dv}_{=: \text{Reste}_{f'}(z, h)}.$$

Autrement dit après division par h :

$$(10.2) \quad \frac{f(z + h) - f(z)}{h} - f'(z) = \text{Reste}_{f'}(z, h).$$

Or la dérivée $f' \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R})$ est uniformément continue (puisqu'elle est à support compact, grâce à un lemme déjà vu), à savoir on a une *inégalité d'uniforme continuité* :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta = \eta(\varepsilon) \quad (|z_2 - z_1| \leq \eta \implies |f'(z_2) - f'(z_1)| \leq \varepsilon \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{R}).$$

Alors pour tout $|h| \leq \eta(\varepsilon)$, puisqu'on a trivialement pour tout $v \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned} |z + h v - z| &\leq |h v| \\ &\leq \eta(\varepsilon), \end{aligned}$$

l'inégalité d'uniforme continuité s'applique et permet de majorer :

$$\begin{aligned} |\text{Reste}_{f'}(z, h)| &\leq \int_0^1 |f'(z + h v) - f'(z)| dv \\ &\leq \int_0^1 \varepsilon dv \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Donc en revenant à l'équation (10.2), écrite avec $z := x - t$, multipliée par $g(t)$ et intégrée, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{f * g(x+h) - f * g(x)}{h} - f' * g(x) \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}} \text{Reste}_{f'}(x-t, h) g(t) dt \right| \\ &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} |g(t)| dt \\ &= \varepsilon \|g\|_{L^1}, \end{aligned}$$

et ce, pour tout $|h| \leq \eta(\varepsilon)$, ce qui conclut (exercice mental) dans le cas de la dimension $d = 1$.

Ensuite, en dimension $d \geq 1$ quelconque, on procède d'une manière complètement similaire, en considérant des petits vecteurs non nuls :

$$h_i = (0, \dots, 0, h, 0, \dots, 0),$$

avec $h \in \mathbb{R}^*$ à la i -ème position, et on obtient, en termes de :

$$\text{Reste}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(z, h) := \int_0^1 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(z + h_i v) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(z) \right) dv,$$

l'équation :

$$\frac{f * g(x + h_i v) - f * g(x)}{h} - \frac{\partial f}{\partial x_i} * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \text{Reste}_{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x-t, h) g(t) dt,$$

avec les mêmes estimées conclusives (exercice de compréhension). \square

Théorème 10.3. [Corollaire direct] *Étant donné deux fonctions :*

$$f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{et} \quad g \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

leur convolée $f * g$ est de classe \mathcal{C}^∞ partout sur \mathbb{R}^d , et ses dérivées partielles d'ordre quelconque s'obtiennent simplement en convolant g avec les dérivées partielles correspondantes de f :

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} (f * g) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \right) * g \quad (\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d).$$

Démonstration. Raisonner par récurrence sur l'ordre des dérivées, et leur ré-appliquer successivement le théorème qui précède. Exercice de compréhension : formuler un théorème valable pour $f \in \mathcal{C}_c^\kappa(\mathbb{R}^d)$ avec $\kappa \geq 1$. \square

Définition 10.4. Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, on dit que $f * \varphi$ est une *régularisée* de f par la fonction φ .

Dans le même état d'esprit, on peut établir d'autres résultats analogues qui sont des variations de ces théorèmes, et nous les proposons en exercice.

Théorème 10.5. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, soit un exposant $1 \leq p < \infty$, et soit $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$. Alors $f * g$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d et satisfait :*

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} (f * g) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \right) * g \quad (\forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d).$$

Démonstration. Détailler les arguments complets est proposé comme Exercice 17. \square

11. Fonctions-plateau (de Saclay ?)

Les fonctions-plateau jouent un rôle essentiel en Analyse lisse : elles permettent en effet de *localiser* l'étude au voisinage d'un point, ou au voisinage d'un compact arbitraire.

Définition. On appelle *fonction-plateau* — le génitif «de Saclay» n'existe que dans les définitions qu'on donne à Orsay — sur \mathbb{R}^d relative à deux boules concentriques, toute fonction $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :

(i) pour tout $x \in \mathbb{R}^d$:

$$0 \leq \chi(x) \leq 1;$$

(ii) il existe $0 < a < b$ dans \mathbb{R} tels que :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } |x| \leq a, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geq b. \end{cases}$$

Le résultat principal de cette section va établir que tout ensemble fermé-borné *absolument quelconque* dans \mathbb{R}^d , *i.e.* tout compact $K \Subset \mathbb{R}^d$ — aux formes éventuellement les plus étranges possibles —, admet des fonctions-plateaux égales à 1 sur lui, et égales à 0 dans le complémentaire :

$$\mathbb{R}^d \setminus K_\varepsilon$$

d'un voisinage ouvert arbitrairement petit $K_\varepsilon \supset K$ de lui, disons :

$$K_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, K) < \varepsilon\},$$

avec $\varepsilon > 0$ très petit. Or la fonction indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K , égale à 1 sur K , et à 0 sur le complémentaire $\mathbb{R}^d \setminus K$ ne convient pas tout à fait, parce qu'elle n'est pas \mathcal{C}^∞ ! Qu'à cela ne tienne, nous allons *régulariser cette fonction indicatrice $\mathbf{1}_K$ de K* en la convolant avec une fonction \mathcal{C}^∞ à support compact ρ_ε dont le support est ε -centré autour de $0 \in \mathbb{R}^d$. Commençons par demander seulement que le support soit contenu dans la boule unité fermée.

Lemme 11.1. *Il existe une fonction $\rho \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :*

(i) $\rho \geq 0$ sur \mathbb{R}^d ;

(ii) $\text{supp } \rho \subset \overline{B(0, 1)}$;

(iii) $1 = \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx$.

Démonstration. Nous avons vu il y a quelques instants au Lemme 9.1 que la fonction :

$$\psi(x) := \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right) & \text{lorsque } |x| < 1, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geq 1, \end{cases}$$

remplit les conditions (i) et (ii). Il suffit alors seulement de la dilater par une constante appropriée pour assurer que son intégrale soit égale à 1 :

$$\rho(x) := \frac{1}{\int_{\mathbb{R}^d} \psi} \psi(x),$$

ce qui conclut. □

Une simple dilatation-renormalisation :

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

fournit alors la fonction recherchée ; ε apparaît à la puissance d -ème au dénominateur, car la mesure de Lebesgue $dx = dx_1 \cdots dx_d$ sur \mathbb{R}^d est d -dimensionnelle. En résumé :

Corollaire 11.2. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $\rho_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant :*

- (i) $\rho_\varepsilon \geq 0$ sur \mathbb{R}^d ;
- (ii) $\text{supp } \rho_\varepsilon \subset \overline{B(0, \varepsilon)}$;
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(x) dx = 1$, c'est-à-dire $1 = \int_{|x| \leq \varepsilon} \rho_\varepsilon(x) dx$. □

Géométriquement et géographiquement, le bord du plateau de Saclay est plein d'irrégularités, de ravines, de semi-falaises, de sentiers qui le mordent, et pourtant, le plateau existe ! Mathématiquement, voici ce qui lui correspond.

Proposition 11.3. [Existence de fonctions-plateau ε -indicatrices \mathcal{C}^∞] *Étant donné un ensemble mesurable borné quelconque $E \subset \mathbb{R}^d$ (pas forcément fermé), pour tout $\varepsilon > 0$, si on pose :*

$$E_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, E) < \varepsilon\},$$

$$\tilde{E}_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, E) \leq \varepsilon\} \supset \overline{E}_\varepsilon,$$

alors il existe une fonction-plateau $\chi_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant :

- (i) $0 \leq \chi_\varepsilon(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$;
- (ii) $\chi_\varepsilon(x) \equiv 1$ pour tout $x \in \overline{E} = \text{adhérence de } E$;
- (iii) $\chi_\varepsilon(x) \equiv 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E_{3\varepsilon}$.

Le fait crucial, c'est que χ_ε est \mathcal{C}^∞ : elle « descend » du niveau 1 vers le niveau 0 de la mer, de manière certes nécessairement « abrupte » lorsque $\varepsilon > 0$ est petit, mais aussi lisse qu'un toboggan de longueur $\leq 3\varepsilon$ — donc au final, mieux que le plateau de Saclay !

Démonstration. Comme nous l'avons déjà anticipé, il va suffire de prendre la convolée de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}$ avec la fonction ρ_ε :

$$\chi_\varepsilon := \mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon} * \rho_\varepsilon.$$

Autrement dit :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}(x-t) \rho_\varepsilon(t) dt,$$

ce qui montre instantanément que $\chi_\varepsilon \geq 0$, et aussi en majorant la fonction indicatrice simplement par 1, que :

$$\begin{aligned} \chi_\varepsilon(x) &\leq \int_{\mathbb{R}^d} 1 \cdot \rho_\varepsilon(t) dt \\ &\leq 1, \end{aligned}$$

ce qui donne (i).

Ensuite, montrons que $\chi_\varepsilon|_E \equiv 1$, d'où il découlera par continuité que $\chi_\varepsilon|_{\overline{E}} \equiv 1$ aussi.

Le support de ρ_ε étant contenu dans la boule fermée $\overline{B}(0, \varepsilon)$, on a en fait :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t| \leq \varepsilon} \mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}(x-t) \rho_\varepsilon(t) dt.$$

Assertion 11.4. Pour tout $x \in E$ et tout $|t| \leq \varepsilon$, on a $\mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}(x - t) = 1$.

Démonstration. Autrement dit, il s'agit de voir que $x - t \in \tilde{E}_\varepsilon$, i.e. que :

$$\text{dist}(x - t, E) \leq \varepsilon.$$

Mais comme $x \in E$, on a au moins :

$$\text{dist}(x - t, E) \leq \text{dist}(x - t, x) = |t| \leq \varepsilon,$$

ce qu'il fallait voir. \square

Donc dans l'intégrale ci-dessus, on peut remplacer identiquement par 1 la fonction indicatrice, ce qui donne, pour tout $x \in E$:

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t| \leq \varepsilon} 1 \cdot \rho_\varepsilon(t) dt = \int_{\mathbb{R}^d} \rho_\varepsilon(t) dt = 1,$$

et achève (ii).

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d \setminus E_{3\varepsilon}$. On a encore :

$$\chi_\varepsilon(x) = \int_{|t| \leq \varepsilon} \mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}(x - t) \rho_\varepsilon(t) dt.$$

Assertion 11.5. Pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus E_{3\varepsilon}$ et tout $|t| \leq \varepsilon$, on a :

$$\text{dist}(x - t, E) > \varepsilon.$$

Démonstration. L'hypothèse que $\text{dist}(x, E) \geq 3\varepsilon$ signifie :

$$\forall y \in E \quad \text{dist}(x, y) \geq 3\varepsilon.$$

Avec $|t| \leq \varepsilon$, supposons par l'absurde que $\text{dist}(x - t, E) \leq \varepsilon$. Ceci signifie que pour tout $\varepsilon' \ll \varepsilon$, il existe $y \in E$ avec :

$$\text{dist}(x - t, y) \leq \varepsilon + \varepsilon'.$$

Mais alors l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \text{dist}(x, y) &\leq \text{dist}(x, x - t) + \text{dist}(x - t, y) \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon' \\ &< 3\varepsilon, \end{aligned}$$

apporte une contradiction. \square

Pour terminer, on a donc toujours $x - t \notin \tilde{E}_\varepsilon$ dans l'intégrale ci-dessus, donc $\mathbf{1}_{\tilde{E}_\varepsilon}(x - t) \equiv 0$, d'où l'intégrale s'annule, ce qui achève (iii). \square

Théorème 11.6. Soit $K \Subset \mathbb{R}^d$ un sous-ensemble compact quelconque et soit $\Omega \supset K$ un voisinage ouvert quelconque de K , éventuellement arbitrairement resserré autour de K . Alors il existe une fonction-plateau $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$ telle que $0 \leq \chi(x) \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant :

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } x \in K; \\ 0 & \text{lorsque } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega. \end{cases}$$

Démonstration. Pour pouvoir appliquer la proposition qui précède, il suffit de faire voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\overline{K}_{3\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, K) \leq 3\varepsilon\} \subset \Omega.$$

Mais puisque Ω est un ouvert contenant K , la distance :

$$\begin{aligned} \text{dist}(K, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) &:= \inf_{\substack{x \in K \\ y \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega}} |x - y| \\ &=: \delta > 0 \end{aligned}$$

est strictement positive (exercice de topologie métrique), donc en prenant $\varepsilon < \frac{\delta}{4}$, le support de la fonction χ_ε de la proposition qui précède satisfait :

$$\text{supp } \chi_\varepsilon \subset \overline{K}_{3\varepsilon} \subset \Omega,$$

ce qui conclut. □

12. Suites régularisantes et densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

En revenant aux fonctions $\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$ utilisées ci-dessus, et en prenant :

$$\varepsilon := \frac{1}{j} \quad (j \geq 1),$$

on obtient une suite de fonction $(\rho_j)_{j=1}^\infty$ satisfaisant ce qui suit.

Définition 12.1. On appelle *suite régularisante* dans \mathbb{R}^d toute suite :

$$(\rho_j)_{j=1}^\infty$$

de fonctions satisfaisant :

- (i) $\rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$;
- (ii) $\rho_j \geq 0$;
- (iii) $\int_{\mathbb{R}^d} \rho_j = 1$;
- (iv) $\text{supp } \rho_j \subset \overline{B}(0, \frac{1}{j})$.

Alors nous pouvons effectuer une *observation synthétique fondamentale* : toute suite régularisante est une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, mais bien mieux que les φ_j dont il est question dans le Théorème 8.3, parce que ces ρ_j sont maintenant de classe \mathcal{C}^∞ ! On en déduit donc sans effort l'énoncé suivant, dans lequel les fonctions-approximantes $\rho_j * f$ sont \mathcal{C}^∞ .

Théorème 12.2. Si $(\rho_j)_{j=1}^\infty$ est une suite régularisante appartenant à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, les deux énoncés suivants sont satisfaits.

(1) Pour toute fonction f uniformément continue et bornée sur \mathbb{R}^d :

$$f \in \mathcal{C}_{\text{unif}^t}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $(f * \rho_j)_{j \geq 1}$ converge uniformément vers f sur \mathbb{R}^d :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \rho_j * f\|_{\mathcal{C}^0},$$

et chacune des fonctions $\rho_j * f$ de cette suite est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d tout entier.

(2) Pour tout réel $p \in [1, \infty[$ et toute fonction :

$$f \in L^p(\mathbb{R}^d),$$

la suite des convolées $(f * \rho_j)_{j=1}^\infty$ converge vers f en norme L^p :

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \|f - \rho_j * f\|_{L^p},$$

et chacune des fonctions $\rho_j * f$ de cette suite est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^d tout entier. \square

Enfin, on obtient une conséquence remarquable : les fonctions les plus lisses possible, à savoir les fonctions \mathcal{C}_c^∞ , même à support compact, approximent à volonté les fonctions irrégulières continues ou intégrables. Cet énoncé raffine donc considérablement le théorème de densité des fonctions étagées (non lisses !), voire continues à support compact, dans l'espace des fonctions mesurables ou intégrables.

Voici donc un résultat profond et très important pour toute l'Analyse mathématique.

Théorème 12.3. *L'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ des fonctions indéfiniment différentiables à support compact est dense dans $\mathcal{C}_{\text{unif}^t}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$:*

$$\forall g \in \mathcal{C}_{\text{unif}^t}^0 \cap L^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \|g - f_\varepsilon\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

ainsi que dans $L^p(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall g \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists f_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \|g - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Démonstration. Traitons seulement le cas L^p . Soit donc $g \in L^p(\mathbb{R}^d)$ et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par densité — maintes fois utilisée auparavant — de $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$, il existe $h \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|g - h\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Maintenant, le théorème qui précède fournit un entier $j(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$\|h - h * \rho_{j(\varepsilon)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or nous avons vu dans le Théorème 10.5 que $h * \rho_{j(\varepsilon)}$ est \mathcal{C}^∞ , et de surcroît, elle est à support compact, car une application de la Proposition 4.2 donne :

$$\begin{aligned} \text{supp } h * \rho_{j(\varepsilon)} &\subset \overline{\text{supp } h + \text{supp } \rho_{j(\varepsilon)}} \\ &\subset \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(x, \text{supp } h) \leq \frac{1}{j(\varepsilon)} \right\}, \end{aligned}$$

ensemble manifestement fermé et borné !

Pour terminer, avec le choix évident :

$$f_\varepsilon := h * \rho_{j(\varepsilon)},$$

une simple inégalité triangulaire :

$$\|g - f_\varepsilon\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|g - h + h - h * \rho_{j(\varepsilon)}\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

conclut les arguments. \square

13. Théorème de Borel

Une application élémentaire des fonctions-plateau est le :

Théorème 13.1. [de Borel] *Pour toute suite de nombres complexes :*

$$(a_n)_{n \geq 0}, \quad a_n \in \mathbb{C},$$

il existe une fonction indéfiniment différentiable :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}), \\ x \mapsto f(x),$$

dont les n -èmes dérivées en $x = 0$ sont précisément les a_n :

$$f^{(n)}(0) = a_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

à savoir de manière équivalente, dont la série de Taylor à l'origine $x = 0$ est prescrite par les a_n :

$$\text{Taylor}_0^\infty(f) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!}.$$

Bien entendu, si la décroissance des modules $|a_n|$ est assez forte lorsque $n \rightarrow \infty$, la série entière brute :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$$

peut fort bien avoir un rayon de convergence strictement positif, voire même infini, ce qui donnerait immédiatement une solution au problème, mais en fait, le théorème *n'exige, et c'est sa force, aucune hypothèse sur la taille des a_n* . Par exemple, ce théorème s'applique aussi pour :

$$a_n := (n!)^2,$$

et l'on sait pertinemment que la série infinie :

$$\sum_{n \geq 0} n! x^n$$

a un rayon de convergence *nul*, égal à 0, puisque :

$$\frac{1}{\text{rayon de convergence}} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n!} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n} \right)^{\frac{1}{n}} \\ = \infty,$$

grâce à la formule (connue) de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e} \right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Ainsi faut-il une nouvelle *idée* pour passer par-dessus cet obstacle, et cette nouvelle *idée*, ce sont les fonctions-plateau qui vont nous l'offrir ... *sur un plateau* !

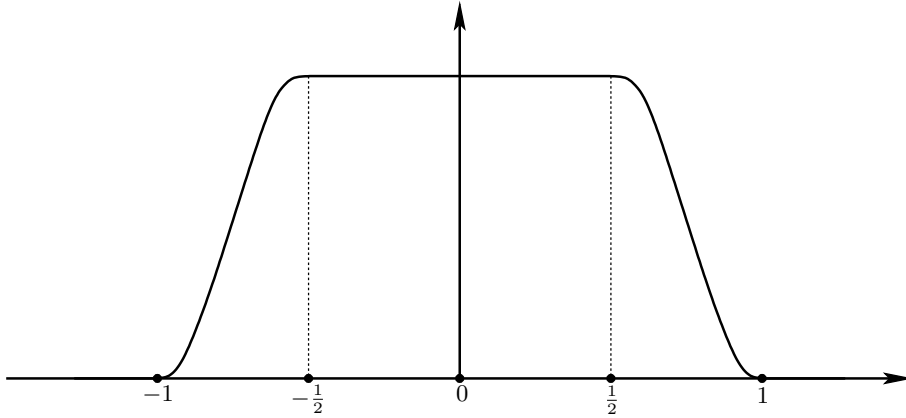
Démonstration. Introduisons en effet une fonction-plateau

$$\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, [0, 1]),$$

satisfaisant :

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \geq 1. \end{cases}$$

On peut construire une telle fonction en adaptant légèrement les arguments qui précèdent. En tout cas, le graphe d'une telle fonction a l'aspect très parlant suivant :



Maintenant, puisque $\varphi(x) \equiv 1$ pour $|x| \leq \frac{1}{2}$, on a :

$$\varphi(x) \cdot a_n \frac{x^n}{n!} \equiv 1 \cdot a_n \frac{x^n}{n!},$$

et donc la propriété évidente des dérivées en $x = 0$:

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} \left(a_n \frac{x^n}{n!} \right) \right|_{x=0} = \begin{cases} a_n & \text{lorsque } k = n, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est encore satisfaite lorsqu'on multiplie par $\varphi(x)$, et même plus généralement encore, lorsqu'on multiplie par :

$$\varphi(\lambda x)$$

pour $\lambda > 0$ arbitraire, puisque $\varphi(\lambda x) \equiv 1$ quand $|x| \leq \frac{1}{2\lambda}$, à savoir on a encore en $x = 0$:

$$\left. \frac{d^k}{dx^k} \left(\varphi(\lambda x) \cdot a_n \frac{x^n}{n!} \right) \right|_{x=0} = \begin{cases} a_n & \text{lorsque } k = n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'idée principale va alors consister à choisir des $\lambda = \lambda_n$ qui dépendent de n pour corriger la série $\sum a_n \frac{x^n}{n!}$ de manière à la rendre convergente. Plus précisément :

Proposition 13.2. *On peut choisir des $\lambda_n \geq 1$ pour tout $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ de telle sorte que la série :*

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{n \geq 0} \underbrace{\varphi(\lambda_n x) \cdot a_n \frac{x^n}{n!}}_{=: f_n(x)} \\ &= \sum_{n \geq 0} f_n(x) \end{aligned}$$

converge normalement sur \mathbb{R} , donc uniformément, et de telle sorte de plus que pour tout ordre de dérivation arbitraire $k = 0, 1, 2, \dots$, la même série dérivée k fois terme à terme :

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(k)}(x)$$

converge aussi normalement sur \mathbb{R} , donc uniformément, ce qui assure grâce à un théorème connu que la fonction est indéfiniment différentiable :

$$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}).$$

De plus, le choix explicite simple :

$$\lambda_n := \max(1, |a_n|)$$

convient.

Démonstration. Comme la fonction φ est \mathcal{C}^∞ , pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, sa dérivée k -ème $\varphi^{(k)}$ est continue, et comme elle est identiquement nulle pour $|x| \geq 1$, les quantités :

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)| = \max_{|x| \leq 1} |\varphi^{(k)}(x)| =: M_k < \infty$$

sont toutes finies.

Fixons maintenant $k \in \mathbb{N}$ un entier quelconque. Rappelons que la dérivée k -ème d'un produit de fonctions est donnée par la formule :

$$(f \cdot g)^{(k)} = \sum_{k_1 + k_2 = k} \frac{k!}{k_1! k_2!} f^{(k_1)} \cdot g^{(k_2)}.$$

Cette formule appliquée ici au produit :

$$f_n(x) = a_n \varphi(\lambda_n x) \cdot \frac{x^n}{n!}$$

donne :

$$\frac{d^k f_n}{dx^k}(x) = a_n \sum_{k_1 + k_2 = k} \frac{k!}{k_1! k_2!} (\lambda_n)^{k_1} \underbrace{\frac{d^{k_1} \varphi}{dx^{k_1}}(\lambda_n x)}_{\substack{= 0 \text{ pour } |x| \geq \frac{1}{\lambda_n} \\ \text{et } \leq M_{k_1} \text{ en valeur absolue}}} \cdot \frac{x^{n-k_2}}{(n-k_2)!}.$$

Le membre de droite étant identiquement nul pour $|x| \geq \frac{1}{\lambda_n}$, on peut majorer la valeur absolue en supposant $|x| \leq \frac{1}{\lambda_n}$:

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^k f_n}{dx^k}(x) \right| &\leq |a_n| \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!} (\lambda_n)^{k_1} M_{k_1} \frac{|x|^{n-k_2}}{(n-k_2)!} \\
&\leq |a_n| \max(M_0, \dots, M_k) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!} (\lambda_n)^{k_1} \frac{\frac{1}{(\lambda_n)^{n-k_2}}}{(n-k_2)!} \\
&\leq |a_n| \max(M_0, \dots, M_k) \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!} (\lambda_n)^{k_1+k_2-n} \frac{1}{(n-k_2)!} \\
&= \frac{|a_n| \max(M_0, \dots, M_k)}{(\lambda_n)^{n-k}} \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!} \underbrace{\frac{1}{(n-k_2)!}}_{\leq \frac{1}{(n-k)!}} \\
&\leq \frac{|a_n| \max(M_0, \dots, M_k)}{(\lambda_n)^{n-k} (n-k)!} \underbrace{\sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!}}_{(1+1)^k = 2^k} \\
&= \frac{|a_n| \max(M_0, \dots, M_k) 2^k}{(\lambda_n)^{n-k} (n-k)!}
\end{aligned}$$

Si donc on choisit :

$$\lambda_n := \max(1, |a_n|),$$

alors pour tout $n \geq k+1$ on a :

$$(\lambda_n)^{n-k} \geq \lambda_n \geq |a_n|,$$

d'où :

$$\frac{1}{(\lambda_n)^{n-k}} \leq \frac{1}{|a_n|},$$

et enfin, toujours pour $n \geq k+1$, en achevant les majorations qui précèdent :

$$\begin{aligned}
\left| \frac{d^k f_n}{dx^k}(x) \right| &\leq \frac{\max(M_0, \dots, M_k) 2^k}{(n-k)!} \\
&= \text{constante}_k \frac{1}{(n-k)!}.
\end{aligned}$$

À présent, la convergence normale de la série dérivée k fois terme à terme est aisée, en tronquant comme on s'y attend :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{d^k f_n}{dx^k}(x) \right| &\leq \underbrace{\sum_{n=0}^k \left| \frac{d^k f_n}{dx^k}(x) \right|}_{\text{somme finie}} + \text{constante}_k \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{(n-k)!} \\ &= \text{quantité finie} + \text{constante}_k \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m!} \\ &= \text{quantité finie} + \text{constante}_k (e^1 - 1) \\ &< \infty. \end{aligned}$$

En conclusion, la fonction $f(x)$ est bien \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} . □

La fin de la démonstration du théorème tombe maintenant vraiment comme un fruit mûr gorgé de sève. Soit $k \in \mathbb{N}$ un ordre de dérivation quelconque. Grâce à la convergence normale-uniforme, la dérivée k -ème en $x = 0$ de la fonction $f(x)$ s'obtient donc simplement en dérivant ses termes k fois et en sommant :

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0).$$

Or puisque :

$$\varphi(\lambda_n x) \equiv 1 \quad \text{pour } |x| \leq \frac{1}{2\lambda_n},$$

on a trivialement :

$$\begin{aligned} f_n^{(k)}(0) &= \left. \frac{d^k f_n}{dx^k} \right|_{x=0} \\ &= \left. \frac{d^k}{dx^k} \left(\varphi(\lambda_n x) \cdot a_n \frac{x^n}{n!} \right) \right|_{x=0} \\ &= \left. \frac{d^k}{dx^k} \left(a_n \frac{x^n}{n!} \right) \right|_{x=0} \\ &= \begin{cases} a_k & \text{lorsque } n = k, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned}$$

et donc au final :

$$\begin{aligned} f^{(k)}(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(0) \\ &= a_k, \end{aligned}$$

ce qui est l'assignation désirée. □

14. Exercices

Exercice 1. Montrer que la propriété :

$$0 = \lim_{a \rightarrow 0} \|\tau_a f - f\|_{L^p},$$

vraie pour $1 \leq p < \infty$ est *fausse* pour $p = \infty$. *Indication* : En dimension $d = 1$, sur \mathbb{R} , considérer la fonction indicatrice du segment fermé $[\alpha, \beta]$ pour deux nombres réels $-\infty < \alpha < \beta < \infty$.

Exercice 2. Soient deux réels $0 < \alpha < \beta < \infty$. On introduit les deux fonctions indicatrices :

$$f := \mathbf{1}_{[-\alpha, \alpha]} \quad \text{et} \quad g := \mathbf{1}_{[-\beta, \beta]}.$$

(a) Montrer que f et g sont convolables.

(b) Montrer que leur convolution possède l'expression explicite :

$$f * g(x) = \begin{cases} 2\alpha & \text{lorsque } 0 \leq |x| \leq \beta - \alpha, \\ \beta + \alpha - |x| & \text{lorsque } \beta - \alpha \leq |x| \leq \beta + \alpha, \\ 0 & \text{lorsque } \beta + \alpha < |x|. \end{cases}$$

(c) Quelle est la régularité de f et de g ? Quelle est celle de $f * g$? S'améliore-t-elle ?

Exercice 3. Soient trois fonctions Lebesgue-intégrables $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que le produit de convolution est commutatif :

$$f * g = g * f.$$

(b) Montrer que le produit de convolution est associatif :

$$(f * g) * h = f * (g * h).$$

Exercice 4. Sur \mathbb{R} , on introduit les trois (combinaisons de) fonctions indicatrices :

$$f := \mathbf{1}_{[0, \infty[}, \quad g := \mathbf{1}_{[-1, 0]} - \mathbf{1}_{[0, 1]}, \quad h := \mathbf{1}_{\mathbb{R}}.$$

(a) Montrer que f et g sont convolables et que :

$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |x| \geq 1, \\ 1 + x & \text{lorsque } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x & \text{lorsque } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

(b) Montrer que $f * g$ et h sont convolables et que :

$$(f * g) * h \equiv 1.$$

(c) Montrer que g et h sont convolables, puis que f est convolvable avec $g * h$ et enfin que :

$$f * (g * h) \equiv 0.$$

(d) Interpréter intelligemment ce paradoxe. D'ailleurs, si f et g sont convolables, a-t-on toujours $f * g = g * f$? (oui, mais pourquoi ?).

Exercice 5. Soient $f = f(x)$ et $g = g(x)$ deux fonctions continues sur \mathbb{R} , l'une au moins étant à support compact. Montrer, pour tout entier $k \in \mathbb{N}$, la relation :

$$(x^k f) * g = \sum_{0 \leq j \leq k} \frac{k!}{j!(k-j)!} (x^j f) * (x^{k-j} g).$$

Exercice 6. Étant donné une fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ identiquement nulle sur les réels négatifs :

$$f|_{]-\infty, 0]} \equiv 0,$$

sa primitive nulle en 0 est donnée par l'intégrale $\int_0^x f(t) dt$, puis ses primitives d'ordre supérieur sont données en intégrant de telles intégrales. Cet exercice fournit des formules alternatives pour obtenir ces primitives itérées en utilisant la convolution.

Rappelons que la fonction Γ d'Euler est définie, pour tout réel $\alpha > 0$, par :

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

Elle satisfait $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout entier $n \geq 1$ (exercice de révision). On pourra admettre que la fonction B d'Euler, définie pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$ par une intégrale, s'exprime au moyen de la fonction Γ :

$$B(\alpha, \beta) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\beta-1} dt$$

$$\stackrel{\text{admis}}{=} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

On pourra aussi redémontrer cette relation, au moins lorsque α et β sont tous deux des entiers ≥ 1 . On introduit alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, les fonctions :

$$Y_\alpha := \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} & \text{lorsque } x > 0, \\ 0 & \text{lorsque } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Montrer que, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, on a :

$$Y_\alpha * Y_\beta = Y_{\alpha+\beta}.$$

(b) Soit donc une fonction f continue sur \mathbb{R} identiquement nulle sur $] -\infty, 0]$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$F_n := Y_n * f.$$

Montrer pour commencer que F_1 est la primitive de f s'annulant en 0, satisfaisant d'ailleurs aussi $F_1'(0) = 0$.

(c) Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$F_n^{(n)}(x) = f(x) \quad \text{avec } 0 = F_n(0) = F_n'(0) = \dots = F_n^{(n-1)}(0).$$

Exercice 7. (a) Montrer par un exemple très simple qu'on ne peut en général pas convoler deux fonctions quelconques appartenant à l'espace des *fonctions localement intégrables sur \mathbb{R}* , défini par :

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}) \stackrel{\text{déf}}{=} \left\{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables: } \int_K |f(t)| dt < \infty \text{ pour tout compact } K \Subset \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Soient une première fonction :

$$f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$$

et soit une deuxième fonction intégrable et à support compact :

$$g \in L_c^1(\mathbb{R}) \stackrel{\text{déf}}{=} \{g \in L^1(\mathbb{R}) : \text{supp } g \text{ est compact}\}.$$

Montrer que f et g sont convolables, à savoir que $f * g(x)$ existe pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(c) En utilisant des fonctions indicatrices appropriées, montrer que $f * g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 8. Si $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que la convolution $f * g(x)$ est définie pour *tout* $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9. Soit $f \in L_c^p(\mathbb{R})$ à support compact avec $1 \leq p \leq \infty$, soit $p' := \frac{p}{p-1}$ l'exposant conjugué avec $1 \leq p' \leq \infty$, et soit $g \in L_{\text{loc}}^{p'}$. Montrer que $f * g(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et est continue.

Exercice 10. Pour tout réel $a > 0$ strictement positif on définit sur \mathbb{R} les deux familles à un paramètre de fonctions :

$$g_a(x) := e^{-a|x|} \quad \text{et} \quad h_a(x) := \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}.$$

(a) Montrer, en appliquant un théorème du cours, que pour tous $a, b > 0$, on a :

$$g_a * g_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}),$$

puis aussi que :

$$g_a * g_b \in \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}).$$

(b) Calculer explicitement :

$$g_a * g_b(x) = \begin{cases} \frac{2}{a^2 - b^2} (a e^{-b|x|} - b e^{-a|x|}) & \text{lorsque } a \neq b, \\ e^{-a|x|} \left(\frac{1}{a} + |x| \right) & \text{lorsque } a = b. \end{cases}$$

(c) Montrer de même que :

$$h_a * h_b \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap \bigcap_{1 \leq p \leq \infty} L^p(\mathbb{R}).$$

(d) Calculer explicitement :

$$\begin{aligned} h_a * h_b &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{-\frac{x^2}{2(a^2 + b^2)}} \\ &= h_{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Exercice 11. Montrer en détail que les trois familles de noyaux, de Laplace, de Cauchy, et de Gauss, satisfont les trois conditions que doit satisfaire une approximation de l'unité.

Exercice 12. Soit $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty} g(y) dy = 1$. On pose :

$$\begin{aligned} c_- &:= \int_{-\infty}^0 g(y) dy, \\ c_+ &:= \int_0^{\infty} g(y) dy. \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon > 0$, on pose $g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} g\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.

(a) Si f est une fonction continue par morceaux et bornée sur \mathbb{R} , montrer qu'en tout point $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * g_\varepsilon(x) = c_- f(x+0) + c_+ f(x-0).$$

(b) Si de plus f ne présente pas de points de discontinuité sur un intervalle fermé donné, montrer que la convergence est uniforme sur cet intervalle.

(c) Que se passe-t-il si l'intervalle en question contient un point de discontinuité de f ?

Exercice 13. [Approximation polynomiale de Weierstrass, d'après Landau] Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$, et soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$ une fonction continue. L'objectif est d'établir qu'il existe une suite $(p_n)_{n=1}^{\infty}$ de polynômes $p_n(x) \in \mathbb{C}[x]$ qui converge uniformément vers f :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_n - f\|_{\mathcal{C}^0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [a, b]} |p_n(x) - f(x)|.$$

(a) Montrer qu'on peut supposer $f(a) = f(b) = 0$. Indication: Retrancher à f une fonction affine appropriée.

(b) On pose $R := b - a > 0$, et on introduit la fonction quadratique :

$$q(x) := \begin{cases} R^2 - x^2 & \text{lorsque } |x| \leq R, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

Soit $0 < \delta < R$. Montrer, pour tout $n \geq 1$, l'inégalité :

$$\int_{-\infty}^{-\delta} (q(x))^n dx + \int_{\delta}^{\infty} (q(x))^n dx \leq 2R (q(\delta))^n.$$

(c) Montrer aussi :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (q(x))^n dx \geq \delta (q(\frac{\delta}{2}))^n.$$

(d) Montrer, pour tout $\delta > 0$, que l'on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{|x| \geq \delta} (q(x))^n dx}{\int_{-\infty}^{\infty} (q(x))^n dx}.$$

(e) Introduire :

$$Q_n(x) := \frac{(q(x))^n}{\int_{\mathbb{R}} q^n},$$

et montrer que $(Q_n)_{n=1}^{\infty}$ constitue une famille de bons noyaux sur \mathbb{R} , lorsque $n \rightarrow \infty$.

(f) Avec $\tilde{f}(x) := \mathbf{1}_{[a,b]}(x) f(x)$ définie sur \mathbb{R} , en déduire la convergence uniforme sur \mathbb{R} :

$$\tilde{p}_n(x) := (Q_n * \tilde{f})(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \tilde{f}(x).$$

(g) Montrer que la restriction $p_n := \tilde{p}_n|_{[a,b]}$ est un polynôme de degré $\leq 2n$, pour tout $n \geq 1$.

(h) Énoncer précisément le résultat obtenu.

Exercice 14. Soit $g \in L^1_c(\mathbb{R}^d)$ une fonction Lebesgue-intégrable à support compact.

(a) Si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^d)$ est une fonction dont le support n'est pas forcément compact, en s'inspirant de raisonnements qui précèdent, établir que la convolée :

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t) g(t) dt$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, qu'elle est de classe \mathcal{C}^1 , et qu'elle satisfait :

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f * g) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) * g \quad (i=1 \dots d).$$

(b) Lorsque $f \in \mathcal{C}^{\kappa}(\mathbb{R}^d)$ pour un entier $\kappa \geq 1$ toujours sans restriction de compacité concernant son support, montrer que $f * g(x)$ est de classe \mathcal{C}^{κ} et satisfait, pour tous entiers positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_d \geq 0$ avec $\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq \kappa$, la relation de percolation des dérivées :

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} (f * g) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \right) * g.$$

(c) Formuler une version \mathcal{C}^{∞} de cet énoncé.

(d) Déduire de ces considérations que pour tout polynôme :

$$P = P(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_d],$$

la convolée $P * g$ est aussi un polynôme, dont le degré est inférieur ou égal à celui de P . Interpréter ce résultat en le reliant mentalement (et en faisant preuve d'intelligence synthétique) aux sommes partielles de la série de Fourier d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, ainsi qu'aux sommes de Cesàro-Fejér correspondantes.

Exercice 15. Montrer directement que la convolée sur \mathbb{R}^d entre un polynôme et une fonction L^1 à support compact fournit toujours un polynôme.

Exercice 16. Étant donné une première fonction $f \in \mathcal{C}^{\kappa}(\mathbb{R}^d)$ bornée sur \mathbb{R}^d ainsi que ses dérivées d'ordre $\leq \kappa$, et étant donné une deuxième fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ dont le support n'est maintenant plus supposé compact, montrer que la convolée $f * g(x)$ existe en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, qu'elle est classe \mathcal{C}^{κ} sur \mathbb{R}^d tout entier et qu'elle vérifie de même :

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} (f * g) = \left(\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}} \right) * g \quad (\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq \kappa),$$

en ayant pris bien soin de vérifier que le membre de droite a un sens. *Indication* : En dimension $d = 1$, on pourra traiter d'abord le cas $\kappa = 0$, puis le cas $\kappa = 1$, en utilisant à nouveau une formule de Taylor appropriée avec reste intégral, et en introduisant les quantités suivantes :

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_d} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_d} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}(x) \right| < \infty,$$

finies par hypothèse.

Exercice 17. Démontrer rigoureusement le Théorème 10.5.

Exercice 18. [Fonctions-plateau] Soient deux nombres réels $-\infty < a < b < \infty$.

(a) Montrer que la fonction :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x \leq a, \\ e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}} & \text{lorsque } a < x < b, \\ 0 & \text{lorsque } x \geq b, \end{cases}$$

est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} tout entier.

(b) Montrer qu'il existe une fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^∞ qui commence par $F(x) \equiv 0$ pour $x \leq a$, qui est strictement croissante sur $[a, b]$, et qui termine par $F(x) \equiv 1$ pour $x \geq b$. Indication: Prendre $F(x) := c \int_{-\infty}^x f(t) dt$, en choisissant une constante appropriée $c > 0$.

(c) Soit $\delta > 0$ assez petit pour que $a + \delta < b - \delta$. Montrer qu'il existe une fonction $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ de classe \mathcal{C}^∞ satisfaisant :

- $g|_{]-\infty, a] \cup [b, \infty[} \equiv 0$;
- $g|_{[a+\delta, b-\delta]} \equiv 1$;
- g est strictement croissante sur $[a, a + \delta]$, et est strictement décroissante sur $[b - \delta, b]$.

Exercice 19. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante lisse à support compact, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geq 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_j(x) dx = 1$ et $\text{supp } \rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leq 1$ satisfaisant $\lim_{j \rightarrow +\infty} \varepsilon_j = 0$.

(a) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(b) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq a$ et pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b, b]} f)(x) = 0.$$

(c) Montrer que :

$$\|\mathbf{1}_{[-b, b]} f - \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b, b]} f)\|_{L^1} \geq \int_{-a}^{+a} |f(x)| dx.$$

(d) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 20. Soit $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 satisfaisant $f(0) = 0$ et $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$. L'objectif est d'établir une inégalité due à Young d'après laquelle, pour tous $0 \leq b \leq a$:

$$ab \leq \int_0^a f(t) dt + \int_0^b f^{-1}(t) dt,$$

avec égalité lorsque, et seulement lorsque $b = a$.

(a) Montrer, en la dérivant, que la fonction auxiliaire :

$$x \mapsto -xf(x) + \int_0^x f(t) dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t) dt,$$

est identiquement nulle.

(b) Soit maintenant $b > 0$ fixé. Conclure en étudiant le tableau de variation de la fonction :

$$a \mapsto -af(b) + \int_0^a f(t) dt + \int_0^{f(b)} f^{-1}(t) dt.$$

(c) Première application : déduire l'inégalité de Young classique d'après laquelle, pour toute paire d'exposants $p, q \in]1, \infty[$ qui sont conjugués :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

et toute paire de réels $a, b \geq 0$, on a :

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

avec égalité lorsque et seulement lorsque $b = a^{p-1}$.

(d) Deuxième application (utile pour traiter l'exercice qui suit) : déduire que pour toute paire de réels $a, b \geq 0$, on a :

$$ab \leq a \log(1+a) + e^b - 1.$$

Exercice 21. Sur le cercle unité :

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z},$$

on considère l'espace fonctionnel des fonctions :

$$\mathcal{E} := \left\{ f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurables telles que } \int_0^{2\pi} |f(t)| \log(1+|f(t)|) \frac{dt}{2\pi} < \infty \right\}.$$

(a) Montrer qu'elles satisfont toutes :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} < \infty,$$

i.e. qu'elles appartiennent à $L^1(\mathbb{T})$. On fixe maintenant une telle fonction f et l'objectif est d'étudier comment elle se convole avec certaines autres fonctions.

(b) Si $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction mesurable ayant la propriété qu'il existe une constante $\lambda > 1$ telle que :

$$e^{\frac{|g|}{\lambda}} \in L^1(\mathbb{T}),$$

montrer que pour tout $\theta \in \mathbb{T}$, on a l'inégalité :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)g(\theta-t)| \frac{dt}{2\pi} \leq \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \log(1+\lambda|f(t)|) \frac{dt}{2\pi} + \int_0^{2\pi} (e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1) \frac{dt}{2\pi}.$$

Indication : on pourra utiliser une inégalité de l'Exercice qui précède :

$$ab \leq a \log(1+a) + e^b - 1 \quad (a, b \geq 0).$$

(c) Utiliser en la vérifiant l'inégalité valable pour deux nombres réels $c \geq 1$ et $e \geq 0$:

$$\log(1+ce) \leq \log c + \log(1+e),$$

pour obtenir que la convolée $f * g(\theta)$ existe pour *tout* $\theta \in \mathbb{T}$, et qu'elle est majorée par l'expression-à-trois-girafes- f :

$$|f * g(\theta)| \leq \lambda \log \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} + \lambda \int_0^{2\pi} |f(t)| \log(1+|f(t)|) \frac{dt}{2\pi} + \int_0^{2\pi} (e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1) \frac{dt}{2\pi}.$$

(d) On choisit dorénavant :

$$g(\theta) := \log \frac{1}{|\cos \theta|}.$$

Montrer que $g \in L^1(\mathbb{T})$ et aussi, pour *tout* $\lambda > 1$, que :

$$e^{\frac{|g|}{\lambda}} \in L^1(\mathbb{T}).$$

(e) En se rapportant à un théorème du cours, justifier que des modifications mineures de sa démonstration permettent d'établir que pour toute paire de fonctions $f \in L^\infty(\mathbb{T})$ et $g \in L^1(\mathbb{T})$, la convolée $f * g$ est continue sur \mathbb{T} .

(f) Soit à nouveau f appartenant à l'espace fonctionnel ci-dessus. Pour tout entier $n \geq 1$, on la tronque par-dessous en définissant :

$$f_n(\theta) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } |f(\theta)| < n, \\ f(\theta) & \text{lorsque } |f(\theta)| \geq n. \end{cases}$$

Vérifier que $(f - f_n) * g(\theta)$ existe pour *tout* $\theta \in \mathbb{T}$.

(h) Introduire en conséquence pour tout $n \in \mathbb{N}$ les fonctions :

$$h_n := (f - f_n) * g,$$

montrer qu'elles sont continues, et établir que :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f * g - h_n\|_{L^\infty} \leq \int_0^{2\pi} (e^{\frac{|g(t)|}{\lambda}} - 1) \frac{dt}{2\pi}.$$

(i) Conclure la démonstration de l'énoncé qui était visé : pour toute fonction $f \in \mathcal{E}$, la convolée :

$$f * \log \frac{1}{|\cos|}$$

est continue sur \mathbb{T} .

Transformation de Fourier

François DE MARÇAY

Département de Mathématiques d'Orsay

Université Paris-Saclay, France

Dans les sections qui vont suivre, nous n'allons pas (tout de suite) utiliser la puissante et sophistiquée *théorie de l'intégration de Lebesgue*, mais plutôt, nous allons nous restreindre à l'intégration simple au sens de Riemann des fonctions continues. Historiquement parlant, en effet, les transformations de Fourier, de Laplace, ou de Poisson (fort utiles en ingénierie) sont apparues près d'un siècle avant l'aboutissement complet de la théorie abstraite de la mesure. En vérité, les aspects principaux de la transformation de Fourier peuvent être intégralement développés dans le royaume des fonctions les plus lisses et les plus régulières qui soient.

Ce n'est que dans un second moment du cours que nous étudierons la transformation de Fourier étendue aux espaces généraux $L^p(\mathbb{R}^d)$, et les raisonnements plus délicats que nous aurons alors à conduire dans ce contexte apparaîtront *transparents et limpides*, pour le plus grand bien de cette si précieuse *intuition de compréhension* que chacun de nous doit, ressentir, interroger, et cultiver en lui-même.

1. Naissance par analogie de la transformée de Fourier

La théorie des séries de Fourier s'applique aux fonctions définies sur le cercle unité, ou, de manière équivalente, aux fonctions 2π -périodiques sur \mathbb{R} . Dans ce chapitre, une théorie de Fourier analogue est développée pour les fonctions définies sur \mathbb{R} tout entier mais qui ne sont *pas* périodiques. Les fonctions considérées devront décroître suffisamment rapidement à l'infini pour que les concepts initiaux de la théorie aient un sens. Il y a plusieurs manières de caractériser la décroissance à l'infini, décroissance qui sera essentiellement vitale pour la rigueur mathématique.

Rappelons que la série de Fourier d'une fonction périodique lui associe une suite de nombres, à savoir les coefficients de Fourier ; mais lorsqu'il s'agit d'une fonction f définie sur \mathbb{R} , l'objet analogue associé devra être une autre fonction \widehat{f} elle aussi définie sur \mathbb{R} . Puisque, donc, la transformée de Fourier d'une fonction sur \mathbb{R} est à nouveau une fonction sur \mathbb{R} , contrairement aux séries de Fourier, il va y avoir une *symétrie fondamentale* entre la fonction et sa transformée :

$$f \longleftrightarrow \widehat{f}.$$

Intuitivement, la transformée de Fourier est une *version continue* des coefficients de Fourier. En effet, pour toute fonction f de période 1 (au lieu de 2π) :

$$\widehat{f}(k) := \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi kx} dx \quad (k \in \mathbb{Z}),$$

la variable utilisée précédemment $\theta = 2\pi x$ étant dilatée du facteur convenable, et alors, si la fonction f est suffisamment régulière (par exemple \mathcal{C}^1), elle est égale à sa série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2i\pi kx}.$$

Maintenant et de manière très intuitive, tentons une métamorphose de ces formules dans lesquelles on *remplace* tous les symboles discrets, tels que nombres entiers et sommations, par leurs contreparties continues, telles que nombres réels et intégrales. En d'autres termes, étant donnée une fonction f définie sur \mathbb{R} tout entier, définissons sa transformée de Fourier en remplaçant le cercle sur lequel on intègre par \mathbb{R} , et en remplaçant $k \in \mathbb{Z}$ par $\xi \in \mathbb{R}$, ce qui donne :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Cette formule va exactement être celle qui définit la *transformée de Fourier sur \mathbb{R}* . Mais poussons encore l'analogie plus loin, et traduisons aussi la formule qui exprime une fonction comme étant égale à série de Fourier : en remplaçant donc la somme par une intégrale, et $\widehat{f}(k)$ par $\widehat{f}(\xi)$, nous sommes conduits à une formule qui va s'avérer être vraie :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi\xi x} d\xi,$$

et qui sera appelée *formule d'inversion de Fourier*.

