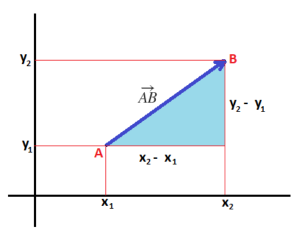
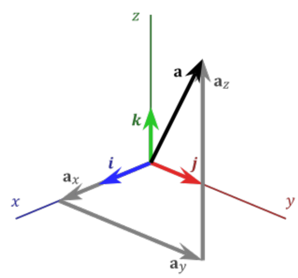
Espaces vectoriels

François DE MARÇAY
Institut de Mathématique d'Orsay
Université Paris-Saclay, France

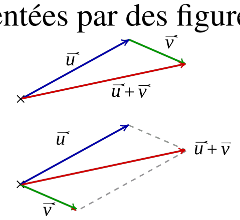
1. Introduction

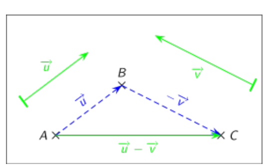
Dans l'enseignement secondaire, on parle de vecteurs dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$ muni de coordonnées (x, y), et aussi dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, muni de coordonnées (x, y, z).

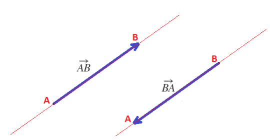


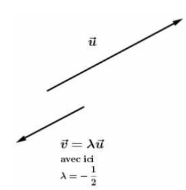


On peut aussi parler abstraitement des vecteurs, sans référence à aucun système de coordonnées. Sommes, soustractions, multiplications par un scalaire peuvent alors être représentées par des figures connues.



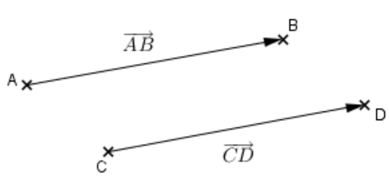


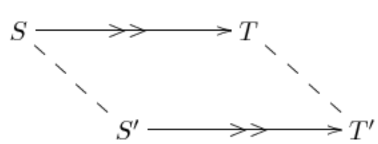




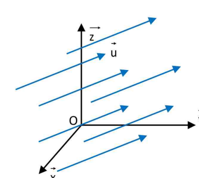
Une notion fondamentale est alors la relation d'*équipollence* entre paires de vecteurs, qui s'illustre d'une manière claire dans le cadre de la géométrie plane euclidienne. En premier lieu, on introduit la notion de *vecteur lié* ou *segment orienté*, caractérisé par :

- une longueur ou norme ;
- une direction ou support,
- un sens ou orientation ;
- une origine ou point d'application.





$$\overrightarrow{ST} = \overrightarrow{S'T'}$$



En comparant des vecteurs liés entre eux, on constate que certains d'entre eux sont « les mêmes », à l'origine près : ils sont parallèles, de même longueur et de même direction. On dit alors que deux vecteurs liés sont *équipollents* s'ils ont même direction, même sens, et même longueur.

L'équipollence est ainsi une *relation d'équivalence* dont les classes peuvent être représentées comme des vecteurs dont l'origine n'est pas fixe : ce sont donc des vecteurs libres, par opposition aux vecteurs liés, dont l'origine est fixe.

La notion de vecteur lié est une notion de géométrie euclidienne, qui n'a de sens que dans un espace affine euclidien. Les vecteurs libres obtenus appartiennent ainsi à un espace vectoriel euclidien.

Plus précisément, dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, la classe d'un bipoint (A, B) est un vecteur libre dit vecteur généralisé et noté :

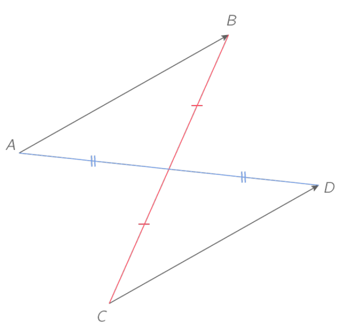
$$\overrightarrow{AB}$$

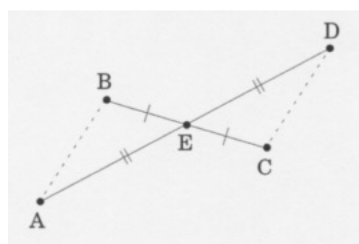
On sait alors démontrer que si deux vecteurs sont équipollents :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

le quadrilatère $ABCD$ est un *parallélogramme*, et on démontre ensuite que cela implique l'équipollence de l'autre paire de côtés opposés :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$





Il est possible de généraliser les propriétés « évidentes » de l'espace euclidien en une définition qui s'applique à un ensemble quelconque non vide, grâce une définition axiomatique abstraite.

Soit donc E un ensemble non vide. On considère dans $E \times E$ une relation d'équivalence notée $\sim$, qui doit satisfaire deux conditions postulées.

Axiome 1. Pour tous points A, B, C dans E, il existe un unique point D dans E tel que le vecteur issu de (C, D) soit égal à celui issu de (A, B) :

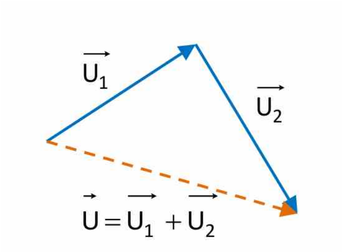
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}.$$

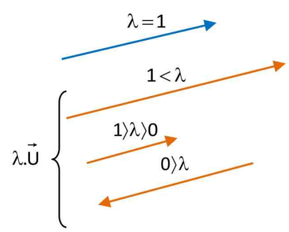
Axiome 1. Pour tous A, B, C dans E, si le vecteur issu de (A, B) est égal à celui issu de (C, D), alors les vecteurs issus des bipoints obtenus en échangeant les extrémités finales sont encore égaux entre eux :

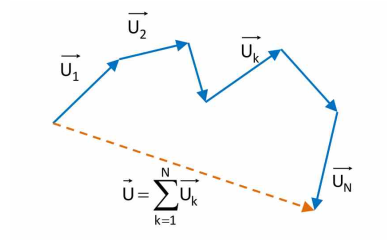
$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}.$$

Cette dernière formule est parfois appelée *formule du croisement des équipollences.*

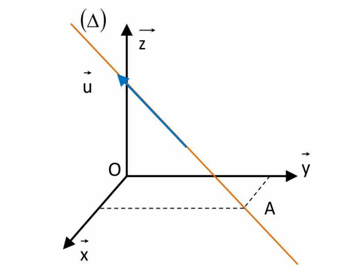
Ensuite, on démontre que les vecteurs sont satisfont les règles usuelles d'addition et de multiplication par un scalaire. L'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, ainsi que l'espace des vecteurs-bipoints de E, constitue un *espace de vecteurs*, un type d'espace que nous allons définir axiomatiquement dans ce chapitre en introduisant le concept mathématique d'*espace vectoriel*.







En physique, on introduit la notion de *vecteur glissant*. Un vecteur glissant est défini par sa droite d'action (support), son sens et sa valeur, son point d'application pouvant être quelconque sur la droite d'action.



Par exemple, une force appliquée à un solide indéformable peut glisser sur sa droite d'action sans modifier l'effet qu'elle produit. On dira que la force est représentée par un vecteur glissant.

En contraste, un vecteur lié est défini par sa droite d'action son sens, sa valeur *et* son point d'application.

Par exemle, le poids d'un corps $P \subset \mathbb{R}^3$ dans l'espace est un vecteur lié. C'est un vecteur qui a un point d'application bien défini qui est le barycentre ou le centre de gravité du corps.

On peut remplacer un vecteur libre par un vecteur équipollent quelconque, dans tout l'espace.

On peut glisser un vecteur glissant le long de son support.

Mais un vecteur lié ne peut pas être remplacé par un autre vecteur.

En résumé, on distingue les vecteurs liés, glissants et libres comme suit :

- Un vecteur lié a un point d'application bien défini.
- Un vecteur glissant a un point d'application variant sur une droite qui est son support.
- Un vecteur libre a un point d'application quelconque.

L'histoire de l'algèbre linéaire commence avec Al-Khawarizmi qui a traduit des textes de mathématiques indiens, réinterprété les travaux de l'école grecque et qui est la source du développement conscient de l'algèbre qui s'étendra pendant des siècles après lui. Elle a été reprise par René Descartes qui pose des problèmes de géométrie, comme la détermination de l'intersection de deux droites, en termes d'équation linéaire, établissant dès lors un pont entre deux branches mathématiques jusqu'alors séparées : l'algèbre et la géométrie. S'il ne définit pas la notion de base de l'algèbre linéaire qu'est celle d'espace vectoriel, il l'utilise déjà avec succès, et cette utilisation naturelle des aspects linéaires des équations manipulées demeurera utilisée de manière *ad hoc*, fondée essentiellement sur les idées géométriques sous-jacentes. Après cette découverte, les progrès en algèbre linéaire vont se limiter à des études ponctuelles comme la définition et l'analyse des premières propriétés des déterminants par Jean d'Alembert.

Ce n'est qu'au XIX$^{\text{ième}}$ siècle que l'algèbre linéaire devient une branche des mathématiques à part entière. Carl Friedrich Gauss trouve une méthode générique pour la résolution des systèmes d'équations linéaires et Camille Jordan résout définitivement le problème de la réduction des endomorphismes. En 1843, William Rowan Hamilton (inventeur du terme '*vector*') découvre les quaternions (extension de degré 4 du corps des nombres réels). En 1844, Hermann Grassmann publie son traité *Die lineale Ausdehnungslehre*, *La théorie de l'extension linéaire*, qui est la première tentative de formalisation générale de la notion d'espace vectoriel. Si son œuvre resta grandement inaperçue, elle contenait l'essentiel des idées modernes de l'algèbre linéaire, et cette étape fondamentale dans le développement de l'algèbre linéaire est reconnue comme telle tant par Hamilton que par Giuseppe Peano, qui axiomatise entièrement la théorie en 1888. Les espaces vectoriels deviennent alors une structure générale omniprésente dans presque tous les domaines mathématiques, notamment en analyse (espaces de fonctions).

Sous leur forme la plus simple, les applications linéaires dans les espaces vectoriels représentent intuitivement les déplacements dans les espaces géométriques élémentaires comme la droite, le plan ou notre espace physique. Les bases de cette théorie remplacent maintenant la représentation construite par Euclide au III$^{\text{ième}}$ siècle av. J.-C. La construction moderne permet de généraliser la notion d'espace à des dimensions quelconques.

L'algèbre linéaire permet de résoudre tout un ensemble d'équations dites linéaires utilisées non seulement en mathématiques ou en mécanique, mais aussi dans de nombreuses autres branches comme les sciences naturelles ou les sciences sociales.

