

Produit scalaire, produit vectoriel, produit mixte

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

2. Produit scalaire dans l'espace vectoriel euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$

L'espace \mathbb{R}^3 est un espace de points. On lui associe l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$. Les éléments de $V_{\mathbb{R}^3}$ sont tous les vecteurs d'origine le point $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ et d'extrémité un point quelconque $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

On notera donc parfois les vecteurs $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}$ sous forme d'une matrice colonne :

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

et plus souvent aussi, sous forme horizontale $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

En fait, avec la base canonique de $V_{\mathbb{R}^3}$, constituée des trois vecteurs :

$$\vec{e}_1 := (1, 0, 0),$$

$$\vec{e}_2 := (0, 1, 0),$$

$$\vec{e}_3 := (0, 0, 1),$$

il est clair que :

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3.$$

Maintenant, comment parler de la *longueur* d'un vecteur quelconque \vec{x} ? La réponse à cette question est bien connue, elle date de l'Antiquité, et l'on sait bien que la quantité :

$$\|\vec{x}\| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

définit une *norme* sur l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$, au sens où les deux propriétés évidentes suivantes sont satisfaites :

$$\|\vec{x}\| \geq 0 \quad (\forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}),$$

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \|\vec{x}\| \quad (\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}),$$

et au sens où on a l'*inégalité triangulaire* :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\| \quad (\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

On observera que cette norme dite *euclidienne* attribue la longueur 1 aux trois vecteurs de base :

$$1 = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\|.$$

On observera aussi que la *norme au carré* :

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

satisfait le *Théorème de Pythagore* :

$$\begin{aligned} \|x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3\|^2 &= x_1^2 \|\vec{e}_1\|^2 + x_2^2 \|\vec{e}_2\|^2 + x_3^2 \|\vec{e}_3\|^2 \\ &= x_1^2 1 + x_2^2 1 + x_3^2 1 \\ &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \end{aligned}$$

ce qui s'explique par le fait que les trois vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ sont *orthogonaux* entre eux.

Vous avez dit *orthogonaux* ? Oui, je l'ai dit. Car dans l'espace vectoriel physique $V_{\mathbb{R}^3}$ à 3 dimensions, entre deux vecteurs quelconques $\vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}$ et $\vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}$, il est bien connu qu'existe le *produit scalaire euclidien*, défini par :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3.$$

Nous laissons au lecteur-étudiant la tâche aisée de vérifier dans les moindres détails la véracité du

Lemme 2.1. *Le produit scalaire euclidien $(\cdot) \cdot (\cdot)$ satisfait une propriété de bilinéarité par rapport à ses deux arguments :*

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}') \cdot \vec{y} &= \lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda' \vec{x}' \cdot \vec{y}, \\ \vec{x} \cdot (\mu \vec{y} + \mu' \vec{y}') &= \mu \vec{x} \cdot \vec{y} + \mu' \vec{x} \cdot \vec{y}', \end{aligned}$$

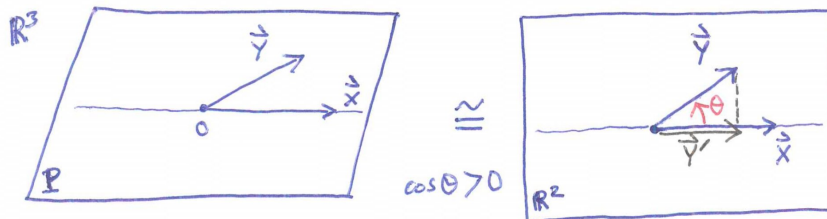
où $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y}, \vec{y}' \in V_{\mathbb{R}^3}$ sont des vecteurs quelconques, et où $\lambda, \lambda', \mu, \mu' \in \mathbb{R}$ sont des scalaires arbitraires. \square

En fait, ces deux propriétés sont équivalentes, car on aura déjà remarqué que le produit scalaire est *symétrique* :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}, \forall \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

De plus, le produit scalaire possède une définition géométrique plus éclairante que la formule $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ ci-dessus, et nous pouvons maintenant rappeler cette définition géométrique, connue depuis la classe maternelle, cela va sans dire.

Si $\vec{x} = 0$ ou si $\vec{y} = 0$, on déclare que $\vec{x} \cdot \vec{y} := 0$ — rien de plus.



Nous pouvons donc supposer que $\vec{x} \neq 0$ et que $\vec{y} \neq 0$, ce qui sera commode pour dessiner des figures. Dans les figures, on va même supposer que \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, de telle sorte que le couple (\vec{x}, \vec{y}) définit un plan 2-dimensionnel dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$, plan que nous noterons P .

Ce plan P est alors isomorphe au plan euclidien $V_{\mathbb{R}^2}$ que nous connaissons bien, et pour parler du produit scalaire, on peut alors raisonner entièrement dans ce plan, comme on a appris à le faire en classe de mathématiques maternelles.

Alors si \vec{y}' est la projection orthogonale du vecteur \vec{y} sur la droite que dirige \vec{x} , on définit le produit scalaire par la formule :

$$\begin{aligned}\vec{x} \cdot \vec{y} &:= \bar{x} \cdot \bar{y}' \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y}',\end{aligned}$$

où \bar{x} et \bar{y}' désignent les longueurs *algébriques*, sur la droite dirigée par \vec{x} , des vecteurs \vec{x} et \vec{y}' , la valeur de ce produit $\bar{x} \cdot \bar{y}'$ ne dépendant pas d'une orientation choisie sur cette droite, puisque $(-1) \cdot (-1) = 1$.

En introduisant l'angle :

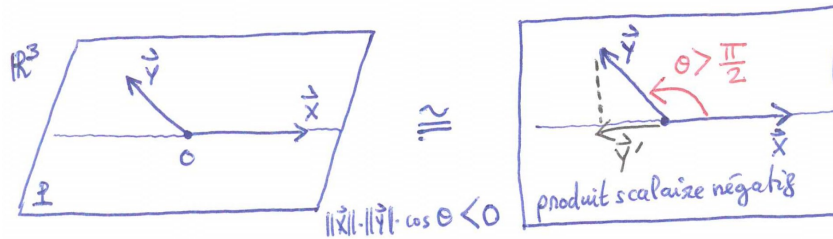
$$\theta := \text{Angle}(\vec{x}, \vec{y}'),$$

nous constatons que la définition alternative :

$$\vec{x} \cdot \vec{y} := \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \cos \theta,$$

est équivalente.

La première figure ci-dessus illustre un cas où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. En voici une autre qui illustre le cas où $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ dans lequel le produit scalaire est *néglatif*.



Évidemment :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \quad (\forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

3. Présentation des deux (seules) orientations dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$

L'espace euclidien 3-dimensionnel peut être muni d'une *orientation*, tout comme l'espace 2-dimensionnel, cf. ce qu'on appelle le *sens trigonométrique*.

Nous considérerons en effet comme déjà connu le fait que dans \mathbb{R}^2 , ou dans $V_{\mathbb{R}^2}$, il existe exactement *deux* orientations, opposées l'une de l'autre.

Dans cette section, nous allons présenter une manière de définir les deux orientations possibles — il y en a exactement deux, aussi — de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 , ou de l'espace vectoriel associé $V_{\mathbb{R}^3}$, qui repose sur un procédé dit d'*orthonormalisation de Gram-Schmidt*.