En fait, ces deux formules ne seront vraies, au début de la théorie, que sous certaines hypothèses de décroissance à l'infini, et une grande partie de la théorie va consister à s'occuper rigoureusement de questions de convergence.

À un niveau supérieur (par exemple en Master 1), la théorie dite des *distributions* (Sobolev, Schwartz) va clarifier considérablement les espaces d'objets mathématiques plus vastes dans lesquels une correspondance $f \longleftrightarrow \widehat{f}$ s'effectue de manière parfaitement symétrique et satisfaisante, sans restriction.

La théorie des séries de Fourier et des intégrales de Fourier a toujours rencontré des difficultés majeures et nécessité un grand appareillage mathématique lorsqu'il s'agit de justifier la convergence des formules. Elle a engendré le développement de méthodes de sommation, bien que celles-ci n'aient pas réellement fourni une solution complètement satisfaisante au problème. [...] Pour la transformée de Fourier, l'introduction des distributions, et donc l'introduction de l'espace \mathcal{S} [des fonctions à décroissance rapide à l'infini], est inévitable, que ce soit explicitement ou d'une manière cachée.
Laurent SCHWARTZ, 1950.

Toutefois, il ne sera nullement question ici dans un cours élémentaire de développer la théorie des distributions.

2. Premier éclairage

En tout cas, pour une première compréhension en profondeur, il sera utile de faire voir que la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi,$$

un des buts principaux de ce chapitre, peut être démontrée en partant des connaissances acquises sur les séries de Fourier, avec des moyens simples, naïfs, éclairants, dans le cas

particulier mais assez général où la fonction $f \in \mathcal{C}_c^1$ est continûment différentiable à support compact :

$$\text{supp}(f) \subset]0, T_0] \quad (T_0 > 0).$$

En effet, pour tout $T \geq T_0$, on peut introduire la T -périodisation de f , notée F , qui est alors \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}/(T\mathbb{Z})$. Le théorème de Dirichlet assure ensuite que F est égale en tout point à sa série de Fourier, ce qui, après renormalisation de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ en l'intervalle $[0, T]$, fournit (exercice) :

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F}(n) e^{2i\pi n \frac{x}{T}},$$

où les coefficients de Fourier renormalisés sont :

$$\widehat{F}(n) = \int_0^T F(x) e^{-2i\pi n \frac{x}{T}} \frac{dx}{T}.$$

Maintenant, si on définit donc la transformée de Fourier de f sur \mathbb{R} par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx,$$

dont on se convainc aisément qu'elle est continue par rapport à ξ , il se trouve qu'en posant $\xi = \frac{n}{T}$, on retrouve à un facteur $\frac{1}{T}$ près :

$$\widehat{F}(n) = \frac{1}{T} \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Ainsi donc puisque $F = f$ sur l'intervalle $[0, T_0]$, la formule laissée en chemin se traduit instantanément en :

$$f(x) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}\left(\frac{n}{T}\right) e^{2i\pi n \frac{x}{T}}.$$

Il reste seulement à faire tendre $T \rightarrow \infty$ et à reconnaître des sommes de Riemann (voir aussi l'Exercice 1) pour obtenir la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi,$$

dans ce cas précis déjà très général où la fonction f est \mathcal{C}_c^1 , au moins lorsque \widehat{f} est Riemann-intégrable.

Théorème 2.1. *La transformée de Fourier de toute fonction continûment différentiable à support compact $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:*

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx,$$

est continue en tant que fonction de ξ à valeurs dans \mathbb{C} , et si de plus (hypothèse supplémentaire), \widehat{f} est intégrable au sens de Riemann sur \mathbb{R} , alors la fonction f d'origine se retrouve grâce à la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi. \quad \square$$

Le principe de permanence formelle des relations dans les espaces fonctionnels abstraits approximés par des sous-espaces vectoriels denses concrets nous permet d'ores et déjà de soupçonner que cette formule d'inversion sera vraie dans des espaces plus généraux. C'est au développement rigoureux de cette intuition d'anticipation que sont consacrées les sections qui suivent, le point mathématique délicat étant qu'il faut souvent faire une hypothèse supplémentaire sur \hat{f} .

3. Transformée de Fourier des fonctions à croissance modérée

En admettant que l'intégration au sens de Riemann d'une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est connue, la manière la plus naturelle de généraliser l'intégration à des fonctions continues sur \mathbb{R} *tout entier* est de définir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{-M}^0 f(x) dx + \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N f(x) dx.$$

Bien entendu, cette limite peut ne pas exister comme nombre fini dans \mathbb{R} , par exemple lorsque $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$. Toutefois, de telles intégrales convergent lorsque f décroît suffisamment rapidement à l'infini, au sens suivant.

Définition 3.1. Une fonction continue f définie sur \mathbb{R} est dite à *croissance modérée* s'il existe une constante $A > 0$ telle que :

$$|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Par exemple, pour un entier $n \geq 2$, la fonction $1/(1+|x|^n)$ est clairement à croissance modérée. Autre exemple : la fonction $e^{-a|x|}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$ (exercice mental).

On vérifie aisément que l'ensemble des fonctions à croissance modérée forme un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Comme on l'a souhaité, l'intégrale sur \mathbb{R} tout entier d'une fonction à croissance modérée existe, grâce au critère de Riemann d'après lequel $\frac{1}{x^2}$ est intégrable à l'infini. Plus généralement, pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, les fonctions continues satisfaisant une inégalité du type :

$$|f(x)| \leq \frac{\text{constante}}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$$

sont aussi telles que la limite :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) dx$$

existe. Les résultats qui vont suivre seraient donc tout aussi vrais pour de telles fonctions, mais nous choisissons ici $\varepsilon = 1$ pour fixer les idées. Énonçons sous forme résumée quelques propriétés élémentaires.

Proposition 3.2. *L'intégrale sur \mathbb{R} des fonctions à croissance modérée satisfait :*

(i) *Linéarité :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (a f(x) + b g(x)) dx = a \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx + b \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

(ii) *Invariance par translation :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-h) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$$

(iii) *Modification par dilatation :*

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (\delta > 0).$$

(iv) *Continuité translationnelle :*

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-h) - f(x)| dx. \quad \square$$

La preuve de cette dernière propriété est laissée au lecteur ; en fait, on a déjà établi précédemment dans le cours la continuité translationnelle pour les fonctions appartenant au vaste espace de Lebesgue $L^1(\mathbb{R})$. Ici, en nous restreignant aux fonctions Riemann-intégrables, nous introduirons la même notation :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx,$$

pour définir la norme de Lebesgue restreinte à notre sympathique espace de fonctions à croissance modérée.

Définition 3.3. La transformée de Fourier d'une fonction $x \mapsto f(x)$ à croissance modérée est la fonction d'une variable auxiliaire $\xi \in \mathbb{R}$ définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx,$$

l'intégrale étant convergente, puisque $|e^{-2i\pi x\xi}| \equiv 1$.

Qui plus est, l'inégalité triangulaire intégrale qui justifie cette convergence :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \end{aligned}$$

montre qu'on a l'estimation fondamentale :

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Proposition 3.4. La transformée de Fourier d'une fonction f continue à croissance modérée est continue :

$$\widehat{f} \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}).$$

Démonstration. Le raisonnement détaillé, laissé au lecteur-étudiant puisqu'il est de niveau Licence deuxième année, consiste, en partant de l'intégrale définissant la différence :

$$\widehat{f}(\xi + \delta) - \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left(e^{-2i\pi x(\xi + \delta)} - e^{-2i\pi x\xi} \right) dx$$

avec $\delta \in \mathbb{R}$ petit, à la découper en deux parties :

$$\int_{|x| \leq R} + \int_{|x| > R},$$

où $R \gg 1$ est assez grand pour que $\int_{|x| > R}$ soit très petit. \square

Proposition 3.5. [dite de Riemann-Lebesgue] *La transformée de Fourier d'une fonction f continue à croissance modérée sur \mathbb{R} tend toujours vers zéro à l'infini :*

$$0 = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration. Un raisonnement astucieux, dont les détails sont une seconde fois laissés au lecteur-étudiant, consiste à établir d'abord que :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi}\right) \right) e^{-2i\pi x\xi} dx,$$

puis à raisonner encore en découpant l'intégrale en deux parties.

Un raisonnement alternatif plus sophistiqué consiste à établir d'abord la nullité de cette limite lorsque $f \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ est continûment dérivable à support compact, puis à raisonner en utilisant la densité (à vérifier soigneusement) de \mathcal{C}_c^1 dans l'espace des fonctions continues à croissance modérée. \square

Ces trois propriétés élémentaires de \widehat{f} ne garantissent toutefois pas que \widehat{f} jouisse d'une quelconque décroissance (modérée) à l'infini, comme le montre l'Exercice 3.

Pour cette raison, il n'est absolument pas clair que l'on puisse définir l'intégrale (noter le signe + dans l'exponentielle) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi x\xi} d\xi,$$

laquelle va en fait servir pour *inverser* la transformation de Fourier, puisqu'on va établir que l'on a toujours :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi x\xi} d\xi,$$

dans certaines circonstances où l'intégrale en question a un sens.

Pour garantir cela, on introduit classiquement un espace plus raffiné de fonctions à croissance extrêmement modérée que Laurent Schwartz a étudié dans le cadre de la théorie dite des distributions, et qui est très utile puisqu'on peut développer tous les théorèmes fondamentaux de la théorie dans cet espace.

Le choix de l'espace de Schwartz et motivé par un principe important d'après lequel la décroissance de \widehat{f} à l'infini est intimement liée aux propriétés de différentiabilité de f , et *vice versa* : plus $\widehat{f}(\xi)$ décroît lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$, plus f doit être de classe \mathcal{C}^k avec k grand. Un exemple simple illustrant ce principe apparaît dans l'Exercice 3. Bien entendu, on aura remarqué que cette relation entre f et \widehat{f} est réminiscente d'une relation similaire entre la régularité d'une fonction sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ et la décroissance de ses coefficients de Fourier.

4. Transformation de Fourier dans l'espace de Schwartz

Définition 4.1. L'espace de Schwartz sur \mathbb{R} est l'ensemble des fonctions f de classe \mathcal{C}^∞ à valeurs dans \mathbb{C} telles que f et toutes ses dérivées $f', f'', \dots, f^{(\ell)}, \dots$ sont *rapidement décroissantes* au sens où, pour tous entiers $k, \ell \geq 0$:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty.$$

On notera alors :

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

cet espace, qui renforce considérablement l'exigence de décroissance modérée à l'infini.

On vérifie (exercice) que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel. De plus, on se convainc (exercice mental) que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par différentiation et par multiplication monomiale :

$$f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \implies \quad \left(f'(x) = \frac{df}{dx} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad x f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \right).$$

Lemme 4.2. Toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz jouit des propriétés d'intégrabilité :

$$\|x^k f^{(\ell)}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} = \int_{-\infty}^{\infty} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| dx < \infty,$$

pour tous entiers $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Appliquons la définition aux entiers $k+2$ et ℓ :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^{k+2} |f^{(\ell)}(x)| =: M_{k+2, \ell} < \infty.$$

Alors l'intégrale en question, dont on excise la partie (évidemment finie) $\int_{|x| \leq 1}$, devient majorée par la quantité :

$$\begin{aligned} \int_{|x| > 1} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| dx &\leq 2 M_{k+2, \ell} \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} \\ &= 2 M_{k+2, \ell}, \end{aligned}$$

qui, manifestement, est elle aussi finie. □

Exemple 4.3. La fonction $e^{-|x|}$ décroît très vite à l'infini, mais elle n'est pas différentiable en 0. Mieux qu'elle, l'*exponentielle gaussienne* :

$$f(x) := e^{-x^2}$$

appartient à l'espace de Schwartz, puisqu'on vérifie par récurrence que pour tout entier $\ell \geq 0$, il existe un polynôme $P_\ell(x)$ de degré $\leq \ell$ tel que :

$$\frac{d^\ell}{dx^\ell} (e^{-x^2}) = P_\ell(x) e^{-x^2},$$

et ceci montre immédiatement (micro-yoga mental) que $e^{-x^2} \in \mathcal{S}$.

Cette gaussienne joue un rôle vraiment central dans la théorie de la transformation de Fourier, et aussi en probabilités et en physique.

De même, pour tout réel $a > 0$, la fonction $e^{-a x^2}$ appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et dans quelques instants, nous allons normaliser la gaussienne en choisissant $a = \pi$:

$$e^{-\pi x^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Exemple 4.4. Une autre classe importante de fonctions appartenant à l'espace de Schwartz est constituée des fonctions lisses à support compact :

$$\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Définition 4.5. La *transformée de Fourier* d'une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est la fonction définie par :

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

Quelques propriétés initiales simples de la transformation de Fourier peuvent être rassemblées dans un premier énoncé élémentaire. Pour abrégé, nous utilisons la notation :

$$f(x) \longmapsto \widehat{f}(\xi)$$

pour signifier que \widehat{f} est la transformée de Fourier de f .

Proposition 4.6. [Propriétés élémentaires] Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz des fonctions \mathcal{C}^∞ qui décroissent rapidement à l'infini sur \mathbb{R} , alors on a :

- (i) $f(x+h) \longmapsto \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi h\xi}$ pour tout $h \in \mathbb{R}$;
- (ii) $f(x) e^{-2i\pi xh} \longmapsto \widehat{f}(\xi+h)$ pour tout $h \in \mathbb{R}$;
- (iii) $f(\delta x) \longmapsto \frac{1}{\delta} \widehat{f}\left(\frac{1}{\delta} \xi\right)$ pour tout $\delta > 0$;
- (iv) $f'(x) \longmapsto 2i\pi \xi \widehat{f}(\xi)$;
- (v) $-2i\pi x f(x) \longmapsto \frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi)$.

Les deux dernières propriétés sont particulièrement significatives : à un facteur $2i\pi$ près, la transformation de Fourier échange la différentiation et la multiplication par la variable ambiante. Grâce à cela, toute équation aux dérivées partielles devient algébrique après transformation de Fourier !

Démonstration. Ces cinq relations découlent de transformations et de changements de variables algébriques élémentaires, en tenant compte du fait que la décroissance rapide à l'infini permet de négliger ce qui se passe en dehors d'un intervalle compact $[-R, R]$ assez large. \square

Pourquoi avons-nous introduit l'espace de Schwartz plutôt que d'en rester aux fonctions à croissance modérée ? Parce que l'espace de Schwartz est stable par transformation de Fourier, ce qui va nous permettre d'introduire et d'utiliser la transformée de Fourier inverse.

Théorème 4.7. Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

Démonstration. Il s'agit donc de montrer que pour tous entiers $k, \ell \geq 0$, l'expression :

$$\xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^\ell \widehat{f}(\xi)$$

est bornée sur \mathbb{R} . L'argument (élégant) est une application conjointe du fait que si $H \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, sa transformée de Fourier \widehat{H} est bornée :

$$\|\widehat{H}\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \leq \|H\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty,$$

alliée au fait que la transformation de Fourier échange différentiation et multiplication.

En effet, grâce aux propriétés élémentaires **(iv)** et **(v)** ci-dessus, notre expression à estimer s'avère être la transformée de Fourier de la fonction :

$$H_{k,\ell}(x) := \frac{1}{(2i\pi)^k} \left(\frac{d}{dx} \right)^k \left[(-2i\pi x)^\ell f(x) \right]$$

puisqu'on constate qu'on a effectivement (vérification visuelle) :

$$\widehat{H}_{k,\ell}(\xi) = \xi^k \left(\frac{d}{d\xi} \right)^\ell \widehat{f}(\xi).$$

En appliquant à cette fonction le contrôle de la norme $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ par la norme $L^1(\mathbb{R})$, on obtient formellement :

$$\begin{aligned} \|\widehat{H}_{k,\ell}\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} &\leq \|H_{k,\ell}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &= (2\pi)^{\ell-k} \left\| \left(\frac{d}{dx} \right)^k [x^\ell f(x)] \right\|_{L^1(\mathbb{R})}, \end{aligned}$$

et il s'agit donc de vérifier que cette dernière norme L^1 est *finie*, ce qui va être le cas.

La formule de Leibniz pour la dérivée k -ème d'un produit de fonctions s'écrit ici, en oubliant volontairement la nature explicite des constantes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \right)^k [x^\ell f(x)] &= \sum_{k_1+k_2=k} \frac{k!}{k_1! k_2!} (x^\ell)^{(k_1)}(x) f^{(k_2)}(x) \\ &= \sum_{k' \leq \ell, \ell' \leq k} x^{k'} f^{(\ell')}(x) \text{ constante}_{k',\ell'}, \end{aligned}$$

et donc en revenant à l'inégalité laissée plus haut, et en introduisant une constante supérieure à toutes celles qui apparaissent :

$$\|\widehat{H}_{k,\ell}\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \leq \text{constante} \sum_{k' \leq \ell, \ell' \leq k} \|x^{k'} f^{(\ell')}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Or on a déjà vu que toutes les normes L^1 , finies en nombre, qui apparaissent ici, sont $< \infty$, d'où la conclusion visée. \square

Maintenant, la démonstration (classique) de la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi,$$

valable pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, que nous allons conduire, est basée sur une étude soignée des gaussiennes e^{-ax^2} , qui, comme nous l'avons vu, appartient à notre bon espace de Schwartz lorsque $a > 0$. *Il se trouve que ces gaussiennes sont en quelque sorte des points fixes de la transformée de Fourier et que simultanément aussi, elles peuvent servir comme noyaux régularisants approximant l'unité.*

Commençons par considérer le cas $a = \pi$, eu égard à la splendide formule classique :

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx,$$

qui — comme tout mathématicien doit absolument le savoir jusqu'à son assomption au paradis que Cantor a créé pour lui —, se démontre en prenant le carré et en passant aux coordonnées polaires :

$$\begin{aligned}
 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right)^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)} dx dy \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-\pi r^2} r dr d\theta \\
 &= \int_0^{\infty} 2\pi e^{-\pi r^2} r dr \\
 &= \left[-e^{-\pi r^2} \right]_0^{\infty} \\
 &= 1,
 \end{aligned}$$

le miracle étant que $2\pi r e^{-\pi r^2}$ admet une primitive élémentaire évidente, *bien qu'aucune primitive de la fonction de départ $e^{-\pi x^2}$ n'existe au moyen de fonctions élémentaires connues.*

La propriété fondamentale du noyau de Gauss qui nous intéresse, et qui est conséquence de ce dernier calcul, est donc un résultat qui mérite d'être particulièrement souligné.

Théorème 4.8. Si $f(x) = e^{-\pi x^2}$, alors $\widehat{f}(\xi) = f(\xi)$:

$e^{-\pi x^2}$ est égale à sa propre transformée de Fourier !

Démonstration. Donnons un autre nom à cette transformée de Fourier :

$$F(\xi) := \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-\pi x^2}}_{f(x)} e^{-2i\pi x\xi} dx,$$

et observons que $F(0) = 1$, grâce au remarquable calcul en coordonnées polaires ci-dessus.

Une différentiation de cette intégrale par rapport à ξ — qui n'est autre que la propriété élémentaire (v) ci-dessus — donne :

$$\begin{aligned}
 F'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f(x) (-2i\pi x)}_{= i f'(x)} e^{-2i\pi x\xi} dx \\
 &= i \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.
 \end{aligned}$$

Mais alors un retour vers la propriété élémentaire (iv) ci-dessus — obtenue par simple intégration par parties — donne instantanément :

$$\begin{aligned}
 F'(\xi) &= i (2i\pi \xi) \widehat{f}(\xi) \\
 &= -2\pi \xi F(\xi).
 \end{aligned}$$

Cette équation différentielle ordinaire s'intègre aisément :

$$F(\xi) = \text{constante } e^{-\pi \xi^2},$$

et la constante vaut 1, puisque nous venons de dire que $F(0) = 1$! □

Ensuite, la propriété de covariance formelle de la transformée de Fourier à travers les dilatations — propriété élémentaire **(iii)** ci-dessus —, donne (exercice de vérification laissé au lecteur-étudiant) :

Théorème 4.9. *La transformée de Fourier de la gaussienne générale :*

$$K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}},$$

où $\delta > 0$ est un réel quelconque, est encore une gaussienne dans laquelle le $\frac{1}{\delta}$ dans l'exposant se transforme en un δ :

$$\begin{aligned} \widehat{K}_\delta(\xi) &= e^{-\pi\delta\xi^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\delta}} K_{\frac{1}{\delta}}(\xi). \end{aligned} \quad \square$$

Il est alors naturel de donner le nom suivant, avec l'initiale G de Gauss, à l'exponentielle dans laquelle apparaît δ plutôt que $\frac{1}{\delta}$:

$$G_\delta(\xi) := e^{-\pi\delta\xi^2},$$

et l'on a alors en termes de ces notations, les relations agréables :

$$\widehat{K}_\delta(\xi) = G_\delta(\xi) \quad \text{et} \quad \widehat{G}_\delta(\xi) = K_\delta(\xi).$$

Maintenant, effectuons une pause sur les considérations techniques afin de méditer géométriquement sur l'arrondi délectable des formes courbes de ces gaussiennes.

Lorsque δ tend vers 0, il est clair que la fonction $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}}$ fait un pic très élevé resserré autour de l'axe vertical $\{x = 0\}$ comme le geyser du Lac Léman à Genève, tandis qu'au contraire, sa transformée de Fourier $\widehat{K}_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$ devient de plus en plus étalée à hauteur 1 au-dessus de l'axe horizontal des ξ , comme une méduse flottant sur une mer d'huile. Ceci montre sur cet exemple particulier un phénomène général d'après lequel *une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent jamais être toutes deux simultanément concentrées (localisées) autour de l'origine*. Ce phénomène est en relation avec le célèbre *principe de Heisenberg*, issu de la Mécanique Quantique, dont nous donnerons une version ultérieurement.

Revenons alors à notre famille de noyaux-inverses de Gauss :

$$(K_\delta(x))_{\delta>0} = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}} \right)_{\delta>0}$$

indités par un paramètre continu strictement positif. Grâce au calcul qui précède et à des vérifications élémentaires, on se convainc que cette famille satisfait toutes les conditions que doit satisfaire une approximation de l'unité dans $L^1(\mathbb{R})$, à savoir :

- (i) $K_\delta > 0$ sur \mathbb{R} ;
- (ii) $1 = \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx$;
- (iii) pour tout $\eta > 0$, on a :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} K_\delta(x) dx.$$

Démonstration. Le seul point qui doit être éclairci est que, pour tout $\eta > 0$, on a :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \eta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}} dx.$$

Or un simple changement de variable donne — lorsque $\eta = 0$, on trouve (ii) — :

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \eta} \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}} dx &= 2 \int_{\eta}^{\infty} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}} \frac{dx}{\sqrt{\delta}} \\ \text{[Poser } x &=: y\sqrt{\delta}] &= 2 \int_{\frac{\eta}{\sqrt{\delta}}}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy, \end{aligned}$$

et la convergence (déjà vue !) de l'intégrale $2 \int_0^{\infty} e^{-\pi y^2} dy = 1$ implique par définition des intégrales généralisées que l'on doit avoir — noter que $M := \frac{\eta}{\sqrt{\delta}}$ tend ici maintenant vers ∞ — :

$$0 = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^{\infty} e^{-\pi y^2} dy,$$

ce qu'on peut d'ailleurs voir directement en utilisant par exemple la majoration :

$$(0 \leq) \quad e^{-\pi y^2} \leq e^{-\pi y} \quad (\forall y \geq 1),$$

d'où pour $M \geq 1$, en particulier lorsque $M \rightarrow \infty$:

$$(0 \leq) \quad \int_M^{\infty} e^{-\pi y^2} dy \leq \int_M^{\infty} e^{-\pi y} dy = \frac{e^{-\pi M}}{\pi} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0. \quad \square$$

Le lecteur-étudiant vérifiera qu'une application d'un théorème déjà vu en cours donne un théorème de convergence de la famille des convolées :

$$f * K_{\delta}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) K_{\delta}(t) dt.$$

Théorème 4.10. *Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz à décroissance rapide, on a la convergence uniforme :*

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \|f * K_{\delta} - f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}. \quad \square$$

Démonstration. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé, et soit $\eta > 0$ petit. Comme $1 = \int K_{\delta}$, on peut absorber la soustraction suivante dans l'intégrale de convolution :

$$\begin{aligned} f * K_{\delta}(x) - f(x) &= f * K_{\delta}(x) - f(x) \cdot 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-t) - f(x)) K_{\delta}(t) dt \\ &= \int_{|t| \leq \eta} + \int_{|t| \geq \eta}, \end{aligned}$$

puis la découper.

Comme $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ décroît très vite à l'infini, l'Exercice 8 garantit son uniforme continuité, à savoir, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$|y - x| \leq \eta(\varepsilon) \implies |f(y) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

De plus, toujours parce que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a la finitude $\|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} < \infty$, et ainsi avec $\eta(\varepsilon)$, on peut majorer :

$$\begin{aligned} |f * K_\delta(x) - f(x)| &\leq \int_{|t| \leq \eta(\varepsilon)} |f(x-t) - f(x)| K_\delta(t) dt + \int_{|t| \geq \eta(\varepsilon)} |f(x-t) - f(x)| K_\delta(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{|t| \leq \eta(\varepsilon)} K_\delta(t) dt + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \int_{|t| \geq \eta(\varepsilon)} K_\delta(t) dt \\ &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) dt + \text{même chose} \\ &= \varepsilon \cdot 1 + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \underbrace{\int_{|t| \geq \eta(\varepsilon)} K_\delta(t) dt}_{\xrightarrow{\delta \rightarrow 0}} \end{aligned}$$

et puisque ce dernier terme tend vers 0 lorsque $\delta \xrightarrow{>} 0$ grâce à une propriété fondamentale de K_δ , on peut trouver $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que tout ceci soit $\leq \varepsilon + \varepsilon$, pour tout $0 < \delta \leq \delta(\varepsilon)$, ce qui montre bien la convergence uniforme sur \mathbb{R} de $f * K_\delta$ vers f . \square

En résumé, donc, les noyaux de Gauss jouissent simultanément de deux qualités remarquables :

- ils sont formellement invariants par transformation de Fourier ;
- ils peuvent servir à l'approximation par convolution ;

et ces qualités vont s'avérer exceptionnellement utiles pour prolonger la transformation de Fourier à des espaces de fonctions beaucoup moins régulières, par exemple à $L^2(\mathbb{R})$.

5. Formule d'inversion de Fourier dans l'espace de Schwartz

Le résultat qui suit est parfois appelé aussi *formule de multiplication*, et ce n'est qu'un avatar du théorème de Fubini.

Proposition 5.1. [Formule d'échange] *Étant donné deux fonctions appartenant à l'espace de Schwartz $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a toujours :*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy.$$

Démonstration. Pour établir cette formule, effectuons quelques rappels sur les intégrales doubles de fonctions à croissance modérée de deux variables $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, à savoir les fonctions continues $F(x, y)$ satisfaisant une estimée à l'infini du type :

$$|F(x, y)| \leq \frac{\text{constante}}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

Visiblement, pour tout x fixé, la fonction $y \mapsto F(x, y)$ est à décroissance modérée, et par symétrie aussi, pour tout y fixé, $x \mapsto F(x, y)$ l'est aussi. De plus, la fonction intégrée par rapport y :

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy$$

est à croissance modérée en x (exercice mental), et il en va de même pour :

$$F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx.$$

Enfin et finalement, le théorème de Fubini (dans le cadre simple de l'intégrale de Cauchy pour les fonctions continues qui date d'avant 1800 !) donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) dy.$$

Ces rappels élémentaires étant faits, appliquons ces formules à la fonction :

$$F(x, y) := f(x) g(y) e^{-2i\pi xy},$$

qui, bien entendu, est à décroissance rapide, donc modérée, ce qui, avec nos notations, donne (capture visuelle) :

$$F_1(x) = f(x) \widehat{g}(x) \quad \text{et} \quad F_2(y) = \widehat{f}(y) g(y),$$

et en définitive, la formule de Fubini écrite il y a un instant devient :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y) dy.$$

ce qui est l'assertion de la proposition. □

Le résultat tant attendu qui tombe enfin comme un fruit mûr est le :

Théorème 5.2. [Formule d'inversion de Fourier] Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz des fonctions à décroissance rapide à l'infini, de telle sorte que sa transformée de Fourier (noter le signe $-$) :

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$$

existe et appartient aussi à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors on retrouve la fonction f en effectuant la transformée de Fourier inverse sur \widehat{f} (noter le signe $+$) :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi\xi x} d\xi.$$

Démonstration. Une application de la formule d'échange :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \widehat{g}(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) g(\xi) d\xi$$

à notre fonction f et à la fonction gaussienne :

$$g(\xi) := G_\delta(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}$$

donne, puisqu'on connaît bien sa transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi.$$

Mais on peut voir astucieusement l'intégrale à gauche comme étant égale à :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) K_\delta(0 - x) dx = f * K_\delta(0)$$

puisque le noyau de Gauss est pair ! Maintenant, lorsque $\delta > 0$ tend vers 0, on connaît la limite de cette convolée :

$$f * K_\delta(0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(0),$$

et en revenant au membre de droite de l'équation laissée en chemin plus haut, on obtient que :

$$\begin{aligned} f(0) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) G_\delta(\xi) d\xi \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{-\pi\delta\xi^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^0 d\xi. \end{aligned}$$

[Interversion justifiée, car $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$]

C'est donc que la formule d'inversion de Fourier que nous cherchons à établir est au moins vraie en $x = 0$!

Ensuite, le cas général d'un point arbitraire $x \in \mathbb{R}$ va avoir l'élégance de se déduire sans effort de ce cas $x = 0$ grâce à une simple translation.

Si nous posons en effet :

$$F(y) := f(y + x),$$

de telle sorte que :

$$\widehat{F}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y + x) e^{-2i\pi y\xi} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-2i\pi(z-x)\xi} dz = \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x},$$

ce que nous venons d'obtenir s'écrit alors :

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi,$$

ce qui conclut cette démonstration limpide, et sublime ! □

Comme ce théorème le fait voir, l'inverse de la transformée de Fourier coïncide avec elle-même, à un changement près de signe dans l'exponentielle complexe de l'intégrande. Il convient de préciser cela.

On définit deux applications de transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

au moyen des intégrales en question :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \quad \text{et} \quad \overline{\mathcal{F}}(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{+2i\pi\xi x} d\xi.$$

De la sorte, le théorème que nous venons d'obtenir énonce que :

$$\overline{\mathcal{F}} \circ \mathcal{F} = \text{Identité} = \mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}},$$

la deuxième égalité découlant de la première grâce à l'observation déjà mentionnée :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \overline{\mathcal{F}}(f)(-\xi).$$

Nous pouvons aussi déduire du théorème d'inversion une information très satisfaisante que nous généraliserons ensuite à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Corollaire 5.3. *La transformation de Fourier est une application bijective de l'espace de Schwartz dans lui-même.* \square

6. Formule de Plancherel dans l'espace de Schwartz

Un autre résultat-clé de la transformation de Fourier, notamment en vue d'applications aux équations aux dérivées partielles, c'est qu'elle échange la convolution avec les produits ponctuels, un résultat qui a déjà été vu dans le contexte des séries de Fourier de fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 6.1. *La convolée entre deux fonctions quelconques de l'espace de Schwartz $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient toujours à l'espace de Schwartz :*

$$f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

et sa transformée de Fourier est le produit ponctuel des transformées de Fourier de ses membres :

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi).$$

Démonstration. Tout d'abord, les démonstrations que nous avons conduites dans le chapitre sur la convolution restent valables quand on travaille dans l'espace de Schwartz au lieu de supposer qu'une des deux fonctions f ou g est à support compact (en effet, puisque toutes les intégrandes considérées décroissent très vite à l'infini, les interversions entre différentiation et intégration sont justifiables avec des raisonnements usuels).

En particulier, la convolution entre deux fonctions $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et commutative :

$$f * g = g * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}).$$

De plus, les opérations de dérivation se transfèrent sur l'un ou l'autre membre du produit :

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^\ell [f * g] = f^{(\ell)} * g = f * g^{(\ell)}.$$

Il s'agit maintenant d'établir que, pour tous entiers $k, \ell \geq 0$, les quantités :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \left(\frac{d}{dx}\right)^\ell [f * g](x) \right| = \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| x^k \underbrace{f^{(\ell)}}_{\substack{\text{encore} \\ \text{dans } \mathcal{S}}} * g(x) \right|$$

sont $< \infty$. Or puisque $f^{(\ell)} \in \mathcal{S}$, si on démontre cela pour $\ell = 0$, le cas général s'en déduira sans effort, pour une raison purement logique.

Soit donc à estimer la quantité intégrale :

$$x^k [f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x - y) g(y) dy.$$

Lemme 6.2. *Il existe deux constantes positives telles que :*

$$\begin{aligned} |x^k f(x - y)| &\leq \text{constante} (1 + |y|)^k, \\ |g(y)| &\leq \frac{\text{constante}}{(1 + |y|)^{k+2}}. \end{aligned}$$

Démonstration. En effet, en appliquant la formule du binôme, on atteint la première inégalité :

$$\begin{aligned} |(x-y+y)^k f(x-y)| &\leq \sum_{j=0}^k \underbrace{|x-y|^j |f(x-y)|}_{\leq \text{constante, car } f \in \mathcal{S}!} |y|^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &\leq \text{constante} \sum_{j=0}^k |y|^{k-j} \frac{k!}{j!(k-j)!} \\ &= \text{constante} (1+|y|)^k. \end{aligned}$$

La seconde inégalité provient directement (exercice mental) du fait que $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. \square

Ainsi, il est maintenant aisé de majorer notre quantité intégrale par :

$$|x^k [f * g](x)| \leq \text{constante} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+|y|)^2} < \infty,$$

ce qui conclut la démonstration détaillée du fait que :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) * \mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Ensuite, toujours avec $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, introduisons la fonction de deux variables :

$$F(x, y) := f(x-y) g(y) e^{-2i\pi x\xi}.$$

Grâce au fait que f et g décroissent toutes deux rapidement vers zéro à l'infini, on a :

$$|F(x, y)| \leq \text{constante} \frac{1}{1+(x-y)^2} \frac{1}{1+y^2},$$

cette fonction majorante étant d'ailleurs intégrable sur \mathbb{R}^2 (en posant $z := x-y$) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+(x-y)^2} \frac{dy}{1+y^2} < \infty.$$

Donc si l'on pose :

$$F_1(x) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dy = (f * g)(x) e^{-2i\pi x\xi},$$

et si l'on pose aussi :

$$F_2(y) := \int_{-\infty}^{\infty} F(x, y) dx = g(y) e^{-2i\pi y\xi} \widehat{f}(\xi),$$

le théorème de Fubini s'applique :

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(x) dx \stackrel{\text{Fubini}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y) dy = \widehat{g}(\xi) \widehat{f}(\xi),$$

ce qui nous offre la relation désirée sur un plateau doré. \square

L'espace de Schwartz peut être muni du produit scalaire hermitien :

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})} := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

auquel est associée la norme :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R})} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'analogie de la formule de Plancherel pour la série de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$ de carré intégrable sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, à savoir la formule :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 \quad \left(\widehat{f}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right)$$

est le résultat suivant dans la théorie de la transformée de Fourier sur \mathbb{R} , très important car très souvent utilisé.

Théorème 6.3. [Formule de Plancherel] Si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Pour une telle $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ quelconque, on introduit la nouvelle fonction :

$$f^b(x) := \overline{f(-x)}.$$

Un calcul simple permet d'exprimer sa transformée de Fourier au moyen de celle de f :

$$\begin{aligned} \widehat{f^b}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^b(x) e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(y)} e^{+2i\pi y\xi} dy \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi y\xi} dy} \\ &= \overline{\widehat{f}(\xi)}. \end{aligned}$$

Maintenant, introduisons la convolée :

$$h := f^b * f,$$

de telle sorte que sa transformée de Fourier vaut, grâce au théorème qui précède :

$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{(f^b * f)}(\xi) = \widehat{f^b}(\xi) \widehat{f}(\xi) = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Ensuite, on a d'un premier côté :

$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^b(0-y) f(y) dy = (\|f\|_{L^2})^2,$$

tandis que d'un second côté, une application de la formule d'inversion de Fourier à h en $x = 0$ poursuit le mouvement :

$$(\|f\|_{L^2})^2 = h(0) \stackrel{\text{inversion}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi) e^0 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 = \left(\|\widehat{f}\|_{L^2} \right)^2,$$

qui nous fait aboutir à l'achèvement de la preuve. \square

Théorème 6.4. [Formule de Parseval] Si $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, alors :

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}.$$

Démonstration. Appliquer le théorème précédent à $f := f + tg$ avec $t \in \mathbb{R}$, simplifier, et faire tendre $t \rightarrow 0$ (exercice). \square

7. Formule sommatoire de Poisson

La définition de la transformation de Fourier est motivée par le désir de trouver une version continue de la théorie des séries de Fourier, applicable aux fonctions définies sur la droite \mathbb{R} tout entière. Dans cette section, nous montrons qu'il existe un lien remarquable entre l'analyse des fonctions définies sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} et celles qui sont définies sur \mathbb{R} .

En effet, étant donné une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide sur \mathbb{R} , on peut construire une nouvelle fonction sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} par la recette :

$$F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n).$$

Bien entendu, comme f est à décroissance rapide, cette série converge absolument et uniformément sur tout sous-ensemble compact de \mathbb{R} , donc F_1 est continue. De plus, il est visiblement clair qu'elle est 1-périodique :

$$F_1(x+1) = F_1(x),$$

puisque le décalage $n \rightarrow n+1$ se noie dans les limbes infinies de la sommation, à gauche comme à droite.

Définition 7.1. La fonction $F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$ est appelée la 1-périodisation de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Mais il y a une *autre* manière de parvenir à une fonction *périodique* à partir de f , cette fois *via* l'Analyse de Fourier. Elle consiste à partir de la formule d'inversion satisfaite par toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi x} d\xi,$$

et à la traduire dans le langage discret, en appliquant les principes exposés au début de ce chapitre, ce qui fournit :

$$F_2(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}.$$

Puisque $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, cette deuxième série converge elle aussi absolument et uniformément, donc F_2 est aussi continue. Qui plus est, F_2 est aussi 1-périodique, puisque chaque exponentielle $x \mapsto e^{2i\pi n x}$ l'est !

Le théorème fondamental, c'est que ces deux approches, qui produisent F_1 et F_2 , conduisent en fait à la *même* fonction !

Théorème 7.2. [Formule sommatoire de Poisson] Pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x},$$

quel que soit $x \in \mathbb{R}$. En particulier, en $x = 0$, on a :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n).$$

En d'autres termes, la première formule générale, relue comme :

$$\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)}_{\text{périodisation } F_1 \text{ de } f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{F}_1(n) e^{2i\pi nx} \quad [F_1 \text{ est égale à sa série de Fourier}]$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx},$$

exprime que les coefficients de Fourier $\widehat{F}_1(n)$ de la périodisation F_1 de f coïncident avec les valeurs $\widehat{f}(n)$ aux entiers de la transformée de Fourier \widehat{f} de f .

Démonstration. Il suffit de faire voir que les deux membres de l'équation à établir :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(n) e^{2i\pi nx},$$

qui sont tous deux des fonctions continues, ont les mêmes coefficients de Fourier, puisque ces deux fonctions définies sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} seront alors égales grâce à un théorème élémentaire d'unicité vu au début de la théorie.

Clairement, le m -ème coefficient de Fourier du membre de droite est $\widehat{f}(m)$. Pour ce qui concerne le membre de gauche, on calcule très aisément :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \right) e^{-2i\pi mx} dx &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-2i\pi mx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-2i\pi my} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2i\pi my} dy \\ &= \widehat{f}(m), \end{aligned}$$

l'interversion de la sommation et de l'intégration étant manifestement permise, puisque f est à décroissance rapide. \square

On observe que ce théorème s'étend sans difficulté au cas où les deux fonctions f et \widehat{f} sont à décroissance modérée, puisque l'interversion est alors encore autorisée.

De plus, l'opération de périodisation reste utile et importante y compris lorsque la formule de Poisson ne s'applique pas. Par exemple, considérons la fonction élémentaire $f(x) = \frac{1}{x}$, pour $x \neq 0$. Un résultat très classique détaillé dans l'Exercice 6, calcule la limite des sommes symétriques :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{x+m} = \pi \cot(\pi x).$$

Autre exemple, avec la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2}$, on obtient dans le même exercice :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2},$$

pour $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ non entier.

Voici encore une application de la formule sommatoire de Poisson. Pour $x > 0$ réel, définissons une fonction $\psi(x)$ par la série doublement infinie :

$$\psi(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x},$$

qui converge clairement. Un fait crucial est que cette fonction spéciale, cas particulier des fonctions dites *thêta* de Jacobi, satisfait une belle équation fonctionnelle.

Théorème 7.3. *Pour tout $x > 0$, on a $x^{-1/2} \psi(\frac{1}{x}) = \psi(x)$, c'est-à-dire :*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 \frac{1}{x}}.$$

Démonstration. Rappelons que le Théorème 4.8 a fait voir que $e^{-\pi x^2}$ est égale à sa transformée de Fourier :

$$\widehat{e^{-\pi x^2}}(\xi) = e^{-\pi \xi^2}.$$

Ensuite, la Proposition 4.6 (iii) élémentaire montre que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := e^{-\pi a x^2}$, où $a > 0$ est une constante, est $\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\pi \xi^2 \frac{1}{a}}$.

Alors en renotant cette constante $a := x$, l'identité fonctionnelle à justifier est une application directe de la formule sommatoire de Poisson. \square

8. Principe d'incertitude de Heisenberg

L'idée mathématique générale du principe peut être formulée comme une relation entre une fonction et sa transformée de Fourier. La loi générale sous-jacente dit intuitivement qu'une fonction et sa transformée de Fourier ne peuvent pas être simultanément concentrées, ou localisées, dans un même intervalle. Plus précisément, si la masse d'une fonction f est prépondérante dans un intervalle de longueur L , alors la majeure partie de la masse de sa transformée de Fourier \widehat{f} ne peut essentiellement pas se trouver localisée dans un intervalle de longueur inférieure à $\frac{1}{L}$.

Théorème 8.1. [Inégalité de Heisenberg] *Soit une fonction $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ à décroissance rapide qui appartient à l'espace de Schwartz et qui satisfait la condition de normalisation :*

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx.$$

Alors :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16 \pi^2},$$

avec égalité lorsque et seulement lorsque :

$$\psi(x) = a e^{-b x^2},$$

avec $b > 0$ et avec $a \in \mathbb{C}$ de module $|a|^2 = \sqrt{2b/\pi}$.

En fait, on a même généralement pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\xi_0 \in \mathbb{R}$ arbitraires :

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x - x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi - \xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{1}{16\pi^2},$$

cette inégalité se déduisant du théorème en remplaçant :

$$\psi(x) \longrightarrow e^{-2i\pi x \xi_0} \psi(x + x_0),$$

et en effectuant un changement de variables (exercice).

Démonstration. Partant de $1 = \int |\psi|^2$ et en rappelant que ψ et ψ' sont toutes deux à décroissance rapide, une intégration par parties (justifiée, donc, et sans aucun terme au bord) donne :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \left[x \psi(x) \overline{\psi(x)} \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= 0 - 0 - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} \left(\psi(x) \overline{\psi(x)} \right) dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \left(x \psi'(x) \overline{\psi(x)} + x \overline{\psi'(x)} \psi(x) \right) dx. \end{aligned}$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet de minorer :

$$\begin{aligned} 1 &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi(x)| |\psi'(x)| dx \\ &\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Enfin, la propriété élémentaire **(iv)** de la Proposition 4.6 :

$$\widehat{\psi}'(\xi) = 2i\pi \xi \widehat{\psi}(\xi),$$

re-vérifiable par simple intégration par parties :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x) e^{-2i\pi x \xi} dx = -(-2i\pi \xi) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-2i\pi x \xi} dx,$$

et l'identité de Plancherel :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{\psi}'(\xi)|^2 d\xi = 4\pi^2 \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi$$

concluent l'inégalité après élévation au carré.

Le cas d'égalité ne peut se produire que s'il y a égalité dans l'application de Cauchy-Schwarz, et l'on sait que cela a lieu lorsque et seulement lorsque les deux fonctions en jeu sont multiples l'une de l'autre :

$$\psi'(x) = \text{constante } x \psi(x).$$

Pour que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, la constante doit être < 0 , donc $\psi(x) = a e^{-bx^2}$ avec $b > 0$, et la normalisation :

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |a|^2 e^{-2bx^2} dx \\ \text{[Poser } x &=: y \sqrt{\pi/2b}] &= |a|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi y^2} dy}_{=1} \sqrt{\frac{\pi}{2b}}, \end{aligned}$$

impose $|a|^2 = \sqrt{2b/\pi}$, comme annoncé. \square

9. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et lemme de Riemann-Lebesgue

Dorénavant, on travaillera en dimension finie quelconque $d \geq 1$ sur \mathbb{R}^d muni des coordonnées canoniques $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, avec des fonctions $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ à valeurs complexes. Si $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_d)$ est un autre vecteur de \mathbb{R}^d , on notera :

$$x \cdot \xi := x_1 \xi_1 + \dots + x_d \xi_d$$

le produit scalaire euclidien canonique de x avec ξ , et on notera aussi, avec de simples barres verticales la norme euclidiennes associée :

$$|x| := (x_1^2 + \dots + x_d^2)^{\frac{1}{2}} = (x \cdot x)^{\frac{1}{2}},$$

afin de ne pas empiéter notationnellement sur les normes $\|\cdot\|_{L^p}$, $\|\cdot\|_{L^\infty}$, $\|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}$ des espaces fonctionnels.

Les sections suivantes vont maintenant transférer la théorie riemannienne de la transformée de Fourier au cadre plus englobant développé par Borel et Lebesgue.

Lemme 9.1. [Riemann-Lebesgue dans L^1] *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier \widehat{f} de f définie comme étant la fonction de $\xi \in \mathbb{R}^d$:*

$$\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$$

a un sens et constitue une fonction continue et bornée :

$$\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|f\|_{L^1}$$

de la variable ξ qui tend de plus vers zéro lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$:

$$0 = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{f}(\xi).$$

Démonstration. L'existence de \widehat{f} est évidente, puisque, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, la majoration simple du module du facteur exponentiel $e^{-2i\pi x \cdot \xi}$ par 1 montre que :

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx < \infty,$$

donc l'intégrale définissant $\widehat{f}(\xi)$ converge, et ceci montre aussi en bonus l'inégalité :

$$\max_{\xi \in \mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}.$$

assurant que \widehat{f} est bornée. Ensuite, la fonction $\xi \mapsto e^{-ix \cdot \xi}$ étant continue, le théorème classique concernant les intégrales à paramètres assure que \widehat{f} est continue.

Il reste à établir que $\widehat{f}(\xi)$ tend vers zéro à l'infini. Comme nous l'avons déjà fréquemment fait dans ce cours, nous allons d'abord établir que tel est le cas lorsque $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ est indéfiniment différentiable à support compact, et ensuite vérifier que la densité de \mathcal{C}_c^∞ dans L^1 permet d'atteindre sans difficulté le cas général où f n'est qu'intégrable.