Les espaces vectoriels forment aussi un outil fondamental pour les sciences de l'ingénieur et servent de base à de nombreux domaines dans la recherche opérationnelle.

Enfin, c'est un outil utilisé en mathématiques dans des domaines aussi divers que la théorie des groupes, des anneaux ou des corps, l'analyse fonctionnelle, la géométrie différentielle ou la théorie des nombres.

L'algèbre linéaire moderne s'intéresse beaucoup aux espaces de dimension arbitraire, éventuellement infinie. La plupart des résultats obtenus en dimension 2 ou 3 peuvent être étendus aux dimensions finies supérieures. Les vecteurs étant des listes ordonnées à n composantes, on peut manipuler ces données efficacement dans cet environnement. Par exemple en économie, on peut créer et utiliser des vecteurs à huit dimensions pour représenter le produit national brut de huit pays.

Les espaces vectoriels forment le support et le fondement de l'algèbre linéaire. Ils sont aussi présents dans de nombreux domaines distincts. S'il n'est pas possible d'indiquer ici tous les cas d'utilisation, on peut tout de même citer pour les principales structures objet de théories, des exemples significatifs. Leurs rôles dans de vastes théories ne traitant pas d'une structure particulière, comme celles des nombres algébriques ou de Galois peuvent aussi être évoqués.

Les espaces vectoriels utilisés sont d'une grande diversité. On y trouve les classiques espaces vectoriels de dimension 2 ou 3 sur les nombres réels, cependant la dimension peut être quelconque, même infinie. Les nombres complexes sont aussi très utilisés, ainsi que les rationnels. Il n'est pas rare qu'une partie des nombres réels ou complexes soit considérés comme un espace vectoriel rationnel. Le corps de base peut aussi contenir un nombre fini d'éléments, définissant parfois un espace vectoriel fini.

Les propriétés géométriques de la structure permettent la démonstration de nombreux théorèmes. Elles ne se limitent pas aux cas où l'espace est réel, même dans le cas de corps plus insolites comme les corps finis ou les extensions finies des rationnels, les propriétés géométriques s'avèrent parfois essentielles.

En algèbre, on rencontre des êtres mathématiques qui semblent très éloignés des vecteurs, par exemple l'espace $\mathbb{R}[x]$ des polynômes :

$$P(x) = a_0\, x^d + a_1\, x^{d-1} + \cdots + a_{d-1}\, x + a_d \qquad\qquad (a_0 \neq 0),$$

à coefficients réels $a_i \in \mathbb{R}$. Toutefois, cet espace $\mathbb{R}[x]$ jouit des mêmes propriétés de stabilité par addition et multiplication par des scalaires quelconques $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\Big(P(x) \in \mathbb{R}[x] \quad \text{et} \quad Q(x) \in \mathbb{R}[x]\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\, P(x) + \mu\, \mathbb{Q}(x) \in \mathbb{R}[x].$$

Dans ce premier chapitre du Cours d'Algèbre Linéaire, nous nous proposons donc d'étudier d'une manière systématique tout espace abstrait vérifiant les axiomes d'*espace vectoriel*, en un sens que nous allons préciser.

2. Structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et premières propriétés

Nous travaillerons la plupart du temps avec les nombres réels $\mathbb{R}$. De temps à autre, nous considérerons plus généralement un *corps commutatif* quelconque $\mathbb{K}$, mais nous garderons en tête que seulement deux corps concrets nous intéressent réellement :

$$\mathbb{K} = \mathbb{R} \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad \mathbb{K} = \mathbb{C}.$$

En mathématiques, la notion de *corps commutatif* est une des structures algébriques les plus fondamentales de l'algèbre générale. Il s'agit d'un ensemble muni de deux opérations binaires rendant possibles les additions, soustractions, multiplications et divisions. Plus précisément, un corps commutatif est un anneau commutatif dans lequel l'ensemble des éléments non nuls est un groupe commutatif pour la multiplication. Si cela est nécessaire, rappelons la formulation mathématique rigoureuse.

Définition 2.1. Un *corps commutatif* est un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux lois internes, notées en général $+$ et $\times$, vérifiant les conditions suivantes.

(1) $(\mathbb{K}, +)$ forme un groupe abélien — on dit aussi groupe commutatif —, dont l'élément neutre est noté 0.

(2) $(\mathbb{K}\backslash 0, \times)$ forme un groupe abélien multiplicatif, dont l'élément neutre est noté 1.

(3) La multiplication est *distributive*, à gauche comme à droite, pour l'addition c'est-à-dire que :

$$\forall\, (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{K}^3 \qquad \lambda\times(\mu+\nu) = \lambda\times\mu+\lambda\times\nu \qquad \text{et} \qquad (\lambda+\mu)\times\nu = \lambda\times\nu+\mu\times\nu.$$

On parle alors du *corps commutatif* $(\mathbb{K}, +, \times)$.

En fait, la multiplication $\lambda \cdot \nu$ est souvent notée avec un simple $\cdot$, voire même $\lambda\, \nu$ sans aucun signe.

Les trois exemples canoniques de corps commutatifs élémentaires sont :

- l'ensemble des nombres rationnels $(\mathbb{Q}, +, \times)$;
- l'ensemble des nombres réels $(\mathbb{R}, +, \times)$;
- l'ensemble des complexes $(\mathbb{C}, +, \times)$.

L'Appendice **8** à la fin de ce chapitre expose des rappels de base sur les nombres complexes.

Définition 2.2. Un *sous-corps* d'un corps commutatif $\mathbb{K}$ est une partie $\mathbb{L} \subset K$, stable par $+$ et $\times$, telle que $\mathbb{L}$ munie des lois induites soit un corps.

Évidemment, on a les inclusions de sous-corps :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$$

Nous pouvons enfin entrer dans le vif du sujet.

Définition 2.3. On dit qu'un ensemble E, dont les éléments seront appelés des *vecteurs*, est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{R}$, ou un $\mathbb{R}$-*espace vectoriel*, s'il satisfait les deux axiomes suivants.

Axiome I. E est un groupe commutatif pour une loi additive notée $+$, c'est-à-dire que pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in E$, on a :

$$\vec{x} + \big(\vec{y} + \vec{z}\big) = \big(\vec{x} + \vec{y}\big) + \vec{z}, \qquad \vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x},$$
$$\vec{x} + \big(-\vec{x}\big) = \vec{0}, \qquad \vec{x} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{x} = \vec{x},$$

où $-\vec{x}$ est l'opposé de $\vec{x}$ pour l'addition, et où $\vec{0} \in E$ est le vecteur nul.

Axiome II. E est muni d'une loi de composition externe sur $\mathbb{R}$, noté :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times E &\longrightarrow E \\ \big(\lambda, \vec{x}\big) &\longmapsto \lambda\,\vec{x}, \end{aligned}$$

satisfaisant les propriétés suivantes, pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, et tous nombres réels $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

(1) $\lambda\big(\vec{x} + \vec{y}\big) = \lambda\,\vec{x} + \lambda\,\vec{y}$;

(2) $\big(\lambda + \mu\big)\,\vec{x} = \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}$;

(3) $\lambda\big(\mu\,\vec{x}\big) = (\lambda\,\mu)\,\vec{x}$;

(4) $1\,\vec{x} = \vec{x}$.

Il importe d'exprimer que la caractéristique fondamentale d'un espace vectoriel est la stabilité de ses éléments par combinaisons linéaires quelconques :

$$\forall\,\vec{x} \in E,\ \ \forall\,\vec{y} \in E,\ \ \forall\,\lambda \in \mathbb{R},\ \ \forall\,\mu \in \mathbb{R} \qquad \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} \in E.$$

Pour les différencier des *vecteurs* $\vec{x} \in E$, les éléments $\lambda \in \mathbb{R}$ seront nommés des *scalaires*. Cette définition se généralise en remplaçant $\mathbb{R}$ par n'importe quel corps commutatif $\mathbb{K}$.

En se basant sur ces axiomes, on développe une théorie que l'on nomme *Algèbre linéaire*, qui est une généralisation, à des espaces abstraits vérifiant ces axiomes, des propriétés que l'on rencontre en géométrie euclidienne.

Assertion 2.4. *Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, les quatre propriétés suivantes sont satisfaites.*

(1) $0 \cdot \vec{x} = \vec{0}$.

(2) $\lambda\,\vec{0} = \vec{0}$.

(3) $\lambda\,\vec{x} = \vec{0} \Longleftrightarrow \big(\lambda = 0$ *ou* $\vec{x} = \vec{0}\big)$.

(4) $(-\lambda)\,\vec{x} = -(\lambda\,x) = \lambda\,(-\vec{x})$.

Preuve. **(1)** En effet :

$$\lambda\,\vec{x} \,=\, \big(\lambda + 0\big)\,\vec{x} \,=\, \lambda\,\vec{x} + 0\,\vec{x},$$

d'où par soustraction $\vec{0} = 0\,\vec{x}$.

(2) En effet :

$$\lambda\,\vec{x} \,=\, \lambda\,\big(\vec{x} + \vec{0}\big) \,=\, \lambda\,\vec{x} + \lambda\,\vec{0},$$

d'où par soustraction $\vec{0} = \lambda\,\vec{0}$.

(3) Il reste à voir l'implication '$\Longrightarrow$'. En partant de $\vec{0} = \lambda\,\vec{x}$, où on peut supposer $\lambda \neq 0$ grâce à **(1)**, et en multipliant par λ^{-1}, on obtient bien :

$$\vec{0} \,=\, \lambda^{-1}\,\vec{0} \,=\, \lambda^{-1}\big(\lambda\,\vec{x}\big) \,=\, \big(\lambda^{-1}\lambda\big)\,\vec{x} \,=\, \vec{x}.$$

(4) En effet, d'après **(1)** :

$$0 \,=\, \lambda + (-\lambda) \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{aligned} \vec{0} &= \big[\lambda + (-\lambda)\big]\,\vec{x} \\ &= \lambda\,\vec{x} + (-\lambda)\,\vec{x}, \end{aligned}$$

ce qui donne la première égalité $-\lambda\,\vec{x} = (-\lambda)\,\vec{x}$. Avec $\lambda = 1$, on en déduit en particulier :

$$(-1)\,\vec{x} \,=\, -\,\big(1\,\vec{x}\big) \,=\, -\,\vec{x}.$$

Alors la déuxième égalité va s'en déduire *via :*

$$\lambda\,\big(-\vec{x}\big) \,=\, \lambda\,\big[(-1)\,\vec{x}\big] \,=\, \big(\lambda\,(-1)\big)\,\vec{x} \,=\, (-\lambda)\,\vec{x}. \qquad \square$$

Exemple 2.5. Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif quelconque (on peut s'imaginer qu'il s'agit de $\mathbb{R}$). Munissons l'ensemble $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ des lois suivantes :

$$\begin{aligned} (a, b) + (a', b') \,&=\, \big(a + a',\, b + b'\big), \\ \lambda\,(a, b) \,&=\, \big(\lambda\,a,\, \lambda\,b\big). \end{aligned}$$

La première loi définit sur $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ une structure de groupe commutatif : l'associativité et la commutativité résultent de l'associativité et de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{K}$; l'élément neutre est $(0, 0)$; l'opposé de (a, b) est $(-a, -b)$.

