

Applications linéaires

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Introduction

2. Homomorphismes linéaires entre espaces vectoriels

Les concepts et définitions de ce chapitre sont valables sur n'importe quel corps commutatif \mathbb{K} , mais nous travaillerons le plus souvent avec le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ des nombres réels.

Définition 2.1. Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. Une application $f: E \rightarrow F$ est dite *linéaire* si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

$$\begin{aligned} \forall \vec{x} \in E \quad \forall \vec{y} \in E & \quad f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y}), \\ \forall \vec{x} \in E \quad \forall a \in \mathbb{R} & \quad f(a\vec{x}) = a f(\vec{x}). \end{aligned}$$

La première condition exprime que f est un *homomorphisme* de E dans F pour l'addition. C'est pourquoi, au lieu d'application linéaire, on parle parfois d'*homomorphisme linéaire* entre espaces vectoriels.

Terminologie 2.2. Dans le cas où l'espace-arrivée $F = E$ coïncide avec l'espace-source, on dit que f est un *endomorphisme linéaire* de E .

Exemples 2.3. (1) La notion d'application linéaire dans le plan euclidien $V = \mathbb{R}^2$ ou dans l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$ est connue dans les cours de géométrie de l'enseignement secondaire, puisqu'on y parle de *projections*, sur une droite, ou sur un plan. Si f est un projecteur quelconque, alors la relation :

$$f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$$

est nommée *théorème des projections*.

La relation :

$$f(a\vec{x}) = a f(\vec{x}) \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$$

est le fameux *Théorème de Thalès*.

Tout projecteur dans $V = \mathbb{R}^2$ ou $V = \mathbb{R}^3$ est un endomorphisme linéaire — nous y reviendrons au cours de ce chapitre.

(2) Dans un \mathbb{R} -espace vectoriel E , fixons un scalaire a , et définissons une application h de E dans E comme suit :

$$\forall \vec{x} \in E \quad h(\vec{x}) := a\vec{x}.$$

On a évidemment :

$$h(\vec{x} + \vec{y}) = a(\vec{x} + \vec{y}) = a\vec{x} + a\vec{y} = h(\vec{x}) + h(\vec{y}),$$

et aussi, puisque \mathbb{R} est commutatif :

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad h(b\vec{x}) = a(b\vec{x}) = b(a\vec{x}) = bh(\vec{x}).$$

Par conséquent, l'application h est un endomorphisme linéaire de E . On la nomme *homothétie de rapport a* , et on la note parfois h_a .

Assertion 2.4. Pour $a \neq 0$ fixée, l'homothétie h_a est une bijection de E .

Preuve. Pour vérifier qu'on a en effet :

$$\forall \vec{y} \in E \quad \exists ! \vec{x} \in E \quad \vec{y} = h(\vec{x}),$$

partons de :

$$\vec{y} = a\vec{x}.$$

Comme $a \neq 0$, son inverse a^{-1} pour la multiplication dans \mathbb{R} existe, et donc l'existence de \vec{x} est assurée par :

$$a^{-1}\vec{y} = (a^{-1}a)\vec{x} = \vec{x}.$$

Enfin, l'unicité de \vec{x} résulte de :

$$a\vec{x} = a\vec{x}' \quad \implies \quad a(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{0} \quad \xrightarrow{a \neq 0} \quad \vec{x} - \vec{x}' = \vec{0}. \quad \square$$

Terminologie 2.5. Une application linéaire $h: E \longrightarrow E$ d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E dans lui-même qui est *bijective* sera nommée *automorphisme linéaire* de E .

D'une façon plus générale, il se peut que la bijection linéaire s'exerce entre deux espaces distincts.

Terminologie 2.6. Une application linéaire bijective $h: E \longrightarrow F$ entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels E et F qui est *bijective* sera nommée *isomorphisme linéaire* entre E et F .

On dit aussi que E et F sont *isomorphes*. Quand $E = F$, on parle donc d'un *automorphisme*.

Proposition 2.7. [Critère de linéarité] Pour qu'une application $f: E \longrightarrow F$ entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels soit linéaire, il faut et il suffit que :

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in E \quad f(a\vec{x} + b\vec{y}) = af(\vec{x}) + bf(\vec{y}).$$

Démonstration. Prouvons ' \implies '. Si l'application f est linéaire, alors on a :

$$f(a\vec{x}) = af(\vec{x}), \quad f(b\vec{x}) = bf(\vec{x}), \quad f(a\vec{x} + b\vec{y}) = f(a\vec{x}) + f(b\vec{y}),$$

d'où :

$$f(a\vec{x} + b\vec{y}) = af(\vec{x}) + bf(\vec{y}).$$

Inversement, prouvons ' \impliedby '. Partons donc de cette dernière relation. Puisqu'elle est vraie pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ et tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, nous pouvons prendre $a = b = 1$ pour obtenir la première condition de la Définition 2.1 ; ensuite, prenons $b = 0$ pour obtenir la deuxième condition. En définitive, f est bien linéaire. \square

Observation 2.8. Toute application linéaire $f: E \longrightarrow F$ entre \mathbb{R} -espaces vectoriels satisfait :

$$f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F.$$

Preuve. Il suffit de prendre $a = 0$ dans la deuxième condition de la Définition 2.1. \square

3. Image et noyau d'une application linéaire

Commençons par étudier l'image d'une application linéaire.

Théorème 3.1. Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels E et F . Alors pour tout sous-espace vectoriel $E' \subset E$, l'image :

$$\begin{aligned} f(E') &:= \{\vec{y} \in F: \exists \vec{x}' \in E', \vec{y} = f(\vec{x}')\} \\ &= \{f(\vec{x}'): \vec{x}' \in E' \text{ quelconque}\}, \end{aligned}$$

est aussi un sous-espace vectoriel de F .

Démonstration. Prouvons que $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F , c'est-à-dire :

$$\left(a, a' \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \vec{y}, \vec{y}' \in f(E') \right) \quad \stackrel{?}{\implies} \quad a\vec{y} + a'\vec{y}' \in f(E').$$

En effet, si \vec{y} et \vec{y}' appartiennent à $f(E')$, c'est qu'il existe deux vecteurs \vec{x} et \vec{x}' dans E' tels que :

$$\vec{y} = f(\vec{x}) \quad \text{et} \quad \vec{y}' = f(\vec{x}').$$

Comme E' est un sous-espace de E , alors, quels que soient les scalaires a et a' , on a :

$$(\vec{x} \in E' \quad \text{et} \quad \vec{x}' \in E') \quad \implies \quad a\vec{x} + a'\vec{x}' \in E' \quad \implies \quad f(a\vec{x} + a'\vec{x}') \in f(E').$$

Mais comme f est linéaire :

$$f(a\vec{x} + a'\vec{x}') = a f(\vec{x}) + a' f(\vec{x}').$$

Par conséquent :

$$a\vec{y} + a'\vec{y}' \in f(E').$$

Le théorème est démontré. \square

Définition 3.2. Quand le sous-espace $E' = E$ coïncide avec l'espace vectoriel ambiant tout entier, alors $f(E)$ est un sous-espace vectoriel de F que l'on nomme *image de f* , et que l'on note :

$$\begin{aligned} \text{Im } f &:= f(E) \\ &= \{f(\vec{x}) \in F: \vec{x} \in E \text{ quelconque}\}. \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant introduire le concept de *noyau* d'une application linéaire.

