Joël MERKER

École Normale Supérieure

Département de Mathématiques et Applications

45 rue d'Ulm, F-75230 Paris Cedex 05

www.dma.ens.fr/∼merker/index.html

merker@dma.ens.fr

Essai de philosophie générale des mathématiques

(Titre actuel)

Projet de thèse
Sous la direction du Professeur
Jean-Jacques SZCZECINIARZ
Université de Paris 7

20 janvier 2010
iv+116 pages

Table des matières

(actuelle)

Bibliographie

G.W.F. HEGEL

LEÇONS SUR L'HISTOIRE DE LA PHILOSOPHIE

(Manuscrit de 1820 [**16**])

Cela constitue précisément le travail infini de l'esprit que de s'arracher de *son être-là immédiat, de son heureuse vie naturelle pour aller vers la nuit et la solitude de la conscience de soi*, et, par ses propres forces, de *reconstruire* intellectuellement l'intuition et l'effectivité qu'elle a séparées de soi. [. . .] La *philosophie* ne ressortit pas au *somnanbulisme*, elle est plutôt la conscience la plus éveillée, et son éveil successif est précisément *cette élévation* de soi-même au-dessus *des états d'unité immédiate avec la nature* — une activité de s'élever et un travail qui — parce qu'il se présente comme différenciation constante de soi-même pour restaurer enfin l'unité grâce à l'*activité de la pensée* — tombe dans le temps en son cours, et même dans un temps *fort long*.

J'ai dit au commencement que notre philosophie n'est pas autre chose que le *résultat* du travail de tous les siècles ; il faut savoir, quand on est frappé d'un temps si long, que cette longueur de temps a été utilisée pour acquérir ces concepts — non tant jadis que maintenant. Il faut savoir en général que l'état du monde, d'un peuple, dépend du concept qu'il possède de lui-même ; le royaume de l'esprit n'est pas comme un champignon qui pousse en une nuit ; qu'il y ait eu besoin d'un temps si long ne frappe que lorsqu'on ne connaît pas la nature et l'importance de la philosophie. [. . .]

Pour ce qui concerne la lenteur de l'esprit du monde, il faut méditer qu'il n'a pas à se presser, qu'*il a suffisamment de temps* — mille ans sont pour toi comme un jour [*cf.* Psaume 90, 4] —, il a suffisamment de temps précisément parce qu'il est lui-même en dehors du temps, parce qu'il est éternel [. . .]. L'esprit du monde *ne se borne pas* à avoir suffisamment de temps ; ce n'est pas *seulement* du temps qu'il faut utiliser pour se *procurer* un concept, cela coûte également autre chose — le fait qu'il utilise pour ce travail de nombreuses espèces humaines et de nombreuses générations, qu'il fait une dépense énorme d'apparitions et de disparitions, *cela lui importe peu* ; il est suffisamment *riche* pour une telle dépense, il réalise son œuvre en grand, il possède assez de nations et d'individus à dépenser. C'est une proposition bien triviale : la nature parvient à son but par le plus court chemin — certes, mais le chemin de l'esprit est la méditation, le détour ; du temps, de la peine, de la dépense — de semblables déterminations de la vie finie, il n'est pas question ici.

Pensées

Colloques

Multiplication des rencontres, club d'invités qui tiennent le haut du pavé, tourniquet des conformismes. Le mensonge bienséant de la respectabilité de vitrine enrôle comme un phénomène transhistorique, chacun craint, épie sans rien dire, une nouvelle cours internationale organise de multiples communautés ou sous-communautés scientifiques.

Sociologues, à vos concepts !

Mais métaphysiquement parlant, en amont d'une sociologie ciblée qui scrute l'humain foisonnant, les conditions de possibilités de l'omnicolloquialité sont trop profondes et trop robustes, elles tiennent à cela : rien ne peut évincer l'incroyable puissance immédiate de geste dont dispose chaque homme, puissance qui lui ouvre à chaque instant des possibilité de jouer avec ses semblables tout jeu qui suit des règles implicites de conformité reproductrice. D'où l'échec du pamphlétarisme, d'où l'échec de la misanthropie, d'où l'éternelle force du conformisme dans la pensée, et dans les communautés, depuis la nuit des temps.

Les plus puissants du présent sont effectivement très puissants. Cyniquement, certains qui sont extrêmement lucides se moquent du fait que sur le très long terme le pouvoir dans la pensée soit insaisissable et qu'il n'y ait plus aucune élection décidée. Car en fin de compte, que peut nous importer ce qui restera, puisque ce qui reste s'est fait sans que l'on sache comment cela est resté. Et ce qui est resté est un reste de ce qu'on ignore en grande partie de ce qu'il a pu être réellement, si l'on accorde au terme réel sa richesse inextinguible même dans l'instant présent.

Celui qui ne joue pas ne joue pas. Il ne joue pas : cela est évident. Tel comportement est sans appel. C'est une certitude, tout le monde est d'accord. L'exclusion s'impose.

Le jeu en effet organise pertinemment ses structures fines d'exclusion, définit des canons de comportement et de discours, prévoit, ferme le temps dans le terme mi-court mi-long qui permet à chacun des membres d'un club plus ou moins virtuel de programmer ses activités en fonction de la nouvelle rencontre, du nouveau colloque, de la nouvelle conférence, du nouveau workshop.

L'exclusion procède d'une nécessité impérieuse, hors de nous, plus forte que les cités, plus forte que la pensée individuelle, plus forte que toutes les structures étatiques, gouvernementales ou scientifiques. Qu'est-ce que l'exclusion ? Qu'est-ce que l'élitisme ? Qu'est-ce que la sélection ? Une posture face au multiple, une incitation au dépassement, une proposition faite à notre puissance potentielle, une *situafication*.

L'exclusion, à un niveau terriblement angoissant : c'est la mort du temps épuisé, la disparition à jamais de tous les gestes et textes que l'on s'est évertué à réussir.

L'exclusion, c'est la disparition qui est en nous parce que nous disparaissons, parce que nous disparaîtrons.

Alors exclure en décidant de ne pas inviter, en se donnant bonne conscience de sélectionner conformément aux canons de l'instant, c'est chercher *au temps présent* à prendre les devants sur le *temps éliminateur* : s'imaginer soi-même, aux commandes des décisions de qui tiendra le haut du pavé, que le haut du pavé est ce qu'une décision à décidé qu'il devrait être.

Le pouvoir est à la fois pouvoir et dépossession. Conscience rapprochée que le temps décide sans nous des vraies mémoires. Cyniquement, le décideur extrêmement lucide peut se positionner hors de ces vrais questions et choisir seulement de jouir de sa possession principale : la décision du destin d'autres êtres qu'il se représente comme inférieurs dans la hiérarchie de l'establishement. Mais au fond du vrai fond de la chose, d'autres nécessités gouvernent ce qui est à la racine des concepts, et ces nécessités, nous ne parvenons presque jamais à les deviner adéquatement.

Peu importe si, d'une conférence à l'autre, l'identité de soi à soi reste la même, peu importe si les discours versent dans une idiosyncrasie de plus en plus enracinée : le principal, c'est de se sentir toujours dans le mouvement, dans le groupe, dans les membres invités, et de faire vivre les instants éphémères de son Dasein parmi les instants éphémères des autres Dasein élus. Se rassurer parce qu'on est toujours là entre personnes importantes qui s'inter-invitent sans rogner de territoire voisin. Car l'une des règles du jeu qu'il faut absolument respecter, c'est la quasi-totale étrangeté thématique de chacun à chacun, que renforce l'art de l'intérêt scientifique diplomatique.

Les moyens techniques et financiers sont tellement faciles d'accès aujourd'hui qu'aucune décision d'organiser une rencontre de club ne dépend des moyens financiers et matériels. Mais en vérité, tout dépend seulement de décisions, d'élections virtuelles, d'accord commun de considération entre gens de pouvoir et de respectabilité acquise. Le système, *qui n'est pas un système*, définit ses règles du jeu dans un moment absolument furtif et insaisissable : l'instant où M. X ou Mme Y décide d'organiser un nouveau micro-événement dans une certaine communauté qui éprouve un besoin presque compulsif de renouveller une émulsion (pour produire une mousse multicolore aux saveurs déjà connues), une nouvelle rencontre *qui jettera sur affiche* *les noms seuls de ceux qui ont mérité d'être* invited speaker *dans ces moments d'élection obscurs faits par courriel ou par téléphone entre comités scientifiques cooptés*.

Qu'y perd le système ? Rien, il y gagne tout ce qui fait sa stabilité et sa raison d'être.

L'inquiétude métaphysique sur ce qu'est la pensée que l'on parvient à produire par rapport à la pensée en tant que mystère non résolu finit par s'estomper lorsque l'on maintient les rênes sur le mors des décisions infimes qui organisent les regroupements d'une noblesse déclamée sur affiche.

Nécessité de la violence et de la folie dans la pensée

Sans elle, l'universitarité commentatrice établie se mourrait de fin.

Explosion dans les calculs

Élimination par résultants progressifs. Beaucoup de variables. On élimine une première variable entre cinq équations comportant neuf variables. Leur degrés n'excèdent pas quatre, voire un pour cinq des variables. Les coefficients sont entiers. Première élimination : d'un seul coup le degré de la prochaine variable à éliminer monte à douze, parfois seulement six. De cinq à quinze lignes pour ces nouveaux polynômes. Pour sélectionner la bonne composante irréductible, il faut tester si ces polynômes sont irréductibles. Cela, de manière surprenante, se rapproche de la théorie des nombres. La présence de toutes les variables, de tous les coefficients cherche à embrasser le problème dans sa totalité, au moins pour le cas spécifique à l'étude, à savoir l'ensemble des polynômes complexes à une variable de degré inférieur ou égal à cinq lorsqu'on les paramètre par leurs quatre points critiques (comptés avec multiplicité). Cette stratégie d'embrassement est universellement possible en mathématiques, mais elle n'aboutit quasiment jamais, car les calculs, de manière incompréhensible, explosent, s'exponentialisent. En effet, l'élimination de la seconde variable fournit des polynôme de dix pages de long. Difficile alors de tester s'ils sont irréductibles. Impossible de continuer sans comprimer d'une manière ou d'une autre la complexité. La suite fournit des polynômes de cent pages de long. Mais il resterait encore une variable à éliminer. C'est exponentiel, un labyrinthe de possibilités de calculs existe, on cherche les signes que des expressions plus compactes existent, on ne les trouve pas, l'embrassement par la force ne fonctionne pas.

Les concepts, en mathématiques, ne sont que des fils d'Ariane dans des océans des calculs possibles, des traces partielles qui évitent la vérité d'immensités coprésentes, des preuves éclatantes de la petitesse de nos mathématiques.

Partie II : La mathématique universelle de Lie

Chapitre : Généralités spéculatives

Destin comparé des œuvres scientifiques et littéraires. La mathématique est certes une science cumulative et hiérarchisée, mobile et en progrès perpétuel. Non seulement les mathématiciens absorbent et reformulent, mais aussi, ils effacent, et surtout, ils *réécrivent*. Le retour aux textes-sources semble donc être le fait d'une poignée d'historiens déconnectés de la mathématique vivante. À l'opposé, dans les études historiques et littéraires, la notion d'*œuvre* génère des pratiques universitaires diversifiées et instaure des paradigmes critiques multiples.

Un faisceau de raisons profondes doit pouvoir expliquer cette différence de destin dans l'histoire des idées. Mentionnons brièvement trois d'entre elles qui nous paraissent pertinentes.

□ Alors que la langue littéraire a relativement peu évolué d'un point de vue morphologique depuis le dix-huitième siècle, la langue mathématique a subi une « révolution axiomatique » majeure qui s'est imposée sur une période relativement récente et assez peu étendue dans la durée, période qui commence au moment des premières tentatives de formalisation de la géométrie et des nombres réels à la charnière du dix-neuvième et du vingtième siècle, et qui se termine au moment la production des traités de Nicolas Bourbaki s'interrompt.

□ Dans un domaine mathématique donné, *e.g.* la topologie générale, la théorie des groupes algébriques, la géométrie riemannienne, la théorie des corps de nombres, la théorie des représentations, l'analyse harmonique, la dynamique réelle, *etc.*, certaines séries de manuels présentent un contenu essentiellement identique, ce qui serait impensable en littérature. Les traités sont construits pour se lire plus facilement que les œuvres originales, et partant, ils s'y substituent.

□ Les obstacles de compréhension imposent une *discipline de la lenteur* dans la lecture mathématique. Aborder l'œuvre d'un mathématicien prolifique tel que Lie ou Grothendieck exige l'apprentissage patient d'une langue nouvelle et comme étrangère. Au final, il en découle que les œuvres mathématiques, en première place sur les rayons des bibliothèques, sont rarement consultées comme source de pensée. Limitation de spectre, spécialisation et professionnalisation : l'équivalent, en mathématiques, de l'idée d'honnête homme à la culture littéraire potentiellement universelle, semble donc être, pour des raisons intrinsèques, impossible.

Le mirage de l'« absorption en totalisation ». À l'intérieur même d'un corpus d'œuvres mathématiques qui sont ainsi relativement peu lues et peu étudiées, les travaux de Lie sur les groupes continus de transformations occupent une place singulière : personne dans le monde, pour ainsi dire, ne les lit.

Par une espèce de *décision a priori*, il nous faudra donc légitimer une entreprise mathématique et philosophique, à savoir la lecture des œuvres de Lie. Celle-ci s'incrit dans une période de l'histoire de la pensée, la nôtre, qui se perçoit comme libérée des problèmes de fondements, et qui s'est également convaincue, par principe, de la supériorité contemporaine de la pensée structuraliste et du langage formaliste. En effet, nombreux sont ceux qui s'imaginent que par l'action automatique d'un progrès naturel, le passé mathématique doit nécessairement être « absorbé en totalisation » dans les traités modernes. Et l'on croit aisément que la problématicité ouverte des dialectiques conceptuelles est maintenant canalisée dans un réseau de définitions axiomatiques consacrées par l'usage.

Le drame de l'a posteriori du spéculatif. Mais à mesure que les définitions se stabilisent, le sens et l'acuité des discussions sur la nature des concepts mathématiques s'éloignent inexorablement de nous. Bien que l'objectif de réflexion sur la découverte scientifique soit clairement visé par les théories épistémologiques les plus diverses, aucune d'entre elles ne parvient et ne parviendra véritablement à recréer les conditions réelles d'ouverture dans lesquelles ont été placés les savants qui sont à l'origine d'avancées scientifiques notables. Aussi est-ce en partie une illusion de croire participer encore pleinement aux discussions qui se sont concentrées, à une époque donnée sur *e.g.* les questions de fondements, la métaphysique des infiniment petits, l'élaboration des axiomes de la géométrie, l'hypothèse du continu, la place de l'axiome du choix dans la théorie des ensembles, la construction des nombres réels, *etc.* L'appréhension des concepts de base reçus en apprentissage laisse croire que l'on accède par là-même à une compréhension englobante des découvertes, alors que les tensions véritables ne peuvent être captées que *sans suspense* par les reconstructions pédagogiques ou érudites. En effet :

Le *drame du spéculatif* s'estompe dans tout *a posteriori historique.*

De plus, le temps de la méditation scientifique ne se redéploie presque jamais en tant que tel dans l'écrit commenté. En effet, la méditation scientifique possède une grande extension temporelle *récurrente* ; soumise à des obstacles innombrables, elle s'accompagne de *milliers de feuillets de notes manuscrites*. Ainsi, les participations épistémologiques, nos participations, sont toujours décalées, métamorphosantes, illusionnistes. C'est bien là tout le *drame méta-spéculatif* de la philosophie des sciences : elle ne navigue que dans l'*a posteriori* des *drames spéculatifs* des sciences.

Essences mathématiques spéculatives. Donc, dans l'obligation d'admettre que la philosophie des mathématiques est limitée *par nature* à l'étude *a posteriori* des grandes synthèses conceptuelles, nous partirons néanmoins de l'hypothèse que les architectures mathématiques renferment des *essences spéculatives* intrinsèques, autonomes, ouvertes, accessibles et réutilisables, bien que ces essences, comme nous l'avons dit, semblent s'estomper inexorablement à cause du jeu de l'absorption, de la traduction, de la modernisation, de la réécriture et surtout, de la formalisation, voire de la mécanisation. Le philosophe des sciences contemporain serait un peu comme un sauveteur désespéré des idées spéculatives, impuissant face à l'« *Atlantide du conceptuel* », cet engloutissement regrettable auquel les œuvres du passé sont exposées, à cause d'une prolifération techniciste.

Qu'est-ce qu'une *essence mathématique spéculative* ?

Cette terminologie d'inspiration volontairement « *scolastique et métaphysique* » pourrait recouvrir tout d'abord, à un niveau riemannien, un des grands cadres ouverts de la mathématique générale, par exemple : la séparation antinomique ou dualistique entre la pensée du continu et la pensée du discret ; la disponibilité permanente à un indéfini encadré par une finitude ; l'attente devant l'inconnu ; la domination universelle du principe de raison suffisante ; *etc.* Ensuite, au niveau inférieur et spécialisé de la technique mathématique interne, ces essences deviennent innombrables et elles s'organisent localement en nœuds problématisants ou conceptualisants. Notre hypothèse métaphysique principale part donc d'une constatation factuelle qui a été rejetée à tort par les épistémologies analytiques de l'époque maintenant révolue de l'absolutisme logique : en tant que donnée observable et omniprésente, nous *admettons l'existence donnée et pensable* de telles essences mathématiques spéculatives, et nous postulons qu'elles transcendent la plupart du temps les représentations langagières. À la manière des *Idées dialectiques* d'Albert Lautman, ces essences sont *dominatrices* pour l'organisation intelligible *saine* de la pensée mathématique, en tant qu'elles doivent organiser et diriger la production d'irréversible-synthétique. En effet :

> Un *maintien constant et omniprésent de la métaphysique dans les mathématiques* est nécessaire.

Nous nous proposons alors d'*interroger* ces essences mathématiques spéculatives, de leur accorder pleine et entière parole *in situ*, et de les redéployer comme sur les milliers de feuillets virtuels que la pensée dépense en méditations, en tentatives, en projets, en esquisses. Immédiatement, nous ajoutons aussi que les conceptualisations mathématiques ne sont jamais tout à fait clarifiées ou tout à fait dominées, ni par des systèmes formels, ni par des architectures théoriques qui délimitent un certain nombre de résultats achevés. Comme sous l'effet d'un postulat décidé dans un *a priori* relatif qui se nourrit *a posteriori* de ce qui est connu, il faut reconnaître et admettre l'existence d'espaces de pensée mathématique qui restent ouverts en eux-mêmes. Il faut même que ces espaces de pensée offrent un réservoir inépuisable de virtualités, également en ce qui concerne des sujets scientifiques réputés épuisés, y compris là où rien de révolutionnaire n'est à attendre. Seront donc mises entre parenthèses toutes les réticences que la technicisation achevée de la pensée ne cesse d'opposer à la métaphysique, et nous ne dilapiderons aucune énergie stérile à polémiquer contre l'anti-réalisme sophistique ou contre toute autre forme de philosophie qui se complaît à miner les tendances incontournables à la *saine* systématicité.

Accepter l'ouverture conceptuelle de l'espace. Ici, c'est de l'espace, et des mouvements locaux dont il est susceptible, qu'il va être largement question, et c'est en accompagnant une partie de la pensée de Lie que nous allons exprimer *in situ* certaines essences mathématiques spéculatives universelles, en coprésence et en omniprésence. Brièvement, nous avons analysé ailleurs ([**25**]) *l'ouverture décidée de la pensée riemannienne*. Loin d'avoir seulement proposé, en la notion de *variété* [*Mannigfaltigkeit*], une abstraction de la notion de surface gaussienne, et d'avoir suggéré, en dimension quelconque, la notion de forme quadratique différentielle[1], Riemann a surtout fait ressortir, et c'était son talent majeur, le *caractère problématique et inachevé des conceptualisations mathématiques possibles*. À notre connaissance, aucun commentateur de Riemann n'insiste suffisamment sur ce point qui se dégage pourtant très visiblement à la lecture de ses œuvres.

Riemann décide les ouvertures, accepte l'ignorance, et maintient intentionnellement le rapport de la pensée à des Inconnus désignés et métamorphosables. Rassembler des éléments incompris, accepter les questions irrésolues, savoir que l'on ne sait pas : telle est, en mathématiques, la règle de direction de l'esprit et cette règle s'apparente beaucoup plus à la volonté d'ignorance socratique qu'au principe cartésien de doute systématique. Plus encore, il s'agit dans la pensée riemannienne de désigner et d'accepter les mystères, mais sans se rallier à une théorie philosophique prédéfinie.

[1] Auparavant, Gauss avait extrait l'invariant unique appelé *courbure* pour les surfaces.

> On sait que la Géométrie admet comme données préalables non seulement le concept de l'espace, mais encore les premières idées fondamentales des constructions dans l'espace. Elle ne donne de ces concepts que des définitions nominales, les déterminations essentielles s'introduisant sous forme d'axiomes. Les rapports mutuels de ces données primitives restent enveloppés de mystère ; on n'aperçoit pas bien si elles sont nécessairement liées entre elles, ni jusqu'à quel point elles le sont, ni même *a priori* si elles peuvent l'être. [**33**], p. 280.

Ce paragraphe introductif extrait de l'*Habilitationsrede* de Riemann désigne donc des mystères : qu'est-ce qu'un espace ? qu'est-ce qu'une droite ? qu'est-ce qu'un triangle ? À l'époque de Riemann, ces questions n'étaient pas réellement soulevées par la tradition classique. Définitions nominales, représentations physiques et pratiques intuitives masquent en effet de telles questions. En énonçant des postulats structurés, l'axiomatisation transmise par les géomètres grecs *conscientise* ce qui semble premier dans les constructions afin d'*organiser hiérarchiquement* le déductif, et ceci représente bien entendu une révolution du spéculatif en tant que tel, mais toutefois, postuler au sens des Grecs, c'est aussi *admettre*, pointe Riemann, les données préalables *sans* les *interroger* pour elles-mêmes. La philosophie implicite de Riemann se situe donc à un niveau métaphysique supérieur à celui qui fait remonter aux premiers principes d'une science dont les éléments effectifs sont déjà développés. Ce niveau, c'est le *questionnement conceptuel* en lui-même. Et dans l'histoire philosophique des mathématiques, Riemann est à l'origine d'une véritable révolution, puisqu'il instaure l'acceptation du questionnement mathématique intense susceptible d'être maintenu ouvert pendant des décennies, voire des siècles.

En géométrie, immédiatement après avoir ouvert les questions de nature conceptuelle, Riemann *ose* aussi ouvrir le champ *encore inexistant* des relations possibles entre ces concepts potentiels qui sont *encore à créer*. Et malgré ses allures allusives, la troisième phrase est significative : d'emblée les liens *encore inexistants* entre des notions primitives « enveloppées de mystère » sont interrogeables avant même de naître : nécessité des liaisons ? absoluité ? extension ? possibilité ? aprioricité ? Comme nous l'avons écrit dans [**24**], la pensée mathématique de Riemann anticipe très largement l'émergence de l'axiomatique en mathématiques, qui devait s'émanciper ultérieurement avec Hilbert et Bourbaki. Et c'est dans cette ouverture intemporelle de la mathématique que Lie allait développer une théorie des groupes continus de transformations en développant une méthode de pensée que l'on peut qualifier d'universelle.

Masses-pensées intuitives de la mathématique. Concevoir, c'est penser, et cela, la plupart du temps, sans bénéficier de réflexes mécaniques ou d'automatismes. Penser en concevant implique donc une certaine tension cérébrale qui mobilise alors ce que nous appellerons avec Riemann, mais sans vouloir fixer de terminologie contraignante, des *masses-pensées intuitives*. Toutefois, le caractère proprement « *intuitif* » de ces masses-pensées est et ne peut être que problématique, parce qu'elles s'entrelacent au divers et au sensible d'une manière que nous ne comprenons que partiellement, fussions-nous véritablement capables de les approcher par une connaissance réflexive. Pour la neurophysiologie contemporaine qui est parfois tentée d'universaliser certaines thèses immanentistes voire réductionnistes en se basant sur des analyses de quelques actes très élémentaires chez les êtres animés, les intuitions de la pensée spéculative sont encore fort mystérieuses, si ce n'est hors d'atteinte, tant elles sont complexes. Heureusement, la très grande diversité des intuitions qu'ont les mathématiciens de leurs objets abstraits garantit une *hétéronomie salvatrice* des masses-pensées qu'ils mobilisent. En effet, l'intuition mathématique agissante est si riche qu'il est difficile, pour la philosophie, de l'analyser sans céder à la tentation de systématiser dogmatiquement ses conditions de possibilité en regard du monde, voire de fonder le rapport au monde sur un antiréalisme parfois franchement douteux, bien qu'il soit distrayant sur le plan de la controverse philosophique. Dans ses fragments philosophiques[2], Riemann a tenté d'exprimer quelques aspects de ces masses-pensés qui seraient comme des mobilisations continues, étendues et dérivantes dans le tissu individuel de la pensée et de la perception.

> Par chaque acte simple de pensée, quelque chose de durable et de substantiel entre dans notre esprit. Cette substance nous apparaît en fait comme une unité mais il s'avère (dans la mesure où elle est l'expression de l'étendue spatiale et temporelle) qu'elle comprend une variété subsumée ; j'appellerai cela une « masse-pensée » [*Geistesmasse*]. De ce fait, toute pensée est le développement de nouvelles masses-pensées. [**34**], p. 15.

Sans théoriser, Riemann constate, analyse, et effectue vraisemblablement comme une sorte d'introspection de son propre pouvoir de conceptualisation. On trouve même dans ses fragments une quasi-tentative de concevoir l'ontogénèse d'une pensée de savant.

> L'esprit est une masse-pensée compacte, multiplement connectée par des connexions internes des plus intimes. Il croît de manière continue au fur et à mesure que de nouvelles masses-pensées y entrent, et c'est de cette manière qu'il continue à se développer. [**34**], p. 15.

Or les masses-pensées hétéronomes sont tout particulièrement à l'œuvre quant il s'agit de géométrie, puisque l'intuition est constamment mobilisée pour former des représentations mentales, visuelles ou imaginées des objets étudiés. La différence entre l'intuition du géomètre et l'intuition de l'algébriste tient alors surtout à ce que le géomètre assortit constamment la pensée formulée en langage analytique d'une exigence de visualisation indépendante. Il est alors relativement difficile d'inventer un langage écrit qui

[2] — traduits en français dans [**34**] —

puisse signaler à tout instant, avec ou sans figures, les actes potentiels de visualisation mentale qui doivent naître dans l'intuition du lecteur et aussi le cas échéant, la féconder. Or dans l'œuvre de Lie, ces actes intuitifs qui sont innombrables sont aussi contrôlés par des genèses spéculatives remarquables, et nous allons tenter d'en exposer quelques aspects en nous concentrant au moins sur les éléments de base de la théorie.

Écarter les problèmes de fondement. Nous ne dirons rien, ici, de la représentabilité, au moins locale, des espaces à plusieurs dimensions par des systèmes de valeurs numériques, autrement dit, du fait essentiellement admis depuis Gauss et Riemann que les concepts de la géométrie se « fondent » essentiellement sur les concepts de la théorie numérique du continu. En effet, cette question philosophique nous entraînerait vers des débats délicats, mais qui en resteraient volontiers à un niveau mathématique trop élémentaire par rapport aux objectifs que nous viserons ici, la mathématique n'étant absolument pas, par nature, destinée à demeurer élémentaire. Contentons-nous de dire que la question est clairement désignée chez Riemann, bien avant que naisse la théorie dite *des ensembles*, théorie dont on croit souvent à tort qu'elle inscrit tous les concepts mathématiques existants de manière rigoureuse et définitive dans une architecture logico-axiomatique adéquate. D'un point de vue philosophique général, nous croyons quant à nous que les recherches passées ou actuelles en vue d'une fondation se développent d'une manière relativement indépendante des recherches mathématiques principales, et qu'elles vivent ou ont vécu leur propre destin d'investigation spécialisée, sans que leurs résultats — forcément partiels, comme dans tous les autres domaines des mathématiques — aient une portée véritable sur le destin des mathématiques vivantes : les travaux de Galois, Serret, Jordan et Lie n'ont été, dans leurs principes et dans leurs résultats, soumis à aucune révision fondamtentale qui aurait été causée *a posteriori* par la « révolution » axiomatique.

En définitive, nous reprenons à notre compte comme une évidence transmise par la tradition les conclusions cavaillésiennes négatives ([**6**]) : échec aussi bien de l'école formaliste, que de la réduction logiciste et que de la proposition brouwérienne pour fonder les mathématiques. Autrement dit : la recherche de fondations n'est pas fondamentale pour la recherche elle-même.

Chapitre :
Équations de transformations et axiomes de groupes

Équations de transformation comme forme de l'ambiguïté. L'objet archétypal de la théorie de Lie est constitué de ce qu'on appelle des *équations de transformations*. En tout premier lieu, ces équations ne sont autres que des changements de coordonnées locales sur un espace à n dimensions. Autrement dit, à une collection de points dont chacun est repéré par n coordonnées réelles ou complexes[1] $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, on fait correspondre de manière bijective une autre collection de points dont les coordonnées seront notées $(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$.

Cet objet transformationnel quelconque :

$$(x_1, \dots, x_n) \longmapsto (x'_1, \dots, x'_n)$$

n'est pas seulement considéré par Lie comme une *application*, au sens de la théorie des ensembles. Plus profondément, Lie cherche à ériger une *théorie fondamentale de l'ambiguïté*[2] qui est *consubstantielle* à toute donation géométrique, mais il ne cherche pas du tout à explorer pour elle-même la notion de correspondance dans les replis austères et ensemblistes de l'abstraction structuraliste. Aussi Lie procède-t-il fondamentalement comme Galois : aux permutations discrètes d'un nombre fini de racines, Lie substitue en effet les difféomorphismes continus locaux d'un nombre infini de points situés dans des espaces à plusieurs dimensions.

Rappelons que Galois prenait comme levier métaphysique fondamental la constatation que les racines d'un polynôme général à coefficients rationnels n'ont *a priori* aucune individualité propre et doivent par là-même être considérées comme indiscernables :

$\boxed{\textit{l'ambiguïté et l'indécision sont consubstantielles à toute donation initiale}}$,

[1] Ce sont les deux corps valués les plus immédiatement signifiants d'un point de vue géométrique, et Lie travaille toujours implicitement d'abord 'en complexe', et il précise alors ensuite toujours explicitement que l'étude des groupes de transformations réels exige des considérations supplémentaires. Dans les espaces p-adiques complexes, pour pouvoir parler d'une géométrie signifiante, la propriété topologiquement exotique d'ultramétricité que possède le corps $\mathbb{C}_p$ des nombres complexes p-adiques oblige, d'après John Tate, à introduire une notion restreinte d'analyticité *via* un faisceau à la Grothendieck construit seulement sur certains ouverts « *admissibles* » qui sont des domaines de Laurent prédéfinis suffisamment étendus et suffisamment nombreux pour constituer ce qu'on appelle la « *géométrie p-adique rigide* » ([**37**]).

[2] Expression de Gilles Châtelet, titre d'un texte de Pierre Cartier $\boxed{\textbf{Fill ??}}$.

parce que les donations initiales sont toujours chargées d'inconnaissance et parce que la généralité qu'elles embrassent en reste parfois longtemps au niveau de concepts préliminaires et purement potentiels[3]. Pour des raisons que nous qualifierons de proprement *métaphysiques*[4], Galois affirmait que c'est la notion de *permutation*, en tant que telle, qui est sous-jacente à la résolution des équations algébriques :

$$a_0\,x^n + a_1\,x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\,x + a_n = 0.$$

Une telle affirmation exprime l'adéquation même de l'étude à son objet.

À Galois, Lie emprunte donc un tel levier métaphysique et il cherche à transférer tous les concepts que Cauchy, Serret, Jordan et d'autres ont développés pour les groupes finis aux groupes continus de transformations, afin d'élaborer des procédés destinés à résoudre les équations différentielles ordinaires linéaires :

$$a_0(x)\,y^{(n)}(x) + a_1(x)\,y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}(x)\,y'(x) + a_n(x)\,y(x) = 0,$$

qui sont formellement très analogues aux équations algébriques. Par conséquent, il faut étudier en eux-mêmes les difféomorphismes :

$$x_i' = f_i(x_1, \dots, x_n) \qquad\qquad {\scriptstyle (i\,=\,1\,\cdots\,n)}$$

que Lie suppose essentiellement locaux et qui sont, métaphysiquement parlant, les analogues exacts des permutations d'un ensemble fini de racines.

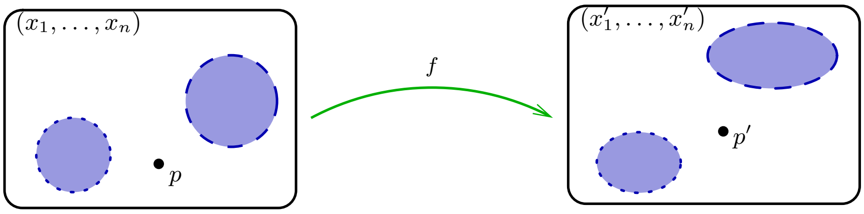
---

[3] Pour illustrer cette dernière affirmation importante, extrayons brièvement du Volume I de la *Theorie der Transformationsgruppen* (*voir* [**25**] pour la traduction anglaise) l'exemple suivant où Engel et Lie annoncent que la connaissance du théorème fondamental d'après lequel les transformations infinitésimales d'un groupe continu fini de transformations sont *fermées* par crochet (*cf. infra*) n'est qu'un moment de connaissance partiel et au fond relativement insuffisant pour réaliser réellement les théorèmes de classification qui seront entrepris seulement dans le Vol. III. « *In Chap. 9, we have reduced the finding of all r-term groups to the determination of all systems of r independent infinitesimal transformations $X_1 f, \dots, X_r f$ which satisfy relations of the form :*

$$X_iX_kf - X_kX_if = [X_i,\, X_k] = \sum_{s=1}^{r} c_{iks}\, X_s f,$$

with certain constants c_{iks}. Only later will we find means of treating this reduced problem ; temporarily, we must restrict ourselves to admitting systems $X_1 f, \dots, X_r f$ of the concerned nature and to study their properties. Ici, l'inconnaissance temporaire est désignée dans la temporalité propre et locale d'une généralité légèrement aveugle qui annonce entre parenthèses certaines connaissances adéquates qu'elle se découvrira ultérieurement. Dans le destin ramifié de l'irréversible-synthétique, l'existence nécessaire du « *suspens spéculatif* » atteste le temps propre de la pensée.

[4] « métaphysique plane sur les calculs » $\boxed{\textbf{Fill ??}}$



Représentation schématique d'un difféomorphisme local

Des zones entières, ou des régions virtuellement découpées par la pensée, sont déplacées différentiablement dans leur ensemble, subissant expansions, contractions, détentes, compressions, et rotations en tous endroits, aussi bien à un niveau local qu'au plan infinitésimal. On notera en vérité que la conception d'une telle mobilité géométrique n'a rien d'évident.

Plus généralement, motivé par les équations élémentaires qui représentent le mouvement des corps dans l'espace tridimensionnel euclidien, Lie considère des familles de difféomorphismes locaux :

$$\boxed{x'_i = f_i(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r) \qquad\qquad (i = 1, 2 \ldots n)}$$

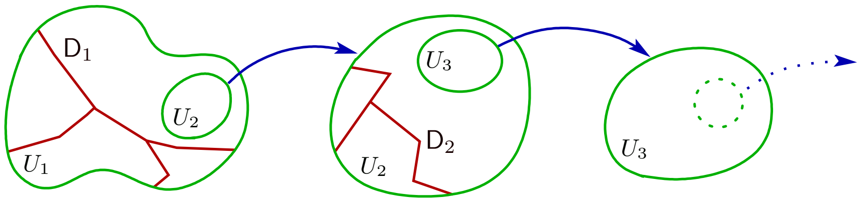
qui sont paramétrés par un nombre fini r de paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$ réels ou complexes, les « constantes du mouvement », pourrait-on dire, et ce, en dimension $n \geqslant 1$ quelconque et avec un nombre arbitraire $r \geqslant 1$ de degrés de liberté. Mais avant même de commencer à formuler les axiomes de groupe, Lie entreprend d'analyser abstraitement et pour elles-même de telles équations de transformations, sans aucune référence à la notion de mouvement.

Trois principes de pensée qui gouvernent la théorie de Lie. Il est alors important, afin de contrecarrer d'emblée un procès inexact qui est trop régulièrement intenté à Lie, de signaler brièvement quelles sont les hypothèses générales de travail que sa théorie admet une fois pour toutes (*cf.* [**24**]).

Hypothèse générale d'analyticité : Courbes, surfaces, variétés, groupes, sous-groupes, coefficients de transformations infinitésimales, *etc.*, tous les objets mathématiques de la théorie sont supposés *analytiques* (réels ou complexes).

Principe de libre relocalisation générique : Si un objet mathématique donné est représenté par des fonctions analytiques dans un certain domaine U_1, toutes les fois que cela est nécessaire, on s'autorise à *relocaliser* les considérations à un *sous-domaine* $U_2 \subset U_1 \backslash \mathsf{D}_1$, où D_1 est un certain « *mauvais* » ensemble[5], et ceci, autant de fois que nécessaire. Le diagramme suivant a pour objectif de transmettre l'idée intuitive que des ouverts de taille décroissante sont pas à pas sélectionnés en dehors de lieux singuliers qui sont « gênants » pour les raisonnements génériques.

[5] Le plus souvent, D_1 est un ensemble analytique complexe défini comme lieu d'annulation de certaines quantités fonctionnelles attachées à la situation géométrique étudiée.



Représentation schématique du principe de relocalisation

Principe de non dénomination du lieu. Il est plausible que Lie réalisa rapidement qu'il était essentiellement inutile de préciser les ouverts par une notation spécifique, afin d'être plus efficace dans les théorèmes de classification. Aussi les lieux sont-ils non nommés et essentiellement locaux[6].

Grâce à tous ces principes, il est alors possible d'interpréter rigoureusement tous les travaux de Lie dans un sens purement local sans qu'aucune incorrection ne puisse être découverte, et c'est ce que nous ferons dans la suite.

Question préliminaire de dépendance paramétrique effective. Alors avec ces données, la toute première question à poser est la suivante : les difféomorphismes considérés :

$$x_i' = f_i\big(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r\big)$$

dépendent-ils réellement de *tous* les paramètres ? La présence écrite des lettres $a_1, \dots, a_r$ pourrait très bien être tout à fait fictive, et donc les fonctions analytiques f_i pourraient très bien ne dépendre d'aucun paramètre. C'est tout le paradoxe d'une notation très générale : héberger absolument toutes les potentialités sans être réellement en mesure de spécifier les propriétés fondamentales attendues.

Mais par ailleurs aussi, la désignation '$x' = f(x;\, a)$' d'apparence si simple et si accessible à l'intuition langagière, constitue une abstraction tout à fait *dérangeante* pour qui exige de conceptualiser en acte l'idée de mouvement. En rien de tels symboles ne peuvent-ils approcher d'une quelconque manière toute la complexité du mouvement des corps dans l'espace. Il est en effet clairement impossible, dans cette écriture extrêmement schématique '$x' = f(x;\, a)$', de retrouver les intuitions de fluidité, de mobilité ou de dynamicité. Plus encore : toutes les masses-pensées collatérales qui répondraient véritablement au devoir gaussien de conscientiser les significations mathématiques sont totalement absentes de cette courte chaîne de caractères '$x' = f(x;\, a)$'. Laissons donc provisoirement de côté pour quelques instants

[6] Un certain nombre de résultats de Lie sont d'ordre semi-local, avec précision explicite des ouverts d'existence, notamment dans les chapitres 3 et 9 de [**10**], tandis que d'autres résultats sont réellement de nature globale, notamment la classification des sous-groupes infinitésimaux des groupes projectifs de dimensions 1, 2 et 3 qui est exécutée dans le Volume III [**12**].

la question soulevée sur la présence réelle des paramètres pour spéculer sur l'*in*évidence troublante de cette écriture :

$$x_1' = f_1(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r), \quad \dots\dots, \quad x_n' = f_n(x_1, \dots, x_n;\, a_1, \dots, a_r),$$

fût-elle déployée avec des points de suspension.

Le mouvement des continua et la mobilité fluide. La théorie de Lie s'inscrit dans une perspective tout aussi « métaphysique » que la quête riemannienne, au sens aristotélicien du terme où la métaphysique est la science théorétique des premiers principes. En effet, Lie est parvenu à élaborer une *pensée mathématisée des mouvements possibles d'un espace abstrait en lui-même*, une pensée spatiale beaucoup plus riche et plus complexe que celle des trajectoires galiléennes ponctuelles, ou que celle des mobiles-test soumis à un champ gravitationnel ou électromagnétique, puisque les paramètres $(a_1, \dots, a_r)$ du mouvement sont multiples et sont inscrits *en synthèse* dans l'entité close et autonome qu'est la structure de groupe.

Considérons le spectacle des nuages, de l'eau d'un torrent en crue, ou de l'éruption d'un magma en fusion. Comment saisir par la pensée cette fluidité en tout lieu des atomes qui sont emportés dans leur ensemble ? N'oublions pas qu'au-delà des surfaces, dans la profondeur des matières fluides et sous des écorces virtuelles successives, se joue une tridimensionnalité des mobilités qui nous est quasiment invisible, à cause, notamment, de la planarisation projectivisante de notre champ visuel. Quelques instants de méditation *en tension* suffisent alors pour se convaincre qu'il y a effectivement une difficulté réelle à se rendre présente une représentation unitaire et conceptualisée du mouvement des corps physiques, et plus encore, un mouvement *abstrait et multi-paramétré* dans un espace à un nombre arbitraire de dimensions.

Aussi, antérieurement à tout développement mathématique, on doit se poser la question : « qu'est-ce qu'un mouvement au cours duquel *tous les points d'un continuum*, voire tous les quanta infimes d'un *discretinuum innombrable*, bougent *en même temps* par l'effet d'une mobilisation commune ? » Mais très rapidement, on se rend compte que le transfert *en totalité* '$x' = f(x;\, a)$' de tels points géométriques ou quanta phyiques est essentiellement *in*intuitionnable[7] ; en effet, les points, infinis en nombre, vivent

[7] En vérité, l'écriture '$x = f(x;\, a)$' signifie beaucoup plus qu'une transformation ponctuelle individuelle de type $x' = f(x)$ après fixation des paramètres $a_1, \dots, a_r$, puisque cette écriture désigne la totalisation de tous les mouvements communs possibles des x dans leur ensemble, lorsque $a_1, \dots, a_r$ sont admis à varier sans aucune restriction. Pour intégrer mentalement ce concept grâce à un effort de pensée, il faudrait alors se représenter — ce qui n'est pas aisé — une sorte de brassage continu des points de l'espace dans plusieurs directions en chaque endroit, les déplacements étant causés par les r paramètres *via* une dépendance fonctionnelle quelconque. Il faut donc synthétiser *en pensée* les quatre arbitrarités impliquées : **1)** nombre de variables ; **2)** nombre de paramètres ; **3)** domaines d'existence ; **4)** constitution des dépendances fonctionnelles ; et cela n'est absolument pas évident.

en situation réciproque, et donc les déchirements, les enroulements, les torsions, les hypersurfaces de discontinuités, les lieux fractals de singularités, et d'autres possibilités physico-géométriques encore sont toutes éventuellement comprises dans les transformations que les équations abstraites '$x' = f(x;\, a)$' symbolisent d'une manière exagérément rudimentaire, sans donc que l'on voie s'exprimer de telles possibilités dans ces équations innocentes, car le voir de la pensée formalisante actualise, focalise et limite.