La seconde loi vérifie les 4 Axiomes II de la Définition 2.3.

$$\begin{aligned}
&\textbf{(1)} & \lambda\,\big[(a, b) + (a', b')\big] \,&=\, \lambda\,\big(a + a',\, b + b'\big) \,=\, \big(\lambda\,a + \lambda\,a',\; \lambda\,b + \lambda\,b'\big) \\
& & &=\, \big(\lambda\,a,\, \lambda\,b\big) + \big(\lambda\,a',\, \lambda\,b'\big) \,=\, \lambda\,(a, b) + \lambda\,(a', b'), \\
&\textbf{(2)} & \big(\lambda + \mu\big)\,(a, b) \,&=\, \big[(\lambda + \mu)\,a,\, (\lambda + \mu)\,b\big] \,=\, \big(\lambda\,a + \mu\,a,\, \lambda\,b + \mu\,b\big) \\
& & &=\, \big(\lambda\,a,\, \lambda\,b\big) + \big(\mu\,a,\, \mu\,b\big) \,=\, \lambda\,(a, b) + \mu\,(a, b), \\
&\textbf{(3)} & \lambda\,\big[\mu\,(a, b)\big] \,&=\, \lambda\,\big(\mu\,a,\, \mu\,b\big) \,=\, \big(\lambda\mu\,a,\, \lambda\mu\,b\big) \,=\, (\lambda\mu)\,(a, b), \\
&\textbf{(4)} & 1\,(a, b) \,&=\, \big(1\,a,\, 1\,b\big) \,=\, (a, b).
\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathbb{K} \times \mathbb{K}$ constitue un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Exemple 2.6. Plus généralement, considérons l'ensemble $\mathbb{K}^n$ des n-uplets ordonnés :

$$\vec{a} \,:=\, \big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big),$$

de nombres $a_i \in \mathbb{K}$. Si on munit $\mathbb{K}^n$ des lois suivantes :

$$\begin{aligned} \big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big) + \big(b_1, b_2, \ldots, b_n\big) \,&=\, \big(a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n\big), \\ \lambda\,\big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big) \,&=\, \big(\lambda\,a_1,\, \lambda\,a_2,\, \ldots, \lambda\,a_n\big), \end{aligned}$$

on vérifie, comme précédemment, que les Axiomes I et II de la Définition 2.3 sont satisfaits. De la sorte, $\mathbb{K}^n$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$.

Observons que dans le cas $n = 1$, *tout corps commutatif* $\mathbb{K}$ *est un espace vectoriel sur lui-même*. De plus, pour $n = 1$, les scalaires sont *en même temps* des vecteurs.

Ensuite, si $\mathbb{K}' \subset \mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{K}$, alors tout espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ est aussi un espace vectoriel sur $\mathbb{K}'$, lorsqu'on prend pour loi de composition externe la restriction à $\mathbb{K}' \times \mathbb{E}$ de la loi définie sur $\mathbb{K} \times E$.

C'est ainsi qu'un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels, lequel est à son tour un espace vectoriel sur les corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, au vu des inclusions de corps :

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{R}.$$

3. Sous-espaces vectoriels

Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, constitué des vecteurs (a, b, c) comme ci-dessus, l'ensemble des vecteurs $(a, b, 0)$ dont la troisième coordonnées est nulle est encore stable par les Axiomes I et II. Plus généralement, énonçons une

Définition 3.1. On appelle *sous-espace vectoriel*, ou simplement *sous-espace*, d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, tout sous-ensemble $F \subset E$ qui est à lui tout seul un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

En d'autres termes, une partie F d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E est dite sous-espace lorsque les deux conditions suivantes sont réalisées :

(1) F est un sous-groupe de E pour l'addition ;

(2) la restriction à $\mathbb{R} \times F$ de la loi externe, définie sur $\mathbb{R} \times E$, est une application à valeurs dans F.

Lemme 3.2. *Pour que F soit un sous-espace vectoriel de E, il faut et il suffit que :*

$$\forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \qquad \big(\vec{x} \in F \quad \textit{et} \quad \vec{y} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y} \in F.$$

Preuve. La condition est évidemment nécessaire. Prouvons qu'elle suffit, c'est-à-dire qu'une telle partie $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel. En prenant d'abord $\lambda = 1$ et $\mu = -1$, il vient :

$$\big(\vec{x} \in F \quad \text{et} \quad \vec{y} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{x} - \vec{y} \in F,$$

ce qui montre que F est un sous-groupe, pour l'addition, de E.

Ensuite, en prenant $\mu = 0$, il vient :

$$\big(\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{x} \in F\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda\,\vec{x} \in F.$$

Par conséquent, la loi externe $(\lambda, \vec{x}) \longmapsto \lambda\,\vec{x}$ applique $\mathbb{R} \times F$ dans F, ce qui conclut. □

Exemples 3.3. **(1)** Le singleton $\{\vec{0}\}$ contenant comme unique élément l'élément neutre de l'addition des vecteurs de E est un sous-espace vectoriel de E.

(2) Soit $\vec{x} \in E$. L'ensemble F des vecteurs $\lambda\,\vec{x}$ quand λ parcourt $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Il se réduit à $\{\vec{0}\}$ quand $\vec{x} = \vec{0}$.

(3) Soient deux vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$. L'ensemble des vecteurs $\lambda\,\vec{x} + \mu\,\vec{y}$ quand λ et μ parcourent $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de E. Dans un instant, cet exemple va être généralisé aux combinaisons linéaires d'une famille quelconque finie de vecteurs.

(4) Dans l'espace vectoriel V des vecteurs de la géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^3$, toute partie V_D consistant en les vecteurs de même direction qu'une droite D donnée est un sous-espace vectoriel de V. Toute partie V_P consistant en les vecteurs parallèles à un plan donné est un sous-espace vectoriel de V.

Lemme 3.4. *L'intersection $F_1 \cap F_2$ de deux sous-espaces $F_1 \subset E$ et $F_2 \subset E$ est encore un sous-espace de E.*

Preuve. En effet, si $\vec{x}$ et $\vec{y}$ appartiennent à $F_1 \cap F_2$, alors ils appartiennent à la fois à F_1 et à F_2. Par suite, quels que soient les scalaires λ et μ, l'élément $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}$ appartient à la fois à F_1 et à F_2, donc à $F_1 \cap F_2$. $\square$

En géométrie euclidienne, si P et Q sont deux plans sécants le long d'une droite D, alors l'intersection des sous-espaces V_P et V_Q est le sous-espace V_D.

4. Combinaisons linéaires de vecteurs

Une partie finie d'un espace vectoriel E se nomme *famille finie de vecteurs*.

Définition 4.1. Pour toute famille finie $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ d'un nombre $p \geqslant 1$ de vecteurs de E, on appelle *combinaison linéaire* de ces vecteurs tout vecteur $\vec{x} \in E$ qui s'écrit sous la forme :

$$\vec{x} \,=\, \lambda_1 \,\vec{x}_1 + \lambda_2 \,\vec{x}_2 + \cdots + \lambda_p \,\vec{x}_p,$$

avec des scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ quelconques. Ces scalaires sont nommés *coefficients* de la combinaison linéaire.

Exemples 4.2. **(1)** Le vecteur nul $\vec{0}$ est combinaison linéaire de toute famille finie de vecteurs, les coefficients étant tous nuls.

(2) Tout vecteur $\vec{x}$ est combinaison linéaire de toute famille contenant $\vec{x}$, le coefficient de $\vec{x}$ étant égal à 1, tous les autres égaux à 0.

(3) Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, soient :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &:= \big(1,0,0\big), \\ \vec{e}_2 &:= \big(0,1,0\big), \\ \vec{e}_3 &:= \big(0,0,1\big). \end{aligned}$$

Tout vecteur (a,b,c) de $\mathbb{R}^3$ est combinaison linéaire de la famille $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, car :

$$\begin{aligned} \big(a,b,c\big) &= \big(a,0,0\big) + \big(0,b,0\big) + \big(0,0,c\big) \\ &= a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3. \end{aligned}$$

Venons-en maintenant au concept de sous-espace engendré par une famille de vecteurs.

Théorème 4.3. *Soit $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\}$ une famille de $p \geqslant 1$ vecteurs d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E. L'ensemble F des combinaisons linéaires de cette famille est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de E.*

De plus c'est le plus petit sous-espace contenant la famille donnée.

Démonstration. Partons de deux éléments quelconques de F :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= \lambda_1 \,\vec{x}_1 + \cdots + \lambda_p \,\vec{x}_p, \\ \vec{y} &= \mu_1 \,\vec{x}_1 + \cdots + \mu_p \,\vec{x}_p. \end{aligned}$$

Quels que soient les scalaires γ et δ, on a :

$$\gamma\,\vec{x}+\delta\,\vec{y}\;=\;\big(\gamma\,\lambda_1+\delta\,\mu_1\big)\,\vec{x}_1+\cdots+\big(\gamma\,\lambda_p+\delta\,\mu_p\big)\,\vec{x}_p.$$

On obtient une combinaison linéaire de la famille proposée, donc un élément de F, qui est par conséquent un sous-espace vectoriel de E.

Ensuite, F contient clairement chacun des vecteurs $\vec{x}_i$ de la famille : pour chaque rang i, prendre $a_i=1$, et tous les autres coefficients nuls.

D'autre part, tout sous-espace contenant la famille $\big\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\big\}$ doit contenir $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_p\vec{x}_p$ quels que soient les coefficients, et donc doit contenir aussi la somme $\lambda_1\vec{x}_1+\cdots+\lambda_p\vec{x}_p$. Un tel sous-espace coïncide donc avec F qui est, par conséquent, le plus petit sous-espace contenant $\big\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big\}$. □

Terminologie 4.4. Le sous-espace vectoriel $F\subset E$ est dit *engendré* par la famille $\big\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big\}$, et on note :

$$F\;=\;\mathsf{Vect}\,\big(\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\big).$$

Inversement, $\big\{\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_p\big\}$ est dite une *famille de générateurs* de F.

5. Familles libres et familles liées

Voici un concept important qui signifie qu'on ne peut pas supprimer des vecteurs.