Soient trois vecteurs quelconques :

$$\vec{u} \in V_{\mathbb{R}^3}, \quad \vec{v} \in V_{\mathbb{R}^3}, \quad \vec{w} \in V_{\mathbb{R}^3},$$

que nous supposons *linéairement indépendants*. Il faut se les imaginer se baladant dans l'espace, comme trois doigts de la main qui vole. On considère le triplet *ordonné* :

$$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}).$$

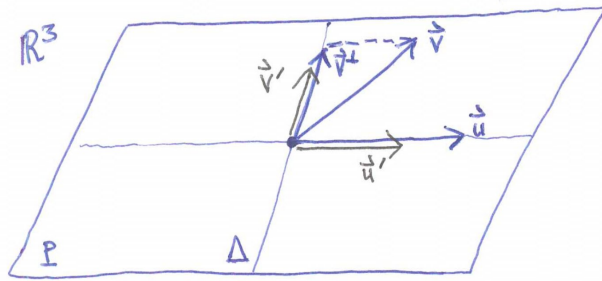
Pour toutes les opérations qui suivent, l'ordre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ devra être respecté.

Commençons par remplacer \vec{u} par le vecteur renormalisé :

$$\vec{u}' := \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

qui devient de norme unité :

$$\|\vec{u}'\| = \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| = \frac{\|\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = 1.$$



Ensuite, considérons le plan vectoriel V_P engendré par les deux premiers vecteurs — on s'occupera de \vec{w} dans quelques instants — :

$$V_P := \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}) \cong V_{\mathbb{R}^2}.$$

On distingue V_P , constitué de *vecteurs* d'origine 0 contenus dans le plan P , du plan $P \subset \mathbb{R}^3$ lui-même, qui est constitué de *points*.

Comme cela est illustré sur la figure, en travaillant dans ce plan P , projetons orthogonalement le deuxième vecteur \vec{v} sur la droite, notée $\Delta \subset P$, qui est orthogonale à la droite engendrée par le premier vecteur \vec{u} .

On obtient ainsi un certain vecteur $\vec{v}^\perp \in V_\Delta$, qui n'est *pas* nul, puisqu'on a supposé que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ est linéairement indépendante.

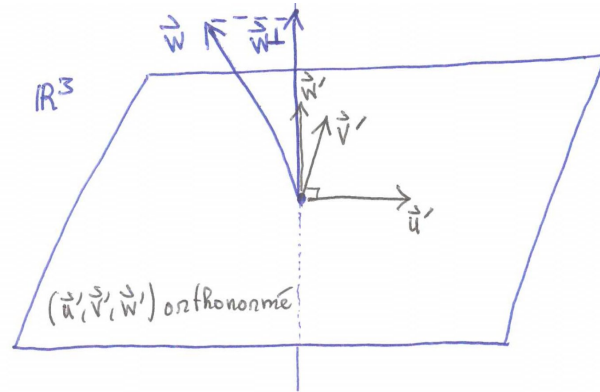
Comme \vec{v}^\perp n'est pas forcément de norme unité, renormalisons-le en introduisant :

$$\vec{v}' := \frac{\vec{v}^\perp}{\|\vec{v}^\perp\|},$$

vecteur qui devient de norme 1 = $\|\vec{v}'\|$.

Voilà ! dans le plan vectoriel V_P , on est content ! on a remplacé le couple *ordonné* de vecteurs indépendants (\vec{u}, \vec{v}) par un nouveau couple ordonné (\vec{u}', \vec{v}') qui constitue maintenant une *base orthonormale* du plan vectoriel V_P . Si on travaillait en dimension 2, c'est-à-dire dans $V_{\mathbb{R}^2}$, on s'arrêterait là.

Mais on travaille en dimension 3, et il nous reste encore à malmener \vec{w} — et d'ailleurs, que va-t-on lui faire ?



Soit D la droite orthogonale au plan P . Comme le lecteur l'a deviné, projetons notre troisième et dernier vecteur \vec{w} orthogonalement sur D .

Nous obtenons ainsi un certain vecteur $\vec{w}^\perp \in V_D$, qui n'est *pas* nul, parce qu'on a supposé que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est linéairement indépendante.

Comme \vec{w}^\perp n'est pas forcément de norme unité, renormalisons-le en introduisant :

$$\vec{w}' := \frac{\vec{w}^\perp}{\|\vec{w}^\perp\|},$$

vecteur qui devient de norme 1 = $\|\vec{w}'\|$.

Voilà ! on a atteint notre objectif ! on a remplacé le triplet *ordonné* de vecteurs indépendants $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ par un nouveau triplet ordonné $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$ qui constitue maintenant une *base orthonormale ordonnée* de l'espace vectoriel euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$. En termes moins élégants, on a « *Gram-Schmidté* » nos trois vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Or $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ constitue aussi une base orthonormale ordonnée de $V_{\mathbb{R}^3}$, et c'est une référence à laquelle on peut donc comparer $(\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}')$.

Pour effectuer une telle comparaison, il suffit de déplacer la main dans l'espace (sans oublier d'emporter les trois doigts importants avec lesquels on mange le couscous).

Théorème 3.1. [Admis] *Après application du procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à une famille libre quelconque ordonnée de 3 vecteurs dans l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$:*

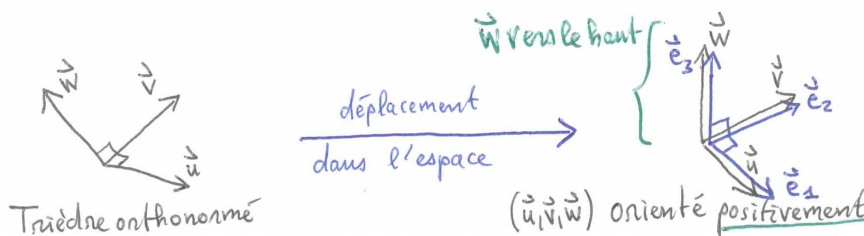
$$\begin{aligned} (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) &\sim (\vec{u}', \vec{v}', \vec{w}') \\ V_{\mathbb{R}^3} = \text{Vect}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) & \quad 1 = \|\vec{u}'\| = \|\vec{v}'\| = \|\vec{w}'\| \\ & \quad 0 = \vec{u}' \cdot \vec{v}' = \vec{u}' \cdot \vec{w}' = \vec{v}' \cdot \vec{w}', \end{aligned}$$

si on déplace dans l'espace \vec{u}' pour l'amener à coïncider avec \vec{e}_1 , et si en même temps, on déplace \vec{v}' pour l'amener à coïncider avec \vec{e}_2 , alors exactement deux situations peuvent se produire concernant \vec{w}' :

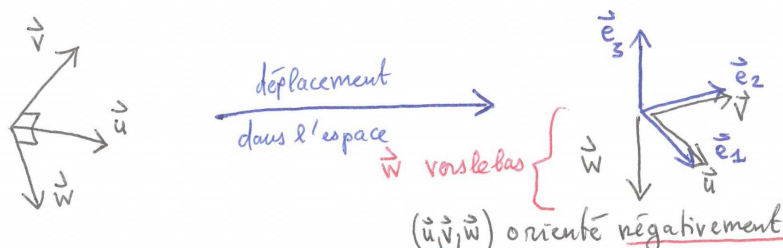
$$\vec{w}' = \vec{e}_3 \quad \text{ou} \quad \vec{w}' = -\vec{e}_3. \quad \square$$

Tête au-dessus, ou tête en-dessous : tout est là !

Définition 3.2. Dans le premier cas, on dira que la famille libre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orientée *positivement*, ou encore, que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *direct*.



Dans le deuxième cas, on dira que la famille libre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est orientée *négativement*, ou encore, que le trièdre $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est *indirect*.