Dépasser la monade subjectivo-centrée. On remarquera à nouveau qu'il est bien plus commode pour la pensée, uni-polarisée et subjectivo-centrée, de se représenter une *monade mobile* se déplaçant sur une trajectoire, que de se représenter, par exemple, le mouvement d'une myriade de sauterelles, *en totalité et en simultanéité*. À vrai dire, au-delà du champ perceptif propre, presque rien dans les capacités sensibles et cognitives des êtres vivants n'est finalisé pour une appréhension *globale et parallélisée* des multiplicités spatio-temporelles. Et d'ailleurs, de manière assez analogue, notre compréhension limitée des concepts algébriques est très handicapée notre par incapacité biologique à appréhender les calculs d'un seul tenant sans les avoir au préalable *parcourus en successivité*.

Mais pour en revenir aux équations '$x' = f(x;\, a)$' dont le caractère trop rudimentaire pose problème, nous pouvons d'ores et déjà signaler que Lie avait vraisemblablement construit de précieuses *représentations mentales dirigées* qui lui permettaient d'embrasser de manière riche et contentuelle cette conceptualisation abstraite '$x' = f(x;\, a)$' qu'il proposait, et ce, vraisemblablement à un niveau largement supérieur à ce que nous serons jamais en mesure d'intuitionner à nouveau en nous replaçant dans ses écrits, puisque ces écrits sont seulement constitués de textes mathématiques formels, sans *aucune* publication à caractère didactique ou philosophique. Sans grand engagement exégétique, nous pouvons en tout cas affirmer que Lie avait constamment à l'esprit les équations concrètes des groupes de transformations classiques : le groupe projectif [8], le groupe affine[9], *etc.*, et que la *présence continûment mentalisée d'exemples caractéristiques* dirige, souvent pour son plus grand bien, la pensée mathématique la plus abstraite.

Ainsi Lie a-t-il dû chercher à disposer d'un *acte de pensée synthétique* et *abstrait* qui permette d'*embrasser* le déplacement de *tous* les points d'un continuum qui se meuvent *en même temps*.

[8] En dimension $n \geqslant 1$, les équations de transformations du groupe projectif sont :

$$x_i' = \frac{a_{1i}\, x_1 + \cdots + a_{ni}\, x_n + a_{n+1,i}}{a_{1,n+1}\, x_1 + \cdots + a_{n,n+1}\, x_n + a_{n+1,n+1}} \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)},$$

où les a_{ki} sont forment une matrice $(n+1)\times(n+1)$ de trace nulle.

[9] Les équations de ce groupe sont : $x_i' = b_{1i}\, x_1 + \cdots + b_{ni}\, x_n + b_{n+1,i}$.

Et avant même de s'intéresser à la successivité temporelle, il faut d'abord concevoir ce que devient chacun des éléments du continuum au bout d'un temps fini fixé, autrement dit, il faut déclarer être capable, par la pensée, de saisir la position de chaque point après écoulement d'un certain laps de temps. C'est le concept de correspondance fonctionnelle qui entre en scène, non pas seulement au sens de l'Analyse à une variable réelle ou complexe, mais surtout au sens d'une *correspondance infinie* entre *espaces de points infinis* à plusieurs dimensions[10].

Abstraction des correspondances fonctionnelles. Or la théorie classique des fonctions fournit déjà une idée adéquate de correspondance, envisagée dans toute sa complexité. Par l'action d'une fonction f, tout point x d'un domaine de variabilité réelle ou complexe est transféré en un autre point réel $f(x)$, situé dans un espace auxiliaire de même nature. L'écriture qui nous a été transmise par le siècle des Lumières :

$$y = f(x)$$

symbolise alors très (trop) brièvement cette totalisation des transferts. En vérité, aucune formalisation ne parvient à (ou même ne cherche à) dénoter la « *dynamique de variabilisation* » qui accompagne le 'x' quelconque d'un domaine. Des actes collatéraux de la pensée intuitive sont alors indispensables pour créer en parallèle une saisie *démultipliante*. Déclarer des variables dans un langage formel quelconque ne dispense jamais l'intuition mathématicienne de chercher à se « rattraper aux branches », bien au contraire. Et l'intuition mathématique créatrice doit en permanence formuler ses questions propres qui sont absentes du texte lu. Ici par exemple, de telles questions pourraient porter sur la nature de la variable 'x', sur l'extension de son domaine de variation, ou sur la production d'une schématisation satisfaisante de la correspondance $x \mapsto f(x)$.

Sans en discuter métaphysiquement, nous admettons donc comme nous en avons convenu plus haut que la spatialité s'inscrit dans un cadre fondationnel numérisé. Ainsi, un espace géométrique quelconque à n dimensions sera-t-il envisagé, au moins localement, comme collection de n coordonnées cartésiennes $(x_1, \dots, x_n)$ qui sont des nombres réels ou complexes. Qu'est-ce qu'une correspondance entre espaces à n dimensions ? La généralisation immédiate, à partir du symbole de fonction $y = f(x)$, de la symbolisation :

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots\dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_n)$$

sera *algébriquement générative*, à défaut d'être *intuitivement complète*.

[10] Restrictions nécessaires de ces analyses : nous admettrons qu'il est impossible de remobiliser ici tous les aspects métaphysiques impliqués ; aussi considérerons-nous comme non soumis à la discussion spéculative certains de ces aspects-là qui sont bien étudiés dans d'autres sources, notamment : **1)** la numérisabilité du continu (*voir* ? ?) ; **2)** le calcul infinitésimal (*voir* ? ?) ; **3)** les hypothèses de régularité (*voir* ? ?).

Les symboles sont imprégnés d'ignorance. Comme nous l'avons déjà amplement signalé, *l'incomplétude informative gît au cœur même de la généralité notationnelle*, et c'est surtout en géométrie que cette incomplétude se fait le plus cruellement sentir. À tout le moins, il nous semble nécessaire de faire droit à des *actes d'intuition rudimentaire*[11], et ces actes *s'expriment de manière transitoire et imparfaite dans le flux de transmission des connaissances mathématiques*. Aussi doit-on d'emblée accepter, et ce tout particulièrement en géométrie, que :

$\boxed{\textit{Les symboles mathématiques restent imprégnés d'ignorance et d'imperfection}}$.

Les concepts mathématiques s'expriment donc toujours un peu à l'aveugle et dans l'ombre, tandis que les éclaircissements et les rétablissements de visions sont généralement le fruit d'un travail intuitif long et coûteux. Les contrôles permanents de rigueur : « *Est-ce vrai* ? » « *Quelles sont les hypothèses exactes* ? » « *Cet énoncé ne rentre-t-il pas en contradiction avec un résultat connu* ? », toutes ces questions spécifiques assurent à leur insu une *prise progressive de pouvoir sur l'inconnu, qui est de type « conquête intuitive »*. Un tel mode de relation à l'esprit : « *provocation spontanée d'interrogations* », est fondamental dans l'accès aux mathématiques. L'intuition se questionne en chaque être qui cherche à appréhender.

De plus, on doit aussi conserver une trace mémorielle des questions qui ont été écartées ou mises entre parenthèses. Et même après avoir appris les résultats les plus élaborés de la géométrie différentielle ou de la topologie des variétés riemanniennes, la structuration interrogative fondamentale de l'intuition reste la même. Terminons ces considérations spéculatives générales par une remarque sur l'antinomie mathématique entre le discret et le continu ; les questions d'ontologie et de signification se posent à tous les instants.

Le *paradoxe de la discrétisation du continu* nous accompagnera tout au long de notre discussion des travaux de Lie. Parce que l'approfondissement des concepts de la géométrie des groupes révèle que leur étude mathématique relève *in fine* de l'algèbre différentielle et du calcul pur, il se trouve que la pensée du continu en est réduite à être discrétisante, et donc exposée indéfiniment aux insuffisances qu'elle se découvre[12]. Autrement dit, par l'effet d'une limitation propre à la structuration de l'entendement, la conceptualisation du continu géométrique est contrainte à le discrétiser en l'algébrisant.

Essentialisation des paramètres. Reprenons maintenant la question — inaugurale en théorie de Lie — que nous avons soulevée brièvement un peu plus haut : « *Comment voir si les paramètres sont tous réellement présents*

[11] — non codifiés, mais intersubjectifs dans leurs grandes lignes —

[12] Dans les années 1980–2000, de nombreuses discussions philosophiques ont été conduite en relations avec le problème de Cantor sur la cardinalité du continu (*voir* ? ?).

dans les équations de transformations[13] ? » Dans l'écriture symbolique :

$$x_i' = f_i(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\ldots n)},$$

les paramètres sont placés après les variables. Rappelons que cette écriture signifie que le point transformé $x' = (x_1', \ldots, x_n')$ d'un point quelconque x de coordonnées $(x_1, \ldots, x_n)$ dépend non seulement du point lui-même, mais aussi de la valeur des paramètres $(a_1, \ldots, a_r)$ qui offrent un nombre r arbitraire de degrés de liberté au mouvement possible. Afin de déterminer si ces paramètres sont véritablement présents, la meilleure manière de procéder est alors de découpler les variables géométriques principales $(x_1, \ldots, x_n)$ de ces quantités auxiliaires $(a_1, \ldots, a_r)$. Puisque toutes les fonctions f_i considérées sont supposées analytiques, il suffit à cet effet de les développer en série entière par rapport à x au voisinage de l'origine $x_0 = 0$[14] :

$$(1) \qquad f_i(x;\, a) = \sum_{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} \mathscr{F}_\alpha^i(a_1, \ldots, a_r) \cdot x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

comme on le ferait d'une fonction $f(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_k\, z^k$ d'une variable complexe z qui est holomorphe au voisinage de l'origine $z_0 = 0$ dans $\mathbb{C}$.

Immédiatement, on voit apparaître une *famille infinie* de coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ qui sont tous des fonctions *analytiques* des paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Nous voici donc en présence d'un *schéma de réalisation* au sens lautmanien du terme : une question initiale, et si « archaïque » qu'elle n'est peut-être même pas exclusivement d'ordre philosophique ou mathématique, devient cause et créatrice de réalité mathématique.

Décider si tous les paramètres apparaissent, c'est est effet une question qui est si fondamentalement enracinée dans la dialectique physico-biologique de l'absence et de la présence qu'on doit l'envisager comme rattachée à la métaphysique archaïque de la question de l'être et du non-être. Au tout premier moment d'une donation quelconque se pose en effet la question de la vérification et de l'attestation, ou encore de la confirmation de la donation, et cette question-là est proprement archaïque, puisqu'elle régente tous les rapports des êtres animés au monde inanimé. Ainsi a-t-on immédiatement affaire à une métamorphose irréversible de l'individuation

---

[13] Les 170 premières pages de la *Theorie der Transformationsgruppen* sont consacrées à une présentation très technique, élaborée et générale de la théorie de base, qui fait obstacle à la compréhension. Les tous premiers paragraphes consacrés à l'essentialisation des paramètres exigent mordernisation et réécriture (*voir* [**24, 26**]). Ici, nous analysons le problème et les sous-questions qui en découlent, et nous nous contentons de présenter les énoncés qui y répondent, sans chercher à reconstituer et à développer les arguments rigoureux de démonstration.

[14] Sans perte de généralité, on peut bien sûr supposer, quitte à effectuer une translation préalable, que l'origine appartient au domaine commun des fonctions f_i.

effective par laquelle l'objet générique « symbolisé » :

$$x_i' = f_i\big(x_1, \ldots, x_n;\, a_1, \ldots, a_r\big) \qquad {\scriptstyle (i=1\cdots n)}$$

est exploré et examiné, pour subir des différenciations spécifiantes. On pourrait dire que la généralité imprécise, qui est l'ambiguïté même, éclate en précisions imprévisibles : *effectivité déraisonnable des mathématiques dans l'exporation conceptuelle*.

Mais lorsqu'on développe ainsi toutes les fonctions $f_i(x;\, a)$ en série entière, il ne demeure plus rien de l'intuition géométrique initiale d'après laquelle les points sont et doivent être mus par l'effet d'une variation paramétrique. L'acte de développer en série entière relève purement de l'Analyse[15], c'est-à-dire d'une pensée *non* géométrique. En effet, il semble totalement impossible[16] de saisir ce que représente sur le plan géométrique la capture de ces coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$. D'un seul coup :

$\boxed{\textit{le fonctionnel dépasse la capacité de conception de la pensée géométrique}}$,

et cette hétéronomie ubiquitaire en mathématiques se manifeste régulièrement comme un *abandon implicitement admis dans l'intersubjectivité* de l'exigence (presque impossible à satisfaire) de géométrisation complète par la pensée. Aussi dans le déploiement $f(x;\, a) = \sum_\alpha \mathscr{F}_\alpha\, x^\alpha$, une autre espèce d'infini, à savoir une collection infinie d'élément fonctionnels, s'immisce-t-elle dans l'infiniment petit de l'étendue continue, et subrepticement, commence à effacer en partie les significations géométriques qui ne parviennent plus à suivre les calculs.

En mathématiques, c'est la recherche de conditions nécessaires et suffisantes que Riemann plaçait explicitement au cœur de la production

[15] Le spectre d'une déclaration ontologique restrictive de type lagrangien (le fonctionnel pur et peut-être problématique s'identifie à de l'analytique en série contrôlé et quasiment algébrique) ressurgit ici et pose en principe un problème d'extension en généralité, puisque l'on sait depuis plus d'un siècle que l'ontologie fonctionnelle va bien au-delà de l'algébrique et de l'analytique, et qu'elle comprend les classes de différentiabilité lisse $\mathscr{C}^1$, $\mathscr{C}^2$, $\mathscr{C}^k$, $\mathscr{C}^\infty$, les classes de Hölder $\mathscr{C}^{\kappa,\alpha}$, les espaces de Sobolev, de Hardy, de Besov, *etc.*

[16] À vrai dire, l'examen d'équations de transformations simples telles que celles du groupe affine pour lesquelles le développement (1) ne contient qu'un très petit nombre de termes montrerait que l'on peut donner, y compris dans le cas général, un sens infinitésimal clair aux premiers coefficients $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ avec $|\alpha| \leqslant 1$, où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. En effet, l'approximation $x_i' \simeq \mathscr{F}_{0\cdots 0}^i(a) + \mathscr{F}_{1\cdots 0}^i(a)\, x_1 + \cdots + \mathscr{F}_{0\cdots 1}^i(a)\, x_n$ à l'ordre 1 des premiers termes constitue une transformation affine $x_i' = u_i + v_{i1}\, x_1 + \cdots + v_{ni}\, x_n$ dont les coefficients sont remplacés par des fonctions (essentiellement arbitraires) de a. C'est Helmholtz qui a effectué, en commettant des erreurs mathématiques, une telle approximation à l'ordre 1, et c'est Lie qui en a fait l'un de ses outils principaux pour classifier les groupes de transformations. Spéculativement et à un niveau plus profond, on pourrait vouloir concevoir la signification géométrique des termes d'ordre supérieur $\mathscr{F}_i^\alpha$ pour $|\alpha| \geqslant 2$, mais l'objectif est malaisé. Aussi renonce-t-on à tenter de suivre en pensée la signification géométrique des opérations de l'Analyse, et ce renoncement est très fréquente en mathématiques.

d'irréversible-synthétique[17]. Ici, une telle recherche de conditions nécessaires et suffisantes revient à élaborer des critères simples ou approfondis afin de pouvoir tester et déterminer si (et quand) tous les paramètres sont essentiels.

À cette fin, en prolongement des développements (1), on peut introduire l'*application infinie des coefficients* :

$$\mathsf{F}_\infty : \quad \mathbb{C}^r \ni a \longmapsto \Big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\Big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathbb{C}^\infty.$$

Toutefois, cet acte d'introduction semble n'apporter aucune information nouvelle par rapport aux développements (1) des $f_i(x;\,a)$ en série entière par rapport aux puissances de x : la donation de la collection complète des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ n'était-elle pas implicite dans les équations (1) ?

Développement, donation, extraction : trois actes, il y a là en tout cas une métamorphose infime de l'envisagement et une continuité réelle des actes de pensée : ce sera toujours ainsi que Engel et Lie procéderont, *par dérive fluide et continuée de l'engendrement synthétique*. L'extraction de cette application infinie des coefficients F_∞ répond donc à une *nécessité interne de l'irréversible-synthétique qui pousse en avant et pose en attente tout germe de progressivité mathématique possible*.

Ici donc, cette nouvelle application extraite F_∞ totalise alors la dépendance des équations de transformations $x_i = f_i(x;\,a)$ par rapport aux paramètres, et elle dit tout de ce qui provient, et seulement ce qui provient, des paramètres dans les fonctions $f_i(x;\,a)$. Autrement dit, c'est la nécessité d'une continuité spéculative maximale dans la pensée qui fait que l'acte d'extraction des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ a du et doit s'effectuer progressivement. D'autres moments spéculatifs intersticiels secondaires pourraient aussi être à l'œuvre afin d'assurer une encore plus grande continuité de la pensée, notamment le recours en arrière-plan à des exemples étudiés en parallèle. En tout cas, seule la continuité est à même d'assurer le maintien contrôlé d'une sémantique aux multiples facettes.

Discontinuité axiomatique de l'engendrement synthétique. Une définition formelle de type axiomatique énoncera alors que les paramètres

[17] $\boxed{\textbf{Fill ??}}$

$(a_1, \dots, a_r)$ sont dits *essentiels* si le *rang générique*[18] ρ_∞ de cette application F_∞ est maximal égal à r. Par « *essentiels* », il faut bien sûr entendre[19] « *tous essentiels* », c'est-à-dire « *tous présents* », ce qui veut dire aussi qu'aucun d'entre eux ne peut être supprimé.

D'emblée, avant même qu'un théorème ne suive, cette définition surprenante répond donc en trois moments au problème que nous nous étions posé :

- ☐ développement des fonctions $f_i(x;\, a)$ en séries entières ;
- ☐ extraction de l'application infinie des coefficients F_∞ ;
- ☐ calcul du rang générique ρ_∞ de F_∞.

Toutefois, pour ce qui concerne la *genèse effective* de résultats mathématiques, l'engendrement synthétique procède d'une manière tout à fait différente de cette succession surprenante de trois apparitions irréversibles reconstituées *a posteriori*.

---

[18] C'est-à-dire le rang maximal de l'application en un a générique dans l'espace des paramètres. D'une manière générale, le rang générique est défini comme suit. Considérons une matrice rectangulaire $G(y) := (g_i^j(y))_{1 \leqslant i \leqslant n}^{1 \leqslant j \leqslant m}$ de taille $n \times m$ dont les éléments $g_i^j = g_i^j(y)$ sont des fonctions analytiques d'un certain nombre de variables $y = (y_1, \dots, y_q)$ qui sont définies dans un certain domaine U de $\mathbb{C}^q$ (ou de $\mathbb{R}^q$). Pour tout entier ρ tel que $1 \leqslant \rho \leqslant \min(m, n)$, on peut former la collection de tous les déterminants de taille $\rho \times \rho$ (mineurs) qui sont extraits de cette matrice :

$$\Delta_{i_1, \dots, i_\rho}^{j_1, \dots, j_\rho}(y) := \begin{vmatrix} g_{i_1}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_1}^{j_\rho}(y) \\ \cdot\cdot & \cdots & \cdot\cdot \\ g_{i_\rho}^{j_1}(y) & \cdots & g_{i_\rho}^{j_\rho}(y) \end{vmatrix}.$$

En partant de $\rho := \min(m, n)$, si tous ces déterminants sont identiquement nuls (en tant que fonctions de la variable y), on passe alors de la taille ρ à la taille juste inférieure $\rho - 1$, on forme tous les mineurs, on teste leur annulation identique, et on recommence. Le *rang générique* ρ^* de la matrice $G(y)$ est alors le plus grand entier ρ tel qu'il existe au moins un tel mineur non identiquement nul, tous les mineurs d'une taille strictement supérieure étant identiquement nuls. On a $\rho^* = 0$ si et seulement si toutes les fonctions $g_i^j(y)$ sont nulles (cas inintéressant), et sinon, on a en toute généralité : $1 \leqslant \rho^* \leqslant \min(m, n)$.

[19] Discuter, par divertissement, de la proximité, parfois déconcertante, du vocabulaire mathématique avec le vocabulaire prosaïque (« ouvert étoilé », « topologie étale », « positivité d'un fibré vectoriel holomorphe », « immeuble de Tits », « chambre de Weyl », « éponge de Serpienski », « lapin de Douady ») ne doit pas se faire en ignorant que l'intuition mathématique féconde assemble constamment la rigueur métaphorique dont sa structure phénoménologique est naturellement dotée à la production d'une textualité consacrée à une ontologie vue comme autonome et voule comme séparée. En dernier recours, la terminologie mathématique doit pouvoir disparaître complètement dans l'amovible, le modifiable, et l'interchangeable. C'est aussi pourquoi, plus généralement, un grand nombre de questions qui font diversion en philosophie des mathématiques actives doivent être évitées. Élaguer l'inessentiel est essentiel.

En effet, au fur et à mesure que les objets se métamorphosent et se précisent dans l'analyse du problème par la pensée, la volonté d'engendrement synthétique *pose à nouveau toutes les questions qu'elle a conservées en mémoire*, et notamment ici, elle *pose à nouveau* la question initiale : « *Comment voir que tous les paramètres sont présents* ? ». Lie a certainement dû suivre un chemin génétique très différent de toute reconstitution axiomatique *a posteriori*, et il doit avoir engendré des *visions causales* adaptées à la compréhension du problème. Reconstituer une genèse autonome et convaincante d'un théorème mathématique, ce pourrait être se rapprocher de son invention même, mais en la matière, l'illusion existe.

Analyse de l'essentialité des paramètres. Néanmoins, analysons plus avant l'énoncé sous-jacent à la définition : $\rho_\infty = r$ de l'essentialité des paramètres.

Ainsi, la réponse annoncée par cette définition tient dans la dépendance effective des $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$ par rapport à tous les paramètres, et une telle dépendance s'avère être interprétable en termes de rang au sens du calcul différentiel. Nous avons déjà dit ailleurs qu'une définition formelle n'explicite en général pas les causalités profondes. Ici brièvement, nous dirons en guise d'explication que si le rang générique de F_∞ est maximal égal à r, alors toutes les r possibilités de variations des paramètres $(a_1, \dots, a_r)$ se réalisent effectivement dans la collection des fonctions $\mathscr{F}_\alpha^i(a)$; par ailleurs, si ces fonctions sont complètement indépendantes de a, auquel cas le rang générique de F_∞ est clairement égal à 0, on voit bien que les $f_i(x;\, a)$ sont complètement indépendantes des a aussi, donc dans ce cas limite, c'est bien en termes de rang (générique) que la réponse à la question posée se réalise.

Maintenant, afin de mieux comprendre les cas où le rang générique possède une valeur ρ_∞ intermédiaire entre 0 et r, à savoir les cas où $1 \leqslant \rho_\infty \leqslant r - 1$, il faut méditer plus en profondeur le champ spéculatif impliqué, à partir d'autres questions dérivées et plus fines, et à partir de démonstrations véritables, qu'elles soient esquissées dans un moment de recherche, ou bien appréhendées dans un moment de lecture[20].

Ainsi, sommes-nous ici en présence d'une apparition nouvelle de la notion de rang d'une application différentiable entre deux espaces multidimensionnels, inattendue par rapport à ses conditions classiques d'émergence (géométrie des courbes, des surfaces, et des variétés). Bien entendu, cette apparition manifeste l'*interconnection* des questions mathématiques, peu comprise et peu analysée, car on en reste souvent au niveau de la constation et de l'étonnement et parce que la question de l'unité des mathématiques touche à la philosophie. En tout cas, en relation avec une thèse d'Albert Lautman,

[20] — *cf.* [**24, 26**] et ce qui va suivre à l'instant.

cette interconnection avérée suggère que le questionnement possède une autonomie propre et une structuration archétypale qui est antérieure aux réalisations mathématiques effectives. Toutefois, une telle constatation de fait ne saurait satisfaire complètement le mathématicien, car ce dernier pourrait à juste titre désirer que l'analyse philosophique lui fournît des *méta-causes* qui soient *mathématiquement exploitables* dans les problématiques régionales.

Réduire le nombre des paramètres. Clairement, le jeu de l'exploration et du questionnement ne s'arrête par ici, puisque l'on n'a toujours pas compris en quoi la définition proposée répond à la question initiale. En fait, à travers la première question « *Tous les paramètres sont-ils présents* », une seconde question sous-entendue était : « *S'il ne sont pas tous présent, que se passe-t-il* ? ». Autrement dit : « *Que doit-on faire lorsque le rang générique* ρ_∞ *de* F_∞ *est strictement inférieur à* r ? »

Dans le cas où $\rho_\infty \leqslant r-1$, un énoncé crucial ([**24, 26**]) dit alors que l'on peut faire baisser le nombre des paramètres. En effet, grâce au théorème du rang constant[21], il s'avère que l'on peut construire de *nouvelles équations de transformations* :

$$x_i' = g_i\big(x;\, \mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty}\big) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\dots n)}$$

qui dépendent seulement de ρ_∞ nouveaux paramètres $(\mathsf{u}_1, \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty})$, ainsi qu'une application analytique locale[22] :

$$a \longmapsto \big(\mathsf{u}_1(a), \dots, \mathsf{u}_{\rho_\infty}(a)\big)$$

qui a la propriété de redonner les anciennes équations de transformation quand on l'insère dans les nouvelles équations de transformations :

$$g_i\big(x;\, \mathsf{u}(a)\big) \equiv f_i(x;\, a) \qquad\qquad {\scriptstyle (i=1\dots n).}$$

Autrement dit, lorsque le rang générique ρ_∞ de l'application infinie des coefficients est strictement inférieur à sa valeur maximal possible r, un théorème crucial dit qu'on peut, quitte à effectuer une transformation $a \mapsto \mathsf{u}(a)$, *supprimer* $r-\rho_\infty$ paramètres, ce qui veut dire que ces paramètres n'apparaissent alors essentiellement plus.

Plus encore, par une méditation approfondie des arguments de démonstration (*cf.* [**24, 26**]), on se convainc qu'il est impossible de faire baisser encore le nombre de paramètres au-dessous de $r-\rho_\infty$ au moyen de n'importe quelle application *analytique locale*[23] du type similaire $a \longmapsto \big(\mathsf{v}_1(a), \dots, \mathsf{v}_\mu(a)\big)$ avec $\mu < r-\rho_\infty$. Autrement dit, *le nombre de paramètres réellement présents* (à une relocalisation près) *est exactement égal à* $r-\rho_\infty$. Enfin, on retrouve le premier résultat comme corollaire de cet

[21] Relocaliser s'avère alors nécessaire, et cela est autorisé en théorie de Lie.

[22] — relocalisée, délocalisée —

[23] Invariance ; fonctions de plusieurs arguments.

énoncé général, à savoir : *tous* les paramètres sont effectivement présents *si et seulement si* la valeur ρ_∞ du rang générique de l'application infinie des coefficients F_∞ est maximal possible égal à r.

Comme cela a été signalé incidemment, la réduction de r à ρ_∞ du nombre de paramètres dans les équations de transformations peut être effectuée en relocalisant les fonctions $f_i(x;\, a)$ à un sous-domaine de leur domaine (commun) de définition. C'est l'application du théorème du rang constant qui l'exige, ou tout du moins, qui rend possible une démonstration convaincante. Néanmoins, on est en droit de se demander si une telle réduction du nombre de paramètres ne pourrait pas être établie aussi au voisinage des points (voire seulement, de certains points) du « mauvais » ensemble des paramètres au voisinage desquels le rang de l'application infinie des coefficients $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ n'est pas localement constant.

Interlude : schémas universels du questionnement mathématique. Spéculativement, une question comme cette dernière se rapporte à un schéma archaïque et universel : « une vérité qui est satisfaite sous certaines conditions demeurerait-elle encore vraie *plus généralement* lorsqu'on relaxe certaines de ces conditions ? ». C'est bien parce que la plupart des questions mathématiques se structurent en trame spéculative simple, commune et universelle qu'on est souvent dérouté par la complexité inattendue de certaines théories, et souvent déçu de constater que les réponses complètement satisfaisantes sont si rares y compris après l'édification de nombreuses théories.

Problème de type kantien réactualisé : s'interroger sur les conditions de possibilité de l'irréversible-synthétique dans les mathématiques contemporaines ; s'étonner de la genèse continue de résultats déployés en approfondissement ;

Conséquence nécessaire pour tout système de philosophie des mathématiques : nécessité d'étudier la *question de la question*, à savoir :

Quelle est la place des *questions mathématiques*
dans l'architecture mathématique en devenir ?

Analyses de satisfaction mathématique. Le résultat valide en tout point (générique) où le rang de l'application $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ est maximal et localement constant égal à ρ_∞ apporte donc une réponse apparemmment entièrement satisfaisante à la question posée initialement, si on écarte l'étude des points non génériques[24].

[24] Lorsqu'on rejette le principe de relocalisation possible en un point générique, la question se complique et elle relève de la théorie des singularités, essentiellement inexistante à l'époque de Lie. Les applications analytiques quelconques, même locales, entre espaces de dimension finie, voire infinie, ont une complexité qui en fait un réservoir indéfini de réalité mathématique.

Toutefois, ce résultat de réduction du nombre de paramètres ne fournit pas véritablement de moyen de connaître ou de calculer l'entier ρ_∞ qui compte le nombre de paramètres essentiels. C'est la *dynamique de l'insatisfaction* qui est motrice en mathématiques. Initialement, la question portait sur l'absence éventuelle de certains paramètres qu'il fallait supprimer à l'avance parce qu'ils sont superflus. Ensuite, de manière « irréversible », cette question a fait aboutir la connaissance synthétique à la « découverte » de l'application infinie F_∞ des coefficients. Grâce à cette dernière application, une *condition nécessaire et suffisante* pour la non-supprimabilité de quelque paramètre que ce soit a été obtenue, à savoir : $\rho_\infty = r$.

Cependant, il arrive très souvent en mathématiques que certaines conditions nécessaires et suffisantes soient ou bien trop élémentaires, ou bien trop peu informatives par rapport à une réponse possible visée. Dans de telles circonstances, il est alors très important d'être en mesure de *maintenir ouverte la question initiale dans et à l'intérieur de l'irréversibilité incomplète de sa réalisation* : c'est la méthode riemannienne, maintenant universalisée à la mathématique tout entière[25].

Malheureusement, cette méthode relève d'une réflexion trop panoramique pour que les mathématiciens contemporains se risquent à tenter d'en systématiser les principes généraux éventuels. Puisque la tâche requiert une perception d'ensemble et exige une conscience philosophique, ce devrait être à la philosophie de systématiser et de produire une telle méthode, mais les mathématiques contemporaines sont devenues trop complexes et trop vastes pour toute pensée systématique.

En tout cas, si nous abandonnons une telle ambition universelle et si nous nous restreignons à l'étude spécifique des équations '$x' = f(x; a)$', nous sommes maintenant responsables de deux questions qui doivent être maintenues vivantes dans le *champ interrogatif coprésent*. La première, presque trop profonde, demande si l'on peut considérer que la condition nécessaire et suffisante exprimée en termes de rang générique est la *meilleure* condition nécessaire et suffisante imaginable. Cette question spécifique relève d'une question générique qui est omniprésente dans tout le champ des mathématiques, à savoir la question qui demande si d'autres concepts et d'autres théorèmes plus « satisfaisants » ne se « cachent » pas encore « derrière » des théorèmes préliminaires « peu satisfaisants ». C'est grâce à de telles insatisfactions abstraites que la recherche d'adéquation est à même, à travers certains mathématiciens particulièrement exigents, de se *rouvrir en décelant le caractère insatisfaisant de ce qui se donnait pour satisfaisant*.

La seconde question, plus concrète, demande simplement quels sont les moyens de produire un critère pratique pour déterminer ce rang générique ρ_∞. Nous délaisserons la première question pour plusieurs raisons : 1) la

[25] Voici un exemple tiré de l'analyse harmonique. **Fill ??**

réduction des actions de groupes aux actions effectives est essentiellement bien comprise depuis Lie[26] ; 2) l'essentialisation des paramètres ne contitue qu'un moment liminaire de la théorie des groupes continus de transformations[27] ; 3) comme Lie, nous admettrons la relocalisation libre afin d'éviter le problème délicat de l'unification entre la théorie des systèmes différentiels extérieurs et la théorie des singularités[28] ; 4) on ne peut à vrai dire pas découvrir de contenus véritablement novateurs au-delà des réponses apportées par Lie[29] ; 5) nous verrons plus bas que les axiomes de groupes garantissent qu'aucune relocalisation n'est en fait nécessaire, afin de supprimer des paramètres inessentiels, dans le cas majeur qui intéresse Lie où les $x_i' = f_i(x;\, a)$ sont les équations de transformations d'un *groupe*[30].

Caractérisation effective de l'inessentialité. En résumé, nous sommes donc à la recherche d'un critère qui fasse mieux voir si tous les paramètres sont essentiels.

---

[26] La rémanence potentielle d'une question a une histoire au cours de laquelle certains mathématiciens en ont pris connaissance, l'ont étudiée, sondée, interrogée. Même si aucune métamathématique logicienne que ce soit n'est actuellement en mesure d'établir que certaines conditions nécessaires et suffisantes sont adéquates et indépassables, et donc par conséquent, qu'il est inutile d'en chercher de meilleures, trois facteurs peuvent expliquer pourquoi une telle recherche a été et doit être abandonnée : l'expérience mathématique accumulée sur des décennies, laquelle doit prendre en compte aussi toute les diverses tentatives de recherche stoppées ; une certaine compréhension des ontologies impliquées ; une analyse spéculative méditée (mais non écrite) des conditions du degré de satisfaction mathématique d'un résultat.

[27] Cet argument, lui aussi, a son importance convaincante : dans l'*a posteriori* de l'intention centrale d'une théorie (à savoir ici, l'édification d'une théorie des groupes continus de transformations entre espaces géométriques à un nombre quelconque de dimensions), l'étude des questions liminaires doit s'effacer comme par oubli et élimination de dialectiques transitoires, et être remplacée ensuite par des hypothèses régulières légitimes qui constitueront de nouveaux points de départ : analogie lointaine avec l'*Aufhebung* hégélienne.

[28] **Fill ??** Malgrange, Cerveau, Hauser,

[29] Affirmation basée sur une réflexion et sur une expertise.

[30] Ce dernier argument est le plus inattendu : tout groupe se constitue en homogénéité avec lui-même, localement autour de chacun de ses éléments, puisque ses automorphismes de translations sont inversibles. Il en découle que chaque élément éventuel de dégénérescence, *e.g.* le fait que l'application infinie des coefficients $a \mapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n}$ a un rang inférieur à son rang maximal possible, se propage d'un paramètre a' vers tout autre paramètre a''. Autrement dit, pour un groupe, toute dégénérescence serait ubiquitaire, donc générique, ce qui contredirait immédiatement la définition d'après laquelle la dégénérescence décrit le lieu (rare) du non-générique. En conséquence de quoi, toute généricité de type groupe est ubiquitaire *sans exception*, c'est-à-dire *sans aucune dégénérescence*.

Tout d'abord, par définition, le rang générique de l'application F_∞ est égal au rang générique de sa matrice jacobienne infinie :

$$\operatorname{Jac} \mathsf{F}_\infty(a) = \Big(\frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a)\Big)_{1\leqslant j\leqslant r}^{\alpha\in\mathbb{N}^n,\,1\leqslant i\leqslant n},$$

qui est considérée ici comme une matrice ayant r lignes indexées par l'entier j, et possédant une infinité de colonnes, indexées simultanément par le multiindice α et par l'entier i. Déterminer le rang générique d'une matrice de taille finie requiert l'examen de tous ses mineurs (déterminants des sous-matrices extraites) qui sont en nombre *fini*. Dans le cas où la matrice est constituée d'une infinité de colonnes, on doit examiner une infinité de tels mineurs. Abstraitement parlant, cette différence ne pose pas de problème particulier, parce que la taille horizontale des mineurs est de toute façon bornée par le nombre fini r de lignes, et pour cette raison, lorsqu'on examine pas à pas tous les mineurs des sous-matrices de $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$ de taille $r\times s$ qui sont constituées des s premières colonnes de $\operatorname{Jac}\mathsf{F}_\infty(a)$, alors à mesure que s augmente vers l'infini, le rang maximal possible, toujours borné et $\leqslant r$, finit nécessairement par se stabiliser en un certain entier $\rho_\infty\leqslant r$. Donc le rang générique ρ_∞ de $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$ est bien défini.

Toutefois, l'infini est impliqué dans cette définition *via* le nombre de colonnes $\mathsf{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a)$, et pour cette raison, le nombre minimal s^* de colonnes qu'il faut examiner n'est pas borné *a priori*. Autrement dit, la détermination de ρ_∞ est constructive dans son principe potentiel, mais non contrôlable *a priori* en termes de temps de vérification.

Pour répondre à cette imperfection, Lie produit une deuxième condition nécessaire et suffisante qui s'exprime en termes plus immédiatement finis d'annulation identique par un opérateur de détivation. Par exemple, il est clair que les équations $x_i'=f_i(x_1,\dots,x_n;\,a_1,a_2,\dots,a_r)$ seront complètement indépendantes du premier paramètre a_1, à savoir qu'elles s'écriront en fait $x_i'=f_i(x_1,\dots,x_n;\,a_2,\dots,a_r)$ *si et seulement si* elles sont identiquement annulées par l'opérateur trivial $\mathscr{T}:=\frac{\partial}{\partial a_1}$ de dérivation par rapport au paramètre a_1. Cette observation se généralise et donne une deuxième condition nécessaire et suffisante qui garantit l'essentialité des paramètres, par contraposition du point **(iii)** dans l'énoncé suivant.

Théorème. ([**10, 24, 26**]) *Les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Dans les équations de transformation :*

$$x_i'=f_i(x_1,\dots,x_n;\,a_1,\dots,a_r)=\sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\mathscr{F}_\alpha^i(a)\,x^\alpha,$$

les paramètres $a_1,\dots,a_r$ ne *sont* pas *essentiels.*

(ii) *(Par définition) Le rang générique* ρ_∞ *de la matrice jacobienne infinie :*

$$\mathrm{Jac}\,\mathsf{F}_\infty(a) = \left(\frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_j}(a)\right)_{1\leqslant j\leqslant r}^{\alpha\in\mathbb{N}^n,\,1\leqslant i\leqslant n}$$

est strictement inférieur à r.

(iii) *Localement au voisinage de* tout *point* (x_0, a_0)*, il existe un champ de vecteurs non nul analytique :*

$$\mathscr{T} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(a)\,\frac{\partial}{\partial a_k}$$

qui annihile identiquement tous les $f_i(x;a)$ *:*

$$0 \equiv \mathscr{T}\, f_i = \sum_{k=1}^{n} \tau_k\,\frac{\partial f_i}{\partial a_k} = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^n}\sum_{k=1}^{r} \tau_k(a)\,\frac{\partial \mathscr{F}_\alpha^i}{\partial a_k}(a)\,x^\alpha.$$

Maintenant, l'absence partielle de paramètres au niveau fonctionnel s'exprime aussi en termes différentiels : *complémentarité fondamentale entre le fini et l'infinitésimal*. Il est remarquable que Lie exprime systématiquement les concepts qu'il introduit à la fois dans le domaine fini et à la fois au niveau infinitésimal. Le second niveau éclaircit et affine le premier : progression irréversible de la connaissance mathématique.

Ensuite, il est naturel d'étudier plus à fond tous les cas intermédiaires où le rang générique de la matrice infinie des coefficients est quelconque. En effet, le théorème précédent supposait seulement que $\rho_\infty \leqslant r-1$, par exemple que $\rho_\infty = r-1$, mais on s'attend à ce que le nombre de paramètres non essentiels soit d'autant plus grand que ρ_∞ est petit, et il faudrait alors, pour affirmer une connaissance plus précis, être en mesure de relier le nombre de paramètres supprimables à la différence $r-\rho_\infty$. Chaque théorème possède quelques fenêtres évidentes de généralisation potentielle qui s'entrouvrent grâce à des constatations simples d'incomplétude, et c'est très souvent de cette manière-là qu'un auditoire pose des questions en conférence.

Quand les équations de transformations sont complètement indépendantes de k paramètres, par exemple pour fixer les idées, quand elles sont indépendantes des k premiers paramètres $a_1, \dots, a_k$, alors elles sont identiquement annulées par les k dérivations $\frac{\partial}{\partial a_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial a_k}$, et ces dérivations sont visiblement indépendantes les unes des autres. Dans le cas général on aura, de manière analogue à ce cas-modèle simple, autant de dérivations que de paramètres inessentiels, mais l'indépendance, comme le rang maximal, ne sera valable qu'en un point générique de l'espace des paramètres.

Théorème bis. *Plus généralement, si* ρ_∞ *désigne le rang générique de l'application infinie des coefficients :*

$$\mathsf{F}_\infty : \qquad a \longmapsto \big(\mathscr{F}_\alpha^i(a)\big)_{\alpha\in\mathbb{N}^n}^{1\leqslant i\leqslant n},$$

alors localement au voisinage de tout *point* (x_0, a_0)*, il existe exactement* $r - \rho_\infty$ *champs de vecteurs analytiques locaux :*

$$\mathscr{T}_\mu = \sum_{k=1}^{n} \tau_{\mu k}(a) \frac{\partial}{\partial a_k} \qquad {\scriptstyle (\mu = 1 \dots r - \rho_\infty)},$$

tels que la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}\big(\mathscr{T}_1\big|_a, \dots, \mathscr{T}_{r-\rho_\infty}\big|_a\big)$ *qu'ils engendrent est égale à* $r - \rho_\infty$ *en tout paramètre (générique)* a *en lequel le rang de* F_∞ *est maximal égal à* ρ_∞*, et tels qu'ils annihilent identiquement toutes les fonctions* $f_i(x; a)$ *:*

$$0 \equiv \mathscr{T}_\mu\, f_i = \sum_{k=1}^{r} \tau_{\mu k}(a) \frac{\partial f_i}{\partial a_k}(x; a) \quad {\scriptstyle (i = 1 \dots n;\ \mu = 1 \dots r - \rho_\infty)}$$

Redécouverte en géométrie de Cauchy-Riemann. En 1996, Nancy Stanton ([**40**]) a introduit une certaine notion de *non-dégénérescence holomorphe* pour les hypersurfaces analytiques réelles de $\mathbb{C}^{n+1}$. Ces dernières peuvent être représentées, dans des coordonnées holomorphes locales $(z_1, \dots, z_n, w)$, par une équation (complexe) de la forme :

$$\begin{aligned} w &= \Theta\big(z_1, \dots, z_n, \overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n, \overline{w}\big) \\ &= \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n} z_1^{\alpha_1} \cdots z_n^{\alpha_n}\, \Theta_\alpha\big(\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n, \overline{w}\big), \end{aligned}$$

et l'on démontre ([**22**]) que l'équation complexe *conjuguée*[31] :

$$\overline{w} = \overline{\Theta}\big(\overline{z}_1, \dots, \overline{z}_n, z_1, \dots, z_n, w\big)$$

lui est complètement équivalente (condition de réalité).