Si donc $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$, avec $\text{supp } f \subset [-R, R]^d$ pour $R \gg 1$ assez grand, en effectuant d intégrations par parties relativement à chaque variable, il vient par le calcul :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{[-R, R]^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \int_{-R}^R e^{-2i\pi x_1 \xi_1} dx_1 \cdots \int_{-R}^R e^{-2i\pi x_d \xi_d} f(x_1, \dots, x_d) dx_d \\ &= \int_{-R}^R e^{-2i\pi x_1 \xi_1} dx_1 \cdots \left(\left[\frac{e^{-2i\pi x_d \xi_d}}{-2i\pi \xi_d} f(x_1, \dots, x_d) \right]_{-R}^R \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2i\pi \xi_d} \int_{-R}^R e^{-2i\pi x_d \xi_d} \frac{\partial f}{\partial x_d}(x_1, \dots, x_d) dx_d \right) \\ &= \frac{1}{2i\pi \xi_1} \cdots \frac{1}{2i\pi \xi_d} \int_{[-R, R]^d} \frac{\partial^d f}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx, \end{aligned}$$

donc l'existence supposée de $\frac{\partial^d f}{\partial x_1 \cdots \partial x_d} \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nous permet de majorer simplement l'intégrale restante par :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &\leq \frac{1}{(2\pi)^d} \frac{1}{\xi_1 \cdots \xi_d} \underbrace{(2R)^d \max_{x \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial^d f}{\partial x_1 \cdots \partial x_d}(x) \right|}_{\text{constante} < \infty} \\ &\xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Examinons à présent le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Par densité de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ dans $L^1(\mathbb{R}^d)$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d) \quad \|g - f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons donc un tel $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit et prenons une telle fonction g à laquelle le raisonnement précédent s'applique bien sûr pour donner :

$$0 = \lim_{|\xi| \rightarrow \infty} \widehat{g}(\xi),$$

ce qui revient plus précisément à dire que :

$$\exists \Xi = \Xi(\varepsilon) \gg 1 \quad \left(|\xi| \geq \Xi \implies |\widehat{g}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} \right).$$

Ainsi, pour tous ces $\xi \in \mathbb{R}^d$ avec $|\xi| \geq \Xi$, en faisant apparaître sous le chapeau un terme $-g + g$ qui s'additionne à 0, on peut majorer :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi)| &\leq |\widehat{g}(\xi)| + |\widehat{g - f}(\xi)| \\ &\leq |\widehat{g}(\xi)| + \|g - f\|_{L^1} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui achève d'établir le Lemme dit « de Riemann-Lebesgue », dont le contenu est entièrement analogue à ce que nous avons vu, en d'autres circonstances, pour les séries de Fourier de fonctions sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. \square

Dans la suite, on notera occasionnellement :

$$\mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow \infty}^0(\mathbb{R}^d)$$

l'espace des fonctions continues sur \mathbb{R}^d qui tendent vers zéro lorsque la norme de l'argument tend vers $+\infty$. Pour des raisons de convenance notationnelle et afin de se prémunir contre l'inélégance ou l'illisibilité de trop grands chapeaux $\widehat{\cdots\cdots}$, on notera non pas toujours $\widehat{\cdot}$ la transformation de Fourier, mais parfois :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow \infty}^0(\mathbb{R}^d) \\ f \longmapsto \mathcal{F}(f) \equiv \widehat{f}. \end{cases}$$

Corollaire 9.2. *La transformation de Fourier ainsi définie :*

$$\mathcal{F} : \left(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^1} \right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow \infty}^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0} \right)$$

est une application linéaire continue. \square

Voici maintenant un exemple simple, classique, et inspirionnel. En dimension $d = 1$, la transformée de Fourier de la densité de Poisson $x \mapsto \frac{1}{2} e^{-|x|}$ — une mesure de probabilité ! — se calcule de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{-2i\pi x\xi} dx &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 e^{+x} e^{-2i\pi x\xi} dx + \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-y} e^{2i\pi y\xi} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x} e^{-2i\pi x\xi} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{e^{y(-1+2i\pi\xi)}}{-1+2i\pi\xi} \right]_0^{\infty} + \frac{1}{2} \left[\frac{e^{x(-1-2i\pi\xi)}}{-1-2i\pi\xi} \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1/2}{1-2i\pi\xi} + \frac{1/2}{1+2i\pi\xi} \\ &= \frac{1}{1+4\pi^2\xi^2}. \end{aligned}$$

10. Translation, modulation, homothétie

Le but de cette courte section est d'étudier, sous forme élémentaire et plaisante, comment se comporte la transformation de Fourier sous l'effet de certaines opérations naturelles.

Si f est une fonction mesurable à valeurs complexes définie sur \mathbb{R}^d , on note :

- \bar{f} sa *conjuguée*, définie par $\bar{f}(x) := \overline{f(x)}$;
- f_σ sa *symétrisée*, définie par $f_\sigma(x) := f(-x)$;
- $\tau_a f$ sa *translatée* par un vecteur fixe quelconque $a \in \mathbb{R}^d$, définie par :

$$\tau_a f(x) := f(x - a).$$

On peut aussi introduire la *transformation de Fourier conjuguée* :

$$\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{2i\pi x \cdot \xi} dx,$$

dans laquelle la conjugaison porte (exclusivement) sur le facteur exponentiel, si l'on compare avec \mathcal{F} .

Proposition 10.1. *Pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\mathcal{F}(f_\sigma) = (\mathcal{F}(f))_\sigma, \quad \mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{(\mathcal{F}(f))_\sigma}, \quad \overline{\mathcal{F}(\bar{f})} = \overline{\mathcal{F}(f)}.$$

De plus, pour tout réel non nul fixé $\lambda \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$\mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) = \frac{1}{|\lambda|^d} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

Enfin, pour tout vecteur constant fixé $a \in \mathbb{R}^d$, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= e^{-2i\pi a \cdot \xi} \mathcal{F}(f)(\xi), \\ \mathcal{F}(e^{2i\pi a \cdot x} f(x))(\xi) &= \tau_a(\mathcal{F}(f))(\xi). \end{aligned}$$

Démonstration. En effectuant de très simples changements de variables et en conjuguant au besoin la formule définitionnelle :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx,$$

les trois premières formules s'obtiennent aisément.

Ensuite, pour un réel $\lambda > 0$, un calcul naturel donne :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f(\lambda x))(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx \\ \text{[Poser } y := \lambda x] &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y) e^{-2i\pi y \cdot \frac{\xi}{\lambda}} \frac{dy}{\lambda^d} \\ &= \frac{1}{\lambda^d} \mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

tandis que dans le cas $\lambda < 0$, il faut juste prendre garde à l'interversion des bornes d'intégration qui force la présence de $\frac{1}{|\lambda|^d}$.

Enfin, l'avant-dernière propriété se vérifie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\tau_a f)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x - a) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx \\ &= e^{-2i\pi a \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^d} f(x - a) e^{-2i\pi(x-a) \cdot \xi} dx \\ &= e^{-2i\pi a \cdot \xi} \mathcal{F}(f)(\xi), \end{aligned}$$

tandis que la dernière — verre de l'amitié — est laissée au lecteur. □

11. Transformation de Fourier d'un produit de convolution et formule d'échange

Cette nouvelle section courte démontre deux propriétés élémentaires qui ont déjà été vues en dimension $d = 1$ dans le cadre de l'intégration au sens de Riemann.

Proposition 11.1. [Transformation de Fourier d'un produit de convolution] *Pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a :*

$$\widehat{f_1 * f_2} = \widehat{f_1} \widehat{f_2}.$$

Démonstration. Puisque $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, nous avons déjà vu dans le chapitre sur la convolution que la convolée $f_1 * f_2$ appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec l'inégalité $\|f_1 * f_2\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^1} \|f_2\|_{L^1}$.

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, nous sommes tentés de décomposer :

$$\widehat{f_1 * f_2}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-t) f_2(t) dt \right) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx,$$

et nous prétendons que cette intégrale double itérée a un sens ; en effet, d'après le théorème de Fubini-Tonelli et grâce à l'invariance de la mesure de Lebesgue par translation, si l'on majore la valeur absolue de l'exponentielle bêtement par 1, l'intégrale double des valeurs absolues converge :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|f_1(x-t)| |f_2(t)| dt \right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(u)| du \int_{\mathbb{R}^d} |f_2(t)| dt = \|f_1\|_{L^1} \|f_2\|_{L^1} < \infty.$$

Notons au passage que nous venons de revoir ici que $\|f_1 * f_2\|_{L^1} \leq \|f_1\|_{L^1} \|f_2\|_{L^1}$ — tous les chemins mènent, et retournent, à Rome !

Nous pouvons donc appliquer le théorème de Fubini pour intervertir l'ordre de la double intégration dans l'expression de $\widehat{f_1 * f_2}$, ce qui nous donne ici en arrangeant convenablement les exponentielles :

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(x-t) f_2(t) e^{-2i\pi \xi \cdot (x-t)} dx \right) e^{-2i\pi \xi \cdot t} dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f_1(u) e^{-2i\pi \xi \cdot u} du \int_{\mathbb{R}^d} f_2(t) e^{-2i\pi \xi \cdot t} dt \\ &= \widehat{f_1}(\xi) \widehat{f_2}(\xi), \end{aligned}$$

comme voulu. □

Théorème 11.2. [Formule d'échange] *Pour toute paire de fonctions $f_1, f_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, on a la formule symétrique :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_1(u) \widehat{f_2}(u) du = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_1}(v) f_2(v) dv,$$

dans laquelle la transformée de Fourier porte, chaque fois seule, exclusivement sur l'un des deux facteurs.

Démonstration. En fait, cette relation est une conséquence immédiate du théorème de Fubini et ne mériterait pour cette raison presque pas de preuve. En effet, d'après le théorème

de Fubini-Tonelli, on a :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(u) f_2(v) e^{-2i\pi v \cdot u}| du dv = \int_{\mathbb{R}^d} |f_1(u)| du \int_{\mathbb{R}^d} |f_2(v)| dv = \|f_1\|_{L^1} \|f_2\|_{L^1} < \infty,$$

donc le théorème de Fubini permet d'intervertir librement l'ordre de l'intégration double :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f_1(u) \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_2(v) e^{-2i\pi v \cdot u} dv \right) du &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f_1(u) e^{-2i\pi v \cdot u} du \right) f_2(v) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_1(v) f_2(v) dv, \end{aligned}$$

ce qui n'est autre que la formule d'échange annoncée. \square

12. Noyaux de Gauss

Ensuite, une généralisation aisée de la dimension $d = 1$ est la suivante.

Proposition 12.1. *Les noyaux de Gauss :*

$$\gamma_s(x) := \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}},$$

paramétrés par un nombre réel $s > 0$, appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, et satisfont toutes les propriétés requises pour constituer une approximation \mathcal{C}^∞ de l'unité lorsque $s \rightarrow 0$, à savoir :

- leurs valeurs sont positives : $\gamma_s(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$;
- leurs normes L^1 sont toujours égales à 1 :

$$\|\gamma_s\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}^d} |\gamma_s(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \gamma_s(x) dx = 1;$$

- pour tout réel $\delta > 0$ arbitrairement petit :

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \int_{|x| > \delta} \gamma_s(x) dx.$$

De plus, la transformée de Fourier $\widehat{\gamma}_s(\xi)$ de $\gamma_s(x)$ vaut :

$$\widehat{\gamma}_s(\xi) = e^{-\pi s |\xi|^2} = \frac{1}{(\sqrt{s})^d} \gamma_{s^{-1}}(\xi).$$

Enfin, sur les noyaux de Gauss $\gamma_s(x)$, le redoublement de la transformée de Fourier est involutif :

$$\widehat{\widehat{\gamma}_s}(x) = \gamma_s(x).$$

Démonstration. En dimension $d = 1$, nous avons déjà croisé les deux fonctions :

$$G_\delta(x) := e^{-\pi \delta x^2} \quad \text{et} \quad K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi x^2}{\delta}},$$

qui satisfont :

$$\widehat{G}_\delta(\xi) = K_\delta(\xi) \quad \text{et} \quad \widehat{K}_\delta(\xi) = G_\delta(\xi).$$

Le cas multidimensionnel, abordé ici avec la notation différente $\gamma_s(x)$, se déduit de ces connaissances acquises par simple produit dans les intégrales impliquées, puisque :

$$\gamma_s(x) = \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\pi \frac{x_1^2}{s}} \cdots \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\pi \frac{x_d^2}{s}} = K_s(x_1) \cdots K_s(x_d),$$

et notamment, le fait que $(\gamma_s(x))_{s>0}$ constitue une approximation de l'identité pour la convolution est clair.

Concernant la transformée de Fourier, un calcul mettant bien en lumière le scindage par produit :

$$\begin{aligned}\widehat{\gamma}_s(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}} e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \prod_{1 \leq i \leq d} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{s}} e^{-\frac{\pi x_i^2}{s}} e^{-2i\pi x_i \xi_i} dx_i \\ &= \prod_{1 \leq i \leq d} \widehat{K}_s(\xi_i) \\ &= \prod_{1 \leq i \leq d} G_s(\xi_i) \\ &= e^{-\pi s |\xi|^2}\end{aligned}$$

fournit le résultat annoncé.

Nous savons donc dorénavant, après échange des noms des deux variables $x \longleftrightarrow \xi$, que :

$$\widehat{\gamma}_s(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}} e^{-2i\pi\xi \cdot x} d\xi = e^{-\pi s|x|^2}.$$

Changeons ici le paramètre $x \mapsto \frac{1}{s}x$, ce qui est loisible car $s > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\frac{\pi|\xi|^2}{s}} e^{-2i\pi \frac{1}{s}\xi \cdot x} d\xi = e^{-\pi \frac{|x|^2}{s}}.$$

Ensuite dans cette intégrale, effectuons le changement de variable $\xi \mapsto s\xi$, ce qui nous donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\pi s|\xi|^2} e^{-2i\pi\xi \cdot x} s^d d\xi = e^{-\pi \frac{|x|^2}{s}},$$

c'est-à-dire :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s|\xi|^2} e^{-2i\pi\xi \cdot x} d\xi = \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{s}}.$$

En conclusion, nous obtenons bien l'invariance du noyau de Gauss par double transformation de Fourier :

$$\begin{aligned}\widehat{\widehat{\gamma}}_s(x) &\stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\gamma}_s(\xi) e^{-2i\pi\xi \cdot x} d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi s|\xi|^2} e^{-2i\pi\xi \cdot x} d\xi \\ &= \frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\pi \frac{|x|^2}{s}} \\ &= \gamma_s(x).\end{aligned}$$

□

Théorème 14.1. *Si une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est telle que sa transformée de Fourier \widehat{f} appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a :*

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x).$$

En d'autres termes qui mettent en lumière l'inversion de Fourier — et toujours sous cette hypothèse que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$ —, la valeur de $f(x)$ se reconstitue (inversion) en calculant la transformée de Fourier $\mathcal{F}(\widehat{f})$ de \widehat{f} , prise en $-x$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(\xi) e^{+2i\pi\xi \cdot x} d\xi. \end{aligned}$$

Démonstration. Trois moments, magistralement intéressants, articulent l'argumentation démonstrative.

Premier moment. Lorsque $f = \gamma_s$ est un noyau de Gauss, avec $s > 0$ quelconque fixé, nous avons déjà vu inconsciemment dans la Proposition 12.1 que la formule d'inversion :

$$\frac{1}{(\sqrt{s})^d} e^{-\frac{\pi|x|^2}{s}} = \gamma_s(x) = \gamma_s(-x) = \widehat{\widehat{\gamma_s}}(x),$$

est effectivement satisfaite, car grâce à la parité de $x \mapsto |x|^2$, on a $\gamma_s(-x) = \gamma_s(x)$. Ainsi, la famille des noyaux de Gauss a la propriété remarquable d'être complètement invariante par transformation de Fourier !

Deuxième moment. Nous allons mettre à profit cette connaissance du comportement des noyaux de Gauss pour établir que le théorème est satisfait pour toute fonction de la forme $f = g * \gamma_s$ qui est la convolée avec γ_s d'une certaine fonction $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$; ensuite (troisième moment), nous traiterons le cas général d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ quelconque telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Soit donc $g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. On a alors $\widehat{g * \gamma_s} = \widehat{g} \widehat{\gamma_s} \in L^1$, car $\widehat{\gamma_s} \leq 1$ partout, puisque $\widehat{\gamma_s}(\xi) = e^{-\pi s |\xi|^2}$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^d$, on calcule alors :

$$\begin{aligned} \widehat{g * \gamma_s}(-a) &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g * \gamma_s}(\xi) e^{2i\pi a \cdot \xi} d\xi \\ [f_1 * f_2 = \widehat{f_1} \widehat{f_2}] &= \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(\xi) \widehat{\gamma_s}(\xi) e^{2i\pi a \cdot \xi} d\xi \\ [\text{Théorème 11.2 d'échange}] &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \mathcal{F}\left(\widehat{\gamma_s}(\xi) e^{2i\pi a \cdot \xi}\right)(x) dx \\ [\text{Proposition 10.1}] &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \widehat{\widehat{\gamma_s}}(x - a) dx \\ [\text{Proposition 12.1}] &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \gamma_s(a - x) dx \\ &= g * \gamma_s(a), \end{aligned}$$

ce qui montre que le théorème est satisfait lorsque $f = g * \gamma_s$.

Troisième moment. Maintenant, soit généralement $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Commençons par une observation. Puisque $(\gamma_s)_{s>0}$ est une approximation de l'unité dans

$L^1(\mathbb{R}^d)$, on a convergence vers f en norme L^1 des convoluées $f * \gamma_s$:

$$0 = \lim_{s \rightarrow 0} \|f * \gamma_s - f\|_{L^1}.$$

Le théorème de Fischer-Riesz assure alors qu'il existe une suite de paramètres $s_k \rightarrow 0$ telle que :

$$f * \gamma_{s_k}(a) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(a),$$

pour presque tout $a \in \mathbb{R}^d$. Mémorisons donc ce fait.

Ensuite, puisque :

$$\widehat{\gamma}_s(\xi) = e^{-\pi s |\xi|^2},$$

on voit clairement, lorsque $s \rightarrow 0$, que $\widehat{\gamma}_s(\xi) \leq 1$ tend vers 1 en croissant :

$$1 = \lim_{s \rightarrow 0} \widehat{\gamma}_s(\xi),$$

et ce, en tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ fixé. Ainsi :

$$\lim_{s \rightarrow 0} \widehat{f * \gamma_s}(\xi) = \lim_{s \rightarrow 0} \widehat{f}(\xi) \widehat{\gamma}_s(\xi) = \widehat{f}(\xi),$$

et comme on peut majorer trivialement ce produit :

$$|\widehat{f}(\xi) \widehat{\gamma}_s(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|$$

par la fonction intégrable $|\widehat{f}| \in L^1$, le théorème de convergence dominée assure alors que :

$$(14.2) \quad 0 = \lim_{s \rightarrow 0} \|\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}\|_{L^1}.$$

Considérons maintenant la transformée de Fourier de $\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}$, à savoir la fonction définie par :

$$\widehat{f * \gamma_s}(a) - \widehat{f}(a) = \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{f * \gamma_s}(\xi) - \widehat{f}(\xi)) e^{-2i\pi a \cdot \xi} d\xi,$$

expression dans laquelle apparaît $\widehat{f}(a)$ que l'on veut calculer et égaler à $f(-a)$. La majoration générale élémentaire $\|\widehat{g}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|g\|_{L^1}$ qui donne ici :

$$\|\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|\widehat{f * \gamma_s} - \widehat{f}\|_{L^1} \xrightarrow[s \rightarrow 0]{} 0,$$

et la convergence (14.2) que nous venons d'obtenir, montrent alors que :

$$\widehat{f * \gamma_s} \text{ converge uniformément vers } \widehat{f} \text{ sur } \mathbb{R}^d.$$

En restreignant le paramètre s à la suite $s_k \rightarrow 0$, en appliquant le résultat du deuxième moment sous la forme d'une égalité que nous plaçons au centre, et en rappelant ce que nous avons mémorisé au début, il vient enfin un diagramme à quatre termes :

$$\widehat{f}(-a) \xleftarrow[\infty \leftarrow k]{} \widehat{f * \gamma_{s_k}}(-a) = f * \gamma_{s_k}(a) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} f(a),$$

qui conclut élégamment la démonstration de la formule d'inversion :

$$\widehat{f}(-a) = f(a)$$

affirmée par le théorème. □

Ainsi la transformation de Fourier \mathcal{F} induit un automorphisme de l'espace vectoriel $\{f \in L^1(\mathbb{R}^d) : \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)\}$, dont l'inverse est donné par $\mathcal{F}^{-1} = \overline{\mathcal{F}}$. Cependant, ce théorème n'est pas totalement satisfaisant car l'hypothèse d'intégrabilité sur \widehat{f} s'avère restrictive pour la raison suivante : en appliquant \mathcal{F} à \widehat{f} , ce qui redonne f à quelques modifications mineures près, on voit à cause du Lemme 9.1 que f était nécessairement continue sur \mathbb{R}^d , et tendait nécessairement vers 0 lorsque $|x| \rightarrow \infty$, et cette restriction écarte sans raison des fonctions d'usage très fréquent, aussi bien en mathématiques qu'en physique. Il faut donc *prolonger* la transformation de Fourier, ce qui est l'objet de la prochaine section.

15. Transformée de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Contrairement à ce qui se passait sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ où l'on avait $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T}) \subset L^q(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ pour tous exposants $1 < q < p < \infty$, et ce, grâce à la compacité du cercle unité, sur l'espace *non compact* \mathbb{R}^d , les espaces $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$ sont *étrangers l'un à l'autre*, à savoir : aucun des deux n'est contenu dans l'autre ; il suffit en effet de penser à $\mathbf{1}_{]0,1]} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, dans $L^1(\mathbb{R})$ mais pas dans $L^2(\mathbb{R})$, ainsi qu'à $\mathbf{1}_{[1,\infty[} \cdot \frac{1}{x}$, non dans $L^1(\mathbb{R})$ mais dans $L^2(\mathbb{R})$; l'Exercice 9 donne plus d'information.

Donc comme $L^2(\mathbb{R}^d) \not\subset L^1(\mathbb{R}^d)$, on ne peut en général pas utiliser la formule intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$ pour définir les transformées de Fourier de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$. Pourtant, la nécessité de sortir du cadre des fonctions intégrables a été fortement motivée, dans les travaux de Plancherel au début des années 1910, par le fait que les espaces de Hilbert séparables, dont ℓ^2 est le prototype universel, possèdent une structure géométrique riche, flexible et très utile (équation de la chaleur ; équations intégrales ; mécanique quantique ; opérateur $\bar{\partial}$; etc.). Ce fut une réussite, et le théorème dit « de Parseval-Plancherel » qui prolonge la transformation de Fourier \mathcal{F} à tout $L^2(\mathbb{R}^d)$ en partant du sous-espace dense :

$$L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d),$$

confère à \mathcal{F} un statut plus harmonieux et plus symétrique, puisque \mathcal{F} devient alors un *isomorphisme* de $L^2(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant, pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Théorème 15.1. *Soit $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ une fonction de carré intégrable quelconque. Alors :*

- (1) *il existe une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$;*
- (2) *pour toute suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions de cette espèce telle que :*

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^2},$$

la suite des transformées de Fourier intégrales standard de ces fonctions f_n :

$$\widehat{f}_n(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$$

converge en norme L^2 vers une certaine fonction-limite $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widetilde{f} - \widehat{f}_n\|_{L^2}$$

qui est indépendante de la suite f_n et qu'on appelle transformée de Fourier de f . De plus :

$$\|\widetilde{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Il est clair pour des raisons de cohérence que dans la circonstance où la fonction f appartient déjà à $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, sa transformée de Fourier est tout simplement donnée par la formule intégrale standard, puisqu'il suffit de prendre $f_n = f$ pour tout n ci-dessus. Mais le fond de l'affaire, c'est que le théorème permet de parler de transformation de Fourier sans formule intégrale.

Démonstration. La partie (1) est bien sûr conséquence du fait que l'espace $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d)$ — voire même $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ — est dense dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque de telles fonctions continues (ou infiniment différentiables à support compact) sont évidemment d'intégrale finie. Toutefois, voici un argument de démonstration indépendant et plus économique.

Pour tout entier $n \geq 1$, notons $B(0, n)$ la boule ouverte de rayon n centrée à l'origine et introduisons tout simplement la troncature f_n de f par la fonction indicatrice de cette boule :

$$f_n := f \mathbf{1}_{B(0, n)}.$$

On a évidemment $f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, avec $\|f_n\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2}$. De plus, f_n appartient également à $L^1(\mathbb{R}^d)$, comme on peut s'en assurer grâce à l'application un peu artificielle mais récurrente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui consiste à faire apparaître un facteur 1 virtuel :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)| dx &= \int_{B(0, n)} |f(x)| dx \\ &= \int_{B(0, n)} |f(x)| \cdot 1 dx \\ &\leq \underbrace{\left(\int_{B(0, n)} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \|f\|_{L^2}} \underbrace{\left(\int_{B(0, n)} 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}}_{\text{constante} < \infty} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

On a donc $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$. De plus, une application du théorème de convergence dominée donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f_n - f\|_{L^2} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x| \geq n} |f(x)|^2 dx = 0,$$

ce qui prouve bien que la suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge vers f dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. On remarquera que cet argument de preuve n'utilise aucun théorème d'approximation de la théorie de l'intégration. Ainsi, (1) est démontré.

Maintenant que l'on a une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions appartenant à $L^1 \cap L^2$ et convergent vers f en norme L^2 , donc de Cauchy en norme L^2 , il faut s'assurer que la suite des transformées de Fourier des f_n fournies par la formule intégrale standard ($f_n \in L^1$!) :

$$\widehat{f}_n(\xi) := \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{-2i\pi x \cdot \xi} dx$$

converge de quelque façon vers quelque chose en norme L^2 . C'est là qu'intervient l'argument crucial :

Théorème 15.2. [Formule de Plancherel-Parseval] *La transformée de Fourier \widehat{f} de toute fonction :*

$$f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d),$$

appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ et possède la même norme L^2 que f :

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Admettons provisoirement cet énoncé et achevons la preuve du théorème en cours. Ainsi, \widehat{f}_n appartient à $L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \geq 1$, et qui plus est, la suite $(\widehat{f}_n)_{n=1}^\infty$ est de Cauchy, à nouveau grâce à cette formule :

$$\lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_{n_2} - \widehat{f}_{n_1}\|_{L^2} = \lim_{n_1, n_2 \rightarrow \infty} \|f_{n_2} - f_{n_1}\|_{L^2} = 0.$$

L'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$ étant complet, il existe donc une unique fonction $\widetilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ qui est la limite des \widehat{f}_n .

Montrons enfin que \widetilde{f} ne dépend pas du choix d'une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{L^2}$. Soit en effet $(f'_n)_{n=1}^\infty$ une autre suite de fonctions $f'_n \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \|f'_n - f\|_{L^2}$. Alors $f'_n - f_n$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ pour tout $n \geq 1$ et converge vers 0 dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, puisque :

$$\|f'_n - f_n\|_{L^2} \leq \|f'_n - f\|_{L^2} + \|f - f_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

La formule de Plancherel-Parseval (encore elle !) permet alors de voir que la limite \widetilde{f}' des \widehat{f}'_n (qui existe d'après ce qui vient d'être vu) est la même, dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, que la limite \widetilde{f} des \widehat{f}_n :

$$\|\widetilde{f}' - \widetilde{f}\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}'_n - \widehat{f}_n\|_{L^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f'_n - f_n\|_{L^2} = 0,$$

c'est-à-dire $\widetilde{f}' = \widetilde{f}$ en tant qu'éléments de $L^2(\mathbb{R}^d)$, conclusion de la preuve. \square

Démonstration du Théorème 15.2. Il ne reste plus qu'à établir cette formule de Plancherel-Parseval. Supposons d'abord que f et \widehat{f} soient dans $L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors la fonction \widehat{f} est bornée grâce à l'inégalité élémentaire $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|f\|_{L^1}$, et on va montrer que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, aussi. En effet, si \widehat{f} n'est pas partout nulle, quitte à la diviser par sa norme $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}^0}$ — une simple constante > 0 —, on peut supposer que $\|\widehat{f}\|_{\mathcal{C}^0} \leq 1$. Dans ces conditions, sachant que $\alpha^2 \leq \alpha$ pour tout nombre réel $\alpha \in [0, 1]$, on a :

$$|\widehat{f}(\xi)|^2 \leq |\widehat{f}(\xi)|,$$

d'où, puisque $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \infty,$$

ce qui prouve bien que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Ceci étant dit, on peut à présent entreprendre le calcul qui nous dirige vers la formule désirée :

$$\begin{aligned}
(\|f\|_{L^2})^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} f(x) dx \\
\text{[Théorème 14.1 d'inversion]} &= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(x)} \widehat{f}(-x) dx \\
\text{[Théorème 11.2 d'échange]} &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}(\overline{f})(\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}(f)}(-\xi) \widehat{f}(-\xi) d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\mathcal{F}(f)}(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\
&= (\|\widehat{f}\|_{L^2})^2.
\end{aligned}$$

Traisons à présent le cas général où $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, sans supposer que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Soit $f_\varepsilon := f * \gamma_\varepsilon$ la convolée de f avec le noyau de Gauss γ_ε . Comme f et γ_ε appartiennent à $L^1(\mathbb{R}^d)$, il en va de même de $f * \gamma_\varepsilon$. De plus, on a :

$$\widehat{f_\varepsilon} = \widehat{f} \widehat{\gamma_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d),$$

car \widehat{f} est bornée et $\widehat{\gamma_\varepsilon} \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

La fonction f_ε relève donc du cas précédent, et par conséquent, nous recevons l'égalité « gratuite » :

$$(15.3) \quad (\|\widehat{f_\varepsilon}\|_{L^2})^2 = (\|f_\varepsilon\|_{L^2})^2.$$

Ensuite, en tenant compte de :

$$|\widehat{\gamma_\varepsilon}(t)|^2 = (e^{-\pi\varepsilon|t|^2})^2 = e^{-2\pi\varepsilon|t|^2},$$

nous avons :

$$\begin{aligned}
(\|\widehat{f_\varepsilon}\|_{L^2})^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f_\varepsilon}(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2 |\widehat{\gamma_\varepsilon}(t)|^2 dt \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2 e^{-2\pi\varepsilon|t|^2} dt.
\end{aligned}$$

Alors en faisant $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, le théorème de la convergence monotone nous offre :

$$\begin{aligned}
(15.4) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\widehat{f_\varepsilon}\|_{L^2})^2 &= \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2 \cdot 1 dt \\
&= (\|\widehat{f}\|_{L^2})^2 \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\},
\end{aligned}$$

cette dernière quantité pouvant *a priori* être infinie !

Mais par ailleurs, puisque $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse, comme $(\gamma_\varepsilon)_{\varepsilon \rightarrow 0}$ est une approximation de l'unité, $f_\varepsilon = f * \gamma_\varepsilon$ converge vers f en norme L^2 :

$$0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|f_\varepsilon - f\|_{L^2})^2,$$

d'où il découle grâce à la continuité de la norme :

$$(15.5) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|f_\varepsilon\|_{L^2})^2 = (\|f\|_{L^2})^2.$$

Pour terminer, une synthèse des trois égalités (15.4), (15.3), (15.5), nous offre l'égalité désirée :

$$(\|\widehat{f}\|_{L^2})^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|\widehat{f}_\varepsilon\|_{L^2})^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\|f_\varepsilon\|_{L^2})^2 = (\|f\|_{L^2})^2,$$

toutes ces quantités étant finies, ce qui conclut en beauté la démonstration.

Goodbye darling, and work hard for the final exam ! □

16. Exercices

Exercice 1. On se propose ici d'établir une version économique de la formule d'inversion de Fourier.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} à support compact contenu dans l'intervalle $[-M, M]$, avec $M > 0$, et dont la transformée de Fourier \widehat{f} est à croissance modérée, i.e. satisfait $|\widehat{f}(\xi)| \leq \text{constante}/(1 + \xi^2)$.

(a) Pour L fixé avec $L/2 > M$, en associant à f une fonction L -périodique, en posant $\delta := \frac{1}{L}$, en introduisant pour $n \in \mathbb{Z}$ les quantités :

$$\widehat{f}(n) := \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} f(x) e^{-2i\pi \frac{nx}{L}} dx,$$

montrer en utilisant le théorème de Dirichlet de la théorie des séries de Fourier que l'on a :

$$f(x) = \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k\delta) e^{2i\pi k\delta x} \quad (|x| \leq \frac{L}{2}).$$

(b) Montrer que si une fonction g est continue et à croissance modérée, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) d\xi = \lim_{\substack{\delta \rightarrow 0 \\ \delta > 0}} \delta \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k\delta).$$

(c) Conclure que l'on a bien la formule d'inversion de Fourier dans cette circonstance :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

Exercice 2. Montrer que la convolée $f * g$ de deux fonctions continues $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée est encore à croissance modérée. Indication: Découper :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) g(y) dy = \int_{|y| \leq \frac{|x|}{2}} + \int_{|y| > \frac{|x|}{2}},$$

et utiliser $f(x-y) = O(\frac{1}{1+x^2})$ dans la première intégrale, puis $g(y) = O(\frac{1}{1+y^2})$ dans la seconde.

Exercice 3. Cet exercice illustre le principe d'après lequel la décroissance de \widehat{f} à l'infini est reliée à la régularité de f .

(a) Soit f une fonction à croissance modérée : $|f(x)| \leq A/(1+x^2)$ sur \mathbb{R} avec $A > 0$ dont la transformée de Fourier \widehat{f} est continue et satisfait :

$$\widehat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\alpha}}\right), \quad (|\xi| \rightarrow \infty),$$

pour un certain réel $0 < \alpha < 1$. En admettant que la formule d'inversion de Fourier :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi,$$

est alors satisfaite, montrer que f est \mathcal{C}^α -höldérienne, à savoir qu'elle satisfait une estimée uniforme du type :

$$|f(x+h) - f(x)| \leq M|h|^\alpha \quad (x, h \in \mathbb{R}),$$

avec une constante $M > 0$. Indication: Découper l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ qui exprime $f(x+h) - f(x)$ en les deux morceaux $\int_{|\xi| \leq \frac{1}{|h|}} + \int_{|\xi| > \frac{1}{|h|}}$.

(b) Soit f une fonction continue sur \mathbb{R} qui s'annule pour $|x| \geq 1$, satisfait $f(0) = 0$, et est égale à :

$$\frac{1}{\log(1/|x|)}$$

dans un petit intervalle $[-\delta_0, \delta_0]$ avec $\delta_0 > 0$. Vérifier que f est à croissance modérée, mais que \widehat{f} ne l'est pas, et plus précisément, montrer qu'il n'existe pas de réel $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\widehat{f}(\xi) = O\left(\frac{1}{|\xi|^{1+\varepsilon}}\right) \quad (|\xi| \rightarrow \infty).$$

Exercice 4. (a) En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Montrer que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\widehat{f}'(\xi) = 2i\pi \xi \widehat{f}(\xi).$$

Si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ avec $k \geq 1$, en déduire que pour tout entier positif $\ell \leq k$, on a :

$$\widehat{f^{(\ell)}}(\xi) = (2i\pi \xi)^\ell \widehat{f}(\xi).$$

(b) En dimension $d \geq 1$, quelconque, si $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}^d)$, montrer que pour tout multiindice $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $\ell_1 + \dots + \ell_d \leq k$, on a :

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^{\ell_1+\dots+\ell_d}}{\partial x_1^{\ell_1} \dots \partial x_d^{\ell_d}} f\right)(\xi_1, \dots, \xi_d) = (2i\pi)^{\ell_1+\dots+\ell_d} \xi_1^{\ell_1} \dots \xi_d^{\ell_d} \mathcal{F}(f)(\xi_1, \dots, \xi_d).$$

(c) En dimension $d = 1$, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que la fonction produit $x \mapsto xf(x)$ appartienne encore à $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que \widehat{f} admet une dérivée \widehat{f}' continue et bornée sur \mathbb{R} qui est donnée par la formule :

$$\widehat{f}'(\xi) = -2i\pi (\widehat{xf})(\xi).$$

(c) En dimension $d \geq 1$ quelconque, si, pour un entier $k \geq 1$, toutes les fonctions produits $f, x_{i_1} f, x_{i_1} x_{i_2} f, \dots, x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} f$ appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$ pour tous indices $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq d$, montrer que l'on a pour tout multiindice $(\ell_1, \dots, \ell_d) \in \mathbb{N}^d$ avec $\ell_1 + \dots + \ell_d \leq k$:

$$\frac{\partial^{\ell_1+\dots+\ell_d} (\widehat{f})}{\partial \xi_1^{\ell_1} \dots \partial \xi_d^{\ell_d}}(\xi) = (-2i\pi)^{\ell_1+\dots+\ell_d} \mathcal{F}(x_{\ell_1} \dots x_{\ell_d} f)(\xi).$$

Exercice 5. Soit la fonction indicatrice :

$$f(x) = \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{lorsque } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et soit la fonction :

$$g(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{lorsque } |x| \leq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Bien que f ne soit pas continue, l'intégrale qui définit sa transformée de Fourier a un sens.

(a) Montrer qu'elle vaut :

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi \xi)}{\pi \xi},$$

avec bien entendu $\widehat{f}(0) = 2$.

(b) Montrer aussi que :

$$\widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi \xi)}{\pi \xi}\right)^2,$$

avec $\widehat{g}(0) = 1$.

Exercice 6. (a) Appliquer la formule sommatoire de Poisson à la fonction g de l'Exercice 5 pour obtenir la formule :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x+n)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin(\pi x))^2},$$

lorsque $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ n'est pas un entier.

(b) En déduire :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=-n}^n \frac{1}{x+m} = \frac{\pi}{\tan(\pi x)}.$$

Indication: Se ramener à $0 < x < 1$, puis intégrer la formule qui précède. Quel résultat donne l'évaluation en $x = \frac{1}{2}$?

Exercice 7. Soit un paramètre réel $a > 0$.

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$f_a(x) := e^{-2\pi a|x|}.$$

(b) En déduire, pour tous $a, b > 0$, les cinq formules suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x\xi)}{a^2 + \xi^2} d\xi &= e^{-2\pi a|x|}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)^2} &= \frac{\pi}{2a^3}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(a^2 + \xi^2)(b^2 + \xi^2)} &= \frac{\pi}{ab(a+b)}, \\ \left(\frac{a}{\pi} \frac{1}{a^2 + x^2}\right) * \left(\frac{b}{\pi} \frac{1}{b^2 + x^2}\right) &= \frac{a+b}{\pi} \frac{1}{(a+b)^2 + x^2}, \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{a^2 + k^2} &= \frac{\pi}{a} \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}. \end{aligned}$$

Exercice 8. Montrer que toute fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée, en particulier dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, est uniformément continue sur \mathbb{R} . **Indication:** Sur un grand intervalle fermé $[-M, M]$ avec $M \gg 1$, on a uniforme continuité, tandis que sur $] -\infty, -M] \cup [M, \infty[$, les valeurs de f sont « écrasées » par l'hypothèse $f(x) \leq \frac{A}{1+x^2}$.

Exercice 9. Établir les relations suivantes entre $L^1(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d)$.

(a) Aucune des deux inclusions $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$ et $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ n'est vraie. **Indication:** Penser à des fonctions de la forme $\frac{1}{|x|^\alpha}$ sur $\{|x| \leq 1\}$ et sur $\{|x| \geq 1\}$.

(b) Toutefois, lorsqu'une fonction mesurable $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ a un support $\text{supp } f \subset E$ contenu dans un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$ finie, montrer que :

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{m(E)} \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Montrer aussi que lorsqu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est bornée $|f(x)| \leq M < \infty$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$, on a aussi $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec l'estimation :

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \sqrt{M} \sqrt{\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}}.$$

Exercice 10. Montrer que si une fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée satisfait :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} e^{2xy} dy \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

alors $f \equiv 0$. **Indication:** Convolver $f * e^{-x^2}$.

Exercice 11. [Noyau de Fejér sur \mathbb{R}] Soit la fonction dépendant d'un paramètre $R > 0$ définie par :

$$\mathcal{F}_R(t) := \begin{cases} R \left(\frac{\sin(\pi R t)}{\pi R t} \right)^2 & \text{lorsque } t \neq 0, \\ R & \text{pour } t = 0. \end{cases}$$

(a) Établir, pour toute fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ à croissance modérée, la formule :

$$(f * \mathcal{F}_R)(x) = \int_{-R}^R \left(1 - \frac{|\xi|}{R}\right) e^{2i\pi x\xi} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

(b) Montrer que $(\mathcal{F}_R)_{R>0}$ est une famille de bons noyaux lorsque $R \rightarrow \infty$.

(c) Montrer que :

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \|f * \mathcal{F}_R - f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})}.$$

Exercice 12. Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que la périodisation du noyau de Fejér \mathcal{F}_n sur la droite réelle \mathbb{R} coïncide avec le noyau de Fejér trigonométrique pour les fonctions de période 1, à savoir, montrer que :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_n(x+k) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin(n\pi x)}{\sin(\pi x)} \right)^2 = F_n(\pi x).$$

Exercice 13. [Fonction zêta] Soit la fonction :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad (s > 1),$$

soit la fonction :

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} x^{s-1} e^{-x} dx \quad (s > 0),$$

et soit :

$$\vartheta(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi n^2 x} \quad (s > 0).$$

Pour $s > 1$, établir l'identité fonctionnelle :

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} x^{\frac{s}{2}-1} (\vartheta(x) - 1) dx.$$

Exercice 14. L'objectif est de donner une formule pour les valeurs $\zeta(2m)$ de la fonction $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ aux entiers pairs $s = 2m \geq 2$.

(a) Montrer que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) := \frac{1}{\pi} \frac{t}{t^2+x^2}$ avec un paramètre $t > 0$ vaut :

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}.$$

(b) Appliquer la formule sommatoire de Poisson pour obtenir :

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+n^2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|}.$$

(c) Pour $0 < t < 1$, établir la formule :

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+n^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m-1}.$$

(d) Toujours pour $0 < t < 1$, vérifier aussi :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|n|} = \frac{2}{1-e^{-2\pi t}} - 1.$$

(e) Appliquer enfin la définition des *nombre de Bernouilli* comme apparaissant dans le développement en série entière :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

pour atteindre :

$$\zeta(2m) = \pi^{2m} \frac{2^{2m-1}}{(2m)!} (-1)^{m+1} B_{2m} \quad (\forall m \geq 1).$$

Exercice 15. Soit $A \in \mathcal{M}_{d \times d}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique ${}^t A = A$ définie positive à coefficients réels. Calculer la valeur :

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x \cdot Ax} dx = \frac{1}{\sqrt{\det A}},$$

qui généralise celle connue $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\pi x \cdot x} dx = 1$ lorsque $A = \text{Id}$. Indication: Utiliser une diagonalisation $A = R^{-1}DR$, où R est une matrice orthogonale satisfaisant $\text{Id} = {}^t R R$, et où $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ avec $0 < \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_d$ est la matrice diagonale des valeurs propres (ordonnées) de A .

Exercice 16. Pour $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} |\psi|^2 = 1$, établir le principe d'incertitude de Heisenberg en dimension quelconque $d \geq 1$:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} |\xi|^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geq \frac{d^2}{16\pi^2}.$$

Exercice 17. Pour $\beta \geq 0$, démontrer la formule :

$$e^{-\beta} = \int_0^\infty \frac{e^{-u}}{\sqrt{\pi u}} e^{-\frac{\beta^2}{4u}} du.$$

Exercice 18. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ une fonction continue. Montrer que f et sa transformée de Fourier \widehat{f} ne peuvent pas toutes deux être à support compact, sauf lorsque $f \equiv 0$. Indication: Supposer que f est à support dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, développer f en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$, et observer qu'alors, f est un polynôme trigonométrique.

Exercice 19. Étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ à valeurs complexes, le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur consiste à déterminer les fonctions $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ vérifiant :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0 & \text{pour tous } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \\ \lim_{y \rightarrow 0} u(x, y) = f(x) & \text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}, \\ \sup_{y > 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)| dx < \infty. \end{cases}$$

On suppose que, pour tout $y > 0$, les quatre fonctions :

$$x \mapsto u(x, y), \quad x \mapsto \frac{\partial u}{\partial x}(x, y), \quad x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y), \quad x \mapsto \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y)$$

sont intégrables au sens de Lebesgue sur \mathbb{R} .

(a) Si $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$ désigne la transformée de Fourier de u par rapport à la variable x dont on explicitera d'abord la définition, montrer que l'on a, pour tout $y > 0$:

$$\begin{cases} 4\pi\xi^2 \widehat{u}(\xi, y) - \frac{\partial^2 \widehat{u}}{\partial y^2}(\xi, y) = 0, \\ \lim_{y \rightarrow 0} \widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{f}(\xi), \\ \sup_{y > 0} |\widehat{u}(\xi, y)| < +\infty. \end{cases}$$

(b) Montrer qu'il existe des fonctions A et B telles que :

$$\widehat{u}(\xi, y) = A(\xi) e^{-2\pi\xi y} + B(\xi) e^{2\pi\xi y}.$$

(c) Établir que l'on a en fait :

$$\widehat{u}(\xi, y) = \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi|\xi|y}.$$

(d) Vérifier, pour tout $y > 0$ fixé, que la fonction $\xi \mapsto \widehat{u}(\xi, y)$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier que l'on a :

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi, y) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

(f) On pose $g_y(x) := \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$. Calculer la transformée de Fourier :

$$\widehat{g}_y(\xi) = e^{-|\xi|y}.$$

(g) Dédire de ce qui précède que l'on a :

$$\widehat{u}(\xi, y) = \mathcal{F}(f * g_y).$$

(h) Montrer que la solution recherchée est donnée par la formule intégrale :

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \frac{y}{\pi(y^2 + (x-s)^2)} ds,$$

qu'elle est de classe en fait \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, et qu'elle satisfait toutes les conditions requises.

Exercice 20. [Condition de Dini] La transformée de Fourier $g := \widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ n'appartient pas en général à $L^1(\mathbb{R})$, ce qui fait que la transformée de Fourier seconde :

$$\widehat{\widehat{f}} = \widehat{g}$$

ne peut pas en général être calculé au moyen de la formule classique $\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$. On rappelle que l'intérêt d'une double transformation est la formule d'inversion de Fourier :

$$\widehat{\widehat{f}}(x) = f(-x),$$

vraie par exemple lorsque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dans l'espace de Schwartz.

(a) Montrer en effet que la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[a,b]}$ d'un intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$ n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$.

Le but ici est d'énoncer une condition spécifique sur f , dite « de Dini », qui assurera que l'on puisse néanmoins inverser la transformée de Fourier en écrivant :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi,$$

cette intégrale impropre étant définie comme valeur principale au sens de Cauchy :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

(b) Avec $f \in L^1(\mathbb{R})$, on pose donc pour $R > 0$:

$$S_R(x) := \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

En admettant que $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, montrer que l'on a :

$$S_R(x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2} \right] \frac{\sin(2\pi Rt)}{t} dt.$$

(c) On pose donc :

$$g_x(t) := \frac{f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)}{2},$$

et on suppose — hypothèse de type « Dini » — qu'il existe un $\delta > 0$ tel que :

$$\int_0^\delta \frac{|g_x(t)|}{t} dt < \infty.$$

Montrer que l'on a alors effectivement la conclusion désirée :

$$f(x) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x\xi} d\xi.$$

(d) Vérifier que cette hypothèse est automatiquement satisfaite lorsque $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^\alpha(\mathbb{R})$ est de plus höldérienne, au sens où il existe $0 < \alpha < 1$ et $0 \leq K < \infty$ tels que :

$$|f(x'') - f(x')| \leq K |x'' - x'|^\alpha \quad (\forall x', x'' \in \mathbb{R}).$$

Exercice 21. [Transformée de Hilbert] Rappelons que la transformée de Fourier \widehat{u} d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{u}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{-2i\pi x\xi} dx.$$

On note alors différemment $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ le prolongement à $L^2(\mathbb{R})$ — théorème du cours — de cette transformation, qui se calcule donc comme $\mathcal{F}(u) = \widehat{u}$ seulement lorsque $u \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, et qui établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$, d'inverse naturellement noté \mathcal{F}^{-1} .

(a) Montrer que pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u \mathbf{1}_{[-n,n]}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0,$$

où $\mathbf{1}_{[-n,n]}$ désigne la fonction indicatrice de l'intervalle $[-n, n]$, pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer que $\mathcal{F}(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]})$ dans $L^2(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, justifier que :

$$\mathcal{F}(u \cdot \mathbf{1}_{[-n,n]})(\xi) = \int_{-n}^n u(x) e^{-2i\pi x \xi} dx.$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \mathcal{F}(u)(\xi) - \int_{-n}^n u(x) e^{-2i\pi x \xi} dx \right\|_{L^2(\mathbb{R})}.$$

On définit maintenant la *transformée de Hilbert* $\mathcal{H} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ pour $u \in L^2(\mathbb{R})$ par :

$$\mathcal{H}(u)(x) := \mathcal{F}^{-1}(\text{sign}(\xi) \mathcal{F}(u)(\xi))(x),$$

où $\text{sign} \in L^\infty(\mathbb{R})$ est la fonction définie pour $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\text{sign}(\xi) := -1 \text{ lorsque } \xi < 0, \quad \text{sign}(0) := 0, \quad \text{sign}(\xi) := +1 \text{ lorsque } \xi > 0.$$

La transformée de Hilbert associe donc à une fonction $u \in L^2(\mathbb{R})$ de carré sommable, la fonction de carré sommable dont la transformée de Fourier coïncide avec (resp. s'oppose à) celle de la fonction donnée sur les réels positifs (resp. négatifs).