4. Produit vectoriel dans $V_{\mathbb{R}^3}$

Maintenant, le Théorème 3.1 s'applique pour faire voir que l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$ peut être muni d'exactly *deux* orientations opposées.

En effet, nous avons implicitement convenu que le trièdre $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ était positif. Une application dudit théorème montre qu'alors le trièdre $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ est négatif. Or nous aurions tout à fait pu commencer la théorie en déclarant que c'est *ce* trièdre $(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3)$ qui est le trièdre de référence positif, et alors, ce qui était positif devient négatif, et vice-versa.

Je laisse en exercice de visualisation géométrique la vérification du fait que les trois trièdres :

$$(4.1) \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3), \quad (\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1), \quad (\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2),$$

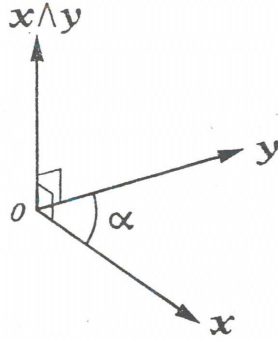
sont toujours en même temps positifs, ou en même temps négatifs, et de même pour les trois trièdres :

$$(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3), \quad (\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2), \quad (\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1).$$

Pour commencer la théorie du produit vectoriel, il faut donc seulement faire un choix parmi les deux orientations possibles de l'espace $V_{\mathbb{R}^3}$. Nous avons fait le choix de déclarer que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ était *positif* : c'est le choix le plus standard et le plus fréquent, donc nous le maintiendrons, tout en répétant qu'il est aussi possible de déclarer au début que $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est *négatif*, ce qui changerait tous les signes partout !

Le point important à retenir, c'est qu'il y a un choix d'orientation de l'espace à effectuer au départ.

Venons-en maintenant à un concept qu'on apprenait, au siècle précédent (*i.e.* dans l'ancien millénaire), en classe de 2nde au Lycée !



Définition 4.2. À tout couple ordonné (\vec{x}, \vec{y}) de vecteurs de $V_{\mathbb{R}^3}$, on associe un vecteur noté :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \quad (\in V_{\mathbb{R}^3}),$$

nommé *produit vectoriel de \vec{x} par \vec{y}* , et qui est défini en plusieurs étapes.

(1) Lorsque \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires, on déclare que $\vec{x} \wedge \vec{y} := \vec{0}$.

(2) Si \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, alors $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est défini de manière unique par les trois conditions suivantes.

- (a)** $\vec{x} \wedge \vec{y}$ est perpendiculaire \vec{x} et à \vec{y} ;
- (b)** le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$ est *positif*;
- (c)** en termes de la mesure d'angle :

$$\alpha := \text{Angle}(\vec{x}, \vec{y}),$$

la norme de $\vec{x} \wedge \vec{y}$ doit valoir :

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| := \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha.$$

Dans peu de temps, le Théorème 4.4 ci-dessous va mieux expliquer pourquoi ces trois conditions **(a)**, **(b)**, **(c)** définissent bien de manière unique le vecteur $\vec{x} \wedge \vec{y}$.

Pour l'instant, constatons que le symbole '∧' constitue une application :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow V_{\mathbb{R}^3} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}. \end{aligned}$$

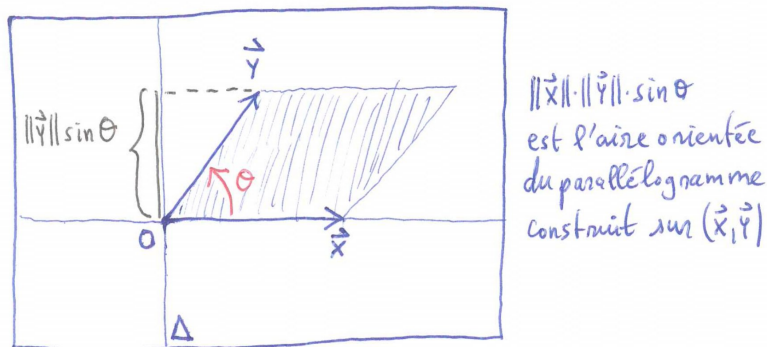
Observons aussi que le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$ n'est nul que lorsque \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires, ce qui correspond à $\alpha \equiv 0 \pmod{\pi}$.

Dans le cas où \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, il existe alors une unique droite D orthogonale au plan vectoriel qu'ils engendrent :

$$\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y}),$$

et alors la condition **(a)** demande que le vecteur défini soit dirigé par cette droite perpendiculaire :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} \in V_D.$$



Il est très important de dire aussi que la longueur (norme) de ce vecteur :

$$\|\vec{x} \wedge \vec{y}\| := \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \sin \alpha.$$

est définie comme étant la valeur de l'aire orientée du parallélogramme construit sur le couple (\vec{x}, \vec{y}) , ce qu'explique la figure.

Proposition 4.3. *Quels que soient les vecteurs \vec{x} et \vec{y} dans l'espace, on a :*

$$\vec{y} \wedge \vec{x} = -\vec{x} \wedge \vec{y}.$$

En particulier, pour tout vecteur \vec{x} , on a :

$$\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}.$$

Démonstration. Si \vec{x} et \vec{y} sont colinéaires, c'est évident, car $0 = -0$ est bien vrai.

Quand \vec{x} et \vec{y} ne sont pas colinéaires, la droite orthogonale D et les normes des vecteurs sont les mêmes dans les deux côtés de l'équation à vérifier.

Mais l'orientation du trièdre change d'un côté à l'autre, car comme on s'en convainc en visualisant les choses dans l'espace (ou en tournant le pouce du haut vers le bas), on a :

$$(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y}) \text{ positif} \quad \Longrightarrow \quad (\vec{x}, \vec{y}, -\vec{x} \wedge \vec{y}) \text{ négatif.}$$

Enfin, en choisissant $\vec{y} := \vec{x}$, l'identité que nous venons de démontrer conclut :

$$\vec{x} \wedge \vec{x} = -\vec{x} \wedge \vec{x} \quad \Longrightarrow \quad 2\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0}. \quad \square$$

Théorème 4.4. *Dans l'espace vectoriel euclidien 3-dimensionnel $V_{\mathbb{R}^3}$, soit un vecteur non nul $\vec{x} \neq 0$, et soit le plan orthogonal :*

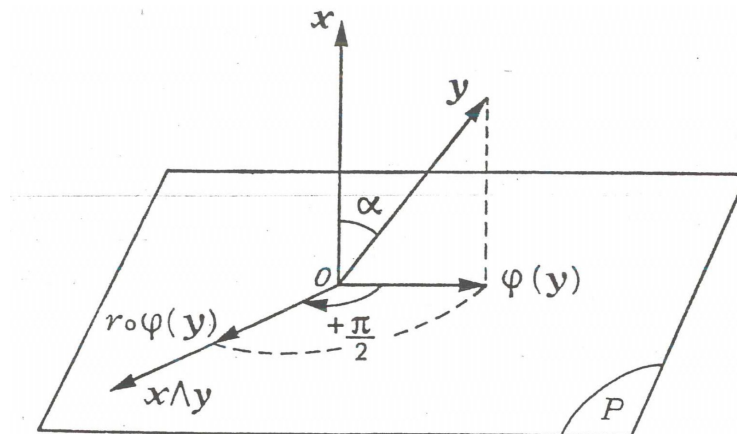
$$P := (\text{Vect } \vec{x})^\perp.$$

Alors en termes des 3 transformations :

- φ le projecteur orthogonal sur V_P ,
- r la rotation d'axe \vec{x} et d'angle $+\frac{\pi}{2}$,
- h l'homothétie de rapport $\|\vec{x}\|$,

le produit vectoriel par \vec{x} de tout vecteur \vec{y} s'exprime comme :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = h \circ r \circ \varphi(\vec{y}).$$



L'intérêt de cet énoncé, c'est qu'il *redéfinit* le produit vectoriel d'une manière beaucoup plus géométrique que précédemment : c'est une vraie recette !