Cette condition dit que l'hypersurface en question et *holomorphiquement non dégénérée* s'il n'existe pas de champ de vecteurs holomorphe :

$$\mathscr{T} = \sum_{k=1}^{n} \tau_k(z, w) \frac{\partial}{\partial z_k} + \tau_{n+1}(z, w) \frac{\partial}{\partial w}$$

qui annihile identiquement l'équations antiholomorphe $\overline{w} = \overline{\Theta}\big(\overline{z}, z, w\big)$, ce qui revient à dire que $\mathscr{T}$ annihile identiquement toutes les fonctions $\overline{\Theta}(z_1, \dots, z_n, w)$, quel que soit le multiindice $\alpha \in \mathbb{N}^n$. À un changement de notation près, cette notion revient exactement que celle dégagée par Lie plus d'un siècle auparavant. Peu de temps après Stanton, Baouendi-Rothschild

[31] Le nombre complexe conjugué de $z = x + iy$ n'est autre que $\overline{z} = x - iy$. La conjuguée $\overline{\theta}(z)$ d'une série entière convergente $\theta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k\, z^k$ n'est autre que la série dont on conjugue seulement les coefficients : $\overline{\theta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{\theta}\, z^k$. Il découle alors clairement de cette convention notationnelle que le symbole de conjugaison se distribue simultanément sur le symbole de fonction et sur le symbole de variable : $\overline{\theta(z)} \equiv \overline{\theta}(\overline{z})$. Tout cela se généralise immédiatement aux fonctions holomorphes de plusieurs variables.

se sont attribué le mérite d'une généralisation qui correspondait au Théorème bis ci-dessus, mais il est clair que la priorité d'un tel résultat, même (re)publié dans des revues américaines côtés, revient à Lie.

L'unité des mathématiques se manifeste spécialement dans l'apparition ubiquitaire de questions-mères indépendantes. Ces questions conduisent à des théories qui s'individuent de manière essentiellement autonome. La mathématique universelle de Lie englobe de nombreux résultats qui sont prétendûments découverts à notre époque.

Conclusion de la discussion sur l'essentialité des paramètres. Sans perte de généralité, les paramètres peuvent être supposés, et seront supposés essentiels dans la suite.

Groupe continus finis de transformations au sens de Lie.

Essentialisation des paramètres dans le cas des groupes. Quand on essentialise les paramètres, une relocalisation éventuelle est nécessaire. Or, dans un groupe de Lie, comme dans tout groupe abstrait, il doit y avoir un *élément identité* :

$$e = \big(e_1, e_2, \dots, e_r\big)$$

et si les paramètres ne sont pas essentiels, et que l'on supprime les paramètres inutiles avec la recette précédente, il se peut qu'en certaines circonstances, le paramètre identité e appartienne au mauvais ensemble où le rang de U_∞ n'est pas maximal, égal à son rang générique ρ_∞.

Autre stratégie : essayer de supprimer les paramètres inessentiels, même au voisinage de certains $(a_1, a_2, \dots, a_r)$ où l'application U_∞ n'est pas de rang maximal ?

Théorie de la désingularisation des morphismes analytiques : Éclatements locaux et transformations strictes ; redressement d'applications analytiques locales de rang non constant en des applications de rang constant.

Heureusement : les axiomes de groupe vont assurer que l'identité **e** est toujours un élément générique.

Invariance du domaine et À un niveau métaphysique antérieur à la théorie de Lie, une question indépendante se pose : d'une manière générale, cela a-t-il un sens de penser que

Brouwer, Kolmogorov, Arnold.

Intermède spéculatif : la pensée disparaissante et l'universel. Qu'est-ce que la *pensée conceptualisante*, en mathématiques ?

Thèse de la *pensée disparaissante* :

☐ Passage sous silence et *implicitation* des motivations initiales.

□ Inscription dans un temps historique qui *surpasse les capacités* de conception individuelle.

□ Répétitions et réflexes ne réveillant *jamais* toutes les masses-pensées de la pensée.

□ Menace de *confusion* scolastique universelle.

Comment réinstaurer un retour vers les questions essentielles de la métaphysique mathématique ?

Quelques caractères fondamentaux de la pensée mathématique :

□ Mobilisabilité permanente du questionnement.

□ Dédoublement comme acte de recherche de rigueur.

□ Irréversibilité des raisonnements synthétiques a priori.

Partie III :

Philosophie du calcul : ouverture, genèse, complexité

Chapitre :

Autour de la preuve d'Apéry de l'irrationalité de $\zeta(3)$

Zêtas pairs et nombres de Bernouilli. En juin 1978, au *Centre International de Rencontres Mathématiques* (CIRM) basé à Luminy au cœur des Calanques de Marseille se sont tenues des “Journées arithmétiques” qui sont restées dans les annales de l'histoire de l'arithmétique. Depuis quelques jours circulait une rumeur surprenante : Roger Apéry, mathématicien français exerçant à l'Université de Caen et peu engagé à l'époque dans la compétition internationale en arithmétique, aurait annoncé être en mesure de démontrer l'irrationalité de la valeur en $s = 3$ de la fonction zêta de Riemann :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

laquelle converge absolument pour tout nombre complexe s de partie réelle $\operatorname{Re} s > 1$. Euler en 1735 s'était rendu célèbre en trouvant la somme exacte des inverses des carrés des entiers[1] :

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

[1] Problème dit *de Bâle*, posé par Pietro Mengoli en 1644, qu'Euler aborda grâce à une méthode d'accélération de convergence qui lui permit de deviner, dans la valeur approchée $1,6449340668482264365\cdots$, la présence des décimales de π^2, à un facteur 6 près !

et peu de temps après, un théorème beaucoup plus général était démontré qui reposait sur une formule sommatoire trouvée indépendamment, aux alentours de 1735, par Euler et par Maclaurin[2] pour calculer avec une très grande précision les valeurs approchées de certaines sommes discrètes.

Théorème. ([**30**], ? ?) *En tout entier pair strictement positif* $2k$ *les valeurs de la fonction zêta sont des multiples rationnels de* π^{2k} *:*

$$\zeta(2k) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = (-1)^{k-1} \frac{(2\pi)^{2k}}{2 \cdot (2k)!} B_{2k},$$

où les nombres de Bernouilli $B_{2k} \in \mathbb{Q}$*, qui sont rationnels, apparaissent dans le développement en série entière suivant*[3] :

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} z^{2m},$$

et peuvent aussi être obtenus en partant de $B_0 = 1$*,* $B_1 = -\frac{1}{2}$ *et en itérant la relation de récurrence*[4] :

$$\binom{n+1}{0} B_0 + \binom{n+1}{1} B_1 + \cdots + \binom{n+1}{n} B_n = 0 \qquad \scriptstyle (n \geqslant 2).$$

Or la question de savoir si l'on peut calculer par des formules analogues et aussi limpides les valeurs de la fonction zêta aux entiers *impairs* $\zeta(2k +$

---

[2] Les *polynômes de Bernouilli* $B_n(x)$ sont définis comme les coefficients de Taylor du développement en série entière de la fraction exponentielle :

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n \geqslant 0} B_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Soient p et $q \geqslant p+1$ deux entiers relatifs. Soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes qui est définie sur le segment $[p, q]$ et qui est dérivable jusqu'à l'ordre pair $2k \geqslant 2$. Alors on a :

$$\sum_{j=p+1}^{q-1} f(j) = -\frac{f(p) + f(q)}{2} + \int_p^q f(x)\,dx + \sum_{j=1}^{k} \frac{B_{2j}(1)}{(2j)!} \left[f^{(2j-1)}(q) - f^{(2j-1)}(p)\right] + \mathsf{R}_k,$$

où le reste R_k qui s'exprime au moyen du polynôme de Bernoulli $\mathsf{B}_{2k}(x)$:

$$\mathsf{R}_k = -\int_p^q f^{(2k)}(x) \frac{\mathsf{B}_{2k}(x - \mathrm{Ent}(x))}{(2k)!} dx,$$

est en général très petit lorsque k est grand. Un calcul exact de l'intégrale fournit alors une asymptotique de la somme discrète $\sum_{j=p+1}^{q-1} f(j)$ dont la précision dépend de k.

[3] On vérifie que la fonction $\frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2}$ est paire, donc les coefficients des puissances impaires z^{2m+1} s'annulent pour tout $m \geqslant 1$.

[4] En effet, ces relations s'obtiennent en développant le produit dans l'identité :

$$z \equiv (e^z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \bigg(\sum_{n_1 \geqslant 1} \frac{z^{n_1}}{n_1!}\bigg)\bigg(\sum_{n_2 \geqslant 0} \frac{B_{n_2}}{n_2!}\bigg) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{z^n}{n!} \sum_{\substack{n_1 + n_2 = n \\ n_1 \geqslant 1}} \frac{n!}{n_1!\, n_2!} B_{n_2}.$$

$1)$, ce qui complèterait définitivement les travaux d'Euler, cette question est ouverte depuis plus de deux siècles, et elle l'est encore très largement de nos jours. L'annonce d'Apéry en 1978 à Marseille fit grand bruit : c'était la première fois qu'un zêta impair cédait aux assauts de l'investigation.

Accès élémentaire à l'ouverture. Voici donc une figure à la fois simple et élémentaire de l'ouverture mathématique étendue sur un temps long : le connu est lacunaire, et l'inconnu indémontré semble coprésent comme quelque chose d'aussi clair et évident que le connu effectif et démontré. Sur cet exemple de la fonction zêta en effet, la lacunarité de la connaissance mathématique frappe par une concrétude intuitive immédiate : sans que nul ait besoin de la diriger, l'intuition se représente d'emblée l'ensemble des nombres entiers comme « troué » une fois sur deux, et ce, sans véritable raison, parce que l'esprit est certain par ailleurs que puisque les « trous » n'existent manifestement pas dans la succession des entiers, il n'y a aucune raison que les valeurs des zêtas impairs $\zeta(2k+1)$ échappent à l'investigation.

La connaissance des entiers $2k + 1$ n'existe-t-elle pas de tout temps ? Ne peut-on pas écrire, manipuler et calculer numériquement ces zêtas impairs :

$$\zeta(2k+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k+1}} \; ?$$

Pourquoi cette ignorance mathématique relative ? Comment expliquer un tel état de fait ? Pourquoi des formules analogues à celles d'Euler font-elles défaut ? Manqueront-elles nécessairement toujours ? A-t-on tenté de démontrer qu'il n'existe aucune formule algébrique qui représente les $\zeta(2k+1)$ en fonction des nombres algébriques, des nombres π, e, ainsi que d'autres valeurs des fonctions transcendantes élémentaires ? Découvrira-t-on ultérieurement des raisons mathématiques profondes (et pour l'instant en partie invisibles) qui « expliqueront *a posteriori* » pourquoi la question est restée ouverte aussi longtemps ?

Spéculation intermédiaire. Le problème majeur que nous pose l'ouverture mathématique *réelle* — c'est-à-dire l'ouverture placée en acte devant un ensemble de problèmes qu'on ne sait pas véritablement attaquer — c'est que nous sommes déjà préstructurés par une connaissance préalable des schèmes généraux de questionnements possibles qui sont hérités du passé et stratifiés dans la mémoire vivante de la recherche. Irrationalité de $\sqrt{2}$, transcendance de π, incomplétude syntaxique et incomplétude sémantique de tout système formel hypothético-déductif qui contient l'arithmétique de Peano ([**20**]), inexistence d'un algorithme universel susceptible de décider à coup sûr l'existence ou l'inexistence de solutions rationnelles des équations algébriques diophantiennes à coefficients entiers ([**20, 21**]), impossibilité de classifier complètement toutes les variétés compactes de dimension $\geqslant 4$ ([**45**]), et autres résultats négatifs : la connaissance mathématique placée devant toute ouverture est d'une certaine manière déjà trop riche d'options possibles qui ont été déjà réalisées dans d'autres champs. Force et cécité.

Mais outre la mémorisation des résultats de nature essentiellement logique qui possèdent un enjeu important quant à la nature des questions techniques que l'on peut se poser en mathématiques, il existe, en amont, un état de fait plus métaphysique et plus lié au destin de certaines questions philosophiques *à travers* la mathématique. En effet, l'ouverture mathématique au sens large, c'est un être-là de ce qui se présente potentiellement comme de l'inconnu non exploré, souvent local, et jamais totalement déconnecté de ce qui a déjà été compris. Or le questionnement proprement philosophique est abondamment imprégné et secondé par la mémoire historique des structures du langage. En effet, l'acte de questionner possède ses propres structures, ses variabilités spéculatives et tout un ensemble de sous-entendus de réponses possibles. Aussi en mathématiques, l'accès à l'ouverture peut-il sembler au premier abord s'exprimer comme il se doit dans la plénitude de la formulation des questions qui ne sont pas encore résolues, mais il n'en est en général rien car à notre époque, toute la recherche existante est *spécialisée*, et cet état de fait est irréversible. En définitive, on peut donc être victime d'une certaine *illusion* d'accéder à l'ouverture réelle par la formulation de questions simples et compréhensibles au sujet de problèmes mathématiques précis qui sont encore ouverts aujourd'hui, parce que le véritable accès à l'ouverture coprésente du temps irréversible exige de s'enrichir de toute la pensée spécialisée qui se débat au moment présent avec les questions en question. Il y donc là une très grande différence de nature avec les questions *proprement philosophiques* pour lesquelles la *thèse d'ouverture pérenne* (apories socratiques, antinomies kantiennes) possède un sens incontestable.

Par exemple, après Apéry, Cohen, Van der Poorten et Beukers en 1978–79, de nombreux auteurs tels que Sorokin, Ball, Rivoal, Zudilin, Prévost, Nesterenko et d'autres ont travaillé dans les années 1990-2000 sur l'irrationalité des zêtas impairs $\zeta(2k+1)$ en cherchant à prolonger la piste ouverte par Roger Apéry. Grâce à un survol rapide de la littérature sur le sujet (*cf.* [**35**]), on se convainc alors aisément que rien dans la constatation que l'irrationalité de $\zeta(5)$ reste encore aujourd'hui une question mathématique *ouverte* ne donne un quelconque *accès* à la perception *sur le terrain spécialisé* de tous les obstacles insurmontés qui se sont présentés aux spécialistes qui y réfléchissent toujours. Intégrales de Beukers, séries hypergéométriques, méthode du col, approximants de Padé, polyzêtas multiples, récurrences linéaires imprévisibles : toute une artillerie de techniques et de *calculs* a été développée et systématisée afin de prolonger les germes d'idées générales entrevues par Apéry. Il est alors satisfaisant de constater que l'on a actuellement plusieurs énoncés qui s'approchent de la conjecture d'irrationalité.

Théorème. (RIVOAL, *voir* [**35**]) *Une infinité de zêtas impairs sont irrationnels. De plus, au moins un des neuf nombres :*

$$\zeta(5),\quad \zeta(7),\quad \zeta(9),\quad \zeta(11),\quad \zeta(13),\quad \zeta(15),\quad \zeta(17),\quad \zeta(19),\quad \zeta(21)$$

est irrationnel.

Théorème. (ZUDILIN, *voir* [**36**]) *Au moins un des quatre nombres* $\zeta(5)$*,* $\zeta(7)$*,* $\zeta(9)$ *et* $\zeta(11)$ *est irrationnel.*

Mais la compréhension quasi-instantanée de ces énoncés dans lesquels transparaît une certaine incomplétude — « au moins un des X nombres suivants satisfait ce qui est conjecturé pour chacun d'entre eux » — contrastera avec l'insatisfaction que tout lecteur curieux aura de ne pas comprendre aisément les démonstrations de la littérature récente. Grâce à cet exemple, on voit bien que la discussion *philosophique* de l'ouverture en mathématique est un problème très délicat. Nous y reviendrons.

Assertions mathématiques énigmatiques. Apéry lui-même ne publia qu'un résumé de sa preuve, et ce sont des arithméticiens comme Beukers, Cohen, Van der Poorten et d'autres qui se sont mobilisés pour tester, vérifier, et réaliser complètement les détails possibles d'une ou plusieurs démonstrations. La prestation orale de Roger Apéry avait engendré un scepticisme général chez tous les auditeurs non francophones, tant les énoncés présentés maladroitement *et sans preuves* semblaient peu plausibles aux arithméticiens présents[5]. Voici donc ces quatre assertions surprenantes.

Assertion 1. *Pour tous* $a_1, a_2, \ldots$ *:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{k-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_k)} = \frac{1}{x}.$$

Assertion 2.

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}.$$

Assertion 3. Considérons la récurrence linéaire d'ordre deux :

$$n^3 u_n = \big[-34\,n^3 + 51\,n^2 - 27\,n + 5\big]\,u_{n-1} - (n-1)^3\,u_{n-2} \qquad (n \geqslant 2).$$

Soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $b_0 = 1$, $b_1 = 5$ et ensuite par la relation de récurrence pour tout $n \geqslant 2$. Alors les b_n sont tous des nombres entiers (!). Soit de même $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 0$, $a_1 = 5$ et ensuite de manière similaire par la relation de récurrence pour tout $n \geqslant 2$. Alors les

[5] « After Cohen's report at Helsinki, someone sourly commented : 'A victory for the French peasant …' ; to this Nick Katz retorted : 'No… ! No ! This is marvellous ! It is something Euler could have done… » ([**30**], p. 203).

a_n sont des nombres rationnels dont le dénominateur divise d_n^3, où d_n est le plus grand commun diviseur des n premiers entiers $1, 2, 3, \ldots, n$.

Assertion 4. On a :

$$\frac{a_n}{b_n} \longrightarrow \zeta(3) = 1{,}202\,056\,903 \cdots ,$$

et de plus la convergence est si rapide que $\zeta(3)$ ne peut pas être rationnel. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe q_ε^0 tel que pour toute fraction rationnelle $\frac{p}{q}$ réduite (p et q premiers entre eux) avec $q \geqslant q_\varepsilon^0$, on a :

$$\Big|\zeta(3) - \frac{p}{q}\Big| > \frac{1}{q^{\theta+\varepsilon}}, \qquad \theta = 13{,}41782\ldots$$

Traces effacées : le labyrinthe de la reconstitution. Admettons temporairement sans en débattre ici que l'antinomie dialectique entre *préexistence mathématique* et *construction effective* demeurera à jamais inaccessible à l'entendement philosophique, en analogie lointaine avec les antinomies kantiennes. Il n'en reste pas moins que le caractère souvent chaotique et mystérieux des transmissions exploratrices suggère, pour les mathématiques *transmises*, la métaphore du *labyrinthe cryptique*.

Ici, Apéry l'explorateur annonce ses quatre énoncés-clés. Ceux-ci sont, pour lui, clairs et véridiques. Ce sont les noyaux durs de « réalité » mathématique qu'il a rencontrés sur son chemin de recherche : piliers, intersections, bifurcations. Du point de vue de l'auteur, tout est cohérent et tout est compréhensible. Pour Apéry en effet, ces quatre assertions *elliptiques* s'intègrent dans un riche réseau *non elliptique* de questions, de méditations, d'essais, d'obstacles, d'échecs et de réussites. Les vrais actes de la pensée sont rétifs aux raccourcis : pour comprendre vraiment, on doit tout parcourir dialectiquement. Mais dans le message crypté qu'Apéry résume en quatre moments, le temps étiré de sa pensée et de ses calculs s'est presque totalement effacé, il a presque totalement disparu. Face à un auditoire, ou vis-à-vis de tout lecteur circonspect, l'explorateur revenu de son pays lointain s'expose malgré lui à une situation où ce qu'il dit être vrai ne fait que proposer implicitement à autrui d'imaginer d'autres entrées pour pénétrer dans un labyrinthe mathématique plus vaste que ce que son propre parcours ne lui a révélé.

Le labyrinthe, ce n'est pas forcément une architecture spécifique constituée d'allées cloisonnées qui s'entrecroisent, ou bien un réseau de souterrains dissimulés sous un château abandonné, ou encore une forêt impénétrable qui fait écran en son sein à la lumière du jour. Au sens abstraitement métaphorique et second du terme, le labyrinthe a essentiellement pour fonction d'égarer celui qui y entre et de l'égarer sans fin s'il n'en découvre pas, au moins en partie, le plan invisible.

> [Le labyrinthe] comporte de multiples tours et détours où, même sans s'en rendre compte, on revient sur ses pas [...] [Il s'agit] de tromper celui qui s'y aventure par la présence d'un grand nombre de pas et de lui faire recommencer indéfiniment la même errance. Pline, *Histoire naturelle*, [**19**], vol. II p. 2298.

Mais en mathématique, l'entrée dans le labyrinthe ne doit en aucun cas être interprétée comme la réduction du Multiple à l'Un. Nulle pelote de fil magique et conducteur n'est disponible *a priori* pour guider la pensée exploratrice et pour lui permettre d'effectuer le double parcours d'une entrée unique vers une sortie unique. Il serait donc tout à fait inexact de faire une analogie, même lointaine, avec la légende de Thésée tuant le Minotaure pour délivrer la princesse Ariane. Si Apéry nous a transmis son fil conducteur elliptique, c'est que tout au long de ce fil ténu se trouvent potentiellement d'innombrables germes de linéaments transversaux qui conduiront peut-être à démontrer l'irrationalité de *tous* les $\zeta(2k+1)$, voire même leur transcendance.

Au fond, la fonction première de tout labyrinthe architectural est d'égarer. Et s'égarer dans l'indéfini temporel et spatial du calcul et de la pensée n'est pas moins possible que dans toute construction architecturale imaginée par les poètes. Car dans le vrai labyrinthe métaphorique de la réalité mathématique en devenir, les voies par lesquelles on peut s'engager, les voies par où on peut se perdre, et les voies grâce auxquelles on peut faire fructifier ses résultats sont innombrables. Par extension, le labyrinthe mathématique figure alors l'univers entier des possibles mathématiques, et *vice versa*.

Comme les microcosmes qui sont hébergés en lui, le macrocosme spéculatif est formé d'espaces aux cloisons floues, et ces parois indécises entre le connu et l'inconnu sont elles-mêmes susceptibles d'être remplacées par des relations nouvelles qui ouvriront de nouveaux passages dont on ignorait jusqu'à ce jour où ils pourraient mener. Dans un parcours empli d'illusions, d'apparences, de faux-semblants, et sans qu'il soit possible d'en découvrir *à l'avance* toutes les voies qui sont sans issue, il est clair que le labyrinthe des mathématiques ouvre sans cesse sur d'autres labyrinthes.

> La force du jour me contraignit à chercher refuge dans une grotte ; au fond, il y avait un puits ; dans le puits, une échelle qui s'évanouissait dans la ténèbre inférieure. Je descendis ; à travers un chaos de galeries sordides, j'arrivai à une vaste chambre circulaire presque invisible. Cette cave avait neuf portes ; huit introduisaient à un labyrinthe qui, insidieusement, ramenait à la même chambre. La neuvième (grâce à un autre labyrinthe) donnait sur une seconde chambre circulaire, identique à la première. J'ignore le nombre total de chambres ; ma malchance et mon angoisse les multiplièrent.
> Jorge Luis Borges, *L'immortel*, trad. R. Caillois et R.L.F. Durand, [**19**], p. 2299.

Ainsi la transmission des résultats mathématiques par le langage s'accompagne-t-elle habituellement chez de nombreux auteurs d'un geste plus ou moins (in)volontaire d'*effacement partiel de la pensée*. La formulation très résumée qu'emploient les publications mathématiques s'inscrit de fait dans un *a posteriori* de la genèse qui voile ou qui masque toutes les causalités dialectiques. Plus grave encore : la finalisation des formulations supprime en général toute référence à la situation initiale de problème ouvert. Dès l'instant où les buts sont atteints, ce qui s'est passé est en quelque sorte *irréversible* : puisque la compréhension a capturé et formulé le compris, elle élimine du même coup définitivement l'incompréhension à laquelle elle était confrontée auparavant.

> Proofs are what Littlewood and I call gas, rhetorical flourishes designed to affect psychology, pictures on the board in the lecture, devices to stimulate the imagination of the pupils. This is plainly not the whole truth, but there is a good deal in it. The image gives us a genuine approximation to the processes of mathematical pedagogy on the one hand and of mathematical discovery on the other; it is only the very unsophisticated outsider who imagines that mathematicians make discoveries by turning the handle of some miraculous machine. G.H. Hardy, Rouse Ball lecture, 1928.

Figure générique de la récurrence : contracter les expressions symboliques. Analysons maintenant en détail l'assertion la plus élémentaire, l'Assertion numéro 1. Elle découle de l'identité finie suivante, lorsqu'on fait tendre K vers l'infini, et nous donnerons pour simplifier le même nom : « Assertion 1 » aux deux versions : finie, ou infinie.

Assertion 1. *Soient $a_1, a_2, a_3, \ldots$ des nombres réels ou complexes quelconques, en nombre infini. Alors pour tout entier $K \geqslant 1$, on a l'identité dans le corps des fractions rationnelles en une variable réelle ou complexe x :*

(1)
$$\sum_{k=1}^{K} \frac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1a_2\cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)},$$

avec la convention que le produit $a_1a_2\cdots a_{k-1}$ à gauche se réduit à la constante 1 lorsque $k=1$.

Devant tout énoncé, avant toute démonstration, l'intuition mathématique questionnante doit s'étonner.

Première réaction. D'où vient cette identité ? Est-elle vraie ? Que dit-elle ? Que fait-elle ? Quelle est sa charge synthétique ?

Plusieurs réponses simples : une somme étendue (membre de gauche) est contractée en seulement deux fractions rationnelles (membre de droite).

L'identité en question est finie, universelle et presque complètement indépendante de toute spécification ontologique. De plus, elle semble trivialement vraie dans le premier cas $K = 1$. Enfin, dans le cas général, il semblerait à première vue que toute l'affaire se réduise à vérifier des identités algébriques élémentaires.

Telles sont par exemple certaines réactions possibles que l'*intuition de compréhension* devra ou pourra engendrer face à tout énoncé synthétique qui apparaît brusquement. L'intuition de compréhension fonctionne de manière non déductive. Que ce soit dans l'amphithéâtre du CIRM en juin 1978, ou à la lecture du rapport palpitant de Van der Poorten [**30**], sa seule arme, c'est le questionnement technique.

Mais aussi, à peine l'intuition de compréhension a-t-elle terminé de se forger quelques idées préliminaires qu'elle en revient presque malgré elle au niveau initial de l'étonnement métaphysique : à quoi sert ou servira cet énoncé dont on ignore à première vue en quoi il s'insère *causalement* dans une démonstration comme celle de l'irrationalité de $\zeta(3)$?

Deuxième réaction. Cet énoncé s'enracine-t-il dans un procédé archétypal et universel ?

On pense bien sûr à l'identité algébrique élémentaire :

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \tag{2}$$

valable non seulement quand x est un nombre naturel, réel, complexe, ou même quaternionique — distinct de 1 évidemment —, mais aussi beaucoup plus généralement lorsqu'on l'écrit sous une forme qui chasse le dénominateur, à savoir :

$$\big(\mathrm{Id} - T\big) \circ \big[\mathrm{Id} + T + T^{\circ 2} + \cdots + T^{\circ n}\big] = \mathrm{Id} - T^{\circ(n+1)}, \tag{3}$$

lorsque $x =: T$ est un endomorphisme linéaire $T \colon E \to E$ d'un espace vectoriel. Si de plus $|x| < 1$, ou si l'espace E est muni d'une norme $\|\cdot\|_E$ pour laquelle la norme d'opérateur correspondante de T :

$$|||T||| := \sup_{e \in E,\ \|e\|=1} \frac{\|T(e)\|_E}{\|e\|_E} < 1$$

est strictement inférieure à 1, alors lorsque n tend vers l'infini, le terme de reste x^{n+1} ou $T^{\circ(n+1)}$ s'évanouit progressivement en tendant vers 0, de telle sorte que l'inverse numérique de $1 - x$ ou l'inverse de l'opérateur $\mathrm{Id} - E$ est représenté par la série convergente :

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \text{ou} \qquad \big(\mathrm{Id} - T\big)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^{\circ n}$$

de *tous* les termes monomiaux x^k ou $T^{\circ k}$ qui sont formés par itération simple et uniforme de la multiplication ou de la composition. D'une certaine manière, l'accomplissement en acte de l'infinité de toute série géométrique[6] s'identifie à la réalisation d'une *clôture d'inversibilité.* Et déjà pour tout entier n fini l'identité (2) ou (3) effectuait la *contraction remarquable* d'une suite arbitrairement longue de termes dont chacun se déduit du terme précédent par un procédé uniforme ; au final en effet, seulement deux termes suffisent pour donner la valeur complète de cette somme étendue :

$$\frac{1}{1-x} \quad \text{et} \quad -\frac{x^{n+1}}{1-x} \qquad \text{ou} \qquad \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad -T^{\circ(n+1)}.$$

Mais alors, existe-t-il des parentés profondes entre ces deux types d'identités (1) et (2) ? Existe-t-il un archétype de sommation-contraction qui s'exerce en amont de ces deux réalisations spécifiques ? Existe-t-il ici une essence universelle de calcul formel qu'il faudrait alors recentrer afin de faire fonctionner à fond l'exigence qu'ont les mathématiques de résumer tout procédé synthétique en un acte de pensée simplifié ? Ces questions s'inscrivent dans une problématique plus large de métaphysique des mathématiques.

Troisième réaction. Comment s'approprier définitivement l'énoncé, comment en résumer la teneur, et comment le placer précisément là où il se doit dans l'architecture d'une démonstration ?

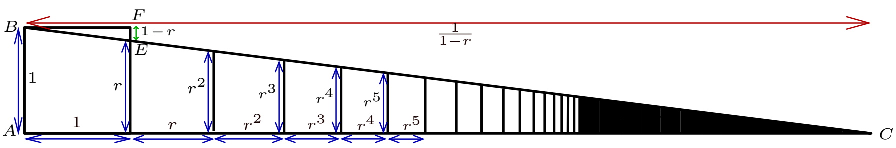
Avant toute preuve, l'intuition *qui est une pensée* rebondit de tous côtés, anticipe et pose des jalons provisoires. Ce qui compte le plus : maintenir vivantes dans chaque éclaircissement ultérieur toutes les questions profondes, causales, métaphysiques face auxquelles on n'aura pas répondu dans ce moment de premier examen.

Preuve déductive de l'Assertion 1. Considérons tout d'abord le cas $K = 1$. Le membre de droite est-il égal au membre de gauche ? Testons-le, réduisons au même dénominateur et simplifions :

$$\frac{1}{x+a_1} \overset{?}{=} \frac{1}{x} - \frac{a_1}{x(x+a_1)} = \frac{x + \underline{a_1}_{\circ} - \underline{a_1}_{\circ}}{x(x+a_1)} = \frac{\underline{x}_{\circ}}{\underline{x}_{\circ}(x+a_1)} = \frac{1}{x+a_1} \qquad \text{OK.}$$

En raisonnant par récurrence, supposons maintenant que l'énoncé est démontré jusqu'au niveau K et testons ce qu'il advient lorsqu'on ajoute au membre de gauche de l'identité générale qu'il nous faut démontrer, le terme

[6] Voici une démonstration diagrammatique de l'identité $1 + r + r^2 + r^3 + \cdots = \frac{1}{1-r}$ valable pour tout $0 < r < 1$. Le long triangle ABC est semblable au petit triangle BFE, donc $AC = AB \cdot \frac{BF}{FE} = 1 \cdot \frac{1}{1-r}$.



correspondant à $k = K + 1$, afin de faire monter le niveau d'un cran. On obtient un membre de gauche dans lequel une réduction spontanée au même dénominateur et une simplification immédiate du numérateur, effectuées comme suit :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{K+1} &= \sum_{k=1}^{K} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})} \\
&\overset{\text{hyp-réc}}{=} \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)} + \frac{a_1 a_2 \cdots a_K}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{-a_1 a_2 \cdots a_K (x+a_{K+1}) + a_1 a_2 \cdots a_K\, x}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)(x+a_{K+1})} \qquad \text{[développer } (x+a_{K+1})\text{]} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_K a_{K+1}}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_{K+1})} \qquad \text{[même formule au niveau } K+1\text{]},
\end{aligned}$$

conduisent visiblement à achever la récurrence. □

Reconstituer *a posteriori* des éléments de genèse. Mais au-delà de l'appropriation déductive, une *quatrième réaction* de l'intuition questionnante s'avère indispensable : il faut à présent renverser la synthèse et se replacer en situation d'ignorance relative. Ce n'est en effet qu'à ce prix que l'intuition pourra avoir accès à certaines causalités supérieures qui sont spécifiques au problème considéré. Prenons donc maintenant le temps de nous replacer, même artificiellement et pour les besoins de l'analyse, dans une situation de *recherche* face à l'expression que l'on souhaite simplifier, mais sans admettre que nous connaissions déjà la réponse, à savoir sans connaître le membre de droite (1) de l'Assertion 1, c'est-à-dire en partant seulement de la question : à quels calculs doit-on soumettre le membre de gauche ?

Aussi commence-t-on par examiner ce que donnent les sommes considérées $\sum_{k=1}^{K}$ pour les petites valeurs de K, avec un seul objectif : *deviner les métamorphoses symboliques adéquates*. Comme le gymnaste soumet tout son corps à de nouveaux enchaînements gestuels, le chercheur, lui, s'exerce régulièrement à exécuter des calculs qui sont nouveaux par rapport à sa pratique habituelle.

Pour $K = 2$, on peut tout d'abord réduire au même dénominateur la somme des deux fractions présentes :

$$\frac{1}{x+a_1} + \frac{a_1}{(x+a_1)(x+a_2)} = \frac{x+a_1+a_2}{(x+a_1)(x+a_2)}.$$

Immédiatement, on s'interroge : que voit-on ? Deux observations favorables : tandis qu'il est clair qu'au dénominateur on trouve nécessairement le produit des $(x + a_k)$, au numérateur, le terme x est suivi de la somme de tous les a_k, pour k allant de 1 jusqu'à $K = 2$ bien entendu.

Examinons maintenant la somme jusqu'à $K = 3$, réduisons au même dénominateur $(x + a_1)(x + a_2)(x + a_3)$, développons le numérateur, et réorganisons-le en cherchant à y faire apparaître des symétries formelles :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{x+a_1}+\frac{a_1}{(x+a_1)(x+a_2)}+\frac{a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\
&\qquad=\frac{x+a_2+a_1}{(x+a_1)(x+a_2)}+\frac{a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\
&\qquad=\frac{(x+a_1+a_2)(x+a_3)+a_1a_2}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}\\
&\qquad=\frac{x^2+x(a_1+a_2+a_3)+a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)}.
\end{aligned}$$

D'ores et déjà, la combinatoire générale commence à se préciser : ici, le coefficient de x est la somme des a_k, et le coefficient constant est la somme de tous les produits possibles deux à deux des $a_{k_1}a_{k_2}$ avec $k_1 < k_2$ — pour tous les indices k allant de 1 jusqu'à $K = 3$ bien sûr. Le calcul au niveau $K = 4$ que nous ne reproduisons pas ici fournira le résultat similaire :

$$\frac{x^3+x^2(a_1+a_2+a_3+a_4)+x(a_1a_2+\cdots+a_3a_4)+a_1a_2a_3+\cdots+a_2a_3a_4}{(x+a_1)(x+a_2)(x+a_3)(x+a_4)}.$$

Si l'on veut raisonner ici en toute généralité, on devra alors « *reconnaître* » dans les numérateurs les fonctions symétriques élémentaires :

$$\sigma_j(a_1,\dots,a_K) := \sum_{1\leqslant k_1<k_2<\cdots<k_j\leqslant K} a_{k_1}a_{k_2}\cdots a_{k_j}$$

qui collectent tous les produits possibles de j nombres a_k pour k compris entre 1 et K, la commutativité du produit permettant de supposer pour éviter les redondances que les indices $k_1, k_2, \dots, k_j$ sont ordonnés de manière strictement croissante.

Mais s'agit-il vraiment là d'un acte de *reconnaissance* ? Oui, pour le mathématicien qui possède déjà une culture initiale sur les fonctions symétriques élémentaires, notamment au sujet des racines d'un polynôme de degré quelconque. Toutefois, au-delà d'une mémoire culturelle stratifiée par une pratique et par une formation, l'esprit du mathématicien-philosophe doit chercher à s'inscrire au mieux dans une *position d'ouverture* ; pour cette raison, il est préférable de parler ici d'une *genèse symbolique et locale* des fonctions symétriques élémentaires. Certes, cette genèse est renouvelée par rapport à d'autres contextes tels que la théorie algébrique des équations, mais elle se révèle ici comme *intrinsèquement présente* au sein du calcul à effectuer. D'une certaine manière, on doit être capable à tout instant de (re)*conceptualiser* le général symbolique dans le particulier du calcul. Dans tout réseau potentiel de connexions, la mathématique est une *genèse qui questionne*, et elle est perpétuellement replacée en situation d'engendrer ou de réengendrer les concepts. Et lesdits concepts ne sont parfois qu'une manière commode d'abréger *en partie* les calculs complexes auxquels on est confronté.

Maintenant que la (re)conceptualisation de toutes les sommes symétriques de produits est acquise, « il est clair » par induction après examen des trois cas $K = 2, 3, 4$ ci-dessus que la somme générale à calculer devra s'écrire :

$$\frac{x^{K-1} + x^{K-2}\,\sigma_1(a) + x^{K-3}\,\sigma_2(a) + \cdots + x^1\,\sigma_{K-2}(a) + \sigma_{K-1}(a)}{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)}. \tag{4}$$

Dans cette constant affirmatif : « il est clair » se jouent deux moments métaphysiques standard de la pensée mathématique.

Premier moment : *acte de création intuitive de la généralité*. Du point de vue du sujet réfléchissant qui cherche à engendrer de la réalité mathématique, c'est là que naît la vraie pensée. En effet, c'est seulement à travers le sujet mathématique pensant que la création d'une synthèse pure est possible : aucune mathématique qui serait engendrée par des automatismes physiques et matériels n'est possible *a priori*.

Deuxième moment : *confiance justifiée en la véracité de l'induction mathématique*. Il serait en effet *très inadéquat* ici de convoquer les problématiques philosophiques sceptiques sur l'induction, puisque déjà l'effectuation minutieuse des calculs pour les cas $K = 3$ et $K = 4$ suggérait tous les mécanismes uniformes et rigoureux qui sont suffisants pour élaborer la démonstration générale par récurrence. En particulier, nous nous dispenserons de rédiger une démonstration commentée du cas général, car il vaut mieux ajouter que la *perception anticipée* des régularités générales dans les calculs particuliers fait partie des structures fondamentales de la compréhension mathématique.

Que faut-il retenir de ce parcours de *reconstitution a posteriori* des éléments de genèse ? Premier fait : la genèse considérée n'a pas spontanément conduit à l'identité qui était énoncée dans l'Assertion 1. Elle a débouché sur une autre formule, la formule (4), qui possède sa propre autonomie d'harmonie et de complétude formelles. Bien entendu, on pourra retrouver l'identité de l'Assertion 1 en observant que la réduction au même dénominateur des deux fractions de (1), à savoir :

$$\frac{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K) - a_1a_2\cdots a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)} = \frac{x^K + x^{K-1}\,\sigma_1(a) + \cdots + x\,\sigma_{K-1}(a)}{x(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_K)}$$

redonne par développement et après division par x celle (4) que nous avons obtenue par une autre voie. Mais ce qui compte ici, à l'issue de ce parcours didactique, c'est de souligner que *la convergence du synthétique est nécessairement exposée au multiple*. Autrement dit, l'être symbolique du synthétique s'exprime toujours de plusieurs manières. Quelle est la forme la plus adéquate en soi, ou la plus appropriée à la résolution d'un problème donné ? La décision doit rester en suspens le plus longtemps possible.

Décider des actes de calcul. À titre d'illustration du principe d'après lequel une grande partie des actes de pensée qui accompagnent le calcul mathématique ne transparaissent pas dans le texte rédigé, citons la démonstration apparemment simple de l'Assertion 2 que donne Van der Poorten dans [**30**], avant d'en disséquer toute la complexité.

> Now put $x = n^2$, $a_k = -k^2$, and take $K = n-1$ to obtain
>
> $$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)\cdots(n^2-(n-1)^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}.$$
>
> Writing $\epsilon_{n,k} = \frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!}$, because
>
> $$(-1)^k\,n\left(\epsilon_{n,k}-\epsilon_{n-1,k}\right) = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)},$$
>
> we have
>
> $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1}(-1)^k\left(\epsilon_{n,k}-\epsilon_{n-1,k}\right) &= \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} = \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left(\epsilon_{N,k}-\epsilon_{k,k}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}\end{aligned}$$
>
> and on noting that as $N \to \infty$ the first term on the right vanishes, we have the Assertion 2. [**30**], p. 197.

Dans l'écriture mathématique, dès que les équations apparaissent et que les calculs entrent en scène, quantité d'actes intermédiaires sont escamotés, bien qu'ils relèvent de la pensée et du langage. Par contraste, tout texte en prose à caractère didactique (histoire, philosophie, presse) est pris dans les structures complexes et rigoureuses de la langue des essais : significations, liaisons, transitions, rien n'est laissé au hasard dans l'intention d'écriture.

Mais en mathématiques et quand il s'agit du calcul, la langue naturelle est beaucoup trop retenue et restreinte, voire reléguée à une espèce de frontière imprécise où on la cantonne à rester dans l'ombre et dans les limbes. Aucune « ortho-graphie » et aucune « ortho-syntaxie » du calcul ne se sont constituées avec le temps, tant et si bien que les moeurs scientifiques ont rendu recevable toute publication qui se contente de dire au lecteur « on a ceci : », « on obtient cela : », « on en déduit que : », sans plus de façons. C'est cette absence passablement regrettable de *grammaire stable et minimale du calcul* qui est l'une des raisons de l'opacité des mathématiques pour les philosophes et pour les littéraires, parce que de leur point de vue, l'expression *continue* de la pensée est exigible *dans les textes*.

Reprenons donc cette démonstration de l'Assertion 2. On applique l'identité (1) avec $x := n^2$, avec $a_k := -k^2$ et avec $K := n-1$. En observant que :

$$(-1^2)(-2^2)\cdots(-(k-1)^2) = (-1)^{k-1}\,(k-1)!^2,$$

les numérateurs s'avèrent alors être, au signe $(-1)^{k-1}$ près, des carrés de factorielles, et l'on peut alors détailler les tous premiers actes de simplification qui se présentent à nous dans le membre de droite :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-(n-1)^2)} =$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\underline{(n-1)!}_{\circ}}{n\,n\,\underline{(n-1)}_{\circ}(n+1)\underline{(n-2)}_{\circ}(n+2)\cdots\underline{(n-(n-1))}_{\circ}(n+n-1)}.$$

Avant de poursuivre la restitution des calculs de Van der Poorten, que se passe-t-il entre la première et la deuxième ligne ?

La pensée qui calcule est toujours inscrite dans une situation d'ouverture *absolument universelle*, qui s'exprime par une *question générique* : « *comment décider du prochain acte* ? » La question est en effet constamment : « *quel acte de calcul effectuer* ? » C'est *la* question, il n'y a qu'*elle*, et elle est tout le temps « *là* ».