(e) Montrer qu'une telle transformation \mathcal{H} est bien définie et qu'elle établit un automorphisme isométrique de $L^2(\mathbb{R})$.

L'objectif principal de cet exercice est de montrer que l'on peut «représenter» \mathcal{H} comme *opérateur intégral singulier*, à savoir que l'on peut écrire pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy,$$

à condition d'interpréter une telle intégrale éventuellement divergente comme «*valeur principale au sens de Hadamard*» — ne divergeant alors presque jamais —, à savoir comme la limite de l'intégrale suivante tronquée de manière équilibrée autour de x :

$$\mathcal{H}(u)(x) = -\frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-\infty}^{x-\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y} dy + \int_{x+\varepsilon}^{\infty} \frac{u(y)}{x-y} dy \right).$$

Pour ce faire, on commence par fixer $\varepsilon > 0$ et $u \in L^2(\mathbb{R})$.

(f) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\int_{|y|>\varepsilon} \frac{u(x-y)}{y} dy = f_\varepsilon * u(x),$$

où $f_\varepsilon \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$f_\varepsilon(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{lorsque } |x| > \varepsilon, \\ 0 & \text{lorsque } |x| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Justifier rigoureusement le caractère bien défini de ce produit de convolution $f_\varepsilon * u$.

(g) Montrer que l'on a, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{i\pi} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y} dy = -\frac{1}{i\pi} \mathcal{F}^{-1} \left[\mathcal{F}(f_\varepsilon) \cdot \mathcal{F}(u) \right](x).$$

(h) Montrer que l'on a, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\varepsilon < |x| < n} \frac{e^{-2i\pi x \xi}}{x} dx = -2i \text{sign}(\xi) \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(i) En utilisant la première étape, montrer que pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{F}(f_\varepsilon)(\xi) = -2i \text{sign}(\xi) \int_{2\pi\varepsilon|\xi|}^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(j) En utilisant la valeur connue $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$, montrer finalement que l'on a bien, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-\frac{1}{i\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{u(y)}{x-y} dy = \mathcal{H}(u)(x).$$

Exercice 22. [Sans indication] Montrer qu'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier \widehat{f} est impaire, est nécessairement aussi impaire. **Indication:** Traiter d'abord le cas où $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz, puis effectuer un raisonnement par densité.

Exercice 23. [Signaux à spectre borné] Soit l'intervalle $\mathbb{I} := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

(a) Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{\mathbb{I}}$.

(b) Soit la fonction *sinus cardinal* :

$$\text{sinc } x := \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & \text{lorsque } x \not\equiv 0 \pmod{1}, \\ 1 & \text{pour } x \equiv 0 \pmod{1}. \end{cases}$$

Montrer que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2 x dx = 1.$$

(c) On considère à présent l'ensemble des 'signaux' à spectre borné contenu dans \mathbb{I} :

$$BL^2 := \{f \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{C}) : \widehat{f}(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I}\}.$$

Justifier que l'on peut écrire, pour tout $f \in BL^2$:

$$f(x) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

(d) On munit BL^2 du produit scalaire hermitien usuel :

$$\langle f, g \rangle_{BL^2} := \langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in BL^2).$$

Montrer que BL^2 est complet (est un espace de Hilbert).

(e) Montrer que $BL^2 \subset \mathcal{C}_{\substack{0 \\ \uparrow \rightarrow \infty}}^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, l'espace des fonctions continues tendant vers 0 aux deux infinis de \mathbb{R} , et même, que $BL^2 \subset \mathcal{C}^\infty$.

(f) Si, pour $h \in \mathbb{R}$, on note $\tau_h f$ la fonction-translatée $(\tau_h f)(x) := f(x - h)$, montrer que la famille :

$$(\tau_k \text{sinc})_{k \in \mathbb{Z}}$$

constitue une base hilbertienne de BL^2 . **Indication:** Observer que $\tau_k \text{sinc} = \widehat{e}_k$, où la fonction $e_k \in L^2(\mathbb{R})$ est définie par :

$$e_k(x) := \begin{cases} e^{2i\pi kx} & \text{lorsque } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases}$$

puis, pour établir que cette famille $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ est totale, en supposant qu'une fonction $g \in BL^2$ satisfait :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \tau_k \text{sinc}(x) dx \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$

utiliser la formule d'échange pour déduire $g(x) = 0$ presque partout.

(g) Montrer que l'application :

$$\begin{aligned} \Phi: BL^2 &\longrightarrow \ell_{\mathbb{C}}^2(\mathbb{Z}) \\ f &\longmapsto (f(k))_{k \in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

est un isomorphisme linéaire isométrique.

(h) Montrer que toute fonction $f \in BL^2$ se représente comme :

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) \tau_k \text{sinc}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

où la série converge simultanément :

- en norme BL^2 ;
- uniformément pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. [Théorème de Plancherel et signaux à spectre borné] La transformée de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est la fonction $\widehat{u}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} u(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$. On rappelle que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$ et que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ est contenu dans l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(a) Soit une fonction quelconque $u \in L^2(\mathbb{R})$, et soit $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ qui converge, au sens de la norme L^2 , vers u . À l'aide du Théorème de Plancherel pour $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ — dont on rappellera l'énoncé —, montrer que la suite $(\widehat{u}_n)_{n \geq 1}$ converge aussi vers une certaine fonction dans $L^2(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que cette fonction-limite dépend seulement de u , i.e. elle ne dépend pas du choix de la suite approximante $(u_n)_{n \geq 1}$. On la note alors $\mathcal{F}(u) \in L^2(\mathbb{R})$.

(c) Montrer que $\|\mathcal{F}(u)\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$, puis vérifier que l'application $u \mapsto \mathcal{F}(u)$, dite transformée de Fourier dans L^2 , est \mathbb{C} -linéaire.

(d) On pose maintenant $\mathbb{I} := [-1/2, 1/2]$ et on définit le sous-espace de $L^2(\mathbb{R})$ des signaux à spectre borné :

$$BL^2(\mathbb{R}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}) : \mathcal{F}(u)(\xi) = 0 \text{ pour presque tout } \xi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{I} \right\}.$$

Si $u \in L^2(\mathbb{R})$ appartient à $BL^2(\mathbb{R})$, montrer que $\mathcal{F}(u) \in L^1(\mathbb{R})$.

(e) Justifier soigneusement que l'on peut écrire $u(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(u)(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi$ pour presque tout $x \in \mathbb{R}$.

(f) En déduire qu'après correction éventuelle sur un ensemble de mesure nulle, une fonction $u \in BL^2(\mathbb{R})$ est toujours \mathcal{C}^∞ .

Exercice 25. [Espace de Wiener] Étant donné la transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2i\pi x\xi} dx$ définie par une formule intégrale sur $L^1(\mathbb{R})$, on considère l'espace de Wiener :

$$\mathcal{W} := L^1(\mathbb{R}) \cap \widehat{L^1(\mathbb{R})}.$$

(a) Pour $f \in \mathcal{W}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, puis, en écrivant $|f(x)|^p = |f(x)|^{p-1} |f(x)|$, que $f \in L^p(\mathbb{R})$ pour tout $1 < p < \infty$.

(b) Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathcal{W}$ si et seulement si $\widehat{f} \in \mathcal{W}$. On utilisera, après en avoir soigneusement justifié la validité, la formule $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi\xi x} d\xi$.

(c) Montrer que pour $f, g \in \mathcal{W}$, on a aussi $f * g \in \mathcal{W}$ et $fg \in \mathcal{W}$.

(d) Vérifier que la quantité $\|f\|_{\mathcal{W}} := \|f\|_{L^1} + \|\widehat{f}\|_{L^1}$ définit une norme sur \mathcal{W} .

(e) Soit maintenant $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$.

(f) Justifier qu'il existe deux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$ telles que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{L^1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|\widehat{f}_n - g\|_{L^1} = 0$$

(g) Montrer que $\widehat{f} = g$ (presque partout).

(h) Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge dans \mathcal{W} et qu'ainsi, \mathcal{W} est complet.

Exercice 26. [Échantillonnage de signaux] Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue à croissance modérée dont la transformée de Fourier \widehat{f} est à support dans $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. L'objectif, utile en théorie de l'information lorsqu'on cherche à reconstituer un signal en partant d'échantillons, est de faire voir que f est entièrement déterminée par sa restriction à \mathbb{Z} , au sens précis où toute autre fonction g continue à croissance modérée avec $\text{supp } g \subset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ qui satisfait $g(n) = f(n)$ en tout $n \in \mathbb{Z}$ doit coïncider avec $f = g$.

(a) En introduisant $K(y) := \frac{\sin(\pi y)}{\pi y}$, établir la formule de reconstitution suivante :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) K(x-n) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Indication: Observer que $K(y) = O(\frac{1}{|y|})$ lorsque $|y| \rightarrow \infty$, abrégier $I := [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, introduire la fonction indicatrice $\mathbf{1}_I$, et montrer que :

$$\widehat{f}(\xi) = \mathbf{1}_I(\xi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-2i\pi n\xi}.$$

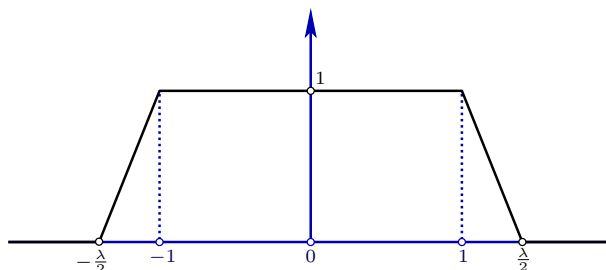
(b) Pour $\lambda > 1$, en introduisant la fonction :

$$K_\lambda(y) := \frac{\cos(\pi y) - \cos(\pi \lambda y)}{\pi^2(\lambda - 1)y^2},$$

qui satisfait $K_\lambda(y) = O(\frac{1}{y^2})$ lorsque $|y| \rightarrow \infty$, établir la formule générale :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda} f\left(\frac{n}{\lambda}\right) K_\lambda\left(x - \frac{n}{\lambda}\right) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Indication: Au lieu de $\mathbf{1}_I$, utiliser la fonction continue affine par morceaux dont le graphe est le suivant.



Cette identité donne une formule de reconstruction qui converge plus rapidement que la précédente, puisque $K_\lambda = O(\frac{1}{y^2})$, et comme $\lambda > 1$, l'échantillonnage de f est plus resserré, *i.e.* on considère comme connues les valeurs $f(\frac{n}{\lambda})$ plus nombreuses que les $f(n)$ de la question (a).

(c) Vérifier que $K_\lambda(y) \rightarrow K(y)$ lorsque $\lambda \xrightarrow{>} 1$.

(d) Pour conclure, établir :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2.$$

Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Examen 1

Exercice 1. Soient H et K deux espaces de Hilbert, soit F un sous-espace vectoriel arbitraire de H , et soit L une application linéaire continue quelconque de F dans K . L'objectif est de démontrer qu'il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\tilde{L}: H \rightarrow K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\tilde{L}|_F = L$ et $\|\tilde{L}\| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $\|\tilde{L}\| = \|L\|$.

(a) Rappeler la définition de la norme d'opérateur $\|L\|$.

(b) Montrer tout d'abord que L admet un unique prolongement linéaire continu $L' \in \text{Lin}(\overline{F}, K)$.

(c) Établir que l'application $h \mapsto \pi_{\overline{F}}(h)$, de H à valeurs dans \overline{F} , « projection orthogonale sur \overline{F} », est linéaire continue. Que vaut $\|\pi_{\overline{F}}\|$?

(d) Considérer l'opérateur $\tilde{L} := L' \circ \pi_{\overline{F}}$ et conclure.

Exercice 2. Soit $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k, \dots$ une suite de sous-ensembles convexes fermés non vides dans un espace de Hilbert H qui satisfont :

$$\mathcal{C}_{k+1} \subset \mathcal{C}_k \quad (k \geq 1).$$

(a) Montrer par un exemple géométrique simple que l'intersection :

$$\mathcal{C}_\infty := \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k$$

peut se réduire à l'ensemble vide.

(b) On suppose dorénavant que $\mathcal{C}_\infty \neq \emptyset$. Vérifier alors que \mathcal{C}_∞ est un sous-ensemble convexe fermé de H .

(c) Fixons à présent un élément $h \in H$ arbitraire. Pour tout entier $k \geq 1$, on note :

$$h_k := \pi_{\mathcal{C}_k}(h)$$

le projeté de h sur \mathcal{C}_k , et aussi :

$$\pi_{\mathcal{C}_\infty}(h)$$

le projeté de h sur \mathcal{C}_∞ . Vérifier alors que :

$$\|h - h_k\|^2 \leq \|h - h_{k+1}\|^2 \leq \|h - \pi_{\mathcal{C}_\infty}(h)\|^2.$$

(d) Qu'en déduire sur la suite $(\|h - h_k\|^2)_{k \geq 1}$?

(e) En utilisant l'identité du parallélogramme (que l'on rappellera ou que l'on reconstituera), établir que la suite $(h_k)_{k \geq 1}$ est alors nécessairement de Cauchy dans H pour la distance associée à la norme hilbertienne.

(f) Si on note :

$$h_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k,$$

montrer que l'on a, pour tout $g \in \mathcal{C}_\infty$:

$$\operatorname{Re} \langle h - h_\infty, g - h_\infty \rangle \leq 0.$$

(g) En déduire :

$$h_\infty = \pi_{\mathcal{C}_\infty}(h),$$

et énoncer le résultat obtenu sous la forme d'un théorème clair.

Exercice 3. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ème somme de Fejér est continue sur le cercle \mathbb{T} et satisfait :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

Exercice 4. Calculer les coefficients de Fourier de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π -périodique (continue) sur \mathbb{R} tout entier.

Exercice 5. On considère la série de fonctions :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

(a) Montrer que cette série converge uniformément sur \mathbb{R} . On note $S(\theta)$ sa somme.

(b) Montrer que S est de classe \mathcal{C}^∞ et 2π -périodique.

(c) En développant $\sin^3(n\theta)$, exprimer $S(\theta)$ en fonction de (justifier aussi l'existence) :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

(d) Montrer que $S(\theta)$ est développable en série de Fourier et trouver son développement.

(e) En considérant aussi :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

calculer explicitement $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$.

(f) En déduire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a la formule explicite :

$$S(\theta) = \frac{3}{4} \sin(\sin \theta) e^{\cos \theta} - \frac{1}{4} \sin(\sin 3\theta) e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Montrer que ses sommes de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ sont impaires et en déduire que f elle-même est impaire.

(b) On considère la fonction $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$F(\theta) := - \int_0^\theta f(t) dt.$$

Montrer que F est 2π -périodique, de classe \mathcal{C}^1 , et que ses coefficients de Fourier sont donnés par :

$$\begin{cases} \widehat{F}(0) = \int_0^{2\pi} t f(t) \frac{dt}{2\pi}, \\ \widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|} b_{|k|}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. Montrer que la série :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\widehat{f}(k)}{k}$$

est absolument convergente.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. On supposera $F \neq \{0\}$, car si F se réduit à $\{0\}$, l'application linéaire continue $H \rightarrow K$ identiquement nulle convient comme prolongement de l'application nulle $\{0\} \rightarrow K$ préservant la norme d'opérateur.

(a) La norme de l'opérateur linéaire :

$$L: (F, \|\cdot\|_H) \longrightarrow (K, \|\cdot\|_K)$$

est classiquement définie par :

$$\|L\| := \sup_{\substack{f \in F \\ f \neq 0}} \frac{\|L(f)\|_K}{\|f\|_H} = \sup_{\substack{f \in F \\ \|f\|=1}} \|L(f)\|_K.$$

(b) Tout élément $\bar{f} \in \bar{F}$ de l'adhérence du sous-espace vectoriel $F \subset H$ s'obtient comme la limite dans H d'une certaine suite $(f_k)_{k \geq 1}$ d'éléments $f_k \in F$, laquelle est alors nécessairement de Cauchy. Or la majoration uniforme :

$$\|L(f_{k_2}) - L(f_{k_1})\|_K \leq \|L\| \|f_{k_2} - f_{k_1}\|_H$$

montre que la suite $(L(f_k))_{k \geq 1}$ est alors aussi de Cauchy dans l'espace de Hilbert K , lequel est complet par définition. Donc il existe un unique $\bar{g} \in K$ tel que $\lim_{k \rightarrow \infty} L(f_k) = \bar{g}$.

Maintenant, cette application (noter le léger changement de notation par rapport à l'énoncé, où le prolongement \bar{L} était noté L') \bar{L} qui à un tel $\bar{f} \in \bar{F}$ associe ce \bar{g} est linéaire, puisque, si $f'_k \rightarrow \bar{f}' \in \bar{F}$, si $\bar{g}' := \bar{L}(\bar{f}')$, si $f''_k \rightarrow \bar{f}'' \in \bar{F}$, si $\bar{g}'' := \bar{L}(\bar{f}'')$, et si λ', λ'' sont deux constantes arbitraires, la suite $\lambda' f'_k + \lambda'' f''_k$ converge vers $\lambda' \bar{f}' + \lambda'' \bar{f}''$, et on déduit de la linéarité de L que :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L(\lambda' f'_k + \lambda'' f''_k) = \lambda' \lim_{k \rightarrow \infty} L(f'_k) + \lambda'' \lim_{k \rightarrow \infty} L(f''_k) = \lambda' \bar{g}' + \lambda'' \bar{g}'',$$

donc l'unique élément que \bar{L} associe à $\lambda' \bar{f}' + \lambda'' \bar{f}''$ est bien égal à $\lambda' \bar{L}(\bar{f}') + \lambda'' \bar{L}(\bar{f}'')$.

Ensuite, en passant à la limite dans les inégalités :

$$\|L(f_k)\|_K \leq \|L\| \|f_k\|_H \quad (k \geq 1; f_k \in F),$$

on obtient :

$$\|\bar{L}(\bar{f})\|_K \leq \|L\| \|\bar{f}\|_H,$$

et donc $\|\bar{L}\| \leq \|L\|$, ce qui montre que \bar{L} est un opérateur linéaire continu. En fait, comme $\bar{L}|_F = L$, on a même, plus précisément :

$$\|\bar{L}\| = \|L\|.$$

Enfin, si deux applications linéaires continues $\bar{L}_1: \bar{F} \rightarrow K$ et $\bar{L}_2: \bar{F} \rightarrow K$ prolongent toutes deux $L: F \rightarrow K$, à savoir $\bar{L}_1|_F = L$ et $\bar{L}_2|_F = L$, alors, puisque tout élément

élément $\bar{f} \in \bar{F}$ de l'adhérence de F peut s'écrire comme la limite $\bar{f} = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k$ d'une suite d'éléments $f_k \in F$, et puisque \bar{L}_1 et \bar{L}_2 sont continues, on voit que :

$$\begin{aligned} \bar{L}_1(\bar{f}) &= \bar{L}_1(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{L}_1(f_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} L(f_k) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{L}_2(f_k) = \bar{L}_2(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k) = \bar{L}_2(\bar{f}), \end{aligned}$$

d'où $\bar{L}_1 = \bar{L}_2$.

Ainsi l'application \bar{L} définit l'unique prolongement linéaire continu $\bar{L} \in \text{Lin}(\bar{F}, K)$ de L , c'est-à-dire satisfaisant $\bar{L}|_F = L$.

(c) D'après un résultat du cours, puisque \bar{F} est fermé, l'espace de Hilbert H se décompose comme somme directe orthogonale :

$$H = \bar{F} \oplus \bar{F}^\perp$$

de \bar{F} avec son orthogonal :

$$\bar{F}^\perp := \{g \in H : \langle g, f \rangle = 0, \forall f \in \bar{F}\},$$

lequel est lui aussi fermé. Ainsi, tout élément $h \in H$ se décompose comme :

$$h = \pi_{\bar{F}}(h) + \pi_{\bar{F}^\perp}(h),$$

où les deux projections $\pi_{\bar{F}}(\cdot)$ et $\pi_{\bar{F}^\perp}(\cdot)$ sont linéaires, et l'orthogonalité assure que le théorème de Pythagore est satisfait :

$$\|h\|^2 = \|\pi_{\bar{F}}(h)\|^2 + \|\pi_{\bar{F}^\perp}(h)\|^2.$$

Mais alors, si on néglige le second terme à droite qui est positif, cette égalité peut être vue comme une inégalité :

$$\|h\|^2 \geq \|\pi_{\bar{F}}(h)\|^2,$$

laquelle exprime que la norme de l'opérateur de projection orthogonale $\pi_{\bar{F}}(\cdot)$ est toujours ≤ 1 . Enfin, puisque cet opérateur se réduit à l'identité en restriction à $\bar{F} \neq \{0\}$, on a en fait :

$$\|\pi_{\bar{F}}\| = 1.$$

(d) L'opérateur $\tilde{L} := \bar{L} \circ \pi_{\bar{F}}$ est linéaire continu, puisque \bar{L} et $\pi_{\bar{F}}$ le sont tous deux. De plus, grâce à la majoration connue de la norme d'opérateur d'une composition d'opérateurs continus :

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}\| &\leq \|\bar{L}\| \underbrace{\|\pi_{\bar{F}}\|}_{=1} \\ &= \|\bar{L}\| \\ &= \|L\|, \end{aligned}$$

on voit que \tilde{L} est continu lui aussi, de norme d'opérateur majorée par celle de L . Mais comme sa restriction $\tilde{L}|_F = L$ à $F \neq \{0\}$ est clairement égale à L par définition, il se trouve que $\|\tilde{L}\| = \|L\|$ en fait.

En conclusion, il existe (au moins) un prolongement linéaire continu $\tilde{L}: H \rightarrow K$ de l'application L à H tout entier, *i.e.* satisfaisant $\tilde{L}|_F = L$ et $\|\tilde{L}\| < \infty$, dont la norme d'opérateur reste inchangée : $\|\tilde{L}\| = \|L\|$. Ce théorème est vrai plus généralement dans

n'importe quel espace vectoriel normé (espace dit de Banach), d'après le fameux *Théorème de Hahn-Banach* (cours de M1).

Exercice 2. (a) Dans $H = \mathbb{R}^2(x, y)$, une famille de demi-espaces fermés à bords parallèles qui est poussée à l'infini telle que, disons, $\mathcal{C}_k := \{x \geq k\}$, offre un exemple simple de suite de sous-ensembles convexes fermés non vides $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \dots, \mathcal{C}_k, \dots$ emboîtés les uns dans les autres : $\mathcal{C}_{k+1} \subset \mathcal{C}_k$ mais dont l'intersection $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k = \emptyset$ est vide.

(b) L'intersection $\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k =: \mathcal{C}_{\infty}$ est toujours un fermé, car au niveau abstrait de la topologie générale, une intersection quelconque d'ensembles fermés est encore fermée, sachant que l'ensemble vide est un fermé lui aussi.

Si \mathcal{C}_{∞} est non vide, soient $f, g \in \mathcal{C}_{\infty}$. Alors pour tout entier k , ces deux éléments f et g appartiennent à \mathcal{C}_k . Mais puisque \mathcal{C}_k est convexe, le segment fermé $\{tf + (1-t)g : 0 \leq t \leq 1\}$ qu'ils délimitent est contenu dans \mathcal{C}_k , et ce, pour tout $k \geq 1$. Donc ce segment est aussi contenu dans l'intersection \mathcal{C}_{∞} de tous les \mathcal{C}_k , d'où il découle que \mathcal{C}_{∞} est convexe.

(c) D'après un résultat du cours, si $h \in H$ est un élément arbitraire, ses projections $h_k := \pi_{\mathcal{C}_k}(h)$ ($k \geq 1$) et $\pi_{\mathcal{C}_{\infty}}(h)$ sur les convexes fermés \mathcal{C}_k ($k \geq 1$) et \mathcal{C}_{∞} existent et sont uniques. Or à cause des deux inclusions :

$$\mathcal{C}_{\infty} \subset \mathcal{C}_{k+1} \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_{k+1} \subset \mathcal{C}_k,$$

on a immédiatement :

$$\pi_{\mathcal{C}_{\infty}}(h) \in \mathcal{C}_{k+1} \quad \text{et} \quad h_{k+1} \in \mathcal{C}_k,$$

et alors grâce aux deux propriétés de minimisation de la distance :

$$\|h - h_{k+1}\| = \min_{g \in \mathcal{C}_{k+1}} \|h - g\| \quad \text{et} \quad \|h - h_k\| = \min_{g \in \mathcal{C}_k} \|h - g\|$$

on peut en déduire, si l'on pose $g := \pi_{\mathcal{C}_{\infty}}(h)$ puis $g := h_{k+1}$, respectivement, les deux inégalités désirées :

$$\|h - h_{k+1}\|^2 \leq \|h - \pi_{\mathcal{C}_{\infty}}(h)\|^2 \quad \text{et} \quad \|h - h_k\|^2 \leq \|h - h_{k+1}\|^2.$$

(d) On en déduit que la suite de nombre réels tous positifs $(\|h - h_k\|^2)_{k \geq 1}$, qui est croissante et majorée par $\|h - \pi_{\mathcal{C}_{\infty}}(h)\|^2$ admet une unique limite, disons $d_{\infty} \geq 0$, dans \mathbb{R}_+ .

(e) L'identité du parallélogramme, qui remonte à Pythagore et à Euclide, stipule que pour tous $u, v \in H$, on a :

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = 2\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^2 + \frac{1}{2}\|u - v\|^2.$$

Appliquons donc cette identité à $u := h - h_{k_1}$ et à $v := h - h_{k_2}$ pour deux entiers $k_1 \leq k_2$, en plaçant $\|u - v\|^2$ seul à gauche, ce qui nous donne :

$$\frac{1}{2}\|h_{k_2} - h_{k_1}\|^2 = \|h - h_{k_1}\|^2 + \|h - h_{k_2}\|^2 - 2\left\|h - \frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|^2.$$

Or, puisque h_{k_1} et h_{k_2} appartiennent tous deux à $\mathcal{C}_{k_1} \supset \mathcal{C}_{k_2}$, leur milieu $\frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}$ appartient aussi au convexe \mathcal{C}_{k_1} , et donc encore grâce à la propriété de minimisation, on a :

$$\|h - h_{k_1}\| \leq \left\|h - \frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\|,$$

c'est-à-dire de manière équivalente en multipliant par -1 :

$$-\left\|h - \frac{h_{k_1} + h_{k_2}}{2}\right\| \leq -\|h - h_{k_1}\|.$$

En revenant à l'égalité précédente, on en déduit alors une inégalité :

$$\frac{1}{2} \|h_{k_2} - h_{k_1}\|^2 \leq \|h - h_{k_2}\|^2 - \|h - h_{k_1}\|^2$$

qui implique que la suite double $\|h_{k_2} - h_{k_1}\|$ satisfait la condition dite de Cauchy pour la distance associée à la norme hilbertienne, puisque nous venons de voir que la suite décroissante positive $(\|h - h_k\|^2)_{k \geq 1}$ converge. Par complétude de l'espace de Hilbert H , la suite des h_k converge donc vers une certaine limite dans H . Soit h_∞ cette limite. Puisque $h_k \in \mathcal{C}^k$ pour tout k , on a $h_\infty \in \mathcal{C}^\infty$.

(f) D'après un résultat du cours (Théorème 5.2), pour k fixé quelconque, le projeté $h_k = \pi_{\mathcal{C}_k}(h)$ de h sur le convexe fermé \mathcal{C}_k est caractérisé par la propriété que :

$$\operatorname{Re} \langle h - h_k, g - h_k \rangle \leq 0,$$

pour tout autre élément $g \in \mathcal{C}_k$. En particulier puisque \mathcal{C}_∞ est contenu dans \mathcal{C}_k , cette inégalité est satisfaite pour tout $g \in \mathcal{C}_\infty$. Mais d'après la question précédente, la limite :

$$h_\infty := \lim_{k \rightarrow \infty} h_k$$

existe, et par continuité du produit scalaire, en passant à la limite quand $k \rightarrow \infty$, la famille d'inégalités précédentes devient :

$$\operatorname{Re} \langle h - h_\infty, g - h_\infty \rangle \leq 0,$$

pour tout $g \in \mathcal{C}_\infty$, ce qu'il fallait démontrer.

(g) Toujours d'après le même résultat du cours, ce jeu d'inégalités caractérise uniquement la projection de h sur le convexe fermé \mathcal{C}_∞ , donc il en découle que :

$$h_\infty = \pi_{\mathcal{C}_\infty}(h).$$

Pour conclure, le théorème « clair » énonce : 1) que la limite des projetés orthogonaux sur des convexes fermés emboîtés en famille dénombrable dont l'intersection totale est non vide existe ; 2) qu'elle est unique ; et 3) qu'elle coïncide avec la projection orthogonale sur le convexe fermé qui est l'intersection totale de tous ces convexes fermés ; ce résultat pourra aussi être considéré comme mathématiquement plus « clair » si on l'exprime sous la forme d'une seule équation :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \pi_{\mathcal{C}_k}(h) = \pi_{\bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k}(h).$$

Exercice 3. Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ème somme de Fejér (exercice subsidiaire : établir que :

$$K_n(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) e^{ik\theta} \quad \text{et que :} \quad \sigma_n(f)(\theta) = \sum_{k=-n}^{k=+n} \left(1 - \frac{|k|}{n}\right) \widehat{f}(k) e^{ik\theta}$$

qui est par définition la n -ème somme de Cesàro des sommes partielles de la série de Fourier de f :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta) + S_1(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=-k}^{l=+k} \widehat{f}(l) e^{il\theta}$$

est évidemment continue sur le cercle \mathbb{T} , puisque c'est un polynôme de degré $\leq n$ en les exponentielles complexes $e^{i\theta}$, $e^{-i\theta}$. D'après un calcul du cours, cette somme s'exprime comme la convolution avec le n -ème noyau de Fejér F_n :

$$\sigma_n(f)(\theta) = F_n * f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\eta) f(\theta - \eta) \frac{d\eta}{2\pi},$$

donc on peut alors majorer aisément :

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(\theta)| &\leq \max_{|\eta| \leq \pi} |f(\theta - \eta)| \int_{-\pi}^{\pi} |F_n(\eta)| \frac{d\eta}{2\pi} \\ &= \|f\|_{\mathcal{C}^0}, \end{aligned}$$

en se souvenant de la propriété cruciale que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale sur $[-\pi, +\pi]$ de ce noyau *positif* est toujours égale à 1 :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \|F_n\|_{L^1},$$

ce qui démontre finalement l'inégalité désirée en prenant le maximum sur θ à gauche :

$$\|\sigma_n(f)\|_{\mathcal{C}^0} \leq \|f\|_{\mathcal{C}^0}.$$

Exercice 4. Le zéro-ème coefficient de Fourier complexe de la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$ par :

$$f(\theta) := 1 - \frac{\theta^2}{\pi^2},$$

et prolongée comme fonction 2π -périodique (continue) sur \mathbb{R} tout entier est égal à :

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left(2\pi - \frac{1}{\pi^2} 2 \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$, si l'on se souvient que $\int_{-\pi}^{\pi} e^{il\theta} d\theta = 0$ pour tout entier $l \neq 0$, le k -ème coefficient de Fourier complexe de ladite fonction f se calcule grâce à deux intégrations par parties dont la nécessité ne fait pas de doute :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(1 - \frac{\theta^2}{\pi^2}\right) e^{-ik\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\theta^2}{\pi^2} \frac{1}{-ik} e^{-ik\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\theta}{\pi^2} \frac{1}{ik} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left[\frac{2\theta}{\pi^2} \frac{1}{k^2} e^{-ik\theta} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2}{\pi^2} \frac{1}{k^2} e^{-ik\theta} d\theta \\ &= -\frac{2}{\pi^2} \frac{1}{k^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Exercice 5. (a) La série de fonctions :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\sin^3(n\theta)}{n!}.$$

converge uniformément sur \mathbb{R} vers une fonction continue $S(\theta)$, puisque qu'elle converge normalement (et même très rapidement) :

$$\sum_{n \geq 1} \left| \frac{\sin^3(n\theta)}{n!} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} < \infty,$$

sachant que $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ croît plus vite, lorsque n tend vers l'infini, que toute puissance fixe n^a .

(b) - (c) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$4 \sin^3 t = 3 \sin t - \sin(3t),$$

d'après une formule classique de trigonométrie que l'on peut retrouver et re-deviner — au cas où l'on ne s'en souviennent pas — en développant tout simplement $\left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$. Si donc l'on pose :

$$\sigma(\theta) := \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(n\theta)}{n!},$$

série qui converge à nouveau uniformément grâce au même argument que ci-dessus, on voit que :

$$S(\theta) = \frac{3}{4} \sigma(\theta) - \frac{1}{4} \sigma(3\theta),$$

formule que l'on pouvait aussi re-deviner en examinant un peu à l'avance l'équation qui était écrite à la dernière question **(f)**. Pour montrer que $S(\theta)$ est \mathcal{C}^∞ , il suffit visiblement de montrer que $\sigma(\theta)$ est de classe \mathcal{C}^∞ . Mais si l'on dérive p fois terme à terme la série σ , on obtient une série :

$$\sum_{n \geq 1} n^p \frac{\sin(n\theta)}{n!}$$

qui est à nouveau normalement convergente, puisque $n!$ croît plus vite que toute puissance fixe n^a . D'après le théorème classique d'existence d'une série dérivée, il en découle par récurrence sur p que la dérivée p -ème de σ existe, qu'elle est continue et 2π -périodique et qu'elle est donnée par cette série infinie normalement convergente dérivée terme à terme :

$$\sigma^{(p)}(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} n^p \frac{\sin(n\theta)}{n!}.$$

(d) Puisque $\sigma(\theta)$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur le cercle $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, donc en particulier de classe \mathcal{C}^1 , le théorème connu de Dirichlet — En fait, le théorème le plus élémentaire de Dini s'applique aussi directement, non pas seulement aux fonctions höldériennes de classe \mathcal{C}^α avec $0 < \alpha \leq 1$, mais aussi bien entendu aux fonctions de classe \mathcal{C}^1 qui sont beaucoup plus régulières — montre qu'elle s'identifie, en tout point du cercle, à sa série de Fourier :

$$\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\sigma}(k) e^{ik\theta}.$$

Mais comme $\sigma(\theta)$ s'écrit déjà sous la forme d'une série trigonométrique absolument convergente, on en déduit sans aucun calcul — grâce à un résultat du cours qui dit qu'une

série trigonométrique normalement convergente est la série de Fourier de la fonction continue qu'elle définit sur le cercle — que $\widehat{\sigma}(0) = 0$ et que :

$$\widehat{\sigma}(k) = \frac{1}{2i} \frac{\text{sign}(k)}{|k|!} \quad \text{pour } |k| \geq 1,$$

Maintenant, en remplaçant θ par 3θ :

$$\sigma(3\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{e^{i3n\theta} - e^{-i3n\theta}}{2i},$$

et en revenant à la relation $S(\theta) = \frac{3}{4}\sigma(\theta) - \frac{1}{4}\sigma(3\theta)$, il vient $\widehat{S}(0) = 0$ et enfin pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \widehat{S}(3k-2) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{(3k-2)!} \right), & \widehat{S}(3k-1) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{(3k-1)!} \right), & \widehat{S}(3k) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{1}{(3k)!} - \frac{1}{4} \frac{1}{k!} \right), \\ \widehat{S}(-3k+2) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{-1}{(3k-2)!} \right), & \widehat{S}(-3k+1) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{-1}{(3k-1)!} \right), & \widehat{S}(-3k) &= \frac{1}{2i} \left(\frac{3}{4} \frac{-1}{(3k)!} - \frac{1}{4} \frac{-1}{k!} \right). \end{aligned}$$

(e) - (f) Pour le calcul explicite de $\tau(\theta) + i\sigma(\theta)$, si l'on introduit, comme cela a été suggéré :

$$\tau(\theta) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\theta}{n!},$$

on observe en posant $z := e^{i\theta}$, que l'on peut écrire $\tau + i\sigma$ sous une forme simple :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z - 1$$

qui fait naturellement apparaître l'exponentielle complexe e^z . Donc on a :

$$\tau(\theta) + i\sigma(\theta) = e^z = e^{e^{i\theta}} = e^{\cos\theta + i\sin\theta} = e^{\cos\theta} e^{i\sin\theta} = e^{\cos\theta} [\cos(\sin\theta) + i\sin(\sin\theta)],$$

ce qui donne en identifiant les parties imaginaires à gauche et à droite :

$$\sigma(\theta) = e^{\cos\theta} \sin(\sin\theta).$$

Enfin, on obtient bien la formule explicite annoncée :

$$S(\theta) = \frac{3}{4} \sin(\sin\theta) e^{\cos\theta} - \frac{1}{4} \sin(\sin 3\theta) e^{\cos 3\theta}.$$

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ ayant une série de Fourier de la forme $\sum_{n \geq 1} b_n \sin(n\theta)$ avec $b_n \in \mathbb{R}$.

(a) Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la n -ème somme partielle de la série de Fourier de f est donc égale à :

$$S_n(f)(\theta) = \sum_{k=1}^n b_k \sin(k\theta),$$

fonction qui est visiblement impaire. Il en découle que la n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f)(\theta)$ est elle aussi impaire, puisque :

$$\sigma_n(f)(\theta) = \frac{S_0(f)(\theta) + S_1(f)(\theta) + \cdots + S_{n-1}(f)(\theta)}{n}.$$

Or d'après le théorème de Fejér, la suite $(\sigma_n(f)(\theta))_{n \geq 1}$ converge uniformément, lorsque n augmente jusqu'à l'infini, vers f . Donc f elle-même est impaire.

(b) La primitive $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de f définie par :

$$F(\theta) := - \int_0^\theta f(t) dt$$

est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} tout entier puisque f est continue, et elle est aussi 2π -périodique, puisque l'on a grâce à la règle de Chasles :

$$F(\theta + \pi) - F(\theta - \pi) = - \int_{\theta-\pi}^{\theta+\pi} f(t) dt = 0,$$

cette dernière intégrale s'annulant automatiquement par imparité de f .

Maintenant, calculons en appliquant le théorème de Fubini à la fonction continue (dont intégrable) $(t, \theta) \mapsto f(t)$ le zéro-ème coefficient de Fourier de F :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(0) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\theta f(t) dt \right] d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt \int_t^{2\pi} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) (t - 2\pi) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} t f(t) dt - \underbrace{\int_0^{2\pi} f(t) dt}_{=\widehat{f}(0)=0} \end{aligned}$$

Ensuite, calculons, à nouveau grâce au théorème de Fubini, le k -ème coefficient de Fourier de F , pour un $k \in \mathbb{Z}^*$ arbitraire :

$$\begin{aligned} \widehat{F}(k) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\theta f(t) dt \right] e^{-ik\theta} d\theta = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \left[\int_t^{2\pi} e^{-ik\theta} d\theta \right] dt \\ &= \frac{1}{2ik\pi} \int_0^{2\pi} (1 - e^{-ikt}) f(t) dt = \frac{1}{ik} (\widehat{f}_0 - \widehat{f}(k)) = -\frac{1}{ik} \widehat{f}(k). \end{aligned}$$

Mais comme on a par hypothèse :

$$\widehat{f}(k) = \begin{cases} -\frac{i}{2} b_k & \text{pour } k \geq 1, \\ +\frac{i}{2} b_{-k} & \text{pour } k \leq -1, \end{cases}$$

on obtient bien comme voulu :

$$\widehat{F}(k) = \frac{1}{2|k|} b_{|k|} \quad \forall k \in \mathbb{Z}^*.$$

Exercice 7. D'après la formule de Parseval, la série de terme général $|\widehat{f}(k)|^2$ converge et est égale au carré de la norme L^2 de la fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$, à savoir l'on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \|f\|_{L^2}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Mais par ailleurs, l'inégalité de Cauchy-Schwarz permet alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, de majorer la somme partielle à étudier :

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{|k| \leq n \\ k \neq 0}} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k} &\leq \left(\sum_{\substack{|k| \leq n \\ k \neq 0}} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\substack{|k| \leq n \\ k \neq 0}} \frac{1}{k^2} \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \cdot \left(2 \frac{\pi^2}{6} \right)^{1/2} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

par une quantité qui est bornée uniformément par rapport à n , ce qui montre que la série à termes positifs $\sum_{k \in \mathbb{Z}^*} \frac{|\widehat{f}(k)|}{k}$ est effectivement *absolument* convergente, *cqfd*.

3. Examen 2

Exercice 1. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ telle que :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$. Soit $(\rho_j)_{j \geq 1}$ une suite régularisante, c'est-à-dire plus précisément une suite de fonctions $\rho_j \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\rho_j \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x) dx = 1$ et $\text{supp } \rho_j \subset [-\varepsilon_j, +\varepsilon_j]$ pour une certaine suite de réels ε_j tels que $0 < \varepsilon_j \leq 1$ satisfaisant $\lim_{j \rightarrow \infty} \varepsilon_j = 0$.

(a) Montrer que toutes les régularisées $f * \rho_j$ de la fonction f sont identiquement nulles.

(b) Soit a un réel strictement positif et posons $b := a + 1$. Montrer que, pour tout réel x tel que $|x| \leq a$ et pour tout entier $j \geq 1$, on a :

$$\rho_j * f(x) = \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b,b]} f)(x) = 0.$$

(c) Montrer que :

$$\|\mathbf{1}_{[-b,b]} f - \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b,b]} f)\|_{L^1} \geq \int_{-a}^{+a} |f(x)| dx.$$

(d) En déduire que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. On considère l'espace $\mathcal{C} := \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$ des fonctions continues sur le segment $[-1, 1] \subset \mathbb{R}$ à valeurs complexes, et on le muni du produit sesquilinéaire :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (f, g \in \mathcal{C}).$$

(a) Justifier en quelques mots le caractère sesquilinéaire de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et expliquer brièvement pourquoi $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$ définit une norme sur les éléments $f \in \mathcal{C}$.

(b) En les énonçant soigneusement, rappeler au moins trois théorèmes fondamentaux du cours concernant l'espace $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$.

(c) On s'intéresse à la suite, indexée par un entier $n \geq 1$, de fonctions (impaires) $f_n : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de \mathcal{C} qui sont définies par :

$$f_n(t) := \begin{cases} nt & \text{lorsque } |t| < \frac{1}{n} \\ \text{sgn}(t) \cdot 1 & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leq |t| \leq 1. \end{cases}$$

Montrer que pour tous entiers $1 \leq n \leq m$, on a la majoration (non optimale) :

$$\|f_m - f_n\| \leq \frac{2}{\sqrt{3n}}.$$

Indication: Majorer séparément $\int_0^{\frac{1}{m}}$ et $\int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}}$, ou trouver une majoration alternative simple qui pourra interpréter le rôle que l'on attend d'elle.

(d) Montrer que cette suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge pour la norme $\|\cdot\|$ sur l'espace $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ vers une fonction qui vaut presque partout 1 sur $]0, 1]$ et presque partout -1 sur $[-1, 0[$.

(e) L'espace \mathcal{C} muni de la norme $\|\cdot\|$ est-il un espace de Hilbert ? Interpréter intelligemment la réponse proposée.

Exercice 3. Sur la droite numérique complète \mathbb{R} , on considère l'équation de la chaleur définie en temps $t > 0$ par :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) \quad (x \in \mathbb{R}, t > 0),$$

d'inconnue $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$, avec distribution de température $u(x, 0)$ prescrite à l'origine des temps comme étant une certaine fonction intégrable donnée $f \in L^1(\mathbb{R})$:

$$0 = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \|u(\cdot, t) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})}.$$

Jusqu'à la Question (g) incluse, on suppose qu'il en existe une solution $u = u(x, t)$ de classe \mathcal{C}^2 par rapport à (x, t) pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, s'amenuisant ainsi que ses dérivées à l'infini :

$$0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) \quad (\forall t > 0),$$

et qui est de plus contrôlée ainsi que sa dérivée temporelle en termes d'une certaine fonction-majorante positive intégrable fixée $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$:

$$|u(x, t)| \leq g(x) \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x) \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}),$$

uniformément pour tout $t > 0$. On rappelle que la transformée de Fourier d'une fonction $h \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ est définie pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ par :

$$\widehat{h}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

(a) La transformée de Fourier de u par rapport à x s'exprimant alors comme :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx,$$

vérifier qu'elle est bien définie et qu'elle prend des valeurs finies.

(b) Montrer, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et tout $t \geq 0$, que :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

(c) Concocter une équation différentielle du premier ordre satisfaite par $\widehat{u}(\xi, t)$.

(d) Montrer que la fonction $t \mapsto \widehat{u}(\xi, t)$ est continue en $t = 0$, $t \geq 0$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé.

(e) Montrer que :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}(\xi, 0) e^{-4\pi^2\xi^2 t} \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0).$$

(f) Soient deux fonctions intégrables $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Comment s'exprime la transformée de Fourier $\widehat{h_1 * h_2}$ du produit de convolution — dont on rappellera la définition précise — en termes de $\widehat{h_1}$ et de $\widehat{h_2}$?

(g) Montrer que :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy.$$

Indication: On rappelle que pour tout paramètre réel $\sigma > 0$, la transformée de Fourier de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$ est la fonction $\xi \mapsto e^{-2\pi^2\sigma^2\xi^2}$.

(h) Conclure en démontrant que cette expression pour une fonction u résout le problème de la chaleur, *i.e.* satisfait les conditions requises.

Exercice 4. Soit l'espace \mathcal{C} défini dans l'Exercice 2.

(a) Pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque, on note \mathcal{P}_n le sous-espace vectoriel de \mathcal{C} qui est constitué des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ restreintes à $[-1, 1]$, et on note $\pi_n: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}_n$ le projecteur orthogonal, pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. À l'aide du cours, justifier soigneusement que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \pi_n(f)\| \quad (\forall f \in \mathcal{C}).$$

(b) Soit $(p_n)_{n=0}^{\infty}$ une famille infinie d'éléments $p_n \in \mathcal{P}_n$ qui est de plus orthonormale. Justifier que la sous-famille finie $\{p_0, \dots, p_n\}$ est libre pour tout $n \in \mathbb{N}$, et montrer ensuite que $\{p_0, \dots, p_n\}$ forme une base de \mathcal{P}_n , quel que soit n .

(c) Montrer, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et toute fonction $f \in \mathcal{C}$, que :

$$\pi_n(f) = \sum_{i=0}^n \langle f, p_i \rangle \cdot p_i$$

puis que :

$$\|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{i=0}^n |\langle f, p_i \rangle|^2.$$

(d) Montrer, pour une fonction $f \in \mathcal{C}$ quelconque, que la série de terme général $|\langle f, p_n \rangle|^2$ est convergente.

(e) Montrer en fait que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, p_n \rangle|^2 = \|f\|^2 \quad (\forall f \in \mathcal{C}).$$

(f) Tout en établissant son existence, déterminer la limite :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(t) \overline{p_n(t)} dt.$$

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) Les régularisées $f * \rho_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \rho_j(x-y) dy$ de la fonction f sont identiquement nulles, puisque chaque fonction $y \mapsto \rho_j(x-y)$ appartient à $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$.

(b) Soit a un réel strictement positif, soit $b := a + 1$, et soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| \leq a$. Alors, puisque le support chaque fonction ρ_j est contenu dans $[-1, 1]$ (par hypothèse, $0 < \varepsilon_j \leq 1$), le support de $y \mapsto \rho_j(x-y)$ est contenu dans $[-b, b]$, donc :

$$\begin{aligned} 0 = \rho_j * f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x-y) f(y) dy = \int_{-b}^{+b} \rho_j(x-y) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \rho_j(x-y) f(y) \mathbf{1}_{[-b,b]}(y) dy \\ &= \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b,b]} f)(x). \end{aligned}$$

(c) Sachant que pour toute fonction $g \in L^1(\mathbb{R})$, et pour tout $a > 0$ quelconque, on a trivialement :

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^1} &= \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx = \int_{-a}^{+a} |g(x)| dx + \int_{|x|>a} |g(x)| dx \\ &\geq \int_{-a}^{+a} |g(x)| dx, \end{aligned}$$

on voit immédiatement que :

$$\begin{aligned} \|\mathbf{1}_{[-b,b]} f - \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b,b]} f)\|_{L^1} &\geq \int_{-a}^{+a} |\mathbf{1}_{[-b,b]} f - \rho_j * (\mathbf{1}_{[-b,b]} f)| dx \\ &\geq \int_{-a}^{+a} |f(x)| dx. \end{aligned}$$

(d) Observons que $\mathbf{1}_{[-b,b]} f$ appartient à $L^1(\mathbb{R})$, puisque $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ par hypothèse. D'après un théorème du cours, le membre de gauche de la dernière inégalité tend vers zéro quant j tend vers ∞ . Ainsi, $\int_{-a}^{+a} |f(x)| dx = 0$, et puisque le réel positif a était arbitraire, on en déduit, comme demandé, que $f = 0$ presque partout.