Démonstration. Lorsque \vec{y} est colinéaire à \vec{x} , sa projection $\varphi(\vec{y}) = \vec{0}$ sur P est nulle, et donc on retrouve bien ce qu'on avait déclaré dans la Définition 4.2.

Supposons donc \vec{y} non colinéaire à \vec{x} . Alors le trièdre — attention ! la figure ci-dessous a choisi l'orientation opposée — :

$$(4.5) \quad (\vec{x}, \varphi(\vec{y}), \vec{x} \wedge \vec{y}) \quad \text{est trirectangle positif.}$$

Constatons que ce trièdre est de même signe que le trièdre $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x} \wedge \vec{y})$, grâce à une propriété élémentaire de la projection orthogonale φ sur P parallèlement à \vec{x} ; cette constatation est d'ailleurs en accord avec la présentation que nous avons faite du procédé de Gram-Schmidt pour déterminer le sens, direct ou indirect, d'un trièdre.

D'autre part, si α désigne la mesure de l'angle $\text{Angle}(\vec{x}, \vec{y})$, on a évidemment :

$$\|\varphi(\vec{y})\| = \|\vec{y}\| \sin \alpha,$$

et par conséquent :

$$(4.6) \quad \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| = \|\vec{x}\| \|\varphi(\vec{y})\|.$$

Comme ci-dessus, soit ensuite r la rotation d'axe \vec{x} et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Elle envoie le vecteur $\varphi(\vec{y})$, orthogonal à \vec{x} , sur le vecteur $r \circ \varphi(\vec{y})$ tel que :

$$(\vec{x}, \varphi(\vec{y}), r \circ \varphi(\vec{y})) \quad \text{est trirectangle positif,}$$

en préservant les normes :

$$\|r \circ \varphi(\vec{y})\| = \|\varphi(\vec{y})\|.$$

Enfin, soit h l'homothétie de rapport strictement positif égal à $\|\vec{x}\|$. Elle applique le vecteur $r \circ \varphi(\vec{y})$ sur le vecteur :

$$\vec{z} := h \circ r \circ \varphi(\vec{y}),$$

tel que :

$$(4.7) \quad (\vec{x}, \varphi(\vec{y}), \vec{z}) \quad \text{est trirectangle positif,}$$

et que :

$$(4.8) \quad \|\vec{z}\| = \|\vec{x}\| \|\varphi(\vec{y})\|$$

En comparant alors (4.5) et (4.7) d'une part, (4.6) et (4.8) d'autre part, nous obtenons bien :

$$\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}. \quad \square$$

Proposition 4.9. *Quels que soient les vecteurs \vec{x} et \vec{y} ainsi que le nombre réel $a \in \mathbb{R}$, on a :*

$$(a\vec{x}) \wedge \vec{y} = \vec{x} \wedge (a\vec{y}) = a(\vec{x} \wedge \vec{y}).$$

Démonstration. La propriété est évidente pour $\vec{x} = 0$. Supposons donc $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Puisque les applications φ, r, h qui interviennent dans le Théorème 4.4 sont des endomorphismes linéaires de l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$, alors la composée :

$$h \circ r \circ \varphi$$

est aussi un endomorphisme linéaire de $V_{\mathbb{R}^3}$. Par suite, on a :

$$h \circ r \circ \varphi(a\vec{y}) = a h \circ r \circ \varphi(\vec{y}),$$

c'est-à-dire, en appliquant le Théorème 4.4 :

$$\vec{x} \wedge (a\vec{y}) = a(\vec{x} \wedge \vec{y}).$$

Enfin, grâce à l'antisymétrie du produit vectoriel, ce premier résultat permet d'obtenir sans effort l'autre résultat comme suit :

$$(a\vec{x}) \wedge \vec{y} = -\vec{y} \wedge (a\vec{x}) = -a(\vec{y} \wedge \vec{x}) = a(\vec{x} \wedge \vec{y}). \quad \square$$

Montrons maintenant que le produit vectoriel est distributif par rapport à l'addition vectorielle.

Proposition 4.10. *Quels que soient les vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_{\mathbb{R}^3}$, on a :*

$$\begin{aligned} (\vec{x} + \vec{y}) \wedge \vec{z} &= \vec{x} \wedge \vec{z} + \vec{y} \wedge \vec{z}, \\ \vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) &= \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}. \end{aligned}$$

Démonstration. Grâce à l'antisymétrie du produit vectoriel qui vient d'être exploitée, la première propriété de distributivité se déduit de la deuxième sans effort aussi.

Cette deuxième propriété est évidente lorsque $\vec{x} = \vec{0}$. Supposons donc $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Puisque $h \circ r \circ \varphi$ est un endomorphisme linéaire de $V_{\mathbb{R}^3}$, on a, pour tous vecteurs \vec{y}, \vec{z} :

$$h \circ r \circ \varphi(\vec{y} + \vec{z}) = h \circ r \circ \varphi(\vec{y}) + h \circ r \circ \varphi(\vec{z}).$$

En appliquant alors le Théorème 4.4, nous concluons bien que :

$$\vec{x} \wedge (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \wedge \vec{y} + \vec{x} \wedge \vec{z}. \quad \square$$

Maintenant, que se passe-t-il avec les vecteurs de base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$? Comme la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est orthonormée, on a unitarité :

$$1 = \|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\|,$$

ainsi qu'orthogonalité :

$$\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \quad \vec{e}_3 \perp \vec{e}_1, \quad \vec{e}_1 \perp \vec{e}_2,$$

c'est-à-dire :

$$0 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 = \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2.$$

Comme la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ et celles (4.1) qui s'en déduisent pas permutation circulaire sont toutes positives, alors les relations précédentes entraînent :

$$(4.11) \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 &= \vec{e}_1, \\ \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 &= \vec{e}_2, \\ \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 &= \vec{e}_3. \end{aligned}}$$

Considérons maintenant deux vecteurs quelconques \vec{x} et \vec{y} , donnés par leurs coordonnées dans la base de référence :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \\ \vec{y} &= y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3. \end{aligned}$$

Grâce aux Propositions 4.9 et 4.10, le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$ se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{y} &= (x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3) \wedge (y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3) \\ &= x_1 y_1 \underline{\vec{e}_1 \wedge \vec{e}_1} + x_1 y_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + x_1 y_3 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + x_2 y_1 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_1 + x_2 y_2 \underline{\vec{e}_2 \wedge \vec{e}_2} + x_2 y_3 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + x_3 y_1 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 + x_3 y_2 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_2 + x_3 y_3 \underline{\vec{e}_3 \wedge \vec{e}_3}. \end{aligned}$$

Comme d'habitude, nous avons souligné les termes qui s'annulent. En utilisant :

$$\vec{e}_{i_1} \wedge \vec{e}_{i_2} = -\vec{e}_{i_2} \wedge \vec{e}_{i_1} \quad (1 \leq i_1, i_2 \leq 3),$$

nous pouvons alors écrire :

$$\begin{aligned} \vec{x} \wedge \vec{y} &= 0 + x_1 y_2 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 - x_1 y_3 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 \\ &\quad - x_2 y_1 \vec{e}_1 \wedge \vec{e}_2 + 0 + x_2 y_3 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 \\ &\quad + x_3 y_1 \vec{e}_3 \wedge \vec{e}_1 - x_3 y_2 \vec{e}_2 \wedge \vec{e}_3 + 0. \end{aligned}$$

et enfin regrouper par paires les 6 termes restants pour obtenir un résultat fondamental.