Rappelons le *schematum* de l'exponentielle : tout arbre discret qui présente des points de bifurcation croît de manière exponentielle, même quand dans une certaine *proportion*, une partie de ses branches naissantes est supprimée aléatoirement. Ici, c'est-à-dire *dans l'universel indécis du calcul*, la pensée est *a priori* confrontée à une *exponentiation potentielle* de ses actes, et donc à l'impossibilité de tout embrasser. Il faut par conséquent définir une *posture décisionnelle viable*. Là est tout l'enjeu pour qui veut engendrer de l'irréversible-synthétique en mathématiques.

> Gauss declared, and his notebooks attest to it, that his way of arriving at mathematical truths was "through systematic experimentation". [**13**], p. .

Donc à la deuxième ligne ci-dessus (nous poursuivons les explications), la question générale qui se pose est : « Que faire ? » Répondons seulement dans l'*a posteriori* des décisions qui ont déjà été prises (*cf.* citation ci-dessus) : on ne touche pas à $\frac{1}{n^2}$, on réécrit en le duplicant le carré $(n-1)!^2$, on factorise au dénominateur tous les $n^2 - k^2$ présents *via* la formule élémentaire $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, *y compris* :

$$n^2 = (n^2 - 0^2) = (n-0)(n+0) = n\,n,$$

et l'on simplifie enfin, en les soulignant pour plus de clarté symbolique, les deux factorielles qui peuvent être supprimées au numérateur et au dénominateur, en observant — fait quasi-gelstaltiste de la géométrisation du symbolique — l'entrelacement entre ce qui est conservé et ce qui est supprimé. Ainsi, sans répéter la somme dont on est parti, mais en conservant un marqueur déictique facile à mémoriser : « expression dont on est parti » afin de signifier que le calcul continue à être *orienté* vers des métamorphoses signifiantes, résumons ce qui vient d'être obtenu et poursuivons le commentaire *a posteriori* des décisions de calcul qui conduiront à l'Assertion 2 :

$$\begin{aligned}
\text{expression dont on est parti} &= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}\,(n-1)!}{n\,n\,(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{\underline{2}_{\mathsf{ins}}\,(-1)^{n-1}\,(n-1)!\,\underline{n}_{\mathsf{ins}}}{n\,n\,(n+1)(n+2)\cdots(2n-1)\underline{2n}_{\mathsf{ins}}} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}\,n!}{n^2\,\frac{(2n)!}{n!}} \\
&= \frac{1}{n^2} - \frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\,\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

À la deuxième ligne, le facteur $\underline{2n}_{\mathsf{ins}}$ a été ajouté à la fois au dénominateur et au numérateur, où il a été de plus *divisé* en ses deux multiplicandes $\underline{2}_{\mathsf{ins}}$ et $\underline{n}_{\mathsf{ins}}$ de manière à ce que le facteur $\underline{n}_{\mathsf{ins}}$ puisse *s'absorber spontanément* dans la factorielle $(n-1)$! Ensuite, à la troisième ligne, le facteur $n\,n$ qui provenait de (n^2-0^2) et que l'on avait soumis, pour des raisons d'uniformité, à la même factorisation $(n-0)(n+0)$ que ceux qui le suivaient, est à nouveau contracté en utilisant la notation *puissance*, à savoir : on le réécrit sous sa forme originale n^2. Commentons plus généralement ce dernier acte.

Micro-spéculation sur la dynamique du calcul : tout le possible des métamorphoses pose question et s'offre au pivot de la réeffectuation. Chaque retour en arrière implique acte de décision, réinterprétation des gradients symboliques et *reprise* des calculs. Parce qu'*aucun possible n'appartient à la mathématique idéale*, les actes d'homogénéisation formelle qui semblaient définitifs sont eux aussi indéfiniment soumis à révision.

Enfin pour terminer le commentaire complet de ces quatre lignes de calcul, un *acte de reconnaître* est effectué : le symbole binomial $\binom{2n}{n}$ au dénominateur se resynthétise visiblement à partir de $\frac{n!}{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{1}{\frac{(2n)!}{n!\,n!}} = \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Créer la différence téléscopique. « Posons à présent », dit la démonstration :

$$\mathsf{E}_{n,k} := \frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!},$$

« et observons », poursuit-elle, que :

$$(-1)^k\,n\,\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] = \frac{(-1)^{k-1}\,(k-1)!^2}{(n^2-1^1)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)}.$$

Comme en de nombreux autres lieux de la mathématique écrite, il y a ici deux pétitions de principe qui font chacune violence à la compréhension du lecteur. Premièrement, la représentation comme différence des termes sous le signe *somme* dont on est parti s'annonce sans aucune justification : c'est comme une sorte de création *ex nihilo*. Deuxièmement, l'annonce brute semble prétendre que cette relation est immédiate, évidente, visible à l'œil nu, sans qu'on doive examiner des calculs intermédiaires au microscope. Encore une fois, causalité et continuité sont rompues, car la vérification de cette identité demande un certain nombre d'actes incompressibles :

$$\begin{aligned}
(-1)^k\, n\left[\mathsf{E}_{n,k}-\mathsf{E}_{n-1,k}\right] &= (-1)^k\, n\left[\frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-k)!}{k^3\,(n+k)!}-\frac{1}{2}\,\frac{k!^2\,(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[-\,\frac{n}{2}\,\frac{k^2}{k^3}\,\frac{(n-k)!}{(n+k)!}+\frac{n}{2}\,\frac{k^2}{k^3}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[-\,\frac{n}{2k}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\left(\frac{n-k}{n+k}-1\right)\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[\frac{n}{\underline{-\,2k}_{\circ}}\,\frac{(n-1-k)!}{(n-1+k)!}\left(\frac{\underline{\underline{-\,2k}}_{\circ}}{n+k}\right)\right]\\
&= (-1)^{k-1}(k-1)!^2\left[n\,\frac{(n-1-k)!}{(n+k)!}\right].
\end{aligned}$$

Dès la deuxième ligne, on fait apparaître en quelque sorte *à l'avance* le facteur commun $(-1)^{k-1}(k-1)!^2$ qui est attendu dans le membre de droite visé. Ensuite, on doit réorganiser les termes entre accolades, et une factorisation spontanée (troisième ligne) fait naître dans une sous-parenthèse la soustraction de deux termes que l'on réduit au même dénominateur (quatrième ligne), pour remarquer (passage à la cinquième ligne) que la quantité $-\,2k$ se simplifie. Ensuite, afin de rapporter le dernier terme entre crochets à la forme annoncée, on peut écrire plus explicitement les factorielles qui apparaissent au numérateur et au dénominateur de manière à effectuer des simplifications décalées :

$$\begin{aligned}
n\,\frac{(n-1-k)!}{(n+k)!} &= \frac{\underline{n}_{\circ}\,\underline{(n-1-k)\cdots 2\cdot 1}_{\circ\circ}}{\underline{1\cdot 2\cdots(n-1-k)}_{\circ\circ}\,(n-k)\cdots(n-1)\,\underline{n}_{\circ}\,(n+1)\cdots(n+k)}\\
&= \frac{1}{(n-1)(n+1)\cdots(n-k)(n+k)}\\
&= \frac{1}{(n^2-1^2)(n^2-2^2)\cdots(n^2-k^2)},
\end{aligned}$$

en terminant par un développement des facteurs $(n-j)(n+j)=n^2-j^2$.

Maintenant que nous avons (seulement) expliqué en détail les deux premières lignes de calculs de la citation ci-dessus, les questions contingentes ou métaphysiques ressurgissent : comment Apéry a-t-il été conduit à ces transformations symboliques essentiellement élémentaires ? Et surtout : quel est le *sens* cette nouvelle expression :

$$\frac{1}{n^2}-\frac{2\,(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}?$$

Que doit-on y lire ? Qu'apporte-t-elle par rapport à l'irrationalité visée de $\zeta(3)$?

Toutes ces questions de « finalité mathématique locale » ou de « motivation continuée » sont en général gommées du texte mathématique écrit. L'une des raisons principales de ces effacements, c'est que

le calcul est aussi volatil que le geste.

En mathématiques, l'écrit n'est pas assez puissant pour exprimer tous les actes élémentaires de la pensée.

Reste maintenant à achever l'analyse. Grâce à cette représentation (toujours mystérieuse) du terme sommé sous la forme $(-1)^k\, n\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big]$, nous sommes à même d'examiner ce que donne la sommation, pour $n = 1$ jusqu'à un entier N arbitraire, du dernier terme de la première ligne de la citation ci-dessus, à savoir :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} && \text{[remplacer]} \\
&= \sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{n=k+1}^{N} (-1)^k\big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] && \text{[intervertir les sommes].}
\end{aligned}$$

Réflexe de calculateur : face à toute somme *double* ou face à toute intégration *multiple*, on doit essayer d'intervertir l'ordre des sommations ou l'ordre des intégrations, parce que vraisemblablement, on pourra ainsi exécuter presque gratuitement un acte élémentaire d'irréversible-synthétique. Autrement dit : une première sommation double fournit une première lecture, et *pour avancer*, on doit chercher une autre vision, une autre expression, une autre représentation. Toute action-transformation est à tester, fût-elle automatique. Ici immédiatement, il nous faut donc intervertir la double sommation. Se pose alors le problème technique de savoir de quelle manière les bornes de sommation doivent changer. Et une fois que l'on a compris quels devaient être les échanges de bornes de sommation, une fois que l'interversion des sommes est effectuée, on a alors la confirmation remarquable que l'on progresse dans la direction appropriée, celle du gradient d'information synthétique, puisque la nouvelle seconde somme :

$$(-1)^k \sum_{n=k+1}^{N} \big[\mathsf{E}_{n,k} - \mathsf{E}_{n-1,k}\big] = (-1)^k \big[\mathsf{E}_{N,k} - \mathsf{E}_{k,k}\big]$$

est *téléscopique* au sens où l'on a :

$$A - \underline{B}_\circ + \underline{B}_\circ - \underline{C}_\circ + \underline{C}_\circ - \underline{D}_\circ + \cdots + \underline{L}_\circ - \underline{M}_\circ + \underline{M}_\circ - N = A - N,$$

ce qui nous donne ainsi une expression simplifiée et raccourcie de la somme considérée :

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3}-2\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} &= \sum_{k=1}^{N}(-1)^k\left[\mathsf{E}_{N,k}-\mathsf{E}_{k,k}\right]\\ &= \sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}},\end{aligned}$$

dans laquelle on peut alors finalement remplacer $\mathsf{E}_{N,k}$ et $\mathsf{E}_{k,k}$ par leurs expressions complètes pour atteindre l'identité annoncée. La fin de la démonstration consiste à observer que le premier terme du membre de droite ci-dessus :

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}=0,$$

tend vers 0 lorsque N tend vers ∞, et donc en conclusion, on obtient bien une nouvelle représentation de $\zeta(3)$:

$$\boxed{\zeta(3)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^3}=\Big(2+\frac{1}{2}\Big)\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}}}.$$

Critère d'irrationalité. Revenons maintenant à l'irrationalité de $\zeta(3)$. Un nombre β est *irrationnel* s'il n'est pas de la forme (rationnelle) p_0/q_0 pour deux entiers relatifs p_0 et q_0 dans $\mathbb{Z}$. Il en découle qu'un nombre rationnel $b_0=p_0/q_0$ avec $p_0,q_0\in\mathbb{Z}$ satisfaisant aussi sans perte de généralité $q_0\geqslant 1$, jouit de la propriété que pour tout autre nombre rationnel p/q qui est *distinct* de lui, à savoir qui est tel que $p_0q-pq_0\neq 0$, on a l'inégalité :

$$\left|b_0-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{p_0q-pq_0}{qq_0}\right|\geqslant\frac{1}{qq_0}=\frac{\mathsf{const}}{q} \tag{5}$$

qui mesure la *non proximité* quantitative universelle entre $\frac{p_0}{q_0}$ et toute autre fraction $\frac{p}{q}$; en effet, si l'entier p_0q-pq_0 est non nul, sa valeur absolue est certainement minorée par 1.

À l'inverse, il est connu que pour tout nombre irrationnel β, il existe toujours une infinité de fractions rationnelles p/q — par exemple les fractions réduites de son développement en fraction continue — qui satisfont l'inégalité opposée avec une puissance au carré :

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

Logiquement, la non-satisfaction de l'inégalité (5) fournit un critère qui garantit l'irrationalité d'un nombre β défini d'une manière quelconque, pourvu qu'on puisse le représenter comme la limite d'une suite de nombres rationnels satisfaisant la condition suivante.

Lemme standard. *S'il existe une suite* $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de nombres rationnels tous distincts* $\frac{p_n}{q_n} \neq \beta$ *du nombre donné* β *mais qui convergent vers lui et qui satisfont de plus l'inégalité quantitative* :

$$\left|\beta - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n^{1+\mathsf{c}}} \qquad (n=0,1,2,3,\cdots) \tag{6}$$

pour un certain nombre réel $\mathsf{c} > 0$*, alors* β *est* irrationnel. □

Venons-en maintenant à l'Assertion 3. Apéry en 1978 n'avait pas seulement formulé la relation de récurrence linéaire en question :

$$n^3\, u_n + (n-1)^3\, u_{n-2} = \big[34\, n^3 - 51\, n^2 + 27\, n - 5\big]\, u_{n-1}, \tag{7}$$

mais il avait aussi donné des expressions *explicites* pour les suites a_n et b_n.

Proposition principale. *Si l'on pose :*

$$b_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 \qquad \textit{et} \qquad a_n := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k},$$

où les quantités $c_{n,k}$ *sont définies par :*

$$c_{n,k} := \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2\, m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} \qquad (k \leqslant n),$$

alors les nombres rationnels $b_n \in \mathbb{N}$ *et* $a_n \in \mathbb{Q}$ *satisfont la relation de récurrence linéaire* (7) *avec les conditions initiales :*

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 6 \qquad \textit{et} \qquad b_0 = 1, \quad b_1 = 5.$$

> We were quite unable to prove that the sequences $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ and $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ defined above did satisfy the recurrence of Assertion 3. Apéry rather tartly pointed out to me in Helsinki that he regarded this more a compliment than a criticism of his method. But empirically (numerically) the evidence was utterly compelling. It seemed indeed that $\zeta(3)$ had been proved irrational, because the rest, *i.e.* Assertion 4, follows quite easily. [**30**], p. 198.

Élasticité de la nomination symbolique. Avant d'aborder la démonstration de cette proposition surprenante qui précise l'Assertion 3, résumons les principaux arguments qui conduisent à conclure que le nombre $\zeta(3)$ est irrationnel. Méthodologie standard en mathématiques : admettre provisoirement un énoncé technique et difficile, conserver le provisoire en mémoire, et en déduire d'abord des conséquences avant d'y *revenir* ultérieurement. À une autre échelle temporelle, Grothendieck s'était conduit d'une manière analogue vis-à-vis des conjectures de Weil, en laissant provisoirement de côté certaines questions qui ne devaient logiquement être attaquées qu'à la fin des explorations, et c'est Deligne qui est *revenu* en amont pour revisiter et résoudre de telles questions laissées en suspens.

Ainsi, commençons par poser tout d'abord pour abréger :

$$P(n-1) := 34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5.$$

Pourquoi ? Quelle est la signification de l'acte simple qui consiste à introduire une notation supplémentaire $P(n-1)$ pour désigner un polynôme, à savoir ici le polynôme $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$, lequel est déjà connu et ne nécessite aucun symbole supplémentaire pour être lu ?

Déjà, voici que s'interpose la *métaphysique de l'instant propre de tout acte* : les exigences du principe de raison ne sont presque jamais respectées d'une manière absolue. Formulées au niveau le plus élevé, *ces exigences voudraient que chaque acte mathématique porte en lui des raisons justifiantes qui le motivent et qui l'expliquent*. Ces exigences voudraient que soient effacées au mieux les traces rémanentes de mystère qui entachent l'instant propre de tout acte. Les mathématiques ne sont-elles pas une science des causalités abstraites, objectives et *a priori* ? À son plus haut niveau, l'exigence de penser en raison voudrait donc que soit mis au point un langage mathématique totalisant qui *exprime à chaque instant les motivations et les causalités de tout acte et de tout calcul*.

Or ici, on peut répondre en guise de justification que l'expression relativement complexe $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$ apparaîtra inchangée dans la suite, et donc que pour des raisons d'économie de lecture, il est commode d'abréger cette expression en lui donnant un autre « nom » $P(n-1)$ que l'on gardera en mémoire. Mais à cette réponse s'oppose une objection recevable : en alléguant une telle justification, on navigue de manière ambiguë entre l'après et l'avant, et on trahit donc en quelque sorte le principe pur de raison qui voudrait que les raisons soient sur le champ raisons en elles-mêmes. À nouveau, l'acte de donner un nom n'est justifié en dernier recours que par la mémoire qu'a l'acteur d'avoir effectué des explorations préalables. Le lecteur est alors censé nous croire sur parole lorsque nous disons que l'abréviation $P(n-1)$ sera *commode*. Car elle pourrait tout compte fait ne pas être si commode que cela, par exemple au cas où la notation $P(n-1)$ n'apparaîtrait que deux ou trois fois dans la suite, ou parce qu'il n'est pas certain du tout que l'on se souviendra cinq pages plus loin du fait que $P(n-1)$ désignait ce polynôme précis $34\,n^3 - 51\,n^2 + 27\,n - 5$ et non pas un polynôme quelconque, ou encore parce que le choix même de la suite de caractères $P(n-1)$ n'est peut-être pas le meilleur choix du point de vue de la recherche d'une harmonie symbolique dans le texte écrit.

Toute notation doit être soumise à une révisibilité permanente.

Mais ce ne sont pas ces discussions de méthodologie liées à la genèse du texte mathématique qui constituent le cœur philosophique des actes de dénominations symboliques en mathématiques. Le vrai problème, c'est l'*élasticité*, à savoir la *dilatabilité* et la *contractibilité* des symboles dans les calculs. Le « grossissement des expressions » est si visible et si sensible dans l'utilisation des systèmes électroniques contemporains que l'un des enjeux majeurs du calcul est de réussir à faire voir les structures principales par un jeu de notations interchangeables qui permettront de *dilater et de contracter à volonté les expressions soumises au calcul*. Et la question à résoudre au coup par coup, c'est bien de savoir *quelle* partie symbolique devra être soumise à un jeu de permutations nominales. Tout compte fait, c'est exactement de cette manière-là que les symboles de Christoffel sont apparus chez Christoffel en 1870 ([**8**]) : simplement comme abréviations d'expressions algébrico-différentielles massives qui se transportaient de manière essentiellement atomique dans les calculs de dérivées successives des termes de courbure que Riemann avait découverts. Ce n'est qu'une cinquantaine d'années plus tard, en 1918, que Levi-Civita a su interpréter géométriquement ces quantités atomiques comme collection de symboles fondamentaux associés de manière unique à une certaine connexion riemannienne symétrique. En définitive, et ce sera là une thèse proprement gaussienne :

> *Il y a un* voir géométral *du calcul formel qui est au centre de toute genèse conceptuelle.*

Voici un autre exemple relié aux travaux de l'auteur ([**23**]). Quand dans un calcul formel complexe, touffu, se présentent des relations polynomiales de degré trois entre certaines expressions longues telles que par exemple :

$$\begin{aligned} N^{10} := & \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3'' \\ f_1'''' & f_2'''' & f_3'''' \end{vmatrix} f_1' f_1' - 3 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3'' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1'''' & f_2'''' & f_3'''' \end{vmatrix} f_1' f_1'' + \\ & + 4 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} f_1' f_1''' + 3 \begin{vmatrix} f_1' & f_2' & f_3' \\ f_1'' & f_2'' & f_3'' \\ f_1''' & f_2''' & f_3''' \end{vmatrix} f_1'' f_1'', \end{aligned}$$

il est parfois *intrinsèquement* avisé d'introduire une notation nouvelle et qui parle d'elle-même, par exemple :

$$\Delta_{1,2,3}^{(\alpha),(\beta),(\gamma)} := \begin{vmatrix} f_1^{(\alpha)} & f_2^{(\alpha)} & f_3^{(\alpha)} \\ f_1^{(\beta)} & f_2^{(\beta)} & f_3^{(\beta)} \\ f_1^{(\gamma)} & f_2^{(\gamma)} & f_3^{(\gamma)} \end{vmatrix},$$

afin de *contracter de manière appropriée* :

$$\begin{aligned} N^{10} := & \Delta_{1,2,3}^{',''','''''} f_1' f_1' - 3\, \Delta_{1,2,3}^{','',''''} f_1' f_1'' + \\ & + 4\, \Delta_{1,2,3}^{','','''} f_1' f_1''' + 3\, \Delta_{1,2,3}^{','','''} f_1'' f_1'' \end{aligned}$$

les quantités concernées dont l'expression complète s'avérait trop massive. De cette manière, on se donne la possibilité de s'élever d'un cran au-dessus de la complexité symbolique, et de travailler ainsi en ne retenant que les informations formelles qui joueront véritablement dans les calculs ultérieurs. Au moment où le calcul tensoriel naît en géométrie riemannienne, notamment chez Ricci et Levi-Civita, les tensions d'élasticité symbolique suscitent toute une histoire dialectique fascinante quant à la manière dont les choix de contraction notationnelle se sont stabilisés.

Conséquences de la proposition principale. Réécrivons maintenant de manière plus concise la relation de récurrence que satisfont les deux suites a_n et b_n en cherchant à exhiber un parallélisme syntaxique :

$$
\begin{aligned}
0 &= n^3\, a_n - P(n-1)\, a_{n-1} + (n-1)^3\, a_{n-2} \\
0 &= n^3 b_n - P(n-1)\, b_{n-1} + (n-1)^3\, b_{n-2}
\end{aligned}
$$

qui justifie à l'avance l'acte que voici : multiplions la première équation par b_{n-1} et soustrayons-en la deuxième équation multipliée par a_{n-1}, de telle sorte que les deux termes où apparaît $P(n-1)$ s'annihilent :

$$
n^3\big[a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n\big] = (n-1)^3\big[a_{n-1} b_{n-2} - a_{n-2} b_{n-1}\big].
$$

Réécrivons cette équation en divisant ses deux membres par n^3 et ensuite, pour des valeurs descendantes de l'entier n, itérons-la en elle-même et à l'intérieur d'elle-même, afin de faire disparaître, pas à pas et par simplification, les quotients successifs $\frac{(k-1)^3}{k^3}$ de cubes de nombres entiers :

$$
\begin{aligned}
a_n\, b_{n-1} - a_{n-1}\, b_n &= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \big[a_{n-1}\, b_{n-2} - a_{n-2}\, b_{n-1}\big] \\
&= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \tfrac{(n-2)^3}{(n-1)^3}\, \big[a_{n-2}\, b_{n-3} - a_{n-3}\, b_{n-2}\big] \\
&= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&= \tfrac{(n-1)^3}{n^3}\, \tfrac{(n-2)^3}{(n-1)^3} \cdots \tfrac{2^3}{3^3}\, \tfrac{1^3}{2^3}\, \big[a_1\, b_0 - a_0\, b_1\big] \\
&= \tfrac{1^3}{n^3} \cdot 6.
\end{aligned}
$$

Sans commenter certains des soubassements métaphysiques de la notion de limite, admettons maintenant que la quantité définie par :

$$
\chi_n := \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}
$$

tend vers zéro lorsque n tend vers ∞ ; en vérité, cette propriété peut être déduite de l'observation — à vérifier rigoureusement, mais nous nous en dispenserons — que $c_{n,k}$ tend vers $\zeta(3)$ lorsque $n \to \infty$, uniformément pour tout $k \leqslant n$.

Ici, l'acte de dénomination : « introduire la notation χ_n » possède un *sens motivationnel précis* : eu égard au critère déjà vu qui garantit l'irrationalité d'un nombre réel, l'objectif pourra être d'établir que la différence de $\zeta(3)$

à ses approximants rationnels $\frac{a_n}{b_n}$ est telle qu'une inégalité du type (6) sera satisfaite pour un certain réel c > 0. C'est l'objectif visé.

D'après les calculs qui précèdent, la différence entre deux χ_n successifs est connue, à savoir elle vaut :

$$\begin{aligned}\chi_n - \chi_{n+1} &= \tfrac{a_n}{b_n} - \tfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}} \\ &= \tfrac{a_n\, b_{n+1} - a_{n+1}\, b_n}{b_n\, b_{n+1}} \\ &= \tfrac{6}{(n+1)^3\, b_n b_{n+1}}.\end{aligned}$$

Mais alors une sommation « spontanément possible » $\sum_{k=n}^{\infty}$ de ces égalités nous donne, en tenant compte bien sûr de $\chi_\infty = 0$, la représentation suivante de χ_n :

$$\begin{aligned}\chi_n &= \sum_{k=n}^{\infty} \big(\chi_k - \chi_{k+1}\big) \\ &= 6 \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, b_k\, b_{k+1}}.\end{aligned}$$

Afin d'estimer quantitativement la petitesse de ces différences positives : $\chi_n = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} > 0$, il est donc approprié d'estimer la grandeur des b_k pour $k \geqslant n$.

Lemme. *Il existe une constante strictement positive telle que :*

$$b_n > \mathsf{const} \cdot \big(2,40\big)^{4n},$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Sans nous imposer d'en reconstituer tous les éléments rigoureux, résumons les arguments principaux de la démonstration. Pour commencer, divisons par n^3 la relation de récurrence linéaire (7) :

$$0 = b_n - \big[34 - \tfrac{51}{n} + \tfrac{27}{n^2} - \tfrac{5}{n^3}\big]\, b_{n-1} + \big[1 - \tfrac{3}{n} + \tfrac{3}{n^2} - \tfrac{1}{n^3}\big]\, b_{n-2}.$$

Alors, puisque les termes en $\frac{1}{n}$, en $\frac{1}{n^2}$ et en $\frac{1}{n^3}$ deviennent négligeables quand n augmente, il est tout à fait vraisemblable que asymptotiquement lorsque n tend vers l'infini, les termes de la suite b_n se comporteront comme les termes de la nouvelle suite $\widetilde{b}_n$ qui satisfait la relation *approximée* de récurrence linéaire à coefficients *constants* :

$$0 = \widetilde{b}_n - 34\, \widetilde{b}_{n-1} + \widetilde{b}_{n-2}.$$

Mais alors, puisque le polynôme caractéristique $x^2 - 34\, x + 1$ de cette dernière relation de récurrence possède les deux racines :

$$17 \pm 12\sqrt{2} = \big(1 \pm \sqrt{2}\big)^4,$$

il est connu (? ?) que les termes $\widetilde{b}_n$ peuvent être représentés *pour tout* n sous la forme générale :

$$\widetilde{b}_n = \mathsf{const} \cdot \left[(1+\sqrt{2})^4\right]^n + \mathsf{const} \cdot \left[(1-\sqrt{2})^4\right]^n.$$

Deux arguments techniques doivent enfin être mis au point afin de garantir que $\widetilde{b}_n$ approxime bel et bien le comportement asymptotique de b_n et afin d'assurer que la constante ci-dessus devant le terme dominant $\left[(1+\sqrt{2})^4\right]^n$ est *non nulle*. Enfin pour conclure, on utilise la minoration triviale $1+\sqrt{2} = 2,41421\cdots > 2,40$. $\square$

Quelques commentaires intercalaires sur ce lemme seront les bienvenus pour montrer toute la complexité syllogistique des mathématiques techniques par rapport au langage universel de la pensée. Ici, dans l'énoncé du lemme, un choix de concrétude a été fait : remplacer $1+\sqrt{2}$ par le nombre décimal $2,40$. Pourquoi cela ? demandera-t-on. À nouveau, cet acte sera essentiellement justifiable *a posteriori*. Disons ici que les informations importantes se réduiront seulement à comparer deux nombres réels x_1 et $x_2 > x_1$ dont la différence $x_2 - x_1$ est environ égale à 11, donc de petites pertes dans les inégalités de majoration telles que :

$$1+\sqrt{2} - 2,40 = 2,414\cdots - 2,400 = 0,014\cdots$$

n'auront aucune incidence sur le résultat final. Autant donc montrer en quelque sorte à l'avance avec $2,40$ que l'on ne visera que des comparaisons numériques très simples. Mais on pourrait aussi à l'inverse préférer conserver l'information exacte $(1+\sqrt{2})^{4n}$ sans s'imaginer qu'il vaut mieux, du point de vue de la vulgarisation des résultats, écrire $(2,40)^{4n}$. On sait bien que tout dans l'écriture littéraire ou philosophique est choix, et en mathématiques, les choix purement techniques accentuent davantage l'exponentialité potentielle des combinaisons possibles du langage.

Van der Poorten ([**30**]) ne donne même pas une ligne de démonstration ou de justification pour un tel lemme. Vraisemblablement, l'énoncé lui semble trop élémentaire par rapport au niveau requis pour aborder la démonstration d'Apéry. Mais tout aussi bien, la démonstration d'un tel énoncé serait techniquement trop difficile à rédiger de manière concise pour mériter d'apparaître dans un article publié par une revue internationale. En vérité, le raisonnement mathématique doit constamment pouvoir autonomiser certains énoncés qui se décomposent sous la forme de suites d'arguments techniques pénibles à lire — et encore plus pénibles à écrire. Ici en tout cas, pour le mathématicien qui connaît la théorie des suites récurrentes linéaires, il ne fait aucun doute, une fois qu'on a divisé par n^3 la relation (7), que l'on est ramené à la suite approximante $\widetilde{b}_n = 34\,\widetilde{b}_{n-1} - \widetilde{b}_{n-2}$ à coefficients constants, pourvu que l'on sache déjà à l'avance que la suite considérée b_n tend vers l'infini avec n. Mais si l'on doit en disséquer tous les arguments techniques et si l'on doit s'atteler à sa table de travail afin d'écrire une démonstration complète, on se trouvera vite confronté à une difficulté qui est omniprésente dans la recherche en mathématique : *comment* rendre élégant ce qui ne l'est manifestement pas ?

Il est clair aussi que le lemme que l'on rencontre ici relève d'une vérité mathématique plus générale. On pourrait très bien pour cette raison chercher à produire un énoncé englobant qui aurait plus de chances d'être rendu élégant. Toutefois, puisque l'énoncé général ne sera en rien utile par la suite — sauf si, de manière purement hypothétique, on était en mesure de l'appliquer dans une démonstration générale de la conjecture toujours ouverte que tous les zêtas impairs $\zeta(2n+1)$ sont irrationnels —, un tel travail serait en l'occurence essentiellement inutile. Donc en définitive, le mathématicien-écrivain se trouve contraint d'en rester là, voire même de choisir comme Van der Poorten de passer sous silence toute démonstration secondaire — qui sera ainsi laissée au lecteur. Et du point de vue de la *rencontre* d'une « réalité » mathématique, on se trouve aussi contraint d'accepter l'existence de ce qu'on appelle parfois oralement — dans une métaphore peu relevée mais tout à fait symptomatique d'un état de fait — le « camboui technique » des démonstrations. Le « chaos technique », ce serait aussi la manière rébarbative dont les calculs mathématiques se combinent par un mécanisme imprévisible comme le ferait un amoncellement de blocs rocheux et de cailloux disparates dans une avalanche montagn'harde. Or les mathématiques contemporaines et futures ne sont rien d'autre que cela, un chaos-camboui de complexités rebutantes qui sont encadrées par quelques grandes directions d'idéalités plus ou moins dominantes. Simplicité et élégance ne concerneraient que les énoncés mathématiques qui correspondent aux corps purs simples dans le tableau des éléments chimiques de Mendeleïev, si une telle analogie avait un sens.

Poursuivons maintenant la fin de la démonstration. Ainsi dans la représentation de la différence entre $\zeta(3)$ et ses approximants rationnels que nous venons d'obtenir :

$$\chi_n = \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = 6\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3\, b_k\, b_{k+1}},$$

comme il est clair que la suite des $b_k \sim \mathsf{const}\big(1+\sqrt{2}\big)^{4n}$ devient croissante pour k assez grand, sachant aussi que la série $\sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{(k+1)^3}$ est uniformément bornée par une constante, on peut *majorer* (en valeur absolue) cette différence par une expression du type :

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| < \frac{\mathsf{const}}{(b_n)^2}. \tag{8}$$

Ici, l'écriture même du membre de droite est constituée de telle sorte que l'on souligne principalement que c'est une puissance seconde de b_n qui apparaît au dénominateur, tandis que la valeur de la constante strictement positive du numérateur importe peu.

À cette occasion, on en vient à redire que l'écriture mathématique doit savoir profiter de l'élasticité du langage pour opérer en subduction relative avec l'information formelle qu'elle choisit de transmettre. Sans que nous ayons eu besoin de signaler expressément une convention explicite, on aura d'ailleurs noté que la notation « const » a désigné jusqu'à présent une constante strictement positive qui dépend du contexte mais dont la valeur exacte peut être oubliée pour plus de simplicité. Ainsi ce symbole « const » possède-t-il toutes les qualités presque magiques d'une quantité indéfinie qui, sans aucunement modifier son être propre, peut absorber toutes les quantités qui sont de même nature qu'elle :

$$\mathsf{const} + \mathsf{const} = \mathsf{const} \qquad \text{et} \qquad \mathsf{const} \cdot \mathsf{const},$$

et qui peut aussi se résorber en elle-même :

$$\tfrac{\mathsf{const}}{\mathsf{const}} = \mathsf{const}$$

sans rien perdre de ce qu'elle est en tant qu'être.

Pourquoi un tel symbole ? Dans les calculs de type « inégalités », après un certain nombre d'étapes, les constantes qui apparaissent sont tellement mélangées les unes aux autres d'une manière imprévisible qu'il est impossible de rendre harmonieuse leur expression courante. Alors plutôt que de recourir à des expressions emboîtées et rebutantes du type :

$$c_1 < \left(\frac{\frac{C_1^2}{4}(n-1)}{K_{10} + \left(\frac{(n-1)9C_1^2}{4}\right)^{\frac{2+\alpha}{2}} K_9} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

mieux vaut admettre un « symbole-poubelle » qui ne conservera pas la mémoire précise de toutes les constantes qui se sont agglutinées en lui à chaque effectuation d'une inégalité, mais qui désignera seulement une quantité essentiellement anodine et inoffensive qu'il est nécessaire de maintenir dans un vague relatif afin de s'épargner des efforts en calculs inutiles. À nouveau, on voit grâce à cette analyse combien le choix du dosage des calculs est au centre de la pensée mathématique.

En revenant maintenant à (8), n'oublions pas que la proposition principale signalait une différence importante entre les a_n et les b_n : en effet, seuls ces derniers sont des nombres *entiers* ($\in \mathbb{Z}$), et à cause de dénominateurs qui sont présents dans les quantités $c_{n,k}$, les quantités a_n sont en fait des nombres *rationnels* ($\in \mathbb{Q}$). Écrivons-les alors sous la forme réduite :

$$a_n = \tfrac{a_n'}{a_n''}, \qquad \text{avec } a_n' \text{ et } a_n' \text{ entiers et premiers entre eux.}$$

Sans démonstration, nous admettrons l'énoncé suivant[7].

Lemme. *Pour tout entier positif* $n \geqslant 1$, *on a :*

$$2\,a_n \in \frac{\mathbb{Z}}{1^3} + \frac{\mathbb{Z}}{2^3} + \cdots + \frac{\mathbb{Z}}{n^3} = \frac{\mathbb{Z}}{[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)]^3}.$$

Par conséquent, le dénominateur a_n'' de a_n jouit de la majoration :

$$a_n'' \leqslant 2\,[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)]^3.$$

Or une conséquence du théorème de Hadamard et de la Vallée-Poussin sur la distribution des nombres premiers[8] est que ce plus grand commun multiple entre les n premiers entiers $1,2,\ldots,n$ est asymptotiquement, lorsque n tend vers l'infini[9], à peine supérieur à e^n, à savoir pour être précis : quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C_\varepsilon > 0$ telle que :

$$\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n) \leqslant C_\varepsilon \cdot e^{n(1+\varepsilon)}.$$

Si l'on majore donc $e = 2,71828\cdots$ disons par $2,80$, on aura l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned} a_n'' &\leqslant 2\,\big[\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)\big]^3 \\ &< \mathsf{const} \cdot \big(2,80^3\big)^n, \end{aligned}$$

valable pour tout entier n, avec une certaine constante qu'il n'est pas utile de connaître. Ainsi pouvons maintenant revenir à l'inégalité (8), la réécrire en précisant bien que dans l'écriture fractionnaire $\frac{a_n'}{a_n'' b_n}$, les deux quantités a_n' et $a_n'' b_n$ sont effectivement des *entiers* :

$$\begin{aligned} \left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\zeta(3) - \frac{a_n'}{a_n'' b_n}\right| &< \frac{\mathsf{const}}{(b_n)^2} \\ &\overset{?}{<} \frac{\mathsf{const}}{(a_n'' b_n)^{1+\mathsf{c}}}, \end{aligned}$$

et nous interroger enfin s'il est possible, afin d'établir l'irrationalité de $\zeta(3)$, de trouver une constante $\mathsf{c} > 0$ strictement positive telle que :

$$(b_n)^2 > (a_n'' b_n)^{1+\mathsf{c}}, \qquad \text{ou de manière équivalente :} \qquad (b_n)^{1-\mathsf{c}} > (a_n'')^{1+\mathsf{c}}.$$

Or d'après la minoration et la majoration connues :

$$b_n > \mathsf{const} \cdot (2,40)^{4n} \qquad \text{et} \qquad a_n'' < \mathsf{const} \cdot (2,80)^{3n}$$

[7] La preuve dans [**30**], p. 198, est-elle erronée ? ?

[8] Le nombre de nombres premiers p inférieurs ou égaux à un entier n donné est asymptotiquement équivalent, lorsque n tend vers l'infini, à $\frac{n}{\log n}$, ou encore (estimation équivalente mais plus fine sur le plan numérique) au logarithme intégral $\int_2^n \frac{1}{\log t}\,dt$

[9] En effet, la plus grande puissance $p^\alpha \leqslant n$ d'un nombre premier qui est inférieur à n satisfait $\alpha = \mathrm{Ent}\big(\frac{\log n}{\log p}\big)$, puisque $p^\alpha = e^{\alpha \log p}$ par définition. Ainsi : $\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n) = \prod_{p \leqslant n} p^{\mathrm{Ent}\left(\frac{\log n}{\log p}\right)} \leqslant \prod_{p \leqslant n} n \sim n^{\frac{n}{\log n}} = e^n$.

de b_n et de a''_n, une telle inégalité sera évidemment satisfaite pourvu qu'elle le soit entre ce minorant et ce majorant, à savoir pourvu qu'il existe un certain $\mathsf{c} > 0$ tel que l'on ait :

$$\big[(2,40)^{4(1-\mathsf{c})}\big]^n > \big[(2,80)^{3(1+\mathsf{c})}\big]^n$$

pour tous les entiers n assez grands. Mais puisque les deux puissances n-èmes de part et d'autre peuvent visiblement être supprimées, et puisqu'un simple calcul numérique montre que :

$$2,40^4 = 33,176\cdots > 21,952\cdots = 2,80^3,$$

il est clair que la petite perturbation $4(1-\mathsf{c})$ de l'exposant 4 de $2,40$ et que la petite perturbation analogue $3(1+\mathsf{c})$ de l'exposant 3 de $2,80$ ne changeront rien au fait que cette dernière inégalité est stricte, pourvu que $\mathsf{c} > 0$ soit assez proche de 0. Ces arguments achèvent donc notre restitution commentée de la démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$, sous réserve bien entendu que la proposition principale ci-dessus aura été démontrée dans la suite.

Examen a posteriori des adéquations relatives. Sans effectuer les deux approximations concrètes ci-dessus $2,40$ et $2,80$ qui étaient un peu *ad hoc*, on peut vérifier rigoureusement que tout revient à constater numériquement que l'inégalité :

$$\big[(1+\sqrt{2})^4\big]^n > e^{3n}$$

est satisfaite, c'est-à-dire après suppression des puissances n-èmes, que l'on a :

$$(1+\sqrt{2})^4 > e^3.$$

> It is useful to notice that very little more than just proving the Main Proposition (p. 52) is required for Apéry's proof. After all, it is quite plain that $a_n/b_n \to \zeta(3)$; the b_n are integers, and the lemma on p. 60 shows that the a_n are "near-integers". Above, we showed that given that the sequences satisfy the recursion (7), the irrationality of $\zeta(3)$ follows because from
>
> $$\log\big[(1+\sqrt{2})^4\big] > 3,$$
>
> we obtain the existence of some $\mathsf{c} > 0$. Thus, as implied in various asides, most of the earlier argument is quite irrelevant. **[30]**, pp. 199–200.

Remarquable renversement spéculatif ! Van der Poorten prétend ici à juste titre que seule compte vraiment la proposition principale *dans laquelle sont introduites les quantités $a_{n,k}$, $b_{n,k}$ et $c_{n,k}$ ainsi que leurs relations de récurrence*. S'il s'agit d'aller droit au but, les deux Assertions 1 et 2 sont donc essentiellement hors de propos. Qui plus est, Van der Poorten réaffirme explicitement un fait métaphysique fondamental qui est intrinsèque à la genèse en acte des mathématiques, et que nous citerons à nouveau, avec insistance, tant il est rare de voir ces choses-là écrites dans un articles contemporain de mathématiques.

> Thus, as implied in various asides, most of the earlier argument is quite irrelevant.

Même dans l'*a posteriori* d'une découverte, tests d'adéquation et examens de nécessités soumettent la pensée mathématique à une forte tension interne. Ces exigences qui sont enracinées dans le penser philosophique relèvent avant tout d'un penser spéculatif et universel que rien néanmoins ne systématise ou ne désigne explicitement dans les pratiques contemporaines des mathématiques. Malgré ce manque de définition des méthodes, on n'en est pas moins toujours spontanément conduit à continuer à « chercher » encore, là où il pourrait sembler que tout ce qui était visé a déjà été « trouvé ». À savoir : chercher à mieux comprendre les causalités techniques et à mieux deviner les raisons profondes. Trop peu analysées par l'épistémologie contemporaine, ces tensions dirigent et orientent quasiment toutes les pratiques de recherche. Mais l'expérience montre, nous dit Van der Poorten, qu'elles conduisent le plus souvent à réviser sans pitié la pertinence (relevance) des arguments. Tant au niveau du sujet créateur que de l'intersubjectivité scientifique, l'adéquation de la démonstration à son objectif reste souvent un Graal inatteignable. On pourrait même démontrer sans difficulté que dans les manuscrits de recherche en mathématiques, la genèse de vérités intuitives ou formelles « consomme » encore plus de « brouillons » que la genèse littéraire.

En tant que question ouverte, l'irrationalité de $\zeta(3)$ s'étend en effet sur plus de deux siècles. Des centaines d'arithméticiens et d'analystes s'y sont essayés, et même dans l'*a posteriori* de la démonstration réussie d'Apéry, la pensée mathématique ne peut s'empêcher d'effacer tout ce qui ne se rapporte pas directement à l'objectif prédéfini. C'est là un trait fondamental, presque compulsif de la pensée mathématique, et qui lui vient sans aucun doute de ses ascendances philosophiques. Dans tout labyrinthe qui a déjà été exploré en partie il subsiste une multiplicité de questions rémanentes, et notamment celles qui poussent à chercher inlassablement la nouveauté démonstrative et l'économie absolue d'arguments. Avant de passer à la démonstration de la proposition principale, donnons quelques exemples élémentaires de preuves très économiques.