Définition 3.3. Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. L'ensemble des vecteurs de E qui ont pour image le vecteur $\vec{0} \in F$ se nomme *noyau* de f et se note :

$$\text{Ker}(f) := \{\vec{x} \in E: f(\vec{x}) = \vec{0}\}.$$

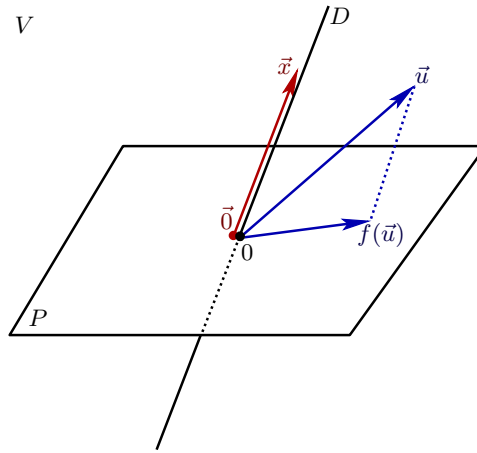
Noyau se dit *kernel* en anglais, et *Kern* en allemand. C'est pourquoi on rencontre très souvent la notation $\text{Ker}(f)$, que nous adopterons.

Observons que $\text{Ker}(f)$ n'est jamais vide, car, quelle que soit l'application linéaire f , on a $f(\vec{0}) = \vec{0}$, donc :

$$\vec{0} \in \text{Ker}(f) \quad (\text{toujours}).$$

Exemple 3.4. [en géométrie euclidienne] Dans l'espace euclidien $V = \mathbb{R}^3$, soit un plan $P \ni 0$ passant par l'origine, et soit une droite $D \ni 0$ passant par l'origine, avec $D \not\parallel P$ non parallèle au plan.

Rappelons que les vecteurs $\vec{y} \in P$ sont les vecteurs liés ayant comme point-origine $0 \in V$, dont la flèche-extrémité appartient à P . De même, les vecteurs $\vec{x} \in D$ ont pour point-origine $0 \in D$, et une flèche-extrémité appartenant à D . On peut donc voir P et V comme deux sous-espaces vectoriels de V , de dimensions 2 et 1.



Désignons par f la projection de V sur P parallèle à D . On sait que f est une application linéaire de V dans lui-même, avec $f(V) = P$.

Cherchons le noyau de f .

Pour qu'un vecteur $\vec{x} \in V$ vérifie $f(\vec{x}) = \vec{0}$, c'est-à-dire ait une projection nulle dans V , il faut et il suffit que \vec{x} appartienne à D . Ainsi :

$$\text{Ker}(f) = D.$$

Théorème 3.5. Pour toute application linéaire $f: E \rightarrow F$ entre \mathbb{R} -espaces vectoriels, le noyau $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E .

Preuve. En effet, partons de :

$$\vec{x} \in \text{Ker}(f) \quad \text{et} \quad \vec{x}' \in \text{Ker}(f),$$

ce qui équivaut à :

$$f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{et} \quad f(\vec{x}') = \vec{0}.$$

Comme f est linéaire, alors, quels que soient les scalaires a et a' :

$$f(a\vec{x} + a'\vec{x}') = af(\vec{x}) + a'f(\vec{x}') = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}.$$

Par conséquent :

$$a\vec{x} + a'\vec{x}' \in \text{Ker}(f).$$

Le théorème est démontré. \square

Voici maintenant une caractérisation des applications linéaires injectives.

Théorème 3.6. *Pour une application linéaire $f: E \rightarrow F$ entre \mathbb{R} -espaces vectoriels, on a l'équivalence :*

$$f \text{ est injective} \iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}.$$

Démonstration. Prouvons ' \implies '. Supposons donc que l'application linéaire f est injective. Alors $\vec{x} \in \text{Ker}(f)$ signifie :

$$f(\vec{x}) = \vec{0} = f(\vec{0}).$$

Comme f est injective, on en déduit que $\vec{x} = \vec{0}$, ce qui conclut :

$$\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}.$$

Inversement, prouvons ' \impliedby '. Supposons $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$. Alors, quels que soient \vec{x} et \vec{x}' dans E :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) = f(\vec{x}') &\iff f(\vec{x}) - f(\vec{x}') = \vec{0} &\iff f(\vec{x} - \vec{x}') = \vec{0} \\ &\iff \vec{x} - \vec{x}' \in \text{Ker}(f) &\iff \vec{x} - \vec{x}' = \vec{0} \\ & &\iff \vec{x} = \vec{x}'. \end{aligned}$$

Ceci signifie que f est injective, conclut l'implication inverse, et termine la démonstration du théorème. \square

Parlons maintenant de l'image d'une famille de générateurs.

Théorème 3.7. (1) *Une application linéaire f de E dans F applique toute famille L de générateurs d'un sous-espace vectoriel $E' \subset E$, à savoir une famille L satisfaisant :*

$$\text{Vect } L = E',$$

sur une famille de générateurs de $f(E')$, à savoir :

$$\text{Vect } f(L) = f(E').$$

(2) *Si f est de plus injective, elle applique toute famille libre de E sur une famille libre de F .*

Démonstration. Soit donc une famille de vecteurs de E :

$$L := \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}.$$

Par une application linéaire $f: E \rightarrow F$, elle devient la famille de vecteurs de F :

$$f(L) = \{f(\vec{x}_1), \dots, f(\vec{x}_p)\}.$$

(1) Désignons par $E' := \text{Vect}(L)$ le sous-espace de E engendré par L . Prouvons que $f(L)$ engendre le sous-espace $f(E')$. En effet :

$$\vec{y} \in f(E') \quad \text{signifie} \quad \exists \vec{x} \in E' \quad \vec{y} = f(\vec{x}).$$

Puisque L est une famille de générateurs de E' , à un vecteur $\vec{x} \in E'$ correspond une famille $a_1, \dots, a_p \in \mathbb{R}$ de scalaires tels que :

$$\vec{x} = a_1 \vec{x}_1 + \dots + a_p \vec{x}_p.$$

Par linéarité de f , on obtient :

$$f(\vec{x}) = a_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a_p f(\vec{x}_p).$$

Tout vecteur \vec{y} de $f(E')$ est donc une combinaison linéaire de vecteurs de $f(L)$. La première partie du théorème est prouvée.

