Décomposition $A = LU$ de matrices A quelconques

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

1. Introduction

Une *factorisation* d'une matrice A est une équation $A = B\,C\,\dots$ qui la représente comme un produit de deux matrices ou plus. Tandis que la multiplication matricielle effectue une *synthèse* des données, au sens où deux ou plusieurs effets sont combinés, la factorisation matricielle réalise une *analyse* des données.

En informatique, une expression de A sous forme d'un produit permet de décomposer les données en plusieurs parties utiles, chaque partie étant souvent plus accessible au calcul.

Ce court chapitre présente une factorisation classique, implicite à l'algorithme du pivot, et qui se trouve au cœur de plusieurs programmes informatiques couramment utilisés dans les applications en ingénierie et dans l'industrie.

2. La factorisation LU

Dans les mathématiques *très* appliquées, il est en effet courant d'avoir à résoudre une collection d'équations linéaires à plusieurs dizaines voir centaines d'inconnues dont la matrice *non* complète A est toujours la même :

$$A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1, \qquad A\,\vec{x}_2 = \vec{b}_2, \qquad A\,\vec{x}_3 = \vec{b}_3, \qquad \dots$$

Quand A est inversible, ce qui arrive fréquemment, on est naturellement tenté de calculer son inverse A^{-1}, pour trouver les solutions :

$$\vec{x}_1 = A^{-1}\,\vec{b}_1, \qquad \vec{x}_2 = A^{-1}\,\vec{b}_2, \qquad \vec{x}_3 = A^{-1}\,\vec{b}_3, \qquad \dots$$

Cette technique semble être la meilleure, mais en fait, il existe une technique plus économique, que nous présentons maintenant.

Cette technique consiste à commencer par résoudre avec la méthode du pivot le premier système linéaire $A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, et à *conserver la mémoire des calculs intermédiaires afin d'accélérer la résolution des systèmes linéaires suivants*. Cette mémoire va se cristalliser en représentant A sous forme d'un produit matriciel $A = L\,U$ du type :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{1,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{1,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{1,5} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & 1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & 1 & \mathbf{0} \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{U}.$$

Les notations L et U sont assez universelles, et proviennent respectivement des termes anglais *lower* (inférieur) et *upper* (supérieur).

Avant d'étudier la façon de construire L et U, expliquons pourquoi ces deux matrices, L triangulaire inférieure, et U triangulaire supérieure, sont si utiles. En partant de $A = L\,U$, le système linéaire :

$$A\,\vec{x} = \vec{b} \qquad\qquad \text{peut s'écrire :} \qquad\qquad L\,\big(U\,\vec{x}\big) = \vec{b}.$$

Alors si l'on introduit l'*inconnue intermédiaire :*

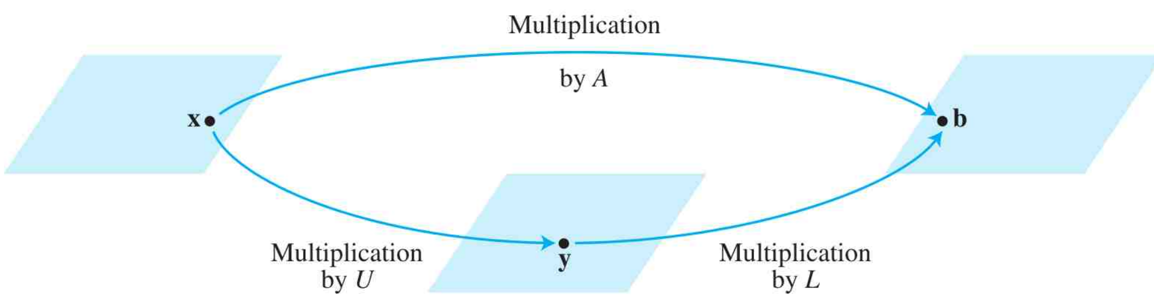
$$\vec{y} := U\,\vec{x},$$

on peut résoudre le système initial $A\,\vec{x} = \vec{b}$ en résolvant successivement les *deux* systèmes linéaires :

$$\boxed{\begin{aligned} L\mathbf{y} &= \mathbf{b} \\ U\mathbf{x} &= \mathbf{y} \end{aligned}}$$

Mais il semblerait qu'on n'ait rien gagné dans cette opération ?! En effet, comment prétendre accélérer la résolution en remplaçant *un* système à résoudre par *deux* systèmes à résoudre ?

