Systèmes linéaires dépendant de paramètres : Exercices corrigés variés

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Ce chapitre est consacré à l'étude des systèmes linéaires dont les coefficients ne sont pas nécessairement de simples constantes comme -1, 5, 13, $-\frac{7}{2}$, $\frac{1}{3}$, mais peuvent dépendre de paramètres réels a, b, c, d, e, $\dots$. De tels systèmes se présentent très fréquemment dans les applications des mathématiques, et aussi, dans les mathématiques fondamentales elles-mêmes.

En ce premier semestre initiatique S_1 de la première année universitaire L_1, plutôt que d'ériger une théorie générale, nous allons traiter en détail de nombreux exercices tirés des livres et des annales. De cette manière, presque tous les aspects théoriques transparaîtront.

Nous ne commencerons donc pas forcément par les exercices les plus élémentaires. Au contraire, les Exercices 2 et 3, dont le niveau est avancé, nous feront d'ores et déjà découvrir les choses les plus essentielles. C'est pourquoi le lecteur-étudiant est fortement invité à lire et relire plusieurs fois ces deux Exercices 2 et 3.

2. Exercices corrigés

Exercice 1. **(a)** Résoudre le système linéaire suivant dépendant de trois paramètres réels a, b, c quelconques :

$$\begin{aligned} x+2\,y+3\,z &= a \\ x+3\,y+8\,z &= b \\ x+2\,y+2\,z &= c \end{aligned}$$

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & a \\ 1 & 3 & 8 & b \\ 1 & 2 & 2 & c \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & a \\ 0 & \boxed{1} & 5 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & c-a \end{array}\right].$$

Comme la forme obtenue est du type :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * \\ 0 & 0 & \blacksquare & * \end{array}\right]$$

nous savons (grâce à la théorie générale que nous avons apprise) sans avoir à continuer les calculs, que ce système possède une solution unique, quelles que soient les valeurs des paramètres a, b, c. [Toutefois, nous allons étudier ensuite beaucoup d'autres systèmes linéaires qui dépendront de paramètres et pour lesquels il faudra vraiment distinguer plusieurs cas selon les valeurs possibles de ces paramètres.]

Pour terminer la résolution, continuons jusqu'à la forme échelonnée *réduite :*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & a \\ 0 & 1 & 5 & b-a \\ 0 & 0 & \boxed{1} & a-c \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & -2a+3c \\ 0 & \boxed{1} & 0 & -6a+5c+b \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right]$$
$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10a-2b-7c \\ 0 & 1 & 0 & -6a+5c+b \\ 0 & 0 & 1 & a-c \end{array}\right],$$

et concluons que la solution unique est :

$$x := 10\,a - 2\,b - 7\,c, \qquad y := -6\,a + b + 5\,c, \qquad z := a - c.$$

Pour terminer, on pourrait (et on *devrait impérativement* si on était en examen) vérifier que cette solution satisfait bien le système linéaire initial, tâche ici laissée au lecteur-étudiant.

Exercice 2. Soit un paramètre $k \in \mathbb{R}$ prenant des valeurs quelconques, et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y - \qquad\quad z &= 2 \\ x + 2\,y + \qquad\quad z &= 3 \\ x + \ \ y + (k^2-5)\,z &= k \end{aligned}$$

(a) Mettre la matrice complète du système sous forme échelonnée, et ré-écrire le système correspondant.

(b) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une solution *unique* ?

(c) Dans ces circonstances, trouver la solution unique.

(d) Pour quelles valeurs de k le système admet-il une *infinité* de solutions ?

(e) Pour quelles valeurs de k le système n'admet-il *aucune* solution (*i.e.* est incompatible) ?

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme qui semble échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & k^2-5 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & k^2-4 & k-2 \end{array}\right].$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned} x + y - \qquad z &= \ \ 2 \\ y + \qquad 2\,z &= \ \ 1 \\ (k^2-4)\,z &= k-2 \end{aligned}$$

(b) Regardons la dernière équation en observant une factorisation utile :

$$(k-2)\,(k+2)\,z = k-2.$$

Attention ! Nous sommes exactement dans la situation où :

$$\text{Expression}\,(k)\cdot z = \text{Quelque chose},$$

et comme pour une équation plus simple, plus basique, du type :

$$k \cdot z \;=\; \text{Quelque chose},$$

où nous savons qu'il faut discuter si $k = 0$ ou si $k \neq 0$, ici, nous devons faire attention à la valeur de $\text{Expression}(k)$, égale à 0 ou différente de 0.