(2) Supposons de plus la famille L libre, et l'application f injective ; prouvons que $f(L)$ est libre. En effet :

$$a_1 f(\vec{x}_1) + \cdots + a_p f(\vec{x}_p) = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) = \vec{0} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{x} \in \text{Ker}(f).$$

Comme f est injective, cela force $\vec{x} = \vec{0}$, grâce au Théorème 3.6. Comme $L = \{\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p\}$ est libre, il vient :

$$\vec{0} = \vec{x} = a_1 \vec{x}_1 + \cdots + a_p \vec{x}_p \quad \Longrightarrow \quad a_1 = \cdots = a_p = 0.$$

En définitive, la famille $f(L)$ est bien libre, ce qui termine la démonstration de la seconde partie du théorème. \square

Corollaire 3.8. *Si E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie et si F est un \mathbb{R} -espace vectoriel, pas forcément de dimension finie, alors pour toute application linéaire $f: E \rightarrow F$, l'image $f(E) \subset F$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $\leq \dim_{\mathbb{R}} E$.*

Preuve. En effet, l'hypothèse que E est de dimension finie veut dire qu'il existe une famille finie L de générateurs de E . Alors d'après le Théorème 3.7 qui précède, $f(L)$ est une famille finie de générateurs de $f(E)$. Si L est de plus une base de E , on déduit bien que :

$$\dim_{\mathbb{R}} f(E) \leq \text{Card } L = \dim_{\mathbb{R}} E < \infty. \quad \square$$

Voici un résultat central qui exprime qu'une application linéaire est complètement déterminée lorsqu'on connaît seulement les images d'un nombre fini de vecteurs qui forment une base de l'espace vectoriel source.

Théorème 3.9. *Soit $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ une base d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E de dimension $n \geq 1$, et soit $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ une famille quelconque de n vecteurs d'un autre \mathbb{R} -espace vectoriel F .*

(1) *Alors il existe une application linéaire, et une seule, $f: E \rightarrow F$ telle que :*

$$f(\vec{e}_1) = \vec{c}_1, \quad f(\vec{e}_2) = \vec{c}_2, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_n) = \vec{c}_n.$$

(2) *De plus, si la famille C est libre, alors f est injective.*

Démonstration. Commençons par l'existence de f . Définissons une application f de E dans F de la manière suivante : à tout vecteur $\vec{x} \in E$, associons d'abord l'unique famille de scalaires a_1, \dots, a_n qui sont les coordonnées de \vec{x} dans la base B :

$$\vec{x} = a_1 \vec{e}_1 + \cdots + a_n \vec{e}_n.$$

À cet \vec{x} , faisons alors correspondre le vecteur $\vec{y} \in F$ défini par :

$$(3.10) \quad \vec{y} = f(\vec{x}) = a_1 \vec{c}_1 + \cdots + a_n \vec{c}_n.$$

Le domaine de définition de f est bien sûr E tout entier, et l'image $f(E)$ est bien incluse dans F .

Prouvons que f est linéaire. Partons de deux vecteurs $\vec{x}, \vec{x}' \in E$, que nous écrirons sous forme condensée :

$$\vec{x} = \sum_i a_i \vec{e}_i \quad \text{et} \quad \vec{x}' = \sum_i a'_i \vec{e}_i.$$

Pour deux scalaires quelconques b et b' , on a :

$$b\vec{x} + b'\vec{x}' = \sum_i b a_i \vec{e}_i + \sum_i b' a'_i \vec{e}_i = \sum_i (b a_i + b' a'_i) \vec{e}_i.$$

Par définition de l'application linéaire f , on a alors :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= \sum_i a_i \vec{c}_i, & f(\vec{x}') &= \sum_i a'_i \vec{c}_i, \\ f(b\vec{x} + b'\vec{x}') &= \sum_i (b a_i + b' a'_i) \vec{c}_i. \end{aligned}$$

Dans l'espace vectoriel F , on voit immédiatement que :

$$\sum_i (b a_i + b' a'_i) \vec{c}_i = b \sum_i a_i \vec{c}_i + b' \sum_i a'_i \vec{c}_i.$$

c'est-à-dire :

$$f(b\vec{x} + b'\vec{x}') = b f(\vec{x}) + b' f(\vec{x}'),$$

ce qui montre que f est bien linéaire.

Passons à l'unicité de f . Par définition, toute autre application linéaire g de E dans F envoie :

$$\vec{x} = a_1 \vec{e}_1 + \cdots + a_n \vec{e}_n$$

sur :

$$g(\vec{x}) = a_1 g(\vec{e}_1) + \cdots + a_n g(\vec{e}_n).$$

Par conséquent, si on fixe dans F comme pour f :

$$g(\vec{e}_1) := \vec{c}_1, \quad \dots, \quad g(\vec{e}_n) := \vec{c}_n,$$

on obtient une application g particulière qui vérifie :

$$g(\vec{x}) = f(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E),$$

d'où :

$$g = f,$$

ce qui montre l'unicité de l'application f .

Terminons l'argumentation en montrant que f sera de plus injective, quand on suppose que $C = \{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ est libre.

Soit donc $\vec{x} \in E$ avec $f(\vec{x}) = \vec{0}$. Comme $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est une base, on peut décomposer selon cette base $\vec{x} = a_1 \vec{e}_1 + \cdots + a_n \vec{e}_n$, d'où :

$$\vec{0} = f(\vec{x}) = a_1 \vec{c}_1 + \cdots + a_n \vec{c}_n \quad \implies \quad a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

puisque $\{\vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n\}$ est libre. Ainsi, nous avons bien démontré que :

$$\left(f(\vec{x}) = \vec{0} \implies \vec{x} = \vec{0} \right) \iff \text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}. \quad \square$$

Des deux Théorèmes 3.7 et 3.9, on déduit immédiatement le

Corollaire 3.11. *Pour qu'une application $f: E \rightarrow F$ entre \mathbb{R} -espaces vectoriels soit injective, il faut et il suffit que l'image d'une base de E soit une base de $f(E)$. \square*

4. Applications linéaires et dimension

Nous savons que l'ensemble \mathbb{R}^n des n -uplets (a_1, \dots, a_n) constitués de n réels $a_i \in \mathbb{R}$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Définition 4.1. On appelle *base canonique* de \mathbb{R}^n la base $\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ suivante :

$$\begin{aligned}\vec{u}_1 &:= (1, 0, \dots, 0), \\ \vec{u}_2 &:= (0, 1, \dots, 0), \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{u}_n &:= (0, 0, \dots, 1).\end{aligned}$$

Pour tout indice $1 \leq i \leq n$, le vecteur \vec{u}_i est le n -uplet dont tous les termes sont nuls, sauf celui de rang i qui vaut 1. Dans tout ce qui suit, nous supposons toujours que \mathbb{R}^n est rapporté à la base canonique :

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_n \vec{u}_n.$$

Voici un théorème qui exprime une propriété fondamentale d'isomorphisme.

Théorème 4.2. *Pour qu'un \mathbb{R} -espace vectoriel E soit de dimension n , il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à \mathbb{R}^n , à savoir qu'il existe un isomorphisme linéaire :*

$$f: E \xrightarrow{\sim} \mathbb{R}^n.$$

L'isomorphisme est alors déterminé de façon unique dès qu'on fixe une base de E comme image de la base canonique de \mathbb{R}^n .

Démonstration. Prouvons l'implication ' \implies '. Supposons donc que $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, et soit une base de E :

$$B := \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}.$$

Comme ci-dessus, soit $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ la base canonique de \mathbb{R}^n .

D'après le Théorème 3.9, il existe une application linéaire f et une seule telle que :

$$f(\vec{e}_1) = \vec{u}_1, \dots, f(\vec{e}_n) = \vec{u}_n,$$

et de plus, f est injective. Mais elle est aussi surjective, car C engendre à la fois $f(E)$ et \mathbb{R}^n , donc $f(E) = \mathbb{R}^n$.

Puisque f est bijective, elle établit bien un *isomorphisme* de E sur \mathbb{R}^n .

