Droites dans le plan

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

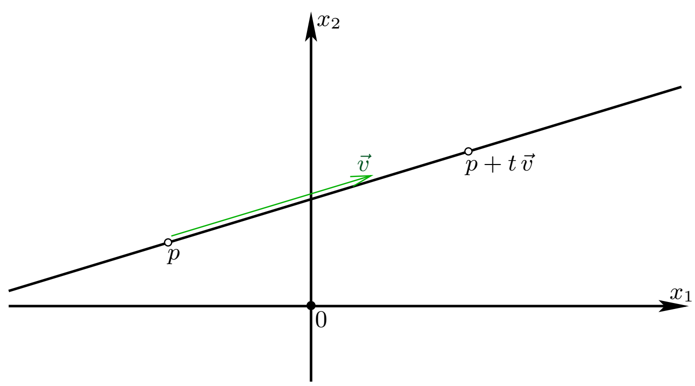
1. Introduction

2. Droites dans le plan : définition paramétrique et équations cartésiennes

Dans le plan $\mathbb{R}^2$ muni des coordonnées (x_1, x_2), on se donne un point quelconque $p = (p_1, p_2)$ et un vecteur $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$, que l'on suppose *non nul*, c'est-à-dire :

$$(v_1, v_2) \neq (0, 0).$$

Plus précisément, on suppose que v_1 et v_2 ne sont pas *simultanément* égaux à 0 ; toutefois, l'un d'entre eux peut être *nul* [en doublette à la pétanque ?], pourvu que l'autre ne soit *pas* nul.



Définition 2.1. Une *droite* dans le plan $\mathbb{R}^2$ représentée de manière *paramétrique* est un ensemble de points du type :

$$D := \big\{p + t\vec{v} \colon\ t \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\} \ \subset\ \mathbb{R}^2.$$

Si jamais on avait pris le vecteur nul $\vec{v} = \vec{0} = \binom{0}{0}$, on n'aurait pas introduit une *droite*, on aurait bêtement introduit un ensemble réduit à l'unique point $p + t\,\vec{0} = p$.

Le paramètre $t \in \mathbb{R}$ permet de se déplacer sur la droite, dans deux directions, jusqu'aux deux infinis, pour $-\infty \longleftarrow t$ et pour $t \longrightarrow \infty$.

Autrement dit, les coordonnées (x_1, x_2) d'un point quelconque $(x_1, x_2) := (p_1, p_2) + t\,(v_1, v_2)$ situé sur une telle droite D ont pour valeurs :

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + t\,v_1, \\ x_2 &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned}$$

toujours avec $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Attention ! Ici, x_1 et x_2 ne sont pas des inconnues !

Mais comme t est un nombre réel quelconque, il est avisé de l'*éliminer*, tout simplement en multipliant la première équation par v_2, la seconde par v_1 :

$$v_2\Big(x_1 = p_1 + t\,v_1\Big), \qquad\qquad v_2\,x_1 = p_1\,v_2 + \underline{t\,v_1\,v_2},$$
$$v_1\Big(x_2 = p_2 + t\,v_2\Big), \qquad\qquad v_1\,x_2 = p_2\,v_1 + \underline{t\,v_2\,v_1},$$

puis en soustrayant, ce qui donne :

$$v_2\,x_1 - v_1\,x_2 = p_1\,v_2 - p_2\,v_1.$$

À gauche, on a maintenant deux inconnues x_1 et x_2, avec deux coefficients fixés v_2 et $-v_1$, tandis qu'à droite, on a un coefficient $p_1v_2 - p_2v_1$, qui est une constante.

Théorème 2.2. [Équivalence entre deux définitions] *Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être définie de deux manières équivalentes, comme :*

(i) $D := \big\{p + t\,\vec{v}\colon\ t \in \mathbb{R}\,\textit{quelconque}\big\}$*, avec un point quelconque $p \in \mathbb{R}^2$ et un vecteur* non nul $\vec{v} \in \vec{V}_{\mathbb{R}^2}\backslash\{\vec{0}\}$ *;*

(ii) $D := \big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon\ a_1x_1 + a_2x_2 + b = 0\big\}$*, avec des constantes $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$, telles que $(a_1, a_2) \neq (0,0)$.*

La deuxième représentation consiste en une *équation cartésienne*, bien connue des jeunes joueurs [de billes]. Autrement dit, une droite dans $\mathbb{R}^2$ peut toujours être considérée comme l'ensemble des solutions d'un système linéaire *compatible* à une unique équation et à deux inconnues, dont la forme échelonnée réduite peut être ou bien :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * \end{bmatrix} \qquad \text{ou bien :} \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{bmatrix},$$

mais certainement pas :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}$$

ce qui correspondrait à $(a_1, a_2) = (0,0)$ et à $b \neq 0$, car cette forme est la forme générale d'un système *incompatible*, comme nous le savons [de Marseille].

Démonstration. Nous venons de voir que **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)**.

Inversement, suppposons **(ii)** et cherchons à obtenir **(i)**. Partons donc d'une équation cartésienne quelconque :

$$a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + b = 0,$$

et cherchons à la l'écrire sous la forme :

$$v_2\,x_1 - v_1\,x_2 = p_1\,v_2 - p_2\,v_1.$$

Clairement, par identification des coefficients et x_1 et de x_2, nous voyons qu'il faut choisir :

$$v_1 := -a_2 \qquad \text{et} \qquad v_2 := a_1. \tag{2.3}$$

Mais le vecteur obtenu $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ est-il bien un vecteur *non nul*, comme la Définition 2.1 l'exigeait ?

Ah mais oui ! Cela tombe bien ! Nous avons supposé dans **(ii)** que $(a_1, a_2) \neq (0,0)$, et donc oui, ce vecteur $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} = \binom{-a_2}{a_1}$ est bien non nul. Ouf !

Ensuite, toujours par identification, sachant que la constante $b \in \mathbb{R}$ est donnée, on voudrait trouver un point $p = (p_1, p_2)$ tel que :

$$\begin{aligned} b &\overset{?}{=} -p_1 v_2 + p_2\, v_1 \\ &= -p_1\, a_1 - p_2\, a_2. \end{aligned}$$

Comme le presti-digit-agitateur tirant un beau lapin blanc de son grand chapeau noir, nous affirmons alors que le choix :

$$p_1 := -\frac{b\, a_1}{a_1^2 + a_2^2}, \qquad\qquad p_2 := -\frac{b\, a_2}{a_1^2 + a_2^2},$$

fonctionne — notons ici qu'on peut diviser par $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$. En effet, vérifions cela par le calcul :

$$\begin{aligned} b &\overset{?}{=} -\bigg(-\frac{b\, a_1}{a_1^2 + a_2^2}\bigg)\, a_1 - \bigg(-\frac{b\, a_2}{a_1^2 + a_2^2}\bigg)\, a_2 \\ &= \frac{b\, a_1\, a_1}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{b\, a_2\, a_2}{a_1^2 + a_2^2} \\ &= b\, \frac{a_1^2 + a_2^2}{a_1^2 + a_2^2} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

En conclusion, nous avons trouvé un vecteur non nul et un point du plan qui nous permettent de représenter notre droite cartésienne sous une forme paramétrique. □

Nous allons encore donner deux autres définitions équivalentes des droites $D \subset \mathbb{R}^2$ dans le plan. Mais auparavant, ouvrons une parenthèse.

3. Travail mathématique avec des lettres littérales

Nous utiliserons dorénavant deux coordonnées notées (x, y) au lieu de (x_1, x_2). Nous travaillerons avec des équations cartésiennes de droites quelconques :

$$a\, x + b\, y = c,$$

où les lettres a, b, c désignent des nombres réels fixés, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. Dans les exercices de TD et d'examen, souvent, a, b, c, auront des valeurs précises, c'est-à-dire des nombres réels concret et parlants, comme 3, 5, 7, ou encore -1, 2, -5.

Mais le raisonnement mathématique abstrait exige de comprendre tout ce qui peut se passer en général. Après les mathématiques de l'école maternelle, il faut apprendre les mathématiques supérieures de l'école universitaire ! C'est pourquoi on utilise des lettres pour désigner des nombres réels « *formels* » quelconques, et nous serons alors fréquemment amenés à *distinguer plusieurs cas* suivant les valeurs de ces nombres a, b, c.

Si l'on devait résoudre par exemple l'équation tout simple et toute sotte :

$$a\, x = 0,$$

il est clair qu'on ne pourrait pas toujours déduire que $x = 0$, car … ah mince alors ! Et si a était égal à 0 ? On aurait juste $0\, x = 0$, c'est-à-dire l'équation tautologique $0 = 0$, dont on ne peut rien tirer, et alors x pourrait être quelconque. Il est donc *nécessaire* de discuter les deux cas $a \neq 0$ et $a = 0$.

Le point-clé que nous verrons et reverrons intervenir de nombreuses fois, c'est qu'un nombre réel a peut être égal à 0, ou différent de 0, et qu'il faudra toujours tenir compte de ces deux éventualités. Et si on oublie de discuter les cas, cela pourra 'faire mal' en examen !

4. Produit scalaire et vecteur directeur d'une droite

Rappelons que dans $\mathbb{R}^2$, le *produit scalaire euclidien* (canonique) entre deux vecteurs $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ et $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ est défini par :

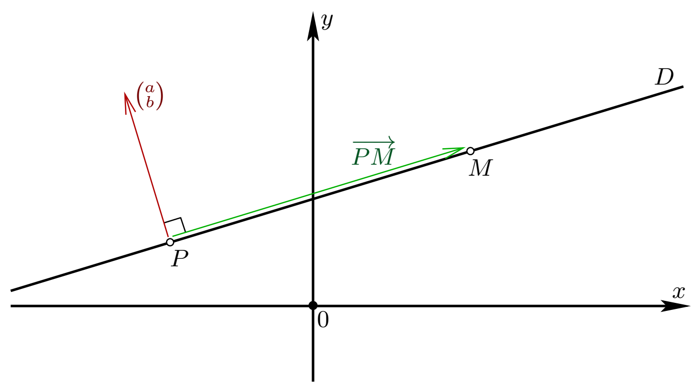
$$\vec{u} \bullet \vec{v} \;=\; \binom{u_1}{u_2} \bullet \binom{v_1}{v_2} \;:=\; u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

À tout couple de vecteurs, le produit *scalaire* associe donc un *nombre réel* (et non pas un vecteur !), ce qu'on appelle un *scalaire*.