Pour résoudre ce système linéaire, il y a donc une petite difficulté, et qui plus est, il y a un petit piège.

En effet, afin de pouvoir écrire :

$$z \overset{?}{=} \frac{\text{Quelque chose}}{\text{Expression}\,(k)},$$

il faut s'assurer que :

$$\text{Expression}\,(k) \;\neq\; 0,$$

c'est-à-dire ici :

$$(k-2)\,(k+2) \;\neq\; 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad \Big(k \;\neq\; 2 \quad \text{et} \quad k \;\neq\; -2\Big).$$

Résumé 2.1. *L'inconnue z est résoluble dans l'équation 3 lorsque $k \neq 2$ et $k \neq -2$.* □

Mais il y a un petit piège ! En effet, on pourrait être tenté, dans la dernière équation en question :

$$\underline{(k-2)}_{\circ}\,(k+2)\,z \;=\; \underline{k-2}_{\circ},$$

de diviser, à gauche et à droite, par $k-2$, mais ceci conduirait à une *erreur mathématique*.

En effet, quand on a une équation à résoudre en une inconnue z de cette forme :

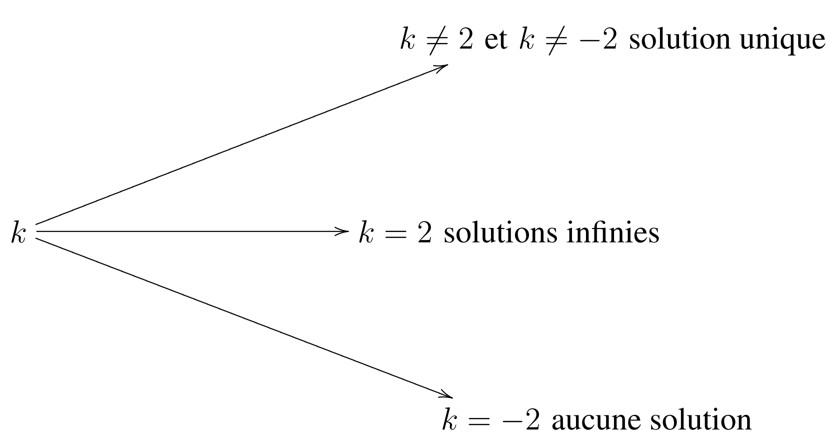
$$\text{Expression}\,(k) \cdot z \;=\; \text{Chose}\,(k),$$

le membre de droite est sans importance, même lorsqu'il dépend *aussi* du paramètre k, parce que si on veut résoudre :

$$z \overset{?}{=} \frac{\text{Chose}\,(\text{k})}{\text{Expression}\,(k)},$$

le terme $\text{Chose}\,(k)$ apparaîtra au *numérateur*, et dans une fraction, un numérateur est autorisé à prendre n'importe quelle valeur $\in \mathbb{R}$, y compris 0.

Au contraire, le dénominateur est soumis à la contrainte très importante de ne pas être égal à 0.



(c) Supposons donc $k \neq 2$ et $k \neq -2$. Nous pouvons donc diviser la ligne 3 de la matrice échelonnée ci-dessus, et poursuivre la méthode du pivot afin de *réduire* la matrice :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{1}{k+2} \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & \frac{2k+5}{k+2} \\ 0 & \boxed{1} & 0 & \frac{k}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right]$$
$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{k+5}{k+2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{k}{k+2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{k+2} \end{array}\right].$$

En conclusion, la solution est :

$$x := \frac{k+5}{k+2}, \qquad y := \frac{k}{k+2}, \qquad z := \frac{1}{k+2}.$$

(d) Ce qui est paradoxal, c'est que l'on a l'impression, en regardant cette solution, que seul le cas $k = -2$ pose problème.