Observons que f est d'ailleurs l'unique application linéaire de E dans F qui envoie B sur C .

Prouvons maintenant l'implication inverse ' \impliedby '. Si donc il existe un isomorphisme f de E sur \mathbb{R}^n , posons :

$$\vec{e}_1 := f^{-1}(\vec{u}_1), \dots, \vec{e}_n := f^{-1}(\vec{u}_n).$$

D'après le Théorème 3.7, l'application linéaire f^{-1} envoie la famille libre $C = \{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n\}$ de générateurs de \mathbb{R}^n sur la famille libre $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ de générateurs de $f^{-1}(\mathbb{R}^n) = E$. Donc B est bien une base de E , et $\dim_{\mathbb{R}} E = n$, ce qui conclut. \square

Voici maintenant un théorème très important qui établit une relation entre les dimensions du noyau et de l'image.

Théorème 4.3. [du rang] Pour toute application linéaire $f: E \longrightarrow F$ entre deux espaces vectoriels, on a :

$$\dim \text{Ker}(f) + \dim \text{Im}(f) = \dim E.$$

Démonstration. Soient :

$$B := \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p\} \quad \text{une base de } \text{Ker}(f) \subset E,$$

$$C := \{\vec{\ell}_1, \dots, \vec{\ell}_q\} \quad \text{une base de } \text{Im}(f) \subset F,$$

où on a posé :

$$p := \dim \text{Ker}(f),$$

$$q := \dim \text{Im}(f).$$

On sait que $\vec{y} \in \text{Im}(f)$ signifie qu'il existe un vecteur $\vec{x} \in E$ avec $\vec{y} = f(\vec{x})$. Donc, pour tout indice $1 \leq i \leq q$, il existe un vecteur de E , que nous désignerons par \vec{e}_{p+i} , tel que :

$$f(\vec{e}_{p+i}) = \vec{\ell}_i.$$

On obtient ainsi une famille B' de q vecteurs de E :

$$B' := \{\vec{e}_{p+1}, \dots, \vec{e}_{p+q}\}.$$

Nous affirmons que $B \cup B'$ est alors une *base* de E , ce que nous démontrons en deux temps.

Assertion 4.4. $B \cup B'$ engendre $E = \text{Vect}(B \cup B')$.

Preuve. Montrons que tout $\vec{x} \in E$ est combinaison linéaire de vecteurs appartenant à $B \cup B'$. En effet :

$$\vec{x} \in E \quad \Longrightarrow \quad f(\vec{x}) \in f(E) = \text{Im } f.$$

Il existe donc des scalaires $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R}$, coordonnées de $f(\vec{x})$ dans la base de $\text{Im } f$, tels que :

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) &= a_1 \vec{\ell}_1 + \dots + a_q \vec{\ell}_q \\ &= a_1 f(\vec{e}_{p+1}) + \dots + a_q f(\vec{e}_{p+q}) \\ &= f(a_1 \vec{e}_{p+1} + \dots + a_q \vec{e}_{p+q}). \end{aligned}$$

Si on pose :

$$(4.5) \quad \vec{x}' := a_1 \vec{e}_{p+1} + \dots + a_q \vec{e}_{p+q},$$

alors :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}') \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} - \vec{x}' \in \text{Ker}(f).$$

Il existe donc des scalaires a'_1, \dots, a'_p , coordonnées de $\vec{x} - \vec{x}'$ dans B , tels que :

$$\vec{x} - \vec{x}' = a'_1 \vec{e}_1 + \dots + a'_p \vec{e}_p,$$

d'où, en remplaçant \vec{x}' par sa valeur dans (4.5) :

$$\vec{x} = a'_1 \vec{e}_1 + \dots + a'_p \vec{e}_p + a_1 \vec{e}_{p+1} + \dots + a_q \vec{e}_{p+q}.$$

Donc $B \cup B'$ engendre E . □

Assertion 4.6. $B \cup B'$ est une famille libre dans E .

Preuve. Partons de :

$$(4.7) \quad a'_1 \vec{e}_1 + \cdots + a'_p \vec{e}_p + a_1 \vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q \vec{e}_{p+q} = \vec{0},$$

et montrons que tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls. Prenons l'image par f des deux membres de (4.7) :

$$a'_1 f(\vec{e}_1) + \cdots + a'_p f(\vec{e}_p) + a_1 f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + a_q f(\vec{e}_{p+q}) = \vec{0}.$$

Comme, pour tout indice $1 \leq i \leq p$, on a :

$$\vec{e}_i \in \text{Ker}(f) \quad \implies \quad f(\vec{e}_i) = \vec{0},$$

on obtient :

$$a_1 f(\vec{e}_{p+1}) + \cdots + a_q f(\vec{e}_{p+q}) = \vec{0},$$

c'est-à-dire :

$$a_1 \vec{e}_{p+1} + \cdots + a_q \vec{e}_{p+q} = \vec{0}.$$

Comme C est une famille libre, cette relation entraîne :

$$a_1 = \cdots = a_q = 0.$$

La relation (4.7) s'écrit alors :

$$a'_1 \vec{e}_1 + \cdots + a'_p \vec{e}_p = \vec{0}.$$

Comme B est une famille libre, cette relation entraîne à son tour :

$$a'_1 = \cdots = a'_p = 0.$$

Ainsi, $B \cup B'$ est bien une famille libre. □

Grâce à la conjonction de ces deux assertions, le théorème est démontré. □

Le cas où $\dim E = \dim F$ mérite d'être mis en valeur.

Corollaire 4.8. *Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux \mathbb{R} -espaces vectoriels de même dimension. Alors les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) f est bijective ;
- (ii) f est surjective ;
- (iii) f est injective ;
- (iv) $\text{Ker}(f) = \{\vec{0}\}$.

Preuve. On sait déjà que les propriétés (iii) et (iv) sont équivalentes.

D'autre part, (i) est équivalente à la conjonction des propriétés (ii) et (iii).

Il suffit donc d'établir l'équivalence entre (ii) et (iv). Or d'après le Théorème du rang 4.3 :

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f,$$

donc on a :

$$0 = \dim \text{Ker}(f) \quad \iff \quad (\dim F =) \dim E = \dim \text{Im}(f),$$

c'est-à-dire :

$$\{\vec{0}\} = \text{Ker } f \quad \iff \quad F = \text{Im } f.$$

Par conséquent, (iv) et (ii) sont bien équivalentes, ce qui conclut. □

5. Espace vectoriel des applications linéaires de E dans F

Soient E et F deux \mathbb{R} -espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F sera noté :

$$\mathcal{L}(E, F) := \{f: E \longrightarrow F \text{ linéaires}\}.$$

Nous allons munir cet ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ d'une structure de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Commençons par observer que la somme de deux applications linéaires est encore une application linéaire.

Lemme 5.1. *Si f et g sont deux applications linéaires appartenant à $\mathcal{L}(E, F)$, alors l'application $h: E \longrightarrow F$ définie par :*

$$h(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E)$$

est aussi linéaire.