Définition 4.1. On dit que deux vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont *orthogonaux* si $0 = \vec{u} \bullet \vec{v}$, ce qu'on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Soit une droite d'équation cartésienne :

$$a\,x + b\,y \;=\; c.$$



Proposition 4.2. *Une droite $D \subset \mathbb{R}^2$ passant par un point $P \in \mathbb{R}^2$ du plan peut être définie comme l'ensemble des points $M \in \mathbb{R}^2$ tels que le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal à un vecteur* non nul $\binom{a}{b}$ *donné :*

$$D \;:=\; \Big\{ M = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon\;\; \overrightarrow{PM} \perp \binom{a}{b} \Big\}.$$

Autrement dit :

$$\overrightarrow{PM} \bullet \binom{a}{b} \;=\; 0.$$

Démonstration. En effet, si on note $P = (x_P, y_P)$, d'où $\overrightarrow{PM} = \binom{x - x_P}{y - y_P}$, un calcul de produit scalaire donne :

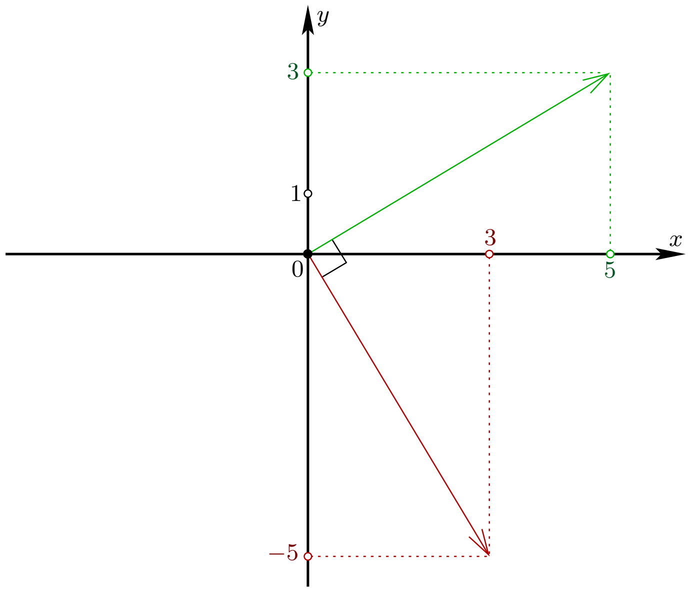
$$0 \;=\; \overrightarrow{PM} \bullet \binom{a}{b} \;=\; \binom{x-x_P}{y-y_P} \bullet \binom{a}{b} \;=\; a\,\big(x - x_P\big) + b\,\big(y - y_P\big),$$

équation que l'on peut réorganiser sous la forme :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y \;&=\; a\,x_P + b\,y_P \\ &=:\; c. \end{aligned}$$

Or puisque a, b, x_P, y_P sont des constantes données, on peut abréger le membre de droite en posant $c := a\,x_P + b\,y_P$, et donc, nous trouvons bien l'équation cartésienne d'une droite.

La réciproque est laissée au lecteur comme exercice de réflexion. $\square$



Par exemple, avec le point $P := (0,1)$ et le vecteur $\binom{a}{b} := \binom{3}{-5}$, l'équation de droite est :

$$3\,x - 5\,y + 5 \;=\; 0.$$

Résumé 4.3. *Étant donné l'équation cartésienne $a\,x + b\,y = c$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ d'une droite dans le plan $\mathbb{R}^2$:*

(1) *le vecteur non nul $\binom{a}{b}$ est orthogonal à D ;*

(2) *le vecteur non nul $\vec{v}_D := \binom{-b}{a}$ est parallèle à D, c'est un vecteur directeur de D.*

Démonstration. En effet, ce vecteur $\binom{-b}{a}$ est trivialement orthogonal au vecteur $\binom{a}{b}$:

$$\binom{-b}{a} \bullet \binom{a}{b} \;=\; (-b)\,a + a\,b \;=\; 0,$$

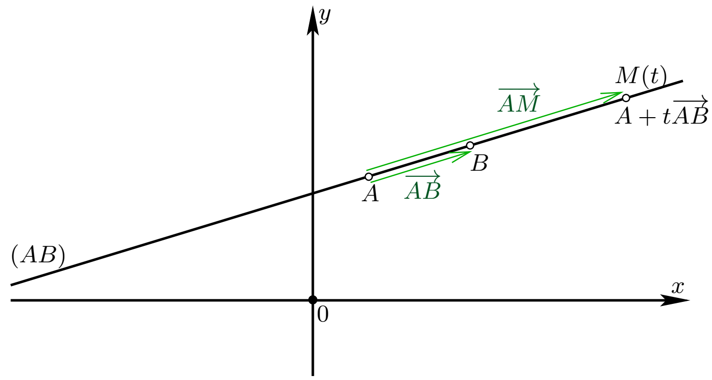
donc comme $\binom{a}{b}$ est par définition orthogonal à la droite, il est clair que $\binom{-b}{a}$ est nécessairement parallèle à la droite. □

Dans l'exemple ci-dessus, le vecteur directeur de la droite est donc $\vec{v}_D = \binom{5}{3}$.

5. Droite passant par deux points distincts

Depuis la classe de math-ernelle, on sait aussi que par deux points distincts $A \neq B$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, il passe toujours une et une seule droite, que l'on note traditionnellement (AB). Notons $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$, avec $x_A \neq x_B$ et/ou $y_A \neq y_B$, puisque $(x_A, y_A) \neq (x_B, y_B)$.

Question 5.1. *Comment exprime-t-on qu'un point quelconque $M = (x,y)$ du plan appartient à la droite (AB) ?*



Pour un point $M = (x, y)$ quelconque du plan, considérons le vecteur :

$$\overrightarrow{AM} \,=\, M - A \,:=\, \binom{x - x_A}{y - y_A}.$$

Il est clair que ce vecteur $\overrightarrow{AM}$ doit être parallèle au vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$ de la droite (AB). Autrement dit, il existe $t \in \mathbb{R}$ — d'ailleurs arbitraire lorsque M parcourt tous les points de la droite (AB) — tel que :

$$\overrightarrow{AM} \,=\, t\,\overrightarrow{AB} \qquad \text{c'est-à-dire :} \qquad \begin{aligned} x - x_A &= t\,\big(x_B - x_A\big), \\ y - y_A &= t\,\big(y_B - y_A\big). \end{aligned}$$

Proposition 5.2. *La représentation paramétrique de* la *droite unique* (AB) *passant par deux points distincts* $A \neq B$ *dans le plan* $\mathbb{R}^2$ *est :*

$$\begin{aligned} x &= x_A + t\,\big(x_B - x_A\big), \\ y &= y_A + t\,\big(y_B - y_A\big), \end{aligned}$$

où $t \in \mathbb{R}$ *est arbitraire.* □

Au « temps zéro », pour $t = 0$, le *point-mobile* :

$$M(t) \,:=\, A + t\,\overrightarrow{AB},$$

est au départ $M(0) = A$. Pour $t = 1$, il est à l'arrivée $B = A + \overrightarrow{AB} = M(1)$.

Pour $0 < t < 1$, le point $M(t)$ est (strictement) entre A et B. Pour $t < 0$, il peine en quarantaine « avant » la frontière A. Et enfin, pour $t > 0$, le point $M(t)$ s'envole au-delà de B vers l'infini !

6. Intersections d'une droite avec les axes $0x$ et $0y$

Comme nous savons que par deux points *distincts* quelconques $A \neq B$, il passe une unique droite, il est intéressant de déterminer les deux points (la plupart du temps distincts, mais pas toujours) d'intersection d'une droite D d'équation $a\,x + b\,y = c$ avec les deux axes de coordonnées $0x$ et $0y$. Et cela est très facile !

Pour être certain que notre droite va vraiment intersecter les deux axes $0x$ et $0y$, nous allons supposer simultanément :

$$a \,\neq\, 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad b \,\neq\, 0.$$

• L'axe $0x$ est l'ensemble des points $\big\{(x,0)\colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}$. Il peut aussi être vu comme la droite d'équation $y = 0$. Donc il suffit d'intersecter deux droites, c'est-à-dire de résoudre le petit système linéaire :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y \;&=\; c, \\ y \;&=\; 0. \end{aligned}$$

Aussitôt, remplaçons $y = 0$ dans la première équation :

$$a\,x + 0 \;=\; c,$$

et comme on suppose que $a \neq 0$, il vient :

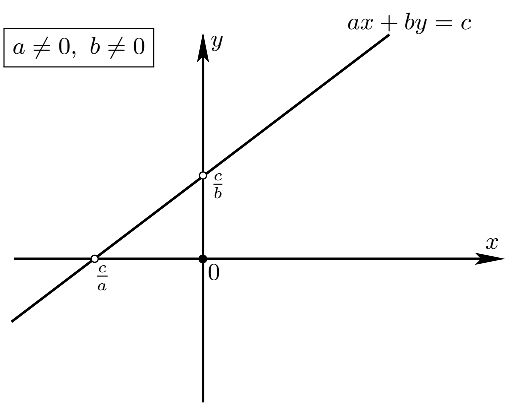
$$x \;=\; \tfrac{c}{a}.$$

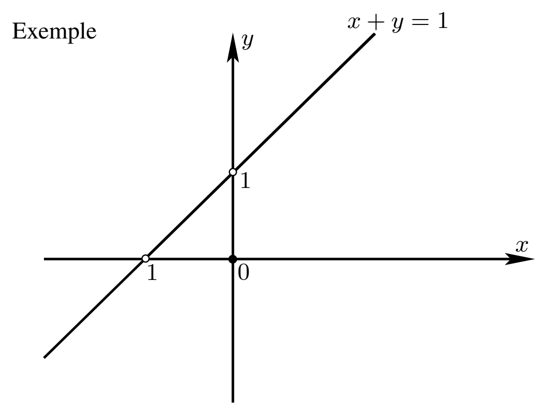
• L'axe $0y$ est l'ensemble des points $\big\{(0,y)\colon\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}$. Il peut aussi être vu comme la droite d'équation $x = 0$. Donc on résout de manière similaire :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y \;&=\; c, \\ x \qquad\;\; &=\; 0, \end{aligned}$$

et comme on suppose que $b \neq 0$, il vient :

$$y \;=\; \tfrac{c}{b}.$$





Proposition 6.1. *Soit une droite $D = \big\{a\,x + b\,y = c\big\}$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Les deux points d'intersection de D avec les deux axes $0x$ et $0y$ sont :*

$$\begin{aligned} D \cap \{y = 0\} \;&=\; \big(\tfrac{c}{a}, 0\big), \\ D \cap \{x = 0\} \;&=\; \big(0, \tfrac{c}{b}\big). \end{aligned}$$

Si de plus $c \neq 0$, ces deux points sont distincts, et D est la droite unique passant par ces deux points. □

Mais quand $c = 0$, ces deux points coïncident, et se réduisent à l'origine $(0,0)$. L'équation est $a\,x + b\,y = 0$, donc la droite passe bien par $(0,0)$. Or puisqu'on ne peut pas définir une droite avec *un seul* point, on stoppe ces considérations de mathématiques élémentaires.