Démonstration ultra-simple par Calabi de l'identité $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Commençons par reproduire ce qui peut être considéré comme la preuve « la plus simple » du théorème d'Euler qui donne la valeur de $\zeta(2)$. Elle n'utilise ni produit infini du type :

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

ni théorème subtil d'inversion entre somme infinie et intégrale impropre, ni la formule sommatoire raffinée d'Euler-McLaurin, mais seulement la formule du changement de variables dans une intégrale double. De plus, elle fait voir l'expression de la somme infinie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ comme *compactée* d'emblée sous la forme d'une intégrale, ce qui montre bien la complémentarité et la dualité profonde entre sommations discrètes et intégrations continues.

> We start, for fun, with an ultra-simple proof of Euler's formula $\zeta(2) = \pi^2/6$ discovered a few years ago by E. Calabi. Expanding $(1-x^2y^2)^{-1}$ in a geometric series and integrating termwise gives
>
> $$\int\int_S (1-x^2y^2)^{-1}\,dxdy = 1^{-2}+3^{-2}+5^{-2}+\cdots = \Big(1-\frac{1}{4}\Big)\,\zeta(2),$$
>
> where S is the square $[0,1]\times[0,1]$. But the clever substitution $(x,y) = \big(\frac{\sin u}{cos v}, \frac{\sin v}{cos u}\big)$ has Jacobian precisely $1-x^2y^2$ and maps the open triangle $T = \{u, v > 0,\, u+v < \pi/2\}$ bijectively to the interior of S, so $\int\int_S (1-x^2y^2)^{-1}dxdy = \int\int_T dudv = \frac{\pi^2}{8}$. **[50]**, p. 498.

Ces sept lignes de démonstration appellent plusieurs commentaires. Grand amateur des démonstrations ultra-courtes, Don Zagier a aussi publié (? ?) une démonstration du théorème des nombres premiers :

$$\mathrm{Card}\,\big\{p \in \mathbb{N}\colon\ p \text{ nombre premier } \leqslant n\big\} \sim \frac{\log n}{n}$$

rédigée en trois pages seulement et qui est tout à fait compréhensible lorsqu'on possède une Licence en mathématiques. Dans la rédaction même des sept lignes ci-dessus, Zagier imprime donc aussi problablement sa griffe à la démonstration frappante de Calabi.

Tout d'abord, dans les raisonnements cités, s'exprime une pensée qui guide les actes dans un ordre où rien n'est laissé au hasard, bien qu'aucune causalité motivationnelle ne puisse, eu égard à la contrainte de concision extrême, y apparaître. Quand le lecteur découvre une telle démonstration, il doit donc en accepter la règle du jeu : implicitement, tout est astuce, court-circuit et artifice de guidage dans les calculs. Partir du développement en série géométrique[10] :

$$\int\int_{[0,1]^2} \frac{1}{1-x^2y^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}dx \int_0^1 y^{2n}dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}\,\frac{1}{2n+1}$$

permet en effet d'arriver par une voie apparemment détournée à la valeur de $\zeta(2)$ grâce à l'observation tout à fait élémentaire et bien connue que :

$$\zeta(2) = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\frac{1}{(2n+1)^2}+\cdots = \frac{1}{2^2}\,\zeta(2)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

[10] On se convaincra aisément que sommation et intégration double sont effectivement interchangeables ici.

Mais le plus surprenant, c'est bien entendu le changement trigonométrique-rationnel de variables qui permet de ramener le calcul de l'intégrale $\int\int_{[0,1]^2}(1-x^2y^2)^{-1}$ à une intégrale — *sur un triangle* ! — de la fonction constante égale à 1. Un tel argument est spectaculaire, et Calabi ne l'a probablement trouvé que parce qu'il cherchait une démonstration aussi élémentaire et aussi courte que possible du théorème d'Euler. Ces raccourcis-là sont imprévisibles, mais à un niveau supérieur, on ne peut s'empêcher de penser qu'ils témoignent d'une immanence relationnelle que nous ne percevons qu'imparfaitement.

En résumé, la genèse de démonstrations ultra-courtes confirme un fait métaphysique central au sujet des mathématiques : dans le labyrinthe infini-dimensionnel des relations potentielles ou actuelles entre expressions algébriques, différentielles ou intégrales, il est quasiment impossible de sélectionner d'emblée les actes de recherche qui dirigent vers l'économie adéquate des arguments et des calculs. C'est pourquoi dynamique et dialectique de la pensée restent les ressources principales dans toute entreprise de recherche.

Interlude : spéculations sur l'identité $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$. Analysons maintenant un exemple d'artifice élégant de calcul qui est sensiblement plus simple. Il est bien connu qu'aucune méthode basée sur la connaissance des primitives de fonctions élémentaires ne permet d'effectuer le calcul de l'intégrale définie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$. La méthode orthodoxe ([**18**]) pour évaluer cette intégrale gaussienne consiste à en calculer le *carré*. *A posteriori*, il n'y a rien d'étonnant à ce que ce soit le carré de cette intégrale qui se prête le mieux à un calcul explicite, pourvu que l'on sache *à l'avance* que cette intégrale vaut $\sqrt{\pi}$. Mais *a priori*, il en va tout autrement : rien ne permet de savoir à l'avance qu'une intégrale donnée fera intervenir telles et telles quantités transcendantes reliées entre elles à travers telle ou telle combinaison algébrique. Le mathématicien qui cherche à évaluer une nouvelle intégrale inconnue peut donc difficilement perdre son temps à tester de manière systématique un très grand nombre de combinaisons algébriques possibles, en sachant pertinemment qu'au plus une seule d'entre elles pourra convenir, et peut-être même *aucune*[11]. Il y a donc en quelque sorte un *tour de passe-passe* dans le geste qui consiste à annoncer de but en blanc : « calculons plutôt le carré de l'intégrale inconnue ». Le problème principal en effet, c'est que l'acquisition de connaissance mathématique est un processus en quelque sorte *irréversible*, au sens positif du terme où l'atteinte d'une vérité recherchée est irréversiblement créatrice d'un ordre rationnel local, tandis

[11] Néanmoins, l'on peut déléguer une telle tâche à des ordinateurs convenablement programmés, ? ?.

que la confirmation d'une vérité déjà connue est une activité secondaire qui demande beaucoup moins d'invention.

> According to a dictum of Littlewood any identity, once verified, is trivial. [**30**], p. 200.

On sait bien pour l'intégrale gaussienne que l'élévation au carré de $I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ suivie d'un découplage $I \cdot I$ du carré I^2 et d'une différenciation dyadique des notations :

$$\begin{aligned} I^2 &= \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\bigg) \cdot \bigg(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dx\bigg) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy \end{aligned}$$

permet de ramener le calcul de I^2 à une intégrale *bidimensionnelle* dont l'intégrande $e^{-x^2-y^2}$ est invariant par toute rotation centrée à l'origine. Par conséquent, ce nouvel intégrande s'identifie en coordonnées polaires (r, θ) à la fonction purement radiale e^{-r^2}. Il suffit alors de connaître le déterminant jacobien de la transformation entre coordonnées polaires et coordonnées cartésiennes :

$$(r,\,\theta) \longmapsto (x, y) := \big(r\cos\theta,\; r\sin\theta\big),$$

c'est-à-dire de savoir que $dx\,dy = r\,dr\,d\theta$, pour ramener le calcul de cette intégrale double à une intégrale double qui ne fait plus intervenir que des fonctions dont les primitives existent au sens élémentaire du terme :

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\,d\theta \\ &= \bigg(\int_0^{2\pi} d\theta\bigg) \cdot \bigg(\int_0^{\infty} e^{-r^2}\,r\,dr\bigg) \\ &= \big[\theta\big]_0^{2\pi}\Big[-\tfrac{1}{2}\,e^{-r^2}\Big]_0^{\infty} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

puisqu'il est tout à fait clair[12] que grâce au facteur r, une primitive élémentaire de $r\,e^{-r^2}$ est tout simplement $\frac{1}{2}e^{-r^2}$. Mais peut-on prétendre que cette preuve est absolument simple, puisqu'elle considère comme connu le calcul des intégrales doubles infinies ?

> Even a straight-A high-school senior can't understand some of the above equations unless he is a true math enthusiast for his age. At least in this sense, this method is not so simple. Is there any way so simple that earnest high-school students can understand it ? [**18**], p. 39.

Certes, la recherche de démonstrations économiques relève plus généralement d'un problème que la théorie de la démonstration explore depuis

[12] Notons rétrospectivement qu'il manquait cruellement un facteur x devant e^{-x^2}.

l'émergence d'une métamathématique hilbertienne consacrée à l'étude de la cohérence, de la complétude et de la catégoricité des systèmes formels. Certes, on peut aussi rechercher une autre méthode qui n'utilise que des primitives de fonctions élémentaires[13]. Mais d'un point de vue philosophique général, ce qui nous intéresse le plus ici, c'est de montrer sur ces exemples simples que le questionnement micro-spéculatif pur dirige le réel mathématique à la manière dont la contextualisation expérimentale crée, en mécanique quantique, la réalité qui est perçue (reçue) par l'appareil de mesure.

Calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ avec des triangles. Dans un article [**28**] que Mikael Passare a fait paraître récemment à l'*American Mathematical Monthly*, ? ?.

Identités algébriques entre factorielles. Venons-en enfin à la partie vraiment nouvelle de la démonstration d'Apéry, à savoir la proposition principale p. 52. Il est surprenant de constater qu'elle est beaucoup moins élémentaire qu'il n'y paraît.

> According to a dictum of Littlewood any identity, once verified, is trivial. Surely the fact that the sequences a_n and b_n satisfy the linear recurrence relations (7) is very nearly a counterexample. [**30**], p. 200.

Pour commencer, il sera commode de donner un nom aux éléments qui sont soumis à la sommation dans b_n et dans a_n :

$$b_{n,k}:=\binom{n}{k}^2 \qquad \text{et :} \qquad a_{n,k}:=b_{n,k}\,c_{n,k},$$

de telle sorte que l'on peut écrire :

$$b_n=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k} \qquad \text{et :} \qquad a_n=\sum_{k=0}^{n}b_{n,k}\,c_{n,k}.$$

Il s'agit là d'un acte de nomination des éléments secondaires qui aura son utilité propre mais qui n'éclaire pour l'instant en rien la question. Réécrivons alors avec ces notations la relation de récurrence (7) dont on doit établir qu'elle est satisfaite par la suite $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$, mais en observant au préalable par un calcul direct que :

$$34\,(n+1)^3-51\,(n+1)^2+27\,(n+1)-5=34\,n^3+51\,n^2+27\,n+5,$$

[13] Par exemple ([**18**]), on peut proposer alternativement de calculer de deux manières différentes l'intégrale $J:=\int_0^\infty\int_0^\infty x\,e^{-x^2(y^2+1)}\,dxdy$, à savoir premièrement en intégrant d'abord par rapport à x : $J=\int_0^\infty\frac{1}{2}\frac{1}{y^2+1}\,dy=\frac{1}{2}\big[\arctan(y)\big]_0^\infty=\frac{\pi}{4}$, et ensuite deuxièmement en posant $t=xy$, d'où $xdxdy=dtdx$ et donc : $J=\big(\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt\big)\cdot\big(\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx\big)=\big(\frac{I}{2}\big)^2$, ce qui redonne $I=\sqrt{\pi}$ en comparant ces deux expressions de J.

afin de faire voir, en augmentant n d'une unité, ladite relation qui est satisfaite entre b_{n+1}, b_n et b_{n-1}, ce qui nous donne :

$$0 \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \big\{(n+1)^3\, b_{n+1,k} - \big[34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5\big]\, b_{n,k} + n^3\, b_{n-1,k}\big\}.$$

Voilà qui est bien facile, mais que faire maintenant ?

> Neither Cohen nor I had been able to prove the main proposition in the intervening 2 months. After a few days of fruitless effort the specific problem was mentioned to Don Zagier (Bonn), and with irritating speed he showed that indeed the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfies the recurrence. **[30]**, p. 200.

A posteriori, le « truc » de la démonstration, c'est d'introduire les nouvelles quantités :

$$B_{n,k} := 4\,(2n+1)\big[k(2k+1) - (2n+1)^2\big]\, \tbinom{n}{k}^2 \tbinom{n+k}{k}^2,$$

et d'observer qu'elles satisfont les relations *non triviales et non évidentes* :

$$\boxed{\begin{aligned} B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3\, \overbrace{\tbinom{n+1}{k}^2 \tbinom{n+1+k}{k}^2}^{b_{n+1,k}} - \big[34\,n^3 + 51\,n^2 + 27\,n + 5\big]\cdot \\ \cdot \underbrace{\tbinom{n}{k}^2 \tbinom{n+k}{k}^2}_{b_{n,k}} + n^3\, \underbrace{\tbinom{n-1}{k}^2 \tbinom{n-1+k}{k}^2}_{b_{n-1,k}} \end{aligned}}$$

> [...] and, *O mirabile dictu*, the sequence $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ does indeed satisfy the recurrence (7) by virtue of the method of *creative telescoping*. **[30]**, p. 200.

Fût-il armé d'une pensée spéculative aguerrie à la transmission d'information irréversible, le lecteur ne manquera pas néanmoins d'être désarçonné. Par quelles voies Zagier a-t-il donc pu *deviner* que les quantités présentes sous le signe $\sum_{k=0}^{n+1}$ pouvaient être réalisées comme différences de deux termes qui jouiraient de la propriété d'annulation téléscopique[14] :

$$0 = \sum_{k=0}^{n+1} B_{n,k} - B_{n,k-1} = B_{n,n+1} - B_{n,-1} = 0 - 0 = 0\,?$$

La question génétique est d'autant plus gênante que la vérification de l'identité satisfaite par la différence $B_{n,k} - B_{n-1,k}$ représente un calcul substantiel. Voyons néanmoins en quelques lignes comment on pourrait y parvenir, sans avoir aucune idée de la manière dont une telle identité pourrait s'inscrire dans une théorie générale.

Évidemment, il faut commencer par développer tous les coefficients binomiaux présents sous la forme de quotients de factorielles, y compris pour

---

[14] On a bien entendu ici $B_{n,n+1} = 0$ et $B_{n,1} = 0$, grâce à la convention standard que les coefficients binomiaux $\binom{p}{q}$ doivent être posés égaux à 0 lorsque $q \leqslant -1$ et lorsque $q \geqslant p+1$.

les deux termes $B_{n,k}$ et $B_{n,k-1}$. Le résultat de cette expansion s'étend alors sur plusieurs lignes, le tout pivotant autour d'une égalité qui reste à vérifier :

$$\begin{aligned}
&4\,(2n+1)\big[k(2k+1)-(2n+1)^2\big]\,\frac{n!^2}{k!^2\,(n-k)!^2}\;\frac{(n+k)!^2}{k!^2\,n!^2}-\\
&-\;4(2n+1)\big[(k-1)(2k-1)-(2n+1)^2\big]\,\frac{n!^2}{(k-1)!^2\,(n-k+1)!^2}\\
\overset{?}{=}\quad&(n+1)^3\,\frac{(n+1)!^2}{k!^2\,(n-k+1)!^2}\;\frac{(n+k+1)!^2}{k!^2\,(n+1)!^2}-\\
&-\;\big[34\,n^3+52\,n^2+27\,n+5\big]\,\frac{n!^2}{k!^2\,(n-k)!^2}\;\frac{(n+k)!^2}{k!^2\,n!^2}+\\
&+n^3\,\frac{(n-1)!^2}{k!^2\,(n-k-1)!^2}\;\frac{(n+k-1)!^2}{k!^2\,(n-1)!^2}.
\end{aligned}$$

Si nous multiplions alors les deux côtés de l'égalité à établir tout d'abord par $k!^2\,k!^2\,(n-k+1)!^2$ et ensuite par $\frac{1}{(n+k-1)!^2}$ afin de faire disparaître toutes les factorielles ainsi que tous les dénominateurs, l'identité à établir revient à vérifier que l'on a bien :

$$\begin{aligned}
&4\,(2n+1)\big[k(2k+1)-(2n+1)^2\big]\,(n-k+1)^2\,(n+k)^2-\\
&-\;4\,(2n+1)\,\big[(k-1)(2k-1)-(2n+1)^2\big]\,k^2\,k^2\\
\overset{?}{=}\quad&(n+1)^3\,(n+k+1)^2\,(n+k)^2-\\
&-\;\big[34\,n^3+51\,n^2+27\,n+5\big]\,(n-k+1)^2\,(n+k)^2+\\
&+n^3\,(n-k+1)^2\,(n-k)^2.
\end{aligned}$$

C'est une identité entre polynômes de degré *sept* en les deux variables (k,n). Pour l'établir, « il suffit » de développer tous les produits et de vérifier ensuite « simplement » que la somme de tous les monômes obtenus ainsi à gauche du signe $\overset{?}{=}$ coïncide avec la somme de tous les monômes qui se situent à droite du signe $\overset{?}{=}$. Cette opération est essentiellement aussi directe que de vérifier qu'un certain nombre donné d'une vingtaine de chiffres est le produit de deux nombres premiers dont on a la connaissance. Il n'en reste pas moins que l'effectuation *effective* de tels calculs de vérification exige tout de même une grande dextérité technique et qu'elle pourrait prendre un certain temps au cas où l'on commettrait au passage quelques petites erreurs dans les étapes intermédiaires. En effet, le développement complet, disons de l'avant dernière ligne est le suivant :

$$\begin{aligned}
&5\,n^2+37\,n^3+163\,n^5+110\,n^4+5\,k^4-10\,k^3+34\,n^7+119\,n^6-122\,n^3k^2-102\,n^2k^3-\\
&-13\,n^2k^2+27\,nk^4-54\,nk^3+156\,n^3k+64\,n^2k+170\,n^4k-68\,n^5k^2+68\,n^5k-\\
&-170\,n^4k^2+51\,k^4n^2+34\,n^3k^4-68\,n^3k^3+5\,k^2+17\,nk^2+10\,nk
\end{aligned}$$

et le développement de chacune des quatre autres lignes est d'une longueur comparable.

Il y a donc en définitive des *étages inférieurs* du calcul qui s'avèrent être d'une complexité symbolique substantielle et dans lesquels les coefficients entiers, les monômes, et les polynômes se combinent de manière essentiellement imprévisible lorsque les structures générales font défaut. De nos jours, il est très facile de confier à un logiciel de calcul formel la vérification de la dernière identité, après simplification des factorielles. Sommer cinq polynômes de degré sept en deux variables (k, n) qui incorporent chacun plus de vingt-cinq monômes, c'est là en effet une tâche essentiellement ingrate pour le lecteur de la démonstration d'Apéry. Néanmoins, il ne faut pas se cacher que c'est peut-être là, dans ces calculs excentriques et presque infaisables que se cachent les vraies causalités adéquates. On se trouve alors confronté de nos jours à un risque assez menaçant pour le développement futur des mathématiques : *trop confier les calculs aux machines prive l'esprit, le dépossède même du questionnement génétique* in situ.

Bilan intermédiaire. Ces analyses spéculatives ont redémontré quelques vérités qui sont inhérentes à la pratique effective des mathématiques. Tout d'abord, lecture et relecture d'un texte mathématique publié (comme celui de Van der Poorten) ne donneront pas forcément accès à la vraie pensée qui gouverne la genèse d'un théorème mathématique. Car la vraie pensée, en tant qu'elle est en permanence sollicitée par des exigences métaphysiques quant à l'ouverture coprésente des causalités mathématiques est d'une complexité extraordinairement plus grande que ce qui est transmis dans le texte publié. Alors dans la pratique et dans la communication entre mathématiciens, on en est toujours réduit à tenter de reconstituer les traces effacées d'un parcours dialectique. Même si l'on réécrit une démonstration à partir d'une annonce ou d'une publication, on n'aura essentiellement rien compris en profondeur tant que l'on n'aura pas cherché à reconstituer le *tissu de questions en recherche d'adéquation* qui gravitent autour des concepts. Il faut alors restaurer les questions abstraites de la gouvernance métaphysique afin de réarticuler de manière globale la perception que l'on a d'un champ de recherche. Il faut effectuer seul en sa propre conscience le travail nécessaire d'élévation panoramique. C'est un paradoxe : la mathématique qui se veut une science de progrès et pour laquelle la possibilité d'une architecture cumulative et hiérarchisée des connaissances ne fait aucun doute en est réduite à *oublier*.

Chapitre : Génétique mathématique technique : un exemple

Argument. En étudiant un problème de géométrie algébrique où la question à résoudre se ramène à travailler avec des sommes finies, nous allons maintenant montrer comment la genèse des idées techniques locales se heurte au *mystère omniprésent de la non-connaissance du geste à effectuer*. Bien que nous puissions en principe tout à fait nous dispenser de signaler les motivations originales de ce problème, nous souhaitons néanmoins par souci de complétude effectuer un rappel adapté qui pourra éventuellement être sauté en première lecture[1], puisque tout se ramène à engendrer un calcul formel effectif général à partir d'un examen de cas « simples ». L'illustration génétique proprement dite débutera donc un peu plus loin ci-dessous, à savoir p. 77.

Origine du problème. Soit $X^2 \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ une *surface projective algébrique* dans l'espace projectif complexe de dimension 3 qui est définie comme le lieu des zéros d'un certain polynôme de degré $d \geqslant 1$ et qui est géométriquement lisse. Au-dessus de cette surface, on construit un certain *fibré de jets* $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ qui dépend d'un premier entier $\kappa \geqslant 1$, l'*ordre des jets*, et d'un deuxième entier $m \geqslant 1$, le *poids* commun des vecteurs d'une fibre quelconque. Grâce au théorème dit *de Riemann-Roch-Hirzebruch*, on calcule la *caractéristique d'Euler* asymptotique de ce fibré et elle s'exprime en fonction des classes de Chern c_1 et c_2 du fibré cotangent à X. La seule chose qui compte pour la suite, c'est que le coefficient de c_2 dans cette caractéristique d'Euler asymptotique est donné par la formule purement numérique :

$$\mathsf{coeff}_{\mathsf{c}_2}\big[\mathsf{Car\text{-}Eul}(\mathscr{E}_{\kappa,m})\big] = \frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2\,(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg).$$

Ici, entre parenthèses, on reconnaît bien sûr les sommes partielles de la série d'Euler $\zeta(2) = \sum_{\lambda=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda^2}$. Par ailleurs, le coefficient devant la parenthèse dépend explicitement de m et de κ.

Or on démontre ([**25**]) que ce fibré $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ peut essentiellement être représenté comme une certaine somme directe de fibrés dit *de Schur* qui sont indécomposables en sommes directes de fibrés de dimension inférieure, et dont on connaît la structure. En particulier, il existe des formules, valables

[1] *Voir* [**25**] pour plus de détails.

en toute dimension, qui donnent la caractéristique d'Euler de ces fibrés indécomposables. Par souci de cohérence entre toutes les formules de caractéristique, se pose alors la question de vérifier par le calcul que la somme des caractéristiques d'Euler de tous les fibrés en lesquels se décompose le gros fibré de jets $\mathscr{E}_{\kappa,m}$ redonne bien sa propre caractéristique d'Euler.

Sans rentrer plus avant dans les détails, disons seulement que nous avons affaire ici à un objet qui, à cause de la théorie des représentations, se décompose en somme directe :

$$\mathsf{Objet} = \mathsf{Objet}_1 \oplus \mathsf{Objet}_2 \oplus \cdots \oplus \mathsf{Objet}_N$$

d'objets plus simples. Puisque la caractéristique d'Euler possède la propriété fondamentale d'*additivité* par rapport à de telles décompositions, on doit donc en principe avoir :

$$\mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}\big) = \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_1\big) + \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_2\big) + \cdots + \mathsf{Car\text{-}Eul}\big(\mathsf{Objet}_N\big),$$

et aussi bien entendu, la même propriété pour le coefficient de c_2 qui nous intéresse dans cette caractéristique. Cette propriété d'additivité qui provient de la théorie des fibrés holomorphes et de la théorie des représentations va donc se *réincarner dans le domaine archaïque des nombres entiers* et fournir une *formule nouvelle et purement numérique* qu'il va falloir démontrer indépendamment par souci de cohérence. Le problème, c'est qu'une telle vérification de cohérence va exiger beaucoup plus de travail démonstratif que de vérifier une addition toute simple telle que par exemple $\frac{N(N+1)}{2} = 1 + 2 + \cdots + N$.

C'est là un des traits essentiels que les mathématiques partagent avec l'évolution des êtres animés sur le sol terrestre, c'est-à-dire les découvertes imprévisibles de réalités relationnelles nouvelles dont l'existence en acte est pour ainsi dire *provoquée* par les chemins que l'on emprunte ou par les questions que l'on cherche à résoudre. Et à un niveau beaucoup plus abstrait, toutes les identités calculatoires finies que produisent l'algèbre, la théorie des nombres et la combinatoire sont imprégnées d'un *contexte problématique déclencheur* qui les *détermine*. L'antinomie entre une réalité mathématique qui serait préexistente *a priori* et des constructions effectives qui seraient ontologiquement validables seulement dans l'*a posteriori* des démonstrations rigoureuses n'a un sens aporétique que parce que l'entendement, dans son accès aux relations entre objets mathématiques, est contraint par une spatio-temporalité propre. À une théorie de la relativité pour la cinématique des corps répond peut-être un relativisme des réalités mathématiques synthétisées par rapport aux conjectures, projets et questions que l'on se propose d'étudier. En effet, très fréquemment, un énoncé conjectural donné propose un objectif qualitatif ou quantitatif précis qui s'avère, au fur et à mesure que les explorations progressent, ne produire qu'une petite fraction de la réalité impliquée.

Les formules qui fournissent les caractéristiques d'Euler pour les fibrés indécomposables s'articulent comme suit. Introduisons κ variables réelles à indices simples $y_1, y_2, \dots, y_\kappa$ et $\frac{\kappa(\kappa-1)}{2}$ variables réelles à indices doubles et ordonnés de manière strictement croissante $y_{1,2}, \dots, y_{1,\kappa}, y_{2,3}, \dots\dots, y_{\kappa-1,\kappa}$. On supposera que ces variables sont positives : $y_\lambda \geqslant 0$ et $y_{\lambda_1,\lambda_2} \geqslant 0$ pour tous $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa$ et tous $1 \leqslant \lambda_1 < \lambda_2 \leqslant \kappa$. Dans le quadrant réel positif $\mathbb{R}^{2\kappa-1}_{\geqslant 0}$ de dimension $(2\kappa-1)$, on considère alors les $(\kappa-1)$ simplexes-hyperplans $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_\lambda, \dots, \Delta_{\kappa-1}$ dont les $(\kappa-1)$ équations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\Delta_1: \quad & 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_2 + y_1 + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2}, \\
\Delta_2: \quad & 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_2 + y_{2,\kappa} + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_\lambda: \quad & 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + \cdots + y_\lambda + y_{\lambda,\kappa} + y_{\lambda-1,\kappa} + \cdots + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + \cdots + y_{1,2}, \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Delta_{\kappa-1}: \quad & 1 = y_\kappa + y_{\kappa-1} + y_{\kappa-1,\kappa} + \cdots + y_{1,\kappa} + y_{1,\kappa-1} + y_{1,2},
\end{aligned}$$

où chaque ligne contient exactement $(2\kappa-1)$ lettres y. Ensuite, on introduit les multiplicités avec lesquelles apparaissent les fibrés indécomposables, c'est-à-dire le nombre de fois qu'un objet Objet_k comme ci-dessus apparaît avec répétition, et ces multiplicités s'avèrent être identifiables à des différences entre deux coefficients binomiaux (excepté dans les deux premiers cas) :

$$N_\kappa^1 := 1, \quad N_\kappa^2 := \kappa - 2, \quad N_\kappa^{\kappa-1} = \frac{(2\kappa-5)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\kappa-2)} - \frac{(2\kappa-5)\cdots\kappa}{1\cdots(\kappa-4)},$$

c'est-à-dire en toute généralité pour tout λ tel que $1 \leqslant \lambda \leqslant \kappa-1$:

$$\begin{aligned}
N_\kappa^\lambda &:= \frac{(\kappa+\lambda-4)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\lambda-1)} - \frac{(\kappa+\lambda-4)\cdots\kappa}{1\cdots(\lambda-3)} \\
&= \binom{\kappa-3+\lambda-1}{\lambda-1} - \binom{\kappa-3+\lambda-3}{\lambda-3},
\end{aligned}$$

avec la convention habituelle et naturelle que tout coefficient binomial $\binom{b}{a}$ pour lequel $a \leqslant -1$ ou $a \geqslant b+1$ est considéré comme nul. Nous admettrons alors que lorsqu'on l'applique au coefficient de c_2 pour la caractéristique d'Euler, la formule d'additivité donne, en terme de ces multiplicités combinatoires N_κ^λ, l'identité suivante qui doit être vérifiée *numériquement* par souci de cohérence (d'où le signe $\overset{?}{=}$) :

$$\mathsf{coeff}_{\mathsf{c}_2}\big[\mathsf{Car\text{-}Eul}(\mathscr{E}_{\kappa,m})\big] = \frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg) \overset{?}{=}$$

(1)

$$\overset{?}{=} \frac{m^{2\kappa+1}}{3!} \bigg\{ N_\kappa^1 \cdot \frac{1}{3\cdot 4\cdots(\kappa+1)} \cdot \frac{1}{1\cdot 2\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_1} \left(\frac{y_1}{1} + \frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots + \frac{y_\kappa}{\kappa} \right)^3 +$$

$$+ N_\kappa^2 \cdot \frac{1}{3\cdot(\kappa+1)(\kappa+2)} \cdot \frac{1}{2\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_2} \left(\frac{y_2}{2} + \frac{y_3}{3} + \cdots + \frac{y_\kappa}{\kappa} \right)^3 +$$

$$+ \cdots +$$

$$N_\kappa^\lambda \cdot \frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)} \cdot \frac{1}{\lambda\cdots\kappa} \cdot \int_{\Delta_\lambda} \left(\frac{y_\lambda}{\lambda} + \cdots + \frac{y_\kappa}{\kappa} \right)^3$$

$$+ \cdots +$$

$$N_\kappa^{\kappa-1} \cdot \frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(2\kappa-1)} \cdot \frac{1}{(\kappa-1)\kappa} \cdot \int_{\Delta_{\kappa-1}} \left(\frac{y_{\kappa-1}}{\kappa-1} + \frac{y_\kappa}{\kappa} \right)^3 \bigg\}.$$

Ce n'est pas simple, mais nous allons simplifier toutes les intégrales qui apparaissent dans cette longue formule afin de nous ramener à une identité de pure arithmétique élémentaire entre nombres rationnels. Ici, les cubes de sommes de fraction $\frac{y_\mu}{\mu}$ qu'il faut intégrer sur les simplexes-hyperplans Δ_λ peuvent être développés grâce à la formule du multinôme de Newton, que nous écrirons comme suit :

$$\big(Y_\lambda + \cdots + Y_\kappa\big)^3 = \sum_{\substack{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3 \\ q_\lambda\geqslant 0,\,\dots,\,q_\kappa\geqslant 0}} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!} \big(Y_\lambda\big)^{q_\lambda} \cdots \big(Y_\kappa\big)^{q_\kappa},$$

où les q_μ pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \kappa$ sont des entiers positifs. Ainsi quand on intègre ces sommes finies, on est conduit à devoir calculer des intégrales du type :

$$(2) \qquad \text{Intégrale}_\lambda := \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \int_{\Delta_\lambda} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!} \frac{(y_\lambda)^{q_\lambda}}{\lambda^{q_\lambda}} \cdots \frac{(y_\kappa)^{q_\kappa}}{\kappa^{q_\kappa}},$$

où l'on voit apparaître, dans les dénominateurs, des puissances q_μ-èmes des entiers μ, pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \kappa$. Or ces intégrales peuvent être calculées très simplement grâce à un lemme élémentaire (énoncé ci-dessous) qui généralise l'intégration basique suivante :

$$\int_{y_1+y_2} y_1^{j_1} y_2^{j_2} dy_2 = \int_0^1 (1-y_2)^{j_1}\, y_2^{j_2}\, dy_2 = \cdots = j_1! \int_0^1 \frac{y^{j_2+j_1}}{(j_2+1)\cdots(j_2+j_1)}\, dy_2 = \\ = \frac{j_1!\, j_2!}{(j_1+j_2+1)!},$$

et qui se démontre par récurrence en effectuant des intégrations par parties itérées. Quelques commentaires s'imposent pour présenter ce lemme.

Dans la technique mathématique interne, la généralité est toujours relative et dynamique. Elle s'articule par rapport à un problème *local* d'embrassement formel et elle exprime une synthèse formulaire *locale*. Elle entretient aussi des liens effacés de justification avec tous les calculs particuliers et inductifs effectués en sous-main afin d'en garantir le bien-fondé, la correction et la rigueur.

Par ailleurs, l'expérience de la recherche et la pratique effective de certains calculs créent des certitudes locales fiables quant à certains champs de la mathématique élémentaire, notamment l'arithmétique élémentaire ou l'algèbre commutative sur des anneaux classiques. En effet, dans de tels champs, la véracité de certains énoncés mathématiques s'enracine dans un socle absolu de cohérence. Aussi la portée sceptique de la croix empiriste du problème de l'induction, à savoir l'éventualité perpétuelle de contre-exemplification au général inductif, doit-elle être rigoureusement limitée aux champs mathématiques qui sont véritablement imprégnés d'ouverture et d'ignorance. Il serait en effet absurde de croire que la croix empiriste de l'induction puisse porter sur les domaines établis dans lesquels les certitudes mathématiques fondamentales sont acquises et régulièrement confirmées. Aussi énoncerons-nous sans démonstration le lemme suivant en affirmant qu'il découle sans difficulté d'une généralisation très accessible du calcul particulier que nous venons de détailler à l'instant. Ce lemme doit donc être lu comme une évidence qui déploie tout ce qu'il est nécessaire de savoir afin de poursuivre les calculs dans lesquels interviennent ces types d'intégrales, notamment dans les calculs que nous venons d'interrompre pour répondre aux exigences de commentaire. Par ailleurs, dans l'énonciation même de ce lemme, il est important, *par un choix appropié de notations*, de *respecter l'insertion locale* de cette *pensée en généralité* qui vient se greffer de manière quelque peu externe au calcul en cours.

Lemme. *Pour tout $p \geqslant 2$ et pour tous exposants entiers quelconques $j_1, j_2, \dots, j_p \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\int_{\substack{y_1+y_2+\cdots+y_p=1 \\ y_1\geqslant 0,\ y_2\geqslant 0,\ \cdots\ y_p\geqslant 0}} y_1^{j_1} y_2^{j_2} \cdots y_p^{j_p}\, dy_2 \cdots dy_p = \frac{j_1!\ j_2!\ \cdots\ j_p!}{(j_1+j_2+\cdots+j_p+p-1)!}. \qquad \square$$

Seule une nouvelle lettre p est introduite. Dans sa rhétorique, l'énoncé souligne le caractère quelconque des exposants. Les variables y ordonnées ici linéairement $y_1, y_2, \dots, y_p$ et sans lacunes doivent d'ores et déjà être envisagées comme remplacées mentalement pour application désirée par les $(2\kappa-1)$ variables y_λ et y_{λ_1,λ_2} *avec lacunes* qui interviennent dans l'équation d'un simplexe-hyperplan quelconque Δ_λ. Aussi pouvons-nous maintenant calculer cette somme d'intégrales (2) que nous avions laissée en suspens, et si l'on veut respecter absolument la continuité de la pensée, il nous faut extraire de l'intégrale à calculer tous les coefficients numériques qu'elle incorpore, afin de faire apparaître une intégrale à calculer qui est exactement du type considéré par le lemme :

$$\begin{aligned}
\text{Intégrale}_\lambda &= \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \frac{3!}{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}\cdot\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}\cdot\int_{y_\kappa+\cdots+y_\lambda+y_{\lambda,\kappa}+\cdots+y_{1,2}=1} (y_\lambda)^{q_\lambda}\cdots(y_\kappa)^{q_\kappa} \\
&= \sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3} \frac{3!}{\underline{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}_\circ}\cdot\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}\cdot\frac{\underline{q_\lambda!\cdots q_\kappa!}_\circ}{(q_\lambda+\cdots+q_\kappa+(2\kappa-1)-1)!} \\
&= \frac{3!}{(2\kappa+1)!}\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}.
\end{aligned}$$

Dans les calculs qui doivent alors se poursuivre spontanément, on observe que le produit des factorielles des q_μ pour $\lambda \leqslant \mu \leqslant \kappa$ se neutralise et que la longue factorielle au dénominateur qui semblait dépendre des entiers $q_\lambda, \dots, q_\kappa$, en est en fait indépendante, puisque seule apparaît leur somme $q_\lambda + \cdots + q_\kappa$, toujours égale à 3. Ainsi peut-on sortir cette factorielle $(3 + (2\kappa - 1) - 1)! = (2\kappa + 1)!$ de la sommation et nous voyons apparaître des sommes du type :

$$\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}}\cdots\frac{1}{\kappa^{q_\kappa}}$$

qui, incontestablement, ont des liens de parenté formelle avec la somme eulérienne $\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}$, tout en étant apparamment beaucoup plus complexes : *genèse omnipossible aux formes imprévisibles*.

Identité à démontrer. Si nous revenons maintenant au long membre de droite de l'équation (1) à vérifier, et que nous le réécrivons avec la notation $\sum_{\lambda=1}^{\kappa}$ afin d'en contracter l'extension, tout revient donc à établir l'identité :

$$\begin{aligned}
\frac{m^{2\kappa+1}}{(\kappa!)^2\,(2\kappa+1)!}\bigg(\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\bigg) \overset{?}{=} \frac{m^{2\kappa+1}}{\underline{3!}_\circ}\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} N_\kappa^\lambda\cdot\frac{1}{3\cdots(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot \\
\cdot\frac{1}{\lambda\cdots\kappa}\cdot\frac{\underline{3!}_\circ}{(2\kappa+1)!}.
\end{aligned}$$

Mais avant de poursuivre, un toilettage est encore possible. En effet, de part et d'autre du symbole $\overset{?}{=}$, on peut visiblement simplifier la puissance commune du poids $m^{2\kappa+1}$, on peut aussi simplifier la factorielle commune $(2\kappa + 1)!$ au dénominateur, et l'on peut aussi multiplier les deux côtés par la factorielle au carré $(\kappa!)^2$ pour la faire disparaître du membre de gauche, tandis que dans le membre de droite, on peut enfin accoupler naturellement cette factorielle aux inverses de produits d'entiers qui lui sont apparentés, mais en découplant au préalable cette puissance seconde[2] :

$$\frac{\kappa!}{3\cdots\kappa(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\frac{\kappa!}{\lambda\cdots\kappa}=2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)},$$

ce qui produit bien entendu une simplification évidente et spontanée. Ainsi en définitive, l'identité à démontrer s'écrit-elle après nettoyage :

$$\boxed{\begin{gathered}\sum_{1\leqslant\lambda\leqslant\kappa}\frac{1}{\lambda^2}\overset{?}{=}\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1}N_\kappa^\lambda\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\bigg(\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}\cdots\kappa^{q_\kappa}}\bigg)\\ \text{avec :}\quad N_\kappa^\lambda:=\tfrac{(\kappa+\lambda-4)\cdots(\kappa-2)}{1\cdots(\lambda-1)}-\tfrac{(\kappa+\lambda-4)\cdots\kappa}{1\cdots(\lambda-3)}.\end{gathered}}$$

Maintenant, notre problème $\overset{?}{=}$ est devenu purement numérique et ne dépend plus que de deux entiers quelconques $\kappa\geqslant 2$ et λ avec $1\leqslant\lambda\leqslant\kappa-1$. Ont complètement disparu de nos considérations tous ces objets de la géométrie complexe : la surface algébrique projective $X^2\subset\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$; le fibré de jets $\mathscr{E}_{\kappa,m}$; l'application du théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch ; les classes de Chern c_1 et c_2 ; la troncature asymptotique.

Ici s'illustre donc une thèse troublante sur la nature profonde des mathématiques et que nous chercherons à exprimer comme suit. En mathématiques, ce qu'on qualifie de conceptuel n'est peut-être rien d'autre qu'une entrée en matière liminaire, un premier moment d'englobement par la pensée au seuil de complexités ultérieures. Mais cette première approche est appelée à conduire ensuite, dans un deuxième moment, à des complexités d'ordre supérieur, dans le domaine de la constructivité et de l'effectivité par exemple, là où les questions dominatrices continueront à être présentes tandis que les premiers concepts qui se présentaient comme réponses seront contraints de s'effacer partiellement. Et éventuellement aussi, puisque c'est souvent ainsi que les choses se passent, les concepts initiaux et simples seront soumis à approfondissement ou à révision tant que les questions non résolues continueront à faire vivre leur destin d'ouverture.

En présence d'ouverture mathématique véritable, il y a certainement un moment où il faut se représenter que les visions, les concepts, les expressions et les notations que l'on utilisait jusqu'à présent ne font qu'entrevoir une toute petite partie d'une « réalité réalisable ». Cette remise en cause pourrait devenir d'une ampleur telle qu'elle commanderait de réviser complètement la manière dont on a abordé la question jusqu'à présent. À l'échelle du chercheur individuel, il est en effet capital de pouvoir réviser complètement ses

[2] En permanence dans le calcul, il faut en effet être capable de redéployer complètement toute expression mathématique qui aurait été auparavant contractée à l'aide d'une notation symbolique standard, comme par exemple ici $(\kappa!)^2=\kappa!\cdot\kappa!$, afin de regarder si la réexpression d'un tout quelconque et local en certaines de ses parties n'indiquerait éventuellement pas le « bon geste de calcul » que l'on doit effectuer.

objectifs et ses croyances, de refonder complètement ses approches, de reprendre au tout début une question qui n'aboutit pas, bref de revenir intégralement sur ses pas lorsqu'on s'aperçoit que la voie empruntée s'avérera peut-être sans issue ou en partie *inadéquate*. Or à l'échelle historique, il n'est pas du tout impossible dans un avenir relativement proche que les mathématiques, de plus en plus *finitisées dans une complexité calculatoire mieux maîtrisée*, conduisent à relativiser le jugement d'appréciation sur l'importance des conceptualisations en montrant qu'il existe une certaine *dynamique interne* de la production d'égalités et de relations entre objets mathématiques, le conceptuel au sens classique du terme ne se situant qu'au seuil de phénomènes beaucoup plus complexes. Il est possible que cela conduise les mathématiques à se réviser et à s'unifier en systématisant mieux les calculs qui apparaissent de manière récurrente dans divers domaines des mathématiques. Il est possible aussi que des causalités plus profondes de l'unité soient mieux perçues quand l'être de calculs mathématiques présents en plusieurs endroits sera mieux compris.

Préliminaires à l'étude des petites valeurs $\kappa = 2, 3, 4, 5$. Ainsi notre objectif est le suivant : effectuer un parcours génétique et dialectique raffiné afin de tester notre capacité à deviner les *dynamiques d'égalisation* qui sont suscitées par l'identité encadrée à vérifier (ci-dessus). Nous allons donc partir du long membre de droite, et chercher à le contracter sous la forme $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{\kappa^2}$.