Preuve. En effet, pour tous vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et tous scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, on a :

$$h(a\vec{x} + b\vec{y}) = f(a\vec{x} + b\vec{y}) + g(a\vec{x} + b\vec{y}).$$

Comme f et g sont linéaires, et comme l'addition est commutative, on déduit :

$$\begin{aligned} h(a\vec{x} + b\vec{y}) &= a f(\vec{x}) + a g(\vec{x}) + b f(\vec{y}) + b g(\vec{y}) \\ &= a h(\vec{x}) + b h(\vec{y}). \end{aligned}$$

Ceci démontre le lemme. □

La définition suivante est alors justifiée.

Définition 5.2. À tout couple ordonné f, g de deux éléments de $\mathcal{L}(E, F)$, on associe un élément de $\mathcal{L}(E, F)$, nommé *somme* de f et de g , et noté $f + g$, qui est défini par :

$$(f + g)(\vec{x}) := f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Cette addition est donc bien une loi interne dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Théorème 5.3. $\mathcal{L}(E, F)$ possède une structure naturelle de \mathbb{R} -espace vectoriel.

Démonstration. Tout d'abord, l'addition dans $\mathcal{L}(E, F)$ est commutative et associative, puisqu'il en va ainsi de l'addition dans \mathbb{R} .

Ensuite, cette addition admet comme élément neutre la *fonction nulle*, notée $f = 0$, définie par :

$$0(\vec{x}) := \vec{0} \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Ici, remarquons au passage que $\text{Ker}(0) = E$, et que la fonction nulle est la seule dont le noyau coïncide avec E tout entier.

Ensuite, toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ a une opposée, notée $-f$, appartenant aussi à $\mathcal{L}(E, F)$, qui est définie par :

$$(-f)(\vec{x}) := -f(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Ensuite, parlons du produit d'une application linéaire par un scalaire. Pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, introduisons l'application h de E dans F définie par :

$$h(\vec{x}) := a f(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Alors pour tout couple de vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$ et tout couple de scalaires $b, c \in \mathbb{R}$, on a, puisque \mathbb{R} est commutatif :

$$\begin{aligned} h(b\vec{x} + c\vec{y}) &= a f(b\vec{x} + c\vec{y}) = a b f(\vec{x}) + a c f(\vec{y}) \\ &= b a f(\vec{x}) + c a f(\vec{y}) \\ &= b h(\vec{x}) + c h(\vec{y}). \end{aligned}$$

Ce calcul justifie la

Définition 5.4. À tout scalaire $a \in \mathbb{R}$ et à toute application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on associe le *produit de a par f* , qui est défini par :

$$(a f)(\vec{x}) := a f(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Ainsi, $a f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour terminer la démonstration du théorème, il est maintenant aisé de vérifier, pour toutes $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$, que :

$$\begin{aligned} (a + b) f &= a f + b f, \\ a (f + g) &= a f + a g, \\ a (b f) &= (a b) f, \\ 1 f &= f. \end{aligned}$$

Ces identités concluent la démonstration. □

6. Dual d'un espace vectoriel

Dans cette très courte section, introduisons le concept important de *dual* d'un espace vectoriel.

Pour cela, considérons dans la Section 5 qui précède le cas particulier où $F = \mathbb{R}$ est le corps des scalaires. Rappelons qu'on peut toujours regarder le corps \mathbb{R} comme un espace vectoriel sur lui-même.

Terminologie 6.1. Toute application linéaire de E dans \mathbb{R} se nomme *forme linéaire* sur E .

Notation 6.2. L'espace de ces formes linéaires sur E sera noté :

$$E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$$

Le Théorème 5.3 montre que cet ensemble $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires de E dans \mathbb{R} est lui-même un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Terminologie 6.3. On nommera *dual de E* cet espace $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E .

7. Anneau des endomorphismes linéaires d'un espace vectoriel E

Rappelons qu'une application linéaire de E dans E lui-même est appelée un *endomorphisme* de E . L'ensemble des endomorphismes de E sera noté :

$$\mathcal{L}(E) := \{f: E \longrightarrow E \text{ linéaires}\},$$

au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. Le Théorème 5.3 s'applique : $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{R} .

Nous allons considérer une deuxième loi de composition interne dans $\mathcal{L}(E)$ qui va le structurer en *anneau*. Commençons par un

Lemme 7.1. *Étant donné trois \mathbb{R} -espaces vectoriels E, F, G , pour deux applications linéaires quelconques :*

$$f \in \mathcal{L}(E, F) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{L}(F, G),$$

l'application composée $g \circ f$ est encore linéaire, c'est-à-dire :

$$g \circ f \in \mathcal{L}(E, G).$$

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \searrow & \text{---} & \swarrow & \\ E & \xrightarrow{f} & F & \xrightarrow{g} & G \end{array}$$

Preuve. Pour tout couple de scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, puisque f et g sont linéaires, on a :

$$f(a\vec{x} + b\vec{x}') = af(\vec{x}) + bf(\vec{x}'), \quad (\forall \vec{x} \in E, \forall \vec{x}' \in E)$$

$$g(a\vec{y} + b\vec{y}') = ag(\vec{y}) + bg(\vec{y}') \quad (\forall \vec{y} \in F, \forall \vec{y}' \in F).$$

Prenons $\vec{y} := f(\vec{x})$ et $\vec{y}' := f(\vec{x}')$. Alors on a bien linéarité de $g \circ f$ grâce au calcul :

$$\begin{aligned} g \circ f(a\vec{x} + b\vec{x}') &= g(af(\vec{x}) + bf(\vec{x}')) \\ &= ag \circ f(\vec{x}) + bg \circ f(\vec{x}'). \end{aligned} \quad \square$$

L'énoncé suivant établit la distributivité de la composition par rapport à l'addition, à droite et à gauche :

Théorème 7.2. (1) *Soient $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ et $h \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :*

$$h \circ (f + g) = h \circ f + h \circ g.$$

(2) *Soient $h \in \mathcal{L}(E, F)$ et $f, g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :*

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h.$$

Preuve. (1) Clairement :

$$(f + g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

Par l'application linéaire h , on obtient :

$$h \circ (f + g)(\vec{x}) = h(f(\vec{x}) + g(\vec{x})) = h \circ f(\vec{x}) + h \circ g(\vec{x}),$$

ce qui est la première partie du théorème.

(2) Pour tout $\vec{x} \in E$, posons :

$$\vec{y} := h(\vec{x}).$$

Or par définition de la somme de deux applications linéaires :

$$(f + g)(\vec{y}) = f(\vec{y}) + g(\vec{y}) \quad (\forall \vec{y} \in F),$$

ce qui entraîne :

$$(f + g) \circ h(\vec{x}) = f \circ h(\vec{x}) + g \circ h(\vec{x}),$$

puis termine la deuxième partie, et conclut. \square

Maintenant, la composition d'applications linéaires peut être vue comme une 'multiplication' \times qui conduit à une structure d'anneau pour la collection $\mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E . Mais attention ! Il y a une grande différence entre \circ et \times , car la composition n'est en général pas commutative :

$$f \circ g \neq g \circ f \quad (f, g \in \mathcal{L}(E), \text{ en général}),$$

nous y reviendrons, nous donnerons des exemples plus tard.