7. Équation graphée pour une droite

En Analyse, on étudie les fonctions $f(x)$ d'une variable réelle, par exemple $f(x) = \sin x$ ou $f(x) = 1+x^2+5\,x^3$. Et souvent, on regarde la *courbe graphée* associée $x \longmapsto \big(x, f(x)\big)$, ou le *graphe* de f :

$$\big\{\big(x,\ f(x)\big)\colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Mais ici, en Algèbre Linéaire, les choses sont assez simples, très simples, en fait.

Partons en effet de l'équation cartésienne d'une droite quelconque :

$$a\,x + b\,y \,=\, c,$$

où les lettres a, b, c désignent des nombres réels fixés, qui peuvent prendre n'importe quelle valeur. On souhaiterait avoir y en fonction de x. Mais attention ! L'équation étant symétrique en x, y, on pourrait tout aussi bien vouloir x en fonction de y !

Cas 1 : On suppose $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Lorsque $b \neq 0$, il est facile de résoudre :

$$b\,y \,=\, -\,a\,x + c,$$

puis :

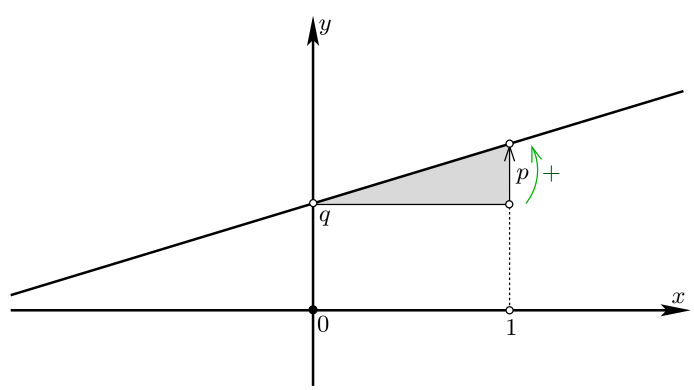
$$\begin{aligned} y \,&=\, -\,\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b} \\ &=:\, p\,x + q, \end{aligned}$$

où on a posé :

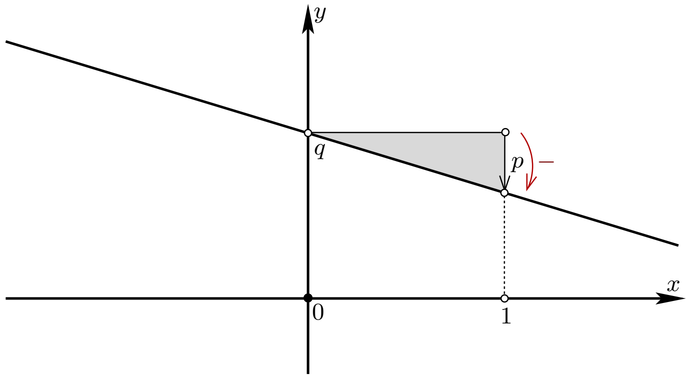
$$p \,:=\, -\,\tfrac{a}{b} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad q \,:=\, \tfrac{c}{b}.$$

On obtient donc bien y en fonction de x, comme simple polynôme de degré 1.

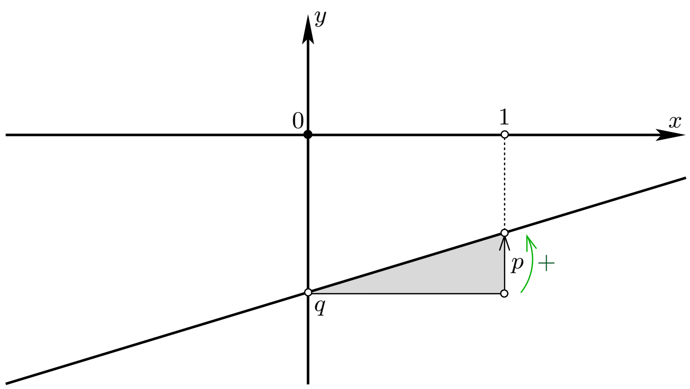
Dessinons une figure lorsque la *pente* $p > 0$ de cette droite est strictement positive — croissance, mon amour ! — :

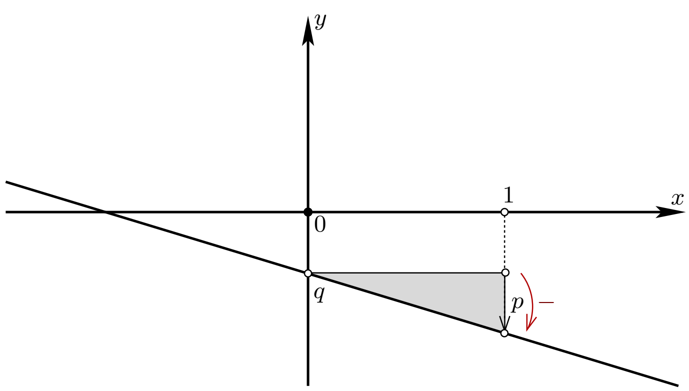


Mais avec les causes que l'on sait, la *dé*croissance [nécessaire !] existe aussi. Lorsque $p < 0$, la droite $y = p\,x + q$, de pente strictement négative < 0, *descend*.



Dans ces deux figures, le « point d'accroche » de la droite, à savoir son intersection $(0, q) = \big(0, \frac{c}{b}\big)$ avec l'axe vertical $0y$, est strictement positif. Voici aussi deux figures lorsque $q < 0$, pour une pente $p > 0$ et pour une pente $p < 0$.



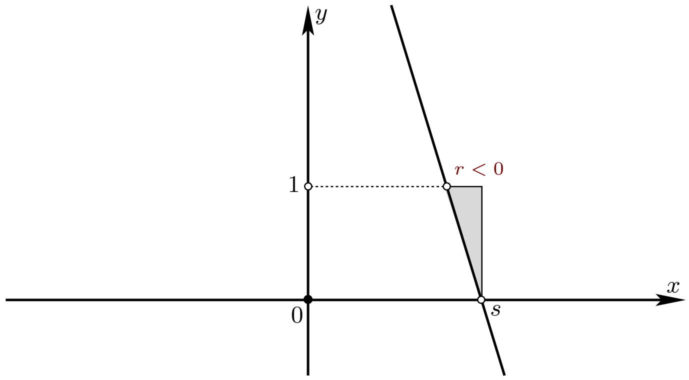


Maintenant, puisqu'on suppose $a \neq 0 \neq b$, on peut *aussi*, de manière *symétrique*, résoudre x en fonction de y :

$$
\begin{aligned}
a\,x + b\,y = c, \qquad\qquad & \text{d'où :} \quad & a\,x &= -\,b\,y + c, \\
& \text{puis :} \quad & x &= -\,\tfrac{b}{a}\,y + \tfrac{c}{a} \\
& & &=: r\,y + s,
\end{aligned}
$$

où on a posé :

$$
r := -\,\tfrac{b}{a} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad s := \tfrac{c}{a}.
$$



Grâce à une rotation de la tête de 90° [gare aux craquements de vertèbres cervicales, les mathématique sont un sport de la tête, dangereux !], suivie d'une symétrie, les figures sont les mêmes que lorsqu'on résout y en fonction de x. Comme on préfère faire des mathématiques la tête bien droite et bien verticale, on privilégie $y = p\,x + q$, et on se contente de discuter si l'on peut résoudre y en fonction de x dans l'équation initiale $a\,x + b\,y = c$.

Mais alors, que se passe-t-il lorsque $b = 0$? Car alors l'équation est :

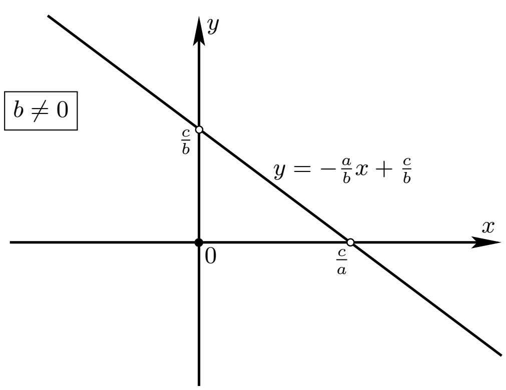
$$a\,x + 0\,y \;=\; c,$$

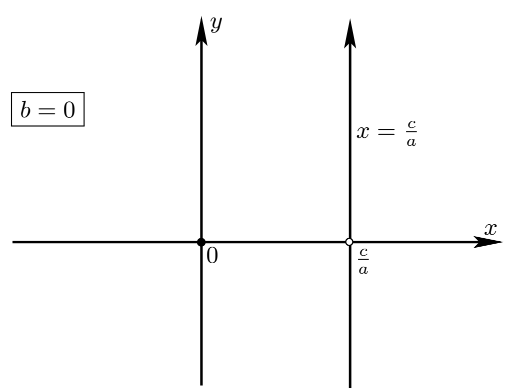
et on ne peut alors *jamais* résoudre y en fonction de x !