Exercice 2. (a) Soient $f, f', f'', g, g', g'' \in \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$ et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Le produit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ défini par :

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx$$

satisfait manifestement :

$$\begin{aligned} \langle f' + f'', g \rangle &= \langle f', g \rangle + \langle f'', g \rangle, \\ \langle f, g' + g'' \rangle &= \langle f, g' \rangle + \langle f, g'' \rangle, \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}\langle \lambda f, g \rangle &= \int_{-1}^1 \lambda f(x) \overline{g(x)} dx = \lambda \langle f, g \rangle, \\ \langle f, \mu g \rangle &= \int_{-1}^1 f(x) \overline{\mu g(x)} dx = \bar{\mu} \langle f, g \rangle,\end{aligned}$$

ce qui montre qu'il est bien sesquilinéaire.

Ensuite, la quantité positive :

$$\|f\| := \left(\int_{-1}^1 |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\langle f, f \rangle},$$

satisfaisant $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$, qui s'annule si et seulement si $f(t) = 0$ pour presque tout $t \in [-1, 1]$, donc pour *tout* $t \in [-1, 1]$ puisque f est continue, constitue une *norme* sur $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$ — d'après un théorème du cours qui démontre que l'inégalité de Minkowski s'en déduit :

$$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

(b) • Premier théorème fondamental. L'espace $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel normé muni du produit scalaire standard :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-1}^1 f(x) \overline{g(x)} dx \quad (\forall f, g \in L^2[-1, 1]),$$

et sa norme associée :

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f, f \rangle}$$

satisfait l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f, g \rangle_{L^2}| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} \quad (\forall f, g \in L^2[-1, 1]).$$

• **Deuxième théorème fondamental.** Cet espace muni de la distance associée à sa norme :

$$d(f, g) := \|f - g\|_{L^2}$$

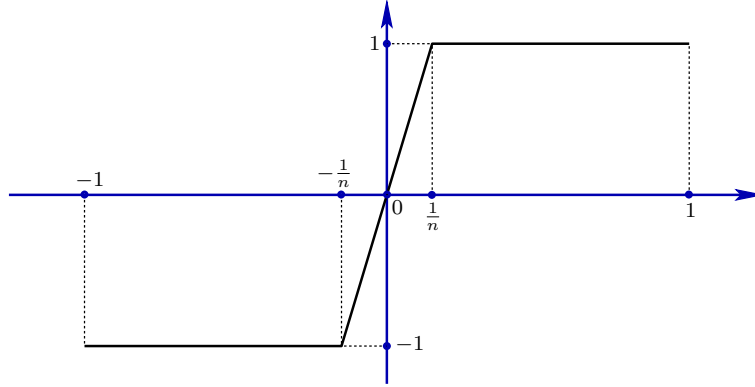
est *complet* : toutes les suites de Cauchy y sont convergentes vers des limites qui lui appartiennent.

• **Troisième théorème fondamental.** Enfin, $L^2([-1, 1], \mathbb{C})$ est *séparable*, à savoir il contient une suite (dénombrable !) de fonctions $(f_n)_{n=1}^\infty$ qui est *dense* :

$$\forall g \in L^2([-1, 1], \mathbb{C}) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \gg 1 \quad \|f_{N(\varepsilon)} - g\|_{L^2} \leq \varepsilon.$$

(c) Soit donc la suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions $f_n \in \mathcal{C}$ définies par :

$$f_n(t) := \begin{cases} nt & \text{lorsque } |t| \leq \frac{1}{n}, \\ \text{sign}(t) \cdot 1 & \text{lorsque } \frac{1}{n} \leq |t| \leq 1. \end{cases}$$



Soient aussi deux entiers $1 \leq n \leq m$. Comme f_n et f_m sont impaires :

$$\|f_m - f_n\|_{L^2} = 2 \left(\int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Calculons alors comme suggéré tout d'abord :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{m}} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt &= \int_0^{\frac{1}{m}} (mt - nt)^2 dt \\ &\leq \int_0^{\frac{1}{m}} (mt)^2 dt \\ &= m^2 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{m} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3m} \leq \frac{1}{3n}, \end{aligned}$$

puis :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |f_m(t) - f_n(t)|^2 dt &= \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (1 - nt)^2 dt \leq \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - 2nt + n^2 t^2) dt \\ &= \frac{1}{n} - 2n \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} \right)^2 + n^2 \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} \right)^3 \\ &= \frac{1}{3n}, \end{aligned}$$

la troisième intégrale $\int_{\frac{1}{n}}^1 (1 - 1)^2 = 0$ étant nulle, ce qui fait que nous obtenons bien :

$$\|f_m - f_n\|_{L^2}^2 \leq 2 \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} + 0 \right),$$

à savoir $\|f_m - f_n\|_{L^2} \leq \frac{2}{\sqrt{3n}}$.

(d) Ces inégalités montrent que $(f_n)_{n=1}^\infty$ est de Cauchy, puisque le majorant $\frac{2}{\sqrt{3n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Comme $L^2[-1, 1]$ est complet (théorème du cours), la suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge vers une certaine fonction-limite, $f_\infty \in L^2[-1, 1]$, laquelle est manifestement égale à 1 sur $]0, 1]$, puisque $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ en tout $x \in]0, 1]$, et égale à -1 sur $[-1, 0[$, pour la raison similaire que $f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1$ en tout $x \in [-1, 0[$. Enfin, $f_n(0) = 0$ pour tout n , donc $f_\infty(0) = 0$.

(e) Si $\mathcal{C}^0[-1, 1]$ était un espace de Hilbert, il devrait être complet, et comme notre suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge vers la fonction *discontinue* :

$$f_\infty(x) := \begin{cases} -1 & \text{lorsque } -1 \leq x < 0, \\ 0 & \text{pour } x = 0, \\ 1 & \text{lorsque } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

n'appartenant donc *pas* à $\mathcal{C}^0[-1, 1]$, nous avons *contredit* la complétude.

En conclusion, l'espace $\mathcal{C}^0[-1, 1]$, muni de la norme $\|\cdot\|_{L^2}$ hérité de l'inclusion $\mathcal{C}^0 \subset L^2$, n'est *pas* un espace de Hilbert — tant pis pour lui !

Exercice 3. (a) En utilisant l'hypothèse $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, on majore la transformée de Fourier par rapport à la variable x de la fonction u :

$$\begin{aligned} |\widehat{u}(\xi, t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, t)| dx \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty, \end{aligned}$$

donc \widehat{u} prend bien des valeurs finies.

(b) Le théorème de dérivabilité sous le signe intégrale s'applique grâce à l'hypothèse de domination de $|u(x, t)|$ et de $|\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)|$ par la fonction-majorante $g(x) \geq 0$ intégrable, et donc on a bien :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx \\ \text{[Équation de la chaleur]} \quad &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx. \end{aligned}$$

(c) Pour transformer cette intégrale, il est alors avisé d'effectuer *deux* intégrations par parties successives, en tenant compte des *deux* hypothèses agréables :

$$0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x, t) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) &= \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) e^{-2i\pi\xi x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + 2i\pi\xi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx \\ &= 0 + 2i\pi\xi \underbrace{\left[u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} \right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + (2i\pi\xi)^2 \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} dx, \end{aligned}$$

et conduit bien à une équation différentielle :

$$\frac{\partial \widehat{u}}{\partial t}(\xi, t) = -4\pi^2 \xi^2 \widehat{u}(\xi, t).$$

(d) Le théorème de continuité d'une intégrale à paramètre s'applique grâce à l'hypothèse de domination uniforme $|u(x, t)| \leq g(x)$ valable pour tout $t \geq 0$, avec $g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$, et donne :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \widehat{u}(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0} \left(u(x, t) e^{-2i\pi\xi x} \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-2i\pi\xi x} dx \\ &= \widehat{u}(\xi, 0). \end{aligned}$$

(e) L'équation différentielle de la Question (c) se résout, pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, en :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \text{constante} \cdot e^{-4\pi\xi^2 t^2} \quad (t > 0),$$

et comme on vient de justifier la continuité en $t = 0$, cette constante, qui dépend *a priori* de ξ , vaut alors nécessairement $\widehat{u}(\xi, 0)$, car $e^{-4\pi\xi^2 0} = 1$, ce qui démontre bien que :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}(\xi, 0) e^{-4\pi\xi^2 t^2} \quad (\forall \xi \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0).$$

(f) Le cours a démontré que le produit de convolution :

$$h_1 * h_2(x) := \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-y) h_2(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} h_1(y) h_2(x-y) dy,$$

commutatif, est toujours bien défini entre deux fonctions quelconques $h_1, h_2 \in L^1(\mathbb{R}^d)$, qu'il appartient aussi à $L^1(\mathbb{R}^d)$, avec une norme L^1 contrôlée par :

$$\|h_1 * h_2\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|h_1\|_{L^1(\mathbb{R})} \cdot \|h_2\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

et il a aussi démontré que le produit de convolution transforme une étoile en une multiplication :

$$\widehat{h_1 * h_2} = \widehat{h_1} \cdot \widehat{h_2}.$$

(g) Pour reconnaître dans l'indication fournie la fonction $\xi \mapsto e^{-4\pi^2\xi^2 t}$ qui est apparue dans la Question (e), il suffit de poser :

$$\sigma^2 := 2t,$$

ce qui offre l'information que la transformée de Fourier de la fonction :

$$\mathbf{N}_t: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \quad (t > 0)$$

vaut :

$$\widehat{\mathbf{N}}_t(\xi) = e^{-2\pi^2 2t\xi^2},$$

et donc, en revenant aux Question (e) et (f) dont le résultat devient :

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}(\xi, 0) \cdot \mathbf{N}_t(\xi) = u(\cdot, 0) * \widehat{\mathbf{N}}_t(\cdot)(\xi),$$

on déduit grâce à l'injectivité de la transformée de Fourier que pour tout $t > 0$:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (u(\cdot, 0) * \widehat{\mathbf{N}}_t(\cdot))(x) \\ &= f * \mathbf{N}_t(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy. \end{aligned}$$

Observons d'ailleurs, comme $f \in L^1(\mathbb{R})$ et comme $t > 0$, que cette intégrale est très convergente grâce à la présence du facteur exponentiel fortement décroissant à l'infini.

(h) Jusqu'à présent, on a raisonné *par analyse*, à savoir en supposant qu'il existe une solution, et il est temps maintenant de raisonner *par synthèse*.

Si donc $f \in L^1(\mathbb{R})$ est la condition de température au bord donnée, nous affirmons que l'expression :

$$u(x, t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} dy$$

résout l'équation de la chaleur.

Tout d'abord, l'expression alternative :

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy$$

permet, en trouvant des majorants des dérivées partielles, que u est \mathcal{C}^∞ dans $\{(x, t) : x \in \mathbb{R}, t > 0\}$, grâce à la décroissance très forte du facteur exponentiel, et grâce à $f \in L^1(\mathbb{R})$.

Ensuite, comme la famille :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{y^2}{4t}} \right)_{t>0},$$

qui est une simple renormalisation du noyau gaussien :

$$\left(K_\delta(x) := \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi y^2}{\delta}} \right)_{\delta>0},$$

est une approximation de l'unité pour la convolution lorsque $\delta \xrightarrow{>} 0$, ce qui a été vu en cours, on déduit la convergence :

$$0 = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \|f * N_t - f\|_{L^1(\mathbb{R})} = \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \|u(\cdot, t) - f(\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R})},$$

ce qui démontre que $u(x, t) = f * N_t(x)$ pour $t > 0$ satisfait bien la condition au bord en $t = 0$.

Exercice 4. (a) Soit donc l'espace $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbb{C})$ muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$ de norme associée $\|\cdot\|_{L^2}$, et soient les sous-espaces vectoriels :

$$\mathcal{P}_n := \left\{ x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \Big|_{[-1, 1]} : a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C} \right\}.$$

Puisque l'intervalle $[-1, 1]$ est d'intérieur non vide, \mathcal{P}_n est de dimension $n + 1$.

Soit $f \in \mathcal{C}$. Nous savons d'après le théorème de Weierstrass que toute fonction continue sur $[-1, 1]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales, à savoir qu'il existe une suite $(q_n)_{n=0}^\infty$ de polynômes $q_n \in \mathcal{P}_n$ telle que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \gg 1 \quad (n \geq N(\varepsilon) \implies \|f - q_n\|_{\mathcal{C}^0[-1, 1]} \leq \varepsilon).$$

Or comme on a l'inégalité entre normes pour $h \in \mathcal{C}^0[-1, 1] \subset L^2[-1, 1]$:

$$\begin{aligned} \|h\|_{L^2[-1, 1]} &= \left(\int_{-1}^1 |h(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|h\|_{\mathcal{C}^0[-1, 1]} \left(\int_{-1}^1 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|h\|_{\mathcal{C}^0[-1, 1]} \sqrt{2}, \end{aligned}$$

il vient aussi la convergence en norme L^2 :

$$\|f - q_n\|_{L^2[-1,1]} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Enfin, d'après un théorème du cours, si $\pi_n: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}_n$ désigne la projection orthogonale pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2}$, on a toujours pour tout polynôme $r_n \in \mathcal{P}_n$:

$$\begin{aligned} \|f - \pi_n(f)\|_{L^2} &= \inf_{r_n \in \mathcal{P}_n} \|f - r_n\|_{L^2} \\ &\leq \|f - q_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(b) Soit donc $(p_n)_{n=0}^\infty$ avec $p_n \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \geq 0$ satisfaisant l'orthonormalité :

$$\langle p_{n_1}, p_{n_2} \rangle_{L^2} = \delta_{n_1, n_2} \quad (n_1, n_2 \geq 0).$$

Fixons $n \geq 0$, et supposons qu'il existe une relation de dépendance linéaire dans \mathcal{P}_n :

$$0 = \lambda_0 p_0 + \dots + \lambda_n p_n \quad (\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}).$$

Alors en prenant tout simplement les produits scalaires $\langle \cdot, p_0 \rangle, \dots, \langle \cdot, p_n \rangle$, il vient :

$$0 = \lambda_0, \dots, 0 = \lambda_n,$$

ce qui établit l'indépendance linéaire. Enfin, comme $\{p_0, \dots, p_n\}$ est de cardinal $n + 1 = \dim \mathcal{P}_n$, c'est nécessairement une base d'après un résultat connu d'algèbre linéaire.

(c) Le cours a démontré que :

$$\pi_n(f) = \sum_{i=0}^n \langle f, p_i \rangle \cdot p_i,$$

et en a aussi déduit que :

$$\|\pi_n(f)\|^2 = \sum_{i=0}^n |\langle f, p_i \rangle|^2.$$

(d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'espace $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{C}$ est fermé car de dimension finie, donc son orthogonal \mathcal{P}_n^\perp existe et est fermé, et d'ailleurs, toute fonction $f \in \mathcal{C}$ se décompose en :

$$f = \underbrace{\pi_n(f)}_{\in \mathcal{P}_n} + \underbrace{f - \pi_n(f)}_{\in \mathcal{P}_n^\perp},$$

avec, d'après le théorème de Pythagore (en dimension infinie) :

$$\|f\|^2 = \|\pi_n(f)\|^2 + \|f - \pi_n(f)\|^2,$$

d'où l'inégalité de contrôle fini uniforme en $n \geq 0$:

$$\sum_{i=0}^n |\langle f, p_i \rangle|^2 = \|\pi_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2 < \infty,$$

ce qui montre bien que la série de terme général :

$$(|\langle f, p_i \rangle|^2)_{i=0}^\infty$$

est convergente.

(e) D'après la Question (a), le terme-reste $\|f - \pi_n(f)\|^2$ tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, ce qui établit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\langle f, p_n \rangle|^2 = \|f\|^2.$$

(f) Soit une fonction $f \in \mathcal{C}$ fixée. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\langle f, p_n \rangle_{L^2[-1,1]} = \int_{-1}^1 f(t) \overline{p_n(t)} dt,$$

et comme le membre de gauche tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini à cause de la convergence qui vient d'être établie, on conclut que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 f(t) \overline{p_n(t)} dt.$$

5. Examen 3

Exercice 1. Soit la famille des noyaux de Fejér sur $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ indexée par $n \in \mathbb{N}^*$:

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2 \quad \text{si } \theta \notin 2\pi\mathbb{Z}; \quad F_n|_{2\pi\mathbb{Z}} = n.$$

(a) Rappeler de manière concise les trois propriétés fondamentales dont jouissent ces F_n .

(b) Soit un exposant $1 \leq p < \infty$, d'exposant conjugué p' . En utilisant l'inégalité de Hölder et avec $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, montrer que pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, on a :

$$|\sigma_n(f)(\theta)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^p F_n(t) dt.$$

(c) Montrer l'inégalité suivante entre normes L^p :

$$\|\sigma_n(f)\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p}.$$

(d) Établir, pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, l'identité :

$$f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta - t)) F_n(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

(e) Montrer que l'on a :

$$(\|f - \sigma_n(f)\|_{L^p})^p \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p d\theta \right) dt.$$

(f) Conclure que l'on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \sigma_n(f)\|_{L^p}.$$

Exercice 2. On dit qu'une suite d'éléments $(f_n)_{n \geq 1}$ d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert $(H, \|\cdot\|_H)$ converge *faiblement* vers un élément f de H si, pour tout $g \in H$, la suite numérique $\langle f_n, g \rangle$ converge, lorsque $n \rightarrow \infty$, vers $\langle f, g \rangle$. On dit qu'une telle suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge *fortement* (ou *converge en norme*) vers un élément f de H lorsque $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_H$.

(a) En supposant qu'elle existe, montrer que la limite faible d'une suite est unique.

(b) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge fortement vers f , montrer qu'elle converge faiblement vers f .

(c) Dans $\ell^2(\mathbb{C})$, trouver une suite qui converge faiblement sans converger fortement.

(d) Étant donné une suite quelconque $(b_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, la suite associée :

$$b_n^- := \inf \{b_m : m \geq n\}$$

est croissante, et on définit :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n := \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n^-,$$

un nombre appartenant à $[-\infty, \infty]$. Vérifier, pour tout entier $N \geq 1$ fixé, que l'on a :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq 1} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq N}.$$

(e) Si une autre suite de nombres réels $(a_n)_{n \geq 1}$ satisfait $a_n \leq b_n$ pour tout $n \geq 1$ et converge vers un réel $a \in \mathbb{R}$, en déduire que $a \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n$.

(f) Si $(f_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers f , en déduire que :

$$\|f\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H.$$

(g) Étant donné à nouveau une suite quelconque $(b_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels, l'autre suite associée :

$$b_n^+ := \sup \{b_m : m \geq n\}$$

est décroissante, et on définit :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} b_n := \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^+,$$

un nombre appartenant aussi à $[-\infty, \infty]$. Vérifier que b_n converge vers une limite $b \in [-\infty, \infty]$ si et seulement si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

(h) Montrer qu'une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge fortement vers un vecteur $f \in H$ si et seulement si elle converge faiblement vers f et si, de plus, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$.

Exercice 3. Le but ici est d'établir que de toute suite infinie d'éléments $(f_n)_{n \geq 1}$ d'un \mathbb{C} -espace de Hilbert H qui est *bornée* :

il existe une constante $M > 0$ telle que $\|f_n\|_H \leq M$ pour tout $n \geq 1$,

on peut extraire une sous-suite $(f_{n_l})_{l \geq 1}$ qui converge faiblement (au sens de l'Exercice précédent) vers un certain vecteur $f \in H$.

(a) Montrer par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une suite $(f_n^k)_{n \geq 1}$ extraite de $(f_n)_{n \geq 1}$ telle que, pour tout entier $1 \leq j \leq k$, la limite :

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \langle f_n^k, f_j \rangle$$

existe dans \mathbb{C} et est égale à un certain nombre complexe c_j .

(b) On introduit la suite dite *diagonale* :

$$(g_l)_{l \geq 1} := (f_l^l)_{l \geq 1}.$$

Vérifier d'abord que :

$$\sup_{l \geq 1} \|g_l\|_H \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_H \leq M.$$

Montrer ensuite que pour *tout* entier $j \geq 1$ fixé, la suite de nombres complexes $(\langle g_l, f_j \rangle)_{l \geq 1}$ converge aussi, lorsque $l \rightarrow \infty$, vers le même nombre complexe c_j .

(c) Soit $V := \text{Vect}_{\mathbb{C}}\{f_n : n \geq 1\}$ le \mathbb{C} -espace vectoriel engendré par tous les vecteurs f_n de la suite initiale. Montrer que pour tout $f \in V$, on a :

$$0 = \lim_{l, m \rightarrow \infty} |\langle f, g_m - g_l \rangle|.$$

(d) Soit $u \in H$ un vecteur arbitraire. Si \bar{V} désigne l'adhérence (la fermeture) de V dans $(H, \|\cdot\|_H)$, justifier que l'on puisse écrire $u = v + w$ avec $v \in \bar{V}$ et $w \in \bar{V}^\perp$.

(e) Montrer alors que la suite $(\langle v, g_l \rangle)_{l \geq 1}$ à valeurs dans \mathbb{C} est de Cauchy.

(f) En déduire que pour tout $u \in H$, la suite $\langle u, g_l \rangle$ converge vers une certaine limite $\ell(u) \in \mathbb{C}$ et vérifier que l'application $\ell: H \rightarrow \mathbb{C}$ est linéaire.

(g) Montrer que $|\ell(u)| \leq M \|u\|_H$.

(h) Conclure qu'il existe un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \langle u, g_l \rangle = \langle u, g \rangle,$$

pour tout $u \in H$.

Exercice 4. Rappeler la définition du noyau de Fejér $F_n(\theta)$ sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$, et montrer que pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, on a :

$$\left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi} \right| \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1}.$$

Exercice 5. Soient E et F deux espaces de Hilbert et soit $T: E \rightarrow F$ un opérateur linéaire continu.

(a) Montrer qu'il existe un unique opérateur linéaire continu $T^*: F \rightarrow E$ satisfaisant :

$$\langle T(x), y \rangle_F = \langle x, T^*(y) \rangle_E,$$

pour tout $x \in E$ et pour tout $y \in F$.

(b) Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$.

(c) Montrer que $(T^*)^* = T$.

(d) Montrer que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$.

Exercice 6. Soit f une application 2π -périodique sur \mathbb{R} qui est de classe \mathcal{C}^k , i.e. qui admet des dérivées jusqu'à l'ordre k et dont la k -ème dérivée $f^{(k)}$ est continue, 2π -périodique sur \mathbb{R} .

(a) Montrer que :

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{n^k}\right),$$

quand $|n| \rightarrow \infty$.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $S_n(f)(\theta) = \sum_{|j| \leq n} \widehat{f}(j) e^{ij\theta}$ la n -ème somme partielle de la série de Fourier d'une fonction $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. Montrer que :

$$\|f - S_n(f)\|_{\mathcal{C}^0} = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right),$$

quand $n \rightarrow \infty$.

(c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ et soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que si :

$$\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{n^k}\right),$$

quand $|n| \rightarrow \infty$, alors f est une fonction de classe \mathcal{C}^{k-2} .

Exercice 7. Soit une fonction :

$$f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) \cap \mathcal{C}_{\text{pm}}^1(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$$

une fonction continue, \mathcal{C}^1 par morceaux et 2π -périodique sur \mathbb{R} .

(a) Montrer que la série de Fourier de f converge normalement sur \mathbb{R} .

(b) En déduire que l'on a :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) • Première propriété : Tous les $F_n \geq 0$ sont positifs sur $[-\pi, \pi]$.

• **Deuxième propriété :** $1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}$, quel que soit $n \geq 1$.

• **Troisième propriété :** Pour tout $0 < \delta < \pi$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \leq |t| \leq \pi} |F_n(t)|.$$

(b) En partant de :

$$\sigma_n(f)(\theta) = f * F_n(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) F_n(t) \frac{dt}{2\pi},$$

et en utilisant la décomposition $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$ du nombre 1 en deux parties, on majore :

$$\begin{aligned} |\sigma_n(f)(\theta)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ \text{[Astuce intersidérale !]} &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)| F_n(t)^{\frac{1}{p}} \cdot F_n(t)^{\frac{1}{p'}} \frac{dt}{2\pi} \\ \text{[Inégalité de Hölder]} &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^p F_n(t)^{\frac{p}{p}} \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)^{\frac{p'}{p'}} \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^p F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(c) En appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, on parvient à l'inégalité demandée :

$$\begin{aligned} \left(\|\sigma_n(f)\|_{L^p} \right)^p &= \int_{-\pi}^{\pi} |\sigma_n(f)(\theta)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ \text{[Question (b)]} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^p F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ \text{[Tonelli]} &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \\ \text{[Poser } u := \theta - t\text{]} &= 1 \cdot \int_{-\pi}^{\pi} |f(u)|^p \frac{du}{2\pi} \\ &= (\|f\|_{L^p})^p. \end{aligned}$$

(d) On calcule en effet aisément :

$$\begin{aligned} f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta) &= f(\theta) \cdot 1 - \sigma_n(f)(\theta) = f(\theta) \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta - t)) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

(e) Il s'agit de ré-utiliser la même astuce intersidérale qui, à la Question (b), consistait à écrire :

$$F_n(t) = F_n(t)^{\frac{1}{p}} \cdot F_n(t)^{\frac{1}{p'}},$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} |f(\theta) - \sigma_n(f)(\theta)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta) - f(\theta - t)) F_n(t)^{\frac{1}{p}} \cdot F_n(t)^{\frac{1}{p'}} \frac{dt}{2\pi} \right| \\ \text{[Hölder]} \quad &\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p F_n(t)^{\frac{p}{p}} \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p}} \underbrace{\left(\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t)^{\frac{p'}{p'}} \frac{dt}{2\pi} \right)^{\frac{1}{p'}}}_{=1!}, \end{aligned}$$

d'où en prenant la puissance p-ème et en intégrant par rapport à θ :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} &\leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p F_n(t) \frac{dt}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \\ \text{[Tonelli]} \quad &= \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

(f) Soit l'opérateur de translation des fonctions :

$$\tau_t(f)(\theta) := f(\theta - t).$$

Un théorème du cours a démontré que :

$$0 = \lim_{t \rightarrow 0} \|f - \tau_t(f)\|_{L^p},$$

c'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que, pour tout $|t| \leq \delta$, on a :

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \leq \varepsilon.$$

Maintenant, découpons en deux morceaux l'intégrale $\int_{|t| \leq \pi} = \int_{|t| \leq \delta} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi}$ obtenue à l'instant :

$$\begin{aligned} (\|f - \sigma_n(f)\|_{L^p})^p &= \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(\theta) - f(\theta - t)|^p \frac{d\theta}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \int_{|t| \leq \delta} F_n(t) \varepsilon \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) (\|f - \tau_t(f)\|_{L^p})^p \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) (\|f\|_{L^p} + \|\tau_t(f)\|_{L^p})^p \frac{dt}{2\pi} \\ &= \varepsilon \cdot 1 + (2\|f\|_{L^p})^p \underbrace{\int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0}, \end{aligned}$$

et donc il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que ce dernier terme soit $\leq \varepsilon$ quel que soit $n \geq N(\varepsilon)$, et au final :

$$\left(\|f - \sigma_n(f)\|_{L^p} \right)^p \leq \varepsilon + \varepsilon \quad (\forall n \geq N(\varepsilon)).$$

Exercice 2. (a) Étant donné deux éléments f' et f'' satisfaisant, pour tout $g \in H$:

$$\langle f', g \rangle_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, g \rangle_H = \langle f'', g \rangle_H,$$

on déduit par soustraction $0 = \|f'' - f'\|_H^2$ en prenant $g := f'' - f'$, c'est-à-dire $f'' = f'$.

(b) Supposons donc la convergence forte $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_H$. Alors pour $g \in H$ quelconque, on déduit grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle f_n, g \rangle_H - \langle f, g \rangle_H| = |\langle f_n - f, g \rangle_H| \leq \|f_n - f\|_H \|g\|_H \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui montre effectivement que f_n converge faiblement vers f .

(c) Soit la base hilbertienne canonique $(e_i)_{i \geq 1}$ de $\ell^2(\mathbb{C})$ constituée des vecteurs élémentaires :

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots) \in \mathbb{C}^\infty,$$

avec 1 à la i -ème place, et zéro partout ailleurs. Alors la suite $(e_n)_{n \geq 1}$ converge faiblement vers 0, puisque, pour tout $g = (g_1, g_2, \dots) \in \ell^2(\mathbb{C})$, à savoir satisfaisant $\sum_{i=1}^{+\infty} |g_i|^2 < \infty$, on a immédiatement $\langle e_n, g \rangle = g_n$ qui tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, puisque le terme général de toute série convergente *doit au moins* converger vers 0. Mais bien entendu, cette suite $(e_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas fortement vers 0, puisque tous ces vecteurs de base e_n sont de norme 1 !

(d) La suite translatée $(c_n)_{n \geq 1} := (b_{n+N-1})_{n \geq 1}$ a pour suite croissante associée :

$$c_n^- = \inf \{c_m : m \geq n\} = \inf \{b_{m+N-1} : m \geq n\} = \inf \{b_m : m \geq n+N-1\} = \bar{b}_{n+N-1},$$

et comme une translatée quelconque d'une suite (croissante) convergente possède toujours la même limite que la suite originale, on déduit que l'on a bien :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n^- = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{b}_{n+N-1} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq N}.$$

(e) Maintenant, puisque par hypothèse a_n converge vers a lorsque $n \rightarrow \infty$, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geq N \implies (a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon)$$

Alors pour tous ces entiers $n \geq N$, on déduit de l'hypothèse $a_n \leq b_n$ que :

$$a - \varepsilon \leq b_n.$$

Par conséquent, en appliquant **(d)** :

$$a - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq N} = \liminf_{n \rightarrow \infty} (b_n)_{n \geq 1},$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitrairement petit, on conclut comme demandé que $a \leq \liminf (b_n)_{n \geq 1}$.

(f) On a par hypothèse de convergence simple :

$$(\|f\|_H)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, f_n \rangle_H.$$

Mais l'inégalité de Cauchy-Schwarz contraint, pour tout entier $n \geq 1$, à ce que :

$$|\langle f, f_n \rangle_H| \leq \|f\|_H \|f_n\|_H$$

Une application directe du résultat de la question précédente donne alors :

$$(\|f\|_H)^2 \leq \|f\|_H \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H,$$

ce qui est la conclusion désirée à un facteur $\|f\|_H$ près.

(g) Il est immédiatement clair par définition que b_n jouit pour tout entier $n \geq 1$, de l'encadrement :

$$b_n^- \leq b_n \leq b_n^+,$$

et donc si les deux suites encadrantes convergent vers une limite identique, cela force manifestement b_n à converger vers la même limite.

Réciproquement, si b_n converge vers une limite b , à savoir si, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N = N(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geq N \implies (b - \varepsilon \leq b_n \leq b + \varepsilon),$$

alors on déduit sans effort que pour ces mêmes entiers $n \geq N$:

$$b - \varepsilon \leq b_n^- \quad \text{et} \quad b_n^+ \leq b + \varepsilon,$$

d'où en prenant les deux limites :

$$b - \varepsilon \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} b_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n \leq b + \varepsilon,$$

et comme $\varepsilon > 0$ était arbitraire, on a bien égalité des deux limites inférieure et supérieure.

(h) Si f_n converge fortement vers f , on a déjà vu qu'elle converge faiblement vers f , tandis que la continuité de la norme $\|\cdot\|_H$ vue en cours et la question qui précèdent assurent que :

$$\|f\|_H = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H = \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H$$

Réciproquement, le résultat de la question **(f)** et la deuxième hypothèse donnent un jeu d'(in)égalités :

$$\|f\|_H \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H = \|f\|_H$$

qui contraint visiblement, grâce à la question qui précède, à l'existence de la limite :

$$\|f\|_H = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_H.$$

Si donc l'on veut établir que les f_n convergent fortement vers f , on estime la norme au carré de leurs différences :

$$\|f - f_n\|_H^2 = \|f\|_H^2 + \|f_n\|_H^2 - 2 \operatorname{Re} \langle f_n, f \rangle,$$

et l'on voit à droite que le second terme tend vers $\|f\|_H^2$, tandis que grâce à l'hypothèse de convergence faible, le troisième terme tend vers $-2 \operatorname{Re} \langle f, f \rangle = -2 \|f\|_H^2$, ce qui donne une somme qui tend vers 0, ce qu'il fallait démontrer.

Exercice 3. (a) Soit $k = 1$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} |\langle f_n, f_1 \rangle| &\leq \|f_n\|_H \|f_1\|_H \\ &\leq M \|f_1\|_H \end{aligned}$$

montre que la première suite $(\langle f_n, f_1 \rangle)_{n \geq 1}$ de nombres complexes est bornée, à valeurs dans le disque fermé de centre l'origine dans \mathbb{C} et de rayon $M \|f_1\|_H$. Par compacité d'un tel disque, il est donc possible d'extraire une sous-suite $(f_n^1)_{n \geq 1}$ de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de telle sorte que la suite de nombres complexes $\langle f_n^1, f_1 \rangle$ converge vers un certain nombre complexe c_1 appartenant au disque fermé en question.

Supposons par récurrence que l'énoncé demandé soit démontré au niveau k . Alors avec le $(k + 1)$ -ème vecteur f_{k+1} , l'inégalité de Cauchy-Schwarz à nouveau :

$$\begin{aligned} |\langle f_n^k, f_{k+1} \rangle| &\leq \|f_n^k\|_H \|f_{k+1}\|_H \\ &\leq M \|f_{k+1}\|_H \end{aligned}$$

et la compacité du disque fermé de centre l'origine dans \mathbb{C} et de rayon $M \|f_{k+1}\|_H$ assurent que l'on peut extraire une sous-suite $(f_n^{k+1})_{n \geq 1}$ de la suite $(f_n^k)_{n \geq 1}$ — laquelle demeure constamment une sous-suite de la suite originale $(f_n)_{n \geq 1}$ — de telle sorte que la suite de nombres complexes $\langle f_n^{k+1}, f_{k+1} \rangle$ converge aussi vers un certain nombre complexe c_{k+1} appartenant au disque fermé en question. Or il est immédiatement clair par construction que toutes les limites des suites $\langle f_n^{k+1}, f_j \rangle$ demeurent les mêmes pour tout entier $1 \leq j \leq k$, ce qui achève la preuve.

(b) La suite diagonale $(g_l)_{l \geq 1}$ étant extraite de la suite initiale $(f_n)_{n \geq 1}$, on a évidemment :

$$\sup_{l \geq 1} \|g_l\|_H \leq \sup_{n \geq 1} \|f_n\|_H \leq M.$$

Ensuite, soit un vecteur fixé f_j , pour un certain entier $j \geq 1$. D'après les extractions de suites qui précèdent, on sait que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n^j, f_j \rangle = c_j.$$

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $J = J(\varepsilon)$ assez grand pour que :

$$n \geq J \implies \left(|\langle f_n^j, f_j \rangle - c_j| \leq \varepsilon \right).$$

Quitte à augmenter J si nécessaire, on peut supposer que $J \geq j$.

Considérons alors tous les vecteurs f_l^l pour $l \geq J \geq j$. Puisque $l \geq j$ et puisque chaque suite $(f_n^l)_{n \geq 1}$ est par construction (successivement) extraite de la suite $(f_n^j)_{n \geq 1}$, chaque f_l^l est nécessairement de la forme :

$$f_l^l = f_{n(l)}^j$$

pour un certain entier $n(l) \geq l \geq J$ (le l -ème terme d'une suite extraite est au moins le l -ème terme de la suite initiale), d'où l'on déduit :

$$|\langle f_l^l, f_j \rangle - c_j| = |\langle f_{n(l)}^j, f_j \rangle - c_j| \leq \varepsilon,$$

pour tout $l \geq J = J(\varepsilon)$. La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitraire, ces inégalités démontrent bien que $c_j = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle f_l^l, f_j \rangle$.

(c) En effet, tout vecteur $f \in V$ s'écrit comme combinaison linéaire finie :

$$f = \sum_{\text{finie}} a_j f_j$$

à coefficients complexes $a_j \in \mathbb{C}$ de vecteurs f_j de la suite initiale. Or grâce à la question qui précède, on sait que :

$$\lim_{l \rightarrow \infty} |\langle a_j f_j, g_l \rangle| = a_j c_j = \lim_{m \rightarrow \infty} |\langle a_j f_j, g_m \rangle|,$$

d'où par sommation de soustractions :

$$0 = \lim_{l, m \rightarrow \infty} |\langle f, g_m \rangle - \langle f, g_l \rangle|.$$

(d) Il s'agit là d'un résultat du cours, d'après lequel tout sous-espace vectoriel fermé d'un espace de Hilbert possède un supplémentaire orthogonal.

(e) Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Par définition de l'adhérence, comme $v \in \overline{V}$, il existe $f \in V$ avec $\|f - v\| \leq \varepsilon$. Pour deux entiers l, m assez grands, on peut alors estimer en utilisant la question (c) :

$$\begin{aligned} |\langle v, g_m \rangle - \langle v, g_l \rangle| &\leq |\langle v - f, g_m - g_l \rangle| + |\langle f, g_m - g_l \rangle| \\ &\leq \varepsilon (\|g_m\|_H + \|g_l\|_H) + \text{terme qui tend vers 0 lorsque } l, m \rightarrow \infty \\ &\leq \varepsilon 2M + \text{terme qui tend vers 0 lorsque } m, l \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

La quantité $\varepsilon > 0$ étant arbitrairement petite, cette inégalité montre bien que la suite numérique $(\langle v, g_l \rangle)_{l \geq 1}$ est de Cauchy.

(f) Puisque chaque vecteur g_l appartient par construction à V , on a par orthogonalité :

$$\langle u, g_l \rangle = \langle v, g_l \rangle + \langle w, g_l \rangle,$$

d'où la suite $(\langle u, g_l \rangle)_{l \geq 1}$ est elle aussi de Cauchy, donc converge vers une certaine limite $\ell(u)$, par complétude de \mathbb{C} . Maintenant, si $u = u' + u''$ ou si $u = \lambda u$, on a $v = v' + v''$ ou on a $v = \lambda v$, d'où aisément $\ell(u) = \ell(u') + \ell(u'')$ ou $\ell(u) = \lambda \ell(u)$, ce qui vérifie la linéarité.

(g) Par construction, on sait que :

$$|\langle u, g_l \rangle| \leq M \|u\|_H,$$

d'où immédiatement $|\ell(u)| \leq M \|u\|_H$.

(h) Ainsi l'application $u \mapsto \ell(u)$ est-elle une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert H . Le théorème de représentation de Riesz garantit alors l'existence d'un vecteur $g \in H$ tel que :

$$\ell(u) = \lim_{l \rightarrow \infty} \langle u, g_l \rangle = \langle u, g \rangle,$$

pour tout $u \in H$. En conclusion, la suite $(g_l)_{l \geq 1}$ extraite par procédé diagonal de la suite bornée initiale $(f_n)_{n \geq 1}$ possède bien la propriété d'être faiblement convergente vers ce vecteur $g \in H$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, le n -ème noyau de Fejér est égal à :

$$F_n(\theta) = \frac{1}{n} \left[\frac{\sin(\frac{n}{2}\theta)}{\sin(\frac{\theta}{2})} \right]^2,$$

sur $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$ et tout réel $0 < \delta < \pi$, la majoration triviale valable pour tout réel t avec $\delta \leq |t| \leq \pi$:

$$F_n(t) \leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})}$$

peut être intégrée sur-le-champ pour déduire que l'on a effectivement, pour toute fonction $h \in L^1(\mathbb{T})$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} F_n(t) h(t) \frac{dt}{2\pi} \right| &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |h(t)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{1}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} \|h\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Exercice 5. (a) - (b) Pour tout $y \in F$ fixé, l'application :

$$x \longmapsto \langle T(x), y \rangle$$

est linéaire et continue. Grâce au théorème de représentation de Riesz, il existe alors un unique élément de E — que l'on notera $T^*(y)$ puisqu'il dépend de y — tel que cette application linéaire s'écrive comme un produit scalaire avec cet élément :

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle.$$

Pour tous $y_1, y_2 \in F$ et tous $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, on se convainc très aisément que $\lambda_1 T^*(y_1) + \lambda_2 T^*(y_2)$ satisfait la propriété qui caractérise $T^*(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)$, ce qui montre que $y \mapsto T^*(y)$ est effectivement linéaire.

Maintenant, en appliquant la définition des normes d'opérateurs et en utilisant le fait que $\|z\| = \langle z, \frac{z}{\|z\|} \rangle$ pour tout vecteur de norme 1, on transforme successivement ces normes en passant par deux expressions centrales parfaitement symétriques :

$$\begin{aligned} \|T^*\| &\stackrel{\text{def}}{=} \sup \{ \|T^*(y)\| : y \in F, \|y\|_F = 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle x, T^*(y) \rangle| : x \in E, \|x\|_E = 1, y \in F, \|y\|_F = 1 \} \\ &= \sup \{ |\langle T(x), y \rangle| : x \in E, \|x\|_E = 1, y \in F, \|y\|_F = 1 \} \\ &= \sup \{ \|T(x)\| : x \in E, \|x\|_E = 1 \} \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \|T\|, \end{aligned}$$

d'où il découle que T^* , de norme visiblement finie, est en effet continu.

(c) La démonstration du fait que $(T^*)^* = T$ découle des définitions par simple symétrie logique, et — seule exception ici — le micro-détail des vérifications ne sera pas offert au lecteur par le correcteur.

(d) Avant de montrer que $\|T^* \circ T\| = \|T\|^2$, on a tout d'abord par majoration connue des normes d'une composition d'opérateurs et en utilisant la question **(b)** :

$$\begin{aligned} \|T^* \circ T\| &\leq \|T^*\| \cdot \|T\| \\ &\leq \|T\|^2. \end{aligned}$$

Par ailleurs, en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a pour tout $x \in E$ avec $\|x\|_E \leq 1$:

$$\begin{aligned} \|T(x)\|^2 &= \langle T(x), T(x) \rangle \\ &= \langle x, (T^* \circ T)(x) \rangle \\ &\leq \|x\|_E \cdot \|T^* \circ T\| \cdot \|x\|_E \\ &\leq \|T^* \circ T\|. \end{aligned}$$

On en déduit l'inégalité inverse $\|T\|^2 \leq \|T^* \circ T\|$, d'où l'égalité demandée.

Exercice 6. (a) Après k intégrations par parties dans chacune desquelles les termes de bord s'annulent automatiquement par 2π -périodicité, on obtient :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{1}{(in)^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}. \end{aligned}$$

La k -ème dérivée de f étant continue par hypothèse, le lemme de Riemann-Lebesgue assure que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(\theta) e^{-in\theta} \frac{d\theta}{2\pi}$$

Il en découle que l'on a bien :

$$\widehat{f}(n) = o\left(\frac{1}{|n|^k}\right),$$

lorsque $|n| \rightarrow \infty$.

(b) Grâce à l'inégalité triangulaire infinie, on majore — sans finesse ni grossièreté — pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la différence :

$$\begin{aligned} |f(\theta) - S_n(f)(\theta)| &= \left| \sum_{|\ell| \geq n+1} \widehat{f}(\ell) e^{i\ell\theta} \right| \\ &\leq \sum_{|\ell| \geq n+1} |\widehat{f}(\ell)|. \end{aligned}$$

Cela étant vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$, en appliquant la question qui précède, on déduit que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \geq 1$ assez grand pour satisfaire :

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{\mathcal{C}^0} &\leq \varepsilon 2 \sum_{|\ell| \geq n+1} \frac{1}{n^\ell} \\ &\leq \varepsilon 2 \int_n^\infty \frac{dx}{x^k} \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{(k-1)n^{k-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi a-t-on bien comme annoncé :

$$\|f - S_n(f)\|_{\mathcal{C}^0} = o\left(\frac{1}{n^{k-1}}\right).$$

lorsque $n \rightarrow \infty$.

(c) Puisque $\widehat{f}(n) = O\left(\frac{1}{|n|^k}\right)$ et que l'on a supposé $k \geq 2$, la série :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell)$$

converge absolument, d'après le critère dit de Riemann. Par conséquent, la série de Fourier complète :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell) e^{i\ell\theta}$$

converge uniformément vers une fonction au moins continue sur le cercle $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, et un théorème du cours (basé sur l'utilisation du noyau de Fejér) assure que l'on peut écrire :

$$f(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ik\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, où le membre de droite converge uniformément.

Mais il y a plus : tant que $k' \leq k - 2$, la série des dérivées terme à terme :

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell) (i\ell)^{k'} e^{i\ell\theta}$$

continue à converger absolument et normalement — toujours d'après le critère de Riemann —, donc le théorème de dérivation terme à terme assure l'existence et la continuité de telles dérivées k -èmes.

Exercice 7. (a) La fonction f' étant 2π -périodique et continue par morceaux sur \mathbb{R} , elle appartient manifestement à l'espace $L^2(\mathbb{T})$. Ainsi, en tenant compte de l'intégration par parties :

$$\widehat{f}'(n) = in \widehat{f}(n),$$

on peut appliquer la formule de Plancherel à f' , ce qui donne :

$$\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 = \|f'\|_{L^2} < \infty.$$

Mais ensuite, une utilisation fréquente de l'inégalité de Cauchy-Schwarz finie qui consiste quelque peu astucieusement à faire apparaître un produit invisible montre que l'on a, pour tout entier $N \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq |n| \leq N} |\widehat{f}(n)| &= \sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{|n|} |n \widehat{f}(n)| \\ &\leq \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq N} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{1 \leq |n| \leq \infty} \frac{1}{n^2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{1 \leq |n| \leq \infty} n^2 |\widehat{f}(n)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{2 \frac{\pi^2}{6}} (\|f'\|_{L^2})^2 \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence normale demandée.

(b) Un théorème du cours — application du théorème fondamental de Fejér — assure alors que f est égale à sa série de Fourier :

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \widehat{f}(n) e^{in\theta},$$

pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

7. Examen 4

Exercice 1. [Théorème du point fixe pour les applications strictement contractantes]

Soit X un \mathbb{R} -espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\| \cdot \|$. Soit une application continue $T : X \rightarrow X$. On suppose que T est *strictement contractante*, à savoir on suppose qu'il existe une constante $\kappa \in \mathbb{R}_+$ avec $0 \leq \kappa < 1$ telle que :

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \kappa \|x - y\| \quad \text{pour tous } x, y \in X.$$

L'objectif est d'établir l'existence d'un unique $x^* \in X$ satisfaisant $T(x^*) = x^*$, c'est-à-dire l'existence et l'unicité d'un *point fixe* pour T .

(a) On choisit (au hasard) un $x_0 \in X$ initial quelconque et on itère sur x_0 l'application T un nombre arbitraire $n \geq 1$ de fois :

$$x_n := T^n(x_0) = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ fois}}(x_0).$$

Montrer alors que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq \kappa^n \|T(x_0) - x_0\|.$$

(b) Dédurre du point précédent que, pour tous entiers $0 \leq j < k$, on a la majoration générale :

$$\|x_k - x_j\| \leq (\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j) \|T(x_0) - x_0\|.$$

(c) Dédurre de ce qui précède que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est convergente vers un (unique) point $x^* \in X$.

(d) Montrer que l'on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\|x^* - T(x^*)\| \leq \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa \|x_k - x^*\|.$$

Conclure que l'on a $T(x^*) = x^*$.

(e) Montrer que si x^{**} vérifie aussi $T(x^{**}) = x^{**}$, alors nécessairement $x^{**} = x^*$.

Exercice 2. [Théorème des fonctions implicites de Zarantonello] On se donne un ensemble E , un \mathbb{R} -espace de Hilbert $(X, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ muni de la norme associée $\| \cdot \|$ et une application :

$$\begin{aligned} F: E \times X &\longrightarrow X \\ (\xi, x) &\longmapsto F(\xi, x). \end{aligned}$$

On suppose que :

- F est *fortement monotone en x , uniformément en ξ* , à savoir : il existe une constante réelle $a > 0$ telle que l'on ait, pour tout $\xi \in E$ et tous $x, y \in X$:

$$\langle F(\xi, x) - F(\xi, y), x - y \rangle \geq a \|x - y\|^2;$$

- F est *Lipschitzienne en x , uniformément en ξ* , à savoir : il existe une constante réelle $b > 0$ tel que l'on ait, pour tout $\xi \in X$ et tous $x, y \in X$:

$$\|F(\xi, x) - F(\xi, y)\| \leq b \|x - y\|.$$

On se propose d'établir l'existence d'une application $f : E \rightarrow X$ résolvant l'équation implicite $F = 0$, à savoir telle que, pour chaque $\xi \in E$, on ait :

$$\left(F(\xi, x) = 0 \right) \iff \left(x = f(\xi) \right).$$

(a) Pour $c > 0$, on définit une application $G_c : E \times X \rightarrow X$ par :

$$G_c(\xi, x) := x - cF(\xi, x).$$

Vérifier que, pour $\xi \in E$ fixé, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si x est un point fixe de l'application :

$$X \ni x \mapsto G_c(\xi, x) \in X.$$

À quoi pense-t-on alors ?