En tout cas, avant de dévoiler pourquoi les calculs se simplifient (un peu) quand on a affaire à *un grand nombre* de systèmes $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ linéaires de *même* matrice A, piratons un diagramme qui représente la composition $A = L\,U$:



La première idée, c'est que chacun des deux systèmes linéaires en question :

$$L\,\vec{y} = \vec{b}, \qquad\qquad \text{puis :} \qquad\qquad U\,\vec{x} = \vec{y},$$

le premier d'inconnue $\vec{y}$ et le second d'inconnue $\vec{x}$, sont faciles à résoudre, parce que les deux matrices L et U sont triangulaires, inférieure et supérieure. La deuxième idée, c'est que les calculs intermédiaires de résolution de chacun de ces deux systèmes vont se *répéter* pour tous les systèmes à résoudre $A\,\vec{x}_1 = \vec{b}_1$, $A\,\vec{x}_2 = \vec{b}_2$, $A\,\vec{x}_3 = \vec{b}_3$, *etc.* Et c'est surtout là que les ingénieurs peuvent gagner à réduire le nombre total de calculs.

Exemple 2.1. On peut vérifier (exercice direct) que l'on a :

$$A := \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 0 \\ -3 & 8 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = L\,U.$$

Proposons-nous d'utiliser cette factorisation $A = L\,U$ afin de résoudre le système $A\,\vec{x} = \vec{b}$, où l'on a posé :

$$\vec{b} := \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix}.$$

Pour résoudre le premier système intermédiaire $L\,\vec{y} = \vec{b}$, formons sa matrice complète :

$$\begin{bmatrix} L & \vec{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & 1 & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & 1 & 11 \end{array}\right].$$

La résolution de ce système en utilisant la méthode du pivot procède, comme on le sait, selon les colonnes 1, 2, 3 :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} L & \vec{b} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ -1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 \\ 2 & -5 & \mathbf{1} & 0 & 7 \\ -3 & 8 & 3 & \mathbf{1} & 11 \end{array}\right] & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & -5 & \mathbf{1} & 0 & 25 \\ \mathbf{0} & 8 & 3 & \mathbf{1} & -16 \end{array}\right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 & \mathbf{1} & 16 \end{array}\right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & -9 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 0 & -4 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 0 & 5 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \end{aligned}$$

Chaque colonne permet de lire les nombres en-dessous des pivots $\mathbf{1}$ par lesquels on doit multiplier une ligne à soustraire. Mais on sait à l'avance que toutes les entrées en-dessous d'un pivot $\mathbf{1}$ seront forcément égales à $\mathbf{0}$!

Par conséquent, et c'est le point-clé, *les calculs à faire concernent seulement la dernière colonne ! Inutile de traiter ou d'écrire les autres colonnes !*

Dès qu'on se sera donné un vecteur $\vec{b}_k$, on ne travaillera qu'avec ses coordonnées ! Et c'est là que, sur le plan informatique, on gagnera à économiser de la mémoire !

Comme il y a 3 nombres, puis 2 nombres, puis 1 nombre en-dessous des trois pivots $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, $\mathbf{1}$, on n'a fait que $6 = 3+2+1$ multiplications et que $6 = 3+2+1$ additions, en jouant seulement avec les coordonnées de $\vec{b}$.

Ensuite, pour résoudre le deuxième système intermédiaire $U\,\vec{x} = \vec{y}$ — sachant que le membre de droite :

$$\vec{y} := \begin{bmatrix} -9 \\ -4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

vient d'être trouvé —, les calculs vont être un tout petit peu plus "compliqués", parce qu'il faudra commencer à diviser les pivots pour les rendre tous égaux à $\mathbf{1}$.

En effet, la phase de remontée avec la méthode du pivot commence par le bas en divisant le dernier pivot $-\mathbf{1}$ par lui-même pour trouver $\mathbf{1}$, puis en créant des $\mathbf{0}$ au-dessus de lui, dans la colonne 4 :

$$
\begin{bmatrix} U & \vec{y} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & 2 & -9 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right].
$$

Ceci nécessite 1 division, puis 3 paires de multiplications-additions. *À nouveau, les calculs à effectuer ne concernent que la dernière colonne !*

Ensuite, on divise le pivot $-\mathbf{1}$ de la colonne 3 par lui-même pour trouver $\mathbf{1}$, et on continue jusqu'à remonter à la source :

$$
\left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & -2 & \mathbf{0} & -7 \\ 0 & -\mathbf{2} & -1 & \mathbf{0} & -2 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -19 \\ 0 & -\mathbf{2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -8 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & -7 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -19 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{3} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 9 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \left[\begin{array}{cccc|c} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & 4 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} & -1 \end{array}\right].
$$

Pour cette deuxième partie des calculs, on a effectué $1 + 1 + 1 + 1 = 4$ divisions, et $3 + 2 + 1 + 0 = 6$ paires de multiplications-additions. Il importe de remarquer à nouveau que dans cette phase de remontée, *les calculs à faire concernent aussi surtout la dernière colonne*.