Une difficulté substantielle et en quelque sorte inattendue va se présenter à nous : comme tous les nombres considérés sont des nombres entiers ou rationnels, ce sont des nombres purement numériques, c'est-à-dire non symbolisés au moyen de lettres grecques ou latines, et ils auront donc la propriété d'*agglutinement sans restriction* qui découle de l'addition (soustraction) et de la multiplication (division). Or en présence d'une grande quantité de tels nombres, comme dans ce qui va suivre où apparaîtront beaucoup de fractions rationnelles, *cette propriété de contraction numérique fait diversion à tout moment*. Nous avons déjà vu à plusieurs reprises (notamment ci-dessus et dans le paragraphe p. 46) que dans les expressions rationnelles qui comportent des indices, des factorielles, et des sommations, *les agglutinements et les simplifications portent toujours seulement sur une partie spécifique des expressions considérées*. Or le vrai problème quand on fait des calculs, c'est de déterminer dans quelle direction doivent aller les métamorphoses symboliques qui apportent de l'entropie d'information positive. Par conséquent, lorsque tout est numérique, *trop* de calculs-métamorphoses s'offrent et sont possibles. Il faut donc bien qu'existe chez les mathématiciens doués en calcul une pensée (complexe) du choix et de la sélection des calculs à faire, une sorte de vision des nécessités dynamiques locales du symbolique, bref toute une pensée remarquable qui n'est quasiment jamais écrite ou analysée dans les textes publiés.

Quelques remarques préliminaires seront utiles avant d'entamer cette présentation génétique qui va consister à montrer, sur les cas particuliers $\kappa = 2, 3, 4, 5$, comment pourrait s'articuler la recherche de gestes de calculs appropriés. Le but est de partir du membre de droite de l'identité encadrée à vérifier et de lui faire subir des transformations qui aboutiront au membre de gauche, plus simple, plus bref et plus concis. La contraction des expressions formelles suggère l'existence d'une *flèche de l'irréversible-synthétique*. Ce qui se déploie sur le plan formel serait comme gravir une ou plusieurs collines afin de passer d'une ou plusieurs vallées à d'autres. Et il y auraitune *direction orientée* de tout parcours calculatoire.

Dans les analyses ci-dessous, on commencera d'abord par lister les valeurs exactes des entiers N_κ^λ pour $\lambda = 1, 2, \dots, \kappa - 1$. Ensuite, on déploiera la somme entre parenthèses :

$$\sum_{q_\lambda + \cdots + q_\kappa = 3} \frac{1}{\lambda^{q_\lambda}} \cdots \frac{1}{\kappa^{q_\kappa}},$$

en regardant plus précisément toutes les solutions possibles de l'équation $q_\lambda + \cdots + q_\kappa = 3$, c'est-à-dire en fait, si l'on introduit des indices μ_i compris entre λ et κ, qu'il y a exactement quatre possibilités :

☐ un $q_{\mu_1} = 3$, les autres nuls ;

☐ un $q_{\mu_1} = 2$, un autre $q_{\mu_2} = 1$ avec $\mu_2 > \mu_1$, les autres nuls ;

☐ un $q_{\mu_1} = 1$, un autre $q_{\mu_2} = 2$ avec $\mu_2 > \mu_1$, les autres nuls ;

☐ trois $q_{\mu_1} = q_{\mu_2} = q_{\mu_3} = 1$ avec $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3$, les autres nuls.

Ainsi cette somme se déploie-t-elle pour revêtir la forme plus explicite et plus informative :

$$\sum_{\lambda \leqslant \mu_1 \leqslant \kappa} \frac{1}{\mu_1^3} + \sum_{\lambda \leqslant \mu_1 < \mu_2 \leqslant \kappa} \frac{1}{\mu_1^2} \frac{1}{\mu_2} + \sum_{\lambda \leqslant \mu_1 < \mu_2 \leqslant \kappa} \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{\mu_2^2} + \sum_{\lambda \leqslant \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \leqslant \kappa} \frac{1}{\mu_1} \frac{1}{\mu_2} \frac{1}{\mu_3}.$$

Que s'est-il passé ? Arrêtons-nous un instant, cela en vaut la peine.

Les calculs sont en permanence une métaphysique.

Dès l'instant où la somme $\sum_{q_\lambda + \cdots + q_\kappa = 3}$ a été écrite, c'est-à-dire au moment où nous avons appliqué la formule du multinôme de Newton, cette somme est apparue en tant que telle, et nous avons choisi de la représenter sous une forme qui correspond précisément à la métaphysique symétrique du multinôme. En effet, si l'on considère par exemple pour fixer les idées la formule du *binôme* qui donne le développement de $(x + y)^n$, le fait de l'écrire sous la forme :

$$\big(x + y\big)^n = \sum_{p+q=n} \frac{n!}{p!\, q!}\, x^p\, y^q$$

montre bien la symétrie entre les deux variables x et y, et entre les deux exposants p et q. Mais cette forme n'est pas encore suffisamment informative, car le symbole $\sum_{p+q=n}$ *cache* une explicitation supplémentaire. Ce symbole se présente en effet comme explicite en lui-même, mais il *cache* la recherche *nécessaire* de tous les couples d'entiers (p, q) tels que $p + q = n$. Avec sa symétrie formelle, ledit symbole $\sum_{p+q=n}$ retient donc en lui une micro-question technique dont on voit bien, sur l'exemple multinomial $\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}$ qui nous intéresse, qu'elle est incontournable : au prochain geste de calcul, il faudra bien déterminer une manière d'embrasser par la pensée la totalité des couples (p, q) dont la somme est égale à n. Il faudra bien *briser la symétrie formelle initiale* et réécrire ce développement sous la forme plus explicite :

$$\big(x+y\big)^n = \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!}\, x^p\, y^{n-p}$$

qui transmettra une règle essentiellement mécanique et permettra d'écrire successivement tous les termes du développement binomial en question, sans avoir à se poser la question de savoir sur quoi exactement porte la somme.

Ainsi d'une manière très générale, s'exprime *abstraitement et a priori* une exigence d'explicitation totale dans les calculs qui s'oriente dynamiquement vers l'approfondissement de l'information. Donc si l'on continue encore plus avant à rendre droit à cette exigence, ce sera vers une pensée *proprement eulérienne* que l'écriture mathématique se dirigera. En effet, même l'écriture que nous venons d'améliorer à l'instant :

$$\sum_{p=0}^{n} \mathsf{expression}(p,\, n)$$

n'est pas encore suffisamment expressive pour transmettre toutes les informations aptes à féconder l'intuition du calcul. Mieux vaut en effet déployer « *à la Euler* » tous les termes l'un après l'autre :

$$x^n + \tfrac{n!}{(n-1)!\,1!}\, x^{n-1}\, y^1 + \tfrac{n!}{(n-2)!\,2!}\, x^{n-2}\, y^2 + \cdots + \tfrac{n!}{1!\,(n-1)!}\, x^1\, y^{n-1} + y^n,$$

et notifier en même temps à l'intuition par d'invisibles petits « drapeaux » et par des annotations manuscrites virtuelles quelle est la « règle » de passage d'un terme au suivant : elle seule explicite vraiment la « logique interne » d'une telle sommation. Il est en effet très différent d'écrire que l'on somme une expression qui dépend de n et de p, et de faire mieux voir avec des points de suspension « $\cdots$ » toute l'extension potentiellement réelle d'une telle somme, comme si tous ses termes devaient être écrits en acte, à ceci près que le geste de complétion serait suspendu au moment même où l'on a compris toute la logique des termes intermédiaires. Avantage subsidiaire de toute écriture avec trois petits points « $\cdots$ » : un lien virtuellement visible est maintenu avec tous les cas particuliers concrets $n = 1, 2, 3, 4, 5$ qui sont à l'origine de l'induction du particulier au général. Ce serait comme si l'écriture vraiment adéquate devait *informer* au maximum des liens virtuels entre les objets symboliques, et non pas contracter en éliminant ces liens dans l'*a posteriori* d'une synthèse.

Par exemple, si l'on voulait réaliser ici une explicitation encore plus informative, on pourrait même s'offrir le luxe *d'insérer au milieu des trois petits points* le terme générique de la sommation tout en ajoutant de nouveaux points de suspension de part et d'autre :

$$\begin{aligned}x^n + \tfrac{n!}{(n-1)!\,1!}\,x^{n-1}\,y^1 + \tfrac{n!}{(n-2)!\,2!}\,x^{n-2}\,y^2 + \\ + \cdots + \tfrac{n!}{(n-p)!\,p!}\,x^{n-p}\,y^p + \cdots + \tfrac{n!}{1!\,(n-1)!}\,x^1\,y^{n-1} + y^n,\end{aligned}$$

afin de mieux faire voir les résonances qui existent entre les premiers termes, les derniers termes et les termes médians quelconques. On voit bien maintenant que cette dernière écriture plus développée synthétise quasiment tous les aspects[3] de la pensée interne à la formule du binôme :

☐ déploiement sous forme d'une sommation symétrique dans laquelle s'exprime comme une sorte de principe de vases communicants entre les puissances de x et celles de y ;

☐ indication des germes de généralité par l'écriture des trois premiers termes de la somme et par la notification de ses deux derniers termes ;

☐ réalisation effective de la généralité suggérée par l'apparition en acte et à la place médiane du terme général $\frac{n!}{(n-p)!\,p!}\,x^{n-p}\,y^p$;

☐ visionnement d'une extension éventuellement longue par la présence double des sommations intermédiaires « $+\cdots+$ ».

Remarquons aussi au passage que nous avions d'ores et déjà employé (à dessein) une telle écriture maximalement informative au moment d'écrire la première version de notre identité à vérifier (1), nonobstant le fait qu'une telle écriture imposait d'utiliser plusieurs lignes et un grand nombre de symboles. Il y aurait ici comme une géométrisation partielle du symbolique qui exigerait de privilégier l'extension par rapport à la contraction. La travail

[3] Excepté peut-être le suivant : on pourrait même écrire $\frac{n!}{n!\,0!}\,x^n$ et $\frac{n!}{0!\,n!}\,y^n$ au lieu de seulement x^n et y^n afin de mieux notifier la présence de tous les coefficients binomiaux. Mais peut-être au contraire que le fait de choisir d'écrire seulement x^n et y^n montre mieux que les deux termes extrêmes de la puissance initiale $(x + y)^n$ sont évidemment x^n et y^n, et peut-être bien aussi que le fait de ne pas écrire ces deux coefficients binomiaux triviaux rajoute un « *epsilon* » de portée synthétique en laissant à l'intuition le soin d'effectuer cette complétion élémentaire.

de recherche mathématique dans les manuscrits montre en effet que les déploiements sont nécessités de manière interne au calcul et que les contractions notationnelles n'ont en général que peu de pouvoir de fécondation face à l'ouverture, bien qu'elles soient en général utilisées *a posteriori* pour la transmission des résultats.

Les deux valeurs élémentaires $\kappa = 2$ et $\kappa = 3$. Tout d'abord, lorsque $\kappa = 2$, on a $N_2^1 = 1$, et l'expression dont on part et que l'on doit transformer de manière à faire apparaître $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ s'écrit :

$$2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{2^3}\right).$$

Dans la somme des quatre termes entre parenthèses, faisons apparaître autant que possible l'expression désirée $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$. Pour cela, il suffit d'observer, par un acte de synthèse intuitive, que l'on est en présence de l'identité triviale :

$$ac + ad + bc + bd = (a + b)(c + d)$$

afin de reconstituer un produit à partir d'une expression dans laquelle se dissimule son développement. Cela nous donne ici :

$$\begin{aligned}\text{même expression} &= 2 \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1+2}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}\right) \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2},\end{aligned}$$

comme voulu. Il semblerait alors que cette idée de faire apparaître $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2}$ soit la bonne et qu'elle soit promise à une grande généralité, et même que la suite s'avère relativement aisée.

Mais voyons ce qu'il en est réellement au niveau suivant $\kappa = 3$. On a alors $N_3^1 = 1$ et $N_3^2 = 1$, et la somme à simplifier s'écrit :

$$\begin{aligned}&1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{1^2 \cdot 2} + \frac{1}{1^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2^2} + \frac{1}{1 \cdot 3^2} + \frac{1}{2 \cdot 3^2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) + \\ &+ 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2}\right).\end{aligned}$$

Il est bien entendu hors de question d'additionner brutalement toutes ces fractions, ou de réduire à $\frac{p}{q}$ les deux fractions $1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}$ et $1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4 \cdot 5}$ qui sont en position de coefficient devant les grandes parenthèses. En effet, rappelons que l'on cherche à deviner des calculs généraux valables pour κ quelconque, et que dans de tels calculs où certains nombres entiers quelconques seront symbolisés par des lettres κ, λ, μ, tandis que d'autres nombres joueront seulement le rôle de constantes absolues (par exemple un facteur 2 global), chaque nombre devra alors jouir en quelque sorte à l'avance d'une individuation spécifique. C'est pourquoi *aucun « mélange » entre nombres entiers n'est autorisé au début des calculs*.

Prenons un exemple très simple pour mieux illustrer ce propos. Dans la somme concrète :

$$2+4+6+8+10$$

qui préfigure la somme générale élémentaire :

$$2+4+6+\cdots+2n,$$

il faut être à même d'*individuer* un coefficient 2 global :

$$2\cdot 1+2\cdot 2+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5=2\big(1+2+3+4+5\big),$$

et de l'extraire d'une sommation des cinq premiers entiers strictement positifs. Ce facteur 2 qui est une constante absolue possède une essence locale et il doit être mis à part. Dans les vrais manuscrits de calculs à la main, il peut être judicieux et avantageux d'utiliser des couleurs distinctes pour dénoter les différences d'essence entre les symboles numériques, mais une telle technique implique de nombreuses corrections et réactualisations, car au début de toute recherche, les essences sont indécises et imprécises.

Donc dans l'écriture de la somme que nous voulons simplifier en toute généralité :

$$\sum_{\lambda=1}^{\kappa-1} N_\kappa^\lambda\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}\cdot\bigg(\sum_{q_\lambda+\cdots+q_\kappa=3}\frac{1}{\lambda^{q_\lambda}\cdots\kappa^{q_\kappa}}\bigg),$$

même dans le cas concret $\kappa=3$ que nous venons d'expliciter, nous cherchons à conserver (au moins provisoirement et aussi longtemps que les bons calculs n'auront pas encore été devinés) la mémoire des multiplicités N_κ^λ, la mémoire de la constante absolue 2 et la mémoire des coefficients rationnels $\frac{1\cdot 2\cdots(\lambda-1)}{(\kappa+1)\cdots(\kappa+\lambda)}$.

Maintenant, à la première et à la deuxième ligne, réécrivons les termes entre parenthèses de manière à faire apparaître les sommes d'inverses de carrés de nombres entiers. Ici, contrairement au cas $\kappa=2$, la somme voulue $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ n'apparaît pas directement. À la première ligne en effet, le dernier terme $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}$ est « de trop », tandis qu'à la deuxième ligne, le terme $\frac{1}{1^2}$ ne pourra certainement pas apparaître *ex nihilo*. Admettons alors ces écarts avec notre objectif et factorisons donc comme nous le pouvons les deux lignes :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} =& 1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\bigg[\bigg(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg]+\\&+2\cdot 1\cdot\frac{1}{4\cdot 5}\bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg).\end{aligned}$$

L'idée serait la suivante : le dernier terme de la première ligne pourrait tout à fait bien *compléter* la deuxième ligne de manière à y faire apparaître, de quelque manière que ce soit, le terme manquant $\frac{1}{1^2}$. Contractons donc les deux sommes d'inverses de nombres entiers $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ et indiquons par un signe qui parle de lui-même que le dernier terme de la première ligne devrait éventuellement être descendu à la seconde ligne pour la compléter :

$$\begin{aligned}
\text{à simplifier} = 1\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\bigg[&\frac{2\cdot 3+1\cdot 3+1\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+\frac{1}{\underline{1\cdot 2\cdot 3}_{\swarrow}}\bigg]+\\
&+2\cdot 1\cdot \frac{1}{4\cdot 5}\bigg(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\bigg)\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)=\\
&=1\cdot 2\cdot \frac{1}{4}\bigg[\frac{11}{1\cdot 2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)\bigg]+\\
&+2\cdot 1\cdot \frac{1}{4\cdot \underline{5}_\circ}\cdot\frac{\underline{5}_\circ}{2\cdot 3}\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+1\cdot 2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}.
\end{aligned}$$

Mais avant de poursuivre, signalons à nouveau que si nous avions simplifié et réduit au même dénominateur toutes les fractions présentes, *comme l'aurait fait un ordinateur-bulldozer à qui l'on aurait confié la vérification de cette identité*, aucune des *décisions signifiantes* de calcul que nous avons prises jusqu'à présent n'aurait été devinée. Sans insister sur le fait que notre reconstitution de $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ et de $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$ *faisait déjà sens en anticipant le cas général* par rapport à l'objectif visé, notons ici un micro-détail technique qui va s'avérer crucial : l'entier $\underline{5}_\circ$ se simplifie à la dernière ligne ci-dessus. Conservons donc en mémoire la nouvelle première ligne sans la recopier, observons l'apparition de la fraction $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}$ en facteur commun de tous les éléments de la deuxième ligne :

$$\begin{aligned}
\text{à simplifier} &= \text{en mémoire} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+1\cdot 2\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{1}{1^2}\\
&= \text{en mémoire} + 2\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg),
\end{aligned}$$

et engendrons la fraction neutre $\frac{1}{1^2}$ pour faire apparaître complètement la somme voulue. Ça marche ! Maintenant, il reste juste à vérifier que lorsqu'on additionne le résultat obtenu à la première ligne conservée en mémoire, on obtient bien la somme voulue $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}$, et tel est bien le cas :

$$\begin{aligned}
\text{à simplifier} &= 1\cdot 2\cdot\frac{11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)+2\cdot 1\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg)\\
&=\bigg(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\bigg),
\end{aligned}$$

puisque $1\cdot 2\cdot 11+2\cdot 1\cdot 1=24$.

La valeur $\kappa = 4$. Maintenant, il semblerait que tous les procédés de calcul aient été devinés en filigrane. Étudions quand même le cas $\kappa=4$ qui pourrait nous réserver des surprises. Puisque $N_4^1=1$, $N_4^2=2$ et $N_4^3=2$, la somme à simplifier s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&2\cdot 1\cdot\frac{1}{5}\bigg[\Big(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)\Big(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big)+\underline{\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 4}+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}_{\swarrow}\bigg]+\\
&+2\cdot 2\cdot\frac{1}{5\cdot 6}\bigg[\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)\Big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big)+\underline{\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}}_{\swarrow}\bigg]+\\
&+2\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2}{5\cdot 6\cdot 7}\Big(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\Big)\Big(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big).
\end{aligned}
$$

Évidemment, comme l'idée précédente a marché, nous descendons le dernier terme de la seconde ligne à la troisième ligne pour chercher à faire apparaître les termes manquants $\frac{1}{1^2}$ ou $\frac{1}{2^2}$. Nous désignons par l'expression « en mémoire » tous les termes qui précèdent pour ne pas avoir à les recopier tels quels :

$$
\begin{aligned}
\text{à simplifier} &= \text{en mémoire}+2\cdot 2\cdot\frac{1\cdot\underline{1}_{\text{ins}}}{\underline{1}_{\text{ins}}\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+2\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2}{5\cdot 6\cdot\underline{7}_{\circ}}\cdot\frac{\underline{4+3}_{\circ}}{3\cdot 4}\Big(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big)\\
&= \text{en mémoire}+2\cdot 2\cdot\frac{1^2\cdot\underline{2^2}_{\text{ins}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\Big(\frac{1}{\underline{2^2}_{\text{ins}}}\Big)+2\cdot 2\cdot\frac{1\cdot 2\cdot\underline{1\cdot 2}_{\text{ins}}}{\underline{1\cdot 2}_{\text{ins}}\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\Big(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big)\\
&= \text{en mémoire}+2\cdot 2\cdot\frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\Big(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\Big).
\end{aligned}
$$

À la première ligne, le facteur 7 se simplifie, comme c'était le cas précédemment pour un facteur 5 lorsque $\kappa = 3$; ce micro-phénomène semble être à même de se généraliser lorsque κ sera quelconque. Ensuite, à la deuxième ligne, l'insertion d'un facteur $1 \cdot 2$ au dénominateur de la seconde fraction qui est exigé par la complétion de la factorielle $\underline{1\cdot 2}_{\text{ins}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ semble montrer que le numérateur complété doit incorporer $1^2 \cdot 2^2$. Cette micro-métamorphose formelle en recherche d'harmonie semble se confirmer aussi sur la première fraction, où l'insertion de la fraction manquante $\frac{1}{2^2}$ impose de remonter le facteur 2^2 au numérateur, et où le facteur 1^2 était aussi apparu naturellement auparavant. Bien entendu, la constante absolue 2 et les deux valeurs $N_4^2 = 2$, $N_4^3 = 2$ restent pour l'instant en facteur de ces deux fractions sous la forme *non fusionnée* $2\cdot 2$, en attente peut-être d'une absorption spontanée à la fin du calcul. Il est alors remarquablement avantageux de constater que la fraction complétante $\frac{1}{2^2}$ et la somme tronquée $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$ sont multipliées par le *même nombre rationnel en facteur multiplicatif commun*, à savoir : $2 \cdot 2 \cdot \frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$.

Et maintenant, on devine presque immédiatement comment vont s'enchaîner les calculs restants. Les quatre dernières fractions de la première des trois lignes dont on était parti vont descendre et faire apparaître en quelque sorte automatiquement le terme $\frac{1}{1^2}$ qui nous manquait encore dans la somme tronquée $\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2}$, et ce, *avec le même nombre rationnel en facteur multiplicatif commun*. Tout du moins, nous espérons que tel sera bien le cas, et nous devons donc déterminer s'il en va ainsi pour le mieux dans le meilleur des harmonies symboliques formelles.

Dans les trois lignes à simplifier dont nous sommes partis, conservons en mémoire sans le réécrire le premier terme dans lequel apparaissait $\frac{1}{1^2}$, faisons réapparaître les deux termes qui suivent, et recopions l'expression que nous venons de finaliser :

$$\text{à simplifier} = \text{en mémoire} + 2\cdot 1\cdot \frac{4+3+2+1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + 2\cdot 2\cdot \frac{1}{5\cdot 6}\cdot \frac{3\cdot 4+2\cdot 4+2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+$$
$$+\,2\cdot 2\cdot \frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right).$$

La suite des calculs consiste à sommer les entiers qui apparaissent aux numérateurs des fractions que nous avons réduites au même dénominateur :

$$\text{à simplifier} = \text{en mémoire} + 2\cdot 1\cdot \frac{10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + 2\cdot 2\cdot \frac{1^2\cdot 26}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\cdot\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+$$
$$+\,2\cdot 2\cdot \frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right),$$

et à simplifier ensuite si possible les entiers qui sont incorporés dans les factorielles. Pour effectuer une telle simplification, factorisons l'entier 10 $(= 4+3+2+1)$ sous la forme $2\cdot 5$, et regroupons aussi les deux derniers termes, ce qui nous donne (en n'écrivant que ce qui vient d'être modifié) :

$$2\cdot 1\cdot \frac{2\cdot \underline{5}_{\circ}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \underline{5}_{\circ}} + 2\cdot 2\cdot \left[\frac{1^2(26+2^2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right]\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right).$$

Maintenant, un « miracle arithmétique élémentaire » se produit :

$$26 + 2^2 = 30 = 5\cdot 6,$$

et l'on peut donc *simplifier le facteur* $5\cdot 6$ *au numérateur et au dénominateur* $\frac{\underline{5\cdot 6}_{\circ}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \underline{5\cdot 6}_{\circ}}$, ce qui réduit à la même factorielle $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4$ tous les dénominateurs présents de telle sorte que la fraction manquante $\frac{1}{1^2}$ peut venir compléter comme il faut la somme tronquée $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}$:

$$2\cdot 1\cdot \frac{\underline{1^2}_{\mathsf{ins}}\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{\underline{1^2}_{\mathsf{ins}}}\right) + 2\cdot 2\cdot\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right) = 2\cdot 2\cdot \frac{1^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right).$$

Il reste seulement à reprendre le premier terme de la somme à simplifier que nous n'avons pas encore touché, et à lui additionner ce résultat que nous venons d'obtenir :

$$\text{à simplifier} = 2\cdot 1\cdot \frac{1}{5}\cdot \frac{2\cdot 3\cdot 4+1\cdot 3\cdot 4+1\cdot 2\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right)+$$
$$+\,2\cdot 2\cdot \frac{1^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^2}\right).$$

On factorise $50 = 2 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 3$ sous la forme $10 \cdot 5$ pour faire disparaître le facteur 5 qui disparaît, et l'on obtient :

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} &= \left[\frac{2 \cdot 1 \cdot 10 + 2 \cdot 2 \cdot 1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}\right]\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2}\right) \\ &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^2},\end{aligned}$$

ce qui n'est autre que le résultat voulu dans le cas $\kappa = 4$.

La valeur délicate $\kappa = 5$. Passons maintenant au cas $\kappa = 5$. Puisque $N_5^1 = 1$, $N_5^2 = 3$, $N_5^3 = 5$ et $N_5^4 = 5$, la somme à simplifier s'écrit :

$$\begin{aligned}& 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{1} + \cdot + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{1^2} + \cdots + \frac{1}{5^2}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right] + \\ & + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7}\left[\left(\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{5^2}\right) + \underline{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}}\right] + \\ & + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 8}\left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \underline{\frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}}\right] + \\ & + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right).\end{aligned} \tag{3}$$

Comme précédemment, soumettons seulement au calcul la dernière ligne et le dernier terme de l'avant-dernière ligne afin de faire apparaître la fraction manquante $\frac{1}{3^2}$:

$$\begin{aligned}\text{à simplifier} &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 8} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \underline{9}_{\circ}}\left(\frac{\underline{\underline{5 + 4}}_{\circ}}{4 \cdot 5}\right)\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot \underline{3^2}_{\text{ins}}}{\underline{1 \cdot 2}_{\text{ins}} \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{1}{3^2}\right) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \underline{1 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{ins}}}{\underline{1 \cdot 2 \cdot 3}_{\text{ins}} \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) \\ &= \text{en mémoire} + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right).\end{aligned}$$

Tout se passe comme prévu pour l'instant. Ensuite, reprenons le premier terme de la troisième ligne de (3) et faisons aussi descendre le dernier terme de la deuxième ligne de (3) pour les additionner tous deux à celui que nous venons de calculer :

$$\begin{aligned}& 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6 \cdot 7}\left(\frac{5 + 4 + 3 + 2}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}\right) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{3 \cdot 4 \cdot 5}\right)\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right) + \\ & + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}\left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}\right).\end{aligned}$$

Pour éviter les recopiages inutiles, nous conservons en mémoire tous les termes intouchés qui précèdent dans l'expression à simplifier. À ce stade, on s'attend bien sûr à pouvoir faire apparaître le facteur manquant $\frac{1}{2^2}$. À cette fin, comme précédemment, sommons les deux numérateurs $5+4+3+2 = 14$ et $4 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 4 = 47$, et regroupons ensuite les deux derniers termes, en observant que le nombre $47 + 3^2 = 56 = 7 \cdot 8$ se simplifie :

$$2 \cdot 3 \cdot \frac{1^2 \cdot 2 \cdot \underline{7}_{\circ} \cdot \underline{2^2}_{\mathsf{ins}}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \underline{7}_{\circ}} \left(\frac{1}{\underline{2^2}_{\mathsf{ins}}} \right) + 2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2 \cdot (\underline{47 + 3^2}_{\circ})}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \underline{7 \cdot 8}_{\circ}} \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right).$$

Mais à ce moment précis, on constate qu'il est malheureusement impossible de faire apparaître la somme voulue $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$: en effet, bien que la factorielle restante au dénominateur $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ soit exactement la même, les deux facteurs $2 \cdot 3 \cdot 1^2 \cdot 2 \cdot 2^2$ et $2 \cdot 5 \cdot 1^2 \cdot 2^2$ *ne coïncident pas*.

C'est un phénomène imprévu. Devant toute difficulté ou disharmonie, la première réaction saine est de s'interroger pour déterminer si une erreur de calcul n'a pas été commise en amont, ce qui, le cas échéant, pourrait sauver l'idée que tous les calculs devraient se passer comme dans le cas $\kappa = 4$.

L'erreur potentielle, ici, s'identifie à une véritable remise en question.

Rarement, l'erreur de calcul est une erreur pure. Au contraire, l'erreur *potentielle* implique de tester la fiabilité de ce que l'on croit avoir deviné. Souvent douloureuse, l'erreur agit donc comme un test rétroactif par lequel on doit sélectionner les bonnes décisions de calcul et supprimer les décisions hâtives ou les opérations inexactes. Et comme aucun calcul ne doit être faux, il faut *a priori* reparcourir toutes les étapes du calcul pour trier entre le vrai et le faux d'un parcours génétique inabouti et toujours en devenir. S'il devait exister une réflexion totalisante sur la recherche mathématique qui se hissât au niveau d'une discipline universitaire contemporaine qu'on appelle la *génétique littéraire*, il faudrait qu'une telle réflexion analyse et typifie les micro-erreurs de calcul dans les manuscrits.

Mais ici, il n'y a pas d'erreur, nous n'avons pas commis d'erreur, et nous n'avons pas non plus tenté de faire transparaître quelques unes des erreurs de calcul qui structurent la dialectique manuscrite de la recherche des bons gestes de calcul. Dans ces conditions, il faut admettre que les calculs sont justes jusqu'à présent et trouver une nouvelle idée locale pour faire face à ce défaut d'harmonie formelle. Il n'est alors pas certain que l'idée choisie sera appropriée pour traiter le cas général : les décision sont nécessaires face à tout obstacle, mais elles engagent peut-être dans la mauvaise direction. La dynamique du calcul doit donc aussi être une mémoire complète de toutes les décisions prises sans certitudes, c'est-à-dire une mémoire de toutes les ouvertures possibles vers d'autres décisions, une mémoire douée non seulement d'un pouvoir de réactualisation permanente, mais aussi d'un pouvoir perpétuel de retour à des points de bifurcation entrevus.

Ici, nous choisirons de sauver en quelque sorte l'harmonie formelle que nous avions observée dans les cas $\kappa = 3$ et $\kappa = 4$: faisons apparaître la somme désirée $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$ multipliée par le facteur $2 \cdot 5 \cdot \frac{1^2 \cdot 2^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}$, et rejettons sous forme de « reste » le terme en $\frac{1}{2^2}$ qui ne correspond pas à ce que nous attendions ; autrement dit, réécrivons ce que nous venons d'obtenir sous la forme :

$$2\cdot 5\cdot \frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\left(\frac{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 2-2\cdot 5\cdot 1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right)$$

Appelons :

$$\text{écart} := \left(\frac{2\cdot 3\cdot 2^2\cdot 2-2\cdot 5\cdot 1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right)\left(\frac{1}{2^2}\right) \tag{4}$$

ce deuxième terme, conservons-le en mémoire, et poursuivons le calcul. Il nous faut à présent faire réapparaître certains des termes qui étaient conservés en mémoire, et notamment le premier terme de la deuxième ligne de (3), ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}&2\cdot 3\cdot \frac{1}{6\cdot 7}\left(\frac{3\cdot 4\cdot 5+2\cdot 4\cdot 5+2\cdot 3\cdot 5+2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right)\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\\&\quad+2\cdot 5\cdot \frac{1^2\cdot 2^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\text{écart}.\end{aligned}$$

Or au numérateur de la première ligne, la somme est égale à $154 = 2\cdot 7\cdot 11$, donc 7 se simplifie, et nous obtenons le résultat :

$$\left[2\cdot 3\cdot \frac{1^2\cdot 2\cdot 11}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+2\cdot 5\cdot \frac{1^2\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\right]\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\text{écart},$$

qui se simplifie encore en :

$$2\cdot \frac{86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\text{écart}, \tag{5}$$

Il ne reste plus maintenant qu'à traiter la première ligne de (3), que nous métamorphosons comme suit :

$$\begin{aligned}&2\cdot 1\cdot \frac{1}{6}\left[\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1\cdot 3\cdot 4\cdot 5+1\cdot 2\cdot 4\cdot 5+1\cdot 2\cdot 3\cdot 5+1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right]\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)\\&+2\cdot 1\cdot \frac{1}{6}\left(\frac{4\cdot 5+3\cdot 5+3\cdot 4+2\cdot 3+2\cdot 4+2\cdot 5+1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4+1\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\right).\end{aligned}$$

Le premier numérateur est égal à 274, le second à 85, et donc en additionnant avec (5), nous obtenons que l'expression à simplifier (3) devient :

$$\begin{aligned}&2\cdot \frac{1^2\cdot 274}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+2\cdot 1\cdot \frac{85}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\\&\quad+2\cdot \frac{86}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}\right)+\text{écart}.\end{aligned}$$

C'est seulement maintenant que nous pouvons déteminer le sort du terme d'écart défini par (4) : avant de nous rendre compte d'un échec, nous avions voulu y faire apparaître la fraction $\frac{1}{2^2}$, mais à présent, il s'avère plus approprié d'y faire apparaître plutôt la fraction $\frac{1}{1^2}$ pour compléter, en collaboration avec le deuxième terme $2\cdot 1\cdot \frac{85}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}$ de la somme ci-dessus, la somme tronquée $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}$. En effet, si nous procédons ainsi, le terme d'écart se réécrit sous la forme :

$$\text{écart} = 2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} \right),$$

et de là découle le calcul final grâce à l'addition triviale $1^2 \cdot 85 + 1^2 = 86$:

$$2 \cdot \frac{1^2 \cdot 274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) + 2 \cdot 1 \cdot \frac{1^2 \cdot 85}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} \right) +$$

$$+ 2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) + 2 \cdot \frac{1^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} \right)$$

$$= 2 \cdot \frac{1^2 \cdot 274}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right) + 2 \cdot \frac{86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \right)$$

$$= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2},$$

comme voulu. Ainsi le résultat est-il démontré pour $\kappa = 5$, mais

- ☐ Deviner
- ☐ Engendrer des actes généraux
- ☐ $\neq$ Maple
- ☐ Mélanges de rationnels
- ☐ Conceptualiser les liens.

Chapitre :
Fonction zêta de Riemann et théorie analytique des nombres

Fonction zêta de Riemann. Grâce au un critère élémentaire de comparaison avec une l'intégrale impropre $\int^{\infty} \frac{1}{t^s}\, dt$, on vérifie aisément que la fonction zêta de Riemann $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ converge pour tout nombre complexe $s \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Re}\, s > 1$. On démontre qu'elle se prolonge holomorphiquement en tout point du plan complexe, excepté le point $s = 1$ en lequel elle a un pôle d'ordre 1 grâce à des formules intégrales qui éclaircissent sa structure en soustrayant certains termes méromorphes simples qui font obstacles à son prolongement, par approfondissement de formules intégrales. Voici en effet la manière la plus simple de construire un tel prolongement, si nous admettons ici que la fonction Γ d'Euler définie par l'intégrale :

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} y^{s-1}\, e^y\, dy$$

se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec des pôles d'ordre 1 en les entiers négatifs $0, -1, -2, -3, \ldots$.

on a par exemple la formule suivante qui exprime le produit de $\zeta(s)$ par $\Gamma(s)$:

$$\Gamma(s)\zeta(s) = \int_0^1 \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x}\right) x^{s-1} dx + \frac{1}{s-1} + \int_1^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} dx$$

Pour tirer encore plus de renseignements sur la fréquence d'apparition des nombres premiers, considérons la série générale suivante :

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} \tag{1}$$

où $s \in \mathbb{C}$, $\Re s > 1$; c'est en effet l'ensemble des valeurs du paramètre pour lesquelles la série converge absolument. Si $p_1, \ldots, p_r$ désignent les r premiers nombres premiers, on a la même identité que dans la démonstration sans le paramètre s :

$$\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{+\infty} \frac{1}{p_1^{sk_1} p_2^{sk_2} \ldots p_r^{sk_r}} = \prod_{j=1}^{r} \sum_{k_j=0}^{+\infty} \frac{1}{p_j^{sk_j}} = \prod_{j=1}^{r} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_j^s}}$$

et la décomposition de la série en produit se justifie grâce à la convergence absolue. Mais comme le terme de gauche est une somme de termes de la série (1) qui contient au moins tous les termes jusqu'au terme numéro p_{r+1} (où p_{r+1} est le nombre premier suivant), on obtient

$$\lim_{r\to\infty}\prod_{j=1}^{r}\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$

De plus, ce produit infini converge absolument, en effet :

$$\left|\frac{1}{1-\frac{1}{p_j^s}}-1\right|=\sum_{k=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{p_j^{ks}}\right|\xrightarrow[j\to+\infty]{}0.$$

Cette égalité entre la somme et le produit est encore due à Euler, et le produit est donc appelé le *produit eulérien*. Remarquons qu'il montre que $\zeta(s)\neq 0$ pour tout s tel que $\Re s>1$. En effet, un produit absolument convergent est non nul si tous ses termes sont non nuls.

Cette fonction zêta a des implications profondes en théorie des nombres : répartition des nombres premiers, conjecture de Goldbach, *etc.*

Polyzêtas à plusieurs variables. **Fill ??** Les fonctions de plusieurs variables est donnée par les séries *polyzêtas* à plusieurs variables. Soit $p\geqslant 1$ un entier quelconque désignant le nombre de variables et soit $s=(s_1,s_2,\ldots,s_p)$ un p-uplet d'entiers tous $\geqslant 1$. Dès que $s_1\geqslant 2$, on vérifie que la série à termes positifs :

$$\zeta(s_1,s_2,\ldots,s_p):=\sum_{k_1>k_2>\cdots>k_p\geqslant 1}\frac{1}{(k_1)^{s_1}(k_2)^{s_2}\cdots(k_p)^{s_p}}$$

converge

Chapitre :
Séries hypergéométriques multiples et polylogarithmes

De l'Un au Multiple : passage à plusieurs variables. Les fonctions de plusieurs variables s'articulent aux fonctions d'une variable en vertu de principes métaphysiques que l'on doit méditer avant toute considération spécialisée.

☐ Principe d'engendrement par le nombre : le deux de la dyade engendre le multiple pur partout et sans restriction[1].

☐ Principe d'omnipossibilité mathématique : le multiple quelconque et non limité héberge potentiellement tous les possibles mathématiques.

☐ Principe des nécessités internes et imprévisibles : la considération des fonctions d'une variable requiert souvent et contre toute attente l'étude des fonctions d'un nombre quelconque de variables[2].

Le champ du multiple pur est celui d'une ontologie mathématique illimitée dans ses diversifications potentielles. Aussi le passage à plusieurs variables

---

[1] La question épistémologique est alors la suivante : « comment décrire le type de pluralité qui se laisse voir dans le travail mathématique qui consiste à passer en plusieurs variables et développer une conception qui prend en compte plusieurs variables ? » (Jean-Jacques Szczeciniarz, [**43**]).

[2] Exemple canonique : les n racines complexes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ d'un polynôme à *une* variable complexe $P(z) = a_0\, z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, z + a_n$ et à coefficients complexes $a_i \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$, paramètrent tous les polynômes de degré n possibles à un niveau plus profond que ses coefficients bruts a_i. L'Un fonctionnel du z inconnu exponentié au plus n fois est tributaire d'un Multiple de racines paramétrantes.

Autre exemple : Smale ([**39**]) a conjecturé (*Mean Value Conjecture*) l'énoncé suivant : pour tout polynôme complexe $P(z)$ de degré n dont la dérivée $P'(z)$ possède les $n-1$ racines complexes $b_1, \ldots, b_{n-1}$ (*points critiques* comptés avec multiplicité) et pour tout point $z \neq b_j$ distinct des b_j, il existe au moins un indice $j_z \in \{1, \ldots, n-1\}$ qui dépend *a priori* de z tel que $\frac{|P(z)-P(b_{j_z})|}{|z-b_{j_z}|} \leqslant \frac{n-1}{n}\,|P'(z)|$. Bien que cette dernière estimation conjecturale soit inspirée de l'*inégalité de la moyenne* en théorie des fonctions d'*une* variable, il existe une approche naturelle du problème qui fait appel aux fonctions symétriques, et à la théorie de l'élimination en *plusieurs variables*. En effet, on peut considérer P comme déterminé, à une constante près, par une collection $B := \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$ de $(n-1)$ points critiques quelconques dans $\mathbb{C}$ qui *paramétrisent* la primitive $P_B(z) := \int_0^z (w-b_1)\cdots(w-b_{d-1})\, dw$ de $P_B'(z) = (w-b_1)\cdots(w-b_{n-1})$. Grâce à une translation effectuée au préalable, on se ramène à $z = 0$, d'où $P_B(z) = 0$, et alors tout revient à démontrer que dans l'espace $\mathbb{C}^{n-1}$ de tous les b_j, on a :

$$\max_{\{b_1,\ldots,b_{n-1}\}}\ \min_{1\leqslant j\leqslant n-1}\ \frac{|P_B(b_j)|}{|b_j|\cdot|P_B'(z)|} \leqslant \frac{n-1}{n}.$$

constitue-t-il un acte tout aussi bien nécessaire que vertigineux d'entrée dans l'ouverture absolue du savoir.

Polyzêtas à plusieurs variables. Rentrons maintenant plus avant dans l'expertise contemporaine concernant les fonctions zêtas à plusieurs variables. Ici, en survolant des conjectures et des résultats récents, nous allons analyser et commenter quelques unes des stratégies que la recherche contemporaine développe face à des problèmes ouverts réputés difficiles.

Soit $k \geqslant 1$ un entier quelconque qui désignera le nombre de variables, et soit $\underline{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_k)$ un k-uplet de nombres entiers $s_i \geqslant 1$. On peut montrer, et nous allons l'admettre[3], que la série zêta multiple à termes positifs définie par :

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) := \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geqslant 1} \frac{1}{(n_1)^{s_1} (n_2)^{s_2} \cdots (n_k)^{s_k}}$$

est convergente pour tout $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ dès que $s_1 \geqslant 1$, donc bien définie[4], alors qu'elle diverge en général lorsque $s_1 = 1$, cas que nous laisserons de côté. C'est ainsi qu'est classiquement introduite la généralisation à plusieurs

La question étant invariante par permutation quelconque des b_j, il est alors naturel de commencer par réexprimer ces quotients $s_i(B) := \frac{|P_B(b_j)|}{|b_j| \cdot |P_B'(z)|}$ au moyen des fonctions symétriques élémentaires $\beta_k := \sum_{1 \leqslant j_1 < \cdots < j_k \leqslant n-1} b_{j_1} \cdots b_{j_k}$. Le problème devient alors algébrique et d'une complexité telle qu'on ne sait pas actuellement réaliser cette approche.

[3] Il n'est pas aisé de rédiger une démonstration à la fois élégante et convaincante de ce fait élémentaire qui revient, d'après le principe de comparaison entre sommations discrètes et sommations continues, à établir que l'intégrale itérée :

$$\int_1^\infty \frac{dx_1}{(x_1)^{s_1}} \int_1^{x_1} \frac{dx_2}{(x_2)^{s_2}} \cdots \int_1^{x_{k-2}} \frac{dx_{k-1}}{(x_{k-1})^{s_{k-1}}} \int_1^{x_{k-1}} \frac{dx_k}{(x_k)^{s_k}}$$

est *finie* (*i.e.* $< \infty$), puisqu'on est contraint de distinguer sans élégance plusieurs cas peu harmonieux suivant les valeurs des exposants s_i. Cela explique peut-être, comme en d'autres circonstances, que la démonstration soit passée sous silence dans la littérature sur le sujet : les mathématiques définissent un langage qui *sélectionne en partie* ce qui mérite d'être exprimé. Toutefois, par un examen rapide des deux premiers cas $k = 1$ et $k = 2$, on se convaincra facilement que la condition $s_1 \geqslant 2$ *cause et assure* la convergence, sans que les valeurs des autres exposants $s_2, \ldots, s_k$ interfèrent. Ensuite, le principe de véracité inductive contrôlé par une intuition éduquée au calcul — en l'occurence, le calcul des séries et des intégrales — va donner permission, au lecteur éclairé comme au rédacteur expert, d'admettre l'énoncé sans autre contrôle qu'une telle vérification en privé sur une feuille manuscrite. On voit à nouveau par cet exemple combien les *sous-entendus* complices peuvent faire écran à la compréhension d'un domaine des mathématiques pour ceux qui n'y sont pas formés.