(b) Montrer que l'on a, pour $c > 0$, $\xi \in X$ et $x, y \in X$:

$$\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\|^2 \leq (1 - 2ac + c^2b^2)\|x - y\|^2.$$

(c) Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $\xi \in E$, l'application $G_c(\xi, \cdot)$ soit contractante.

(d) Pour tout $\xi \in E$, noter $f(\xi)$ l'unique point fixe de $G_c(\xi, \cdot)$. Montrer que l'application $f : E \rightarrow X$ ainsi définie vérifie la propriété suivante : pour tout $\xi \in E$ et tout $x \in X$, on a $F(\xi, x) = 0$ si et seulement si $x = f(\xi)$.

Exercice 3. [Fonctions continues à coefficients de Fourier positifs] Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité. On dit qu'elle est *définie positive* si :

$$\forall \nu \in \mathbb{N}^*, \quad \forall \theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}, \quad \forall c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$$

$$\text{on a positivité de : } \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f(\theta_\lambda - \theta_\mu) c_\lambda \bar{c}_\mu \geq 0.$$

(a) Montrer par le calcul que tout *monôme* trigonométrique $a_k e^{ik\theta}$ avec $a_k \geq 0$ est une fonction définie positive. En déduire qu'il en va de même pour toute somme *finie* à coefficients positifs $a_k \geq 0$:

$$\sum_{\substack{\text{finie} \\ k \in \mathbb{Z}}} a_k e^{ik\theta}.$$

(b) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ une fonction continue sur le cercle unité dont *tous* les coefficients de Fourier $\hat{f}(k) \geq 0$ sont positifs, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Rappeler et utiliser le théorème de Fejér concernant les $\sigma_n(f)(\theta) = F_n * f(\theta)$ pour établir que f est définie positive en utilisant (a).

(c) Soient deux fonctions continues $f, g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. On introduit la fonction :

$$F(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') g(\theta') \frac{d\theta'}{2\pi}.$$

Montrer que ses coefficients de Fourier $\hat{F}(k)$ sont égaux aux produits $\hat{f}(k) \hat{g}(k)$.

(d) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ définie positive. Pour toute fonction $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, montrer en la ramenant à une somme double l'inégalité :

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') h(\theta) \overline{h(\theta')} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi}.$$

(e) En déduire que si f est définie positive, tous ses coefficients de Fourier $\widehat{f}(k) \geq 0$ sont positifs, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 4. [Noyau approximant et Théorème de Weierstrass sur le cercle] Sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, rappelons qu'un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire finie des $(e^{ik\theta})_{k \in \mathbb{Z}}$. Pour tout entier positif $n \in \mathbb{N}$, on introduit le noyau :

$$C_n(\theta) := c_n \left(\frac{1 + \cos(\theta)}{2} \right)^n,$$

où $c_n \in \mathbb{R}_+^*$ est une certaine constante.

(a) Vérifier que la fonction 2π -périodique C_n est ≥ 0 sur \mathbb{R} et montrer que l'on peut choisir la constante $c_n > 0$ — sans la calculer ! — de telle sorte que :

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} C_n(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(b) Montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|C_n\|_{\mathcal{C}^0([-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi])},$$

pour tout $\delta \in]0, \pi]$. Indication: Chercher à raisonner *sans avoir à calculer les constantes c_n* .

On pourra d'abord vérifier et utiliser le fait que :

$$1 = c_n 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^n \frac{d\theta}{2\pi} \geq c_n 2 \int_0^{\pi} \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^n \sin \theta \frac{d\theta}{2\pi},$$

pour en déduire que $c_n \leq \frac{\pi}{2}(n+1)$, puis on pourra établir que :

$$\|C_n\|_{\mathcal{C}^0([\delta, \pi])} \leq \frac{\pi}{2}(n+1) \left(\frac{1 + \cos \delta}{2} \right)^n.$$

(c) Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$. On pose :

$$\kappa_n(f)(\theta) := \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - t) C_n(t) \frac{dt}{2\pi} = f * C_n(\theta).$$

Montrer que les $\kappa_n(f)(\theta)$ sont des polynômes trigonométriques, $\forall n \in \mathbb{N}$. On pourra utiliser (sans redémontrer) la formule du multinôme :

$$\left(\frac{2 + e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}}{4} \right)^n = \frac{1}{4^n} \sum_{\substack{k+l \leq n \\ k \geq 0, l \geq 0}} \frac{n! 2^{n-k-l}}{(n-k-l)! k! l!} e^{i(k-l)(\theta-t)}.$$

(d) Soit $\delta > 0$ petit, notamment $\ll \pi$. Montrer que :

$$|\kappa_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta-t) - f(\theta)| C_n(t) \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |f(\theta-t) - f(\theta)| C_n(t) \frac{dt}{2\pi}.$$

(e) En déduire :

$$|\kappa_n(f)(\theta) - f(\theta)| \leq \max_{\substack{\theta \in \mathbb{R} \\ |t| \leq \delta}} |f(\theta-t) - f(\theta)| + 2 \|f\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \|C_n\|_{\mathcal{C}^0([-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi])}.$$

(f) En utilisant ce qui précède, établir que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - \kappa_n(f)\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})}.$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. Avant de commencer, il importe de faire observer au lecteur-étudiant que ce théorème est vrai *avec une démonstration identique sans aucune modification* plus généralement lorsque $(X, \|\cdot\|)$ est un espace de Banach, à savoir un espace vectoriel normé *complet* dont la norme $\|\cdot\|$ ne dérive pas nécessairement d'un produit scalaire (observer ci-dessous que le produit scalaire n'est absolument pas utilisé !).

(a) Tout d'abord, pour $n = 1$, c'est une conséquence immédiate de l'hypothèse de contraction (stricte) ci-dessus appliquée à $x := T(x_0)$ et $y := x_0$. Ensuite, supposant cette inégalité acquise au niveau n , on se place au niveau $n + 1$ et on majore :

$$\begin{aligned} \|x_{n+2} - x_{n+1}\| &= \|T^{n+2}(x_0) - T^{n+1}(x_0)\| = \|T(T^{n+1}(x_0)) - T(T^n(x_0))\| \\ \text{[Hypothèse de contraction stricte]} &\leq \kappa \|T^{n+1}(x_0) - T^n(x_0)\| \\ \text{[Coïncidence notationale]} &= \kappa \|x_{n+1} - x_n\| \\ \text{[Hypothèse de récurrence]} &\leq \kappa \kappa^n \|T(x_0) - x_0\|, \end{aligned}$$

ce qui conclut grâce au principe d'induction complète.

(b) Tout d'abord, essayons de comprendre ce qui est demandé dans le cas particulier où $k = j + 2$. On devine qu'il est naturel d'insérer deux termes dont la somme s'annule afin de se ramener à ce qui vient d'être démontré :

$$\begin{aligned} \|x_{j+2} - x_j\| &= \|x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\| \leq \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\ \text{[Appliquer (a) deux fois]} &\leq (\kappa^{j+1} + \kappa^j) \|T(x_0) - x_0\|. \end{aligned}$$

Le cas général où $k - j \geq 1$ est arbitraire se démontre aisément de manière similaire :

$$\begin{aligned} \|x_k - x_j\| &= \|x_k - x_{k-1} + x_{k-1} - x_{k-2} + \cdots + x_{j+2} - x_{j+1} + x_{j+1} - x_j\| \\ &\leq \|x_k - x_{k-1}\| + \|x_{k-1} - x_{k-2}\| + \cdots + \|x_{j+2} - x_{j+1}\| + \|x_{j+1} - x_j\| \\ &\leq (\kappa^{k-1} + \cdots + \kappa^j) \|T(x_0) - x_0\|. \end{aligned}$$

(c) L'espace de Hilbert X étant complet (par axiome !), il suffit de faire voir que la suite $(x_k)_{k \geq 0}$ est de Cauchy, car alors une limite unique x^* existera. Soit donc $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Ainsi la question est : peut-on choisir un entier $J \gg 1$ assez grand pour que :

$$(k > j \geq J) \implies (\|x_k - x_j\| \leq \varepsilon) ?$$

La réponse est manifestement : oui grâce à la question qui précède ! Tout simplement parce que l'on sait parfaitement calculer des sommes géométriques tronquées :

$$\begin{aligned} \|x_k - x_j\| &\leq \kappa^j (\kappa^{k-j-1} + \dots + \kappa + 1) \underbrace{\|T(x_0) - x_0\|}_{\text{constante}} \\ &= \kappa^j \frac{1 - \kappa^{k-j}}{1 - \kappa} \|T(x_0) - x_0\| \\ &\leq \kappa^J \underbrace{\frac{1}{1 - \kappa} \|T(x_0) - x_0\|}_{\text{nouvelle constante}}, \end{aligned}$$

et bien entendu aussi, parce que $\lim_{J \rightarrow \infty} \kappa^J = 0$ puisque $0 \leq \kappa < 1$ par hypothèse.

(d) Après insertion (artificielle) du terme nul $-x_{k+1} + x_{k+1}$, l'inégalité triangulaire donne :

$$\begin{aligned} \|x^* - T(x^*)\| &\leq \|x^* - x_{k+1}\| + \|x_{k+1} - T(x^*)\| \\ &= \|x^* - x_{k+1}\| + \|T(x_k) - T(x^*)\| \\ &\leq \|x^* - x_{k+1}\| + \kappa \|x_k - x^*\|. \end{aligned}$$

Pour conclure, en faisant tendre k vers ∞ , le membre de droite tend visiblement vers $0 + 0$, puisque $x_k \rightarrow x^*$ par construction, d'où :

$$\|x^* - T(x^*)\| \leq 0,$$

ce qui donne $x^* = T(x^*)$ par positivité stricte de la norme sur $X \setminus \{0\}$.

(e) Ici, il s'agissait simplement de deviner qu'une application de l'hypothèse de stricte contraction à $x := x^{**} = T(x^{**})$ et à $y := x^* = T(x^*)$ donne instantanément :

$$\underbrace{\|T(x^{**}) - T(x^*)\|}_{= \|x^{**} - x^*\|} \leq \kappa \|x^{**} - x^*\|,$$

à savoir :

$$(1 - \kappa) \|x^{**} - x^*\| \leq 0,$$

et comme $0 \leq \kappa < 1$, cette quantité positive ne peut qu'être nulle, d'où $x^{**} = x^*$ par positivité stricte de la norme sur $X \setminus \{0\}$.

Exercice 2. Avant de commencer, mentionnons que ce théorème des fonctions implicites est valable sans aucune hypothèse sur l'application de départ F , ni continuité, ni linéarité — même partielle par rapport au second argument x —, de telle sorte que l'application résolvante f que nous allons construire n'a pas non plus de raison de jouir de propriétés spécifiques.

(a) La fixe-attitude de $G_c(\xi, \cdot)$:

$$x = G_c(\xi, x) = x - cF(\xi, x)$$

est manifestement équivalente — grâce à des opérations algébriques élémentaires dont la maîtrise remonte aux mathématiques babyloniennes et qui furent symbolisée de manière systématique par les mathématiciens arabes — à la zéro-itude de $F(\xi, x)$, puisque $c > 0$, lui au moins, il n'est pas atteint de nulle-itude ! Comme on a résolu sagement l'exercice précédent, on pense en un éclair au Théorème du point fixe !

(b) Dans un espace de Hilbert, le calcul d'une norme au carré doit s'effectuer en développant le produit scalaire par bilinéarité :

$$\begin{aligned} \|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\|^2 &= \|x - y - c(F(\xi, x) - F(\xi, y))\|^2 \\ &= \langle x - y - c(F(\xi, x) - F(\xi, y)), x - y - c(F(\xi, x) - F(\xi, y)) \rangle \\ &= \|x - y\|^2 + c^2 \|F(\xi, x) - F(\xi, y)\|^2 - 2c \langle x - y, F(\xi, x) - F(\xi, y) \rangle. \end{aligned}$$

Les deux hypothèses admises sur l'application F donnent alors deux majorations univoques :

$$\begin{aligned} \|F(\xi, x) - F(\xi, y)\|^2 &\leq b^2 \|x - y\|^2, \\ -\langle F(\xi, x) - F(\xi, y), x - y \rangle &\leq -a \|x - y\|^2 \end{aligned}$$

que l'on peut reporter dans l'expression obtenue, ce qui donne la majoration cherchée :

$$\|G_c(\xi, x) - G_c(\xi, y)\|^2 \leq \|x - y\|^2 + c^2 b^2 \|x - y\|^2 - 2ac \|x - y\|^2,$$

en tenant compte bien sûr de la symétrie du produit scalaire dans le \mathbb{R} -espace de Hilbert X .

(c) Il est clair que pour $c > 0$ assez petit on a :

$$1 - 2ac + c^2 b^2 < 1,$$

puisque $a > 0$, sachant que $c^2 \ll c$ (exercice mental). Aussi l'inégalité de la question précédente (b) montre le caractère contractant de l'application $x \mapsto G_c(\xi, x)$, laquelle est uniforme en ξ , d'ailleurs.

(d) Pour tout ξ fixé, le *Théorème du point fixe* (ces deux termes n'ont pas exactement le même sens dans les deux cas !) assure alors qu'il existe un unique $x = x(\xi) \in X$ dépendant de ξ qui satisfait :

$$x(\xi) = G_c(x(\xi), x) \iff F(\xi, x(\xi)) = 0.$$

À tout $\xi \in E$ est donc associé d'une manière parfaitement déterminée cet unique $x = x(\xi) \in X$. Par définition même du concept d'*application* entre deux ensembles, ceci veut précisément dire qu'on a construit une *application* :

$$E \longrightarrow X$$

que l'on choisit ici de noter « f », et qui vérifie toutes les propriétés requises, comme on s'en convainc en effectuant la synthèse mentale des résultats démontrés dans cet Exercice.

Exercice 3. Comme on s'en est rendu compte en lisant le sujet, le but de cet exercice est d'établir qu'une fonction continue $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$ est définie positive *si et seulement si* tous ses coefficients de Fourier sont positifs. Voilà donc un théorème amusant !

(a) Traitons d'abord le cas d'un seul monôme exponentiel $a_k e^{ik\theta}$ dont le coefficient a_k est ≥ 0 . On doit donc estimer l'expression suivante et déterminer si elle est toujours positive :

$$\begin{aligned} a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} e^{ik(\theta_\lambda - \theta_\mu)} c_\lambda \bar{c}_\mu &= \\ &= a_k \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_\lambda e^{ik\theta_\lambda} \overline{c_\mu e^{ik\theta_\mu}} \\ &= a_k \left(\sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda e^{ik\theta_\lambda} \right) \overline{\left(\sum_{\mu=1}^{\nu} c_\mu e^{ik\theta_\mu} \right)} \\ &= \underbrace{a_k}_{\geq 0} \underbrace{\left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} c_\lambda e^{ik\theta_\lambda} \right|^2}_{\text{est aussi } \geq 0}, \end{aligned}$$

ce qui s'avère être vrai ! Le cas d'une somme finie s'en déduit par linéarité de la condition qu'une fonction est définie positive : on somme un nombre fini de conditions sur chaque $a_k e^{ik\theta}$, qui sont toutes ≥ 0 , donc la somme est aussi ≥ 0 !

(b) Prenons et fixons un entier $\nu \in \mathbb{N}^*$, des points du cercle $\theta_1, \dots, \theta_\nu \in \mathbb{T}$ et des constantes $c_1, \dots, c_\nu \in \mathbb{C}$. Il s'agit de montrer que :

$$0 \leq \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f(\theta_\lambda - \theta_\mu) c_\lambda \bar{c}_\mu.$$

Grâce au Théorème de Fejér, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier assez grand $n = n(\varepsilon) \gg 1$ tel que la n -ème somme de Fejér $\sigma_n(f) = F_n * f$ — laquelle est un polynôme trigonométrique contenant des $e^{il\theta}$ seulement pour $|l| \leq n$ — satisfait la ε -proximité à f uniformément sur \mathbb{T} :

$$\|f - \sigma_n(f)\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \leq \varepsilon.$$

Or grâce à la question **(a)** que nous venons de résoudre aisément puisque nous l'avons sûrement déjà résolue dans le Devoir 1 à la maison, nous savons pour un tel polynôme trigonométrique $\sigma_n(f)$ qu'il est défini positif, et donc on a positivité de :

$$0 \leq \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} \sigma_n(f)(\theta_\lambda - \theta_\mu) c_\lambda \bar{c}_\mu.$$

Maintenant, la différence avec la somme qui nous intéresse peut être majorée par une quantité :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} (f - \sigma_n(f))(\theta_\lambda - \theta_\mu) c_\lambda \bar{c}_\mu \right| &\leq \varepsilon \sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} c_\lambda \bar{c}_\mu \\ &= \varepsilon \underbrace{|c_1 + \dots + c_\nu|^2}_{= \text{constante}} \end{aligned}$$

qui tend vers 0 avec $\varepsilon \rightarrow 0^+$. Par conséquent (exercice mental), la positivité de la somme double portant sur $\sigma_n(f)$ implique la positivité (désirée) de la somme double portant sur f .

(c) Par définition, le k -ème coefficient en question vaut l'intégrale :

$$\widehat{F}(k) := \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') g(\theta') e^{-ik\theta} \frac{d\theta'}{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Écrivons artificiellement (et astucieusement !) l'exponentielle sous la forme $e^{-ik\theta} = e^{-ik\theta'} e^{-ik(\theta-\theta')}$ et effectuons le changement de variable $\eta := \theta - \theta'$ qui induit $d\eta = d\theta$ dans l'intégrale double (permutable puisque le Théorème de Fubini s'applique sans problème aux fonctions continues) :

$$\widehat{F}(k) = \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta') e^{-ik\theta'} \frac{d\theta'}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') e^{-ik(\theta-\theta')} \frac{d\theta}{2\pi} = \widehat{g}(k) \widehat{f}(k).$$

(d) L'étudiant fin-comme-le-renard aura bien entendu réalisé que cette intégrale double (continue) manifeste des similarités troublantes avec les sommes doubles (discrètes) de l'hypothèse de définie positivité ! Il aura ensuite été guidé par son précieux flair pour se rappeler, par réminiscence (platonicienne), que les intégrales de Riemann (largement suffisantes pour les fonctions continues !) se calculent comme limites de sommes de Riemann *finies et discrètes*.

Subdivisons donc l'intervalle produit $[-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ en $\nu \times \nu$ petits intervalles tous de même longueur $\frac{2\pi}{\nu}$ en les points (équidistribués) de coordonnées :

$$\theta_{\lambda} := -\pi + \frac{\lambda-1}{\nu} 2\pi \quad (\lambda=1 \dots \nu) \quad \text{et} \quad \theta_{\mu} := -\pi + \frac{\mu-1}{\nu} 2\pi \quad (\mu=1 \dots \nu)$$

Ainsi pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $\nu = \nu(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que l'intégrale double soit ε -approximable par la somme double de Riemann correspondante :

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') h(\theta) \overline{h(\theta')} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} - \underbrace{\sum_{\lambda=1}^{\nu} \sum_{\mu=1}^{\nu} f(\theta_{\lambda} - \theta_{\mu}) \underbrace{h(\theta_{\lambda})}_{=: c_{\lambda}} \overline{\underbrace{h(\theta_{\mu})}_{=: \bar{c}_{\mu}}}}_{\text{quantité toujours } \geq 0 \text{ par hypothèse !}} \frac{2\pi}{\nu} \frac{2\pi}{\nu} \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci implique (exercice mental) que l'intégrale double à gauche est nécessairement ≥ 0 .

(e) La question qui précède nous a convaincu que pour toute fonction continue $h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$, on a l'inégalité :

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') h(\theta) \overline{h(\theta')} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi},$$

et on aimerait bien pouvoir se ramener à la question (c) :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta - \theta') g(\theta') e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \frac{d\theta'}{2\pi} = \widehat{f}(k) \widehat{g}(k).$$

Le problème quand on compare ces deux intégrales doubles, c'est que la fonction $h(\theta')$ apparaît conjuguée dans la première, tandis que dans la seconde, la fonction $g(\theta')$ n'apparaît pas conjuguée ! Qu'à cela ne tienne, on n'a qu'à déclarer que :

$$h(\theta) := e^{-ik\theta} \quad \text{et que :} \quad g(\theta') := \overline{h(\theta')} = e^{ik\theta'}.$$

Et cette fois-ci — c'est merveilleux ! —, tout s'enclenche bien : les deux intégrales doubles coïncident, on a $\widehat{g}(k) = 1$ — qui est positif ! — et donc au final :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{première intégrale double} = \text{deuxième intégrale double} \\ &= \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) \\ &= \widehat{f}(k), \end{aligned}$$

et cela, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, ce qui conclut élégamment (on l'espère...) la démonstration.

Exercice 4. (a) Puisque $\cos\theta$ est > -1 sur $]-\pi, \pi[$, l'intégrale sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction paire continue $\left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n$ strictement positive excepté aux bornes de l'intervalle est > 0 , et on n'a alors pas d'autre choix que de prendre :

$$c_n := \frac{1}{\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \frac{d\theta}{2\pi}}.$$

(b) Une astuce indiquée dans l'énoncé du sujet consiste à commencer par *minorer* l'intégrale (paire) de C_n par l'intégrale de la même fonction multipliée par la fonction positive $\sin\theta \leq 1$ de façon à faire apparaître une intégrande dont la primitive se voit aisément :

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{\underbrace{2}_o c_n}{\underbrace{2}_o \pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n d\theta \geq \frac{c_n}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^n \sin\theta d\theta \\ &= \frac{c_n}{\pi} \left[-\frac{2}{n+1} \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^{n+1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{c_n}{\pi} \frac{2}{n+1}, \end{aligned}$$

ce qui donne une *majoration* des constantes qu'on n'a pas eu le courage de calculer :

$$\boxed{c_n \leq \frac{\pi}{2} (n+1).}$$

Ensuite, puisque $C_n(\theta)$ décroît sur $[0, \pi]$ (exercice mental), on a pour tout $\theta \in [\delta, \pi]$:

$$\begin{aligned} C_n(\theta) &\leq C_n(\delta) = c_n \left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n \\ &\leq \underbrace{\frac{\pi}{2} (n+1)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} \underbrace{\left(\frac{1+\cos\delta}{2}\right)^n}_{< 1}, \end{aligned}$$

ce qui établit la convergence uniforme vers 0 de C_n sur $[\delta, \pi]$, puis aussi sur $[-\delta, -\pi]$ par parité.

(c) Par commutativité du produit de convolution :

$$\begin{aligned} \kappa_n(f)(\theta) &= C_n * f(\theta) \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} C_n(\theta-t) f(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= c_n \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{2 + e^{i(\theta-t)} + e^{-i(\theta-t)}}{4}\right)^n f(t) \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Ensuite, l'application suggérée de la formule du multinôme conclut :

$$\text{la même chose} = \frac{c_n}{4^n} \underbrace{\sum_{k+l \leq n} \frac{n! 2^{n-k-l}}{(n-k-l)! k! l!} e^{i(k-l)\theta}}_{\text{somme finie de } e^{ih\theta}} \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(k-l)t} f(t) \frac{dt}{2\pi}}_{\text{constante} = \hat{f}(k-l)}.$$

(d) À partir de maintenant, les raisonnements sont exactement les mêmes que dans le cours photocopié lorsqu'on montrait le même théorème avec les noyaux de Fejér F_n au lieu de ces noyaux C_n . L'inégalité en vue provient de l'insertion de $f(\theta)$ à l'intérieur de l'intégrale — grâce au fait que la masse des noyaux positifs C_n vaut toujours 1 — :

$$\begin{aligned} \kappa_n(f)(\theta) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(\theta - t) - f(\theta)) C_n(t) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{|t| \leq \delta} \text{même chose} + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} \text{même chose} \\ &\leq \int_{|t| \leq \delta} |\text{même chose}| + \int_{\delta \leq |t| \leq \pi} |\text{même chose}|, \end{aligned}$$

puis d'une décomposition de l'intervalle d'intégration en $[-\delta, \delta]$ et en $[\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$, suivie enfin d'une simple inégalité triangulaire.

(e) En fait, la déduction procède comme dans le cours.

(f) Soit $\varepsilon > 0$. Rappelons que le raisonnement consiste à prendre d'abord δ assez petit pour que le premier terme soit $\leq \varepsilon$ grâce à l'uniforme continuité de f sur le compact \mathbb{T} , puis à prendre $n \geq N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que le second terme soit lui aussi $\leq \varepsilon$, ce qui est possible une fois que δ est fixé grâce à la question **(b)**.

9. Examen 5

Exercice 1. [Majoration uniforme de $\sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{ik\theta}}{k}$]

(a) La famille des noyaux de Dirichlet sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ est définie par $D_n(t) := \sum_{|k| \leq n} e^{ikt}$. Montrer que :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(b) Que valent les intégrales :

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt ?$$

(c) Montrer que la fonction :

$$q: t \mapsto \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

se prolonge continûment à $[-\pi, \pi]$.

(d) En déduire l'existence d'une constante $Q > 0$ telle que :

$$\left| \int_0^\theta q(t) \sin\left(n t + \frac{t}{2}\right) dt \right| \leq Q,$$

pour tout $|\theta| \leq \pi$.

(e) On rappelle que le lemme de Riemann-Lebesgue stipule que pour toute fonction continue $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{T})$:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \sin(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \cos(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Déterminer alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin\left(n t + \frac{t}{2}\right) dt.$$

(f) En admettant que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin u}{u} du$ existe, utiliser (b), (c) et (e) pour établir que :

$$\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}.$$

(g) En déduire qu'il existe une constante $R > 0$ telle que $\left| \int_0^b \frac{\sin(ct)}{t} dt \right| \leq R$ pour tous $b, c \in \mathbb{R}_+^*$.

(h) Montrer que $\left| \int_0^\theta \frac{\sin\left(n t + \frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt \right| \leq Q + 2R$ pour tout $|\theta| \leq \pi$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

(i) Montrer que :

$$\frac{1}{2i} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{ik\theta}}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k} = \frac{1}{2} \int_0^\theta (D_n(t) - 1) dt.$$

(j) Donner une preuve alternative du fait signalé et utilisé en cours que les sommes :

$$\left| \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right|$$

sont uniformément bornées en n et en θ .

Exercice 2. [Théorème de James] Soit $(E, \|\cdot\|)$ un \mathbb{R} -espace vectoriel normé complet. La norme d'une fonctionnelle linéaire $L: E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\|L\| := \sup_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{|L(u)|}{\|u\|} = \sup_{\|u\|=1} |L(u)|$$

est finie $\|L\| < \infty$ si et seulement si L est continue, d'après un théorème connu.

L'espace $(E, \|\cdot\|)$ est dit *uniformément convexe* lorsque, pour tout $0 < \delta < 1$, la quantité :

$$\varepsilon(\delta) := \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{u+v}{2} \right\| : \|u\| = \|v\| = 1, \|u - v\| \geq \delta \right\} > 0$$

est strictement positive.

(a) Illustrer cette propriété par un diagramme parlant et esthétique.

(b) On considère maintenant une fonctionnelle linéaire continue non nulle $L: (E, \|\cdot\|) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Montrer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que $L(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|L\|$.

(c) Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitraire, montrer qu'il existe $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ tel que $n_1, n_2 \geq N$ entraîne :

$$\|L\|(1 - \varepsilon) < \frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2}.$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geq N(\varepsilon)$, en déduire :

$$(1 - \varepsilon) < \left\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \right\|.$$

(e) En utilisant l'uniforme convexité de $(E, \|\cdot\|)$, montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy.

(f) Justifier l'existence de $u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et montrer que $L(u_\infty) = \|L\|$.

(g) Montrer l'unicité d'un élément v_∞ de norme $\|v_\infty\| = 1$ satisfaisant $L(v_\infty) = \|L\|$. Indication: Entrelacer $(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, \dots)$ et appliquer (b).

(h) En notant donc maintenant $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L(u_L) = \|L\|$, montrer que pour tout $v \in E$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|L\| \cdot \|u_L + tv\| - L(u_L + tv) \end{aligned}$$

admet un minimum global en $t = 0$.

(i) L'espace vectoriel normé complet $(E, \|\cdot\|)$ est dit *lisse* lorsque, pour tout $u \in E \setminus \{0\}$, l'application :

$$M_u : \begin{cases} E \longrightarrow \mathbb{R} \\ v \longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \|u + tv\| \end{cases}$$

définit une fonctionnelle linéaire continue sur E . Conclure du point précédent (Théorème de James) que dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse $(E, \|\cdot\|)$, à toute fonctionnelle linéaire continue non nulle $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ est associé un unique élément $u_L \in E$ de norme 1 tel que :

$$L(\cdot) = \|L\| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) Montrer qu'un espace de Hilbert $(H, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ est uniformément convexe. Indication: Utiliser l'identité du parallélogramme pour minorer, par exemple : $\varepsilon(\delta) \geq \frac{\delta^2}{8}$.

(k) Lorsque $(E, \|\cdot\|) = (H, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$ est un espace de Hilbert, comparer $M_u(v)$ et $\langle \frac{u}{\|u\|}, v \rangle$.

(l) Comment s'énonce le Théorème de James dans un espace de Hilbert ?

Exercice 3. [Décroissance höldérienne des coefficients de Fourier] Soit f une fonction 2π -périodique intégrable sur $[-\pi, \pi]$ au sens de Riemann.

(a) Rappeler la définition des k -èmes coefficients de Fourier $\widehat{f}(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

(b) Montrer que :

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \left[f(\theta) - f\left(\theta + \frac{\pi}{k}\right) \right] e^{-ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi}.$$

(c) Lorsque, pour un certain exposant réel $0 < \alpha \leq 1$, la fonction f est α -höldérienne :

$$|f(\theta + t) - f(\theta)| \leq \text{constante} \cdot |t|^\alpha,$$

montrer que :

$$\widehat{f}(k) = O\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right).$$

Il s'agit ensuite de faire voir qu'une telle décroissance ne peut pas être améliorée en général.

(d) Pour $0 < \alpha < 1$, montrer que la fonction :

$$f(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} e^{i2^n \theta}.$$

est α -höldérienne. Indication: Découper la somme :

$$f(\theta + t) - f(\theta) = \sum_{2^n \leq \frac{1}{|h|}} (\cdot) + \sum_{2^n > \frac{1}{|h|}} (\cdot).$$

Pour estimer la première somme, utiliser après l'avoir justifié le fait que $|1 - e^{i\theta}| \leq |\theta|$ pour $|\theta| \leq \pi$. Pour estimer la seconde somme, utiliser l'inégalité $|e^{it_2} - e^{it_1}| \leq 2$.

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Par définition :

$$D_n(t) = e^{-int} + \dots + e^{-it} + 1 + e^{it} + \dots + e^{int}.$$

Dans le cours, en utilisant $1 + q + \dots + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$, on montre que :

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(b) Puisque pour tout entier $k \in \mathbb{Z}^*$ non nul :

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt,$$

il vient :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt &= 0 + \dots + 0 + \int_{-\pi}^{\pi} 1 dt + 0 + \dots + 0 \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

(c) Sur $[-\pi, 0[\cup]0, \pi]$, cette fonction :

$$q(t) = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} - \frac{1}{\frac{t}{2}}$$

est \mathcal{C}^∞ , puisque ni $\sin\left(\frac{t}{2}\right)$, ni t n'y ont de zéros. Mais au voisinage de $t = 0$, un développement limité utilisant $\frac{1}{1-x} = 1 + x + O(x^2)$ donne :

$$\begin{aligned} q(t) &= \frac{1}{\frac{t}{2} - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^3 + O(t^5)} - \frac{1}{\frac{t}{2}} \\ &= \frac{1}{\frac{t}{2}} \left[\frac{1}{1 - \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + O(t^4)} - 1 \right] \\ &= \frac{2}{t} \left[1 + \frac{1}{6}\left(\frac{t}{2}\right)^2 + O(t^4) - 1 \right] \\ &= O(t), \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $q(t)$ se prolonge par continuité en $t = 0$ par la valeur nulle :

$$q(0) := 0.$$

(d) Bien entendu, on peut alors majorer :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\theta q(t) \sin(nt + t/2) dt \right| &\leq |\theta| \cdot (\max_{[0, \theta]} q) \cdot 1 \\ &\leq \underbrace{\pi \cdot \|q\|_{\mathcal{C}^0([- \pi, \pi])}}_{=: Q} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(e) Une formule trigonométrique connue stipule que :

$$\sin(nt + t/2) = \cos(t/2) \sin(nt) + \sin(t/2) \cos(nt).$$

Alors une application directe du lemme de Riemann-Lebesgue donne la réponse :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin(nt + t/2) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{q(t) \cos(t/2)}_{\in \mathcal{C}^0} \sin(nt) dt + \\ &+ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{q(t) \sin(t/2)}_{\in \mathcal{C}^0} \cos(nt) dt = 0 + 0. \end{aligned}$$

(f) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on sait que :

$$2\pi = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} dt.$$

Alors ce qui vient d'être vu permet de poursuivre :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} q(t) \sin(nt + t/2) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} - \underbrace{\frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}}}_{\text{fonction paire}} \right) dt \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2\pi - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} dt \right) \\ &= 2\pi - 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{t} dt, \end{aligned}$$

puis le changement de variable :

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)t =: u, \quad \text{d'où : } \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

donne :

$$2\pi = 4 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{(n + \frac{1}{2})\pi} \frac{\sin u}{u} du,$$

d'où en admettant que $\lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{\sin u}{u} du$ existe :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

(g) Le changement de variable similaire :

$$ct =: u, \quad \text{d'où : } \frac{dt}{t} = \frac{du}{u},$$

transforme :

$$\int_0^b \frac{\sin(ct)}{t} dt = \int_0^{bc} \frac{\sin u}{u} du.$$

Comme $\int_0^\infty \frac{\sin u}{u} du$ existe et comme $bc > 0$, ces quantités sont uniformément bornées en valeur absolue :

$$\left| \int_0^b \frac{\sin ct}{t} dt \right| \leq R,$$

par, disons, une constante notée R .

(h) Maintenant, en faisant apparaître $q(t)$ dans une inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\theta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin(\frac{t}{2})} dt \right| &\leq \left| \int_0^\theta \sin(nt + t/2) \underbrace{\left(\frac{1}{\sin(\frac{t}{2})} - \frac{1}{\frac{t}{2}} \right)}_{q(t)} dt \right| + \left| \int_0^\theta \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\frac{t}{2}} dt \right| \\ &\leq Q + 2R \\ &< \infty, \end{aligned}$$

et ce, pour tout $|\theta| \leq \pi$, grâce aux résultats des questions (d) et (g).

(i) On a bien :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\theta (D_n(t) - 1) dt &= \frac{1}{2} \int_0^\theta \left(\sum_{1 \leq |k| \leq n} e^{ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left[\frac{e^{ikt}}{ik} \right]_0^\theta \\ &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \left(\frac{e^{ik\theta}}{ik} - \frac{1}{ik} \right), \end{aligned}$$

et en observant que $0 = \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{1}{k}$ par imparité, il reste :

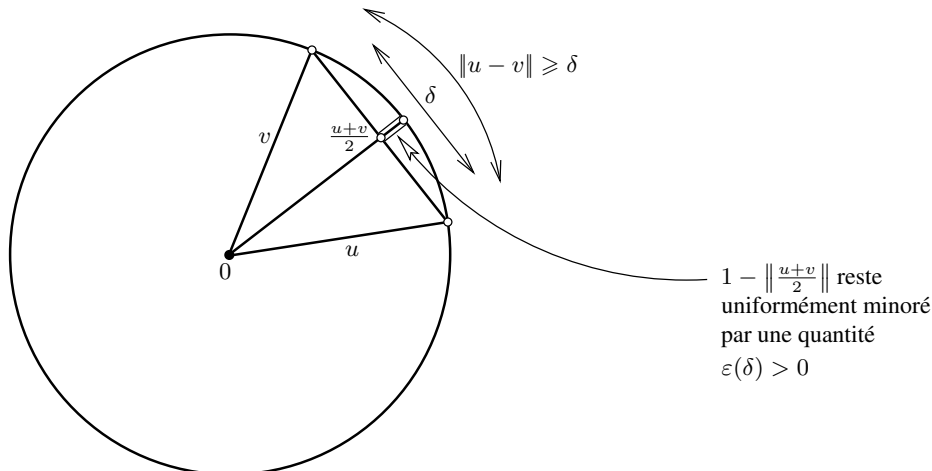
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\theta (D_n(t) - 1) dt &= \frac{1}{2i} \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{ik\theta}}{k} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{\sin(k\theta)}{k}. \end{aligned}$$

(j) En conclusion, en prenant les modules, et pour tout $|\theta| \leq \pi$:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq |k| \leq n} \frac{e^{ik\theta}}{k} \right| &\leq \left| \int_0^\theta (D_n(t) - 1) dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\theta D_n(t) dt \right| + |\theta| \\ &\leq Q + 2R + \pi \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve alternative du caractère uniformément borné de ces sommes, fait cruciallement utilisé dans le cours magistral afin de construire avec du Bois Reymond une fonction continue dont la série de Fourier diverge en $\theta = 0$.

Exercice 2. (a) Voici un diagramme :



(b) Par définition de :

$$\|L\| = \sup_{\|u\|=1} |L(u)|,$$

il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ d'éléments $u_n \in E$ de norme $\|u_n\| = 1$ telle que :

$$|L(u_n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|L\|,$$

et quitte à changer u_n en $-u_n$, seulement lorsque $L(u_n) \in \mathbb{R}_-$, on peut supposer que $L(u_n) \geq 0$ pour tout n , et ainsi sans valeur absolue :

$$L(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|L\|.$$

(c) Comme la fonctionnelle L est non nulle, $\|L\| > 0$. Étant donné $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe par conséquent $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \left(L(u_n) > \|L\|(1 - \varepsilon) \right),$$

et alors par simple addition-moyennisation :

$$n_1, n_2 \geq N(\varepsilon) \implies \left(\frac{L(u_{n_1}) + L(u_{n_2})}{2} > \|L\|(1 - \varepsilon) \right).$$

(d) Toujours pour $n_1, n_2 \geq N(\varepsilon)$, supposons par l'absurde que :

$$\left\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \right\| \leq (1 - \varepsilon).$$

La propriété caractéristique $|L(v)| \leq \|L\| \cdot \|v\|$ valable pour tout $v \in E$ et directement issue de la définition de la norme d'opérateur $\|L\|$ implique alors :

$$\begin{aligned} \left| L\left(\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2}\right) \right| &\leq \|L\| \cdot \left\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \right\| \\ &\leq \|L\| (1 - \varepsilon), \end{aligned}$$

d'où en éliminant la valeur absolue à gauche :

$$L\left(\frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2}\right) \leq \|L\| (1 - \varepsilon),$$

inégalité manifestement contradictoire avec **(c)**.

(e) Soit $\delta > 0$ arbitrairement petit et associons-lui la quantité $\varepsilon(\delta)$ — appelée *module de convexité* — qui apparaît dans la définition de l'uniforme convexité. Nous affirmons que :

$$n_1, n_2 \geq N(\varepsilon(\delta)) \implies (\|u_{n_1} - u_{n_2}\| < \delta),$$

ce qui établira la *Cauchycité* de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$.

Sinon, si au contraire on avait :

$$\|u_{n_1} - u_{n_2}\| \geq \delta,$$

alors par uniforme convexité de l'espace $(E, \|\cdot\|)$, on devrait avoir le contrôle minorant :

$$1 - \left\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \right\| \geq \varepsilon(\delta),$$

ce qui équivaudrait à :

$$1 - \varepsilon(\delta) \geq \left\| \frac{u_{n_1} + u_{n_2}}{2} \right\|,$$

et produirait une contradiction manifeste avec le résultat de la question **(d)** !

(f) La complétude de $(E, \|\cdot\|)$ assure l'existence de $u_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$. Comme $L(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|L\|$, et comme L est continue, $L(u_\infty) = \|L\|$.

(g) Étant donné une *autre* suite $(v_n)_{n \geq 1}$ quelconque qui satisfait exactement comme $(u_n)_{n \geq 1}$ à la fois $\|v_n\| = 1$ et $L(v_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|L\|$, les mêmes raisonnements s'appliquent sans modification et fournissent une limite $v_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$ satisfaisant aussi $L(v_\infty) = \|L\|$.

Or la suite entrelacée :

$$(u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n, \dots),$$

à savoir la suite :

$$w_n = \begin{cases} u_{\frac{n+1}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est impair,} \\ v_{\frac{n}{2}} & \text{lorsque } n \text{ est pair,} \end{cases}$$

satisfait elle aussi trivialement $\|w_n\| = 1$ et $L(w_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \|L\|$, donc les raisonnements qui précèdent s'appliquent aussi à elle, et ils fournissent sans effort une limite $w_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n$ qui satisfait encore et aussi $L(w_\infty) = \|L\|$. Ceci assure sans délai (exercice mental) que :

$$v_\infty = u_\infty,$$

et conclut la démonstration d'unicité. Bien entendu, $\|u_\infty\| = \|v_\infty\| = \|w_\infty\| = 1$.

(h) Avec $u_L \in E$ cet unique élément de norme $\|u_L\| = 1$ satisfaisant $L(u_L) = \|L\|$, la fonction :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \|L\| \cdot \|u_L + t v\| - L(u_L + t v), \end{aligned}$$

est en fait à valeurs dans \mathbb{R}_+ , simplement parce que $|L(w)| \leq \|L\| \cdot \|w\|$ pour $w := u_L + t v$, et elle s'annule visiblement en $t = 0$. Son minimum global vaut donc 0, et si elle possédait un *autre* minimum :

$$0 = \|L\| \cdot \|u_L + t_0 v\| - L(u_L + t_0 v),$$

pour un certain autre $t_0 \in \mathbb{R}$ avec $t_0 \neq 0$, cela contredirait l'unicité de u_L .

(i) Toute fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui admet un extremum (local ou global) en un point doit y avoir sa dérivée nulle. Ici en $t = 0$, on doit donc avoir :

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\|L\| \cdot \|u_L + t v\| - L(u_L) - t L(v) \right),$$

à savoir en termes de la fonctionnelle M_u supposée exister dans $(E, \|\cdot\|)$ lisse :

$$0 = \|L\| \cdot M_{u_L}(v) - L(v).$$

Nous avons donc établi le :

Théorème de James. *Dans un espace vectoriel normé complet uniformément convexe et lisse $(E, \|\cdot\|)$, à toute fonctionnelle linéaire continue $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ est associé un unique élément $u_L \in E$ tel que :*

$$L(\cdot) = \|L\| \cdot M_{u_L}(\cdot).$$

(j) L'identité du parallélogramme, valable dans tout \mathbb{R} -espace vectoriel normé dont la norme dérive d'un produit scalaire :

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

donne ici, en supposant donc que $\|u\| = \|v\| = 1$:

$$\left\| \frac{u + v}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{u - v}{2} \right\|^2 = 1,$$

et donc, pour tester l'uniforme convexité de notre espace de Hilbert $(H, \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle})$, si :

$$\|u - v\| \geq \delta,$$

on en déduit la minoration :

$$\frac{\delta^2}{4} \leq \frac{\|u - v\|^2}{4} = 1 - \left\| \frac{u + v}{2} \right\|^2,$$

puis en factorisant $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$:

$$\frac{\delta^2}{4} \leq \left(1 - \left\| \frac{u + v}{2} \right\| \right) \underbrace{\left(1 + \left\| \frac{u + v}{2} \right\| \right)}_{\leq 2},$$

et finalement, on conclut l'uniforme convexité :

$$\frac{\delta^2}{4} \frac{1}{2} \leq 1 - \left\| \frac{u + v}{2} \right\|,$$

grâce au minorant-bonus indiqué :

$$\varepsilon(\delta) \geq \frac{\delta^2}{8} > 0.$$

(k) Rappelons la dérivée de la racine carrée d'une fonction $g(t) > 0$:

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{g(t)} = \frac{1}{2\sqrt{g(0)}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (g(t)).$$

Ici, avec $u \neq 0$ pour assurer que $g(0) > 0$, on calcule :

$$\begin{aligned} M_u(v) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \sqrt{\langle u + tv, u + tv \rangle} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\langle u, u \rangle}} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left(\langle u, u \rangle + 2t \langle u, v \rangle + t^2 \langle v, v \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\langle u, u \rangle}} 2 \langle u, v \rangle \\ &= \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle, \end{aligned}$$

donc les deux expressions à comparer sont égales.

(l) Ainsi, tout espace de Hilbert, complet par définition, s'avère-t-il être aussi un espace vectoriel normé complet lisse uniformément convexe auquel le Théorème de James s'applique, montrant que toute fonctionnelle linéaire continue non nulle se représente comme :

$$\begin{aligned} L(v) &= \|L\| \cdot M_{u_L}(v) \\ &= \|L\| \cdot \left\langle \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle \\ &= \left\langle \|L\| \frac{u}{\|u\|}, v \right\rangle \\ &= \text{produit scalaire de } v \text{ avec un vecteur fixe,} \end{aligned}$$

et l'on retrouve un énoncé central de la théorie, à savoir le Théorème de représentation de Riesz.

11. Examen 6

Exercice 1. (a) Soit $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geq 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy = 1$. Avec $\varepsilon > 0$ réel, on pose $\psi_\varepsilon(y) := \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on a en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \psi_\varepsilon(x) = f(x).$$

(b) Si f est de plus uniformément continue sur \mathbb{R} , montrer que la convergence est uniforme.

(c) On suppose à présent que $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$. Rappeler l'expression de la transformée de Fourier de $e^{-\pi\delta x^2}$ avec un paramètre réel $\delta > 0$, et en déduire que :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}},$$

où $a > 0$ est réel.

(d) En déduire la valeur de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi\xi(x-y)} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi = \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}(x-y)^2}.$$

(e) En introduisant la fonction définie pour $z \in \mathbb{R}$ par :

$$\varphi_\varepsilon(z) := \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{2\pi^2 z^2}{\varepsilon^2}},$$

montrer, après avoir justifié l'existence de l'intégrale, que :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi = f * \varphi_\varepsilon(x).$$

(f) Déduire de ce qui précède la formule de type « inversion », valable pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Exercice 2. [Non-surjectivité de la transformée de Fourier] On a démontré en cours que la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F} : \left(L^1(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{L^1} \right) \longrightarrow \left(\mathcal{C}_{|\cdot| \rightarrow 0}^0(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0} \right),$$

de l'espace des fonctions Lebesgue-intégrables à valeurs dans l'espace des fonctions continues qui tendent vers zéro à l'infini, est une application linéaire continue *injective*.

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'elle n'est *pas* surjective.

On travaille ici en dimension $d = 1$, avec des fonctions à valeurs réelles.

(a) Trouver un exemple de fonction continue impaire positive $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ avec :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} g(x) = 0,$$

telle que son intégrale sur $[1, \infty[$ avec poids $\frac{1}{x}$ diverge :

$$\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{g(x)}{x} dx.$$

(b) Montrer que l'intégrale de Riemann généralisée :

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt := \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin t}{t} dt$$

existe (converge) ; on ne demande pas ici de la calculer exactement — elle vaut $\frac{\pi}{2}$ —, mais juste d'en démontrer la convergence.

(c) On suppose maintenant par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\widehat{f} = g.$$

Soit la fonction :

$$F(t) := -i (f(t) - f(-t)).$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$g(x) = \int_0^\infty F(t) \sin(2\pi xt) dt.$$

Indication: Écrire $g(x) = \frac{1}{2} (g(x) - g(-x))$.

(d) Montrer que l'on a pour tout $R \geq 1$:

$$\int_1^R \frac{g(x)}{x} dx = \int_0^\infty \left(\int_1^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x} \right) F(t) dt.$$

(e) Conclure.

Exercice 3. [Diviseurs de zéro dans l'algèbre de convolution] Soient deux intervalles ouverts $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ d'intersection $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ vide. Toutes les fonctions seront à valeurs dans \mathbb{R} .

(a) Utiliser deux fonctions non nulles $\varphi_1 \in \mathcal{C}_c^\infty(I_1)$, $\varphi_2 \in \mathcal{C}_c^\infty(I_2)$, pour construire deux fonctions $f_1, f_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ de l'espace de Schwartz satisfaisant $f_1 * f_2 = 0$, puis interpréter cette propriété. Indication: Utiliser la transformée de Fourier d'un produit de convolution.