Mais nous avons vu que le cas $k = 2$ posait *aussi* problème, à cause du fait qu'on n'avait *pas* le droit de supprimer le facteur $k - 2$ dans la dernière équation :

$$(k-2)\,(k+2)\,z \;=\; (k-2),$$

simplement parce que ce facteur $k - 2$, qui dépend de k, peut parfois être égal à 0, notamment lorsque $k = 2$, et en mathématiques, *il est catégoriquement interdit de diviser par* $\mathbf{0}$ **!**

Traitons donc ce cas délicat, « exceptionnel » :

$$k \;=\; 2.$$

La matrice échelonnée trouvée à la Question **(a)** devient alors :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right],$$

et on peut supprimer la dernière ligne, totalement nulle.

Ensuite, on termine la forme échelonnée *réduite :*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -3 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 2 & 1 \end{array}\right],$$

ce qui donne la solution générale, de cardinal infini, puisqu'elle dépend de l'inconnue libre $z \in \mathbb{R}$:

$$\mathsf{Sol} \;:=\; \big\{\big(1+3\,z,\; 1-2\,z,\; z\big) \colon\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

(e) Il reste une toute dernière valeur du paramètre $k \in \mathbb{R}$ dont nous n'avons pas encore parlé :

$$k \;=\; -\,2.$$

Alors la dernière équation obtenue à la Question **(a)** devient :

$$(-2-2)\,(-2+2)\,z \;=\; -\,2-2,$$

c'est-à-dire :

$$\mathbf{0} \;=\; -\,4,$$

équation impossible, donc le système est *incompatible* lorsque $k = -2$, il n'a *aucune* solution.

Exercice 3. Soit à nouveau un paramètre $k \in \mathbb{R}$ prenant des valeurs quelconques, et soit le système linéaire :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + \quad 3\,z &= 4 \\ x + k\,y + \quad 4\,z &= 6 \\ x + 2\,y + (k+2)\,z &= 6 \end{aligned}$$

(a) Mettre la matrice complète du système sous forme échelonnée.

(b) Discuter, selon les valeurs de k, le nombre de solutions.

(a) Deux opérations de pivot sur la première colonne de la matrice complète de ce système suffisent à atteindre une forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 1 & k & 4 & 6 \\ 1 & 2 & k+2 & 6 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & k-2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & 2 \end{array}\right],$$

donc le système devient :

$$\begin{aligned} x + \quad 2\,y + \quad 3\,z &= 4 \\ (k-2)\,y + \quad z &= 2 \\ (k-1)\,z &= 2 \end{aligned}$$

La forme générale de ce système n'est pas forcément échelonnée au sens strict du terme :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \underline{*}_2(k) & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*}_3(k) & * \end{array}\right],$$

car les *deux* étoiles soulignées :

$$\underline{*}_2(k) := k-2 \qquad \text{et} \qquad \underline{*}_3(k) := k-1,$$

peuvent chacune valoir :

$$\underline{*}_2(k) = \begin{cases} \blacksquare \\ \mathbf{0} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \underline{*}_3(k) = \begin{cases} \blacksquare \\ \mathbf{0} \end{cases}$$

suivant les valeurs du paramètre k.

(b) Regardons la dernière équation :

$$(k-1)\,z = 2.$$

Quand $k = 1$, ceci est $0 = 2$, donc le système est incompatible.

Pour pouvoir résoudre en z, il faut supposer $k \neq 1$. Résolvons :

$$z = \frac{2}{k-1},$$

et remplaçons dans l'équation deuxième :

$$(k-2)\,y = 2 - \frac{2}{k-1},$$

c'est-à-dire :

$$(k-2)\,y = \frac{2\,(k-2)}{k-1}.$$

Attention ! Piège similaire ! On pourrait être tenté de diviser de part et d'autre par $k-2$, mais avec $k = 2$, on effectuerait une *division par zéro qui est vraiment interdite en mathématiques*.