En tout cas, le Lemme 7.1 appliqué à $E = F = G$ montre que la loi de composition :

$$(f, g) \mapsto g \circ f$$

est *interne* dans $\mathcal{L}(E)$, à savoir $g \circ f \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $f, g \in \mathcal{L}(E)$. Le Théorème 7.2 montre que cette loi est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition. De plus, cette loi admet un élément neutre pour la composition, à savoir l'application identité, ou de coïncidence :

$$c(\vec{x}) := \vec{x} \quad (\forall \vec{x} \in E).$$

En conclusion, nous pouvons donc énoncer le

Théorème 7.3. $\mathcal{L}(E)$, muni des opérations $(+, \circ)$, est un anneau à élément unité. \square

Terminologie 7.4. On appelle $\mathcal{L}(E)$ anneau des endomorphismes de E .

8. Groupe des automorphismes d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E

Commençons par quelques rappels généraux de théorie des ensembles.

Terminologie 8.1. On appelle *permutation* toute application *bijjective* $E \xrightarrow{\sim} E$ d'un ensemble E sur lui-même.

Les permutations peuvent être composées entre elles, et inversées, puisqu'elles sont bijectives. En fait, une structure plus riche existe, comme l'énonce le

Lemme 8.2. La collection des permutations d'un ensemble E est toujours un groupe pour la composition.

Preuve. La composition de deux bijections :

$$\begin{array}{ccccc} & & g \circ f & & \\ & \curvearrowright & & \curvearrowleft & \\ E & \xrightarrow{f} & E & \xrightarrow{g} & E \end{array}$$

est encore une bijection, et cette opération de composition admet comme élément neutre l'application identité. Ensuite, cette opération de composition est (trivialement) associative :

$$E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} E \xrightarrow{h} E = E \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g \circ h} E$$

à savoir :

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f,$$

mais elle n'est la plupart du temps *pas* commutative, comme nous l'avons signalé plus haut. Enfin, l'inverse d'une bijection est encore une bijection :

$$E \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} E. \quad \square$$

Quand E est un \mathbb{R} -espace vectoriel, on s'intéresse bien évidemment aux permutations qui sont, de plus, linéaires.

Il en existe ! Par exemple, l'application identité $E \rightarrow E$ est linéaire ! Donnons un autre exemple. Si on munit E , supposé de dimension finie $n \geq 1$, d'une base :

$$B := \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\},$$

toute permutation g de B qui envoie chaque vecteur \vec{e}_i sur un certain autre vecteur \vec{e}_j définit une autre base :

$$B' := \{g(\vec{e}_1), g(\vec{e}_2), \dots, g(\vec{e}_n)\} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\} = B,$$

qui coïncide avec B à un changement d'ordre près, d'où :

$$\text{Vect}_{\mathbb{R}}(B') = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(B) = E,$$

et alors, grâce au Théorème 3.9, on sait qu'il existe un endomorphisme \mathbb{R} -linéaire unique $f: E \rightarrow E$ qui prolonge g au sens où pour tout indice $1 \leq i \leq n$, on a :

$$f(\vec{e}_i) = g(\vec{e}_i),$$

et on sait aussi que f est bijectif, *i.e.* est un *automorphisme linéaire* de E .

Notation 8.3. L'ensemble des automorphismes linéaires d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E sera noté :

$$\mathcal{A}(E) := \{f: E \xrightarrow{\sim} E \text{ linéaires et bijectives}\}.$$

Théorème 8.4. *L'ensemble $\mathcal{A}(E)$ des automorphismes linéaires d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est un sous-groupe de l'ensemble des permutations de E , envisagé comme ensemble.*

Preuve. Rappelons que, pour qu'une permutation de E appartienne à $\mathcal{A}(E)$, il faut et il suffit qu'elle soit linéaire. Le Lemme 7.1 a déjà fait voir que la composition d'applications linéaires préserve la linéarité :

$$(f \in \mathcal{A}(E) \quad \text{et} \quad g \in \mathcal{A}(E)) \quad \implies \quad g \circ f \in \mathcal{A}(E).$$

Prouvons enfin que l'inversion préserve aussi la linéarité :

$$f \in \mathcal{A}(E) \quad \implies \quad f^{-1} \in \mathcal{L}(E).$$

Il s'agit de démontrer que, quels que soient les scalaires $a, b \in \mathbb{R}$, et les vecteurs $\vec{x}, \vec{y} \in E$, on a :

$$(8.5) \quad f^{-1}(a\vec{x} + b\vec{y}) = a f^{-1}(\vec{x}) + b f^{-1}(\vec{y}).$$

Or puisque f est, entre autres, injective, il suffit de prouver que les deux membres ont même image par f . Pour le membre de droite, on a :

$$f \circ f^{-1}(a\vec{x} + b\vec{y}) = a\vec{x} + b\vec{y}.$$

Pour le membre de gauche, en utilisant la linéarité de f , on calcule :

$$\begin{aligned} f\left(a f^{-1}(\vec{x}) + b f^{-1}(\vec{y})\right) &= a f \circ f^{-1}(\vec{x}) + b f \circ f^{-1}(\vec{y}) \\ &= a \vec{x} + b \vec{y}. \end{aligned}$$

La relation (8.5) est donc vérifiée, et le théorème est ainsi démontré. \square

Terminologie 8.6. Le groupe $\mathcal{A}(E)$ des automorphismes linéaires de E se nomme aussi *groupe linéaire*.

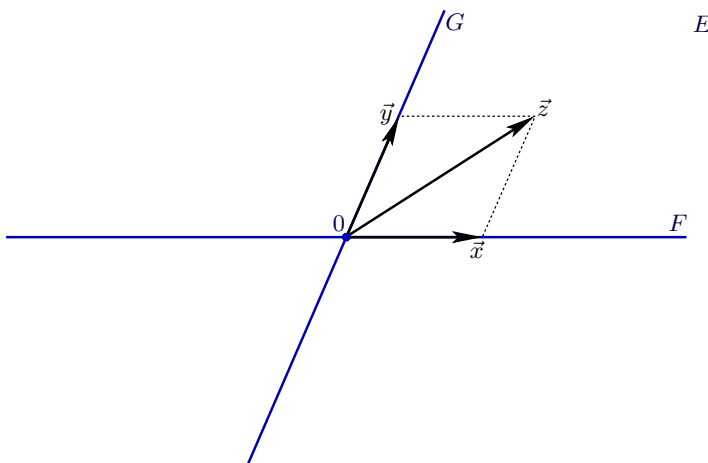
9. Projecteurs

À la fin du chapitre précédent, nous avons vu que deux sous-espaces $F \subset E$ et $G \subset E$ d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E sont dits *supplémentaires* dans E s'ils sont d'intersection $\{\vec{0}\} = F \cap G$ nulle, et de somme $F + G = E$ qui engendre E , propriété que l'on a notée :

$$F \oplus G = E.$$

Alors pour tout vecteur $\vec{z} \in E$, il existe un unique vecteur $\vec{x} \in F$ et un unique vecteur $\vec{y} \in G$ tels que :

$$\vec{z} = \vec{x} + \vec{y}.$$

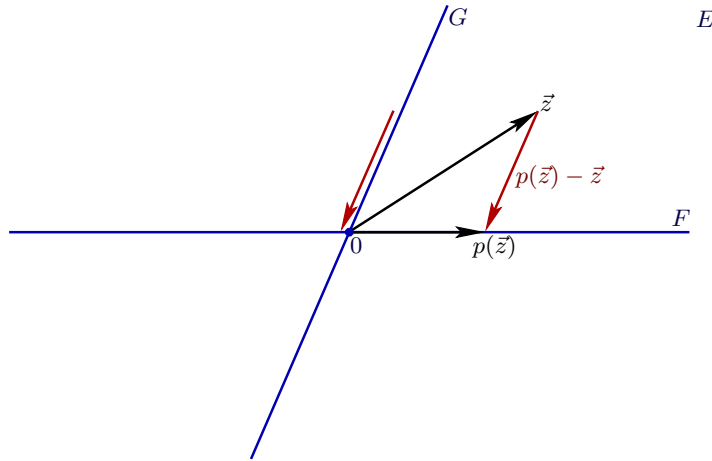


Par analogie avec la géométrie euclidienne, \vec{x} se nomme *projection* de \vec{z} sur F parallèlement à G , tandis que \vec{y} se nomme *projection* de \vec{z} sur G parallèlement à F .