Définition 5.1. On dit qu'une famille $\big\{\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_p\big\}$ de vecteurs d'un espace vectoriel E est *libre*, ou que les vecteurs $\vec{x}_i$ sont *linéairement indépendants*, si la relation :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+\cdots+a_p\,\vec{x}_p\;=\;\vec{0}$$

entraîne :

$$a_1\;=\;a_2\;=\;\cdots\;=\;a_p\;=\;0.$$

Exemples 5.2. **(1)** Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{x}_1&:=\big(1,0,0,0\big),\\ \vec{x}_2&:=\big(0,1,0,0\big),\\ \vec{x}_3&:=\big(0,0,1,0\big),\end{aligned}$$

constituent une famille libre. En effet :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+a_3\,\vec{x}_3\;=\;\big(a_1,a_2,a_3,0\big),$$

et :

$$\big(a_1,a_2,a_3,0\big)\;=\;\vec{0}\qquad\qquad\Longrightarrow\qquad\qquad a_1\;=\;a_2\;=\;a_3\;=\;0.$$

(2) Toujours dans $\mathbb{R}^4$, les trois vecteurs :

$$\begin{aligned}\vec{x}_1&:=\big(1,0,0,0\big),\\ \vec{x}_2&:=\big(0,1,0,0\big),\\ \vec{x}_3&:=\big(1,1,0,0\big),\end{aligned}$$

ne sont *pas* linéairement indépendants. En effet :

$$a_1\,\vec{x}_1+a_2\,\vec{x}_2+a_3\,\vec{x}_3\;=\;\big(a_1+a_3,\;a_2+a_3,\;0,0\big),$$

et il existe des scalaires non nuls tels que cette combinaison linéaire soit nulle, car il suffit de prendre par exemple :

$$a_1 \,=\, a_2 \,=\, -\,a_3 \,\neq\, 0.$$

Exprimons cela comme suit.

Définition 5.3. Si une famille $\big\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big\}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est *liée*, ou que les vecteurs $\vec{x}_i$ *linéairement dépendants*, ou encore qu'ils ne sont *pas linéairement indépendants*. Il existe alors des scalaires $a_i \in \mathbb{R}$ non tous nuls avec :

$$\vec{0} \,=\, a_1\,\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p.$$

Si dans la famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$, il existe un indice k avec $1 \leqslant k \leqslant p$ tel que $\vec{x}_k \,=\, \vec{0}$, alors cette famille est liée. En effet, on satisfait à :

$$a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_k\,\vec{x}_k + \cdots + a_p\,\vec{x}_p \,=\, \vec{0},$$

en prenant tous les $a_i = 0$ nuls, sauf a_k. En résumé, on a une

Observation 5.4. *Une famille est liée dès lors qu'elle contient un vecteur nul.* □

Nous pouvons maintenant prouver un premier résultat technique déterminant pour enclencher ce cours d'algèbre linéaire.

Théorème 5.5. *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E qui est engendré par $p \geqslant 1$ vecteurs. Alors toute famille d'au moins $p{+}1$ vecteurs de F est toujours nécessairement liée.*

Il importe que ces $p + 1$ vecteurs soient tous dans F.

Démonstration. Par hypothèse :

$$F \,=\, \mathsf{Vect}\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big),$$

est engendré par une certaine famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ de vecteurs $\vec{x}_i \in E$.

Il s'agit de prouver que toute famille de $p + 1$ vecteurs de F :

$$\big\{\vec{y}_1,\, \vec{y}_2,\, \dots,\, \vec{y}_p,\, \vec{y}_{p+1}\big\} \,\subset\, F$$

est liée. Toute famille de F, dont le cardinal est supérieur à $p + 1$, sera alors liée *a fortiori*.

Raisonnons par récurrence sur l'entier p.

• Pour $p = 1$, l'ensemble F est engendré par un unique vecteur $\{\vec{x}_1\}$, et alors :

$$\begin{array}{lcll} \vec{y}_1 \,\in\, F & \Longrightarrow & \exists\, a_1 \,\in\, \mathbb{R}, & \vec{y}_1 \,=\, a_1\,\vec{x}_1, \\ \vec{y}_2 \,\in\, F & \Longrightarrow & \exists\, a_2 \,\in\, \mathbb{R}, & \vec{y}_2 \,=\, a_2\,\vec{x}_1. \end{array}$$

On *élimine* $\vec{x}_1$, ce qui donne :

$$a_2\,\vec{y}_1 - a_1\,\vec{y}_2 \,=\, \vec{0}.$$

Si les scalaires a_1 et a_2 ne sont pas simultanément nuls, alors la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ est liée par définition.

Si les deux scalaires sont nuls, c'est que $\vec{y}_1 \,=\, \vec{y}_2 \,=\, \vec{0}$, et la famille $\{\vec{y}_1, \vec{y}_2\}$ est encore liée.

Par conséquent, le théorème est prouvé pour $p = 1$.

• Ensuite, supposons le théorème vrai pour $p-1$ vecteurs, avec $p \geqslant 2$, et démontrons-le pour p vecteurs. Alors, si on désigne par F' le sous-espace engendré par la famille des $p-1$ premiers vecteurs :

$$F' := \mathsf{Vect}\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{p-1}\big\},$$

l'hypothèse de récurrence s'applique à F', et donc, toute famille de p vecteurs de F' est liée.

Maintenant, tout vecteur $\vec{y}$ de F, c'est-à-dire toute combinaison linéaire des vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{p-1}, \vec{x}_p$, peut se mettre sous la forme :

$$\vec{y} = \vec{z} + a\,\vec{x}_p \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad \vec{z} \in F' \quad \text{et} \quad a \in \mathbb{R}.$$

En conséquence, pour tout j avec $1 \leqslant j \leqslant p+1$, il existe :

$$\vec{z}_j \in F' \qquad \text{et} \qquad a_j \in \mathbb{R},$$

tels que, pour tout $1 \leqslant j \leqslant p+1$:

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j + a_j\,\vec{x}_p. \tag{5.6}$$

On a ainsi $p+1$ relations. Envisageons alors deux cas.

Premier cas : Tous les $a_j = 0$ sont nuls. Alors :

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j \in F' \qquad\qquad (\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p+1).$$

L'hypothèse de récurrence s'applique à F', et dit que p vecteurs quelconques — *a fortiori* les $p+1$ vecteurs $\vec{y}_j$ — constituent toujours une famille liée. Le théorème est donc prouvé sans aucun effort dans ce cas.

Deuxième cas : Il existe des $a_j \neq 0$ non nuls. En changeant au besoin l'ordre de la numérotation des $\vec{y}_j$, on peut supposer par exemple que $a_{p+1} \neq 0$. Alors, de la dernière des relations (5.6), *i.e.* celle pour $j = p+1$, on tire, puisque a_{p+1} possède un inverse $\frac{1}{a_{p+1}}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\vec{x}_p = \tfrac{1}{a_{p+1}}\big(\vec{y}_{p+1} - \vec{z}_{p+1}\big).$$

En portant cela dans les p premières relations (5.6), on *élimine* $\vec{x}_p$:

$$\vec{y}_j = \vec{z}_j + \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\big(\vec{y}_{p+1} - \vec{z}_{p+1}\big) \qquad\qquad (\forall\, 1 \leqslant j \leqslant p+1),$$

d'où l'on tire :

$$\vec{y}_j - \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1} = \vec{z}_j - \tfrac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{z}_{p+1},$$

ce qui prouve que les p vecteurs $\vec{y}_j - \frac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}$ des premiers membres appartiennent, comme ceux $\vec{z}_j - \frac{a_j}{a_{p+1}}\,\vec{z}_{p+1}$ des seconds membres, à F'.

Par hypothèse de récurrence, ces p vecteurs constituent une famille liée. Il existe par conséquent des scalaires $b_1, \dots, b_p$ *non tous nuls* tels que :

$$b_1\big(\vec{y}_1 - \tfrac{a_1}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}\big) + \cdots + b_p\big(\vec{y}_p - \tfrac{a_p}{a_{p+1}}\,\vec{y}_{p+1}\big) = \vec{0}.$$

Si l'on pose alors :

$$b_{p+1} := -\tfrac{1}{a_{p+1}}\big(a_1\,b_1 + \cdots + a_p\,b_p\big),$$

on obtient :

$$b_1\,\vec{y}_1 + \cdots + b_p\,\vec{y}_p + b_{p+1}\,\vec{y}_{p+1} = \vec{0},$$

les scalaires $b_1, \dots, b_p, b_{p+1}$ n'étant pas tous nuls. La famille $\big\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_p, \vec{y}_{p+1}\big\}$ est donc liée. Le Théorème 5.5 est démontré. □

Exemple 5.7. Soient, dans un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E, une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$. Prenons :

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \\
\vec{y}_2 &= \vec{x}_1 - \vec{x}_2 + \vec{x}_3, \\
\vec{y}_3 &= \vec{x}_1 + \vec{x}_2 - \vec{x}_3, \\
\vec{y}_4 &= -\vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3.
\end{aligned}$$

Nous affirmons que quels que soient $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, la famille $\left\{\vec{y}_1, \vec{y}_2, \vec{y}_3, \vec{y}_4\right\}$ est liée. Une relation de dépendance s'obtient facilement en ajoutant membre à membre :

$$\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4 \;=\; 2\,\vec{x}_1 + 2\,\vec{x}_2 + 2\,\vec{x}_3 \;=\; 2\,\vec{y}_1,$$

d'où :

$$-\vec{y}_1 + \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4 \;=\; \vec{0}.$$

La démonstration du Théorème 5.5 est basée sur l'élimination. Recommençons la démonstration sur cet exemple, en tirant $\vec{x}_3$ de la dernière relation :

$$\vec{x}_3 \;=\; \vec{y}_4 + \vec{x}_1 - \vec{x}_2,$$

et remplaçons dans les trois autres, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= 2\,\vec{x}_1 + \vec{y}_4, \\
\vec{y}_2 &= 2\,\vec{x}_1 - 2\,\vec{x}_2 + \vec{y}_4, \\
\vec{y}_3 &= 2\,\vec{x}_2 - \vec{y}_4.
\end{aligned}$$

Si une relation ne contient plus les $\vec{x}_i$ — ce n'est pas le cas ici —, elle offre une relation de dépendance entre les $\vec{y}_j$, et on s'arrête. Sinon, on réitère le procédé : on tire $2\,\vec{x}_2$ de la dernière :

$$2\,\vec{x}_2 \;=\; \vec{y}_3 + \vec{y}_4,$$

et on porte cela dans les précédentes, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\vec{y}_1 &= 2\,\vec{x}_1 + \vec{y}_4, \\
\vec{y}_2 &= 2\,\vec{x}_1 - \vec{y}_3.
\end{aligned}$$

En réitérant encore une fois le procédé, on élimine $\vec{x}_1$, et on obtient finalement la relation de dépendance cherchée :

$$\vec{y}_1 \;=\; \vec{y}_2 + \vec{y}_3 + \vec{y}_4.$$

Corollaire 5.8. *Pour qu'une famille $\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\right\}$ soit liée, il faut et il suffit qu'il existe un indice i avec $1 \leqslant i \leqslant p$ tel que $\vec{x}_i$ appartienne au sous-espace engendré par les $\vec{x}_j$ d'indices $j \neq i$.*

Preuve. En effet, s'il existe un tel indice i tel que $\vec{x}_i$ soit une combinaison linéaire des autres vecteurs :

$$\vec{x}_i \;=\; \mu_1\,\vec{x}_1 + \cdots + \mu_{i-1}\,\vec{x}_{i-1} + \mu_{i+1}\,\vec{x}_{i+1} + \cdots + \mu_n\,\vec{x}_n,$$

on applique le Théorème 5.5, et la famille $\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\right\}$ est liée.