Donc il faut traiter ce cas exceptionnel $k = 2$, où l'équation devient trivialement satisfaite :

$$0\,y \,=\, 0.$$

Plus haut, on avait $z = \frac{2}{2-1} = 2$, et la première équation devient :

$$x + 2\,y + 3\,(2) \,=\, 4,$$

d'où :

$$x \,=\, -2 - 2\,y.$$

Ainsi, lorsque $k = 2$, il y a une infinité de solutions :

$$\mathsf{Sol} \,=\, \big\{\big(-2-2y,\, y,\, 2\big)\; y \in \mathbb{R} \text{ quelconque}\big\}.$$

$$\begin{tikzcd}
 & k=1 \text{ incompatible} & \\
k \arrow[ur] \arrow[dr] & & k=2 \text{ solutions infinies} \\
 & k\neq 1 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & k\neq 2 \text{ solution unique}
\end{tikzcd}$$

Enfin, supposons $k \neq 1$ et $k \neq 2$. Notre équation en y se résout alors comme :

$$y \,=\, \frac{2}{k-1}.$$

La première équation devient :

$$x + 2\,\frac{2}{k-1} + 3\,\frac{2}{k-1} \,=\, 4,$$

et permet de trouver la valeur de :

$$x \,=\, 4 - \frac{10}{k-1} \,=\, \frac{4\,k-14}{k-1}.$$

En conclusion, la solution, unique, est :

$$x \,:=\, \frac{4\,k-14}{k-1}, \qquad\qquad y \,:=\, \frac{2}{k-1}, \qquad\qquad z \,:=\, \frac{2}{k-1}.$$

Exercice 4. **(a)** Suivant les valeurs du paramètre $t \in \mathbb{R}$, trouver l'ensemble des solutions du système linéaire :

$$\begin{aligned} x + \ \ y &= \ 1, \\ 2\,x + t\,y &= 2\,t. \end{aligned}$$

(a) La matrice complète de ce système dépendant du paramètre $t \in \mathbb{R}$ a pour forme échelonnée :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 2 & t & 2t \end{array}\right] \quad \longmapsto \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 0 & t-2 & 2t-2 \end{array}\right].$$

La deuxième équation :

$$(t-2)\,y \;=\; 2\,t - 2,$$

a pour solution, quand $t \neq 2$:

$$y \;=\; \frac{2\,t-2}{t-2},$$

puis :

$$x + \frac{2\,t-2}{t-2} \;=\; 1 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad x \;=\; 1 - \frac{2\,t-2}{t-2} \;=\; -\frac{t}{t-2},$$

donc pour $t \neq 2$, il y a la solution unique :

$$x \;:=\; -\frac{t}{t-2} \qquad\qquad y \;:=\; \frac{2\,t-2}{t-2}.$$

Pour $t = 2$, la deuxième équation est impossible :

$$(2-2)\,y \;=\; \mathbf{0} \overset{!}{=} 2 \;=\; 2 \cdot 2 - 2,$$

donc dans ce (dernier) cas, le système est incompatible.

Exercice 5. **(a)** Suivant les valeurs du paramètre $k \in \mathbb{R}$, discuter, et trouver, les solutions exactes du système linéaire :

$$\begin{aligned} y + 2\,k\,z &= 0, \\ x + 2\,y + \ \ 6\,z &= 2, \\ k\,x \qquad + \ \ 2\,z &= 1. \end{aligned}$$

(a) Après interversion des lignes 1 et 2, la matrice complète du système peut être soumise à un pivot sur sa première colonne, puis sur sa deuxième colonne :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ k & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \quad \longmapsto \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & \boxed{1} & 2k & 0 \\ 0 & -2k & 2-6k & 1-2k \end{array}\right]$$

$$\longmapsto \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 1 & 2k & 0 \\ 0 & 0 & 2-6k+4k^2 & 1-2k \end{array}\right].$$

La dernière équation se lit, grâce à la factorisation :

$$\begin{aligned} 2 - 6\,k + 4\,k^2 &= 4\left(k^2 - \tfrac{3}{2}\,k + \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 4\,(k-1)\left(k - \tfrac{1}{2}\right) \\ &= 2\,(k-1)\,(2\,k-1), \end{aligned}$$

comme :

$$2\,(k-1)\,(2\,k-1)\,z \;=\; -\,(2\,k-1).$$

À nouveau, il y a le piège d'un même facteur, ici $(2\,k-1)$, à gauche et à droite, comme dans les Exercices 2 et 3, et à nouveau, il ne faut surtout pas diviser par $2\,k-1$.