Cas 2 : Quand $b = 0$, on résout x, et l'équation de la droite devient :

$$x \;=\; \tfrac{c}{a}.$$

Géométriquement, la droite est verticale.





Proposition 7.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, étant donné une droite $D = \big\{a\,x + b\,y = c\big\}$, avec $(a,b) \neq (0,0)$:*

(1) *lorsque $b \neq 0$, il y a une représentation graphée :*

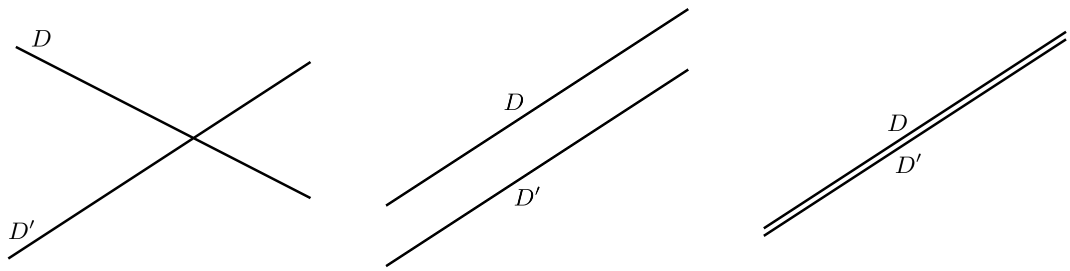
$$y \;=\; -\,\tfrac{a}{b}\,x + \tfrac{c}{b};$$

(2) *lorsque $b = 0$, d'où $a \neq 0$, il n'y pas de représentation graphée $y = f(x)$, mais la droite est verticale, d'équation :*

$$x \;=\; \tfrac{c}{a}. \qquad \square$$

8. Intersection entre deux droites planaires et systèmes linéaires

Maintenant, soient deux droites arbitraires dans le plan, $D \subset \mathbb{R}^2$ et $D' \subset \mathbb{R}^2$. Géométriquement, il est évident qu'elles s'intersectent la plupart du temps : « *Croisez le fer, Mousquetaires !* ».



Mais elles peuvent aussi être parallèles, voire même parallèles et confondues. Tout est là, tout est dit !

De même, en DM et en cours, nous avons réfléchi à toutes les formes possibles de matrices 2×2 après application de la méthode du pivot de Gauss, au moyen des jolis symboles plastiques [1] $\blacksquare$, $*$, $\mathbf{0}$, et nous avons trouvé quatre formes possibles :

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Ici, en partant de deux équations cartésiennes pour D et pour D' :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \end{aligned}$$

de matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right),$$

nous voyons bien qu'il s'agit de résoudre un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues, et que l'industrie du pivot va nous être très utile.

Mais attention ! On a par hypothèse :

$$\begin{aligned} (a,\, b) &\neq (0,0), \\ (a',\, b') &\neq (0,0). \end{aligned}$$

Donc la forme réduite de la matrice *non* complète ne pourra *jamais* aboutir à la matrice nulle :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix} \underset{\sim}{\text{IMPOSSIBLE}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

En définitive, il va rester **3** cas possibles pour la forme réduite de $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right]$:

$$\begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \blacksquare \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Toutefois, contrairement à une idée qui pourrait venir immédiatement à notre esprit, ces trois matrices possibles ne vont *pas* correspondre *exactement* aux trois dispositions relatives possibles de deux droites D et D' dans le plan, telles que dessinées plus haut. D'autant plus

1. Rappelons que $\blacksquare$ désigne un nombre réel modifiable (plastique) *non nul* ; que $*$ désigne un nombre réel modifiable (plastique), éventuellement nul ; et que $\mathbf{0}$ fait la fierté des cancres las.

qu'il s'agit de travailler avec la matrice *complète*, de taille 2×3, et non pas avec la matrice *in*complète de taille 2×2. Une étude précise s'impose, donc.

Commençons par une discussion « express », avant de conduire réellement les bons calculs, dans la prochaine Section **9**.

Cas 1 : Supposons que $\left[\begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix}\right] \neq \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Alors après avoir éventuellement permuté les lignes 1 et 2, la méthode du pivot transforme la matrice complète en :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array} \quad \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right].$$

À ce moment-là, ce sont de belles *étoiles soulignées* $\underline{*}$ qui vont (impitoyablement) décider de notre horoscope mathématique.

En effet, comme nous l'avons déjà signalé dans la Section **3**, il est nécessaire maintenant de discuter si cette étoile soulignée est non nulle, ou si elle vaut 0.

Sous-cas 1.1 : Supposons que $\underline{*} \neq 0$, ce qui se produit le plus souvent. Alors la méthode du pivot réduit encore plus avant la matrice sous la forme :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array} \quad \begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right].$$

Le système transformé équivalent s'écrit donc :

$$\begin{aligned} \blacksquare\, x + *\, y &= *, \\ \blacksquare\, y &= *, \end{aligned}$$

et nous savons qu'il se résout simplement en remontant du bas vers le haut :

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\;y\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\;*\big) = \tfrac{1}{\blacksquare}\,(*) = *, \\ y &= \tfrac{1}{\blacksquare}\,* = *. \end{aligned}$$

Ainsi, le système a une solution *unique*, et donc, les deux droites se croisent (le fer).

Sous-cas 1.2 : Supposons au contraire que $\underline{*} = 0$. Alors le système est :

$$\begin{array}{cc} x & y \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right],$$

et il faut examiner une *autre* étoile soulignée. Car attention ! La deuxième ligne se lit :

$$\mathbf{0}\,x + \mathbf{0}\,y = \underline{*}.$$

Sous-sous-cas 1.2.1 : Une telle équation est *incompatible* toutes les fois que $\underline{*} \neq 0$. Ceci correspond à deux droites parallèles *non confondues*.

Sous-sous-cas 1.2.2 : Lorsque $\underline{*} = 0$, la deuxième ligne peut être supprimée, puisqu'elle est tautologique « $0 = 0$ », et il ne reste plus que la première ligne :

$$\blacksquare\, x + *\, y = *,$$

que l'on résout aisément :

$$x = \tfrac{1}{\blacksquare}\big(* - *\;y\big) = * - *\,y.$$

Donc il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{\big(* + *\;y,\; y\big) : \; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\},$$

où nous rappelons que les étoiles qui apparaissent sont censées être des constantes bien définies. Ce sous-cas aboutit donc à deux droites *confondues*.

Cas 2 : Supposons au contraire que $\left[\begin{smallmatrix} a \\ a' \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$. Or puisque $(a, b) \neq (0, 0)$ et aussi $(a', b') \neq (0, 0)$ par hypothèse, on a alors nécessairement $b \neq 0$ et aussi $b' \neq 0$, donc la méthode du pivot se poursuit et fournit :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * \end{array}\right] \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right] \end{array}.$$

À nouveau, on doit discuter de la valeur de la nouvelle Madame Soleil soulignée $\underline{*}$.

Sous-cas 2.1 : Lorsque $\underline{*} \neq 0$, le système est incompatible, sans solution, c'est-à-dire que les deux droites D et D' sont parallèles et non confondues.

Sous-cas 2.2 : Lorsque $\underline{*} = 0$, le système :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} x & y \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc|c} \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \end{array},$$

se réduit à une seule équation (puisque la deuxième ligne est $0 = 0$), et comme la première ligne

$$\blacksquare\, y = * \qquad \text{se résout en :} \qquad y = \frac{1}{\blacksquare} * = *,$$

il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} = \big\{(x, *) \colon\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

Les deux droites sont donc confondues, et qui plus est coïncident avec une unique droite *horizontale*.

Comme nous venons de le constater, cette discussion qui utilise la méthode du pivot de Gauss permet de tout comprendre, mais elle a un petit défaut : elle distingue plusieurs cas et sous-cas qui ne correspondent pas *exactement* à la distinction des trois configurations géométriques possibles de droites : sécantes ; parallèles ; confondues. En effet, les (sous-)sous-cas 1.2.1 et 2.1, puis 1.2.2 et 2.2, ont abouti à la même situation géométrique.

Question 8.1. *Est-il possible d'inventer des calculs algébriques qui correspondraient exactement aux trois dispositions géométriques possibles de deux droites D et D' dans le plan $\mathbb{R}^2$?*

Ce cours s'intitule « *Algèbre et Géométrie* », et pour les marier au mieux, il faudrait vraiment veiller à respecter la parité !

9. Formules symétriques pour l'intersection entre deux droites

Maintenant, effectuons les vrais calculs. Partons donc du système linéaire :

$$\begin{aligned} a\,x + \ b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c'. \end{aligned}$$

L'idée est d'éliminer à la fois x et y, de manière à *symétriser les raisonnements*.

Pour éliminer x, multiplions l'équation 1 par a' et l'équation 2 par a :

$$\begin{aligned} a'\big(a\,x + \ b\,y &= c\ \big) \\ a\big(a'\,x + b'\,y &= c'\ \big) \end{aligned} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{aligned} \underline{a'a\,x_{\circ}} + a'b\,y &= a'c \\ \underline{aa'\,x_{\circ}} + ab'\,y &= ac' \end{aligned}$$

et soustrayons afin de faire disparaître x :

$$\big(a'b - ab'\big)\,y \,=\, a'c - ac'.$$

Nous voyons apparaître un certain facteur devant y, et pour pouvoir résoudre :

$$y \;\stackrel{?}{:=}\; \frac{a'c - ac'}{a'b - ab'},$$

il serait nécessaire que ce facteur soit non nul, puisqu'il deviendrait le *dénominateur* d'une fraction.

Or comme les lettres a, b, a', b' désignent des nombres réels possibles variés, par exemple 1, -5, 7, -2, il peut parfois se produire que le nombre $a'b - ab'$ soit *nul*, par exemple lorsque $a = 0$ et $a' = 0$, pour toutes valeurs de b, b'. Il faudrait alors discuter la résolubilité suivant que $a'b - ab'$ vaut 0 ou est $\neq 0$. Mais oublions un instant cette (petite) difficulté (divertissante).