Réciproquement, supposons que $\left\{\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_p\right\}$ soit liée. Alors il existe des scalaires $a_1, \ldots, a_p \in \mathbb{R}$ non tous nuls tels que :

$$a_1\,\vec{x}_1 + a_2\,\vec{x}_2 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p \;=\; \vec{0}.$$

En changeant au besoin l'ordre de la numérotation, on peut supposer que $a_1 \neq 0$. On en déduit alors :

$$\vec{x}_1 \;=\; -\tfrac{a_2}{a_1}\,\vec{x}_2 - \cdots - \tfrac{a_p}{a_1}\,\vec{x}_p.$$

Cette relation prouve que $\vec{x}_1$ appartient au sous-espace vectoriel engendré par $\big\{\vec{x}_2, \dots, \vec{x}_p\big\}$. $\square$

Par contraposition, on a immédiatement un énoncé équivalent à celui du corollaire qui précède.

Corollaire 5.9. *Pour que la famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit libre, il faut et il suffit que, pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant p$, le vecteur $\vec{x}_i$ n'appartienne* pas *au sous-espace engendré par tous les $\vec{x}_j$ d'indices $j \neq i$.* $\square$

On a aussi le théorème suivant, qui établit l'*unicité* de la représentation.

Théorème 5.10. *Pour qu'une famille $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ soit libre, il faut et il suffit qu'à tout vecteur $\vec{x}$ du sous-espace vectoriel qu'elle engendre :*

$$\vec{x} \,\in\, F \,:=\, \mathsf{Vect}\,\big(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big),$$

il corresponde une unique *famille $\{a_1, \dots, a_p\}$ de scalaires tels que :*

$$\vec{x} \;=\; a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p.$$

Démonstration. Supposons qu'à un vecteur $\vec{x} \in F$ correspondent deux familles $\{a_1, \dots, a_p\}$ et $\{b_1, \dots, b_p\}$ de scalaires tels que :

$$\vec{x} \;=\; a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p \;=\; b_1\,\vec{x}_1 + \cdots + b_p\,\vec{x}_p.$$

Par soustraction, on déduit :

$$\big(a_1 - b_1\big)\,\vec{x}_1 + \cdots + \big(a_p - b_p\big)\,\vec{x}_p \;=\; \vec{0}. \tag{5.11}$$

Démontrons l'implication '$\Longrightarrow$'. Si $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ est une famille libre, alors cette relation (5.11) entraîne :

$$a_1 - b_1 \;=\; \cdots \;=\; a_p - b_p \;=\; 0,$$

c'est-à-dire :

$$a_1 \;=\; b_1, \;\; \dots\dots, \;\; a_p \;=\; b_p.$$

Ainsi, à tout $\vec{x}$ du sous-espace F engendré par la famille libre correspond une *unique* famille de scalaires tels que $\vec{x} = a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p$.

Démontrons l'implication inverse '$\Longleftarrow$'. Si $\big\{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\big\}$ n'est pas libre, la relation (5.11) est vérifiée par certains scalaires $a_i - b_i$ non tous nuls. Au vecteur $\vec{x}$ de F correspondent alors deux familles *distinctes* de scalaires $\{a_1, \dots, a_p\}$ et $\{b_1, \dots, b_p\}$ vérifiant :

$$\vec{x} \;=\; a_1\,\vec{x}_1 + \cdots + a_p\,\vec{x}_p \;=\; b_1\,\vec{x}_1 + \cdots + b_p\,\vec{x}_p.$$

Le Théorème 5.10 est démontré. $\square$

Exemples 5.12. [en Géométrie] Voici trois illustrations dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne spatiale.

(1) Une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ de deux vecteurs est libre si l'un deux, par exemple $\vec{x}_1$, n'appartient pas au sous-espace engendré par l'autre, c'est-à-dire si $\vec{x}_1$ et $\vec{x}_2$ ne sont *pas colinéaires*.

(2) Une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ de trois vecteurs est libre si l'un quelconque d'entre eux n'appartient pas au sous-espace engendré par les deux autres : cette propriété exige que les trois vecteurs ne soient *pas coplanaires*.

(3) Nous affirmons que pour $p \geqslant 4$, une famille $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \dots, \vec{x}_p\}$ est toujours liée. En effet, supposons au contraire cette famille libre, toujours avec $p \geqslant 4$, et prouvons qu'on aboutit à une contradiction.

L'hypothèse entraîne que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ est libre, aussi. Or nous savons, en prenant ces trois vecteurs pour directions d'axes de coordonnées dans l'espace, que tout vecteur quelconque $\vec{x} \in V$ est alors combinaison linéaire de ces trois-là. En particulier, $\vec{x}_4$ serait combinaison linéaire de $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$, et l'hypothèse serait contredite. Donc quand $p \geqslant 4$, la famille est nécessairement liée.

Dans cet exemple de l'espace vectoriel $V = \mathbb{R}^3$ de la géométrie euclidienne, on voit que toute famille libre contient au plus trois vecteurs. C'est pour cela que $V = \mathbb{R}^3$ est dit en physique *espace vectoriel à* 3 *dimensions*, la famille libre $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ constituant une *base* de cet espace. Nous allons maintenant définir mathématiquement ces notions pour un espace vectoriel quelconque.

6. Bases, dimensions, coordonnées

Commençons par deux définitions très importantes.

Définition 6.1. On dit qu'un espace vectoriel E est *de dimension finie* s'il existe une famille *finie* de générateurs de E.

Définition 6.2. On appelle *base* d'un espace vectoriel E toute famille libre $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de générateurs de E.

Dans la notion de base, les deux conditions sont importantes et indépendantes :

- liberté ;
- générativité.

Si la famille finie $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ engendre l'espace E tout entier, alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, il existe au moins une collection $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ de scalaires $a_i \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\vec{x} = a_1\,\vec{e}_1 + a_2\,\vec{e}_2 + \cdots + a_n\,\vec{e}_n.$$

Si, de plus, la famille $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est libre, c'est-à-dire si elle constitue une base de E, alors, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, la famille de scalaires $\{a_1, \dots, a_n\}$ est de plus *unique*, d'après le Théorème 5.10.

Terminologie 6.3. Les scalaires $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont alors appelés *coordonnées de* $\vec{x}$ *dans la base* $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$.

Exemples 6.4. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, considérons les trois vecteurs :

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= (1, 0, 0), \\ \vec{e}_2 &= (0, 1, 0), \\ \vec{e}_3 &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Quel que soit le vecteur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on a :

$$(a, b, c) = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3.$$

Par conséquent, $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une famille de générateurs de $\mathbb{R}^3$, qui est donc de dimension finie.

De plus, cette famille est libre, car :

$$a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2 + c\,\vec{e}_3 \,=\, \vec{0}$$

entraîne :

$$\big(a, b, c\big) \,=\, \vec{0},$$

ce qui exige :

$$a \,=\, b \,=\, c \,=\, 0.$$

Donc $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

(2) L'espace vectoriel $\mathbb{R}[x]$ des polynômes réels à une indéterminée sur le corps $\mathbb{R}$ n'est *pas* de dimension finie. Montrons en effet que toute famille finie incluse dans $\mathbb{R}[x]$ ne peut pas être famille de générateurs de $\mathbb{R}[x]$. En effet, l'ensemble des degrés des polynômes est une partie finie de $\mathbb{N}$; elle admet donc un plus grand élément m.

Tout polynôme de degré strictement supérieur à m, et il en existe dans $\mathbb{R}[x]$, ne peut s'obtenir comme combinaison linéaire de polynômes de degré au plus égal à m, puisque le degré d'une combinaison linéaire est toujours inférieur ou égal au maximum des degrés de ses composants. Donc $\mathbb{R}[x]$ n'est pas de dimension finie.

(3) Par contre, donnons-nous un nombre naturel $n \geqslant 0$, et considérons la partie de $\mathbb{R}[x]$, notée $\mathbb{R}_n[x]$, constituée des polynômes de degrés au plus égaux à n :

$$\mathbb{R}_n[x] \,:=\, \big\{p \in \mathbb{R}[x] \colon \, \deg p \leqslant n\big\}.$$

Prouvons d'abord que $\mathbb{R}_n[x]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$. En effet, quels que soient les scalaires λ et μ, et les polynômes p et q, on a :

$$\deg\big(\lambda\,p + \mu\,q\big) \,\leqslant\, \max\big\{\deg p,\, \deg q\big\}.$$

Par suite :

$$\Big(\deg p \,\leqslant\, n \qquad \text{et} \qquad \deg q \,\leqslant\, n\Big) \qquad \Longrightarrow \qquad \deg\big(\lambda\,p + \mu\,q\big) \,\leqslant\, n.$$

Donc $\mathbb{R}_n[x]$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[x]$.

Montrons maintenant que la famille :

$$B \,:=\, \big\{1,\, x^1,\, x^2,\, x^3,\, x^4,\, x^5,\, \dots,\, x^n\big\}$$

des puissances successives $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n$ de x constitue une *base* de $\mathbb{R}_n[x]$.

Assertion 6.5. *B est une famille de générateurs de $\mathbb{R}_n[x]$.*

Preuve. En effet, pour tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$, il existe une famille de scalaires $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que :

$$p \,=\, a_0 + a_1\,x + \cdots + a_n\,x^n.$$

Donc tout polynôme $p \in \mathbb{R}_n[x]$ est une combinaison linéaire des « vecteurs » de B, qui est par conséquent une famille de générateurs de $\mathbb{R}_n[x]$. Donc $\mathbb{R}_n[x]$ est de dimension finie. □

Assertion 6.6. *B est une famille libre.*

Preuve. En effet, la relation :

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = 0$$

veut dire que le polynôme du premier membre est le polynôme nul, donc tous ses coefficients sont nuls :

$$a_0 = a_1 = \cdots = a_n = 0.$$

Par conséquent, B est bien une famille libre, donc constitue une base de $\mathbb{R}_n[x]$. □

Les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ du polynôme p sont alors les *coordonnées* de p dans cette base B.