Ainsi, la solution du système initial $A\,\vec{x} = \vec{b}$ est la dernière colonne trouvée ci-dessus :

$$
\vec{x} := \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix},
$$

ce que l'on peut vérifier comme suit :

$$
A\,\vec{x} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & -2 & 2 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & -4 & 0 & -5 \\ -9 & 5 & -5 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 - 28 + 12 - 2 \\ -9 + 20 - 6 \\ 18 - 16 + 5 \\ -27 + 20 + 30 - 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \\ 11 \end{bmatrix} = \vec{b}.
$$

Au total, si l'on ne tient pas compte des calculs requis pour obtenir L et U [1], il faut donc 28 opérations arithmétiques, appelées « *flops* » en informatique, pour déterminer la solution $\vec{x}$.

Or si l'on comptait précisément le nombre d'opérations requises pour transformer $\big[A\ \vec{b}\big]$ en $\big[I\ \vec{x}\big]$, on trouverait $62 > 28$ opérations arithmétiques.

L'efficacité algorithmique de la factorisation $A = L\,U$ repose sur la connaissance préalable de L et de U. L'algorithme présenté dans la Section **3** suivante montre qu'en déterminant une forme échelonnée U de A, on détermine du même coup la factorisation $A = L\,U$, car on obtient alors L pratiquement sans travail supplémentaire. Une fois la réduction initiale effectuée, on dispose des matrices L et U pour résoudre d'autres systèmes $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ dont la matrice est A.

3. Algorithme de factorisation $A = L\,U$

Pour simplifier, nous allons supposer que la matrice A peut être réduite à une forme échelonnée uniquement par des opérations de remplacement qui consistent à additionner un multiple d'une ligne à une autre ligne, *toujours située au-dessous*.

Dans ce cas, il existe un nombre fini $p \geqslant 1$ de matrices élémentaires $E_1, \dots, E_p$ triangulaires inférieures avec des 1 sur la diagonale, et un seul autre nombre non nul, c'est-à-dire du type :

$$E_\bullet = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{ou} \qquad E_\bullet = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \blacksquare & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

telles que la concaténation de ces opérations élémentaires, qui équivaut à la multiplication de A par $E_p, \dots, E_1$ à gauche :

$$E_p \cdots E_1 \cdot A \,=\, U,$$

fournisse une certaine matrice échelonnée U, triangulaire supérieure — *Upper triangular* en anglais.

Alors il vient :

$$\begin{aligned} A \,&=\, \underbrace{\big(E_p \cdots E_1\big)^{-1}}_{=:\,L} \cdot U \\ &=:\, L\,U, \end{aligned}$$

ce qui définit une certaine matrice L. Or comme les matrices $E_1, \dots, E_p$ sont toutes triangulaires inférieures, ainsi que leurs inverses $E_1^{-1}, \dots, E_p^{-1}$ (exercice), la matrice :

$$L \,=\, E_1^{-1} \cdots E_p^{-1}$$

est elle aussi triangulaire inférieure — *Lower triangular* en anglais.

Enfin, on peut vérifier (exercice) que L n'a que des 1 sur sa diagonale.

1. — sachant que ces calculs peuvent être supposés effectués à l'avance pour traiter ensuite tous les systèmes suivants $A\,\vec{x}_k = \vec{b}_k$ avec $k = 2, 3, 4, 5, \dots$ —

Exemple 3.1. Proposons-nous de déterminer une factorisation $A = L\,U$ de la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Puisque A comporte 4 lignes, la matrice L associée doit être une matrice de taille 4×4. Puisque l'on cherche à atteindre $A = L\,U$, c'est-à-dire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ * & 1 & 0 & 0 \\ * & * & 1 & 0 \\ * & * & * & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * \\ \mathbf{0} & \blacksquare & * & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare & * \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \blacksquare \end{bmatrix},$$

le carré noir en haut à gauche doit valoir :

$$\mathbf{2} \cdot 1 = \blacksquare.$$

Par conséquent, en effectuant le début de la multiplication matricielle, on déduit que la première colonne de L est nécessairement égale à la première colonne de A divisée par ce coefficient-pivot **2** :

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & * & 1 & 0 \\ -3 & * & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, on compare les premières colonnes de A et de L.