(b) On introduit l'espace :

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) := \left\{ f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_J |f| < \infty \right. \\ \left. \text{pour tout intervalle borné } J \subset \mathbb{R}, \text{ et telle que } f|_{] -\infty, 0[} \equiv 0 \right\}.$$

Pour $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, montrer que $f * g(x) = 0$ lorsque $x < 0$, et, pour $x \geq 0$, que :

$$f * g(x) = \int_0^x f(y) g(x-y) dy.$$

(c) Montrer que $f * g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$.

(d) Soit maintenant $f \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant :

$$f * f = 0.$$

Pour tout réel $A > 0$ et tout entier $n \geq 1$, montrer que :

$$\begin{aligned} \left(\int_{-A}^A e^{nx} f(A-x) dx \right)^2 &= \underbrace{\int \int_{\substack{u \geq -A \\ v \geq -A \\ u+v \leq 0}} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) du dv}_{=: J_1} \\ &+ \underbrace{\int \int_{\substack{u \leq A \\ v \leq A \\ u+v \geq 0}} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) du dv}_{=: J_2}. \end{aligned}$$

(e) Toujours avec $f * f = 0$, en posant $u = A - y$ et $v = A - x + y$, montrer que :

$$J_2 = \int_0^{2A} e^{n(2A-x)} (f * f)(x) dx = 0.$$

(f) Montrer qu'il existe une constante indépendante de n telle que :

$$\left| \int_0^A e^{nx} f(A-x) dx \right| \leq \text{constante}_{f,A} \quad (\forall n \geq 0).$$

(g) On admet maintenant qu'une fonction $g \in L^1([0, B])$, avec $B > 0$, qui satisfait $|\int_0^B e^{nt} g(t) dt| \leq \text{constante}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est nécessairement nulle : $g = 0$ presque partout. Dédurre de ce qui précède que $f = 0$.

(h) Soient maintenant $f, g \in \mathcal{C}_+^0(\mathbb{R}) := \{h \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) : h|_{]-\infty, 0[} \equiv 0\}$ satisfaisant :

$$f * g = 0.$$

En posant $f_1(x) := x f(x)$ et $g_1(x) := x g(x)$, montrer que :

$$f * g_1 + f_1 * g = 0.$$

(i) Montrer que $f * g_1 = 0$. Indication: Calculer $(f * g_1) * (f * g_1)$.

(j) Montrer, pour $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, que :

$$0 = \int_0^x f(x-y) y^n g(y) dy.$$

(k) Utiliser un théorème de densité pour montrer que :

$$0 = \int_0^x (f(x-y) g(y))^2 dy.$$

(l) Montrer que l'algèbre de convolution $(\mathcal{C}_+^0(\mathbb{R}), *)$ n'a pas de diviseur de zéro.

(m) Montrer que si $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ satisfont $f * g = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 4. [Lemme de Fejér, sans indication] Soient deux fonctions définies sur le cercle unité $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, intégrable $f \in L^1(\mathbb{T})$, et essentiellement bornée $g \in L^\infty(\mathbb{T})$. Montrer que :

$$\widehat{f}(0) \widehat{g}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

12. Corrigé de l'examen 6

Exercice 1. (a) C'est une question de cours. Soit donc $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\psi \geq 0$ et que $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy = 1$, et, avec $\varepsilon > 0$, posons $\psi_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$. Via le changement de variable $y := \frac{x}{\varepsilon}$, on a encore $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\varepsilon(x) dx$.

Étant donné une fonction quelconque $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, on calcule la différence à étudier en tout point fixé $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f * \psi_\varepsilon(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \psi_\varepsilon(y) dy - f(x) \cdot 1 \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f(x-y) - f(x)) \psi_\varepsilon(y) dy. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque f est continue en x :

$$\forall \delta > 0, \quad \exists v = v(\delta) > 0, \quad (|(x-y) - x| \leq v \implies |f(x-y) - f(x)| \leq \delta).$$

En découpant alors l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{|y| \leq v} + \int_{|y| > v}$, on en déduit la majoration :

$$|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \delta \underbrace{\int_{|y| \leq v} \psi_\varepsilon(y) dy}_{\leq \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon = 1} + 2 \|f\|_{L^\infty} \int_{|y| > v} \psi_\varepsilon(y) dy.$$

Mais dans l'intégrale restante, en revenant à l'expression $\psi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\varepsilon} \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right)$, on peut poser $x := \frac{y}{\varepsilon}$ et se ramener au majorant suivant :

$$|f * \psi_\varepsilon(x) - f(x)| \leq \delta + \int_{|x| > \frac{v}{\varepsilon}} \psi(x) dx,$$

dont le deuxième terme à droite tend vers zéro lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisque $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ par hypothèse, et puisque $\frac{v}{\varepsilon} \rightarrow \infty$.

(b) Si f est de plus uniformément continue sur \mathbb{R} , il est clair que le v ci-dessus ne dépend pas de x , donc la convergence est uniforme.

(c) Le cours a montré que la transformée de Fourier de $e^{-\pi x^2}$ vaut $e^{-\pi \xi^2}$, et en a déduit par simple renormalisation que :

$$\widehat{e^{-\pi \delta x^2}}(\xi) = \mathcal{F}(e^{-\pi \delta x^2})(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\frac{\pi \xi^2}{\delta}},$$

d'où en posant $\delta := \frac{a}{\pi} > 0$ comme voulu :

$$\mathcal{F}(e^{-ax^2})(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\pi^2 \xi^2}{a}}.$$

(d) Avec le changement de notation $\xi' := x - y$ et $x' := \xi$, l'intégrale à calculer devient :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} e^{2i\pi \xi(x-y)} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2 x'^2}{2}} e^{-2i\pi x' \xi'} dx' \\ \text{[Reconnaître } \mathcal{F}(\cdot)\text{]} &= \mathcal{F}\left(e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} x'^2}\right)(\xi') \\ \text{[Question (c)]} &= \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\varepsilon^2}{2}}} e^{-\frac{\pi^2 \xi'^2}{\frac{\varepsilon^2}{2}}} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}(x-y)^2}. \end{aligned}$$

(e) L'intégrale en question :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi$$

existe bel et bien, puisque la transformée de Fourier \widehat{f} de toute fonction $f \in L^1$ est bornée et puisque le facteur exponentiel $e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}}$ est à décroissance très rapide lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$, pourvu que $\varepsilon > 0$.

Pour la même raison, sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, la fonction produit :

$$(y, \xi) \mapsto f(y) e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$$

est intégrable. Ainsi, le théorème de Fubini-Tonelli nous permet d'échanger l'ordre des intégrations :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \xi^2} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi \xi y} f(y) dy e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \xi^2} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2} \xi^2} e^{2i\pi(x-y)\xi} d\xi \right) \\ \text{[Question (d)]} &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) dy \frac{\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} e^{-\frac{2\pi^2(x-y)^2}{\varepsilon^2}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \varphi_{\varepsilon}(x-y) dy \\ &= f * \varphi_{\varepsilon}(x). \end{aligned}$$

Notons au passage qu'avec la fonction :

$$\varphi(z) := \sqrt{2\pi} e^{-2\pi^2 z^2},$$

ces fonctions $\varphi_{\varepsilon}(\cdot)$ avec $\varepsilon > 0$ en sont les renormalisées :

$$\varphi_{\varepsilon}(x-y) = \frac{1}{\varepsilon} \varphi\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right),$$

et en utilisant la valeur $1 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx$ vue en cours, on vérifie aisément (exercice) que $1 = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(z) dz$.

(f) Grâce à cette dernière observation, le résultat de la question (a) s'applique avec $\psi := \varphi$, et il offre en beauté la formule de type « inversion », valable pour $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \cap L^{\infty}(\mathbb{R}) \cap$

$L^1(\mathbb{R})$ en tout point $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f * \varphi_\varepsilon(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} e^{-\frac{\varepsilon^2 \xi^2}{2}} d\xi.$$

Exercice 2. (a) Sur \mathbb{R} , on pense à la fonction réelle d'abord définie sur \mathbb{R}_+ et positive :

$$g(x) := \begin{cases} x & \text{lorsque } 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{\log(e+x)} & \text{lorsque } x \geq 1, \end{cases}$$

puis prolongée par imparité à \mathbb{R}_- :

$$g(x) := -g(-x) \quad (\forall x \leq 0),$$

qui s'avère être continue sur \mathbb{R} . Alors pour tout $R \geq 1$:

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{g(x)}{x} dx &= \int_1^R \frac{1}{x \log(e+x)} dx \\ &\geq \int_1^R \frac{1}{(e+x) \log(e+x)} dx \\ &= \left[\log(\log(e+x)) \right]_1^R \\ &= \log(\log(e+R)) - \log(\log(e+1)) \\ &\xrightarrow{R \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

[Primitive connue !]

(b) Puisque $\frac{\sin t}{t} \sim \frac{t}{t} = 1$ en $t = 0$, ce qui montre la continuité sur $[0, \infty[$, donc la convergence de l'intégrale en 0, il s'agit d'établir la convergence en $+\infty$, donc d'après le critère de Cauchy, de montrer que :

$$0 \stackrel{?}{=} \lim_{\substack{M \rightarrow \infty \\ N \geq M}} \int_M^N \frac{\sin t}{t} dt.$$

Posons :

$$m := \inf \{k \in \mathbb{N} : M \leq k\pi\} \quad \text{et} \quad n := \sup \{k \in \mathbb{N} : k\pi \leq N\},$$

d'où :

$$0 \leq m\pi - M \leq \pi \quad \text{et} \quad 0 \leq N - n\pi \leq \pi,$$

et décomposons :

$$\int_M^N \frac{\sin t}{t} dt = \int_M^{m\pi} \frac{\sin t}{t} dt + \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt = \int_{n\pi}^N \frac{\sin t}{t} dt.$$

Ici, les intégrales 1 et 3 tendent vers 0 lorsque $N \geq M \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \left| \int_M^{m\pi} \frac{\sin t}{t} dt \right| &\leq \int_M^{m\pi} \frac{1}{t} dt \leq \frac{m\pi - M}{M} \leq \frac{\pi}{M} \xrightarrow{M \rightarrow \infty} 0, \\ \left| \int_{n\pi}^N \frac{\sin t}{t} dt \right| &\leq \int_{n\pi}^N \frac{1}{t} dt \leq \frac{N - n\pi}{n\pi} \leq \frac{\pi}{(N-1)\pi} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Quant à l'intégrale centrale, on peut réaliser qu'il ne faut *pas* passer aux valeurs absolues, car (exercice) :

$$\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt \quad (\forall m \in \mathbb{N}),$$

mais heureusement, la série numérique :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin t}{t} dt &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\pi + u)}{k\pi + u} du \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{k\pi + u} du}_{=: a_k} \end{aligned}$$

est *alternée* :

$$0 \leq a_{k+1} \leq a_k, \quad a_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0,$$

donc convergente d'après un résultat connu, et enfin, le critère de Cauchy pour les séries numériques convergentes montre qu'on a bien :

$$0 = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \geq m}} \sum_{k=m}^{n-1} (-1)^k a_k = \lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \geq m}} \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{\sin t}{t} dt.$$

(c) Supposons donc qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier $\widehat{f} = g$ est égale à une fonction g satisfaisant comme à la Question (a) :

$$\infty = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_1^R \frac{g(x)}{x} dx,$$

et introduisons la fonction *impaire* :

$$F(t) := i(f(t) - f(-t)),$$

satisfaisant visiblement :

$$\|F\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq 2\|f\|_{L^1(\mathbb{R})} < \infty.$$

En écrivant comme indiqué $g(x) = \frac{1}{2}(g(x) - g(-x))$, ce qui est vrai par imparité de g , il vient :

$$g(x) = \frac{1}{2}\widehat{f}(x) - \frac{1}{2}\widehat{f}(-x),$$

puis, en revenant à la définition de la transformée de Fourier, en écrivant $\int_{-\infty}^{\infty} = \int_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty}$, et en effectuant le changement de variable $t \mapsto -t$ dans les intégrales 1 et 3, on obtient :

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{-2i\pi xt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 f(t) e^{2i\pi xt} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) e^{2i\pi xt} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(-t) e^{2i\pi xt} dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) e^{-2i\pi xt} dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(-t) e^{-2i\pi xt} dt - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) e^{2i\pi xt} dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) (e^{2i\pi xt} - e^{-2i\pi xt}) dt + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(-t) (e^{2i\pi xt} - e^{-2i\pi xt}) dt \\ &= -i \int_0^{\infty} f(t) \sin(2\pi xt) dt + i \int_0^{\infty} f(-t) \sin(2\pi xt) dt \\ &= \int_0^{\infty} -i(f(t) - f(-t)) \sin(2\pi xt) dt \\ &= \int_0^{\infty} F(t) \sin(2\pi xt) dt. \end{aligned}$$

[Regrouper 4 et 2, puis 1 et 3]

(d) Pour $R \geq 1$ fixé, la fonction définie sur $[1, R] \times [0, \infty[$ par :

$$(x, t) \mapsto \frac{\sin(2\pi xt)}{x} F(t)$$

est intégrable, car $\frac{|\sin(2\pi xt)|}{x} \leq \frac{1}{x}$ est continue bornée, et car $F \in L^1(\mathbb{R})$ comme nous venons de l'observer, donc le théorème de Fubini-Tonelli permet d'invertir les intégrations :

$$\begin{aligned} \int_1^R \frac{g(x)}{x} dx &= \int_1^R \left(\int_0^\infty F(t) \sin(2\pi xt) dt \right) \frac{dx}{x} \\ &= \int_0^\infty \left(\int_1^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x} dx \right) F(t) dt. \end{aligned}$$

(e) Grâce à la Question (b), dont découle l'existence d'une constante $0 < C < \infty$ telle qu'on ait la majoration uniforme :

$$\left| \int_0^s \frac{\sin y}{y} dy \right| \leq C \quad (\forall s \geq 0),$$

nous affirmons que l'intégrale intérieure \int_1^R obtenue à la fin de la Question (d) ci-dessus est alors bornée quel que soit $R \geq 1$, grâce à la relation de Chasles $\int_1^R = \int_0^R - \int_0^1$ et à des changements de variables élémentaires du type $y = ax$ d'où $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$:

$$\begin{aligned} \left| \int_1^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x} dx \right| &= \left| \int_0^R \frac{\sin(2\pi xt)}{x} dx - \int_0^1 \frac{\sin(2\pi xt)}{x} dx \right| \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi t R} \frac{\sin y}{y} dy \right| + \left| \int_0^{2\pi t} \frac{\sin y}{y} dy \right| \\ &\leq C + C. \end{aligned}$$

Ainsi en revenant au résultat de la Question (a) et en se souvenant que $F \in L^1(\mathbb{R})$:

$$\infty \xleftarrow{\infty \leftarrow R} \int_1^R \frac{g(x)}{x} dx \leq 2C \int_0^\infty |F(t)| dt = 2C \|F\|_{L^1} = \text{quantité bornée},$$

ce qui est très contradictoire avec une des vérités les plus fondamentales des mathématiques !

Exercice 3. (a) Soient deux intervalles ouverts $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ d'intersection $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ vide. Soient deux fonctions non nulles :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &\in \mathcal{C}_c^\infty(I_1) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \\ \varphi_2 &\in \mathcal{C}_c^\infty(I_2) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}), \end{aligned}$$

par exemple deux fonctions-plateaux égales à 1 sur deux intervalles fermés bornés non vides $\bar{J}_1 \subset I_1$ et $\bar{J}_2 \subset I_2$. Alors leurs transformées de Fourier inverses :

$$\begin{aligned} f_1(x) &:= \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_1)(x), \\ f_2(x) &:= \int_{-\infty}^\infty \varphi_2(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi = \mathcal{F}^{-1}(\varphi_2)(x), \end{aligned}$$

appartiennent à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et sont encore non nulles, puisque, d'après un théorème du cours, la transformée de Fourier \mathcal{F} établit un *automorphisme* de l'espace de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (isométrique, qui plus est, pour la norme $L^2|_{\mathcal{S}(\mathbb{R})}$ induite). Donc inversement :

$$\varphi_1 = \mathcal{F}(f_1) = \widehat{f}_1,$$

$$\varphi_2 = \mathcal{F}(f_2) = \widehat{f}_2,$$

et alors d'après un autre théorème du cours :

$$\begin{aligned} \widehat{f_1 * f_2} &= \widehat{f_1} \widehat{f_2} \\ &= \varphi_1 \varphi_2 \\ &\equiv 0, \end{aligned}$$

donc puisque la transformée de Fourier est injective :

$$f_1 * f_2 = 0,$$

ce qui fait voir que l'algèbre de convolution $(L^1(\mathbb{R}), *)$ possède des diviseurs de zéro — propriété surprenante et quelque peu gênante qu'il va s'agir maintenant d'éviter en travaillant sur \mathbb{R}_+ .

(b) Soit donc l'espace des fonctions nulles sur la demi-droite négative \mathbb{R}_-^* et localement intégrables sur la demi-droite réelle positive \mathbb{R}_+ :

$$L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+) := \left\{ f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ mesurable telle que } \int_J |f| < \infty \text{ pour tout intervalle borné } J \subset \mathbb{R}, \right. \\ \left. \text{et telle que } f|_{] -\infty, 0[} \equiv 0 \right\}.$$

La convolée entre deux fonctions $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$ est a priori définie comme :

$$f * g(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dx,$$

pourvu que cette intégrale converge en presque tout point $x \in \mathbb{R}$. En tout cas, comme $f(y) = 0$ pour $y < 0$ et comme $g(x - y) = 0$ pour $x - y < 0$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty}$ porte en fait sur :

$$\int_{-\infty}^{\infty} = 0 + \int_{\substack{y \geq 0 \\ x - y \geq 0}}.$$

Ainsi, lorsque $x < 0$, la deuxième inégalité $x \geq y$ avec la première $y \geq 0$ donne l'ensemble vide :

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x - y) dy = 0 + \int_{\emptyset} = 0,$$

et quand $x \geq 0$, il vient bien :

$$f * g(x) = \int_0^x f(y) g(x - y) dy,$$

la convergence étant garantie par l'hypothèse que $f, g \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, cette formule étant d'ailleurs invariante par le changement de variable $y \mapsto x - y$ qui donne :

$$f * g(x) = \int_0^x f(x - y) g(y) dy = g * f(x).$$

(c) Il s'agit, pour tout intervalle borné $J \subset \mathbb{R}$, d'établir la finitude :

$$\int_J |f * g(x)| dx < \infty,$$

et plus généralement, pour tout réel $M > 0$ (arbitrairement grand), disons avec $J \subset [-M, M]$, d'estimer :

$$\begin{aligned} \int_{-M}^M |f * g(x)| dx &= \int_0^M |f * g(x)| dx \\ &= \int_0^M \left| \int_0^x f(y) g(x-y) dy \right| dx \\ &\leq \int_0^M \int_0^M |f(y)| |g(x-y)| dx dy \\ &= \int_0^M |f(y)| dy \int_0^M |g(x-y)| dx \\ &\leq \int_0^M |f(y)| dy \int_{-M}^M |g(z)| dz \\ &= \|f\|_{L^1[0,M]} \cdot \|g\|_{L^1[-M,M]} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

cette dernière finitude provenant du fait que $\int_E |f| < \infty$ et $\int_E |g| < \infty$, pour tout sous-ensemble mesurable borné $E \subset \mathbb{R}$.

(d) L'astuce consiste à écrire un carré d'intégrale comme produit d'intégrales dans deux variables distinctes, de manière à faire apparaître une intégrale double sur un domaine bidimensionnel :

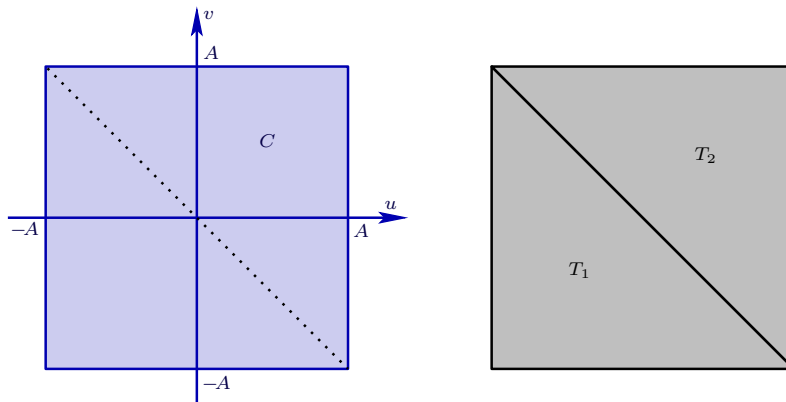
$$\begin{aligned} \left(\int_{-A}^A e^{nx} f(A-x) dx \right)^2 &= \int_{-A}^A e^{nu} f(A-u) du \int_{-A}^A e^{nv} f(A-v) dv \\ &= \iint_{\substack{-A \leq u \leq A \\ -A \leq v \leq A}} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) dudv, \end{aligned}$$

ici le simple carré :

$$C := [-A, A] \times [-A, A] = T_1 \cup T_2,$$

que l'on décompose en deux triangles fermés presque disjoints :

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: -A \leq u, -A \leq v, u+v \leq 0\}, \\ T_2 &= \{(u, v) \in \mathbb{R}^2: u \leq A, v \leq A, u+v \geq 0\}. \end{aligned}$$



Ainsi :

$$\iint_C = \iint_{T_1} + \iint_{T_2},$$

ce qui correspond bien à :

$$J_1 = \int \int_{\substack{-A \leq u \\ -A \leq v \\ u+v \leq 0}} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) du dv,$$

$$J_2 = \int \int_{\substack{u \leq A \\ v \leq A \\ 0 \leq u+v}} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) du dv.$$

(e) Soit donc $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$ satisfaisant $f * f = 0$. Dans cette deuxième intégrale J_2 , sur le triangle T_2 , on effectue le changement affine de variables :

$$x = 2A - (u + v), \quad y = A - u,$$

d'inverse :

$$u = A - y, \quad v = A - x + y,$$

lequel établit un difféomorphisme de :

$$T_2 = \{u \leq A, \quad v \leq A, \quad 0 \leq u + v\} \quad \text{d'où} \quad u + v \leq 2A,$$

sur le rectangle :

$$R := \{A - y \leq A, \quad A - x + y \leq A, \quad 0 \leq 2A - x, \quad 2A - x \leq 2A\}$$

$$= \{0 \leq x \leq 2A, \quad 0 \leq y \leq x\},$$

et comme la valeur absolue du déterminant jacobien vaut 1 :

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de changement de variables donne :

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \iint_{T_2} e^{n(u+v)} f(A-u) f(A-v) du dv \\
 &= \iint_R e^{n(2A-x)} f(y) f(x-y) dx dy \\
 &= \int_0^{2A} e^{n(2A-x)} \left(\int_0^x f(y) f(x-y) dy \right) dx \\
 \text{[Question (b)]} \quad &= \int_0^{2A} e^{n(2A-x)} \underline{f * f(x)}_o dx \\
 \text{[Hypothèse]} \quad &= 0.
 \end{aligned}$$

(f) Ainsi, $J_2 = 0$ s'annule. Dans J_1 , le facteur exponentiel $e^{n(u+v)} \leq 1$ est uniformément contrôlé, puisque $u + v \leq 0$, et on peut donc majorer de manière élémentaire par une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned}
 |J_1| &\leq \int_{\substack{-A \leq u \\ -A \leq v \\ u+v \leq 0}} |f(A-u)| \cdot |f(A-v)| du dv \\
 &\leq \int_{-A}^A f(A-u) du \int_{-A}^A f(A-v) dv \\
 &= \|f\|_{L^1[0,2A]} \cdot \|f\|_{L^1[0,2A]} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

ce qui donne, en revenant à la Question (d) et en prenant une racine carrée :

$$\left| \int_{-A}^A e^{nx} f(A-x) dx \right| \leq \text{constante}_{f,A}^1.$$

Pour terminer, la décomposition $\int_{-A}^A = \int_{-A}^0 + \int_0^A$, en tenant à nouveau compte du fait que $e^{nx} \leq 1$ lorsque $x \leq 0$, donne :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{-A}^0 e^{nx} f(A-x) dx \right| &\leq \|f\|_{L^1[A,2A]} \\
 &= \text{constante}_{f,A}^2,
 \end{aligned}$$

d'où le résultat voulu par simple inégalité triangulaire :

$$\left| \int_0^A e^{nx} f(A-x) dx \right| \leq \text{constante}_{f,A}^1 + \text{constante}_{f,A}^2.$$

(g) Puisqu'on admet que $\left| \int_0^B e^{nt} g(t) dt \right| \leq \text{constante}$ offre $g = 0$, ici avec $g(x) := f(A-x)$ et $B := A$, il vient sans aucun effort $f = 0$.

En conclusion, dans $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, l'équation $f * f = 0$ n'est satisfaite que par $f = 0$.

(h) On travaille maintenant pour simplifier dans :

$$\mathcal{E}_+^0(\mathbb{R}) := \{h \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}) : h|_{] -\infty, 0[} \equiv 0\},$$

au lieu de $L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_+)$, et on étudie l'équation :

$$f * g = 0,$$

c'est-à-dire pour $f, g \in \mathcal{C}_+^0(\mathbb{R})$:

$$\int_0^x f(y) g(x-y) dy = 0 \quad (\forall x \geq 0).$$

Soient donc $f_1(x) := x f(x)$ et $g_1(x) := x g(x)$. Un calcul (très) simple donne, pour $x \geq 0$ (sachant que pour $x < 0$, on a déjà vu que $f_1 * g_1(x) = 0 = f * g_1(x)$ pour des raisons de support) :

$$\begin{aligned} f_1 * g_1(x) + f * g_1(x) &= \int_0^x y f(y) g(x-y) dy + \int_0^x f(y) (x-y) g(x-y) dy \\ &= 0 + \int_0^x f(y) x g(x-y) dy \\ &= x \cdot f * g(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

(i) Comme on vient d'obtenir $f * g_1 = -f_1 * g$, on peut remplacer, utiliser le fait que le produit de convolution '*' est associatif et commutatif, pour calculer :

$$\begin{aligned} (f * g_1) * (f * g_1) &= -f * g_1 * f_1 * g \\ &= -\underline{f * g} * f_1 * g_1 \\ &= 0, \end{aligned}$$

et enfin, appliquer le résultat obtenu à la fin de la Question (g) à la fonction continue $h := f * g_1$ appartenant à $\mathcal{C}_+^0(\mathbb{R})$ pour atteindre :

$$f * g_1 = 0.$$

(j) Pour $n = 1$, comme $g_1(y) = y g(y)$, on vient d'obtenir :

$$0 = f * g_1(x) = \int_0^x f(x-y) y^1 g(y) dy \quad (\forall x \geq 0),$$

sachant que pour $x < 0$, cela est automatique, donc on a :

$$f * g = 0 \implies f * g_1 = 0,$$

d'où par une récurrence instantanée :

$$\implies \dots \implies f * g_n = 0,$$

pour $g_n(y) := y^n g(y)$, avec $n \geq 1$ entier.

(k) D'après le théorème de Weierstrass, sur tout intervalle, les polynômes sont denses dans les fonctions continues pour la norme \mathcal{C}^0 , donc on peut écrire :

$$f(x-y) g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n a_k y^k,$$

la limite étant uniforme sur $[0, x]$, avec des constantes appropriées $a_k \in \mathbb{R}$.

Ensuite par linéarité, la Question (j) qui précède donne :

$$0 = \int_0^x f(x-y) (a_0 + \dots + a_n y^n) g(y) dy,$$

et enfin en prenant la limite :

$$0 = \int_0^x (f(x-y)g(y))^2 dy.$$

(l) Comme f et g sont continues à valeurs dans \mathbb{R} , ceci implique, pour tout $0 \leq x$ et tout $0 \leq y \leq x$ que :

$$0 = f(x-y) \quad \text{ou} \quad 0 = g(y).$$

S'il existe $y \geq 0$ tel que $g(y) \neq 0$, alors $f(x-y) = 0$ pour tout $x \geq y$, c'est-à-dire $f(z) = 0$ pour tout $z \geq 0$, d'où $f \equiv 0$ sur \mathbb{R} tout entier.

S'il existe $y \geq 0$ tel que $f(y) \neq 0$, le changement de variable $y \mapsto x-y$ dans l'intégrale ci-dessus donne :

$$0 = \int_0^x (f(y)g(x-y))^2 dy,$$

ce qui implique similairement pour tout $0 \leq x$ et tout $0 \leq y \leq x$ que :

$$0 = f(y) \quad \text{ou} \quad 0 = g(x-y),$$

et le même raisonnement donne $g(z) \geq 0$ pour tout $z \geq 0$.

En conclusion, $f * g = 0$ pour $f, g \in \mathcal{C}_+^0(\mathbb{R})$ n'est possible que dans les deux cas triviaux où $f \equiv 0$, ou où $g \equiv 0$ — c'est chouette !

(m) Lorsque f et g ne sont qu'intégrables au sens de Lebesgue, la même démonstration fonctionne, à condition de se souvenir que le théorème de Weierstrass est vrai aussi sur tout intervalle pour la norme L^1 .

Exercice 4. Commençons par démontrer que, pour tout polynôme trigonométrique $Q \in \mathbb{C}[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$ et toute fonction $g \in L^\infty(\mathbb{T})$, on a bien :

$$\widehat{Q}(0)\widehat{g}(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} Q(\theta)g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

avant d'aller plus loin au moyen d'arguments de densité.

Si donc :

$$Q = \sum_{\text{finie}} a_k e^{ik\theta} \quad (a_k \in \mathbb{C}),$$

par linéarité, il suffit même de démontrer cela pour une exponentielle individuelle $Q = e^{ik\theta}$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

Pour $k = 0$, on a $Q = 1$, d'où $\widehat{Q}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} Q(t)e^{-i0t} \frac{dt}{2\pi} = 1$, et on teste si :

$$\begin{aligned} 1 \cdot \widehat{g}(0) &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi n}^{n\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{n 2\pi} \\ &= \frac{1}{n} \left(\int_{-\pi n}^{-\pi n + 2\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} + \cdots + \int_{n\pi - 2\pi}^{n\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right) \\ &= \frac{n}{n} \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \widehat{g}(0). \\ &\text{oui} \end{aligned}$$

Lorsque $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, vérifions la relation demandée en supposant d'abord que $g = h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ est deux fois continûment dérivable.

Dans ce cas, puisque d'après un théorème du cours, l'inégalité obtenue en intégrant deux fois par parties :

$$|\widehat{h}(\ell)| \leq \frac{1}{\ell^2} \|h''\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{T})} \quad (\forall \ell \in \mathbb{Z})$$

assure que h est égale en tout point à sa série de Fourier :

$$h(\theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell) e^{i\ell\theta} \quad (\forall \theta \in \mathbb{T}),$$

on peut insérer :

$$h(n\theta) = \sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell) e^{i\ell n\theta},$$

et intervertir :

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{?}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} h(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \left(\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell) e^{i\ell n\theta} \right) \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\ell) \underbrace{\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} e^{i\ell n\theta} \frac{d\theta}{2\pi}}_{=0 \text{ quand } |n| \geq k+1 \text{ et } |\ell| \geq 1} \right] \\ &\stackrel{[\text{Donc } \ell = 0]}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\widehat{h}(0) \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right] \\ &\stackrel{\text{oui}}{=} 0, \end{aligned}$$

cette dernière annulation provenant de $k \neq 0$.

Si $g \in L^1(\mathbb{T})$, pour tout $\varepsilon > 0$, par densité de $\mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ dans $L^1(\mathbb{T})$, et puisque $L^\infty(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$, il existe $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{T})$ telle que :

$$\|g - h\|_{L^1} \leq \varepsilon,$$

d'où :

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} (g(n\theta) - h(n\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |g(\theta) - h(\theta)| \frac{d\theta}{n 2\pi} \\ &= \frac{n}{n} \|g - h\|_{L^1} \\ &\leq 1 \cdot \varepsilon, \end{aligned}$$

et puisqu'on a aussi :

$$\begin{aligned} |\widehat{g}(0) - \widehat{h}(0)| &\leq \|g - h\|_{L^1(\mathbb{T})} \\ &\leq \varepsilon, \end{aligned}$$

le résultat montré à l'instant pour h est hérité par g , toujours avec $f = Q = e^{ik\theta}$:

$$\begin{aligned} & \left| \widehat{e^{ik\cdot}}(0) \widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} - \left(\widehat{e^{ik\cdot}}(0) \widehat{h}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} h(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right) \right| \leq \\ & \leq |\widehat{e^{ik\cdot}}(0)| \cdot |\widehat{g}(0) - \widehat{h}(0)| + \left| \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\theta} (-g(n\theta) + h(n\theta)) \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ & \leq \varepsilon + \varepsilon, \end{aligned}$$

donc ensuite par linéarité, pour tout polynôme trigonométrique $f = Q \in \mathbb{C}[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$.

Il reste seulement à faire voir que le résultat qui vient d'être démontré pour des polynômes trigonométriques quelconques se transmet à toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbb{T})$.

Évidemment, on approxime f en norme L^1 sur \mathbb{T} à $\varepsilon > 0$ près par un polynôme trigonométrique $P_\varepsilon \in \mathbb{C}[e^{-i\theta}, e^{i\theta}]$:

$$\|f - P_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T})} \leq \varepsilon,$$

par exemple en utilisant la suite des convolées de f avec le noyau de Fejér.

Si nous appliquons alors ce qui vient d'être démontré au polynôme trigonométrique $Q := P_\varepsilon$, il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \left| \widehat{P_\varepsilon}(0) \widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| \leq \varepsilon.$$

Commençons par l'inégalité simple :

$$\begin{aligned} |\widehat{g}(0)| &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) e^{-i0\theta} \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ &\leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \frac{d\theta}{2\pi} \\ &= \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

suivie d'une autre presque aussi simple :

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(0) \widehat{g}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0) \widehat{g}(0)| &= |(\widehat{f}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0)) \widehat{g}(0)| \\ &\leq \|f - P_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{T})} |\widehat{g}(0)| \\ &\leq \varepsilon \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}, \end{aligned}$$

et estimons enfin en insérant quatre termes de somme nulle, toujours pour $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \left| \widehat{f}(0) \widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| &\leq \left| \widehat{f}(0) \widehat{g}(0) - \widehat{P_\varepsilon}(0) \widehat{g}(0) \right| + \left| \widehat{P_\varepsilon}(0) \widehat{g}(0) - \int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| + \\ &+ \left| \int_{-\pi}^{\pi} P_\varepsilon(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) g(n\theta) \frac{d\theta}{2\pi} \right| \\ &\leq \varepsilon \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} + \varepsilon + \|P_\varepsilon - f\|_{L^1(\mathbb{T})} \cdot \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \\ &\leq \varepsilon (1 + 2 \|g\|_{L^\infty(\mathbb{T})}), \end{aligned}$$

ce qui achève le corrigé de ce bel examen !

13. Examen 7

Exercice 1. [Théorème de Fejér-Lebesgue] Étant donné une fonction $f \in L^1(\mathbb{T}, \mathbb{C})$ intégrable sur le cercle et à valeurs finies, Lebesgue a démontré — résultat admis ici — que presque tout point $\theta \in \mathbb{T}$ est un *point de Lebesgue*, au sens où :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \underbrace{\int_{|t-\theta| \leq \delta} |f(t) - f(\theta)| dt}_{= \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta-t) - f(\theta)| dt}.$$

L'objectif de cet exercice est d'établir qu'en tout point de Lebesgue $\theta \in \mathbb{T}$, les sommes de Fejér convergent vers :

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n(f)(\theta) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F_n * f)(\theta). \end{aligned}$$

On fixe donc un tel $\theta \in \mathbb{T}$, et on introduit :

$$\begin{aligned} \Phi(\delta) &:= \int_{|t-\theta| \leq \delta} |f(t) - f(\theta)| dt = \int_{|t| \leq \delta} |f(\theta-t) - f(\theta)| dt, \\ \Phi^-(\delta) &:= \int_{\theta}^{\theta+\delta} |f(t) - f(\theta)| dt = \int_{-\delta}^0 |f(\theta-t) - f(\theta)| dt, \\ \Phi^+(\delta) &:= \int_{\theta-\delta}^{\theta} |f(t) - f(\theta)| dt = \int_0^{\delta} |f(\theta-t) - f(\theta)| dt. \end{aligned}$$

(a) Vérifier que $\Phi(\delta) = o(\delta)$, et montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$0 \leq \Phi(\delta), \Phi^-(\delta), \Phi^+(\delta) \leq \varepsilon \delta \quad (\forall 0 \leq \delta \leq \delta(\varepsilon)).$$

(b) Rappeler l'expression explicite du noyau de Fejér $F_n(t)$ pour $-\pi \leq t \leq \pi$, ainsi que la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}$.

(c) Sachant que $0 < \frac{1}{n} < \frac{1}{n^{1/4}}$ pour tout entier $n \geq 2$, on découpe en trois morceaux :

$$\begin{aligned} |F_n * f(\theta) - f(\theta)| &\leq \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) |f(\theta-t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{0 \leq |t| \leq \frac{1}{n}} + \int_{\frac{1}{n} \leq |t| \leq \frac{1}{n^{1/4}}} + \int_{\frac{1}{n^{1/4}} \leq |t| \leq \pi} \\ &=: I_1(n) + I_2(n) + I_3(n). \end{aligned}$$

En s'inspirant de l'indication qui n'apparaît qu'à la page suivante, montrer que :

$$I_3(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Indication: Pour $0 < \eta < \pi$, utiliser l'inégalité vue en cours :

$$\frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^2} \leq \frac{1}{(\sin \frac{\eta}{2})^2} \quad (\forall \eta \leq |t| \leq \pi),$$

ainsi que l'inégalité $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{|t|}{\pi}$, valable pour tout $0 \leq |t| \leq \pi$.

(d) Montrer que pour tout $0 \leq |t| \leq \pi$:

$$0 \leq F_n(t) \leq \frac{\pi^2}{4} n.$$

(e) Montrer que :

$$I_1(n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

(f) Montrer que :

$$\begin{aligned} I_2(n) &\leq \frac{\pi}{2n} \int_{-\frac{1}{n^{1/4}}}^{-\frac{1}{n}} \frac{|f(\theta - t) - f(\theta)|}{t^2} dt + \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{|f(\theta - t) - f(\theta)|}{t^2} dt \\ &=: I_2^-(n) + I_2^+(n). \end{aligned}$$

(g) Il s'agit d'atteindre $\lim_{n \rightarrow \infty} I_2^-(n) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} I_2^+(n)$. Les deux cas étant similaires, traiter seulement $I_2^+(n)$, et conclure. Indication: Effectuer une intégration par parties.

Exercice 2. [Lemme de Kirschbraun] Soit E un \mathbb{R} -espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_E = \langle \cdot, \cdot \rangle$ d'où dérive la norme $\| \cdot \|_E = \| \cdot \|$. On suppose :

$$1 \leq \dim E < \infty.$$

En tout point $c \in E$, pour tout rayon $s > 0$, soient les boules ouvertes :

$$B(c, s) := \{x \in E : \|x - c\| < s\}.$$

Soit un entier $l \geq 1$, soient des points $a_1, \dots, a_l \in E$, et soient des rayons $r_1, \dots, r_l > 0$. Sous l'hypothèse principale que les boules ouvertes correspondantes sont d'intersection non vide :

$$\emptyset \neq \bigcap_{1 \leq i \leq l} B(a_i, r_i),$$

l'objectif de cet exercice est d'établir que pour tout autre choix de points $b_1, \dots, b_l \in E$ satisfaisant :

$$\|b_{i_1} - b_{i_2}\| \leq \|a_{i_1} - a_{i_2}\| \quad (1 \leq i_1, i_2 \leq l),$$

on a encore la non-vacuité de l'intersection des boules ouvertes :

$$\emptyset \neq \bigcap_{1 \leq i \leq l} B(b_i, r_i).$$

(a) Montrer qu'il existe (au moins) un point $p \in \bigcap_{1 \leq i \leq l} B(a_i, r_i)$ tel que :

$$p \neq a_1, \dots, p \neq a_l.$$

(b) On fixe un point :

$$p \in \bigcap_{1 \leq i \leq l} B(a_i, r_i) \setminus \{a_1, \dots, a_l\}$$

dans cette intersection qui est distinct de tous les a_i , et on introduit la fonction :

$$E \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

$$\Phi: x \longmapsto \max_{1 \leq i \leq l} \frac{\|x - b_i\|}{\|p - a_i\|}.$$

Montrer qu'il suffit d'établir l'existence d'un point $q \in E$ en lequel :

$$\Phi(q) \leq 1.$$

(c) On raisonne alors par l'absurde en supposant que $\Phi(x) > 1$ pour tout $x \in E$. Montrer qu'il existe (au moins) un point $q \in E$ en lequel Φ est minimale :

$$\Phi(q) = \inf_{x \in E} \Phi(x).$$

(d) Puisque le raisonnement par l'absurde se poursuit, on a $\Phi(q) > 1$. Montrer qu'on peut supposer, pour un certain entier $1 \leq \kappa \leq l$, que :

$$\begin{aligned} \|q - b_i\| &= \Phi(q) \|p - a_i\| & (\forall 1 \leq i \leq \kappa), \\ \|q - b_i\| &< \Phi(q) \|p - a_i\| & (\forall \kappa+1 \leq i \leq l). \end{aligned}$$

(e) On introduit maintenant l'enveloppe convexe fermée des points b_1, \dots, b_κ :

$$\mathcal{C} := \{c = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_\kappa b_\kappa \in E : 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_\kappa \leq 1, \lambda_1 + \dots + \lambda_\kappa = 1\}.$$

Montrer que $q \in \mathcal{C}$. *Indication*: Introduire le projeté orthogonal $\pi_{\mathcal{C}}(q)$ de q sur \mathcal{C} , supposer en raisonnant par contradiction que $q \neq \pi_{\mathcal{C}}(q)$, et analyser le comportement de la fonction Φ en des points de la forme :

$$q_t := q + t(\pi_{\mathcal{C}}(q) - q),$$

pour $0 < t$ petit. Notamment, on pourra établir, pour $1 \leq i \leq \kappa$, la formule utile :

$$\|q_t - b_i\|^2 = \|q - b_i\|^2 + 2t \left[-\|\pi_{\mathcal{C}}(q) - q\|^2 + \langle \pi_{\mathcal{C}}(q) - b_i, \pi_{\mathcal{C}}(q) - q \rangle \right] + t^2 \|\pi_{\mathcal{C}}(q) - q\|^2.$$

(f) Pour tout $1 \leq i \leq \kappa$, on pose :

$$e_i := q - b_i \quad \text{et} \quad d_i := p - a_i.$$

Montrer que pour tous $1 \leq i, j \leq \kappa$, on a :

$$\langle e_i, e_j \rangle > \langle d_i, d_j \rangle.$$

(g) Si $q \in \mathcal{C}$ s'écrit $q = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_\kappa b_\kappa$ avec certains $0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_\kappa \leq 1$ de somme $1 = \lambda_1 + \dots + \lambda_\kappa$, montrer que :

$$\|\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_\kappa e_\kappa\|^2 > \|\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_\kappa d_\kappa\|^2,$$

et conclure.

Exercice 3. [Transformée de Fourier dans l'espace de Schwartz] Pour $x \in \mathbb{R}$, le *sinus hyperbolique* et le *cosinus hyperbolique* sont définis par :

$$\sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

L'objectif de cet exercice est de calculer explicitement la transformée de Fourier de la fonction :

$$x \longmapsto \frac{x}{\sinh x},$$

prenant bien entendu la valeur 1 en $x = 0$.

(a) Montrer que :

$$\frac{\sinh x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

(b) Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{x}{\sinh x}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(c) Pour tout entier $k \geq 0$, montrer qu'il existe des polynômes $P_{k,j}(x) \in \mathbb{Q}[x]$ pour $-k \leq j \leq k$, tels que :

$$\frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{x}{\sinh x} \right) = \frac{\sum_{-k \leq j \leq k} e^{jx} P_{k,j}(x)}{(\sinh x)^{k+1}}.$$

(d) Montrer que $x \mapsto \frac{x}{\sinh x}$ appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(e) Montrer, pour tout nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} \lambda < 0$, que :

$$\int_0^{\infty} x e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda^2}.$$

(f) On introduit la suite de fonctions $(h_N(x))_{N=1}^{\infty}$ définie, avec $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, par :

$$h_N(x) := \sum_{n=0}^{N-1} x \cos(2\pi\xi x) e^{-(1+2n)x}.$$

Montrer que :

$$\int_0^{\infty} \left(\lim_{N \rightarrow \infty} h_N(x) \right) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} h_N(x) dx.$$

(g) Montrer que la transformée de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ de la fonction $f(x) := \frac{x}{\sinh x}$ vaut :

$$\widehat{f}(\xi) = 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - (2\pi\xi)^2}{((2n+1)^2 + (2\pi\xi)^2)^2}.$$

Exercice 4. [Non-dérivabilité optimale de la fonction de Weierstrass] Soit un réel $b > 1$, et soit une fonction :

$$v \in \mathcal{C}_c^\infty \left(]\frac{1}{b}, b[, \mathbb{R}_+ \right),$$

indéfiniment dérivable à support compact dans un intervalle contenant $\{1\}$, avec :

$$v(1) = 1.$$

(a) Montrer qu'il existe une fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz telle que $\widehat{u} = v$, où, pour $\tau \in \mathbb{R}$:

$$\widehat{u}(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{-2i\pi\tau y} dy.$$

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(b^k(x - \xi)) dx = \frac{\widehat{u}(0)}{b^k}.$$

(c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, on a :

$$0 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) u(b^k(x - \xi)) dx.$$

(d) Soit maintenant une fonction continue bornée $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dont on suppose qu'elle est dérivable en un certain point $\xi \in \mathbb{R}$, sans rien supposer d'autre. On considère un développement de Taylor de f à l'ordre 1 en ξ :

$$f(x) = f(\xi) + f'(\xi)(x - \xi) + R(x, \xi),$$

avec un reste $R(x, \xi)$ petit exprimant que f est dérivable en ξ :

$$R(x, \xi) = o(|x - \xi|).$$

Montrer, pour tout $k \in \mathbb{N}$, que l'on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} R(x, \xi) u(b^k(x - \xi)) dx.$$

(e) Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer qu'il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que :

$$\left| \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} R(x, \xi) u(b^k(x - \xi)) dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |y| |u(y)| dy.$$

(f) La norme \mathcal{C}^0 étant définie par $\|h\|_{\mathcal{C}^0} := \sup_{y \in \mathbb{R}} |h(y)|$, montrer que l'on a :

$$\left| \left[\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty} \right] R(x, \xi) u(b^k(x - \xi)) dx \right| \leq \frac{\|y^3 u(y)\|_{\mathcal{C}^0}}{b^{3k}} \left[\int_{-\infty}^{\xi-\delta} + \int_{\xi+\delta}^{\infty} \right] \frac{|R(x, \xi)|}{|x - \xi|^3} dx.$$

(g) Établir le *Lemme de Freud*, d'après lequel, si f est dérivable en ξ :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} b^{2k} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx.$$

(h) Soit à présent un autre nombre réel $0 < a < 1$. On suppose que $ab \geq 1$, et on introduit la fonction de Weierstrass :

$$\begin{aligned} f(x) &:= 2 \sum_{n=1}^{\infty} a^n \cos(2\pi b^n x) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left(e^{2i\pi b^n x} + e^{-2i\pi b^n x} \right). \end{aligned}$$

Si $\xi \in \mathbb{R}$ est un nombre réel quelconque fixé, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx = \frac{a^k}{b^k} e^{-2i\pi b^k \xi}.$$

(i) En déduire que f n'est dérivable en aucun point $\xi \in \mathbb{R}$.

14. Corrigé de l'examen 7

Exercice 1. (a) L'hypothèse $0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{2\delta} \Phi(\delta)$ signifie précisément que :

$$\Phi(\delta) = o(\delta),$$

et comme :

$$0 \leq \Phi(\delta) = \Phi^-(\delta) + \Phi^+(\delta),$$

tous trois étant positifs, on a aussi :

$$\Phi^-(\delta) = o(\delta) = \Phi^+(\delta),$$

et ce qui est demandé exprime rigoureusement le « $o(\delta)$ » en question.

(b) Pour qui n'a pas fait l'impasse sur l'apprentissage de son cours :

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \geq 0 \quad (0 < |t| \leq \pi),$$

avec $F_n(0) = n$, et on a $1 = \int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) \frac{dt}{2\pi}$.