Nous allons maintenant parler de l'existence de bases dans tout espace vectoriel de dimension finie. Remarquons d'abord que, dans tout espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ non réduit au vecteur nul, il existe des familles *libres* et *finies* — par exemple, pour tout $\vec{x} \neq \vec{0}$, la partie $\{\vec{x}\}$ est libre et finie.

Théorème 6.7. [de la base incomplète] *Pour toute famille libre et finie L d'un espace vectoriel $E \neq \{\vec{0}\}$ de dimension finie, il existe une base B finie de E telle que $B \supset L$.*

Démonstration. Puisque E est un espace de dimension finie, il existe une famille G finie de générateurs de E. Si on opère la réunion de G et d'une famille quelconque de générateurs de E, on obtient évidemment encore une famille de générateurs de E.

Soit donc L une famille libre et finie de E. La réunion :

$$F := G \cup L$$

est encore une famille de générateurs de E. De plus, F est finie et :

$$L \subset F.$$

Rappelons que l'on note $\mathscr{P}(F)$ l'ensemble des *parties* de F, c'est-à-dire des *sous-ensembles* de F :

$$\mathscr{P}(F) := \{F' \subset F\}.$$

Rappelons aussi que l'on démontre que :

$$\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) = 2^{\mathsf{Card}\, F}.$$

Ainsi, puisque $\mathsf{Card}\, F < \infty$, on a aussi la finitude de :

$$\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) < \infty.$$

Maintenant, introduisons l'ensemble $\mathscr{L}$ de toutes les parties de F qui contiennent L :

$$\mathscr{L} := \{F' \in \mathscr{P}(F) \colon\ F' \text{ libre et } F' \supset L\}.$$

Cet ensemble $\mathscr{L}$ n'est pas vide, puisque $L \in \mathscr{L}$. De plus, $\mathsf{Card}\, \mathscr{L} < \infty$ est fini, puisque $\mathsf{Card}\, \mathscr{P}(F) < \infty$, et puisque $\mathscr{L} \subset \mathscr{P}(F)$.

L'ensemble des cardinaux des éléments F' de $\mathscr{L}$ est alors une partie non vide de $\mathbb{N}$ qui admet par conséquent un plus grand élément n.

Soit alors B un élément de $\mathscr{L}$ ayant ce nombre maximal n d'éléments :

$$L \subset B \subset F.$$

Observons que :

$$\mathsf{Card}\, L \leqslant \mathsf{Card}\, B = n \leqslant \mathsf{Card}\, F.$$

À présent, envisageons deux cas.

Cas 1. $n = \mathsf{Card}\, F$. Alors, évidemment, $B = F$. La famille F de générateurs est libre. Elle constitue par conséquent une base de E. Le théorème est prouvé sans travail dans ce cas.

Cas 2. $n \leqslant \mathsf{Card}\, F - 1$. Alors, par définition de l'élément maximum n, pour tout $\vec{x}$ appartenant à $F\backslash B$, la famille $B \cup \{\vec{x}\}$ n'est *pas* libre, puisque c'est une partie de F à $n+1$ éléments. Si on écrit :

$$B = \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\},$$

il existe alors des scalaires non tous nuls $a_1, \dots, a_n, b$ tels que :

$$a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n + b\, \vec{x} = \vec{0}.$$

On a nécessairement $b \neq 0$, sinon les vecteurs de B vérifieraient une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, et B ne serait pas libre. Donc, dans le corps $\mathbb{R}$ des scalaires, l'inverse $\frac{1}{b}$ existe, et :

$$\vec{x} = -\tfrac{1}{b}\big(a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n\big).$$

Tout vecteur $\vec{x}$ de la famille F des générateurs de E est une combinaison linéaire des vecteurs de B. Donc B est elle-même une famille de générateurs de E, et par conséquent, une base de E.

Le Théorème 6.7 est démontré. □

Ce Théorème 6.7 exprime deux propriétés importantes.

Corollaire 6.8. [Existence de bases] *Dans tout espace vectoriel de dimension finie, il existe des bases.* □

Corollaire 6.9. [Complétion d'une famille libre pour obtenir une base] *Dans tout espace vectoriel de dimension finie, toute famille libre peut être complétée en une base.* □

Ceci veut dire que L peut être complétée par les vecteurs de $B\backslash L$ pour obtenir la base B de E.

Théorème 6.10. *Si, dans un espace vectoriel E, une base B possède n éléments, alors toute famille L libre dans E vérifie :*

$$\mathsf{Card}\, L \leqslant n.$$

Preuve. Appliquons le Théorème 5.5 : puisque B engendre E, une famille de $n+1$ (ou plus) vecteurs quelconques de E est liée. Il ne peut donc pas exister dans E de famille *libre* L vérifiant $\mathsf{Card}\, L \geqslant n+1$. □

Théorème 6.11. *Dans un espace vectoriel de dimension finie, toutes les bases ont le même cardinal.*

Preuve. En effet, si B et B' sont deux bases de E, alors en appliquant le Théorème 6.10 à la base B et à la famille libre B', on obtient :

$$\mathsf{Card}\, B' \leqslant \mathsf{Card}\, B.$$

En échangeant B et B' qui jouent le même rôle, il vient :

$$\mathsf{Card}\, B \leqslant \mathsf{Card}\, B'.$$

Par conséquent :

$$\mathsf{Card}\, B = \mathsf{Card}\, B'.$$ □

Maintenant, recommençons à travailler avec un corps commutatif $\mathbb{K}$ quelconque, au lieu de $\mathbb{R}$. Les nombres de $\mathbb{K}$ se comportent exactement de la même manière que les nombres réels, vis-à-vis de l'addition et de la multiplication. Le lecteur qui éprouverait des réticences à penser en cette généralité est invité à remplacer mentalement $\mathbb{K}$ par $\mathbb{R}$ jusqu'à la fin de ce chapitre. Il va de soi que tous les résultats qui précèdent sont valables, avec la même démonstration, pour un corps $\mathbb{K}$ quelconque.

Puisque toutes les bases de E ont même cardinal, la définition suivante est justifiée.

Définition 6.12. [de la dimension] Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On appelle *dimension* de E le cardinal de toute base de E.

La dimension de E sur $\mathbb{K}$ sera notée :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E.$$

Lorsqu'aucune confusion n'est à craindre, notamment lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on notera simplement :

$$\mathsf{dim}\, E.$$

On convient que :

$$\mathsf{dim}\, \{\vec{0}\} \,=\, 0.$$

Exemple 6.13. $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{K}^n$ sont de dimension n sur le corps $\mathbb{R}$ et sur le corps $\mathbb{K}$:

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, \mathbb{R}^n \,=\, n \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, \mathbb{K}^n \,=\, n.$$

Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes, de dimension $n \geqslant 1$, et soit :

$$B \,=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\big\}$$

une base de E.

Puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, on peut voir E aussi comme espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels. Rappelons que l'on note :

$$i \,:=\, \sqrt{-1}.$$

Assertion 6.14. *L'ensemble :*

$$B' \,:=\, \big\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n,\, i\,\vec{e}_1,\, i\,\vec{e}_2,\, \dots,\, i\,\vec{e}_n\big\}$$

constitue une base de E sur $\mathbb{R}$. De plus :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E \,=\, 2\, \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, E.$$

Démonstration. En effet, pour tout vecteur $\vec{x}$ de E, il existe une famille de scalaires *complexes* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ tels que :

$$\vec{x} \,=\, \alpha_1\, \vec{e}_1 + \cdots + \alpha_n\, \vec{e}_n. \tag{6.15}$$

Ces α_i sont les *coordonnées* de $\vec{x}$ dans la base B.

Pour tout indice k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, faisons intervenir les parties réelle et imaginaire de α_k :

$$\alpha_k \,=\, a_k + i\, b_k \qquad\qquad {\scriptstyle (a_k \in \mathbb{R},\ b_k \in \mathbb{R})}.$$

La relation (6.15) s'écrit alors :

$$\vec{x} \,=\, a_1\, \vec{e}_1 + \cdots + a_n\, \vec{e}_n + b_1\, \big(i\, \vec{e}_1\big) + \cdots + b_n\, \big(i\, \vec{e}_n\big). \tag{6.16}$$

Ainsi, pour tout $\vec{x} \in E$, il existe une famille de scalaires réels $a_1, \dots, a_n$, $b_1, \dots, b_n$ vérifiant la relation (6.16). Par conséquent, B' est une famille de générateurs de E sur $\mathbb{R}$.

De plus, puisque B est une base de E sur $\mathbb{C}$, à tout $\vec{x}$ de E correspond une *unique* famille $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de scalaires de $\mathbb{C}$ vérifiant (6.15). Comme à tout $\alpha \in \mathbb{C}$ correspond un couple unique $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $\alpha = a + i\, b$, alors la famille $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ de scalaires de $\mathbb{R}$ correspondant à $\vec{x}$ est unique aussi. Par conséquent, d'après le Théorème 5.10, B' est une famille libre de E sur $\mathbb{R}$, donc une base de ce espace.

Enfin, comme $\mathsf{Card}\, B' = 2\, \mathsf{Card}\, B$, on a bien :

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{R}}\, E \,=\, 2\, \mathsf{dim}_{\mathbb{C}}\, E. \qquad \square$$

Théorème 6.17. *Tout sous-espace F d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est lui-même de dimension finie, avec :*

$$\mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, F \,\leqslant\, \mathsf{dim}_{\mathbb{K}}\, E.$$

Démonstration. Soit donc E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soit $F \subset E$ un $\mathbb{K}$-sous-espace vectoriel de E.

Le théorème est évident lorsque $F = \{\vec{0}\}$.

Supposons donc que $F \neq \{\vec{0}\}$, et introduisons l'ensemble $\mathscr{A}$ des cardinaux de toutes les familles *libres* dans F.

Cet ensemble $\mathscr{A}$ n'est pas vide, car pour tout vecteur de F non nul $\vec{x} \in F \backslash \{\vec{0}\}$, la famille $\{\vec{x}\}$ est libre, donc $1 \in \mathscr{A}$.

D'autre part, toute famille libre incluse dans F est une famille libre incluse dans E, puisque $F \subset E$. Alors d'après le Théorème 6.10, $\mathscr{A}$ est majoré par $n = \mathsf{dim}\, E$.

Comme $\mathscr{A}$ est un ensemble non vide de $\mathbb{N}$ et majoré, il admet un élément maximum :

$$p \,:=\, \mathsf{max}\, A \qquad\qquad \text{avec} \qquad\qquad p \,\leqslant\, n.$$

Cela veut dire qu'une famille quelconque d'au moins $p + 1$ vecteurs de F est liée.