[4] Par analogie avec la convergence, pour des valeurs complexes $s \in \mathbb{C}$, de la fonction zêta de Riemann à une variable $\zeta(s) = \sum_{n=1} n^{-s}$ dès que $\mathrm{Re}\, s > 1$, on peut aussi vérifier que cette *fonction polyzêta* converge lorsque l'on a :

$$\mathrm{Re}\, s_1 > 1, \qquad \mathrm{Re}\,(s_1 + s_2) > 2, \quad \ldots\ldots, \qquad \mathrm{Re}\,(s_1 + s_2 + \cdots + s_k) > k,$$

mais nous ne nous intéresserons dans la suite qu'à des valeurs *entières* des exposants s_i.

variables des séries $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}$. « *Pourquoi ces séries* ? », demandera-t-on, car elles semblent provenir d'une nécessité ontologique autre que celle d'une apparition par laquelle le Multiple naît spontanément de l'Un.

Causalité multiplicative. Pour convenir d'une terminologie, l'entier k sera appelé la *profondeur* de la série zêta multiple $\zeta(s_1, s_2, \dots, s_k)$, et la somme $s_1+s_2+\cdots+s_k \in \mathbb{N}$ sera appelée son *poids*. En vertu d'une nécessité interne à la combinatoire des nombres, ces fonctions apparaissent presque obligatoirement lorsqu'on effectue le produit entre fonctions zêtas classiques à une variable ; voici donc une première réponse possible à la question du « *pourquoi* » qui manifestait son insatisfaction spontanée face à une définition non motivée. Il en faudra d'autres, et nous ne pourrons prétendre les délivrer véritablement, car cela demanderait un recul et une expertise que nous ne possédons pas : *connaître, en mathématiques, c'est d'abord accepter l'ignorance que l'on reçoit en partage*.

Par exemple, pour s et s' entiers tous deux $\geqslant 2$, le produit de deux sommes infinies :

$$\zeta(s)\cdot\zeta(s') = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{n'\geqslant 1}\frac{1}{n'^{s'}}$$

se développe naturellement en une somme doublement infinie, dans laquelle on est amené à distinguer les trois cas : $n = n'$; $n > n'$; et : $n < n'$ qui sont purement symétriques, c'est-à-dire de manière symbolique et générale en ne conservant que les opérateurs de sommation :

$$\sum_{n}\cdot\sum_{n'} = \sum_{n'=n} + \sum_{n>n'} + \sum_{n<n'},$$

ce qui nous donne, dans le cas qui nous intéresse ici :

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{s+s'}} + \sum_{n>n'\geqslant 1}\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{n'^{s'}} + \sum_{1\leqslant n<n'}\frac{1}{n^s}\,\frac{1}{n'^{s'}}.$$

Après interversion, dans la troisième somme, du produit $\frac{1}{n^s}\frac{1}{n'^{s'}} = \frac{1}{n'^{s'}}\frac{1}{n^s}$, on reconnaît la série $\zeta(s', s)$ écrite sous sa forme définitionnelle, et on obtient ainsi la formule élémentaire dite *de réflexion* :

$$\zeta(s)\,\zeta(s') = \zeta(s+s') + \zeta(s,\,s') + \zeta(s',\,s), \tag{1}$$

qui montre un premier *principe génétique inscrit dans le calcul* pour faire naître les séries zêtas à plusieurs variables. Mais puisque les atomes symboliques du calcul ne sont aucunement dotés d'un pouvoir d'auto-engendrement analogue à celui des systèmes vivants, il faut que la pensée se dépense en efforts de conceptualisation afin d'embrasser et de synthétiser véritablement le principe génétique qui est à l'œuvre ici.

Plusieurs autres commentaires métaphysiques s'offrent aussi à la méditation. Tout d'abord, c'est la division en trois sommations $\sum_{n=n'}$, $\sum_{n>n'}$

et $\sum_{n<n'}$ du produit de deux sommes infinies $\sum_n \cdot \sum_{n'}$ qui a *engendré* les séries zêtas à deux variables. La position de *définitions* en mathématiques est presque toujours antéposition *a posteriori* par rapport à des causalités métaphysiques plus profondes que le langage formel se résout à ne pas chercher à exprimer, l'objectif étant à vrai dire hors d'atteinte. Il n'en reste pas moins que ces causalités sont *dominatrices au sens faible*, sans impact direct sur l'antinomie générale entre préexistence *a priori* et construction *a posteriori* des objets mathématiques, mais en exerçant des *tensions archétypales locales* dans le tissu des relations — en grande partie invisibles — qui existent entre les objets mathématiques.

Par ailleurs, le calcul ci-dessus a montré que chacune des trois sommes possédait son autonomie propre en tant qu'objet naissant dans la décomposition. À la *non-invariance*, par rapport à la transposition $(s, s') \mapsto (s', s)$, de la somme double $\sum_{n>n'\geqslant 1} \frac{1}{n^s n'^{s'}}$ définie initialement, répond l'invariance d'une décomposition complètement symétrique (1), dans laquelle apparaissent $\zeta(s, s')$ *et* son homologue $\zeta(s', s)$. Enfin, les séries zêtas à deux variables se révèlent alors être des briques combinatoires élémentaires pour la déconstruction d'un produit, ces briques étant appelées *s'auto-engendrer par prolifération combinatoire*. Le sens en lequel elles s'avèrent être indécomposables reste à comprendre plus en profondeur, au fur et à mesure que l'on progresse dans la compréhension de leurs caractéristiques, voire de leur ubiquité unifiante en mathématiques.

> This subject has deep connections with many other mathematical topics : combinatorics (the theory of quasisymmetric functions, Radford's Theorem and Lyndon words), Lie and Hopf algebras, Écalle's theory of resurgent series, Goncharov's work on mixed Tate motives on $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$, polylogarithms, monodromy of differential equations, the fundamental group of the projective line minus thee points and Belyi's Theorem, the absolute Galois group of $\mathbb{Q}$, the group of Grothendieck-Teichmüller, knot theory and Vassiliev invariants, K-theory, Feynman diagrams and quantum field theory, quasi-triangular quasi-Hopf algebras and Drinfeld's associator Φ_{KZ} (related to the connection of Knizhnik-Zamolodchikov). [**49**], p. 582.

Dominer l'induction : deux approches inéquivalentes du produit de mélange. Maintenant, il est clair que la multiplication entre séries polyzêtas fait naître d'autres polyzêtas d'une plus grande profondeur. Dès que naissent les zêtas doubles par un procédé multiplicatif, l'exigence de compréhension commande d'examiner ce qu'il adviendrait en termes de *généralité maximale* si l'on effectuait tous les produits possibles entre séries zêtas multiples. Car on se convainc sans attendre qu'un procédé général est à l'œuvre ici.

Mais *ce procédé est-il essentiellement dominable par la pensée au moyen d'un nombre restreint de symboles* ? Telle est la vraie question, car il est très rare que l'on puisse fermer localement l'ouverture mathématique, c'est-à-dire répondre complétement à une question.

En tout cas, on peut au moins poursuivre les calculs et établir par exemple une formule analogue à la formule de réflexion (1) pour le produit entre un zêta double et un zêta simple :

$$\zeta(s,s')\,\zeta(s'') = \zeta(s,\,s',\,s'')+\zeta(s,\,s'',\,s')+\zeta(s'',\,s,\,s')+\zeta(s+s'',\,s')+\zeta(s,\,s'+s''),$$

en remarquant au niveau des multiplications de sommes que l'on a :

$$\sum_{n>n'} \times \sum_{n''} = \sum_{n>n'>n''} + \sum_{n>n''>n'} + \sum_{n''>n>n'} + \sum_{n=n''>n'} + \sum_{n>n'=n''} .$$

Après qu'un certain nombre de tels calculs effectués « en privé » par de nombreux mathématiciens depuis les premières découvertes d'Euler sur des feuillets manuscrits qui n'ont jamais été publiés, il faudra bien à un moment ou à un autre que la volonté de puissance conceptuelle ait remporté le combat contre cette générativité symbolique et qu'elle ait proposé, chez quelques mathématiciens du passé, un procédé général pour exprimer le résultat d'un produit quelconque de multizêtas, *sans avoir à conduire aucun calcul intermédiaire impliquant des sommes multiples*.

Rappelons que la genèse réelle d'un théorème général (même relativement élémentaire) passe par des degrés dialectiques extrêmement complexes et qu'il est quasiment impossible de se resituer réellement dans la situation d'ouverture que représente le fait de devoir chercher à exprimer généralement un phénomène que personne n'a exprimé auparavant, en inventant des concepts et en décortiquant les noyaux durs qui sont impliqués. Aussi nous contenterons-nous, comme c'est souvent le cas en philosophie des sciences, de proposer une analyse commentative *a posteriori* du théorème qui répond à la question : « *comment exprimer généralement la multiplication entre deux séries zêtas multiples* ? ».

Il existe deux versions d'un tel théorème[5] : **1)** une version algébrico-récursive qui explicite seulement les relations minimales qui sont suffisantes à l'engendrement ; et : **2)** une version explicite et concrète qui fournit une « recette » directement applicable pour calculer un produit quelconque de multizêtas. C'est cette deuxième version qui semble apporter le plus d'information, puisqu'elle ne repousse pas des calculs inachevés dans des formules d'induction ouvertes ; nous la présenterons alors en premier.

Soient donc $\underline{s} = (s_1, \dots, s_k)$ et $\underline{s}' = (s'_1, \dots, s'_{k'})$ deux suites finies d'entiers $\geqslant 1$ dont les longueurs k et k' sont en général distinctes, avec $s_1 \geqslant 2$ et $s'_1 \geqslant 2$ pour garantir la convergence. Alors le produit de $\zeta(\underline{s})$ par $\zeta(\underline{s}')$, à

[5] Nous nous inspirons librement de [**49**] et nous étoffons la technique de remarques philosophiques.

savoir :

$$\Bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1}\frac{1}{(n_1)^{s_1}\cdots(n_k)^{s_k}}\Bigg)\cdot\Bigg(\sum_{n'_1>\cdots>n'_{k'}\geqslant 1}\frac{1}{(n'_1)^{s'_1}\cdots(n'_{k'})^{s'_{k'}}}\Bigg),$$

est égal (*théorème*) à la somme de tous les multizêtas $\zeta(\underline{\sigma}) = \zeta(\sigma_1,\dots,\sigma_h)$ dont la profondeur h appartient à l'intervalle $\big[\max(k,k'),\, k+k'\big]$ qui sont obtenus par *mélange* de $\underline{s}$ et de $\underline{s}'$ comme suit. De toutes les manières possibles, on insère dans la suite $\underline{s} = (s_1,\dots,s_k)$ et dans la suite $\underline{s}' = (s'_1,\dots,s'_{k'})$, des 0 — y compris éventuellement avant le premier terme et après le dernier terme — afin de former deux suites de même longueur sans jamais laisser apparaître 0 à une même i-ème place, et on définit $\underline{\sigma} = (\sigma_1,\dots,\sigma_h)$ comme la somme, terme à terme verticalement, des deux suites ainsi construites. Par exemple, on a cinq possibilités pour mélanger (s,s') et (s''), que l'on peut représenter par un diagramme d'addition :

$$\begin{array}{ccc} s & s' & 0\\ 0 & 0 & s''\\ \hline s & s' & s'' \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} s & 0 & s'\\ 0 & s'' & 0\\ \hline s & s'' & s' \end{array}\qquad \begin{array}{ccc} 0 & s & s'\\ s'' & 0 & 0\\ \hline s'' & s & s' \end{array}\qquad \begin{array}{cc} s & s'\\ s'' & 0\\ \hline s+s'' & s' \end{array}\qquad \begin{array}{cc} s & s'\\ 0 & s''\\ \hline s & s'+s'' \end{array}$$

La *relation de mélange entre polyzêtas* s'écrit alors :

$$\zeta(\underline{s})\cdot\zeta(\underline{s}') = \sum_{\underline{\sigma}} \zeta(\underline{\sigma}),$$

où σ décrit toutes les suites $(\sigma_1,\dots,\sigma_h)$ ainsi obtenues par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$.

Cette description est mathématiquement très satisfaisante, parce qu'elle exprime un concept de mélange symbolique entre deux suites d'entiers quelconques dont certaines entrées sont autorisées à s'additionner parfois deux à deux, tandis que d'autres demeurent inchangées grâce à une dilatation préalable de chaque chaîne de caractères : insertion contrôlée et non redondante verticalement de symboles innocents 0. Rien dans cette définition n'indique un algorithme récursif de dénombrement, mais elle a le mérite de permettre, sur des cas concrets comme ci-dessus, de déterminer directement par des raisonnements simples toutes les suites $\underline{\sigma}$ qui doivent apparaître *sans avoir à effectuer tous les calculs de mélange entre suites de longueur inférieure*[6]. On pourrait aussi (*voir* ci-dessous) exprimer différemment cette recette de mélange en cherchant à se représenter géométriquement toutes les décompositions possibles d'un produit du type :

$$\Bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1}\mathsf{expression}(n_1,\dots,n_k)\Bigg)\cdot\Bigg(\sum_{n'_1>\cdots>n'_{k'}\geqslant 1}\mathsf{expression}(n'_1,\dots,n'_{k'})\Bigg).$$

[6] C'est bien là le défaut principal des procédés récursifs ouverts qui n'ont pas atteint le degré de fermeture exigible par une connaissance adéquate et complète : ils obligent à reparcourir toutes les étapes inférieures pour connaître le résultat à un niveau fixé à l'avance.

Venons-en maintenant à la première version du produit de mélange, qui est préférée par la pensée algébrique contemporaine en vertu d'une exigence non formulée qui souhaite contrôler la prolifération symbolique et la réduire à un nombre restreint de germes de procédés élémentaires. On considère tous les mots construits sur l'alphabet à deux lettres $X := \{x_0, x_1\}$. À chaque entier strictement positif $s \geqslant 1$, on associe le mot :

$$y_s := x_0^{s-1}\, x_1 = \underbrace{x_0 \cdots x_0}_{(s-1)\text{ fois}}\, x_1,$$

et à chaque suite finie $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ avec $k \geqslant 1$ qui est formée d'entiers quelconques $s_i \geqslant 1$, on associe le mot :

$$x_{\underline{s}} := y_{s_1} y_{s_2} \cdots y_{s_k}.$$

Ainsi, $x_{\underline{s}}$ est-il une suite finie de lettres x_0 et de lettres x_1. De plus, la profondeur k de $\underline{s}$ et son poids $s_1 + s_2 + \cdots + s_k$, tels qu'ils ont été définis plus haut, s'identifient respectivement au nombre d'occurences de x_1, et au nombre total de lettres x_0 ou x_1. On désigne ensuite par X^* l'ensemble de tous les mots écrits avec l'alphabet $X = \{x_0, x_1\}$, et on note $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ l'anneau des polynômes en les deux variables *non commutatives* x_0 et x_1 dont les coefficients sont rationnels : ce sont toutes les combinaisons $\sum \frac{p}{q} \cdot w$ linéaires de mots $w \in X^*$ à coefficients rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. On se convainc aisément qu'il y a une correspondance biunivoque entre les mots w de X dont la dernière lettre est x_1, c'est-à-dire les mots $w \in X^* x_1$, et les mots $x_{\underline{s}}$ qui sont associés à une suite finie $(s_1, s_2, \dots, s_k)$[7]. Il en découle que les *mots convergents*, à savoir ceux qui correspondent aux suites $\underline{s} = (s_1, s_2, \dots, s_k)$ telles que $s_1 \geqslant 2$, sont, outre le mot vide, exactement tous les mots de $X^* x_1$ qui commencent par x_0. Autrement dit, les mots convergents sont précisément les mots de $x_0 X^* x_1$. Pour un tel mot convergent $w \in x_0 X^* x_1$, si $\underline{s}(w)$ désigne la suite d'entiers $\geqslant 1$ qui lui est associée, on pose :

$$\zeta(w) := \zeta\big(\underline{s}(w)\big).$$

Pour $k = 0$, la suite vide $\underline{s} = \emptyset$ est codée par le mot vide qui sera noté e. Il est commode de convenir que $\zeta(\emptyset) = \zeta(e) = 1$. On prolonge alors par linéarité la définition de $\zeta(w)$ aux *polynômes convergents*, qui sont les éléments w de $\mathbb{Q}\langle X \rangle$ s'écrivant comme combinaisons linéaires à coefficients rationnels de mots de l'ensemble $x_0 X^* x_1$.

Nous pouvons maintenant énoncer la définition récursive du produit de mélange. Par récurrence sur la longueur des mots, on définit une loi interne $*$

[7] En effet, toute séquence continue de $(s-1)$ lettres x_0 interrompue par l'apparition de x_1 dans un mot correspond à $x_0^{s-1} x_1 = y_s$, et lorsque plusieurs lettres x_1 se suivent sans interruption, on a autant d'occurences de $y_1 = x_0^{1-1} x_1 = x_1$ avec des indices $s = 1$ tous égaux à 1.

sur l'ensemble X^*x_1, qu'on appelle *produit de mélange* et qui est associative et commutative, comme suit. Tout d'abord, le mot vide est neutre :

$$e * w = w * e = w,$$

pour tout w dans X^*x_1. Ensuite, pour tous entiers $s, t \geqslant 1$ et tous mots w, w' dans X^*x_1, en supposant que le produit de mélange $*$ soit déjà défini entre tous les mots de longueur inférieure ou égal au maximum des longueurs de w et de w', on définit :

$$(2) \qquad (y_s w) * (y_t w') := y_s(w * y_t w') + y_t(y_s w * w') + y_{s+t}(w * w').$$

On vérifie alors[8], avec les notations précédentes, que :

$$x_{\underline{s}} * x_{\underline{s}'} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}},$$

où σ décrit toutes les suites $(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ obtenues par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$, ce qui signifie que les relations de mélange introduites précédemment peuvent se réécrire :

$$\zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w * w'),$$

pour tous w et w' dans $x_0 X^* x_1$.

Rédiger la démonstration de ces deux assertions exigerait ou bien de procéder par récurrence (approche de type structuraliste, la plus économique), ou bien de formuler plus précisément et en toute généralité comment naissent les suites $(\sigma_1, \ldots, \sigma_h)$ par mélange entre $\underline{s}$ et $\underline{s}'$; c'est cette dernière approche plus explicite que nous allons mettre en œuvre ultérieurement. Se pose alors la question de déterminer, par l'analyse de la pensée, quelle est l'approche du mélange qui est la plus informative, la plus explicite, la plus synthétique, bref la plus en adéquation avec les exigences internes de la connaissance mathématique. Or notre thèse à ce sujet est la suivante : dans aucune des deux formules structuralistes :

$$x_{\underline{s}} * x_{\underline{s}'} = \sum_{\underline{\sigma}} x_{\underline{\sigma}} \qquad \text{et} \qquad \zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w * w')$$

d'apparence claire et simple, le mélange $*$ n'est réellement explicité. Ce que disent ces formules compactes s'en tient au niveau du résultat d'un processus admis, mais au fond essentiellement inconnu, si ce n'est au niveau absolument basique des mots de petites longueur grâce à la règle (2). Considérer ces formules comme de vrais théorèmes, ce serait un peu comme dire que la multiplication $a \cdot b = c$ entre deux nombres entiers a et b donne un troisième nombre entier c, sans réellement dire comment c s'exprime ou se calcule en fonction de a et de b. La notion de mélange est ainsi repoussée comme dans

[8] Dans [**49**], la démonstration de cette assertion — qui n'est pas véritablement immédiate — n'est pas fournie : elle est laissée au lecteur.

la boîte noire qu'est le symbole « $*$ », ou tout autre symbole atomique. Par là même, le mélange est donc considérée à la fois comme non problématique et comme donné acte dans le symbole « $*$ ». C'est donc dans l'alliance entre un symbolisme contracté et l'admission d'une donation en acte que se construit une représentation essentiellement fallacieuse du mélange, dans laquelle restent cachées des synthèses non exécutées qui demeurent en fait problématiques et difficiles à réaliser.

Carence synthétique du structuralisme. La définition inductive (2) du mélange convient parfaitement à la programmation sur ordinateur, parce qu'elle énonce une règle qui est extrêmement simple dès qu'on a suffisamment de puissance pour l'itérer brutalement : en effet, l'ordinateur calcule mécaniquement un produit donné $v * v'$ en lisant le premier y_i à gauche des deux mots $v = y_s w$ et $v' = y_t w'$ afin de développer le tout sous forme de trois termes comme ci-dessus. Ensuite, il réapplique la même règle élémentaire aux trois produits de mélange obtenus $w * y_t w'$, $y_s w * w'$ et $w * w'$, et ainsi de suite, jusqu'à épuisement des lettres y_i d'un côté ou de l'autre du symbole $*$, c'est-à-dire jusqu'à n'avoir que des produits de mélange de la forme triviale $u * e$ ou $e * u'$. À la fin, on obtient un très grand nombre de mots qui sont des concaténations de y_i. Notons que ce procédé simpliste est essentiellement exponentiel, puisque chaque produit de mélange partiellement développé donne en général naissance à trois 'fils'.

En procédant de cette manière, l'ordinateur n'effectue aucune synthèse, mais il peut lire à très grande vitesse plusieurs milliers de produits de mélange partiellement développés qui sont entrelacés à des monômes en les y_i, développer partiellement tous les produits de mélange lus, réorganiser le résultat, et recommencer à développer les produits de mélange restants jusqu'à épuisement. Aussi cette définition algébrique récursive est-elle à la fois satisfaisante sur le plan conceptuel, en tant qu'elle énonce explicitement quel est le *seul geste élémentaire* (2) que l'on doit connaître pour calculer un produit de mélange quelconque, et elle est à la fois *insatisfaisante*, en tant qu'elle maintient dans l'ombre ce qui se passe réellement lorsque tous les termes obtenus par développement se *mélangent algébriquement* pour donner au final un grand nombre de mots en les y_i. La règle unique et générale (2) dissimule donc une ignorance complète quant au résultat final qu'on est susceptible d'obtenir. S'en contenter, ce serait comme croire embrasser par le regard et par la pensée un chêne centenaire dont on ne connaîtrait que les régions de ramification, alors qu'aucune vision globale et synthétique ne s'en dégagerait. Après un moment de réflexion, on se convaincra aisément que ces remarques s'étendent quasiment sans modification à toute la pensée structuraliste dans son ensemble.

Dégager des règles atomiques et structurantes n'est qu'un moment liminaire d'*analyse* qui ne peut en rien se substituer à l'exigence mathématique universelle d'effectuer des *synthèses*.
Voici un exemple qui illustrera en quoi la règle structurale n'indique rien pour les synthèses. Il est tout à fait prévisible que pour certains couples de mots convergents w et w' de $x_0X^*x_1$ qui possédent une structure combinatoire particulière, l'*effectuation synthétique effective* du mélange fournisse des formules qui possèdent une certaine structure formelle harmonieuse, alors qu'une telle possibilité est purement potentielle du point de vue de la règle « structurale » (2).

□ Exemple : Conjecture de Zagier.

Penser synthétiquement l'engendrement du mélange. Reprenons maintenant le problème à partir de zéro. La question est : « comment deux polyzêtas se multiplient entre eux ? » L'objectif est de dépasser les deux approches précédentes : **1)** structures algébriques ; et : **2)** recette combinatoire, afin d'élaborer une *représentation synthétique explicite et complète* du produit de mélange. Comme le calcul tensoriel, une telle représentation sera amenée à consommer de nombreux indices, signes de sommation et points de suspension, mais ce n'est qu'à ce prix : *accepter le déploiement du symbolique*, que l'on pourra vraiment rendre ses droits à l'*exigence de synthèse* qui était essentiellement passée sous silence dans les deux précédentes approches. Synthétiser, c'est penser l'effectuation d'une ou plusieurs règles dans leur ensemble et en toute généralité. Mais chacune des deux approches **1)** et **2)** se contente d'énoncer seulement des règles élémentaires et algorithmisables, et néglige donc ouvertement :

□ l'exigence de penser le mélange entre séries polyzêtas, en toute généralité et sans restrictions, dialectiquement, progressivement et sur des exemples génériques ;

□ l'exigence de se confronter au problème peut-être délicat de *représenter symboliquement* la généralité quelconque du mélange entre séries polyzêtas.

Présentons donc une *approche synthétique*[9] qui réalisera — nous l'argumenterons — ces exigences. Au lieu de produits d'inverses $\frac{1}{(n_i)^{s_i}}$ de puissances d'entiers, supposons plus généralement que les deux sommandes soient constitués chacun de produits de longueur quelconque de fonctions arbitraires d'une variable entière, et considérons le produit :

$$\left(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)\right)\cdot\left(\sum_{n_{k+1}>\cdots>n_{k+l}\geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1})\cdots f_{k+l}(n_{k+l})\right),$$

[9] Les formules qui vont suivre ne sont pas tirées des articles spécialisés que nous avons pu consulter.

où les nombres k et l de produits de fonctions sont quelconques. Pour application aux polyzêtas, il suffira bien entendu de choisir les fonctions $f_h(n_h) := \frac{1}{(n_h)^{s_h}}$, où les s_h sont des entiers strictement positifs pour $h = 1, \dots, k, k+1, \dots, k+l$, avec $s_1 \geqslant 2$ et $s_{k+1} \geqslant 2$ pour assurer la convergence.

Quand on développe le produit, la plupart des termes sont tels qu'aucun des k premiers entiers $n_1, \dots, n_k$ n'est égal à un des l derniers entiers $n_{k+1}, \dots, n_{k+l}$. Laissons donc de côté pour l'instant les circonstances où des coïncidences se produisent (elles seront examinées ultérieurement), et étudions les termes de *mélange* « *pur* » entre les deux sommes, c'est-à-dire : définissons tous les entrelacement possibles *sans coïncidences* entre les deux suites d'inégalités strictes :

$$n_1 > \cdots > n_k \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} > \cdots > n_{k+l},$$

en respectant l'ordre strict de la première et de la deuxième suite. Par exemple, dans le cas $k = 3$ et $l = 2$, entrelacer sans coïncidences :

$$n_1 > n_2 > n_3 \qquad \text{et} \qquad n_4 > n_5$$

donne exactement dix suites distinctes d'inégalités entre $3 + 2 = 5$ entiers :

$$\begin{aligned}
&n_1 > n_2 > n_3 > n_4 > n_5, && n_1 > n_4 > n_5 > n_2 > n_3,\\
&n_1 > n_2 > n_4 > n_3 > n_5, && n_4 > n_1 > n_2 > n_3 > n_5,\\
&n_1 > n_2 > n_4 > n_5 > n_3, && n_4 > n_1 > n_2 > n_5 > n_3,\\
&n_1 > n_4 > n_2 > n_3 > n_5, && n_4 > n_1 > n_5 > n_2 > n_3,\\
&n_1 > n_4 > n_2 > n_5 > n_3, && n_4 > n_5 > n_1 > n_2 > n_3.
\end{aligned}$$

Chaque entrelacement constitue une suite d'inégalités strictes entre $k+l$ entiers, et il y a $\frac{(k+l)!}{k!\, l!}$ tels entrelacements distincts — observons que $\frac{(3+2)!}{3!\, 2!} = 10$ —, puisqu'il faut choisir k places parmi $k + l$ pour disposer les k entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$ sans déranger leur ordre décroissant, les l places restantes étant automatiquement occupés par $n_{k+1}, \dots, n_{n+l}$ sans déranger leur ordre décroissant. Au même moment, il faut repérer à quelle place, dans les $k + l$ places possibles, vont atterrir les entiers $n_1, n_2, \dots, n_k$, tandis que, comme nous venons de le dire, les autres entiers $n_{k+1}, n_{k+2}, \dots, n_{k+l}$ occuperont certainement et sans ambiguïté exactement les l places restantes. Disons alors que le premier entier n_1 va occuper la place $\sigma(1)$, où $\sigma(1)$ est un entier compris entre 1 et $k + l$, que le deuxième entier n_2 va occuper la place $\sigma(2)$, et ainsi de suite, c'est-à-dire généralement que chaque entier n_h pour tout $h = 1, \dots, k, k + 1, \dots, k + l$ va occuper une certaine place :

$$\sigma(h) \in \{1, \dots, k, k + 1, \dots, k + l\}.$$

Comme toutes les places sont distinctes et qu'elles doivent toutes être occupées d'après l'hypothèse temporaire de non-existence de coïncidences, σ constitue alors nécessairement une *bijection* de l'ensemble $\{1, \dots, k, k +$

$1, \dots, k+l\}$ sur lui-même. De plus, comme les inégalités doivent être respectées, on doit avoir :

$$\sigma(1) > \cdots > \sigma(k) \qquad \text{et} \qquad \sigma(k+1) > \cdots > \sigma(k+l).$$

Inversement, toute bijection σ de $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$ qui satisfait ces deux conditions entrelace les deux suites d'inégalités strictes $n_1 > \cdots > n_k$ et $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l}$.

On notera $\mathfrak{S}_{k+l}$ l'ensemble des bijections σ de l'ensemble $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, classiquement appelé *groupe des permutations de* $\{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, mais que nous préférons voir ici comme l'ensemble des applications de *changements de places* pour les entiers $n_1, \dots, n_k, n_{k+1}, \dots, n_{k+l}$, en conservant la *sémantique* propre au problème étudié ici[10]. Si σ^{-1} désigne la bijection inverse, l'entier qui atterrit à la première place dans la suite des $k+l$ inégalités modifiées n'est autre que $n_{\sigma^{-1}(1)}$, et plus généralement, l'entier $n_{\sigma^{-1}(h)}$ atterrit à la h-ème place, quel que soit $h \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\}$, et donc la série d'inégalités modifiées s'écrit :

$$n_{\sigma^{-1}(1)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(h)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(k+l)}.$$

Il découle de ces considérations que la collection de *tous* les termes *sans coïncidences* que l'on obtient en développant le produit des deux sommes considérées s'identifie à la comme suivante :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)}} \sum_{n_{\sigma^{-1}(1)} > \cdots > n_{\sigma^{-1}(k+l)} \geqslant 1} \bigg(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i(n_i) \prod_{1 \leqslant j \leqslant l} f_{k+j}(n_{k+j}) \bigg).$$

Enfin, pour se ramener à une vraie somme de la forme de celles dont on est parti, il suffit de poser :

$$n_{\sigma^{-1}(h)} =: n'_h \qquad \text{pour tout } \ h \in \{1, \dots, k, k+1, \dots, k+l\},$$

d'où $n_h = n'_{\sigma(h)}$, ce qui nous donne la somme typique :

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1) < \cdots < \sigma(k) \\ \sigma(k+1) < \cdots < \sigma(k+l)}} \sum_{n'_1 > \cdots > n'_{k+l} \geqslant 1} \bigg(\prod_{1 \leqslant i \leqslant k} f_i\big(n'_{\sigma(i)}\big) \prod_{1 \leqslant j \leqslant l} f_{k+j}\big(n'_{\sigma(k+j)}\big) \bigg).$$

On a donc traité le cas du mélange « pur », c'est-à-dire sans coïncidences ; dans le langage de la version **2)**, il s'agit du cas où il y a toujours exactement un 0 sur l'une des deux lignes du diagramme d'addition.

Le travail de synthèse qui précède a donc formulé le concept de *mélange sans coïncidences de deux suites ordonnées linéairement en respectant les*

[10] La synthèse est aussi bien un travail de mise en forme symbolique qu'un acte mental d'embrassement et de compréhension par la pensée. En aucun cas les notations symboliques ne doivent faire écran à l'expression dans la langue universelle de la pensée. C'est pourquoi la sémantique conceptuelle choisie doit être en adéquation avec la nature des obets étudiés, et l'on doit se garder d'exporter ou de déformer des significations initiales.

deux ordres. Ce concept n'était pas exprimé synthétiquement ni dans la version **1)**, ni dans la version **2)** : il demeurait dans l'ombre d'une induction non complétée. De plus, les raisonnements précédents ont montré explicitement le résultat du développement du produit — certes partiel, abstraction faite des termes qui incorporent des coïncidences —, en terme des fonctions $f_i(n_i)$.

Toutefois, un examen de l'application visée aux polyzêtas montre que le travail de synthèse et de métamorphose symbolique n'est pas encore complètement achevé[11]. Pour mieux comprendre et repérer les imperfections rémanentes d'une généralité travaillée, il faut revenir régulièrement aux exemples concrets : *entrelacement dialectique universel entre exemples et généralité*. Considérons alors, dans le développement du produit concret :

$$\bigg(\sum_{n_1>n_2>n_3\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}}\frac{1}{n_2^{s_2}}\frac{1}{n_3^{s_3}}\bigg)\cdot\bigg(\sum_{n_4>n_5\geqslant 1}\frac{1}{n_4^{s_4}}\frac{1}{n_5^{s_5}}\bigg),$$

le terme de mélange pur qui correspond par exemple au changement de place $\sigma : (1,2,3,4,5) \longmapsto (1,4,2,5,3)$, à savoir :

$$\sum_{n_1>n_4>n_2>n_5>n_3\geqslant 1}\frac{1}{n_1^{s_1}}\frac{1}{n_2^{s_2}}\frac{1}{n_3^{s_3}}\frac{1}{n_4^{s_4}}\frac{1}{n_5^{s_5}}.$$

En posant $n_1' = n_1$, $n_2' = n_4$, $n_3' = n_2$, $n_4' = n_5$ et $n_5' = n_3$, nous avons mis plus haut cette somme (dans le cas général) sous la forme :

$$\sum_{n_1'>n_2'>n_3'>n_4'>n_5'\geqslant 1}\frac{1}{n_1'^{\,s_1}}\frac{1}{n_3'^{\,s_2}}\frac{1}{n_5'^{\,s_3}}\frac{1}{n_2'^{\,s_4}}\frac{1}{n_4'^{\,s_5}},$$

mais les cinq inverses de nombres entiers ne sont pas écrits ici de telle sorte que les cinq nouveaux entiers n_1', n_2', n_3', n_4' et n_5' apparaissent dans le bon ordre. Il faut donc encore user de la commutativité du produit entre nombres

[11] Réflexe interrogatif transmis aux mathématiques par la méditation philosophique : « *l'achèvement est-il atteint* ? » Cette question métaphysique cruciale et omniprésente ne fait l'objet d'aucune analyse ou étude dans la pensée contemporaine. Elle s'inscrit aussi bien dans la dialectique hégélienne des étapes de la conscience vers le savoir absolu que dans la discussion des objectifs de recherche au niveau des grands organismes de recherche. Et puisque l'achèvement est rarement atteint en mathématiques, on se contente d'admettre une circulation, dans toutes les pensées intersubjectives en apprentissage, des grands paradigmes théoriques (algèbre linéaire, calcul différentiel et intégral, théorie de Galois, intégrale de Lebesgue, ...) qui ont signé comme un point d'orgue d'achèvement dans l'histoire des mathématiques, sans se rendre suffisamment compte que les marques de l'achèvement en tant qu'achèvement ne sont pas plus *méditées* actuellement qu'elles ne le furent par le passé, et qu'elles cachent la plupart du temps des marques encore plus profondes d'inachèvement intemporel.

rationnels pour réorganiser la somme comme suit :

$$\sum_{n'_1>n'_2>n'_3>n'_4>n'_5\geqslant 1} \frac{1}{{n'_1}^{s_1}}\,\frac{1}{{n'_2}^{s_4}}\,\frac{1}{{n'_3}^{s_2}}\,\frac{1}{{n'_4}^{s_5}}\,\frac{1}{{n'_5}^{s_3}},$$

et l'on reconnaît maintenant clairement le zêta multiple :

$$\zeta(s_1, s_4, s_2, s_5, s_3),$$

qui constitue l'un des dix polyzêtas de profondeur cinq apparaissant dans le développement du produit $\zeta(s_1, s_2, s_3)\,\zeta(s_4, s_5)$. Si nous revenons donc à notre somme typique dans le cas général, il nous faut encore réorganiser les deux produits multiples :

$$\prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_i\big(n'_{\sigma(i)}\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{k+j}\big(n'_{\sigma(k+j)}\big) = f_1\big(n'_{\sigma(1)}\big)\cdots f_k\big(n'_{\sigma(k)}\big)\, f_{k+1}\big(n'_{\sigma(k+1)}\big)\cdots f_{k+l}\big(n'_{\sigma(k+l)}\big),$$

de manière à ce que les $k+l$ entiers $n'_1, \dots, n'_k, n_{k+1'}, \dots, n'_{k+l}$ soient lus dans l'ordre croissant. Bien entendu, c'est le symbole de changement de place inverse σ^{-1} qu'il faut employer pour transformer ce double produit multiple comme voulu en le produit :

$$\begin{aligned} f_{\sigma^{-1}(1)}\big(n'_1\big)\,\cdots f_{\sigma^{-1}(k)}\big(n'_k\big)\, f_{\sigma^{-1}(k+1)}\big(n'_{k+1}\big)\cdots f_{\sigma^{-1}(k+l)}\big(n'_{k+l}\big) &= \\ = \prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_{\sigma^{-1}(i)}\big(n'_i\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{\sigma^{-1}(k+j)}\big(n'_{k+j}\big)&, \end{aligned}$$

dans lequel $n'_1, \dots, n'_k$, $n'_{k+1}, \dots, n'_{k+l}$ apparaissent dans le bon ordre. En définitive, pour ce qui concerne seulement les sommes sans coïncidences (comme nous en avions convenu temporairement), nous avons donc achevé la synthèse du développement, et nous lui avons donné une forme déployée :

$$\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\\ \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}} \sum_{n'_1>\cdots>n'_{k+l}\geqslant 1} \bigg(\prod_{1\leqslant i\leqslant k} f_{\sigma^{-1}(i)}\big(n'_i\big) \prod_{1\leqslant j\leqslant l} f_{\sigma^{-1}(k+j)}\big(n'_{k+j}\big)\bigg)},$$

que nous allons commenter dans un instant. Dans le cas des polyzêtas, on en déduit immédiatement comme corollaire que dans le produit de $\zeta(s_1, \dots, s_k)$ avec $\zeta(s_{k+1}, \dots, s_{k+l})$, la somme de tous les termes de mélange pur qui ne font pas apparaître de coïncidences est égale à :

$$\boxed{\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{k+l}} \sum_{\substack{\sigma(1)<\cdots<\sigma(k)\\ \sigma(k+1)<\cdots<\sigma(k+l)}} \zeta\big(s_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, s_{\sigma^{-1}(k)}, s_{\sigma^{-1}(k+1)}, \dots, s_{\sigma^{-1}(k+l)}\big)}\,.$$

Voilà donc nos premières formules. Avant d'étudier le cas beaucoup plus délicat des sommes avec coïncidences, arrêtons-nous un instant pour comparer cette troisième approche aux deux versions précédentes **1)** et **2)** du produit de mélange. Ici, la recette pratique qui consistait à insérer des 0 est proprement synthétisée et elle est réalisée en toute généralité pour ce qui concerne le mélange pur : en effet, la formule encadrée montre avec toutes les précisions nécessaire quels sont tous les zêtas multiples qui doivent apparaître, avec leurs arguments exacts. Cette formule dit tout d'abord qu'une somme portera sur toutes les bijections σ de l'ensemble $\{1,\dots,k,k+1,\dots,k+l\}$; mais aussi, on ne considère que, et exactement que, les bijections qui respectent l'ordre croissant des k premiers, et des l derniers termes. On voit donc ici que la sommation exprimée sur ces bijections *réalise complètement* la synthèse de pensée qui était sous-jacente à la recette de mélange avec insertion de zéros. Cette règle très pratique et très intuitive lorsque k et l sont de petits entiers en restait au niveau manipulatoire et particulier, consciente peut-être des germes de synthèse et de généralité qui pouvaient y être entrevus, mais non mobilisée par le devoir de formuler le procédé sous-jacent pour le dépasser et pour l'embrasser. Toute synthèse mathématique doit être un *dépassement et un embrassement*, exigé de l'intérieur, mais aussi nécessaire pour repartir ensuite à la rencontre d'autres exigences de synthèse : c'est l'aspect proprement *dynamique* de l'irréversible-synthétique. Ensuite, après cette déclaration explicite de sommation, laquelle doit donc aussi bien être vue comme symbolisée mathématiquement qu'exprimée dans la langue synthétique universelle de la pensée (comme nous venons de le faire), apparaît l'information la plus importante : le *résultat générique* que donne le produit de mélange pur, à savoir les *arguments précis* des polyzêtas qui doivent apparaître, leur nombre $(k+l)$, et leurs indices, *tous exprimés d'une manière visiblement régulière en fonction de l'inverse de la bijection* σ. Il s'agit donc bien là d'une *synthèse* : domination de l'engendrement analytique et expression compacte de la généralité. Et au niveau micro-symbolique, d'autres synthèses secondaires s'emboîtent dans la synthèse principale, comme le montre par exemple la présence des quatre séries de points de suspension, ou encore, le fait d'admettre que σ^{-1} est donné en même temps que σ.

Le cas des sommes avec coïncidences. L'étude de cas par approfondissement progressif en complexité, et le maintien du lien intuitif aux cas déjà traités par spécialisation sont des figures dialectiques classiques de la pensée mathématique, et elles marquent aussi l'omniprésence du synthétique.