(c) Avec $\eta := \frac{1}{n^{1/4}}$, pour tout $\frac{1}{n^{1/4}} \leq |t| \leq \pi$, on a donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^2} &\leq \frac{1}{(\sin \frac{\eta}{2})^2} \\ &\leq \frac{\pi^2}{\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^2}, \end{aligned}$$

d'où l'estimation-majoration :

$$\begin{aligned} I_3(n) &= \int_{\frac{1}{n^{1/4}} \leq |t| \leq \pi} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{\frac{1}{n^{1/4}} \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{n} \left(\frac{\sin \frac{nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 \frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^2} |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \int_{\frac{1}{n^{1/4}} \leq |t| \leq \pi} \frac{1}{n} 1^2 \pi^2 n^{1/2} |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \frac{\pi^2}{n^{1/2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \frac{dt}{2\pi} + |f(\theta)| \int_{-\pi}^{\pi} 1 \frac{dt}{2\pi} \right) \\ &= \frac{\pi^2}{\sqrt{n}} \text{ constante} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

(d) On majore en effet, grâce à $|\sin u| \leq |u|$ et à $\frac{1}{(\sin \frac{t}{2})^2} \leq \frac{\pi^2}{t^2}$:

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(t) &= \frac{1}{n} \frac{(\sin \frac{nt}{2})^2}{(\sin \frac{t}{2})^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \left(\frac{nt}{2}\right)^2 \frac{\pi^2}{t^2} \\ &= \frac{\pi^2}{4} n. \end{aligned}$$

(e) Grâce à la majoration élémentaire obtenue à l'instant pour $F_n(t)$, et grâce au fait que θ est un point de Lebesgue, on majore en effet :

$$\begin{aligned} I_1(n) &= \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq n \frac{\pi^2}{4} \int_{|t| \leq \frac{1}{n}} |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &= \frac{\pi^2}{4} n \Phi\left(\frac{1}{n}\right) \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0. \end{aligned}$$

(f) La majoration valable pour $0 < t \leq \pi$:

$$\begin{aligned} 0 \leq F_n(t) &\leq \frac{1}{n} \frac{1^2}{(\sin \frac{t}{2})^2} \\ &\leq \frac{1}{n} \frac{\pi^2}{t^2} \end{aligned}$$

permet en effet d'obtenir :

$$\begin{aligned} I_2(n) &= \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n^{1/4}}} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} F_n(t) |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \int_{-\frac{1}{n}}^{-\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{1}{n} \frac{\pi^2}{t^2} |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi} + \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{1}{n} \frac{\pi^2}{t^2} |f(\theta - t) - f(\theta)| \frac{dt}{2\pi}, \end{aligned}$$

et après réorganisation visuelle, c'est le résultat demandé.

(g) La fonction $\Phi^+(t)$ étant manifestement une primitive :

$$0 \leq \Phi^+(t) = \int_0^t |f(\theta - u) - f(\theta)| du,$$

on peut effectivement l'utiliser pour intégrer par parties :

$$\begin{aligned} I_2^+(n) &= \frac{\pi}{2n} \left[\frac{\Phi^+(t)}{t^2} \right]_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} + \frac{\pi}{2n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \Phi^+(t) \frac{2}{t^3} dt \\ &= \frac{\pi}{2n} \frac{\Phi^+\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}{\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)^2} - \frac{\pi}{2n} \frac{\Phi^+\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{\pi}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3} dt \\ &= \frac{\pi}{2n^{3/4}} \underbrace{n^{1/4} \Phi^+\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} - \frac{\pi}{2} \underbrace{n \Phi^+\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} + \frac{\pi}{n} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3} dt, \end{aligned}$$

le premier terme et le deuxième terme ayant 0 pour limite, d'après le résultat $\Phi^+(\delta) = o(\delta)$ de la question (a) qui équivaut à :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \Phi^+(\delta).$$

Quant au troisième et dernier terme, pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe $\delta(\varepsilon) > 0$ de la forme :

$$\delta(\varepsilon) = \frac{1}{N(\varepsilon)^{1/4}},$$

avec $N(\varepsilon) \gg 1$ entier tel que :

$$0 \leq \Phi^+(t) \leq \varepsilon t \quad (\forall 0 \leq t \leq N(\varepsilon)^{-1/4}).$$

Alors pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, en utilisant :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\Phi^+(t)}{t^3} dt &\leq \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n^{1/4}}} \frac{\varepsilon t}{t^3} dt \\ &= \varepsilon (n - n^{1/4}), \end{aligned}$$

on peut estimer :

$$I_2^+(n) \leq \frac{\pi}{2n^{3/4}} \underbrace{n^{1/4} \Phi^+\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} - \frac{\pi}{2} \underbrace{n \Phi^+\left(\frac{1}{n}\right)}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} + \frac{\pi}{n} \varepsilon (n - n^{1/4}),$$

le dernier terme étant majoré par $\varepsilon \pi$, ce qui termine le travail.

Exercice 2. (a) Puisque l'intersection de ces boules ouvertes est un ouvert non vide de $E \cong \mathbb{R}^{\dim E}$, éviter le nombre fini ≤ 1 des points constituant l'ensemble $\{a_1, \dots, a_l\}$ en restant dans cet ouvert est aisé.

(b) En effet, si l'on disposait d'un tel point q , alors il viendrait :

$$\begin{aligned} \|q - b_i\| &\leq \|p - a_i\| \\ &< r_i \end{aligned} \quad (1 \leq i \leq l),$$

donc q serait dans chaque boule ouverte $B(b_i, r_i)$, et ainsi, l'objectif se réaliserait :

$$\emptyset \neq \{q\} \subset \bigcap_{1 \leq i \leq l} B(b_i, r_i).$$

(c) Comme maximum de I fonctions continues, la fonction Φ est continue sur E . Clairement, elle tend vers l'infini lorsque $\|x\| \rightarrow \infty$. Comme $E \cong \mathbb{R}^{\dim E}$ est de dimension finie, donc localement compact (complet), Φ atteint son infimum en au moins un point.

(d) En effet, par construction :

$$\Phi(q) = \max_{1 \leq i \leq I} \frac{\|q - b_i\|}{\|p - a_i\|},$$

et si ce maximum est atteint pour un certain nombre $\kappa \geq 1$ d'indices i , il suffit de renuméroter l'ensemble pour les placer tous en premier (ce qui ne change rien aux données du problème).

(e) Nous allons faire voir que Φ décroît localement le long du segment $[q, \pi_{\mathcal{E}}(q)]$, en partant de q :

$$\Phi(q) > \Phi(q_t) \quad (0 < t \text{ petit}),$$

ce qui contredira le fait que q est un point où Φ atteint son minimum.

En effet, comme pour tout $\kappa + 1 \leq i \leq I$, on a :

$$\frac{\|q - b_i\|}{\|p - a_i\|} < \Phi(q),$$

la continuité de $t \mapsto q_t$ assure qu'on a encore :

$$\frac{\|q_t - b_i\|}{\|p - a_i\|} < \Phi(q) \quad (\forall 0 \leq t \text{ petit}, \kappa + 1 \leq i \leq I).$$

Ensuite, pour les autres indices $1 \leq i \leq \kappa$, développons le carré :

$$\begin{aligned} \|q_t - b_i\|^2 &= \|(q - b_i) + (t(\pi_{\mathcal{E}}(q) - q))\|^2 \\ &= \|q - b_i\|^2 + 2t \langle q - b_i, \pi_{\mathcal{E}}(q) - q \rangle + t^2 \|\pi_{\mathcal{E}}(q) - q\|^2. \end{aligned}$$

Insérons au centre $q - b_i = q - \pi_{\mathcal{E}}(q) + \pi_{\mathcal{E}}(q) - b_i$:

$$\begin{aligned} \|q_t - b_i\|^2 &= \|q - b_i\|^2 + 2t \langle q - \pi_{\mathcal{E}}(q) + \pi_{\mathcal{E}}(q) - b_i, \pi_{\mathcal{E}}(q) - q \rangle + t^2 \|\pi_{\mathcal{E}}(q) - q\|^2 \\ &= \|q - b_i\|^2 + 2t \left[\underbrace{-\|\pi_{\mathcal{E}}(q) - q\|^2}_{< 0} + \underbrace{\langle \pi_{\mathcal{E}}(q) - b_i, \pi_{\mathcal{E}}(q) - q \rangle}_{\leq 0} \right] + t^2 \|\pi_{\mathcal{E}}(q) - q\|^2. \end{aligned}$$

Or, rappelons-nous que le projeté orthogonal d'un point sur un convexe fermé satisfait :

$$\langle \pi_{\mathcal{E}}(q) - c, \pi_{\mathcal{E}}(q) - q \rangle \leq 0 \quad (\forall c \in \mathcal{E}).$$

Comme $\alpha + 2t\beta + \gamma t^2 \sim \alpha + 2t\beta < \alpha$ lorsque $\beta < 0$ pour $0 < t$ assez petit, il vient :

$$\|q_t - b_i\| < \|q - b_i\| \quad (0 < t \text{ petit}, 1 \leq i \leq \kappa),$$

et donc, en tenant compte d'une inégalité valable pour $\kappa + 1 \leq i \leq I$ vue il y a un instant, toujours pour $t > 0$ petit, on aboutit à une inégalité :

$$\Phi(q_t) = \max_{1 \leq i \leq I} \frac{\|q_t - b_i\|}{\|p - a_i\|} < \max_{1 \leq i \leq I} \frac{\|q - b_i\|}{\|p - a_i\|} = \Phi(q),$$

qui contredit avec effronterie le choix de q !

(f) Tout d'abord, on a par hypothèse pour $1 \leq i, j \leq \kappa$:

$$\|e_i - e_j\| = \|-b_i + b_j\| \leq \|-a_i + a_j\| = \|d_i - d_j\|,$$

et par construction :

$$\|e_i\| = \|q - b_i\| = \Phi(q) \|p - a_i\| = \Phi(q) \|d_i\|,$$

d'où à cause de l'hypothèse que $\Phi(q) > 1$ visant à atteindre une absurdité :

$$\|e_i\| > \|d_i\| > 0,$$

la dernière minoration provenant du fait que $p \neq a_i$ pour tout $1 \leq i \leq 1$.

Développons alors les carrés dans l'inégalité $\|e_i - e_j\|^2 \leq \|d_i - d_j\|^2$, ce qui donne :

$$\|e_i\|^2 + \|e_j\|^2 - 2 \langle e_i, e_j \rangle \leq \|d_i\|^2 + \|d_j\|^2 - 2 \langle d_i, d_j \rangle,$$

c'est-à-dire en inversant le signe :

$$\begin{aligned} \langle e_i, e_j \rangle &\geq \langle d_i, d_j \rangle + \underbrace{\frac{\|e_i\|^2 - \|d_i\|^2}{2} + \frac{\|e_j\|^2 - \|d_j\|^2}{2}}_{>0} \\ &> \langle d_i, d_j \rangle. \end{aligned}$$

(g) Observons pour commencer que :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = \sum_{i=1}^k \lambda_i (q - b_i) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_k) q - \sum_{i=1}^k \lambda_i b_i = 0.$$

Ensuite, développons le carré :

$$\begin{aligned} 0 &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \|e_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j \langle e_i, e_j \rangle \\ &> \sum_{i=1}^k \lambda_i^2 \|d_i\|^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq k} \lambda_i \lambda_j \langle d_i, d_j \rangle \\ &= \left\| \sum_{i=1}^k \lambda_i d_i \right\|^2, \end{aligned}$$

et « $0 >$ un nombre positif » est une contradiction vraiment fatale !

Exercice 3. (a) Comme $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, et comme $e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n!}$, avec rayon de convergence infini, il est connu/clair que :

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

d'où après division par x :

$$\frac{\sinh x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}.$$

(b) La fonction $x \mapsto \frac{\sinh x}{x}$ est paire, \mathcal{C}^∞ , et, grâce au développement en série entière qui précède, minorée par :

$$\frac{\sinh x}{x} \geq 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}),$$

donc son inverse $x \mapsto \frac{x}{\sinh x}$ est bien \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} .

(c) Pour $k = 0$, cela est vrai avec $P_{0,0} := x$.

Pour $k = 1$, on calcule, en rappelant $\sinh' = \cosh$ et $\cosh' = \sinh$:

$$\left(\frac{x}{\sinh x}\right)' = \frac{\sinh x - x \cosh x}{(\sinh x)^2} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \frac{e^x + e^{-x}}{2}}{(\sinh x)^2},$$

donc $P_{1,-1}, P_{1,0}, P_{1,1}$ se voient à l'œil nu.

Si, au niveau k , la formule est satisfaite :

$$\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{(k)} = \frac{\sum_{-k \leq j \leq k} e^{jx} P_{k,j}(x)}{(\sinh x)^{k+1}}$$

une dérivation supplémentaire :

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{(k+1)} &= \left(\left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{(k)}\right)' \\ &= \frac{[\sum_{|j| \leq k} j e^{jx} P_{k,j}(x) + e^{jx} P'_{k,j}(x)] \sinh x - (k+1) \cosh x [\sum_{|j| \leq k} e^{jx} P_{k,j}(x)]}{(\sinh x)^{k+2}} \\ &= \frac{\sum_{|j| \leq k} j e^{jx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) P_{k,j}(x) + \sum_{|j| \leq k} e^{jx} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) P'_{k,j}(x) - (k+1) \sum_{|j| \leq k} e^{jx} \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) P_{k,j}(x)}{(\sinh x)^{k+2}} \\ &=: \frac{\sum_{|j| \leq k+1} e^{jx} P_{k+1,j}(x)}{(\sinh x)^{k+2}} \end{aligned}$$

montre, après une réorganisation des termes qui n'a pas besoin d'être soigneusement explicitée, que cette formule générale est aussi satisfaite au niveau $k + 1$.

(d) Afin d'obtenir $\frac{x}{\sinh x} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, il s'agit de faire voir, pour deux entiers quelconques $k \geq 0$ et $\ell \geq 0$, que :

$$0 = \lim_{|x| \rightarrow \infty} x^\ell \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{(k)}.$$

Puisque cette fonction $\frac{x}{\sinh x}$ est paire, il suffit de regarder $\lim_{x \rightarrow \infty}$.

Or grâce à la formule de la question **(c)** qui précède, en posant :

$$d_{k,j} := \deg P_{k,j},$$

d'où pour certaines constantes $0 < C_{k,j} < \infty$:

$$|P_{k,j}(x)| \leq C_{k,j} x^{d_{k,j}} \quad (\forall x \in \mathbb{R}, |j| \leq k),$$

il vient :

$$0 \leq \left| x^\ell \left(\frac{x}{\sinh x}\right)^{(k)} \right| \leq x^\ell \frac{\sum_{|j| \leq k} C_{k,j} x^{d_{k,j}} e^{jx}}{\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^{k+1}},$$

et sachant qu'au dénominateur, le terme $(e^x)^{k+1}$ domine tous ceux du numérateur, la limite lorsque $x \rightarrow \infty$ du majorant de droite vaut 0, ce qui conclut.

(e) Deux intégrations par parties, et une utilisation de $0 = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\lambda x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x e^{\lambda x}$, fournissent le résultat :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x e^{\lambda x} dx &= \left[x \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} \right]_0^\infty - \int_0^\infty 1 \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} dx \\ &= 0 - 0 - \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{\lambda x} \right]_0^\infty + 0 \\ &= \frac{1}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

(f) On majore, pour $x \in [0, \infty[$:

$$\begin{aligned} |h_N(x)| &\leq x \sum_{n=0}^{N-1} e^{-(1+2n)x} \\ &= x e^{-x} [1 + e^{-2x} + \dots + e^{-2(N-1)x}] \\ &= x e^{-x} \frac{1 - e^{-2Nx}}{1 - e^{-2x}} \\ &\leq x e^{-x} \frac{1}{1 - e^{-2x}}. \end{aligned}$$

La fonction-dominante ainsi obtenue, continue sur $]0, \infty[$, est aussi continue en 0, puisque $\frac{x}{1-e^{-2x}} \sim \frac{x}{2x} \sim \frac{1}{2}$ lorsque $x \sim 0$, et elle est de décroît intégrable à l'infini, grâce au facteur e^{-x} . Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue s'applique donc pour donner le résultat.

(g) Calculons en effet :

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} f(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi\xi x} \frac{x}{\sinh x} dx \\ &= \int_0^{\infty} (e^{-2i\pi\xi x} + e^{2i\pi\xi x}) \frac{2x e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx \\ &= 4 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi\xi x) x \frac{e^{-x}}{1 - e^{-2x}} dx \\ &= 4 \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \cos(2\pi\xi x) x e^{-(1+2n)x} \right) dx \\ \text{[Question (f)]} \quad &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x \cos(2\pi\xi x) e^{-(1+2n)x} dx \\ &= 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{(i2\pi\xi - 1 - 2n)x} dx \right) \\ \text{[Question (e)]} \quad &= 4 \operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1 - i2\pi\xi)^2} \right) \\ &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2n+1 - i2\pi\xi)^2} + \frac{1}{(2n+1 + i2\pi\xi)^2} \right) \\ &= 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)^2 - (2\pi\xi)^2}{((2n+1)^2 + (2\pi\xi)^2)^2}. \end{aligned}$$

Exercice 4. (a) En effet, d'après un théorème du cours, la transformée de Fourier établit un isomorphisme — isométrique pour la norme L^2 d'ailleurs ! — de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ sur lui-même,

d'inverse donné par la même formule qui change seulement le signe dans l'exponentielle :

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{u}(\xi) e^{+2i\pi x \xi} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} v(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi, \end{aligned}$$

et comme $v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a bien $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(b) Le changement de variable :

$$y := b^k(x - \xi) \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{dy}{b^k},$$

permet de calculer :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} u(b^k(x - \xi)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y) \frac{dy}{b^k} \\ &= \frac{1}{b^k} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{-2i\pi 0 y} dy \\ &= \frac{\widehat{u}(0)}{b^k} \\ &= \frac{v(0)}{b^k} = 0! \end{aligned}$$

(c) Le même changement de variable — attention à l'exposant de b ! — donne :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) u(b^k(x - \xi)) dx = \frac{1}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} y u(y) dy.$$

Mais comme une différentiation par rapport à τ — justifiée, car l'intégrande appartient à l'espace de Schwartz, donc décroît très vite à l'infini — de $\widehat{u}(\tau)$ ci-dessus donne :

$$\widehat{u}'(\tau) = -2i\pi \int_{-\infty}^{\infty} y u(y) e^{-2i\pi \tau y} dy,$$

en posant $\tau = 0$, il vient :

$$\frac{-1}{2i\pi} \widehat{u}'(0) = \int_{-\infty}^{\infty} y u(y) dy,$$

donc au final :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \xi) u(b^k(x - \xi)) dx &= \frac{1}{b^{2k}} \frac{-1}{2i\pi} \widehat{u}'(0) \\ &= \frac{1}{b^{2k}} \frac{-1}{2i\pi} \frac{v'(0)}{b^k} \\ &= 0, \end{aligned}$$

car $v \equiv 0$ dans un voisinage de l'origine.

(d) Il suffit de remplacer $f(x)$ par les trois termes en lesquels elle se fragmente, et d'observer que les deux premières intégrales ainsi obtenues s'annulent en vertu des deux Questions **(b)** et **(c)** qui précèdent.

(e) En effet, comme $R(x, \xi) = o(|x - \xi|)$, on a $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que :

$$|x - \xi| \leq \delta \implies |R(x, \xi)| \leq \varepsilon |x - \xi|,$$

ce qui permet de majorer :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} R(x, \xi) u(b^k(x-\xi)) dx \right| &\leq \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |R(x, \xi)| \cdot |u(b^k(x-\xi))| dx \\
 &\leq \varepsilon \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} |x-\xi| \cdot |u(b^k(x-\xi))| dx \\
 &\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |x-\xi| \cdot |u(b^k(x-\xi))| dx \\
 \text{[Poser } y := b^k x - b^k \xi] &= \frac{\varepsilon}{b^{2k}} \int_{-\infty}^{\infty} |y| \cdot |u(y)| dy.
 \end{aligned}$$

(f) Observons tout d'abord que la fonction $x \mapsto (x-\xi)^3 u(b^k(x-\xi))$ est bornée sur \mathbb{R} , puisque la fonction $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient à l'espace de Schwartz :

$$\max_{y \in \mathbb{R}} |y^3 u(y)| < \infty.$$

En insérant quelque peu artificiellement (et astucieusement) le nombre neutre :

$$1 = \frac{(x-\xi)^3}{(x-\xi)^3}$$

dans l'intégrale à estimer, nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{|x-\xi|>\delta} R(x, \xi) u(b^k(x-\xi)) dx \right| &= \left| \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{R(x, \xi)}{(x-\xi)^3} (x-\xi)^3 u(b^k(x-\xi)) dx \right| \\
 \text{[Insérer } b^k] &= \frac{1}{b^{3k}} \left| \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{R(x, \xi)}{(x-\xi)^3} (b^k(x-\xi))^3 u(b^k(x-\xi)) dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{b^{3k}} \sup_{|x-\xi|>\delta} \left\{ (b^k(x-\xi))^3 u(b^k(x-\xi)) \right\} \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{|R(x, \xi)|}{|x-\xi|^3} \\
 &\leq \frac{1}{b^{3k}} \max_{y \in \mathbb{R}} |y^3 u(y)| \cdot \int_{|x-\xi|>\delta} \frac{|R(x, \xi)|}{|x-\xi|^3} dx
 \end{aligned}$$

(g) Commençons par observer que la fonction-reste $x \mapsto R(x, \xi)$ croît de manière au plus affine à l'infini, puisque f est supposée bornée :

$$\begin{aligned}
 |R(x, \xi)| &= |f(x) - f(\xi) + f'(\xi)(x-\xi)| \\
 &\leq |f(x)| + \text{constante} + \text{constante} |x-\xi| \\
 &\leq \text{constante} + \text{constante} |x-\xi|,
 \end{aligned}$$

et comme :

$$\int_{|x-\xi|>\delta} \left(\frac{1}{|x-\xi|^3} + \frac{|x-\xi|}{|x-\xi|^3} \right) dx < \infty,$$

nous obtenons, en revenant à la question **(d)**, que :

$$\begin{aligned}
 \left| b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx \right| &= \left| b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} R(x, \xi) u(b^k(x - \xi)) dx \right| \\
 \text{[Découper]} &= \left| b^{2k} \left[\int_{|x-\xi| \leq \delta} + \int_{|x-\xi| > \delta} \right] \right| \\
 \text{[Questions (e) et (f)]} &\leq \underbrace{\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |y| |u(y)| dy}_{0 \leq \text{constante} < \infty} + \underbrace{\frac{b^{2k}}{b^{3k}} \|y^3 u(y)\|_{\mathcal{C}^0} \cdot \int_{|x-\xi| > \delta} \frac{|R(x, \xi)|}{|x - \xi|^3} dx}_{0 \leq \text{constante}(\delta) < \infty} \\
 &= \varepsilon \text{ constante} + \frac{1}{b^k} \text{ constante}(\delta),
 \end{aligned}$$

et donc, si $k \geq K(\varepsilon) \gg 1$ est assez grand, le majorant de droite peut être rendu arbitrairement petit.

(h) Comme $0 < a < 1$ et comme $|\cos| \leq 1$, la série converge normalement, donc uniformément, ce qui justifie l'interversion de l'intégration et de la sommation infinie :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a^n (e^{2i\pi b^n x} + e^{-2i\pi b^n x}) \right) u(b^k(x - \xi)) dx \\
 &= \sum_{n=1}^{\infty} a^n \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi b^n x} u(b^k(x - \xi)) dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2i\pi b^n x} u(b^k(x - \xi)) dx \right],
 \end{aligned}$$

et il s'agit de calculer les intégrales, pour $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ (noter le \pm) :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} u(b^k(x - \xi)) e^{\pm 2i\pi b^n x} dx &= \int_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{\pm 2i\pi b^n \left(\frac{y}{b^k} + \xi\right)} \frac{dy}{b^k} \\
 \text{[Poser } y = b^k x - b^k \xi] &= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k} \int_{-\infty}^{\infty} u(y) e^{\pm 2i\pi \frac{b^n}{b^k} y} dy \\
 &= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k} \widehat{u} \left(\mp \frac{b^n}{b^k} \right) \\
 &= \frac{e^{\pm 2i\pi b^n \xi}}{b^k} v \left(\mp \frac{b^n}{b^k} \right),
 \end{aligned}$$

et puisque $\text{supp } v \subset]\frac{1}{b}, b[$, le résultat vaut toujours 0, excepté dans l'unique cas où c'était le signe '−' dans l'exponentielle (deuxième somme) et où $k = n$, donc :

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx &= a^k \frac{e^{-2i\pi b^k \xi}}{b^k} v(1) \\
 &= a^k \frac{e^{-2i\pi b^k \xi}}{b^k}.
 \end{aligned}$$

(i) En effet, si f était dérivable en ξ , la Question (g) forcerait :

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{k \rightarrow \infty} b^{2k} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) u(b^k(x - \xi)) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} b^{2k} \frac{a^k}{b^k} e^{-2i\pi b^k \xi} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (ab)^k e^{-2i\pi b^k \xi} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (\text{quantité}(k) \text{ de module } \geq 1) \\ &= \text{très impossible !} \end{aligned}$$

15. Examen 8

Exercice 1. On travaille sur $\mathbb{R}_+^* =]0, \infty[$. Soit un exposant p avec $1 < p < \infty$, et soit l'exposant conjugué q défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que :

$$\left| \int_0^\infty f(x) g(x) dx \right| \leq M,$$

pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\|g\|_{L^q} \leq 1$.

L'objectif est d'établir que $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et que $\|f\|_{L^p} \leq M$.

(a) Que dire lorsque $f \equiv 0$ presque partout ? On suppose dans la suite que $f \not\equiv 0$, presque partout.

Pour $n \geq 1$ entier, on introduit :

$$h_n(x) := \begin{cases} \frac{|f(x)|^p}{f(x)} & \text{si } 0 < x \leq n \text{ et } 0 < |f(x)| \leq n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que :

$$\left(\|h_n\|_{L^q} \right)^q = \int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \leq n^{p+1}.$$

(b) Montrer qu'il existe $n_1 \geq 1$ tel que :

$$0 \neq \|h_n\|_{L^q} \quad (\forall n \geq n_1).$$

(c) Pour $n \geq n_1$, on pose :

$$g_n := \frac{h_n}{\|h_n\|_{L^q}}.$$

Montrer que :

$$\left(\int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \leq M.$$

(d) Montrer que $\|f\|_{L^p} \leq M$.

Exercice 2. On dit qu'une fonction réelle f définie sur \mathbb{R} de classe \mathcal{C}^∞ est à *croissance lente* s'il existe une constante $c > 0$ et un entier naturel N tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f(x)| \leq c(1+x^2)^N.$$

(a) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ à croissance lente ainsi que toutes ses dérivées f', f'', f''', \dots , et soit $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans l'espace de Schwartz, c'est-à-dire $g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ satisfait :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p g^{(q)}(x)| = 0 \quad (\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}).$$

Montrer que le produit $f g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ appartient encore à l'espace de Schwartz.

(b) Soit une constante fixée $a \in]0, \infty[$ et soit une fonction $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on pose :

$$\psi(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x)}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi\xi x} dx \quad (\star).$$

Montrer que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Indication: Observer que la fonction lisse $x \mapsto \frac{1}{(a-2i\pi x)}$, ainsi que toutes ses dérivées, sont bornées sur \mathbb{R} .

(c) Montrer que ψ satisfait l'équation différentielle ordinaire $y' + ay = \widehat{\phi}$.

(d) En déduire que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a :

$$\psi(\xi) = e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as} \widehat{\phi}(s) ds.$$

(e) Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\overline{\mathcal{F}} \left(e^{-a\xi} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(\xi) \right) (x) = \frac{1}{a - 2i\pi x}.$$

Dans l'espace de Schwartz, on rappelle les définitions de la transformation de Fourier et de la transformation de Fourier inverse = conjuguée :

$$\mathcal{F}(f)(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi x \xi} dx. \quad \text{et} \quad \mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \overline{\mathcal{F}}(g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{2i\pi \xi x} d\xi.$$

(f) Retrouver alors le résultat de la Question (d).

(g) On suppose maintenant que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$. Vérifier que l'intégrale (\star) est bien définie, puis, montrer que l'égalité de la Question (d) reste vraie dans ce cas.

Exercice 3. Soit un exposant réel $1 < p < \infty$. Soit une fonction mesurable positive :

$$\begin{aligned} K: \quad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\} \\ (x, y) &\longmapsto K(x, y), \end{aligned}$$

qui est *homogène de degré -1*, c'est-à-dire vérifie :

$$K(\alpha x, \alpha y) = \frac{1}{\alpha} K(x, y),$$

pour tous $x, y > 0$, quelque soit $\alpha > 0$.

On suppose de plus que :

$$C := \int_0^{\infty} K(x, 1) x^{-\frac{1}{p}} dx < \infty.$$

(a) Avec l'exposant conjugué q de p , défini par $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, montrer que :

$$\int_0^{\infty} K(1, y) y^{-\frac{1}{q}} dy < \infty.$$

(b) Soit une fonction mesurable positive $f: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} f(x)^p dx dy = C \left(\|f\|_{L^p}\right)^p.$$

(c) Pour tout couple de fonctions mesurables positives $f, g: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$, avec $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}_+^*)$, montrer que :

$$\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) f(x) g(y) dx dy \leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} < \infty.$$

Indication: On pourra écrire :

$$K(x, y) = [K(x, y)]^{\frac{1}{p}} [K(x, y)]^{\frac{1}{q}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{qp}}.$$

(d) On suppose dorénavant que les fonctions f, g définies sur \mathbb{R}_+^* sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, i.e. ne sont plus forcément positives.

Montrer que l'application $G: \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$G(y) := g(y) \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx,$$

est définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, et est mesurable sur \mathbb{R}_+^* .

(e) Montrer que la fonction :

$$y \longmapsto Tf(y) := \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx,$$

est mesurable.

(f) Montrer que pour toute fonction $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$ et pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R}_+^*)$ avec $\|g\|_{L^q} \leq 1$, on a :

$$\int_0^\infty |Tf(y)| |g(y)| dy \leq C \|f\|_{L^p}.$$

(g) Montrer que $\|Tf\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}$. Indication: Utiliser un exercice qui précède.

(h) Montrer que si $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, alors :

$$Tf(y) := \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y} dx,$$

est défini pour presque tout $y > 0$, et que :

$$\|Tf\|_{L^2} \leq \pi \|f\|_{L^2}.$$

(i) Soit $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$. Montrer que l'on peut définir, pour tout $s > 0$:

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-su} f(u) du.$$

(j) Montrer que $s \longmapsto F(s)$ est continue sur \mathbb{R}_+^* .

(k) Établir que :

$$\int_0^\infty |F(s)|^2 ds \leq \pi \int_0^\infty |f(u)|^2 du.$$

Indication: Commencer par écrire l'intégrale $\int_0^\infty |F(s)|^2 ds$ sous forme d'une intégrale triple, puis, appliquer ce qui précède.

16. Corrigé de l'examen 8

Exercice 1. (a) Lorsque $f \equiv 0$ presque partout, tout est vrai gratuitement, car $\int f g = 0 = \|f\|_{L^p}$.

Avec $f \not\equiv 0$ presque partout, si $0 < x \leq n$ et si $0 < |f(x)| \leq n$, on a :

$$|h_n(x)|^q = \frac{|f(x)|^{pq}}{|f(x)|^q} = |f(x)|^{(p-1)q} = |f(x)|^p,$$

et autrement, on a $h_n(x) = 0$.

Par conséquent :

$$\begin{aligned} (\|h_n\|_{L^q})^q &= \int_0^\infty |h_n(x)|^q dx \\ &= \int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \\ &\leq n^p \cdot n. \end{aligned}$$

(b) Comme f n'est pas identiquement nulle presque partout, il existe $n_0 \geq 1$ tel que f n'est pas identiquement nulle presque partout sur $]0, n_0]$. Ensuite, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que la troncature de $|f|$ à hauteur n_1 n'est pas identiquement nulle sur $]0, n_0] \subset]0, n_1]$.

Donc nous déduisons que $h_{n_1} \not\equiv 0$ presque partout sur $]0, n_1]$, et enfin nous avons bien $h_n \not\equiv 0$ presque partout sur $]0, n]$, quel que soit $n \geq n_1$.

(c) Visiblement, $\|g_n\|_{L^q} = 1$, donc pour $n \geq n_1$, l'hypothèse principale s'applique :

$$\begin{aligned} M &\geq \left| \int_0^\infty f(x) g_n(x) dx \right| \\ &= \left| \int_0^\infty f(x) \frac{h_n(x)}{\|h_n\|_{L^q}} dx \right| \\ &= \frac{\left| \int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} f(x) \frac{|f(x)|^p}{f(x)} dx \right|}{\|h_n\|_{L^q}} \\ &= \frac{\int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx}{\left(\int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \right)^{1/q}} \\ &= \left(\int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

[Question (a)]

$[1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}]$

(d) Comme pour $n \geq n_1$, la suite d'ensembles mesurables :

$$]0, n] \cap \{|f| \leq n\} =: E_n,$$

est croissante, de réunion :

$$]0, \infty[= \bigcup_{n \geq n_1} E_n,$$

le théorème de convergence monotone, appliqué à la suite de fonctions $\mathbf{1}_{E_n} \cdot |f|^p$, donne :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left(\int_{]0, \infty[} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{]0, n] \cap \{|f| \leq n\}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \\ \text{[Question (c)]} \quad &\leq M. \end{aligned}$$

Exercice 2. (a) Puisque f et toutes ses dérivées sont à croissance lente, pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $c_j > 0$ et $N_j \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f^{(j)}(x)| \leq c_j (1 + x^2)^{N_j}.$$

Comme le produit $f g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est ‘gratuitement’ lisse, il s’agit de démontrer que pour tous $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, on a :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p (fg)^{(q)}(x)| = 0.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculons :

$$\begin{aligned} |x^p (fg)^{(q)}(x)| &\leq \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} |f^{(j)}(x) x^p g^{(q-j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^q \binom{q}{j} c_j (1 + x^2)^{N_j} |x^p g^{(q-j)}(x)| \\ &\leq \sum_{j=0}^q \sum_{l=0}^{N_j} \binom{q}{j} c_j \binom{N_j}{l} |x^{2l+p} g^{(q-j)}(x)|. \end{aligned}$$

Mais comme $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a par définition :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^{2l+p} g^{(q-j)}(x)| = 0.$$

De l’inégalité ci-dessus, nous déduisons enfin :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x^p (fg)^{(q)}(x)| = 0.$$

(b) La fonction rationnelle g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) := \frac{1}{a - 2i\pi x}$$

est de classe \mathcal{C}^∞ , et à croissance lente car *bornée* sur \mathbb{R} ainsi que toutes ses dérivées d’ordre quelconque $q \geq 0$:

$$\begin{aligned} |g^{(q)}(x)| &= \left| q! \frac{(2i\pi)^q}{(a - 2i\pi x)^q} \right| = q! \frac{2^q \pi^q}{(a^2 + 4\pi^2 x^2)^{\frac{q}{2}}} \\ &\leq q! \frac{2^q \pi^q}{a^q}. \end{aligned}$$

Grâce à la question précédente, la fonction f , définie sur \mathbb{R} par $f(x) := \phi(x) g(x)$, appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

En outre, la transformation de Fourier \mathcal{F} est un automorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc $\psi = \widehat{f}$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(c) Pour $x \in \mathbb{R}$ et pour $\xi \in \mathbb{R}$, posons :

$$f(x, \xi) := \frac{\phi(x)}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi\xi x}.$$

• Pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $x \mapsto f(x, \xi)$ est intégrable sur \mathbb{R} , car ϕ qui appartient à l'espace de Schwartz est trivialement intégrable, et car la fonction $x \mapsto \frac{1}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi\xi x}$ est bornée.

• Pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $\xi \mapsto f(x, \xi)$ est de classe \mathcal{C}^1 (en fait \mathcal{C}^∞) sur \mathbb{R} .

• Enfin, comme $x \mapsto \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi\xi x}$ est bornée, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour (presque) tout $x \in \mathbb{R}$, on a la majoration par une fonction-dominatrice intégrable indépendante du paramètre ξ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial f}{\partial \xi}(x, \xi) \right| &= \left| \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x} e^{-2i\pi\xi x} \phi(x) \right| \\ &\leq C |\phi(x)|. \end{aligned}$$

D'après le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre, nous en déduisons que ψ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et de dérivée :

$$\psi'(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x} \phi(x) e^{-2i\pi\xi x} dx.$$

Enfin, presque sans calcul, il est rapidement visible que :

$$\begin{aligned} \psi'(\xi) + a\psi(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2i\pi x}{a - 2i\pi x} \phi(x) e^{-2i\pi\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{a - 2i\pi x} \phi(x) e^{-2i\pi\xi x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) e^{-2i\pi\xi x} dx \\ &= \widehat{\phi}(\xi). \end{aligned}$$

(d) La solution générale de l'équation différentielle $y'(\xi) + ay(\xi) = \widehat{\phi}(\xi)$ est :

$$y(\xi) = e^{-a\xi} \left(A + \int_0^\xi e^{as} \widehat{\phi}(s) ds \right) \quad (**),$$

où A est une constante complexe, que nous devons déterminer.

Comme $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, nécessairement :

$$A = \int_{-\infty}^0 e^{as} \widehat{\phi}(s) ds,$$

sinon en faisant tendre $\xi \rightarrow -\infty$ dans (**) ci-dessus, nous aurions :

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} |\psi(\xi)| = \infty,$$

ce qui serait absurde, puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Ainsi, nous concluons bien que :

$$\psi(\xi) = e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as} \widehat{\phi}(s) ds.$$

(e) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, on calcule sans peine :

$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{F}}\left(e^{-a\xi} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(\xi)\right)(x) &= \int_0^{\infty} e^{-a\xi} e^{2i\pi\xi x} d\xi \\ &= \left[\frac{1}{-a + 2i\pi x} e^{-a\xi} e^{2i\pi\xi x} \right]_{\xi=0}^{\xi=\infty} \\ &= \frac{1}{a - 2i\pi x}. \end{aligned}$$

(f) Comme la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{a - 2i\pi x}$$

appartient à $L^2(\mathbb{R})$, et comme $\mathcal{F} \circ \overline{\mathcal{F}} = \text{Id}$ dans $L^2(\mathbb{R})$, nous obtenons :

$$\mathcal{F}(g)(\xi) = e^{-a\xi} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(\xi),$$

presque partout en $\xi \in \mathbb{R}$.

D'autre part, puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R})$, la fonction ϕ appartient trivialement à $L^2(\mathbb{R})$.

En remarquant alors que :

$$\psi = \widehat{\phi} g = \widehat{\phi} * \widehat{g},$$

nous en déduisons donc, pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, que :

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\phi}(s) e^{-a(\xi-s)} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(\xi-s) ds \\ &= e^{-a\xi} \int_{-\infty}^{\xi} e^{as} \widehat{\phi}(s) ds. \end{aligned}$$

(g) Si $\phi \in L^2(\mathbb{R})$, alors $g \phi \in L^1(\mathbb{R})$ grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned} \|g \phi\|_{L^1(\mathbb{R})} &\leq \|\phi\|_{L^2(\mathbb{R})} \|g\|_{L^2(\mathbb{R})} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

car :

$$|g(x)|^2 \leq \frac{1}{a^2 + 4\pi^2 x^2},$$

est intégrable sur \mathbb{R} .

Donc la fonction ψ est bien définie sur \mathbb{R} et appartient à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R})$.

En outre, en appliquant de nouveau la transformée de Fourier de la convolée, nous obtenons l'égalité de la Question (d).

Exercice 3. (a) En posant $x := \frac{1}{y}$, nous obtenons :

$$\int_0^{\infty} K(1, y) y^{-\frac{1}{q}} dy = \int_0^{\infty} K\left(1, \frac{1}{x}\right) x^{\frac{1}{q}} \frac{dx}{x^2}.$$

Comme $K\left(1, \frac{1}{x}\right) = K\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}1\right) = x K(x, 1)$, il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty K(1, y) y^{-\frac{1}{q}} dy &= \int_0^\infty x K(x, 1) x^{\frac{1}{q}} \frac{dx}{x^2} \\ &= \int_0^\infty K(x, 1) x^{\frac{1}{q}-1} dx \\ &= \int_0^\infty K(x, 1) x^{-\frac{1}{p}} dx \\ &= C < \infty. \end{aligned}$$

(b) Puisque K et f sont à valeurs positives, le théorème de Tonelli permet d'évaluer cette intégrale à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ sur l'espace produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ comme *itération* d'intégrales sur \mathbb{R}_+^* :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} f(x)^p dx dy &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} dy \right) f(x)^p dx \\ [t := \frac{y}{x}] &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x, tx) t^{-\frac{1}{q}} x dt \right) f(x)^p dx \\ [\text{Homogénéité}] &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{1}{x} K(1, t) t^{-\frac{1}{q}} x dt \right) f(x)^p dx \\ &= \int_0^\infty \underbrace{\left(\int_0^\infty K(1, t) t^{-\frac{1}{q}} dt \right)}_{= C < \infty} f(x)^p dx \\ &= C \left(\|f\|_{L^p} \right)^p \end{aligned}$$

(c) Grâce à l'indication, nous pouvons faire appel à l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) f(x) g(y) dx dy &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{pq}} f(x) K(x, y)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{qp}} g(y) dx dy \\ &\leq \left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{q}} f(x)^p dx dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} g(y)^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ [\text{Question (b)}] &\leq C^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} \left(\int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{p}} g(y)^q dx dy \right)^{\frac{1}{q}} \\ [\text{Analogue !}] &\leq C^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} C^{\frac{1}{q}} \|g\|_{L^q} \\ &= C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(d) Le théorème de Tonelli appliqué à $|f|$ et à $|g|$ donne, d'après la Question (c) :

$$\begin{aligned} \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) |f(x)| |g(y)| dx dy &\leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini, appliqué à la fonction de deux variables :

$$F(x, y) := K(x, y) f(x) g(y),$$

intégrable sur le produit $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, énonce alors que la fonction-tranche :

$$y \longmapsto \int_{\mathbb{R}_+^*} K(x, y) f(x) g(y) dx \\ = G(y),$$

est définie pour presque tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, et là où elle n'est pas définie, nous pouvons tout simplement la prolonger par 0, et obtenir ainsi une fonction mesurable sur \mathbb{R}_+^* .

(e) Nous venons de dire que $g(y) T f(y)$ est mesurable pour toute fonction $g \in L^q(\mathbb{R}_+^*)$. Il suffit alors de prendre une telle fonction qui n'est *jamais* égale à 0, par exemple :

$$g_0(y) := \begin{cases} 1 & \text{pour } 0 < y < 1, \\ \frac{1}{y} & \text{pour } 1 \leq y, \end{cases}$$

qui appartient bien à $L^q(\mathbb{R}_+^*)$, d'après le critère de Riemann $\int_1^\infty \frac{1}{y^q} dy < \infty$, puisque $1 < q$.

Ainsi :

$$y \longmapsto g_0(y) T f(y),$$

est mesurable, et comme $\frac{1}{g_0(y)}$ est aussi mesurable, comme le produit de deux fonctions mesurables et encore mesurable, nous concluons bien que :

$$T f(y) = \frac{1}{g_0(y)} g_0(y) T f(y),$$

est mesurable.

(f) Maintenant que nous savons de Marseille que $T f(y)$ existe et est mesurable, nous pouvons de Toulon reprendre le même calcul de Fubini-Tonelli pour voir que :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |T f(y)| |g(y)| dy &= \int_0^\infty \left| \int_0^\infty K(x, y) f(x) dx \right| |g(y)| dy \\ &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty K(x, y) |f(x)| dx \right) |g(y)| dy \\ &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} K(x, y) |f(x)| |g(y)| dy \\ \text{[Question (c)]} &\leq C \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \\ &\leq C \|f\|_{L^p}. \end{aligned}$$

(g) L'Exercice 1 (d) a démontré que l'inégalité obtenue à l'instant établit que $T f \in L^p(\mathbb{R}_+^*)$, avec en bonus l'inégalité :

$$\|T f\|_{L^p} \leq C \|f\|_{L^p}.$$

Ainsi, $T: L^p \rightarrow L^p$ est un opérateur linéaire *borné*, c'est-à-dire *continu*.

(h) Ici, $p = 2 = q$, et la fonction :

$$K(x, y) := \frac{1}{x + y},$$

est bien homogène de degré -1 :

$$K(\alpha x, \alpha y) = \frac{1}{\alpha x + \alpha y} = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{x + y} = \frac{1}{\alpha} K(x, y).$$

De plus :

$$\begin{aligned}
 C &= \int_0^{\infty} K(x, 1) x^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \int_0^{\infty} \frac{1}{x+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \\
 [t := \sqrt{x}] \quad &= \int_0^{\infty} \frac{1}{t^2+1} 2 dt \\
 &= \left[2 \arctan t \right]_0^{\infty} \\
 &= \pi.
 \end{aligned}$$

Grâce aux questions qui précèdent, pour toute $f \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, nous pouvons définir :

$$Tf(y) := \int_0^{\infty} \frac{f(x)}{x+y} dx,$$

pour presque tout $y > 0$, et Tf , prolongée par 0 là où elle n'est pas définie, appartient à $L^2(\mathbb{R}_+^*)$.

Enfin, $f \mapsto Tf$ est un opérateur linéaire borné de $L^2(\mathbb{R}_+^*)$ dans lui-même :

$$\|Tf\|_{L^2} \leq \pi \|f\|_{L^2}.$$

(i) L'existence de F résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, car :

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} |e^{-su} f(u)| du &\leq \left(\int_0^{\infty} e^{-2su} du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2s}} \|f\|_{L^2} \\
 &< \infty.
 \end{aligned}$$

(j) Prenons $a > 0$ arbitrairement proche de 0. Clairement, l'application $s \mapsto e^{-su} f(u)$ est continue sur $]a, \infty[$, et elle est dominée par :

$$|e^{-su} f(u)| \leq |e^{-au} f(u)|.$$

La même application de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, sur $]a, \infty[$:

$$\begin{aligned}
 \int_a^{\infty} |e^{-su} f(u)| du &\leq \int_a^{\infty} |e^{-au} f(u)| du \\
 &\leq \int_0^{\infty} |e^{-au} f(u)| du \\
 &\leq \left(\int_0^{\infty} e^{-2au} du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\infty} |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \|f\|_{L^2} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

montre que cette fonction-dominatrice est intégrable sur $]a, \infty[$. Le théorème de continuité des intégrales à paramètres, qui repose *in fine* sur le théorème de convergence dominée de Lebesgue, s'applique donc et offre la continuité de $s \mapsto F(s)$ sur $]a, \infty[$, et enfin sur :

$$]0, \infty[= \bigcup_{a>0}]a, \infty[.$$

(k) La fonction F étant continue sur \mathbb{R}_+^* , elle y est donc mesurable, de sorte que l'intégrale $\int_0^\infty |F(s)|^2 ds$ a un sens, et donne un nombre appartenant à $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

Ensuite, calculons :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |F(s)|^2 ds &= \int_0^\infty |F(s) \overline{F(s)}| ds \\
 &= \int_0^\infty \left(\left| \int_0^\infty e^{-su} f(u) du \right| \right) \left(\left| \int_0^\infty e^{-sv} f(v) dv \right| \right) ds \\
 &\leq \int_0^\infty \left(\int_0^\infty |e^{-su} f(u)| du \right) \left(\int_0^\infty |e^{-sv} f(v)| dv \right) ds \\
 \text{[Fubini-Tonelli]} \quad &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \left(\int_0^\infty e^{-su} e^{-sv} ds \right) |f(u)| |f(v)| dudv \\
 &= \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} \frac{1}{u+v} |f(u)| |f(v)| dudv \\
 &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{|f(v)|}{u+v} dv \right) |f(u)| du.
 \end{aligned}$$

En utilisant les notations de la Question **(h)**, nous reconnaissons :

$$T|f|(u) = \int_0^\infty \frac{|f(v)|}{u+v} dv,$$

donc nous obtenons :

$$\int_0^\infty |F(s)|^2 ds \leq \int_0^\infty T|f|(u) |f(u)| du,$$

d'où en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty |F(s)|^2 ds &\leq \left(\int_0^\infty |T|f|(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty |f(u)|^2 du \right)^{\frac{1}{2}} \\
 &= \|T|f|\|_{L^2} \|f\|_{L^2}.
 \end{aligned}$$

Mais nous avons vu à la Question **(h)** que :

$$\|T|f|\|_{L^2} \leq \pi \|f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2},$$

donc nous atteignons :

$$\int_0^\infty |F(s)|^2 ds \leq \pi (\|f\|_{L^2})^2,$$

ce qui établit que $F \in L^2(\mathbb{R}_+^*)$, et que $\|F\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi} \|f\|_{L^2}$.

Nous avons ainsi construit une application linéaire $\Lambda : L^2(\mathbb{R}_+^*) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+^*)$ définie par $\Lambda(f) := F$, continue car de norme d'opérateur $\|\Lambda\| \leq \sqrt{\pi}$ finie, que l'on appelle la *transformation de Laplace dans L^2* .