Soit B' une famille libre incluse dans F et ayant ce nombre maximum p d'éléments. Désignons par F' le sous-espace engendré par B'. Comme B' est finie, F' est de dimension finie, et comme B' est libre, alors $\mathsf{dim}\, F' = \mathsf{Card}\, B' = p$, ce qui entraîne :

$$\mathsf{dim}\, F' \,\leqslant\, \mathsf{dim}\, E.$$

Pour finir, nous allons prouver que $F' = F$, ce qui établira complètement le Théorème 6.17.

Comme F' est le plus petit sous-espace contenant B' d'après le Théorème 4.3, on a :

$$F' \,\subset\, \mathsf{Vect}\, B' \,\subset\, F.$$

D'autre part, pour tout $\vec{x} \in F \backslash B'$, la famille $B' \cup \{\vec{x}\}$, de cardinal $p + 1$, est nécessairement liée, donc le Corollaire 5.8 assure que $\vec{x}$ appartient au sous-espace F' engendré par B'. Par suite :

$$F \,\subset\, F',$$

et en définitive :

$$F \,=\, F'. \qquad \square$$

7. Somme de deux sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. Étudions l'ensemble H des $\vec{z} \in E$ tels qu'il existe un $\vec{x} \in F$ et un $\vec{y} \in G$ de façon que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}.$$

En d'autres termes, étudions :

$$H := \big\{\vec{z} \in E \colon \exists\, \vec{x} \in F,\ \exists\, \vec{y} \in G,\ \ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}\big\}.$$

Assertion 7.1. *H est un sous-espace vectoriel de E, c'est-à-dire que, quels que soient les scalaires a et a' on a :*

$$\big(\vec{z} \in H \qquad \textit{et} \qquad \vec{z}\,' \in H\big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,' \ \in\ H$$

Preuve. Par hypothèse, il existe $\vec{x}$ et $\vec{x}\,'$ dans F et il existe $\vec{y}$ et $\vec{y}\,'$ dans G tels que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{z}\,' \,=\, \vec{x}\,' + \vec{y}\,'.$$

Or :

$$a\,\vec{z} + a'\,\vec{z}\,' \,=\, a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' + b\,\vec{y} + b'\,\vec{y}\,'.$$

Comme F et G sont deux sous-espaces de E :

$$\big(\vec{x} \in F \qquad \text{et} \qquad \vec{x}\,' \in F\big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,' \ \in\ F,$$

$$\big(\vec{y} \in G \qquad \text{et} \qquad \vec{y}\,' \in G\big) \qquad\qquad \Longrightarrow \qquad\qquad a\,\vec{y} + a'\,\vec{y}\,' \ \in\ G.$$

Par conséquent, par définition de H :

$$\big(a\,\vec{x} + a'\,\vec{x}\,'\big) + \big(a\,\vec{y} + a'\vec{y}\,'\big) \ \in\ H,$$

ce qui montre bien que H est un sous-espace vectoriel de E. □

Assertion 7.2. *H est le plus petit sous-espace vectoriel contenant $F \cup G$.*

Preuve. En prenant $\vec{y} = \vec{0}$, on voit que $H \supset F$. En prenant $\vec{x} = \vec{0}$, on voit que $H \supset G$. Par conséquent :

$$H \ \supset\ F \cup G.$$

D'autre part, tout sous-espace contenant $F \cup G$ doit contenir tout $\vec{x}$ de F, tout $\vec{y}$ de G, puis la somme $\vec{x} + \vec{y}$. Donc tout sous-espace contenant $F \cup G$ contient aussi H.

En conclusion, H est le plus petit sous-espace contenant $F \cup G$. □

Définition 7.3. Le plus petit sous-espace contenant la réunion $F \cup G$ de deux sous-espaces F et G d'un espace vectoriel E est appelé *somme* de F et de G, et se note :

$$F + G := \big\{\vec{z} \in E \colon \exists\, \vec{x} \in F,\ \exists\, \vec{y} \in G,\ \vec{z} = \vec{x} + \vec{y}\big\}.$$

On démontre aisément (exercice) que cette addition entre sous-espaces vectoriels est associative, commutative, et admet comme élément neutre l'espace vectoriel nul $\{\vec{0}\}$. De plus :

$$F \ \subset\ G \qquad\qquad \Longleftrightarrow \qquad\qquad F + G \,=\, G.$$

Introduisons maintenant le concept de *somme directe* de deux sous-espaces vectoriels.

Considérons un élément quelconque $\vec{z}$ de la somme $F + G$ définie à l'instant. Alors il existe $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$ tels que :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y}.$$

En d'autres termes, $\vec{z}$ est l'image du couple $(\vec{x}, \vec{y})$ par l'application :

$$\begin{aligned} f\colon \qquad F \times G &\longrightarrow E \\ \big(\vec{x}, \vec{y}\big) &\longmapsto \vec{x} + \vec{y}. \end{aligned}$$

L'image de $F \times G$ par f vient précisément d'être notée $F + G$.

Cette application f n'est pas nécessairement injective, ce qui veut dire qu'un vecteur $\vec{z}$ de $F+G$ peut être l'image de deux couples distincts $(\vec{x}, \vec{y})$ et $\big(\vec{x}\,', \vec{y}\,'\big)$. Or de :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y} \,=\, \vec{x}\,' + \vec{y}\,',$$

on tire :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' \,=\, \vec{y}\,' - \vec{y}, \tag{7.4}$$

avec :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' \,\in\, F \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{y}\,' - \vec{y} \,\in\, G.$$

La coïncidence de ces deux éléments exige leur appartenance à $F \cap G$. Remarquons que deux sous-espaces ont toujours $\vec{0}$ en commun, et envisageons deux cas.

Premier cas : $F \cap G \neq \{\vec{0}\}$. Alors si $\vec{u}$ est un élément de cette intersection, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} \,\in\, F \qquad &\Longrightarrow \qquad \vec{x} + \vec{u} \,\in\, F, \\ \vec{y} \,\in\, G \qquad &\Longrightarrow \qquad \vec{y} - \vec{u} \,\in\, G, \end{aligned}$$

et :

$$\vec{z} \,=\, \vec{x} + \vec{y} \,=\, \big(\vec{x} + \vec{u}\big) + \big(\vec{y} - \vec{u}\big).$$

Ainsi, $\vec{z}$ est l'image par f de deux éléments distincts $(\vec{x}, \vec{y})$ et $\big(\vec{x} + \vec{u},\, \vec{y} - \vec{u}\big)$ de $F \times G$.

L'appplication f de $F \times G$ sur $F+G$ n'est donc *pas* injective.

Deuxième cas : $F \cap G = \{\vec{0}\}$. Alors l'égalité (7.4) ne peut être réalisée que si :

$$\vec{x} - \vec{x}\,' \,=\, \vec{0} \qquad\qquad \text{et} \qquad\qquad \vec{y}\,' - \vec{y} \,=\, \vec{0},$$

d'où :

$$\big(\vec{x}, \vec{y}\big) \,=\, \big(\vec{x}\,',\, \vec{y}\,'\big).$$

L'application est donc *injective :* tout $\vec{z}$ de $F+G$ admet alors une *décomposition unique* $\vec{x} + \vec{y}$ avec $\vec{x} \in F$ et $\vec{y} \in G$.

Ces considérations motivent les définitions suivantes.

Définition 7.5. Deux sous-espaces vectoriels F et G d'un espace vectoriel E sont dits *linéairement indépendants* lorsque :

$$F \cap G \,=\, \{\vec{0}\}.$$

Définition 7.6. La somme $F+G$ de deux sous-espaces F et G linéairement indépendants se nomme *somme directe* de F et de G, et se note :

$$F \oplus G.$$

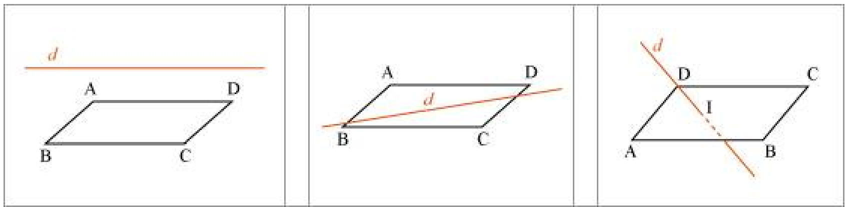
Les raisonnements que nous venons de conduire donnent alors :

$$F \cap G \,=\, \{\vec{0}\} \qquad \Longrightarrow \qquad F + G \,=\, F \oplus G.$$

Pour terminer ce chapitre, présentons la notion de *sous-espaces supplémentaires*.

Définition 7.7. Si F et G sont linéairement indépendants, et si $F \oplus G = H$, alors F et G sont dits *supplémentaires* dans H.

Par exemple, considérons, en géométrie euclidienne dans l'espace $V = \mathbb{R}^3$, une droite D et un plan P. Soit V_D l'espace des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de même direction que la droite D. Soit aussi V_P l'espace des vecteurs parallèles au plan P. Deux cas peuvent se produire.



La droite *d* est strictement parallèle au plan (ABC).	La droite *d* est contenue dans le plan (ABC).	Le plan (ABC) et la droite *d* sont sécants en I.

Premier cas : La droite $D \| P$ est parallèle au plan. Alors $V_D \subset V_P$, et par conséquent :

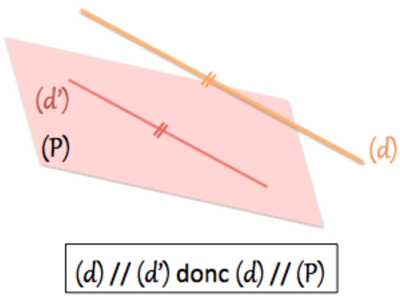
$$V_D + V_P \;=\; V_P.$$

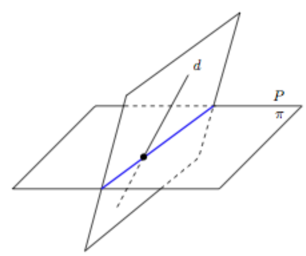
Les espaces V_D et V_P ne sont *pas* linéairement indépendants, et on ne peut donc *pas* parler ici de somme directe $V_D \oplus V_P$.

D'ailleurs, on peut voir directement que l'application $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$ de $V_D \times V_P$ dans E n'est pas injective. En effet, pour tout $\vec{x}\,' \in V_D$, on a :

$$\vec{z} \;=\; \vec{x} + \vec{y} \;=\; \big(\vec{x} + \vec{x}\,'\big) + \big(\vec{y} - \vec{x}\,'\big).$$

On obtient là deux décompositions distinctes de $\vec{z}$.