Théorème 4.12. Dans la base orthonormale canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de l'espace, le produit vectoriel entre deux vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3, \\ \vec{y} &= y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3, \end{aligned}$$

vaut :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = (x_2 y_3 - y_2 x_3) \vec{e}_1 + (x_3 y_1 - y_3 x_1) \vec{e}_2 + (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{e}_3. \quad \square$$

5. Applications bilinéaires

Nous savons que le produit scalaire euclidien est une application bilinéaire :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \vec{x} \cdot \vec{y}, \end{aligned}$$

à savoir qu'il satisfait, comme l'a déjà énoncé le Lemme 2.1 :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}') \cdot \vec{y} &= \lambda \vec{x} \cdot \vec{y} + \lambda' \vec{x}' \cdot \vec{y}, \\ \vec{x} \cdot (\mu \vec{y} + \mu' \vec{y}') &= \mu \vec{x} \cdot \vec{y} + \mu' \vec{x} \cdot \vec{y}'. \end{aligned}$$

On parle de *bilinéarité*, car quand \vec{y} est fixé, l'application $\vec{x} \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ est linéaire, et de manière symétrique, quand \vec{x} est fixé, l'application $\vec{y} \mapsto \vec{x} \cdot \vec{y}$ est linéaire.

À travers les Proposition 4.9 et 4.10, nous venons de voir que le produit vectoriel :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) &\longmapsto \vec{x} \wedge \vec{y}, \end{aligned}$$

est aussi une application bilinéaire, c'est-à-dire qu'il satisfait :

$$\begin{aligned} (\lambda \vec{x} + \lambda' \vec{x}') \wedge \vec{y} &= \lambda \vec{x} \wedge \vec{y} + \lambda' \vec{x}' \wedge \vec{y}, \\ \vec{x} \wedge (\mu \vec{y} + \mu' \vec{y}') &= \mu \vec{x} \wedge \vec{y} + \mu' \vec{x} \wedge \vec{y}'. \end{aligned}$$

Ainsi, quand \vec{y} est fixé, l'application $\vec{x} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$ est linéaire, et de manière symétrique, quand \vec{x} est fixé, l'application $\vec{y} \mapsto \vec{x} \wedge \vec{y}$ est linéaire.

Toutes ces observations motivent une conceptualisation générale « *en abstraction* » de ces propriétés. Revenons à un corps arbitraire \mathbb{K} — penser $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R},$ ou \mathbb{C} .

Définition 5.1. Soient E, F, G trois espaces vectoriels sur le même corps \mathbb{K} . Une application f de $E \times F$ dans G sera dite *bilinéaire* si, quels que soient les vecteurs :

$$\vec{x}, \vec{x}' \in E \quad \text{et} \quad \vec{y}, \vec{y}' \in F,$$

et quel que soit le scalaire $a \in \mathbb{K}$, elle satisfait :

$$\begin{aligned} f(a\vec{x}, \vec{y}) &= f(\vec{x}, a\vec{y}) = a f(\vec{x}, \vec{y}), \\ f(\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}) &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}', \vec{y}), \\ f(\vec{x}, \vec{y} + \vec{y}') &= f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{x}, \vec{y}'). \end{aligned}$$

En d'autres termes, l'application $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto f(\vec{x}, \vec{y})$ est, pour \vec{y} fixé, linéaire selon la variable \vec{x} , et pour \vec{x} fixé, linéaire selon la variable \vec{y} . C'est bien pourquoi f est nommée *bilinéaire*.

Terminologie 5.2. Maintenant, lorsque l'espace d'arrivée G où f prend ses valeurs coïncide avec le corps \mathbb{K} lui-même, f est nommée *forme bilinéaire*.

Par exemple, le produit scalaire est une forme bilinéaire de $V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3}$ dans \mathbb{R} . À ce sujet, remarquons que le produit scalaire $f := \cdot$ est de plus commutatif :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x}),$$

ce qui n'est *pas* le cas pour toute application bilinéaire.

Terminologie 5.3. Quand $f(\vec{x}, \vec{y}) = f(\vec{y}, \vec{x})$ pour tous vecteurs \vec{x}, \vec{y} , on dit que la forme bilinéaire f est *symétrique*. Et quand $E = F$ avec :

$$f(\vec{y}, \vec{x}) = -f(\vec{x}, \vec{y}) \quad (\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{y} \in E),$$

on dit que la forme f est *antisymétrique*.

Supposons donc maintenant que $E = F$.

Définition 5.4. Une application bilinéaire de $E \times E$ dans G est dite *alternée* si, quel que soit le vecteur $\vec{x} \in E$, elle satisfait :

$$f(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{0}.$$

Par exemple, le produit vectoriel est une application bilinéaire alternée de $V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3}$ dans $V_{\mathbb{R}^3}$, car nous savons que :

$$\vec{x} \wedge \vec{x} = \vec{0} \quad (\forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}).$$

Cependant, le produit scalaire euclidien n'est *pas* alterné, car on sait que :

$$\vec{x} \cdot \vec{x} = \|\vec{x}\|^2 \quad (\forall \vec{x} \in V_{\mathbb{R}^3}),$$

et on sait que :

$$0 = \|\vec{x}\| \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = \vec{0}.$$

Il est évident qu'une application antisymétrique est alternée, car :

$$f(\vec{x}, \vec{x}) = -f(\vec{x}, \vec{x}) \quad \Longrightarrow \quad 2f(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{0}.$$

Mais le fait d'être alterné est équivalent au fait d'être antisymétrique, comme le fait voir la

Proposition 5.5. *Si f est une application bilinéaire alternée de $E \times E$ dans G , alors quels que soient les vecteurs \vec{x} et \vec{y} de E , on a :*

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = -f(\vec{y}, \vec{x}).$$

Démonstration. Partons de :

$$\vec{0} = f(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}),$$

utilisons la bilinéarité pour développer :

$$\vec{0} = \underbrace{f(\vec{x}, \vec{x})}_0 + f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x}) + \underbrace{f(\vec{y}, \vec{y})}_0,$$

et appliquons l'hypothèse que f est alternée pour obtenir effectivement :

$$\vec{0} = f(\vec{x}, \vec{y}) + f(\vec{y}, \vec{x}). \quad \square$$

Nous allons maintenant étudier les applications bilinéaires alternées dans le cas où E et de dimension 2 sur le corps \mathbb{K} , l'espace vectoriel G étant quelconque. Ceci va nous permettre d'introduire pour la toute première fois des objets nouveaux dont nous reparlerons énormément au chapitre suivant, les *déterminants*, ici dans le cas prototypique des déterminants de taille 2×2 , les plus simples d'entre tous.