En tout cas, les valeurs de k pour lesquelles ce facteur s'annule, à savoir :

$$k \,=\, 1 \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad k \,=\, \tfrac{1}{2},$$

sont exceptionnelles, et requièrent chacune une étude indépendante.

Commençons par le cas « *générique* », en supposant $k \neq 1$ et $k \neq \frac{1}{2}$. Alors on peut résoudre la ligne 3 :

$$z \,:=\, -\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1},$$

puis remonter à la ligne 2 :

$$y + 2\,k\left(-\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}\right) \,=\, 0 \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad y \,=\, \frac{k}{k-1},$$

et enfin, terminer par la ligne 1 :

$$\begin{aligned} x + 2\left(\frac{k}{k-1}\right) + 6\left(-\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}\right) \,=\, 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \,&=\, 2 - \frac{2\,k}{k-1} + \frac{3}{k-1} \\ &=\, \frac{2\,k-2-2\,k+3}{k-1} \\ &=\, \frac{1}{k-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, lorsque $k \neq 1$ et $k \neq \frac{1}{2}$, il y a la solution unique :

$$x \,:=\, \frac{1}{k-1}, \qquad\qquad y \,:=\, \frac{k}{k-1}, \qquad\qquad z \,:=\, -\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{k-1}.$$

$$\begin{tikzcd} & k \neq \frac{1}{2} \text{ et } k \neq \frac{1}{2} \text{ solution unique} \\ k \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & k = \frac{1}{2} \text{ solutions infinies} \\ & k = 1 \text{ système incompatible} \end{tikzcd}$$

Ensuite, traitons le cas $k = \frac{1}{2}$. La dernière équation se résume à $0 = 0$:

$$2\left(\tfrac{1}{2}-1\right)\left(\underline{2\cdot\tfrac{1}{2}-1}\right)2 \,=\, -\left(\underline{2\cdot\tfrac{1}{2}-1}\right),$$

donc il ne reste que *deux* équations, à *trois* variables x, y, z :

$$\begin{aligned} x + 2\,y + \quad 6\,z \,&=\, 2, \\ y + 2\cdot\tfrac{1}{2}\,z \,&=\, 0, \end{aligned}$$

que l'on résout aisément :

$$x + 2\,(-z) + 6\,z \;=\; 2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \;=\; 2 - 4\,z,$$
$$y \;=\; -\,z,$$

d'où :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{ \big(2-4z,\, -z,\, z\big) :\; z \in \mathbb{R} \text{ quelconque} \Big\}.$$

Enfin, le dernier cas $k = 1$ a pour ligne 3 l'équation impossible $0 \stackrel{!}{=} -1$:

$$2\,(\underline{1-1}_{\circ})\,(2\cdot 1 - 1)\,z \;=\; \stackrel{!}{=} \;-\,(2\cdot 1 - 1),$$

donc le système n'a aucune solution lorsque $k = 1$.

Exercice 6. **(a)** Déterminer une relation/équation sur les 3 paramètres g, h, k afin que le système suivant soit compatible :

$$\begin{aligned} x - 4\,y + 7\,z \;&=\; g, \\ 3\,y - 5\,z \;&=\; h, \\ -2\,x + 5\,y - 9\,z \;&=\; k. \end{aligned}$$

(a) On applique la méthode du pivot pour échelonner la matrice complète de ce système :

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ -2 & 5 & -9 & h \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & \boxed{3} & -5 & h \\ 0 & -3 & 5 & 2g+k \end{array}\right]$$
$$\longmapsto \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & g \\ 0 & 3 & -5 & h \\ 0 & 0 & 0 & 2g+h+k \end{array}\right],$$

donc une condition nécessaire pour la compatibilité est :

$$2\,g + h + k \;=\; 0,$$

puisque nous savons bien qu'un système du type :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \underline{*} \end{array}\right] \end{array},$$

est *in*compatible dès que l'étoile soulignée $\underline{*} \neq 0$ est non nulle, à cause de la dernière équation :

$$\mathbf{0}\,x + \mathbf{0}\,y + \mathbf{0}\,z \;=\; \underline{*}.$$

Inversement, lorsque $2\,g + h + k = 0$, on peut supprimer la dernière ligne inutile, et considérer le système suivant de 2 équations à 3 variables :

$$\begin{aligned} x - 4\,y + 7\,z \;&=\; g, \\ 3\,y - 5\,z \;&=\; h, \end{aligned}$$

dont la matrice complète est de la forme :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \end{array}\right] \end{array},$$

et nous savons qu'un tel système linéaire est toujours compatible, avec une infinité de solutions.