Pour tester, essayons d'éliminer plutôt la variable y. De manière analogue, multiplions l'équation 1 par b' et l'équation 2 par b :

$$\begin{aligned} &b'\big(\,a\,x + \;b\,y \;=\; c\;\big) \\ &b\big(\,a'\,x + b'\,y \;=\; c'\;\big)\end{aligned} \qquad \text{ce qui donne :} \qquad \begin{aligned} b'a\,x + \underline{b'b\,y} &= b'c \\ ba'\,x + \underline{bb'\,y} &= bc'\end{aligned}$$

et soustrayons afin de faire disparaître y :

$$\big(b'a - ba'\big)\,x \,=\, b'c - bc'.$$

Aïe ! Ouïe ! Au signe près, c'est-à-dire à la multplication près par -1, nous voyons apparaître *le même facteur*. La même difficulté revient ! Qu'est-ce qu'elle est « collante » !

Historiquement, c'est ainsi qu'ont été découvertes des expressions qui jouent un rôle central dans toutes les mathématiques, anciennes et contemporaines. Et on leur donne un nom.

Définition 9.1. Étant donné deux couples de nombres réels (a, b) et (a', b'), on appelle *déterminant* et on note :

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \;:=\; a\,b' - a'\,b.$$

Observons qu'en permutant les colonnes, le signe change :

$$\begin{vmatrix} b & a \\ b' & a' \end{vmatrix} \;=\; b\,a' - b'\,a \;=\; -\big(a\,b' - a'\,b\big) \;=\; -\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}.$$

Dans ce cours de Licence 1 au Semestre 1, nous aurons l'« interdiction » d'élaborer la théorie générale des déterminants, qui est « hors-programme », mais cette belle théorie sera dévoilée aux étudiantes impatientes dès le Semestre 2 (de la Licence 1).

D'ailleurs, si on examine les membres de droite des deux équations ci-dessus, on réalise qu'ils s'écrivent *aussi* sous forme de déterminants ! Effectivement, nous avons obtenu premièrement :

$$-\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|\, y \;=\; -\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right|,$$

et deuxièmement :

$$\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|\, x \;=\; -\left|\begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right|.$$

En tout cas, dans la circonstance agréable où ce déterminant $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right| \neq 0$ est *non* nul, il est clair que l'on peut résoudre à la fois x et y :

$$x := \frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b}, \qquad\qquad y := \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}.$$

Mais comme nous l'avons appris dans les cours consacrés aux systèmes linéaires, nous ne devons jamais nous contenter de trouver — au petit bonheur la chance ? — une solution à un système d'équations linéaires, *il faut encore vérifier que la solution trouvée est bien une solution*.

Ce que nous pouvons faire derechef ! En effet, vérifions que la première équation est satisfaite :

$$\begin{aligned} c &\overset{?}{=} a\,\frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b} + b\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ &= \frac{-\underline{abc'} + ab'c + \underline{abc'} - a'bc}{ab' - a'b} \\ &= \frac{(ab' - a'b)\,c}{ab' - a'b} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

Puis, vérifions que la seconde équation est aussi satisfaite :

$$\begin{aligned} c' &\overset{?}{=} a'\,\frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b} + b'\,\frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \\ &= \frac{-a'bc' + \underline{a'b'c} + ab'c' - \underline{a'b'c}}{ab' - a'b} \\ &= \frac{(-a'b + ab')\,c'}{ab' - a'b} \qquad\qquad \text{OUI !} \end{aligned}$$

Theorem 9.2. [Formules de Cramér] *Deux droites D et D' d'équations cartésiennes $a\,x + b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$* non parallèles*,* i.e. *telles que :*

$$0 \neq ab' - a'b = \left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|,$$

se coupent toujours en un point unique*, de coordonnées :*

$$\begin{aligned} D \cap D' = \big\{\textsf{point unique}\big\} &= \left(\frac{-bc' + b'c}{ab' - a'b},\; \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b}\right) \\ &= \left(-\,\frac{\left|\begin{smallmatrix} b & c \\ b' & c' \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|},\; \frac{\left|\begin{smallmatrix} a & c \\ a' & c' \end{smallmatrix}\right|}{\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right|}\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Nous avons déjà expliqué pourquoi ces formules sont vraies lorsque $\left|\begin{smallmatrix} a & b \\ a' & b' \end{smallmatrix}\right| \neq 0$. Dans un instant, nous verrons que cette condition *algébrique* équivaut au *fait géométrique* que les droites D et D' ne sont *pas* parallèles, et donc, sont sécantes, justement en ce point unique que nous venons de trouver. □

Question 9.3. *Quelle est la signification géométrique de l'annulation :*

$$0 = ab' - a'b\ \textbf{?}$$

Rappelons que deux vecteurs directeurs *non nuls* des deux droites D et D' sont :

$$\vec{v}_D := \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right) \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{v}_{D'} := \left(\begin{smallmatrix} -b' \\ a' \end{smallmatrix}\right),$$

avec $\vec{v}_D \neq \vec{0}$ et $\vec{v}_{D'} \neq \vec{0}$.

Affirmation 9.4. *Les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D et D' sont parallèles.*

(ii) *Il existe un scalaire non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{v}_D = \tau\, \vec{v}_{D'}$ $\big[$d'où aussi $\frac{1}{\tau}\, \vec{v}_D = \vec{v}_{D'}\big]$.*

(iii) $a\, b' - a'\, b = 0$.

En fait, cette affirmation provient directement d'une vérité plus générale que nous énonçons sous la forme d'une

Proposition 9.5. *Soient deux vecteurs* non nuls $\vec{u} = \binom{u_1}{u_2}$ *et* $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$*, c'est-à-dire avec* $(u_1, u_2) \neq (0,0)$ *et* $(v_1, v_2) \neq (0,0)$*. Alors les trois conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* linéairement dépendants*, à savoir par définition, il existe un couple de scalaires $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ non tous les deux nuls tels que :*

$$\vec{0} \,=\, \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v}.$$

(ii) *Il existe un scalaire non nul $\tau \in \mathbb{R}^*$ tel que $\vec{u} = \tau\, \vec{v}$ $\big[$d'où aussi $\frac{1}{\tau}\, \vec{u} = \vec{v}\big]$.*

(iii) *On a* $0 = \left|\begin{smallmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{smallmatrix}\right| = u_1 v_2 - u_2 v_1$.

Le diagramme d'implications que nous allons établir est le suivant :

$$\textbf{(i)} \ \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\ \textbf{(ii)} \ \overset{\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\ \textbf{(iii)}.$$

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** : Supposons donc que $\lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v} = \vec{0}$ pour certains $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$. Nous affirmons que $\lambda \neq 0$. Sinon, si on avait $\lambda = 0$, d'où $\vec{0} + \mu\, \vec{v} = \vec{0}$, on déduirait que $\vec{v} = \vec{0}$ puisque $\mu \neq 0$ par hypothèse, ce qui est contraire à l'une des hypothèses de la proposition.

On se convainc de la même manière que $\mu \neq 0$. Donc on peut ré-écrire l'identité :

$$\vec{0} \,=\, \lambda\, \vec{u} + \mu\, \vec{v} \qquad \text{sous la forme :} \qquad \vec{u} \,=\, -\,\tfrac{\mu}{\lambda}\, \vec{v} \,=:\, \tau\, \vec{v} \qquad \big(\text{poser } \tau := -\,\tfrac{\mu}{\lambda} \in \mathbb{R}^*\big).$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(i)** : C'est évident, il suffit de poser $\lambda := 1$ et $\mu := -\tau$.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** : Cela fonctionne par un calcul direct :

$$\begin{vmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \tau\, v_1 & v_1 \\ \tau\, v_2 & v_2 \end{vmatrix} \,=\, \tau\, v_1\, v_2 - \tau\, v_2\, v_1 \,=\, 0.$$

(iii) $\Longrightarrow$ **(ii)** : Partons de $0 = u_1 v_2 - u_2 v_1$. Par hypothèse, $\binom{u_1}{u_2} \neq \binom{0}{0}$.

Supposons tout d'abord que $u_1 \neq 0$, et discutons le cas $u_1 = 0$ ensuite. Alors $v_1 \neq 0$, car si on avait $v_1 = 0$, ceci entraînerait $0 = u_1 v_2 - 0$, d'où $v_2 = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse $(v_1, v_2) \neq (0,0)$.

On peut donc résoudre :

$$v_2 \,=\, \frac{u_2}{u_1}\, v_1,$$

et déduire :

$$\vec{v} \,=\, \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \frac{u_2}{u_1}\, v_1 \end{pmatrix} \,=\, \tfrac{v_1}{u_1} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \,=\, \tfrac{v_1}{u_1}\, \vec{u} \,=:\, \tfrac{1}{\tau}\, \vec{u},$$

en posant $\tau := \frac{u_1}{v_1}$, et c'est ce qu'on voulait.