Théorème 5.6. *Soient E et G deux espaces vectoriels sur un même corps \mathbb{K} , avec :*

$$\dim_{\mathbb{K}} E = 2.$$

Pour toute base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ de E , et pour tout vecteur $\vec{k} \in G$, il existe une application bilinéaire alternée, et une seule, $f: E \times E \rightarrow G$ telle que :

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = \vec{k}.$$

Démonstration. Toute paire de vecteurs \vec{x}, \vec{y} sera rapportée à la base choisie :

$$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2,$$

$$\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2.$$

Commençons par établir l'*unicité* de $f: E \times E \rightarrow G$. Comme f est supposée alternée, on a :

$$\begin{aligned} \vec{0} &= f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) = f(\vec{e}_2, \vec{e}_2), \\ f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) &= -f(\vec{e}_2, \vec{e}_1). \end{aligned}$$

Comme f est bilinéaire, on peut développer :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}) &= f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2, y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2) \\ &= x_1 y_1 \underbrace{f(\vec{e}_1, \vec{e}_1)}_0 + x_1 y_2 f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + x_2 y_1 f(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + x_2 y_2 \underbrace{f(\vec{e}_2, \vec{e}_2)}_0 \\ &= (x_1 y_2 - y_1 x_2) f(\vec{e}_1, \vec{e}_2). \end{aligned}$$

Ceci prouve que, si f existe, elle coïncide nécessairement avec l'application uniquement déterminée :

$$f(\vec{x}, \vec{y}) := (x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k}.$$

Ensuite, pour faire voir l'*existence réelle* de f , prouvons que l'application ainsi définie en termes de \vec{k} est bien bilinéaire alternée.

Pour $\vec{y} \in E$ fixé, on a en effet, quels que soient $\vec{x}, \vec{x}' \in E$ et quels que soient $a, a' \in \mathbb{K}$:

$$\begin{aligned} f(a\vec{x} + a'\vec{x}', \vec{y}) &= \left[(ax_1 + a'x'_1)y_2 - y_1(ax_2 + a'x'_2) \right] \vec{k} \\ &= a(x_1 y_2 - y_1 x_2) \vec{k} + a'(x'_1 y_2 - y_1 x'_2) \vec{k} \\ &= a f(\vec{x}, \vec{y}) + a' f(\vec{x}', \vec{y}). \end{aligned}$$

Ainsi, $f(\vec{x}, \vec{y})$ est bien linéaire en \vec{x} . On prouverait de même qu'elle est aussi linéaire en \vec{y} .

Enfin, f est trivialement alternée, car :

$$f(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1 x_2 - x_1 x_2) \vec{k} = \vec{0}. \quad \square$$

Nous pouvons maintenant introduire les déterminants d'ordre 2. Plaçons-nous dans les hypothèses du Théorème 5.6, avec de plus :

$$G := \mathbb{K}.$$

Choisissons comme vecteur \vec{k} le « vecteur » 1 de l'espace vectoriel \mathbb{K} . Ledit théorème affirme alors qu'il existe une unique *forme* bilinéaire alternée f telle que :

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_2) = 1.$$

Terminologie 5.7. Une telle forme se nomme alors *déterminant des vecteurs \vec{x} et \vec{y} par rapport à la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$* .

On note ce déterminant :

$$x_1 y_2 - y_1 x_2 =: \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}.$$

Ce tableau encadré de deux barres verticales — belle escorte ! — est constitué de par les deux colonnes des coordonnées des vecteurs \vec{x} et \vec{y} dans la base considérée.

Attention ! Il ne faut *absolument pas* confondre cette notation avec celle d'une matrice carrée d'ordre 2, pour laquelle les escortes sont deux grandes parenthèses.

D'ailleurs, si on part d'une matrice de $\mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{K})$:

$$M := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

on appelle *déterminant de M* la quantité notée :

$$\det M := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Observons au passage que d'après cette définition concrète, on voit immédiatement — exercice visuel, crayon non interdit en cas de panne de cervelle — que :

$$\det({}^t M) = \det M.$$

De plus, on constate que si on échange deux lignes, le déterminant change de signe, et pareillement si on change deux colonnes.

Le prochain chapitre montrera cela à l'envi, et beaucoup, beaucoup plus !

6. Produit mixte

Revenons à l'espace vectoriel $V_{\mathbb{R}^3}$ de la géométrie euclidienne.

Définition 6.1. À tout triplet ordonné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ de trois vecteurs de $V_{\mathbb{R}^3}$, on associe un nombre réel, nommé *produit mixte* des trois vecteurs, noté et défini par :

$$(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) := (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z}.$$

C'est le produit scalaire de \vec{z} par le produit vectoriel $\vec{x} \wedge \vec{y}$.

Le produit mixte établit donc une application :

$$\begin{aligned} V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} \times V_{\mathbb{R}^3} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &\longmapsto (\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}). \end{aligned}$$

Par construction, le produit mixte est nul si et seulement si l'une des trois éventualités suivantes est satisfaite.

- (1) L'un des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ est nul.
- (2) Les vecteurs \vec{x} et \vec{y} sont colinéaire, propriété équivalente à $\vec{0} = \vec{x} \wedge \vec{y}$.
- (3) Les vecteurs $\vec{x} \wedge \vec{y}$ et \vec{z} sont non nuls et orthogonaux. Dans ce cas, le vecteur \vec{z} appartient alors au sous-espace à deux dimensions V_P défini par \vec{x} et \vec{y} , où $P := \text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$.

Définition 6.2. Trois vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont dits *coplanaires* lorsqu'il existe un sous-espace V_P à deux dimensions qui les contient tous les trois.

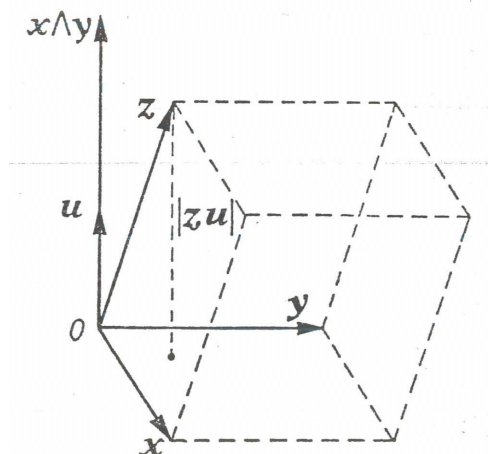
En d'autres termes, $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont coplanaires s'ils sont tous parallèles à un même plan vectoriel. D'après ce qui précède, on peut donc énoncer en résumé une

Proposition 6.3. *Pour que trois vecteurs soient coplanaires, il faut et il suffit que leur produit mixte soit nul.* □

Maintenant, à quoi sert au juste le produit mixte ? Possède-t-il une signification géométrique éclairante ? Ah, que oui, petzi !

En effet, on peut interpréter le produit mixte $(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z})$ comme le *volume signé* du parallélépipède construit sur $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$.

On sait déjà que $\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|$ est la mesure de l'aire (positive) du parallélogramme construit sur les deux vecteurs \vec{x} et \vec{y} .

Produit mixte: $(\mathbf{x} | \mathbf{y} | \mathbf{z})$

Désignons alors par \vec{u} le vecteur unitaire unique tel que :

$$\vec{x} \wedge \vec{y} = \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| \vec{u} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{u} := \frac{\vec{x} \wedge \vec{y}}{\|\vec{x} \wedge \vec{y}\|}.$$

On a alors, pour le produit mixte :

$$(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) = \|\vec{x} \wedge \vec{y}\| (\vec{u} \cdot \vec{z}).$$

La valeur absolue $|\vec{u} \cdot \vec{z}|$ du produit scalaire de \vec{u} par \vec{z} est la mesure de la hauteur du parallélépipède, relative à la base constituée par $\text{Vect}(\vec{x}, \vec{y})$. Par conséquent on a un

Théorème 6.4. *Le volume du parallélépipède construit sur trois vecteurs \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} dans l'espace euclidien $V_{\mathbb{R}^3}$ vaut :*

$$\text{Volume} = |(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z})|.$$

On peut, si l'on veut, interpréter le signe du produit mixte en introduisant la notion de *volume signé*. En effet, on dira qu'un parallélépipède construit sur trois vecteurs linéairement indépendants \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} est *positif* ou *négatif* suivant que le trièdre est positif ou négatif, et on posera, sans valeur absolue :

$$\text{Volume signé} := (\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}).$$

Maintenant, comment calculer le produit mixte en coordonnées ? À cette fin, choisissons la base orthonormée canonique $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ que nous avons plusieurs fois utilisée. Dans cette base, soient (x_1, x_2, x_3) les coordonnées de \vec{x} , soient (y_1, y_2, y_3) les coordonnées de \vec{y} , soient (z_1, z_2, z_3) les coordonnées de \vec{z} .