Deuxième cas : La droite $D \not\parallel P$ n'est pas parallèle au plan. Alors :

$$V_D \cap V_P \;=\; \{\vec{0}\}.$$

Les deux sous-espaces V_D et V_P sont linéairement indépendants. Leur somme se nomme somme directe :

$$V_D + V_P \;=\; V_D \oplus V_P.$$

Le résultat de cette somme est ici l'espace vectoriel $V \;=\; \mathbb{R}^3$ tout entier : pour tout vecteur $\vec{z} \in V$, il existe un unique $\vec{x} \in V_D$ et un unique $\vec{y} \in V_P$ tels que $\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}$.

L'application $(\vec{x}, \vec{y}) \longmapsto \vec{x} + \vec{y}$ de $V_D \times V_P$ dans V est ici *bijective*. Ainsi, V_D et V_P sont supplémentaires dans V.

D'une façon générale, de l'étude qui précède, on déduit la propriété suivante.

Théorème 7.8. *Si, dans un espace vectoriel E, deux sous-espaces F et G sont supplémentaires, alors à tout $\vec{z} \in E$ correspond un unique couple $(\vec{x}, \vec{y})$ de $F \times G$ tel que :*

$$\vec{z} \;=\; \vec{x} + \vec{y}. \qquad \square$$

En d'autres termes :

$$F \oplus G \;=\; E$$

veut dire :

$$\forall\, \vec{z} \in E \qquad \exists\,!\, x \in F \qquad \exists\,!\, y \in G$$

tels que :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}.$$

Le point d'exclamation $\exists\,!$ derrière le symbole $\exists$ signifie « *il existe un unique* » ceci ou cela.

8. Appendice : Nombres complexes et similitudes complexes

Un *nombre complexe* prend la forme :

$$z = x + i\,y,$$

où x et y sont deux nombres réels et où i est un nombre (abstrait) satisfaisant :

$$i^2 = -1,$$

que les mathématiciens asiatiques préfèrent noter systématiquement :

$$\sqrt{-1},$$

mais il s'agit d'un autre continent, où l'on ne craint aucun caractère. Classiquement, on note :

$$\boxed{\mathbb{C}}$$

l'ensemble de ces nombres.

On appelle x la *partie réelle* de z et y la *partie imaginaire* de z :

$$x = \mathrm{Re}\, z,$$
$$y = \mathrm{Im}\, z.$$

Les nombres réels sont donc précisément les nombres complexes dont la partie imaginaire est nulle, et les nombres *purement imaginaires :*

$$\big\{i\,y\colon\ y \in \mathbb{R}\big\},$$

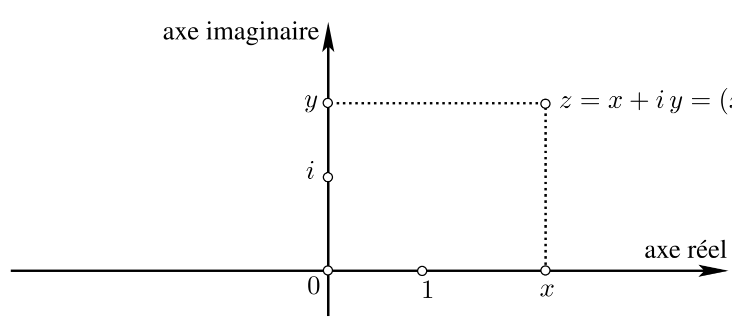
ceux dont la partie réelle est nulle.

Grâce à Argand et à Gauss, on peut visualiser les nombres complexes dans le plan euclidien usuel $\mathbb{R}^2$ en identifiant :

$$\mathbb{C} \ni x + i\,y \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Par exemple, $0 \in \mathbb{C}$ correspond à l'origine $(0,0) \in \mathbb{R}^2$, et le nombre $i = \sqrt{-1}$ correspond au point $(0,1) \in \mathbb{R}^2$.

Naturellement, l'axe des x est appelé l'*axe réel*, tandis que l'axe des y est appelé l'*axe imaginaire*.



Les règles pour additionner et pour soustraire les nombres complexes sont naturelles : il suffit de conserver en mémoire que $i^2 = -1$.

Par exemple, étant donné deux nombres complexes :

$$z_1 = x_1 + i\, y_1 \qquad \text{et} \qquad z_2 = x_2 + i\, y_2,$$

leur somme vaut :

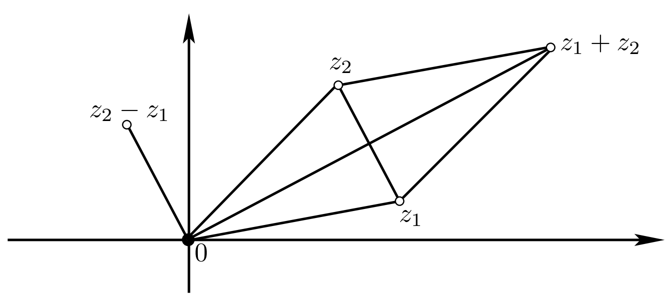
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2),$$

et leur produit vaut :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + i\, y_1)\,(x_2 + i\, y_2) \\ &= x_1 x_2 + i\, x_1 y_2 + i\, y_1\, x_2 + i^2\, y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i\,(x_1 y_2 + y_1 x_2). \end{aligned}$$

Si l'on prend ces deux expressions pour définitions de l'addition et de la multiplication, il est facile de vérifier les trois propriétés suivantes.

- Commutativité : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ et $z_1 z_2 = z_2 z_1$ pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.
- Associativité : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ et $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.
- Distributivité : $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.



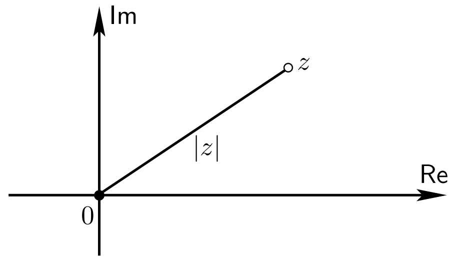
Géométriquement, l'addition des nombres complexes correspond à l'addition des vecteurs dans le plan $\mathbb{R}^2$. La multiplication quant à elle consiste en une rotation suivie d'une dilatation, un fait qui devient intuitivement transparent une fois qu'on a introduit la forme polaire d'un nombre complexe (voir ci-dessous). À ce stade, observons au moins que *la multiplication par i correspond à une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$*.

La notion de valeur absolue d'un nombre complexe est identique à la norme euclidienne des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$.

Définition 8.1. La *valeur absolue* ou le *module* d'un nombre complexe $z = x + i\, y$ est la quantité positive :

$$|z| := \left(x^2 + y^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

de telle sorte que $|z|$ est précisément la *distance euclidienne* entre l'origine $(0, 0)$ et le point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.



Bien entendu, $|z| = 0$ si et seulement si $z = 0$, et l'*inégalité du triangle* est tout aussi valable :

$$|z + w| \leqslant |z| + |w| \qquad\qquad (z, w \in \mathbb{C}).$$

D'autres inégalités seront aussi utiles. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big|\mathsf{Re}\, z| \leqslant |z|,$$
$$\big|\mathsf{Im}\, z| \leqslant |z|,$$

et pour tous $z, w \in \mathbb{C}$, on a :

$$\big||z| - |w|\big| \leqslant |z - w|,$$

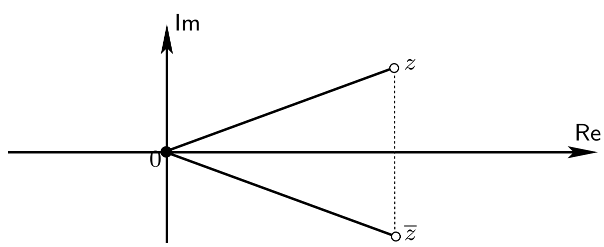
ce qui découle par soustraction de l'inégalité du triangle, puisque :

$$|z| \leqslant |z - w| + |w| \qquad \text{et} \qquad |w| \leqslant |z - w| + |z|.$$

Définition 8.2. Le *conjugué* d'un nombre complexe $z = x + i\, y$ est le nombre :

$$\overline{z} = x - i\, y,$$

que l'on obtient géométriquement en appliquant la symétrie le long de l'axe réel du plan complexe.



Évidemment, un nombre complexe z est réel si et seulement si :

$$z = \overline{z},$$

et il est imaginaire pur si et seulement si :

$$z = -\,\overline{z}.$$

On vérifie aussi sans difficulté que :

$$\mathsf{Re}\, z = \frac{z + \overline{z}}{2},$$
$$\mathsf{Im}\, z = \frac{z - \overline{z}}{2\, i}.$$

De plus :

$$|z|^2 = z\, \overline{z},$$

et aussi :

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \qquad (z \neq 0).$$

Définition 8.3. Un nombre complexe quelconque $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ non nul peut toujours s'écrire sous forme *polaire :*

$$z = r\, e^{i\,\theta},$$

avec $r > 0$ réel égal au module $|z|$ et $\theta \in \mathbb{R}$ appelé l'*argument* de z, qui est défini à un multiple entier $\in \mathbb{Z}$ de 2π près, traditionellement noté :

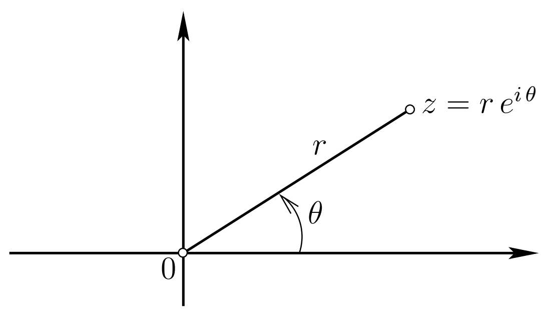
$$\theta = \arg z,$$

sachant que :

$$\begin{aligned} e^{i\,\theta} &= \cos\theta + i\sin\theta, \\ e^{i(\theta+2k\pi)} &= \cos\big(\theta + 2k\pi\big) + i\sin\big(\theta + 2k\pi\big) \\ &= \cos\theta + i\sin\theta, \end{aligned}$$

pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$ en effet.

Puisque $|e^{i\,\theta}| = 1$, le nombre θ est l'*angle* que fait la demi-droite $0z$ avec l'axe des réels positifs.



Enfin, notons que la multiplication entre deux nombres complexes $z = r\,e^{i\,\theta}$ et $w = s\,e^{i\,\varphi}$ donne :

$$z\,w = rs\,e^{i(\theta+\varphi)},$$

de telle sorte que *la multiplication complexe consiste toujours, géométriquement, en une homothétie composée (commutativement) avec une rotation.*

9. Exercices

Exercice 1. EE