Lorsque $u_1 = 0$, on a $u_2 \neq 0$ par hypothèse. Donc on peut résoudre $0 = 0 - u_2 v_1$, ce qui donne $v_1 = 0$, d'où $v_2 \neq 0$, et déduire :

$$\vec{v} \,=\, \begin{pmatrix} 0 \\ v_2 \end{pmatrix} \,=\, \tfrac{v_2}{u_2} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \end{pmatrix} \,=\, \tfrac{v_2}{u_2}\, \vec{u} \,=:\, \tfrac{1}{\tau}\, \vec{u}. \qquad \square$$

Observons que nos deux droites $D//D'$ sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs *orthogonaux* $\binom{a}{b}$ et $\binom{a'}{b'}$ sont parallèles, si et seulement si $0 = \left|\begin{smallmatrix} a & a' \\ b & b' \end{smallmatrix}\right|$. Mais aussi, en termes de vecteurs directeurs $\binom{-b}{a}$ et $\binom{-b'}{a'}$, si et seulement si :

$$0 = \begin{vmatrix} -b & -b' \\ a & a' \end{vmatrix} = -\,b\,a' - a\,(-b') = a\,b' - a'\,b.$$

Au signe près, on retrouve toujours la même expression ! *Seccotine, tu me colles !*

Résumé 9.6. *Dans le plan $\mathbb{R}^2 \ni (x,y)$, deux droites D et D' d'équations $a\,x + b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$ avec $(a,b) \neq (0,0)$ et $(a',b') \neq (0,0)$ sont* parallèles *si et seulement si :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'\,b. \qquad \square$$

Ensuite, sous cette hypothèse que nos deux droites sont parallèles, nous devons revenir au système linéaire que nous avons abandonné le long de notre long chemin de Saint-Jacques de Compostelle. Souvenons-nous en effet que nous avions trouvé les deux équations :

$$\begin{aligned} \big(a'b - ab'\big)\,y &= a'c - ac', \\ \big(b'a - ba'\big)\,x &= b'c - bc', \end{aligned}$$

dont les deux membres de gauche sont maintenant égaux à zéro :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} a'c - ac', \\ 0 &\overset{?}{=} b'c - bc', \end{aligned}$$

mais il n'y a aucune raison que les membres de droite soit aussi égaux à zéro, puisque leurs valeurs dépendent des valeurs des constantes c et c'.

Autrement dit, nous avons la certitude que notre système linéaire de 2 équations à 2 inconnues est *incompatible*, *i.e.* n'a *aucune* solution, dès que l'un de ces deux membres de droites est *non nul*.

Théorème 9.7. *Soient deux droites D et D' qui sont* parallèles*, c'est-à-dire dont les deux équations cartésiennes $a\,x + b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$ satisfont :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = a\,b' - a'\,b.$$

(1) *$D \cap D' = \emptyset$ sont parallèles non confondues et d'intersection vide lorsque :*

$$0 \neq \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \textit{ou} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} \neq 0.$$

(2) *$D = D'$ sont confondues (coïncident) lorsque :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \qquad \textit{et} \qquad \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix} = 0.$$

Démonstration. Il reste seulement à comprendre ce qu'il se passe lorsque ces deux membres de droite sont nuls, c'est-à-dire lorsqu'on a simultanément *trois* annulations de déterminants :

$$0 = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & c \\ b' & c' \end{vmatrix}.$$

Supposons pour commencer que $a \neq 0$, et traitons le cas $a = 0$ ensuite. Alors nous pouvons résoudre x depuis la première équation $a\,x + b\,y = c$ de D pour obtenir :

$$x := \tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y,$$

puis remplacer dans la seconde equation $0 = a'\,x + b'\,y - c'$ de D', ce qui donne :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} a'\left(\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y\right) + b'\,y - c' \\ &= \frac{a'c - ac'}{a} + \frac{-a'b + ab'}{a}\,y, \end{aligned}$$

et comme nous avons supposé que $a'c - ac' = 0$ et que $-a'b + ab' = 0$, cette deuxième équation est satisfaite automatiquement !

Au final, toujours dans le cas $a \neq 0$, notre système linéaire ne comporte qu'une seule équation significative, la première, donc sa solution générale est infinie :

$$\mathsf{Sol} = \left\{\left(\tfrac{c}{a} - \tfrac{b}{a}\,y,\ y\right) :\ y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\right\}.$$

Le cas $a = 0$ va aboutir à la même conclusion, avec quelques simplications calculatoires. En effet, on a alors $b \neq 0$ puisque $(a, b) \neq (0, 0)$. Ensuite, la relation :

$$0 = a'b - ab' = a'b - a'0 = a'b,$$

donne $a' = 0$ puisque $b \neq 0$. On résout y depuis l'équation $0\,x + b\,y - c = 0$ de D :

$$y := \tfrac{c}{b},$$

puis on remplace dans l'équation de D' :

$$\begin{aligned} 0 &\overset{?}{=} 0\,x + b'\left(\tfrac{c}{b}\right) - c' \\ &= \frac{b'c - bc'}{b}, \end{aligned}$$

et comme nous avons supposé que $bc' - b'c = 0$, cette deuxième équation est satisfaite automatiquement !

Au final, aussi dans le cas $a = 0$, notre système linéaire ne comporte qu'une seule équation significative, donc sa solution générale est infinie :

$$\mathsf{Sol} = \left\{\left(x,\ \tfrac{c}{b}\right) :\ x \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\right\}.$$

Évidemment, $D = D'$ coïncident. $\square$

10. Caractérisation de la coïncidence $D = D'$ de deux droites dans $\mathbb{R}^2$

Maintenant, nous pouvons donner une caractérisation très simple du fait que deux droites $D = D'$ coïncident.

Théorème 10.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux droites D et D' d'équations cartésiennes $a\,x + b\,y = c$ et $a'\,x + b'\,y = c'$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$. Alors on a équivalence entre :*

(i) *il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ non nul tel que :*

$$a' = \lambda\,a, \qquad b' = \lambda\,b, \qquad c' = \lambda\,c\,;$$

(ii) $D = D'$.

Démonstration. **(i)** $\Longrightarrow$ **(ii)** est facile, car on peut diviser par λ, *i.e.* multiplier par $\frac{1}{\lambda}$:

$$\begin{aligned} D' &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ a'x+b'y-c'=0\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \lambda\,\big(ax+by-c\big)=0\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ \tfrac{1}{\lambda}\,\lambda\,\big(ax+by-c\big)=\tfrac{1}{\lambda}\,0\big\} \\ &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon\ ax+by-c=0\big\} \\ &= D. \end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ **(i) :** Réciproquement, supposons que $D=D'$. Par hypothèse, $a\neq 0$ ou $b\neq 0$. Supposons $a\neq 0$ (le cas $b\neq 0$ étant similaire et symétrique), et écrivons l'équation de D en la divisant par a :

$$x\;=\;\tfrac{c}{a}-\tfrac{b}{a}\,y.$$

À toute valeur de $y\in\mathbb{R}$ quelconque, correspond donc une unique valeur de x, comme fonction de y, qui est une variable libre dans cette équation.

Comme $D\subset D'$ par hypothèse, l'équation de D' doit être satisfaite pour tout couple $\big(\frac{c}{a}-\frac{b}{a}y,\,y\big)$, quelle que soit la valeur de $y\in\mathbb{R}$:

$$a'\,\big(\tfrac{c}{a}-\tfrac{b}{a}\,y\big)+b'\,y-c'\;=\;0 \qquad (\forall\,y\in\mathbb{R}),$$

c'est-à-dire :

$$\frac{-a'\,b+a\,b'}{a}\,y+\frac{a'\,c-a\,c'}{a}\;=\;0 \qquad (\forall\,y\in\mathbb{R}).$$

En particulier, pour $y=0$:

(10.2) $$a'\,c-a\,c'\;=\;0.$$

Donc ensuite :

$$\big(-a'\,b+a\,b'\big)\,y+\underline{a'\,c-a\,c'}_{\circ}\;=\;0 \qquad (\forall\,y\in\mathbb{R}),$$

et pour $y=1$, on obtient :

(10.3) $$-\,a'\,b+a\,b'\;=\;0.$$

Observation 10.4. *Alors $a'\neq 0$ aussi.*

Preuve. Sinon, si $a'=0$, l'équation (10.3) devient $a\,b'=0$, on déduirait que $b'=0$ (car on a supposé $a\neq 0$), ce qui contredirait le fait que pour l'équation de la droite D' ait un sens, il faut que $(a',b')\neq(0,0)$. □

Donc $a'\neq 0$. Puisque $a\neq 0$, on peut résoudre ces deux équations en :

$$c'\;=\;\tfrac{a'}{a}\,c, \qquad\qquad b'\;=\;\tfrac{a'}{a}\,b,$$

et enfin :

$$a'\;=\;\tfrac{a'}{a}\,a, \qquad\qquad b'\;=\;\tfrac{a'}{a}\,b, \qquad\qquad c'\;=\;\tfrac{a'}{a}\,c,$$

donc le nombre réel $\lambda:=\frac{a'}{a}\in\mathbb{R}^*$ non nul réalise $a'=\lambda\,a$, $b'=\lambda\,b$, $c'=\lambda\,c$.

Le cas $b\neq 0$ se traite de la même manière, il est symétrique/équivalent, modulo le changement de noms de variables $x\longleftrightarrow y$, et on trouve $\lambda=\frac{b'}{b}\in\mathbb{R}^*$. □

11. Intersection entre une droite cartésienne et une droite paramétrique

Ensuite, supposons que la première droite D est donnée par une équation cartésienne :

$$a\,x + b\,y - c \,=\, 0,$$

avec $(a,b) \neq (0,0)$, et que la deuxième droite D' est représentée sous forme paramétrique :

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ y &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned}$$

avec $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2} \neq \binom{0}{0}$.

Question 11.1. *Comment déterminer l'intersection* $D \cap D'$ *?*

Cela est assez simple : il suffit d'insérer la forme paramétrique de D' dans l'équation cartésienne de D :

$$a\,\big(p_1 + t\,v_1\big) + b\,\big(p_2 + t\,v_2\big) - c \,=\, 0,$$

puis de réorganiser :

$$\big(a\,v_1 + b\,v_2\big)\,t \,=\, -\,a\,p_1 - b\,p_2 + c. \tag{11.2}$$

Pour résoudre t, il est alors nécessaire de discuter de la valeur du facteur qui apparaît à gauche. Son interprétation géométrique est la suivante.

Lemme 11.3. $D /\!/ D'$ *sont parallèles si et seulement si* $0 = a\,v_1 + b\,v_2$.