Nous savons que les trois coordonnées de $\vec{x} \wedge \vec{y}$ sont :

$$(x_2y_3 - y_2x_3), \quad (x_3y_1 - y_3x_1), \quad (x_1y_2 - y_1x_2).$$

Par conséquent, la valeur du produit mixte en question est :

$$\begin{aligned} (\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) &= (\vec{x} \wedge \vec{y}) \cdot \vec{z} \\ &= (x_2y_3 - y_2x_3) z_1 + (x_3y_1 - y_3x_1) z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2) z_3, \end{aligned}$$

et si nous développons et réorganisons les termes, nous obtenons une formule finalisée et harmonieuse :

$$(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2.$$

En effet, remarquons que les produits $x_i y_j z_k$ sont précédés du signe ‘+’ ou du signe ‘-’ selon que $\{i, j, k\}$ est l’image de $\{1, 2, 3\}$ par une permutation *paire* ou *impaire* :

$$\begin{array}{lll} \text{permutations paires :} & \{1, 2, 3\}, & \{2, 3, 1\}, & \{3, 1, 2\}, \\ \text{permutations impaires :} & \{2, 1, 3\}, & \{1, 3, 2\}, & \{3, 2, 1\}. \end{array}$$

Il importe de remarquer que, d’après sa définition même, le produit mixte est indépendant de la base orthonormée choisie.

Proposition 6.5. *Le produit mixte $(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z})$ est linéaire en chacun des trois vecteurs \vec{x} , \vec{y} , \vec{z} .*

Démonstration. Puisque nous savons que le produit vectoriel est bilinéaire, nous avons en particulier pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{x}', \vec{y} \in V_{\mathbb{R}^3}$ et tous scalaires $a, a' \in \mathbb{R}$:

$$(a\vec{x} + a'\vec{x}') \wedge \vec{y} = a(\vec{x} \wedge \vec{y}) + a'(\vec{x}' \wedge \vec{y}).$$

En multipliant scalairement cela par \vec{z} , nous obtenons, puisque le produit scalaire $(\vec{v}, \vec{z}) \mapsto \vec{v} \cdot \vec{z}$ est linéaire en \vec{v} :

$$(a\vec{x} + a'\vec{x}' | \vec{y} | \vec{z}) = a(\vec{x} | \vec{y} | \vec{z}) + a'(\vec{x}' | \vec{y} | \vec{z}).$$

Donc le produit mixte est linéaire en son premier argument \vec{x} .

On prouverait de même qu’il est linéaire en \vec{y} et en \vec{z} : ceci résulte du fait que le produit scalaire et le produit vectoriel sont tous deux bilinéaires. \square

Proposition 6.6. *Le produit mixte change de signe quand on échange deux vecteurs quelconques.*

Démonstration. La démonstration est immédiate si l’on considère le parallélépipède orienté construit sur le triplet ordonné $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Si l’on échange deux vecteurs du triplet, le parallélépipède change simplement d’orientation, et son volume signé change alors de signe. \square

7. Applications trilinéaires alternées

Prenons deux espaces vectoriels E et G sur le même corps \mathbb{K} .

Définition 7.1. Une application :

$$\begin{aligned} f: E \times E \times E &\longrightarrow G \\ (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &\longmapsto f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \end{aligned}$$

est dite *trilinéaire alternée* si :

- (1) elle est linéaire en chacun des vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$;
- (2) $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$ dès que deux parmi trois vecteurs coïncident.

En d’autres termes, si l’on fixe l’un quelconque des trois vecteurs, l’application f est *bilinéaire alternée* en les deux autres vecteurs.

Par conséquent :

Observation 7.2. $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ change de signe dès que l'on échange deux vecteurs. \square

D'autre part :

Observation 7.3. Si l'un des trois vecteurs est combinaison linéaire des deux autres, alors $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$. \square

Par exemple, avec :

$$\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y},$$

on trouve l'annulation complète :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= a \underbrace{f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{x})}_0 + b \underbrace{f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{y})}_0 \\ &= 0 + 0. \end{aligned}$$

Il en résulte un énoncé très important dans la pratique.

Proposition 7.4. Tout application trilinéaire alternée $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ne change pas quand on ajoute à l'un des vecteurs une combinaison linéaire quelconque des deux autres :

$$f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} + a\vec{x} + b\vec{y}) = f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}). \quad \square$$

Terminologie 7.5. Lorsque l'espace vectoriel G coïncide avec le corps \mathbb{K} , une application trilinéaire prend le nom de *forme trilinéaire*.

Par exemple, le produit mixte est une forme trilinéaire alternée de $V_{\mathbb{R}^3}$ à valeurs dans \mathbb{R} .

Nous allons maintenant étudier les applications trilinéaires alternées dans le cas où E est de dimension 3 sur le corps \mathbb{K} , toujours avec un \mathbb{K} -espace vectoriel G quelconque. Ceci nous permettra d'introduire de manière naturelle les déterminants de taille 3×3 .

Théorème 7.6. Soient E et G deux \mathbb{K} -espaces vectoriels, avec $\dim_{\mathbb{K}} E = 3$. Pour toute base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ de E et tout vecteur $\vec{k} \in G$, il existe une unique application trilinéaire $f: E \times E \times E \rightarrow G$ telle que :

$$f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = \vec{k}.$$

Démonstration. Commençons par établir l'unicité de $f: E \times E \times E \rightarrow G$. Décomposons dans la base :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{e}_i, \quad \vec{y} = \sum_{j=1}^3 y_j \vec{e}_j, \quad \vec{z} = \sum_{k=1}^3 z_k \vec{e}_k.$$

Puisque f est trilinéaire :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) &= f\left(\sum_i x_i \vec{e}_i, \sum_j y_j \vec{e}_j, \sum_k z_k \vec{e}_k\right) \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k). \end{aligned}$$

Ici, la somme est étendue à tous les indices i, j, k dans $\{1, 2, 3\}$, donc il y a au total $3^3 = 27$ termes.

Or puisqu'on sait que $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \vec{0}$ dès que deux indices sont égaux, il ne reste à considérer que les termes de la sommation où les trois indices i, j, k sont distincts, c'est-à-dire les cas où l'ensemble $\{i, j, k\}$ est l'image de $\{1, 2, 3\}$ par une permutation.

Il y a au total $3! = 6$ termes de cette espèce. De plus, ce que nous venons de dire garantit que les $27 - 6 = 21$ autres termes sont *tous* nuls.