D'ailleurs, on peut trouver (exercice — mais cela n'était pas demandé) :

$$\mathsf{Sol} \;=\; \Big\{\big(g+\tfrac{4}{3}h-\tfrac{1}{3}z,\;\tfrac{1}{3}h+\tfrac{5}{3}\,z,\;z\big)\colon\; z\in\mathbb{R}\text{ quelconque}\Big\}.$$

Exercice 7. **(a)** On suppose que le système suivant :

$$\begin{aligned} x+3\,y &= f,\\ c\,x+d\,y &= g, \end{aligned}$$

est compatible pour tous paramètres $f, g\in\mathbb{R}$. Que dire de c et d ?

(a) Pivotons la colonne 1 :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & f\\ c & d & g \end{array}\right] \quad\longmapsto\quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & f\\ 0 & d-3c & g-cf \end{array}\right].$$

La forme générale est :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} \ \ x & \ \ y \end{array}\\ \left[\begin{array}{cc|c} \blacksquare & * & *\\ \mathbf{0} & \underline{*} & * \end{array}\right] \end{array}.$$

Quand l'étoile souligné $\underline{*}=\blacksquare$ est un nombre réel *non nul*, nous savons que le système est compatible, et qu'il y a une solution unique.

Examinons donc le cas restant où l'étoile soulignée en question est nulle :

$$d-3\,c \;=\; 0.$$

La dernière équation 2 du système devient alors :

$$(d-3\,c)\,y \;=\; \mathbf{0} \;\overset{?}{=}\; g-c\,f,$$

et pour avoir compatibilité, on devrait donc avoir :

$$g-c\,f \;=\; 0,$$

cela, $\forall\,f\in\mathbb{R}$ et $\forall\,g\in\mathbb{R}$, ce qui est impossible (exercice mental).

En conclusion, le système est compatible $\forall\,f\in\mathbb{R}$ et $\forall\,g\in\mathbb{R}$ si et seulement si son déterminant est non nul :

$$0 \;\neq\; d-3\,c \;=\; \left|\begin{array}{cc} 1 & 3\\ c & d \end{array}\right|.$$

Exercice 8. **(a)** Trouver $h\in\mathbb{R}$ tel que le système suivant soit compatible :

$$\begin{aligned} 2\,x+3\,y &= h,\\ 4\,x+6\,y &= 7. \end{aligned}$$

(b) Faire de même pour le système :

$$\begin{aligned} x-3\,y &= -\,2,\\ 5\,x+h\,y &= -\,7. \end{aligned}$$

(a) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & h\\ 4 & 6 & 7 \end{array}\right] \quad\longmapsto\quad \left[\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & h\\ 0 & 0 & 7-2h \end{array}\right],$$

et concluons que ce système linéaire est compatible si et seulement si $7-2\,h=0$, c'est-à-dire ssi $h=\frac{7}{2}$.

(b) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 5 & h & -7 \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & -2 \\ 0 & h+15 & 3 \end{array}\right].$$

Quand $h \neq -15$, ce système a une solution unique :

$$x := -\frac{21 + 2\,h}{15 + h}, \qquad\qquad y := \frac{3}{15 + h}.$$

Quand $h = -15$, il est incompatible, parce que l'équation 2 est impossible :

$$\big(-\ 15 + 15\big)\,2 = \mathbf{0} \overset{!}{=} 3.$$

Exercice 9. Choisir les paramètres h et k afin que chacun des deux systèmes linéaires suivants

$$\textbf{(a)} \quad \begin{aligned} x + h\,y &= 2 \\ 4\,x + 8\,y &= k \end{aligned} \qquad\qquad \textbf{(b)} \quad \begin{aligned} x + 3\,y &= 2 \\ 3\,x + h\,y &= k \end{aligned}$$

aient :

- 1 solution unique ;
- une infinité de solutions ;
- aucune solution.