Démonstration. En effet, un vecteur directeur de D est $\vec{v}_D = \binom{-b}{a}$, tandis qu'un vecteur directeur de D' est $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$. Évidemment, $D /\!/ D'$ si et seulement si $\vec{v}_D /\!/ \vec{v}$. Mais alors la Proposition 9.5 nous informe que $\vec{v}_D /\!/ \vec{v}$ si et seulement si :

$$0 \,=\, \begin{vmatrix} v_1 & -b \\ v_2 & a \end{vmatrix} \,=\, v_1\,a - v_2(-b).$$

□

Ainsi, lorsque D et D' ne sont *pas* parallèles, à savoir lorsque $a\,v_1 + b\,v_2 \neq 0$, on peut résoudre de manière unique :

$$t \,:=\, \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2},$$

et alors le point (unique) d'intersection entre D et D' a pour première coordonnée :

$$\begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ &= p_1 + \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2}\,v_1 \\ &= \frac{\underline{\underline{p_1\,a\,v_1}} + p_1\,b\,v_2 - \underline{a\,p_1\,v_1} - b\,p_2\,v_1 + c\,v_1}{a\,v_1 + b\,v_2} \\ &= \frac{p_1\,b\,v_2 - b\,p_2\,v_1 + c\,v_1}{a\,v_1 + b\,v_2}, \end{aligned}$$

et pour deuxième coordonnée :

$$\begin{aligned} y &= p_2 + t\,v_2, \\ &= p_2 + \frac{-a\,p_1 - b\,p_2 + c}{a\,v_1 + b\,v_2}\,v_2 \\ &= \frac{p_2\,a\,v_1 + \underline{p_2\,b\,v_2} - a\,p_1\,v_2 - \underline{b\,p_2\,v_2} + c\,v_2}{a\,v_1 + b\,v_2} \\ &= \frac{p_2\,a\,v_1 - a\,p_1\,v_2 + c\,v_2}{a\,v_1 + b\,v_2}. \end{aligned}$$

Mais quand $D // D'$ *sont* parallèles, à savoir quand $0 = a\,v_1 + b\,v_2$, on a :

• si $-a\,p_1 - b\,p_2 + c \neq 0$, il n'y pas de solution en t, les droites sont distinctes (non confondues) ;

• si $-a\,p_1 - b\,p_2 + c = 0$, il y a une infinité de solutions en t, les deux droites $D = D'$ coïncident (sont confondues).

12. Intersection entre deux droites paramétriques

Supposons maintenant que nos deux droites sont données sous forme paramétrique :

$$D\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1 + t\,v_1, \\ y &= p_2 + t\,v_2, \end{aligned} \qquad\qquad D'\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1' + t'\,v_1', \\ y &= p_2' + t'\,v_2'. \end{aligned}$$

Puisqu'elles ont pour vecteurs directeurs $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ et $\vec{v}' = \binom{v_1'}{v_2'}$, on sait qu'elles sont parallèles si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix} = v_1\,v_2' - v_2\,v_1' = 0,$$

et nous nous attendons à retrouver cette expression caractéristique dans les calculs qui suivront.

Un point de coordonnées (x, y) appartient à l'intersection (éventuellement vide) $D \cap D'$ si :

$$\begin{aligned} p_1 + t\,v_1 &= p_1' + t'\,v_1', \\ p_2 + t\,v_2 &= p_2' + t'\,v_2', \end{aligned}$$

c'est-à-dire si et seulement si il existe un premier « temps t sur la droite D » et un deuxième « temps t' sur la droite D' » tels que les points mobiles correspondants se *rencontrent*.

Autrement dit, nous devons résoudre un système linéaire à deux inconnues t et t', que nous réorganisons comme suit, en rassemblant les inconnues à gauche :

$$\begin{aligned} v_1\,t - v_1'\,t' &= p_1' - p_1, \\ v_2\,t - v_2'\,t' &= p_2' - p_2. \end{aligned}$$

Pour résoudre de manière symétrique un tel système, commençons par éliminer la variable t comme suit :

$$\begin{aligned} v_2\Big(v_1\,t - v_1'\,t' &= p_1' - p_1\Big), \\ v_1\Big(v_2\,t - v_2'\,t' &= p_2' - p_2\Big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \underline{v_2\,v_1\,t} - v_2\,v_1'\,t' &= p_1'\,v_2 - p_1\,v_2, \\ \underline{v_1\,v_2\,t} - v_1\,v_2'\,t' &= p_2'\,v_1 - p_2\,v_1, \end{aligned}$$

ce qui donne par soustraction :

$$\big(-\,v_2\,v_1'+v_1\,v_2'\big)\,t'\;=\;p_1'\,v_2-p_2'\,v_1-p_1\,v_2+p_2\,v_1.$$

Comme promis, nous retrouvons le déterminant $\left|\begin{smallmatrix}v_1 & v_1'\\ v_2 & v_2'\end{smallmatrix}\right|$!

Nous pouvons éliminer de manière similaire la variable t' :

$$\begin{aligned} v_2'\Big(v_1\,t-v_1'\,t'\;&=\;p_1'-p_1\Big), & \qquad v_2'\,v_1\,t-\underline{v_2'\,v_1'\,t'}\;&=\;p_1'\,v_2'-p_1\,v_2',\\ v_1'\Big(v_2\,t-v_2'\,t'\;&=\;p_2'-p_2\Big), & \qquad v_1'\,v_2\,t-\underline{v_1'\,v_2'\,t'}\;&=\;p_2'\,v_1'-p_2\,v_1', \end{aligned}$$

ce qui donne par soustraction :

$$\big(v_2'\,v_1-v_1'\,v_2\big)\,t\;=\;p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1'.$$

Cas 1 : Lorsque $0\neq\left|\begin{smallmatrix}v_1 & v_1'\\ v_2 & v_2'\end{smallmatrix}\right|$, il y a une solution (t,t') unique :

$$t\;:=\;\frac{p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1'}{v_1v_2'-v_2v_1'},\qquad\qquad t'\;:=\;\frac{p_1'\,v_2-p_2'\,v_1-p_1\,v_2+p_2\,v_1}{v_1v_2'-v_2v_1'}.$$

Dans ce Cas 1, $D\cap D'$ sont sécantes en le point $P=(x_P,y_P)$ dont la première coordonnée vaut :

$$\begin{aligned} x_P\;&:=p_1+\frac{p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1'}{v_1v_2'-v_2v_1'}\,v_1,\\ &=\frac{\underline{p_1v_1v_2'}-p_1v_2v_1'+p_1'v_2'v_1-p_2'v_1'v_1-\underline{p_1v_2'v_1}+p_2v_1'v_1}{v_1v_2'-v_2v_1'},\\ &=\frac{-p_1v_2v_1'+p_1'v_2'v_1-p_2'v_1'v_1+p_2v_1'v_1}{v_1v_2'-v_2v_1'}, \end{aligned}$$

et dont la deuxième cooordonnée vaut :

$$\begin{aligned} y_P\;&:=p_2+\frac{p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1'}{v_1v_2'-v_2v_1'}\,v_2\\ &=\frac{p_2v_1v_2'-\underline{p_2v_2v_1'}+p_1'v_2'v_2-p_2'v_1'v_2-p_1v_2'v_2+\underline{p_2v_1'v_2}}{v_1v_2'-v_2v_1'}\\ &=\frac{p_2v_1v_2'+p_1'v_2'v_2-p_2'v_1'v_2-p_1v_2'v_2}{v_1v_2'-v_2v_1'}. \end{aligned}$$

Cas 2 : Lorsque $0=\left|\begin{smallmatrix}v_1 & v_1'\\ v_2 & v_2'\end{smallmatrix}\right|$, il n'y a aucune solution, *i.e.* le système est incompatible, dès que :

$$0\;\neq\;p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1'\qquad\text{ou}\qquad p_1'\,v_2-p_2'\,v_1-p_1\,v_2+p_2\,v_1\;\neq\;0.$$

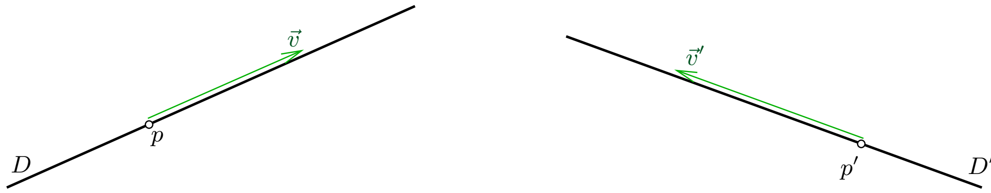
Cas 3 : Lorsque $0=\left|\begin{smallmatrix}v_1 & v_1'\\ v_2 & v_2'\end{smallmatrix}\right|$, il y a une infinité de solutions si les *deux* équations suivantes sont satisfaites :

$$0\;=\;p_1'\,v_2'-p_2'\,v_1'-p_1\,v_2'+p_2\,v_1',\tag{12.1}$$

$$0\;=\;p_1'\,v_2-p_2'\,v_1-p_1\,v_2+p_2\,v_1.\tag{12.2}$$

Question 12.3. *Mais quelle est donc la signification géométrique de ces deux identités compliquées ?*

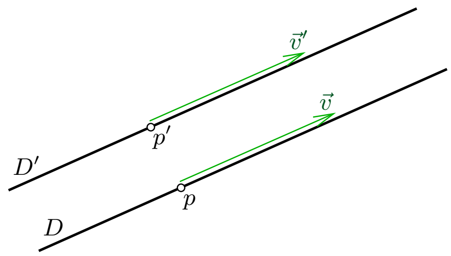
Rappelons que $p=(p_1,p_2)\in D$ et que $p'=(p_1',p_2')\in D'$.



L'observation suivante est claire sur le plan géométrique.

Lemme 12.4. *Étant donné une droite D définie par p, $\vec{v}$, et une autre droite* parallèle D' *définie par p', $\vec{v}'$, on a :*

$$D = D' \qquad\Longleftrightarrow\qquad p \in D' \qquad\Longleftrightarrow\qquad p' \in D. \qquad \square$$



Donc on doit tester si :

$$\overset{?}{\exists}\, t' \quad \begin{aligned} p_1 &= p_1' + t'\, v_1', \\ p_2 &= p_2' + t'\, v_2', \end{aligned} \qquad \text{ou si} \qquad \overset{?}{\exists}\, t \quad \begin{aligned} p_1' &= p_1 + t\, v_1, \\ p_2' &= p_2 + t\, v_2. \end{aligned}$$

Or ceci revient à considérer deux systèmes d'équations linéaires chacun à une seule inconnue, par exemple le premier système d'inconnue unique t', que l'on résout :

$$\begin{aligned} v_2' \Big(p_1 &= p_1' + t'\, v_1'\Big), \\ v_1' \Big(p_2 &= p_2' + t'\, v_2'\Big), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} p_1\, v_2' &= p_1'\, v_2' + \underline{t'\, v_1'\, v_2'}, \\ p_2\, v_1' &= p_2'\, v_1' + \underline{t'\, v_2'\, v_1'}, \end{aligned}$$

et une soustraction montre que la relation suivante est nécessaire :

$$p_1\, v_2' - p_2\, v_1' = p_1'\, v_2' - p_2'\, v_1'.$$

On reconnaît l'équation (12.1) !