Définition 9.1. F et G étant deux sous-espaces supplémentaires de $E = F \oplus G$, les deux applications $p: E \rightarrow F$ et $q: E \rightarrow G$ telles que :

$$p(\vec{z}) + q(\vec{z}) = \vec{z} \quad (\forall \vec{z} \in E),$$

se nomment respectivement *projecteur de E sur F parallèlement à G* , et *projecteur de E sur G parallèlement à F* .



En d'autres termes, le projecteur p de E sur F associe à tout $\vec{z} \in E$ l'unique vecteur $p(\vec{z}) \in F$ vérifiant :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \in G.$$

De même, le projecteur q de E sur G associe à tout $\vec{z} \in E$ l'unique vecteur $q(\vec{z}) \in G$ tel que :

$$q(\vec{z}) - \vec{z} \in F.$$

Ces projecteurs satisfont quelques propriétés élémentaires.

Lemme 9.2. *Tout projecteur est une application linéaire.*

Preuve. Soit $E = F \oplus G$. Démontrons la linéarité du projecteur $p: E \rightarrow F$.

Pour tout couple de scalaires $a, a' \in \mathbb{R}$ et tout couple de vecteurs $\vec{z}, \vec{z}' \in E$, on a :

$$(9.3) \quad p(a\vec{z} + a'\vec{z}') - (a\vec{z} + a'\vec{z}') \in G.$$

Or les relations :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \in G \quad \text{et} \quad p(\vec{z}') - \vec{z}' \in G$$

entraînent, puisque G est un sous-espace vectoriel de E :

$$a(p(\vec{z}) - \vec{z}) + a'(p(\vec{z}') - \vec{z}') \in G,$$

soit :

$$(9.4) \quad ap(\vec{z}) + a'p(\vec{z}') - (a\vec{z} + a'\vec{z}') \in G.$$

Comme, pour tout \vec{y} de E , la projection $p(\vec{y})$ est l'unique vecteur de F tel que $p(\vec{y}) - \vec{y} \in G$, alors en comparant (9.3) avec (9.4), on obtient bien la linéarité :

$$p(a\vec{z} + a'\vec{z}') = ap(\vec{z}) + a'p(\vec{z}').$$

Par symétrie, la démonstration de la linéarité de l'autre projecteur $q: E \rightarrow G$ est en tout point analogue, et sera éludée. \square

Lemme 9.5. *Si p et q sont les projecteurs de $E = F \oplus G$ sur les sous-espaces supplémentaires F et G , parallèlement à l'autre, alors :*

$$\text{Ker}(p) = G \quad \text{et} \quad \text{Ker}(q) = F.$$

Démonstration. Puisque, pour tout vecteur $\vec{z} \in E$, on sait que $p(\vec{z})$ est l'unique vecteur tel que $p(\vec{z}) - \vec{z} \in G$, alors, la condition nécessaire et suffisante pour que $p(\vec{z}) = \vec{0}$ est que $\vec{0} - \vec{z} \in G$, soit $\vec{z} \in G$. Donc $\text{Ker}(p) = G$.

La démonstration de $\text{Ker}(q) = F$ est (très) analogue. □

Lemme 9.6. *Tout projecteur :*

$$p: E = F \oplus G \longrightarrow F \subset E$$

est un endomorphisme de E vérifiant :

$$p \circ p = p.$$

Preuve. En effet, puisque $E = F \oplus G$ et puisque p est le projecteur de E sur F , on a :

$$p(\vec{z}) - \vec{z} \in G \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p) = G,$$

ce qui entraîne :

$$p(p(\vec{z}) - \vec{z}) = \vec{0} \quad (\forall \vec{z} \in E).$$

Or comme p est linéaire, on en déduit :

$$p \circ p(\vec{z}) - p(\vec{z}) = \vec{0},$$

soit effectivement :

$$p \circ p = p. \quad \square$$

Au sous-espace F de E ne correspond pas un unique supplémentaire G . On ne peut donc pas dire 'le' supplémentaire de F . Mais tous les supplémentaires de F sont isomorphes entre eux, comme le stipule le

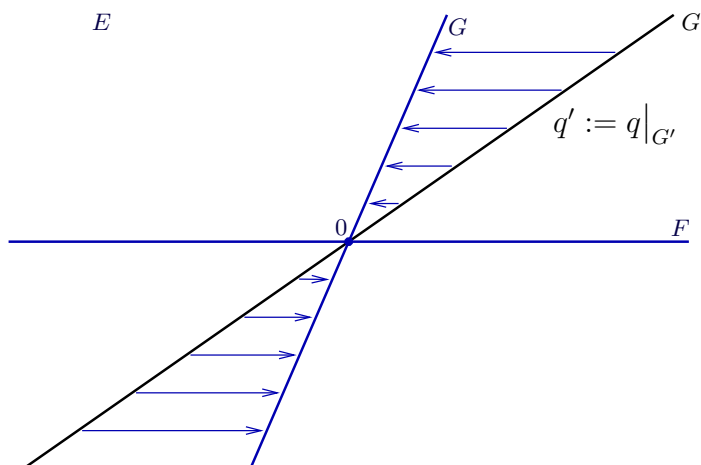
Théorème 9.7. *Soient G et G' deux sous-espaces supplémentaires d'un même sous-espace $F \subset E$ d'un espace vectoriel E :*

$$E = F \oplus G = F \oplus G'.$$

Soit q le projecteur de E sur G parallèlement à F . Alors la restriction q' de q à G' :

$$q' := q|_{G'}: G' \xrightarrow{\sim} G$$

est un isomorphisme linéaire de G' sur G .



Démonstration. Pour commencer, prouvons que cette restriction $q' = q|_{G'}$ est bijective.

En effet, puisqu'on a $\text{Ker}(q) = F$, il est clair (exercice) que :

$$\text{Ker}(q') = F \cap G'.$$

Or F et G' sont supplémentaires, donc $F \cap G' = \{\vec{0}\}$, d'où :

$$\text{Ker}(q') = \{\vec{0}\},$$

ce qui montre que q' est injective, d'après le Théorème 3.6.