(a) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 2 \\ 4 & 8 & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & h & 2 \\ 0 & 8-4h & k-8 \end{array}\right],$$

et concluons :

- 1 solution unique lorsque $8 - 4h \neq 0$, c'est-à-dire $h \neq 2$;
- une infinité de solutions quand $8 - 4\,h = 0$ et $k - 8 = 0$, c'est-à-dire $h = 2$ et $k = 8$;
- aucune solution lorsque $h = 2$ mais $k \neq 8$.

(b) Pivotons :

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 3 & h & k \end{array}\right] \longmapsto \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 3 & 2 \\ 0 & h-9 & k-6 \end{array}\right],$$

et concluons :

- 1 solution unique lorsque $h \neq 9$;
- une infinité de solutions quand $h = 9$ et $k = 6$;
- aucune solution lorsque $h = 9$ mais $k \neq 6$.

Exercice 10. **(a)** Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On suppose que le système linéaire suivant est compatible :

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= f, \\ c\,x + d\,y &= g, \end{aligned}$$

$\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$. Que peut-on dire de a, b, c, d ?

(a) Comme dans le chapitre consacré aux droites dans le plan, éliminons d'abord x :

$$\begin{aligned} c\,\Big(a\,x + b\,y &= f\Big), \\ a\,\Big(c\,x + d\,y &= g\Big), \end{aligned} \qquad\qquad \big(b\,c - a\,d\big)\,y = c\,f - a\,g,$$

puis éliminons y :

$$d\big(a\,x + b\,y \;=\; f\big), \qquad b\big(c\,x + d\,y \;=\; g\big), \qquad \big(a\,d - b\,c\big)\,x \;=\; d\,f - b\,g.$$

Certainement, ce système est compatible lorsque :

$$0 \;\neq\; a\,d - b\,c \;=\; \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix},$$

et dans ce cas, nous avons déjà vu dans le chapitre sur les droites dans le plan qu'il admet pour solution unique :

$$x \;:=\; \frac{d\,f - b\,g}{a\,d - b\,c}, \qquad\qquad y \;:=\; \frac{a\,g - c\,f}{a\,d - b\,c}.$$

Question. *Que dire quand, au contraire,* $a\,d - b\,c = 0$ *?*

Pour que le système soit compatible, il faudrait que les deux équations obtenues :

$$\big(a\,d - b\,c\big)\,x \;=\; \mathbf{0} \;\overset{?}{=}\; d\,f - b\,g,$$
$$\big(a\,d - b\,c\big)\,y \;=\; \mathbf{0} \;\overset{?}{=}\; a\,g - c\,f,$$

soient satisfaites, à savoir :

$$0 \;\overset{?}{=}\; d\,f - b\,g,$$
$$0 \;\overset{?}{=}\; a\,g - c\,f,$$

cela, $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$.

Or nous sommes dans le cas où $a\,d - b\,c = 0$, et comme l'exercice suppose depuis le début que $a \neq 0$, nous pouvons écrire :

$$d \;=\; \frac{b\,c}{a},$$

et remplacer :

$$0 \;\overset{?}{=}\; \tfrac{b\,c}{a}\,f - b\,g,$$
$$0 \;\overset{?}{=}\; a\,g - c\,f,$$

toujours $\forall\, f \in \mathbb{R}$ et $\forall\, g \in \mathbb{R}$.

En prenant par exemple $f := 0$, la deuxième équation devient :

$$0 \;\overset{?}{=}\; a\,g,$$

cela, $\forall\, g \in \mathbb{R}$, ce qui est *impossible*, car en prenant $g := 1$, nous déduirions :

$$0 \;\overset{?}{=}\; a,$$

contrairement à notre hypothèse initiale $a \neq 0$.

Ainsi, pour que le système soit compatible $\forall\, f$ et $\forall\, g$, il est impossible que $a\,d - b\,c = 0$.

En conclusion, le système est compatible $\forall\, f$ et $\forall\, g$ si et seulement si $0 \neq a\,d - b\,c$.