Assertion 7.7. Les six $f(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k)$ restants s'expriment tous en fonction de :

$$\vec{k} = f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

Preuve. En effet, puisque f est alternée, on a :

$$\begin{aligned} f(\vec{e}_2, \vec{e}_1, \vec{e}_3) &= -\vec{k}, \\ f(\vec{e}_1, \vec{e}_3, \vec{e}_2) &= -\vec{k} = -f(\vec{e}_3, \vec{e}_1, \vec{e}_2), \\ f(\vec{e}_3, \vec{e}_2, \vec{e}_1) &= -\vec{k} = -f(\vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_1). \end{aligned}$$

Ici, nous voyons les 6 permutations de $\{1, 2, 3\}$, ce qui finit. \square

On remarquera que $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ vaut \vec{k} ou $-\vec{k}$ selon que la permutation :

$$\{1, 2, 3\} \longmapsto \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$$

est paire ou impaire.

Nous obtenons par conséquent :

$$(7.8) \quad f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \left(x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_3 y_2 z_1 - x_2 y_1 z_3 - x_1 y_3 z_2 \right) \vec{k},$$

ce qui établit l'*unicité* de l'application trilinéaire f recherchée.

Il reste à démontrer son *existence*, car ce n'est pas parce que le *Monstre du Loch Ness* est unique qu'il existe — soit dit en passant !

À cette fin, prouvons que l'application f de $E \times E \times E$ à valeurs dans G qui est définie par (7.8) est bien trilinéaire alternée.

Établissons, par exemple, que f est trilinéaire en \vec{x} , les deux autres vecteurs \vec{y} et \vec{z} restant fixes. Comme les coordonnées de \vec{x} interviennent une fois et une fois seulement dans chacun des six termes de la somme (7.8), et que les coordonnées de $a\vec{x}$ sont $a x_1, a x_2, a x_3$, alors, en remplaçant dans (7.8), nous obtenons :

$$f(a\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = a f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}).$$

Comme les coordonnées — oh la faute, oh la monstresse ! — de $\vec{x} + \vec{x}'$ sont $x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, x_3 + x'_3$, alors, en remplaçant dans (7.8), nous obtenons :

$$f(\vec{x} + \vec{x}', \vec{y}, \vec{z}) = f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) + f(\vec{x}', \vec{y}, \vec{z}).$$

On prouverait de même la linéarité de f en \vec{y} ou en \vec{z} .

Enfin, si deux des trois vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sont égaux, alors la relation (7.8) montre immédiatement que $f(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) = \vec{0}$.

Ceci conclut la démonstration du Théorème 7.6. \square

8. Déterminants d'ordre 3

Plaçons-nous dans les hypothèses du Théorème 7.6, avec :

$$G := \mathbb{K}.$$

Choisissons pour vecteur \vec{k} le vecteur 1 du corps \mathbb{K} . Il existe alors une unique forme trilinéaire alternée f telle que $f(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = 1$.

Terminologie 8.1. Une telle forme f se nomme *déterminant des vecteurs* $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ par rapport à la base $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, et se note :

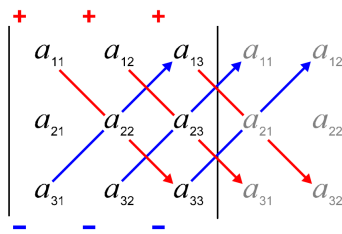
$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

D'après (7.8), ce déterminant vaut :

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 - x_3y_2z_1 - x_2y_1z_3 - x_1y_3z_2.$$

On dit que l'on a *développé* le déterminant selon la *règle de Sarrus* : les trois produits précédés du signe '+' contiennent soit les termes de la diagonale principale, soit deux termes d'une parallèle à cette diagonale. Pour les trois produits précédés du signe '-', il y a une règle analogue en remplaçant la diagonale principale par l'autre diagonale.

Donnons deux premiers diagrammes colorés :



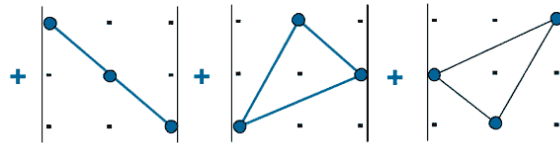
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

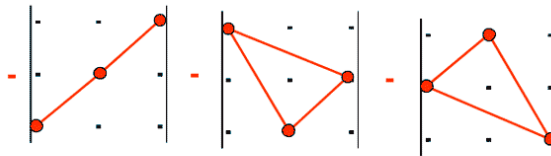
$$(a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}) - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32})$$

En fait, l'idée principale concernant les signes est illustrée comme suit :

Termes positivos



Termes negativos



Allez ! Encore deux autres illustrations bien flashys !

$$\begin{matrix} +aei \\ +dhc \\ +gbf \\ -gec \\ -ahf \\ -dbi \end{matrix} \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix}$$

$$\det(M) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{21} \cdot a_{12}$$

Soit une matrice carrée d'ordre 3 :

$$M := \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}.$$

Définition 8.2. On appelle *déterminant* de M le scalaire :

$$\begin{aligned} \det M &:= \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \\ &:= ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''. \end{aligned}$$

De cette définition, il résulte immédiatement que le déterminant de la matrice transposée tM est le même que le déterminant de M :

$$\det({}^tM) = \det M.$$

Par conséquent, toute propriété de $\det M$ valable pour les lignes est aussi valable pour les colonnes.

Formulons précisément ces propriétés qui découlent de celles d'une application trilineaire alternée.

Proposition 8.3. (1) Avec des déterminants 3×3 , on peut factoriser un facteur commun aux éléments d'une rangée :

$$\begin{vmatrix} \lambda a & a' & a'' \\ \lambda b & b' & b'' \\ \lambda c & c' & c'' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(2) Si les éléments d'une rangée sont des sommes, on peut mettre le déterminant sous la forme d'une somme de déterminants :

$$\begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a' & a'' \\ b_1 + b_2 & b' & b'' \\ c_1 + c_2 & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a' & a'' \\ b_1 & b' & b'' \\ c_1 & c' & c'' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & a' & a'' \\ b_2 & b' & b'' \\ c_2 & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(3) Quand on échange deux lignes (ou deux colonnes), le déterminant change de signe :

$$\begin{vmatrix} b & b' & b'' \\ a & a' & a'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}.$$

(4) Si une ligne (ou une colonne) est combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul :

$$\begin{vmatrix} a & a' & \lambda a + \mu a' \\ b & b' & \lambda b + \mu b' \\ c & c' & \lambda c + \mu c' \end{vmatrix} = 0. \quad \square$$

Maintenant, dans la formule de la Définition 8.2, portons notre attention sur les éléments a' , b' , c' de la seconde colonne, par exemple. Groupons les termes contenant a' , puis ceux contenant b' , et enfin ceux contenant c' , pour obtenir :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a' (b''c - bc'') + b' (ac'' - a''c) + c' (a''b - ab'').$$

On peut alors écrire cela :

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = -a' \begin{vmatrix} b & b'' \\ c & c'' \end{vmatrix} + b' \begin{vmatrix} a & a'' \\ c & c'' \end{vmatrix} - c' \begin{vmatrix} a & a'' \\ b & b'' \end{vmatrix}.$$

On dit que l'on a développé le déterminant selon les termes de sa seconde colonne.

Les coefficients de a' , de b' , de c' sont nommés les *cofacteurs* de ces éléments. On a en effet reconnu trois déterminants 2×2 . Le *cofacteur* d'un élément est un déterminant de taille 2×2 affecté d'un certain signe :

- (a) le déterminant est obtenu en supprimant la ligne et la colonne de l'élément considéré ;
- (b) le signe du cofacteur est '+' ou '-' selon que la somme des rangs de la ligne et de la colonne de l'élément considéré est paire ou impaire.

On peut obtenir des développements du déterminant, analogues au précédent, selon les termes d'une colonne quelconque, ou d'une ligne quelconque.

9. Exercices

Exercice 1. EE

Exercice 2. EE