Observation 3.2. *Les opérations élémentaires sur les lignes qui créent des* **0** *dans la première colonne de A font alors également apparaître des* **0** *dans la première colonne de L.*

Preuve. Cela est vrai parce que la première colonne de A est un multiple non nul de la première colonne de L. □

Ensuite, on crée réellement les **0** nécessaires dans la première colonne de A, et on regarde la deuxième colonne, à partir de la deuxième ligne :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ -4 & -5 & 3 & -8 & 1 \\ 2 & -5 & -4 & 1 & 8 \\ -6 & 0 & 7 & -3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & -9 & -3 & -4 & 10 \\ 0 & 12 & 4 & 12 & -5 \end{bmatrix} = A_1$$

Après cela, il faut diviser cette deuxième colonne par son pivot **3** en position $(2, 2)$, ce qui produit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{3} \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

et permet de continuer à compléter :

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & * & 1 \end{bmatrix}.$$

Ensuite, on crée des $\mathbf{0}$ en-dessous ce nouveau pivot $\mathbf{1}$, ce qui donne (observer que l'on saute alors de la colonne 2 à la colonne 4, et on sait que cela peut arriver dans la méthode du pivot) :

$$\sim A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = U$$

Après cela, il faut diviser cette colonne 3 par son pivot $\mathbf{2}$ en position $(3, 4)$, ce qui produit :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{2} \\ 4 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} \mathbf{1} \\ 2 \end{bmatrix}$$

et permet de terminer la complétion de :

$$L = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \\ -2 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & -3 & \mathbf{1} & 0 \\ -3 & 4 & 2 & \mathbf{1} \end{bmatrix}.$$

Enfin, on termine l'application de la méthode du pivot, et on trouve la matrice U, écrite un peu plus haut.

Ainsi, on a *encadré en bleu les coefficients* utilisés dans chaque matrice pour déterminer la suite d'opérations qui transforment A en U, et on a *conservé en mémoire ces données dans une matrice auxiliaire L :*

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \end{bmatrix}$$

$$\div 2 \downarrow \qquad \div 3 \downarrow \qquad \div 2 \downarrow \qquad \div 5 \downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ -2 & 1 & & \\ 1 & -3 & 1 & \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Une vérification simple montre que l'on a bien $L\,U = A$.

Algorithme: Factorisation $L\,U$

1. Transformer la matrice A en une matrice échelonnée U par la méthode du pivot.

2. À chaque étape, recopier dans une matrice auxiliaire L les coefficients qui se trouvent en-dessous du pivot normalisé $\mathbf{1}$ de chaque colonne.

Il reste à discuter de la situation où des échanges de lignes sont parfois nécessaires, dans la matrice A, pour continuer à appliquer la méthode du pivot, et assurer de cette manière que l'on produise bien une matrice L qui est triangulaire *inférieure*.

Notamment, cela devient vraiment nécessaire quand on utilise une « *stratégie de pivot partiel* », c'est-à-dire une stratégie qui consiste à choisir, parmi tous les pivots possibles, un coefficient qui a la plus grande valeur absolue.

On peut alors admettre de parler d'une *matrice triangulaire inférieure permutée*, c'est-à-dire une matrice triangulaire (avec des 1 sur la diagonale) dont on a permuté, d'une certaine manière, les lignes.

On peut aussi décider de recommencer les calculs après avoir réordonné les lignes de A.

REMARQUES NUMÉRIQUES

Le décompte d'opérations suivant s'applique à une matrice $n \times n$ dense A (c'est-à-dire dont la plupart des coefficients sont non nuls) pour n relativement grand, typiquement[6] $n \geq 30$.

1. Le calcul de la factorisation LU de A prend environ $2n^3/3$ flops (à peu près autant que pour appliquer la méthode du pivot à $[\,A \quad \mathbf{b}\,]$), tandis que le calcul de A^{-1} nécessite environ $2n^3$ flops.
2. Résoudre $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ et $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ nécessite environ $2n^2$ flops, car tout système triangulaire $n \times n$ se résout en environ n^2 flops.
3. La multiplication de $\mathbf{b}$ par A^{-1} nécessite aussi environ $2n^2$ flops, mais le résultat peut être moins précis que celui obtenu à partir de L et U (à cause des erreurs d'arrondi pouvant survenir lors des calculs de A^{-1} et $A^{-1}\mathbf{b}$).
4. Si A est creuse (comportant beaucoup de 0), alors L et U pourront, elles aussi, être creuses, alors que A^{-1} a plus de chances d'être dense. Dans ce cas, la résolution de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ par une factorisation LU est *beaucoup* plus rapide que l'utilisation de A^{-1} (voir exercice 31).