Ensuite, prouvons que q' est surjective, c'est-à-dire, prouvons que :

$$\forall \vec{y} \in G, \quad \exists \vec{x} \in G' \quad q'(\vec{x}) = \vec{y}.$$

Or pour tout vecteur $\vec{y} \in E$, et en particulier pour tout $\vec{y} \in G$, il existe une décomposition unique :

$$(9.8) \quad \vec{y} = \vec{z} + \vec{x},$$

avec :

$$\vec{z} \in F \quad \text{et} \quad \vec{x} \in G'.$$

Mais :

$$\begin{aligned} \vec{z} \in F &\implies q(\vec{z}) = \vec{0}, \\ \vec{y} \in G &\implies q(\vec{y}) = \vec{y}. \end{aligned}$$

Appliquons alors q aux deux membres de (9.8), ce qui donne :

$$q(\vec{y}) = q(\vec{z}) + q(\vec{x}),$$

soit :

$$\vec{y} = \vec{0} + q(\vec{x}) = q'(\vec{x}).$$

Ainsi, q' est bien surjective.

En définitive, q' est injective et surjective, donc bijective, et puisqu'elle est linéaire, c'est un isomorphisme linéaire de G' sur G . \square

Le Théorème 9.7 vient d'être établi pour un espace vectoriel quelconque E , pas forcément de dimension finie, éventuellement de dimension infinie, mais spécifions maintenant le cas où E est de dimension finie.

Si E est de dimension finie $n \geq 1$, on peut remarquer que :

$$F \oplus G = E \quad \implies \quad \dim F + \dim G = \dim E,$$

puisque, en prenant une base B de F et une base B' de G , alors $B \cup B'$ est une base de E .

Par conséquent, si $\dim F = p$, alors :

$$F \oplus G = F \oplus G' = E \quad \implies \quad \dim G = \dim G' = n - p.$$

Puisque G et G' ont même dimension sur \mathbb{R} , le Théorème 4.2 prouve qu'ils sont isomorphes.

On obtient ainsi, dans le cas où E est de dimension finie, une autre démonstration de la principale des propriétés indiquées par le Théorème 9.7.

10. Formes linéaires et espace dual

Dans la Section 6 plus haut, nous avons déjà donné la définition de l'espace dual d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E :

$$E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

Cet espace E^* est lui-même un \mathbb{R} -espace vectoriel, d'après la même Section 6. Les éléments de E^* sont les formes linéaires définies dans E , à valeurs dans \mathbb{R} .

D'après le Théorème 3.9, si $B = \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ est une base de l'espace E , supposé de dimension finie $n \geq 1$, toute forme linéaire $f \in E^*$ est définie de façon unique, dès que l'on se donne les scalaires c_1, c_2, \dots, c_n tels que :

$$f(\vec{e}_1) = c_1, \quad f(\vec{e}_2) = c_2, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_n) = c_n.$$

Nous allons maintenant définir n formes linéaires de cette manière, en posant :

$$\begin{aligned} f_1(\vec{e}_1) &:= 1, & f_1(\vec{e}_2) &:= 0, & \dots, & f_1(\vec{e}_n) &:= 0, \\ f_2(\vec{e}_1) &:= 0, & f_2(\vec{e}_2) &:= 1, & \dots, & f_2(\vec{e}_n) &:= 0, \\ & \dots & & & & & \\ f_n(\vec{e}_1) &:= 0, & f_n(\vec{e}_2) &:= 0, & \dots, & f_n(\vec{e}_n) &:= 1. \end{aligned}$$

Plus brièvement, si i et j désignent deux indices parcourant l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, on a :

$$\begin{aligned} i \neq j &\implies f_i(\vec{e}_j) := 0, \\ i = j &\implies f_i(\vec{e}_j) := 1. \end{aligned}$$

Théorème 10.1. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n \geq 1$, rapporté à une base $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$. Les n formes linéaires f_1, \dots, f_n de l'espace dual E^* définies par :

$$f_i(\vec{e}_j) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } i \neq j, \\ 1 & \text{lorsque } i = j, \end{cases}$$

constituent une base de E^* , et par conséquent :

$$\dim E^* = \dim E.$$

Démonstration. Commençons par montrer que ces n formes linéaires engendrent l'espace E^* .

En effet, d'après le Théorème 3.9, toute forme linéaire $f \in E^*$ est déterminée de manière unique par la donnée de ses valeurs :

$$f(\vec{e}_1) = c_1, \quad \dots, \quad f(\vec{e}_n) = c_n.$$

Or pour tout indice $1 \leq j \leq n$, on peut écrire :

$$c_j = c_1 f(\vec{e}_1) + \dots + c_j f(\vec{e}_j) + \dots + c_n f(\vec{e}_n),$$

simplement parce que :

$$\begin{aligned} i \neq j &\implies f_i(\vec{e}_j) = 0, \\ i = j &\implies f_i(\vec{e}_j) = 1. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a :

$$f(\vec{e}_j) = \sum_{i=1}^n c_i f_i(\vec{e}_j),$$

et d'après le Théorème 3.9, la forme f vérifie dans E^* :

$$f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n.$$

Par conséquent, toute forme linéaire $f \in E^*$ est une combinaison linéaire des f_i , les coefficients de la combinaison étant précisément les valeurs c_i qui déterminent f .

Montrons à présent que ces n formes linéaires constituent une famille libre dans E^* .

Partons de la combinaison linéaire nulle suivante :

$$a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n \quad (a_i \in \mathbb{R}).$$

Cela veut dire que, pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a :

$$a_1 f_1(\vec{x}) + \cdots + a_n f_n(\vec{x}) = \vec{0}.$$

Prenons successivement :

$$\vec{x} := \vec{e}_1, \dots, \vec{x} := \vec{e}_n.$$

Pour tout indice $1 \leq j \leq n$, en prenant $\vec{x} = \vec{e}_j$, et en appliquant la définition des f_i :

$$f_i(\vec{e}_j) = \begin{cases} 0 & \text{lorsque } i \neq j, \\ 1 & \text{lorsque } i = j, \end{cases}$$

on obtient :

$$a_j = 0 \quad (\forall 1 \leq j \leq n).$$

En définitive :

$$a_1 f_1 + \cdots + a_n f_n = 0 \quad \implies \quad a_1 = \cdots = a_n = 0,$$

ce qui montre bien que la famille $\{f_1, \dots, f_n\}$ est libre.

En conclusion, cette famille constitue une base de E^* , ce qui achève la démonstration. \square

Notation 10.2. On nomme $\{f_1, \dots, f_n\}$ *base duale* de $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$, et on la note plutôt

$$\{\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*\}.$$

Terminons ce chapitre par une représentation utile.

Observation 10.3. Pour tout vecteur $\vec{x} \in E$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{x} &= f_1(\vec{x}) \vec{e}_1 + \cdots + f_n(\vec{x}) \vec{e}_n \\ &= \vec{e}_1^*(\vec{x}) \vec{e}_1 + \cdots + \vec{e}_n^*(\vec{x}) \vec{e}_n. \end{aligned}$$

Preuve. En effet, $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \cdots + x_n \vec{e}_n$ entraîne, pour tout indice $1 \leq j \leq n$:

$$f_j(\vec{x}) = x_1 f_j(\vec{e}_1) + \cdots + x_n f_j(\vec{e}_n) = x_j,$$

puisque $f_j(\vec{e}_i) = 0$ pour $i \neq j$ et $f_j(\vec{e}_j) = 1$. \square

11. Exercices

Exercice 1. EE