De même, en partant de l'existence de t satisfaisant le deuxième système, on aboutit (exercice) à l'équation (12.2).

Théorème 12.5. *Soient deux droites $D = p + \mathbb{R}\,\vec{v}$ et $D' = p' + \mathbb{R}\,\vec{v}'$ dans le plan $\mathbb{R}^2$, données sous forme paramétrique :*

$$D\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1 + t\, v_1, \\ y &= p_2 + t\, v_2, \end{aligned} \qquad\qquad D'\colon \quad \begin{aligned} x &= p_1' + t'\, v_1', \\ y &= p_2' + t'\, v_2', \end{aligned}$$

avec deux points $p = (p_1, p_2)$ et $p' = (p_1', p_2')$ et deux vecteurs directeurs non nuls $\vec{v} = \left(\begin{smallmatrix} v_1 \\ v_2 \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ et $\vec{v}' = \left(\begin{smallmatrix} v_1' \\ v_2' \end{smallmatrix}\right) \neq \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$. Alors :

(1) *D et D' sont sécantes si et seulement si $0 \neq \left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$, et dans ce cas, leur point d'intersection unique a pour coordonnées :*

$$D \cap D' = \left\{ \left(\frac{-p_1 v_2 v_1' + p_1' v_2' v_1 - p_2' v_1' v_1 + p_2 v_1' v_1}{v_1 v_2' - v_2 v_1'},\ \frac{p_2 v_1 v_2' + p_1' v_2' v_2 - p_2' v_1' v_2 - p_1 v_2' v_2}{v_1 v_2' - v_2 v_1'} \right) \right\}.$$

(2) *D et D' sont parallèles si et seulement si* $0 = \left|\begin{smallmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{smallmatrix}\right|$, *et dans ce cas :*

$(\mathbf{2_1})$ *si on a :*

$$p_1'\,v_2' - p_2'\,v_1' - p_1\,v_2' + p_2\,v_1' \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad p_1'\,v_2 - p_2'\,v_1 - p_1\,v_2 + p_2\,v_1 \neq 0,$$

alors $D // D'$ sont parallèles et non confondues $D \neq D'$;

$(\mathbf{2_2})$ *si on a :*

$$p_1'\,v_2' - p_2'\,v_1' - p_1\,v_2' + p_2\,v_1' = 0 \qquad \text{et} \qquad p_1'\,v_2 - p_2'\,v_1 - p_1\,v_2 + p_2\,v_1 = 0,$$

alors $D = D'$ sont parallèles confondues. □

13. Intersection de trois droites $D \cap D' \cap D''$ dans le plan $\mathbb{R}^2$

Avant de passer au prochain chapitre consacré aux plans et aux droites contenus dans l'espace à trois dimensions, précisons le Théorème 13.1 en ajoutant une condition équivalente qui nous sera utile pour la suite.

L'idée nouvelle est de considérer les deux vecteurs de l'espace à trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

Théorème 13.1. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient deux droites D et D' d'équations cartésiennes :*

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \end{aligned}$$

avec $(a,b) \neq (0,0) \neq (a',b')$. Alors on a équivalence entre :

(i) $D = D'$ *;*

(ii) *il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$ non nul tel que :*

$$a' = \lambda\,a, \qquad\qquad b' = \lambda\,b, \qquad\qquad c' = \lambda\,c;$$

(iii) *les trois déterminants 2×2 suivants s'annulent :*

$$0 = \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}.$$

Démonstration. Puisque l'équivalence **(i)** $\Longleftrightarrow$ **(ii)** a déjà été vue, il reste à montrer deux implications.

(ii) $\Longrightarrow$ **(iii)** Le premier déterminant s'annule alors aisément :

$$\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & \lambda\,a \\ b & \lambda\,b \end{vmatrix} = a\,\lambda\,b - b\,\lambda\,a = 0,$$

et il en va de même pour les deux autres — *peanuts !*

(iii) $\Longrightarrow$ **(ii)** Comme $(a,b) \neq (0,0)$, on peut supposer, quitte à échanger les variables $x \longleftrightarrow y$, que $a \neq 0$. Alors l'hypothèse que les déterminants 1 et 2 s'annulent :

$$a\,b' - b\,a' = 0 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad a\,c' - c\,a' = 0,$$

montre d'abord que $a' \neq 0$ aussi — sinon, si on avait $a' = 0$, on déduirait $0 = a\,b' - 0$, ce qui forcerait $b' = 0$ aussi car $a \neq 0$, contrairement à l'hypothèse $(a', b') \neq (0,0)$.

Ensuite, ces deux annulations nous permettent de résoudre simultanément :

$$b' = \frac{a'}{a}\, b \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad c' = \frac{a'}{a}\, c,$$

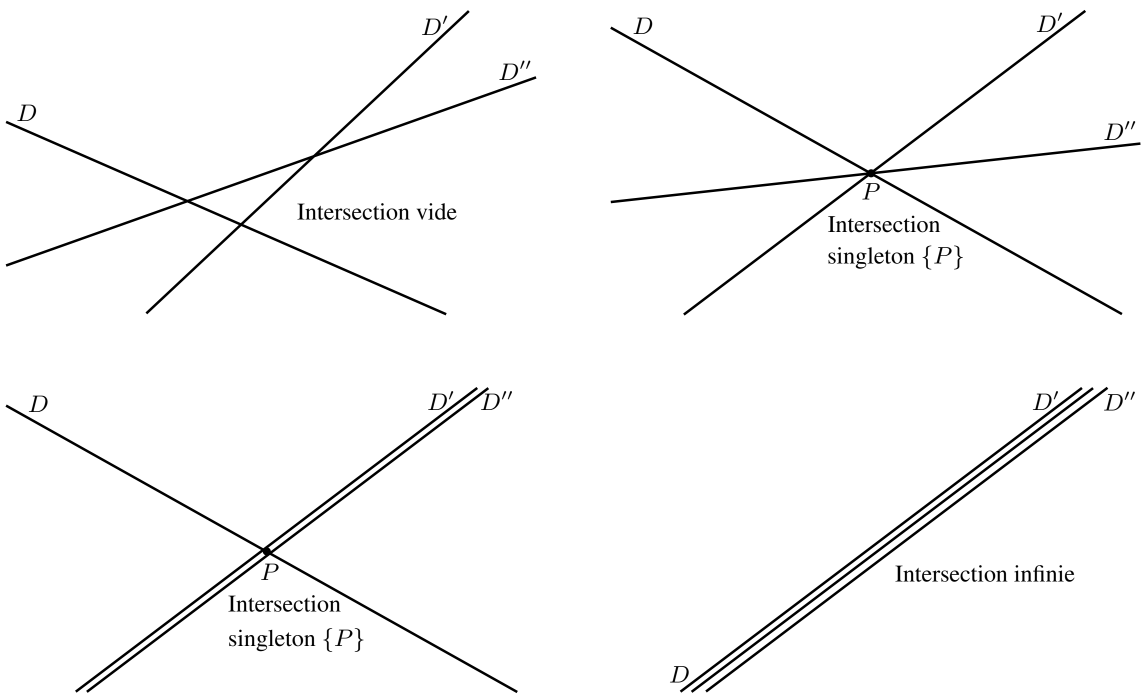
donc avec le facteur $\lambda := \frac{a'}{a} \in \mathbb{R}^*$ qui est non nul, nous concluons bien que :

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a'}{a}\, a \\ \frac{a'}{a}\, b \\ \frac{a'}{a}\, c \end{pmatrix} = \frac{a'}{a} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Maintenant, que se passe-t-il quand on prend *trois* droites D, D', D'', dans le plan, d'équations cartésiennes respectives :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \\ a''\,x + b''\,y &= c'' \;\textbf{?} \end{aligned}$$

Géométriquement, *quatre* situations peuvent avoir lieu.



Grâce à la notion d'*indépendance linéaire* entre vecteurs dont toute la beauté conceptuelle sera dévoilée dans les prochains chapitres — suspense ! —, il est possible de caractériser ces quatre situations *géométriques* d'une manière purement *algébrique*.

Théorème 13.2. *Dans le plan $\mathbb{R}^2$, soient trois droites D, D', D'', d'équations cartésiennes :*

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c, \\ a'\,x + b'\,y &= c', \\ a''\,x + b''\,y &= c'', \end{aligned}$$

soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ associés :

$$\vec{v} := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}\,' := \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}, \qquad \vec{v}\,'' := \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix},$$

et soit le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qu'ils engendrent :

$$\mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big).$$

(1) *Les droites $D \cap D' \cap D'' = \emptyset$ sont d'intersection vide si et seulement si :*

$$3 \,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big).$$

(2) *Les droites $D \cap D' \cap D'' = \{P\}$ sont d'intersection un point unique sans aucune coïncidence entre paires de droites si et seulement si :*

$$\begin{aligned} 2 &\,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big), \\ 2 &\,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,'\big) \,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,''\big) \,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \end{aligned}$$

(3) *Les droites $D \cap D' \cap D'' = \{P\}$ sont d'intersection un point unique avec une seule coïncidence entre paires de droites, par exemple $D = D'$, si et seulement si :*

$$\begin{aligned} 2 &\,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big), \\ 1 &\,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,'\big), \\ 2 &\,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,''\big) \,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \end{aligned}$$

(4) *Les droites $D = D' = D''$ sont confondues si et seulement si :*

$$1 \,=\, \dim \mathsf{Vect}\big(\vec{v},\,\vec{v}\,',\,\vec{v}\,''\big). \qquad \square$$

14. Exercices

Exercice 1.