Avec l'objectif maintenant de lever la restriction temporaire concernant l'inexistence de coïncidences, reprenons donc le produit initial à développer :

(3)
$$\bigg(\sum_{n_1>\cdots>n_k\geqslant 1} f_1(n_1)\cdots f_k(n_k)\bigg)\cdot\bigg(\sum_{n_{k+1}>\cdots>n_{k+l}\geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1})\cdots f_{k+l}(n_{k+l})\bigg),$$

et considérons maintenant le cas le plus général possible où un certain nombre, disons ρ, d'entiers n_i parmi les k entiers $n_1,\dots,n_k$ coïncident avec ρ entiers parmi les l autres entiers $n_{k+1},\dots,n_{k+l}$, avec bien sûr

$\rho \leqslant \min(k, l)$. Autrement dit, supposons qu'il existe deux ρ-uplets d'indices ordonnés :

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\rho \leqslant k \qquad \text{et} \qquad 1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_\rho \leqslant l$$

dont les entiers associés coïncident par paires :

$$n_{i_1} = n_{k+j_1}, \quad n_{i_2} = n_{k+j_2}, \quad \ldots\ldots, \quad n_{i_\rho} = n_{k+j_\rho}.$$

Le cas $\rho = 0$ s'identifie à ce qui a déjà été amplement étudié. Pour fixer « géométriquement » les idées, on peut former un diagramme qui représente, sous forme encadrée, les coïncidences d'entiers dans les deux successions suivantes d'inégalités décroissantes [12] :

(4)

$$\begin{array}{ccccccccccccc} n_1 & > & \cdots & > & n_{i_1-1} & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_1} \\ n_{k+j_1} \end{array}} & > & n_{i_1+1} & > & \cdots & > & n_{i_2-1} & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_2} \\ n_{k+j_2} \end{array}} \\ n_{k+1} & > & \cdots & > & n_{k+j_1-1} & > & & > & n_{k+j_1+1} & > & \cdots & > & n_{k+j_2-1} & > & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} > & \cdots\cdots & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_{\rho-1}} \\ n_{k+j_{\rho-1}} \end{array}} & > & n_{i_{\rho-1}+1} & > & \cdots & > & \boxed{\begin{array}{c} n_{i_\rho} \\ n_{k+j_\rho} \end{array}} & > & \cdots & > & n_k \\ > & \cdots\cdots & > & & > & n_{k+j_{\rho-1}+1} & > & \cdots & > & & > & \cdots & > & n_{k+l}. \end{array}$$

À nouveau, la diagrammatisation est un acte de synthèse spécifique ; au-delà d'une dichotomie logique (égalité *versus* différence), au-delà d'une expression combinatoire indicielle (ordonnancement des indices), la mise en correspondance visuelle des coïncidences et des non-coïncidences confère une *géométrie* à l'acte de pensée initial. Pour les $k - \rho + l - \rho$ entiers se situant entre les blocs de coïncidences, le mélange pourra alors se faire en appliquant les principes du paragraphe précédent. Tout d'abord, les $i_1 - 1 + j_1 - 1$ entiers :

$$n_1 > \cdots > n_{i_1-1} \qquad \text{et} \qquad n_{k+1} > \cdots > n_{k+j_1-1}$$

qui apparaissent à gauche de la première coïncidence dans (4) pourront s'entrelacer *sans auncune coïncidence* en respectant l'ordre décroissant dans lequel ils sont ordonnés par blocs. Plus précisément, on considère l'ensemble des bijections σ_1 de l'ensemble :

$$\big\{1, \ldots, i_1 - 1, k+1, \ldots, k + j_1 - 1\big\}$$

[12] On fera attention au fait que le nombre k d'entiers à la première ligne n'est pas égal, en général, au nombre l d'entiers de la deuxième ligne, contrairement à ce que l'alignement des entiers non encadrés, des signes d'inégalité et des points de suspension pourrait faire croire. De même, entre deux blocs encadrés, le nombre d'entiers à la première ligne est en général distinct du nombre d'entiers à la deuxième ligne. Cette remarque admise, il faut alors embrasser synthétiquement les deux séries d'inégalités en spécifiant, par une sorte de « sursynthèse mentale », les écarts de longueurs que le formalisme n'indique pas. Des « sursynthèses mentales » *innombrables* accompagnent et complètent le langage mathématique formalisé, et sans elles, aucune fécondation de l'intuition de recherche ne serait possible.

sur lui-même, que l'on identifie (implicitement) à l'ensemble des i_1-1+j_1-1 premiers entiers strictement positifs, et l'on se restreint à la considération des bijections σ_1 qui satisfont, *via* une telle identification (implicite)[13] :

$$\sigma_1(1) < \cdots < \sigma_1(i_1-1) \qquad \text{et} \qquad \sigma_1(k+1) < \cdots < \sigma_1(k+j_1-1).$$

De manière analogue, les $i_2-i_1-1+j_2-j_1-1$ entiers situés entre les deux coïncidences $n_{i_1}=n_{k+j_1}$ et $n_{i_2}=n_{k+j_2}$ du diagramme (4), à savoir :

$$n_{i_1+1} > \cdots > n_{i_2-1} \qquad \text{et} \qquad n_{k+j_1+1} > \cdots > n_{k+j_2-1}$$

pourront s'entrelacer *sans aucune coïncidence* au moyen de toutes les bijections σ_2 de l'ensemble :

$$\big\{i_1+1,\dots,i_2-1,\ k+j_1+1,\dots,k+j_2-1\big\}$$

qui satisfont les deux séries d'inégalités :

$$\sigma_2(i_1{+}1) < \cdots < \sigma_2(i_2{-}1) \qquad \text{et} \qquad \sigma_2(k{+}j_1{+}1) < \cdots < \sigma_2(k{+}j_2{-}1).$$

De proche en proche, on introduit des bijections similaires σ_3, ..., σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$. Alors, quand on développe le produit (3), tous les termes possibles seront collectés de la manière suivante.

□ Spécifier le nombre ρ de coïncidences entre la première liste $n_1 > \cdots > n_k$ d'entiers strictement décroissants et la deuxième liste $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l}$, pour toutes les valeurs possibles $\rho = 0,1,2,\dots,\min(k,l)$.

□ Spécifier précisément les entiers qui coïncident, c'est-à-dire établir le diagramme complet (4) des coïncidences et des différences.

Ces deux spécifications reviennent à dire que le développement complet du produit (3) devra commencer par la déclaration synthétique de toutes ces possibilités-là, organisées naturellement sous la forme de trois sommations explicites :

$$\sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \ \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k} \ \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l},$$

et les expressions suivantes devront, de quelque manière, faire apparaître les coïncidences $n_{i_1}=n_{k+j_1}$, ..., $n_{i_2}=n_{k+j_2}$, $n_{i_\rho}=n_{k+j_\rho}$. Le choix d'une spécification effectuée en acte correspond à se placer à droite du troisième symbole de sommation. Ensuite, il s'agit, pour chaque paire de séries d'inégalités situées dans le diagramme (4) entre deux blocs de coïncidence d'effectuer le mélange pur, c'est-à-dire de réaliser simultanément des mélanges

[13] En fait, puisque $k+1 > i_1-1$, il n'est pas nécessaire de faire une telle identification pour que les inégalités en question signifient, comme voulu, que les ordres de chacun des deux blocs soient préservés.

purs par paquets :

$$\infty \geqslant \left\{\begin{array}{l} n_1 > \cdots > n_{i_1} \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+1} > \cdots > n_{k+j_1-1} \end{array}\right\} > n_{i_1} > \left\{\begin{array}{l} n_{i_1+1} > \cdots > n_{i_2-1} \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+j_1+1} > \cdots > n_{k+j_2-1} \end{array}\right\} > n_{i_2} > \cdots$$
$$\cdots > n_{i_\rho} > \left\{\begin{array}{l} n_{i_\rho+1} > \cdots > n_k \\ \text{mélange pur avec} \\ n_{k+j_\rho+1} > \cdots > n_{k+1} \end{array}\right\} \geqslant 1.$$

Grâce aux développements qui précèdent, on peut, pour chaque paquet, exprimer le résultat du mélange pur au moyen des bijections σ_1, σ_2, …, σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$. En définitive, on obtient donc la proposition générale suivante qui *synthétise* tous les aspects du produit de mélange et qui exprime complètement et de manière absolument explicite le résultat du développement du produit (3). Tel qu'il est exprimé ici, le résultat n'apparaît pas dans la littérature spécialisée sur le sujet, et nous utilisons le symbole de référence bibliographique vide « **[**$*$**]** » pour signifier la légère nouveauté (ou originalité) de l'énoncé. Le produit $f(n)g(n)$ de deux fonctions d'un même entier $n \geqslant 1$ sera noté $[fg](n)$ afin de mettre en exergue le fait que les arguments des deux fonctions coïncident. Bien entendu, de tels produits apparaîtront précisément aux entiers de coïncidence n_{i_1}, n_{i_2}, …, n_{i_ρ}.

Proposition. [$*$**]** *Soient $k \geqslant 1$ et $l \geqslant 1$ deux entiers et pour tout $h \in \{1, \ldots, k, k+1, \ldots, k+l\}$, soit :*

$$\mathbb{N}_{>0} \ni n_h \mapsto f_h(n_h) \in \mathbb{C}$$

une fonction d'une seule variable entière $n_h \geqslant 1$ et à valeurs complexes. Alors le produit des deux sommations sur collections d'entiers indicés et strictement croissants :

$$\Bigg(\sum_{n_1 > \cdots > n_k \geqslant 1} f_1(n_1) \cdots f_k(n_k)\Bigg) \cdot \Bigg(\sum_{n_{k+1} > \cdots > n_{k+l} \geqslant 1} f_{k+1}(n_{k+1}) \cdots f_{k+l}(n_{k+l})\Bigg),$$

se développe et se réorganise sous la forme d'une somme triple de sommations similaires :

$$
\sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_\rho\leqslant k} \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\cdots<j_\rho\leqslant l}
\sum_{\substack{\sigma_1\in\text{Bijections}(\{1,\dots,i_1-1,k+1,\dots,k+j_1-1\})\\ \sigma_1(1)<\cdots<\sigma_1(i_1-1)\ \text{et}\ \sigma_1(k+1)<\cdots<\sigma_1(k+j_1-1)}}
\sum_{\substack{\sigma_2\in\text{Bijections}(\{i_1+1,\dots,i_2-1,k+j_1+1,\dots,k+j_2-1\})\\ \sigma_2(i_1+1)<\cdots<\sigma_2(i_2-1)\ \text{et}\ \sigma_2(k+j_1+1)<\cdots<\sigma_2(k+j_2-1)}} \cdots
$$

$$
\sum_{\substack{\sigma_\rho\in\text{Bijections}(\{i_{\rho-1}+1,\dots,i_\rho-1,k+j_{\rho-1}+1,\dots,k+j_\rho-1\})\\ \sigma_\rho(i_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(i_\rho-1)\ \text{et}\ \sigma_\rho(k+j_{\rho-1}+1)<\cdots<\sigma_\rho(k+j_\rho-1)}}
\sum_{\substack{\sigma_{\rho+1}\in\text{Bijections}(\{i_\rho+1,\dots,k,k+j_\rho+1,\dots,k+l\})\\ \sigma_{\rho+1}(i_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k)\ \text{et}\ \sigma_{\rho+1}(k+j_\rho+1)<\cdots<\sigma_{\rho+1}(k+l)}}
$$

$$
\sum_{\substack{n'_1>\cdots>n'_{i_1-1}>n'_{k+1}>\cdots>n'_{k+j_1-1}>n_{i_1}>n'_{i_1+1}>\cdots>n'_{i_2-1}>n'_{k+j_1+1}>\cdots>n'_{k+j_2-1}>n_{i_2}>\cdots\cdots>\\ >n_{i_{\rho-1}}>n'_{i_{\rho-1}+1}>\cdots>n'_{i_\rho-1}>n'_{k+j_{\rho-1}+1}>\cdots>n'_{k+j_\rho-1}>n_{i_\rho}>n'_{i_\rho+1}>\cdots>n'_k>n'_{k+j_\rho+1}>\cdots>n'_{k+l}\geqslant 1}}
$$

$$
f_{\sigma_1^{-1}(1)}(n'_1)\cdots f_{\sigma_1^{-1}(i_1-1)}(n'_{i_1-1})f_{\sigma_1^{-1}(k+1)}(n'_{k+1})\cdots f_{\sigma_1^{-1}(k+j_1-1)}(n'_{k+j_1-1})\big[f_{i_1}f_{k+j_1}\big](n_{i_1})
$$

$$
f_{\sigma_2^{-1}(i_1+1)}(n'_{i_1+1})\cdots f_{\sigma_2^{-1}(i_2-1)}(n'_{i_2-1})f_{\sigma_2^{-1}(k+j_1+1)}(n'_{k+j_1+1})\cdots f_{\sigma_2^{-1}(k+j_2-1)}(n'_{k+j_2-1})\big[f_{i_2}f_{k+j_2-1}\big](n_{i_2})
$$

$$
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
$$

$$
f_{\sigma_\rho^{-1}(i_{\rho-1}+1)}(n'_{i_{\rho-1}+1})\cdots f_{\sigma_\rho^{-1}(i_\rho-1)}(n'_{i_\rho-1})f_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_{\rho-1}+1)}(n'_{k+j_{\rho-1}+1})\cdots f_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_\rho-1)}(n'_{k+j_\rho-1})\big[f_{i_\rho}f_{k+j_\rho}\big](n_{i_\rho})
$$

$$
f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(i_\rho+1)}(n'_{i_\rho+1})\cdots f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k)}(n'_k)f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+j_\rho+1)}(n'_{k+j_\rho+1})\cdots f_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+l)}(n'_{k+l}).
$$

sur collections d'entiers indicés et strictement croissants :

$$
n'_1>\cdots>n'_{i_1-1}>n'_{k+1}>\cdots>n'_{k+j_1-1}>n_{i_1}>n'_{i_1+1}>\cdots>n'_{i_2-1}>n'_{k+j_1+1}>\cdots>n'_{k+j_2-1}>n_{i_2}>\cdots\cdots
$$

$$
>n_{i_{\rho-1}}>n'_{i_{\rho-1}+1}>\cdots>n'_{i_\rho-1}>n'_{k+j_{\rho-1}+1}>\cdots>n'_{k+j_\rho-1}>n_{i_\rho}>n'_{i_\rho+1}>\cdots>n'_k>n'_{k+j_\rho+1}>\cdots>n'_{k+l}\geqslant 1,
$$

en nombre total égal à $k+l-\rho$.

Cette formule n'est particulièrement longue et complexe que parce que la synthèse impliquée le requiert, et dans un instant, nous allons la réexprimer dans le langage universel de la pensée afin de bien démontrer qu'elle réalise la synthèse désirée d'une manière qui est tout à fait déchiffrable et accessible[14]. Néanmoins, fréquemment dans la pensée mathématique contemporaine, un accord tacite existe pour reléguer de telles formules au rang de « monstres » indignes d'apparaître dans les textes publiés, sous couvert de lisibilité et d'accessibilité. Ou encore : le formalisme notationnel étant d'une plasticité extraordinaire, on fera tout pour contracter les symboles : supprimer les points de suspension ; admettre des abréviations ; quantifier d'une manière qui n'est pas constructive. Et pour légitimer ce travail de remodelage, on argumenterait tacitement qu'il y aurait comme un « plafond de verre » admis intersubjectivement pour la longueur « acceptable » des formules mathématiques. Mais il n'y a aucune raison *a priori* pour que les

[14] Bien que le formalisme mathématique aime à se structurer d'une manière quelque peu ésotérisme, notamment en abaissant le pourcentage de mots de la langue naturelle qui interviennent dans les énoncés et dans leurs démonstrations, tout ce qui est écrit ou publié peut être lu uniquement en termes de la langue universelle de la pensée.

synthèses mathématiques soient limitées en taille, et d'ailleurs, l'expression synthétique du produit de mélange lié au séries polyzêtas n'est qu'une pièce élémentaire dans l'examen des conjectures diophantiennes (*voir* plus bas), d'autres pièces devant être aussi convoquées qui exigent de leur côté leur propres synthèses (fussent-elles longues elles aussi), et ensuite, d'autres synthèses entre ces pièces synthétiques seront de surcroît nécessaire pour avancer dans l'exploration des relations algébriques entre polyzêtas. Autrement dit : nous essayons de dire que le calcul à plusieurs variables exige d'*effectuer des synthèses entre synthèses autonomes*, et que très vite, la présence ubiquitaire de calculs hétérogènes et disparate place les mathématiques en face de synthèses entre synthèses qui sont très difficiles à réaliser, à formuler, ou à embrasser d'une manière satisfaisante, que ce soit par des actes de l'esprit ou par un symbolisme approprié. En tout état de cause, sachant déjà qu'une synthèse « à part » et autonome comme l'est celle que nous venons de proposer pour le produit de mélange s'avère souvent difficile à réaliser ou même à embrasser mentalement, on devine déjà maintenant que dans la suite des recherches sur les propriétés diophantiennes des polyzêtas, on sera essentiellement contraint, au moins actuellement, d'abandonner l'espoir de réaliser pleinement les synthèses entre synthèses, et on est donc conduit à calculer avec des ordinateurs dans certains cas particulier, sans pourvoir (pour l'instant) travailler réellement au niveau de la généralité quelconque. Comment en effet injecter et manipuler algébriquement des formules du type de celles qui sont encadrées ci-dessus et ci-dessous dans des calculs difficiles avec des séries hypergéométriques multiples ?

Argumentons toutefois, en relisant notre longue formule, que la synthèse autonome et indépendante que nous avons proposée ci-dessus est tout à fait accessible à la pensée universelle, grâce aux développements qui précèdent. Voici donc comment on doit ou on peut (re)lire cette formule.

Le produit (3) à calculer se réorganise comme somme de produits du même type pour lesquels les sommations portent sur un nombre égal à $k + l - \rho$ d'entiers satisfaisant $n''_1 > \cdots > n''_{k+l-\rho} \geqslant 1$, où ρ peut prendre toutes les valeurs comprises entre 0 et $\min(k, l)$. Pour chaque valeur de ρ, on choisit ρ entiers $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_\rho \leqslant k$ et aussi ρ entiers $1 \leqslant j_1 < \cdots < j_\rho \leqslant l$ qui seront les indices de coïncidences entre les deux séries d'inégalités $n_1 > \cdots > n_k \geqslant 1$ et $n_{k+1} > \cdots > n_{k+l} \geqslant 1$ présentes dans chacun des deux termes du produit (3). Une fois ce choix fait, que l'on peut représenter par le diagramme (4), on effectue la somme sur tous les changements de places σ_1, ..., σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$ qui respectent l'ordre de chacune des deux lignes d'entiers distincts placées entre deux blocs de coïncidence, ce qui fait $\rho + 1$ telles sommations au total. Enfin, une fois choisis ρ, les entiers de coïncidences $i_1, \dots, i_\rho$, $j_1, \dots, j_\rho$ et les changements de place σ_1, ..., σ_ρ, $\sigma_{\rho+1}$, on trouve comme souhaité une somme du même type général que les deux sommes à multiplier, et cette nouvelle somme possède les caractères suivants. Elle porte sur $k+l-\rho$ entiers satisfaisant $n_1'' > \cdots > n_{k+l-\rho}'' \geqslant 1$, et l'argument de cette somme est un certain produit de fonctions f_h de ces arguments $n_1'', \ldots, n_{k+l-\rho}''$ (intervenant dans le même ordre) ; de plus, les indices h des fonctions qui apparaissent sont paramétrés par les bijections déjà introduites : la première livrée de telles fonctions fait intervenir l'inverse σ_1^{-1} de la bijection σ_1, et en fin de ligne, on trouve le produit des deux fonctions f_{i_1} et f_{k+j_1} du même argument $n_{i_1} = n_{k+j_1}$ qui correspond à la première coïncidence préassignée par les choix précédents ; la seconde livré fait de même en termes de σ_2^{-1}, et se termine par $\big[f_{i_2} f_{k+j_2}\big](n_{i_2})$, et ainsi de suite, ce qui termine notre (re)lecture de la formule synthétique. Il est important d'ajouter que la synthèse mentale proposée par cette formule ne sera réellement possible que si on la met à tout instant en correspondance dialectisante et synthétisante avec la formule plus simple du mélange pur, qui apparaît d'ailleurs précisément comme la collection de sommations correspondant au premier choix d'un nombre nule $\rho = 0$ de coïncidences. Autrement dit, nous affirmons sans hésiter que le synthétique, en mathématique, ne peut pas se dispenser d'une activité mentale ou intuitive qui a le pouvoir de concentrer et d'embrasser beaucoup plus d'information que ne le font les textes écrits, lesquels sont pris dans la guangue de leurs choix et de leurs symboles, et sont incapables aussi d'exprimer toutes les relations pensées au moment de la genèse. Ce serait comme si on pouvait s'imaginer que les brouillons et esquisses des écrivains rayonnent encore quelque peu dans les textes littéraires pour en faire ce qu'ils sont sans que l'on s'en rende reéellement compte au moment de la lecture. Le non-écrit n'en est pas moins *pensé*.

Corollaire. *En particulier, le produit de deux séries zêtas multiples convergentes s'exprime explicitement comme la somme suivante de séries zêtas* *multiples :*

$$
\boxed{
\begin{aligned}
&\zeta\big(s_1, s_2, \ldots, s_k\big) \cdot \zeta\big(s_{k+1}, s_{k+2}, \ldots, s_{k+l}\big) = \\
&= \sum_{\rho=0}^{\min(k,l)} \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_\rho \leqslant k} \sum_{1 \leqslant j_1 < j_2 < \cdots < j_\rho \leqslant l} \\
&\qquad \sum_{\substack{\sigma_1 \in \text{Bijections}(\{1,\ldots,i_1-1,k+1,\ldots,k+j_1-1\}) \\ \sigma_1(1) < \cdots < \sigma_1(i_1-1) \text{ et } \sigma_1(k+1) < \cdots < \sigma_1(k+j_1-1)}} \quad \sum_{\substack{\sigma_2 \in \text{Bijections}(\{i_1+1,\ldots,i_2-1,k+j_1+1,\ldots,k+j_2-1\}) \\ \sigma_2(i_1+1) < \cdots < \sigma_2(i_2-1) \text{ et } \sigma_2(k+j_1+1) < \cdots < \sigma_2(k+j_2-1)}} \cdots \\
&\qquad \sum_{\substack{\sigma_\rho \in \text{Bijections}(\{i_{\rho-1}+1,\ldots,i_\rho-1,k+j_{\rho-1}+1,\ldots,k+j_\rho-1\}) \\ \sigma_\rho(i_{\rho-1}+1) < \cdots < \sigma_\rho(i_\rho-1) \text{ et } \sigma_\rho(k+j_{\rho-1}+1) < \cdots < \sigma_\rho(k+j_\rho-1)}} \quad \sum_{\substack{\sigma_{\rho+1} \in \text{Bijections}(\{i_\rho+1,\ldots,k,k+j_\rho+1,\ldots,k+l\}) \\ \sigma_{\rho+1}(i_\rho+1) < \cdots < \sigma_{\rho+1}(k) \text{ et } \sigma_{\rho+1}(k+j_\rho+1) < \cdots < \sigma_{\rho+1}(k+l)}} \\
&\zeta\Big(s_{\sigma_1^{-1}(1)}, \ldots, s_{\sigma_1^{-1}(i_1-1)}, s_{\sigma_1^{-1}(k+1)}, \ldots, s_{\sigma_1^{-1}(k+j_1-1)}, s_{i_1} + s_{k+j_1}, \\
&\quad s_{\sigma_2^{-1}(i_1+1)}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(i_2-1)}, s_{\sigma_2^{-1}(k+j_1+1)}, \ldots, s_{\sigma_2^{-1}(k+j_2-1)}, s_{i_2} + s_{k+j_2}, \\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\quad s_{\sigma_\rho^{-1}(i_{\rho-1}+1)}, \ldots, s_{\sigma_\rho^{-1}(i_\rho-1)}, s_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_{\rho-1}+1)}, \ldots, s_{\sigma_\rho^{-1}(k+j_\rho-1)}, s_{i_\rho} + s_{k+j_\rho}, \\
&\quad s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(i_\rho+1)}, \ldots, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k)}, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+j_\rho+1)}, \ldots, s_{\sigma_{\rho+1}^{-1}(k+l)} \Big)
\end{aligned}
}
$$

dont le nombre d'arguments est compris entre $k + l - \rho$ et $k + l$.

Le produit de mélange lié aux intégrales de Chen.

$$\zeta(w) \cdot \zeta(w') = \zeta(w \sqcup\!\sqcup w').$$

Theorem 42.

Chapitre :
Dynamique de l'égalité

Un calcul simple.

Identité à soi de l'être égal à lui-même

Le mauvais et plat concept d'égalité, c'est celui auquel tout le monde pense :

$$A = A,$$

et qui nous vient toujours immédiatement à l'esprit : la tautologie logique de l'assertion d'identité à soi-même, répétition immensément vide de l'être qui se déclare « être ce qu'il est et rien de plus, sinon » — raisonnons mécaniquement par l'absurde — « il ne serait plus rigoureusement égal à lui-même ».

Répétition et différence

Mais déjà la répétition est une première différence. L'« A » du premier « A », comme une initiale de ce qui subsume un genre possible du divers, ou encore, comme désignation de variable mathématique susceptible d'endosser un champ spécifique du numérique ou un domaine intangible de l'univers ensembliste zermélo-fraenkélien, ce « premier A » tout simple que nous écrivons dans un premier temps avec toute la lenteur physique d'un scribe, d'un étudiant, ou d'un élève :

$$A =$$

suspendus que nous sommes dans l'« $=$ » qui le suit, ce premier « A » quête par nature un *alter ego* et recherche aussi un « deuxième A » qui ne sera pas « premier A », et donc sera déjà un peu et d'une certaine manière un « A » autre que « A ».

Culte du signe « $=$ »

Tel est le jeu fascinant de la *dynamique de l'égalité* : comme tous les gestes virtuoses du géomètre qui se produit en conférence et au tableau, ce signe-fétiche et merveilleux dont sont remplies nos milliers de pages de calculs est toujours *germe virtuel d'une différence et d'une nouveauté* ; il nous sert indéfiniment à propulser vers l'avant l'« irréversible-synthétique » — ce *sang* des mathématiques que Kant n'avait pas vu — et à faire rebondir inlassablement nos intuitions. Entre ces deux barres horizontales :

$$=$$

c’est en effet une boule centripète de questions possibles qui sont prises en sandwich. Et si le signe retenu par l’histoire importe peu, seule compte la *dynamique intrinsèque de l’égalité*, demandeuse insatiable d’altérité.

Renverser l’ordre des symboles

C’est pour toutes ces raisons et d’autres encore plus complexes et plus profondes que les deux règles suivantes doivent gouverner l’alchimie interne des manuscrits étoffés de calculs délicats.

Règle 1 : Donner la préséance au zéro. Ne jamais écrire : « $\mathsf{X} = 0$ », mais toujours à l’inverse :

$$0 = \text{une expression longue et complexe},$$

comme par exemple [arxiv.org/abs/0910.2861/] — excusez du peu ! — :

$$\boxed{\begin{aligned}
0 = \sum_{\mu=1}^{n+1}\sum_{\nu=1}^{n+1}\Bigg[&\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{k_2}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{k_2}\partial\bar t^\tau}\right\}-\\
&-\tfrac{\delta_{k_1,\ell_1}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\bar t^\tau}\right\}-\\
&-\tfrac{\delta_{k_1,\ell_2}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{k_2}\partial\bar t^\tau}\right\}-\\
&-\tfrac{\delta_{k_2,\ell_1}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell_2}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\bar t^\tau}\right\}-\\
&-\tfrac{\delta_{k_2,\ell_2}}{n+2}\sum_{\ell'=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell_1}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell'}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{k_1}\partial z_{\ell'}\partial\bar t^\tau}\right\}+\\
&+\tfrac{1}{(n+1)(n+2)}\cdot\big[\delta_{k_1,\ell_1}\delta_{k_2,\ell_2}+\delta_{k_2,\ell_1}\delta_{k_1,\ell_2}\big]\cdot\\
&\cdot\sum_{\ell'=1}^{n}\sum_{\ell''=1}^{n}\Delta^{\mu}_{[0_{1+\ell'}]}\cdot\Delta^{\nu}_{[0_{1+\ell''}]}\left\{\Delta\cdot\frac{\partial^4\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{\ell''}\partial\bar t_\mu\partial\bar t_\nu}-\sum_{\tau=1}^{n+1}\Delta^{\tau}_{[\bar t^\mu\bar t^\nu]}\cdot\frac{\partial^3\Theta}{\partial z_{\ell'}\partial z_{\ell''}\partial\bar t^\tau}\right\}.
\end{aligned}}$$

Règle 2 : Au positif, préférer le négatif. Commencer toute addition suspendue par un signe « $-$ » et placer volontairement les signes « $-$ » au début des équations et des parenthèses, comme par exemple :

$$y_{xx} = -\square^1_{xx} + y_x\cdot\big(-2\,\square^1_{xy}+\square^0_{xx}\big)+(y_x)^2\cdot\big(-\square^1_{yy}+2\,\square^0_{xy}\big)+(y_x)^3\cdot\square^0_{yy}.$$

L’algèbre immanente nous est inaccessible

Nonobstant tout ce que le jeu dominant du *conceptuel a posteriori* aime à faire accroire, les mathématiques *sont dans leur essence même* du calcul pur. La dynamique d’égalisation n’est qu’une simple arme humaine de mobilité dans l’immobilité symbolique. Mais l’algèbre quant à elle, non locale, non temporelle et non sérielle synthétise toutes les relations possibles immanentes dans son internalité immobile inaccessible. Prenons donc l'altérisation dynamique du concept d'égalité comme le signe de notre incapacité à voir vraiment le :

$$A = A$$

absolu de l'Algèbre.

Réponse no. 1 : Qui pense abstrait ?

Flagrant délit de métaphysique

Subsumer ? Trop abstrait ? Sauve qui peut ! J'entends déjà qu'on s'écrie : excès de pédantisme, vocabulaire scolastique, langue philosophique obscure. Car « métaphysique », lance Hegel, « ainsi qu'« abstrait », et à peu de chose près aussi, « penser », est le mot devant lequel chacun plus ou moins fuit, comme on détale devant un pestiféré ».

Subsumer $=$ englober une catégorie d'étants [mathématiques] multiples

Le « A » qui « **subsume un genre possible du divers** [rapporte, réfère à un espèce, à un genre ; établit un rapport de l'objet à l'essence à laquelle il appartient], c'est donc bien le « A » archétypal de la pensée mathématique susceptible d'héberger, sous un seul symbole choisi arbitrairement, tout une catégorie multiple d'êtres mathématiques rassemblés par une propriété définitionnelle commune. Acte de pensée universel : se représenter un objet quelconque spécifique : « Soit A une algèbre associative et commutative, *etc.* » ; « Soit G un groupe de Lie compact connexe semi-simple, *etc.* » ; « Soit X un espace analytique normal $(n-1)$-complet, *etc.* », en un mot et en un seul :

« Soit A un « objet » mathématique défini mais général et quelconque »,

incipit mathématique absolu plus chargé de métaphysique *tue* que ne l'est l'existence des objets sensibles.

Hegel à la rescousse

Concrétude imparable de l'abstraction : voilà ci-dessous un exemple ironique et grinçant qui rappelle à merveille la capacité *effrayante* que la conscience a de *projeter brutalement* tout objet de jugement dans l'espace bipolarisé le plus étroit qui soit : celui du « oui » ou du « non », du « bon » ou du « mauvais », du « bien » ou du « mal ».

Mais pourrions-nous faire des mathématiques sans jongler perpétuellement avec le « plus » et le « moins » de l'instinct rationnel ? Pourrions-nous nous passer de hiérarchiser, d'attribuer des médailles (olympiques) au compte-goutte, de classer, de reclasser et de déclasser les universités et les laboratoires, de désigner officiellement quelques « meilleurs », et d'exprimer le tout dans la novlangue immédiatement intuitive des chiffres et des indicateurs, des indices d'impact, et autres critères de Shangaï ? Non ! Plus forte que tout, l'*abstraction qui projette*, c'est un acte primal de *subsomption et d'englobement* qui est essentiel à notre survie dans un monde qui ne cesse de se complexifier.

Subsumer, c'est abstraire, et tout le monde le fait

« Éh la vieille, vos œufs sont pourris ! », dit l'acheteuse à la marchande. « Quoi, répliqua celle-ci, mes œufs pourris ? Pour moi, c'est elle qui est pourrie ! Me dire ça de mes œufs ! Elle ! Les poux n'ont-ils pas dévoré votre père sur un chemin de campagne, votre mère ne s'est-elle pas enfuie avec les Français et votre grand-mère n'est-elle pas morte à l'hospice ? Qu'elle s'achète pour son foulard de pacotille une chemise convenable ! Son foulard et ses bonnets, on sait bien d'où elle les tient ! Sans les officiers, certaines ne seraient pas aussi bien nippées et, si les « Madames » faisaient plus attention à leur ménage, plus d'une croupirait derrière les barreaux ! Qu'elle commence déjà par repriser les trous de ses bas ! » Bref, elle ne tisse aucun bon fil sur elle. **Elle pense abstraitement en la <u>subsumant</u> [und subsumiert sie] tout uniment** — avec son foulard, ses bonnets, sa chemise, *etc.*, ses doigts et d'autres parties, son père et sa famille entière — **sous le crime d'avoir trouvé ses œufs pourris** ; tout en elle se trouve de part en part coloré par ces œufs pourris, tandis que ces officiers dont la marchande parlait — si tant est, ce dont on peut douter, qu'il y ait eu quoi que ce soit à propos — ont pu parvenir à voir en elle de tout autres choses. »

Georg Wilhelm Friedrich Hegel, Qui pense abstrait ? [Wer denkt abstract ?], 1807. Édition bilingue accompagnée d'une notice et d'un essai sur l'exotérisme hégélien, par Ari Simhon, Hermann Éditions (depuis 1876), Paris, 2007, 176 pp.

Mathématiciens, refusons d'être « subsumés » de la sorte !

Que vise le site Images des Mathématiques ? puisqu'il s'inscrit dans le contexte d'une volonté étatique appuyée de « réformer » le système universaliste du savoir scientifique, tant dans sa pérennisation que dans sa créativité ? Sortie des tours d'ivoire, adresses au Grand Public, « justifications » vis-à-vis de la société, vulgarisation, échange, partage, et attraction des jeunes esprits : le but est de créer et d'entretenir un antidote médiatique à la « subsomption-de-la-marchande-aux-œufs-pourris », et de répondre si possible au même moment à trois objections trop populaires :

Objection no. 1 : « Mais voyons, toutes ces mathématiques abstraites et déconnectées de la réalité, sont-elles *utiles* ? À quoi peuvent-elles donc bien *servir* ? »

Objection no. 2 : « Je vois, c'est un peu comme l'art en quelque sorte, les mathématiciens sont des artistes ».

Objection no. 3 [prétendûment fatale] : « Mais quand même, l'art est accessible à bien des gens. Je ne suis pas sûr qu'il en soit de même de vos groupes et espace p-adiques. . . ».

Philosopher ?

Mais ce n'est pas là que le bât blesse le plus cruellement. À quelque niveau que ce soit, plus personne dans nos sociétés « internetisées » n'est, ne se sent, ou ne peut être en charge de répondre sérieusement à la question : D'où venons-nous ? Que faisons-nous ? Où allons-nous ? Quelles sont les racines métaphysiques de la pensée mathématique ? Triste sort d'impuissance qui nous est réservé présentement, quand l'on pense à l'alliance ancestrale entre la mathématique et la philosophie !

« Explosion » des mathématique, abondance, profusion, confusion, et saturation de l'information : ce ne sont que des excuses ! Au contraire, penser — philosopher ? — reste éternellement nécessaire. Et seule la fréquentation des grands textes littéraires et philosophiques *dans lesquels toutes ces questions sont ardemment remuées* permet de surnager au jour le jour. Il nous faut alors mettre aussi au point une artillerie (lourde ?) de *stratagèmes argumentatifs imparables* afin de convaincre les jeunes esprits que la pensée est une mer navigable dans laquelle on slalome entre les errances passées afin de se construire une sagesse possible.

La cloche de Nietzsche

« Il ne suffit pas que tu comprennes dans quelle ignorance vivent l'homme et l'animal ; il faut encore que tu aies la volonté d'ignorance et que tu en fasses l'apprentissage. Il est nécessaire pour toi que tu comprennes que sans ce genre d'ignorance la vie elle-même serait impossible, qu'elle est une condition nécessaire pour que le vivant se conserve et prospère : une grande, une solide cloche d'ignorance doit t'enclore de toutes parts. »

Friedrich NIETZSCHE*, Fragments posthumes, Été-automne 1884, 26 [294], Paris, Gallimard, vol. X, 1982, p. 254.*

Réponse no. 2 : Prendre garde aux questions philosophiques déjà traitées !

Chère Michelle,

non non, cela ne passe au-dessus de la tête de personne. Ce que je dis est très simple. Je dis qu'on effleure, sur le site IDM, des questions trop difficiles, et qu'on ne peut pas se dispenser de se ressourcer régulièrement – quand on guerroie avec ces questions – aux grandes pensées littéraires et philosophiques.

Sinon, ce serait un peu comme si une communauté donnée, par exemple une communauté spéciale d'historiens des mathématiques, se mettait à recréer un espace de recherche en mathématiques en étudiant des questions qu'elle croie "ouvertes", alors qu'au sein de la communauté des mathématiciens professionnels, tout le monde sait fort bien que ces questions-là sont résolues depuis des siècles.

Ils nous feraient rire, de tels historiens des mathématiques, n'est-ce pas !

Deuxième réponse aujourd'hui, il y en aura d'autres, tant les questions que tu m'adresses sont nombreuses et délicates. C'est très précieux de pouvoir bénéficier d'interactions, merci.

Amitiés,

Joël

Réponse no. 3 : Corollaire métaphysique sur le calcul

Circulations conceptuelles fluides

Une tradition choisit de *contourner* les calculs. C'est-à-dire : de *ne pas faire* certains calculs. Ou de se les déclarer consensuellement comme n'étant pas faisables, pas exhibables. Et de se convaincre en privé par des tentatives avortées que tel est bien le cas. C'est un peu comme s'habituer à circuler en voiture sur des routes goudronnées : pourquoi s'imposerait-on de se lancer hors-sentier et pieds-nus à travers champs et dans la montagne hostile ?

Hilbert et Gromov

Rien jusqu'à présent n'a contredit la conviction qu'exprimait Hilbert en 1900 : *tout problème mathématique est résoluble mathématiquement*. Gromov va encorer plus loin : *We solve our problems essentially as fast as we state them. It took, probably, a couple of thousand brain-hours to state the Fermat theorem and mere instance (compared to* $\exp 2000$*) to solve it, no more than* 10^5 *brain-hours.*

Corollaire : *aucun calcul n'est infaisable*.

Explorer librement et sauvagement afin de mieux appréhender l'ouverture

Ce n'est que dans l'*a posteriori* de l'exploration libre et sauvage que certaines branches de calculs ébauchés pourront être envisagées comme superflues par rapport à tout objectif prédéfini, par exemple démontrer une conjecture. L'ouverture mathématique, c'est magnétique : on peut et on *doit* calculer dans toutes les directions possibles. Partout, des portes attirent, partout, des connexions sont possibles. Mais alors, comment embrasser tout cela ?

Explication

C'est cet état de fait aussi troublant et incompréhensible que l'est la perception chez les êtres animés que désignait l'affirmation énigmatique « L'algèbre [...] synthétise toutes les relations possibles immanentes dans son internalité immobile inaccessible ». L'Algèbre, c'est l'Être de Parménide ; le guerrier, c'est

comme ce dont on peut se dispenser par rapport à un objectif minimaliste qui parle le langage admis de la contraction symbolique à tout prix.

Réponse no. 3 : A postérioricité du conceptuel

Courbure de Gauss

Dès 1810, Gauss soupçonne le caractère *intrinsèque* de la courbure d'une surface plongée dans l'espace euclidien tridimensionnel standard. En 1825 et après de nombreuses tentatives, il parvient enfin à avérer causalement une vérité mathématique d'ordre supérieur au moyen d'une immédiateté formelle : la courbure d'une métrique induite $ds^2 = E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,dudv + G(u,v)\,dv^2$ sur une surface s'exprime par une expression algébrico-différentielle du second ordre en les dérivées partielles des fonctions E, F et G :

$$\frac{1}{4\,(EG-F^2)^2}\Bigg\{E\left[\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}+\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2\right]+$$

$$+F\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial v}-\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial v}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+4\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}-2\,\frac{\partial F}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}\right]+$$

$$+G\left[\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial G}{\partial u}-2\,\frac{\partial E}{\partial u}\cdot\frac{\partial F}{\partial v}+\left(\frac{\partial E}{\partial v}\right)^2\right]-2\left(EG-F^2\right)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial v^2}-2\,\frac{\partial^2 F}{\partial u\partial v}+\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}\right]\Bigg\}.$$

Dans les premières pages de ses *Disquisitiones generales circa supercies curvas* (1827), Gauss présente le calcul d'élimination virtuose qui, partant de l'expression *extrinsèque* de la courbure d'une surface graphée, aboutit à cette expression longue et complexe.

Éliminer les éliminateurs de l'élimination

À André Weil pour qui les calculs d'élimination devait être éradiqués de la géométrie algébrique, Abhyankar opposait qu'il faut maintenant *éliminer les éliminateurs de la théorie de l'élimination*.

Méthode d'équivalence de Cartan

branche infinie dans l'arbre de Hilbert

Ce calcul magnifique de Gauss est racine d'une Racine Méthode d'équivalence de Cartan pour les structures différentielles : univers de caculs possibles, Changements de perspective, calculs de courbure pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles analytiques complètement intégrables :

A postérioricité du conceptuel

Christoffel avec son symbole (1869) contracte une partie du calcul de courbure de Riemann. Le calcul tensoriel (Levi-Civita et Ricci-Curbastro, 1901) et la connexion sans torsion (Levi-Civita, 1918) apparaissent un demi-siècle après l'habilitation de Riemann. Comment se fait-il que dans le cambouis saturé des indices, Riemann avait vu tous les les invariants. Comment l'*expliquer* ?

Genèse des harmonies formelles

Que cherche *à tout moment* le calculateur intelligent ?

Guerriers du calcul pur

Théorie de Galois effective

Ce n'est pas parce que la correspondance magique entre sous-groupes du groupe de Galois d'une équation algébrique irréductibe sur $\mathbb{Q}$ et sous-corps du corps engendré par les racines brille de tous les feux que le problème

On s'enorgueillit Galois « Sauter à pieds joints sur les calculs »

Infaisabilités relatives

Jouer

Homework

Pourquoi les calculs pilotés sur ordinateur faillissent-t-ils dans toute

Donner au moins trois raisons philosophiques convaincantes.

Réponse no. 3 : L'« irréversible-synthétique ».

Réponse 3 : Le conceptuel est un

Bibliographie

[1] Bailey, D. ; Borwein, J. : *Mathematics by experiment. Plausible reasoning in the 21st century*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, second edition, 2008, xi+371 pp.

[2] Bailey, D. ; Borwein, J. ; Girgensohn, R. : *Experimentation in mathematics. Computational paths to discovery*, A.K. Peters, Ltd., Wellesley, Massachusetts, first edition, 2004, x+357 pp.

[3] Beukers, F. : *A note on the irrationality of* $\zeta(2)$ *and* $\zeta(3)$, Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 268–272.

[4] Beukers, F. : *Gauss' hypergeometric function*, in : "Arithmetic and geometry around hypergeometric functions", pp. 23–42, Progress in Mathematics, Vol. 260, Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[5] Browder, F. : *Mathematical developments arising from Hilbert problems*, Symposium in Pure Mathematics Dekalb IL 1974, Providence RI American mathematical society 1976, xii+628 pp.

[6] Cavaillès, J. : *Réflexions sur le fondement des mathématiques*, IX$^{\text{e}}$ Congrès Descartes, 1937, Actualités Scientifiques et Industrielles **535**, Hermann, Paris.

[7] Chapman, R. : *Evaluating* $\zeta(2)$, www.secamlocal.ex.ac.uk/∼rjc/etc/zeta2.pdf

[8] Christoffel, B. : *Über die Transformation der homogenen Differentialausdrücke* 2^{ten} *Grades*, Borchardt J. LXX. 46–70. 1870 (1870).

[9] Costermans, C. ; Enjalbert, J.-Y. ; Minh, H.N. ; Petitot, M. : *Structure and asymptotic expansion of multiple harmonic sums*, ISSAC'05, 100–107 (electronic), ACM, New York, 2005.

[10] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Erster Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xii+638 pp. (1888). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[11] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Zweiter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, viii+559 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[12] Engel, F. ; Lie, S. : *Theorie der transformationsgruppen. Dritter und letzter Abschnitt*. Unter Mitwirkung von Dr. Friedrich Engel, bearbeitet von Sophus Lie, Verlag und Druck von B.G. Teubner, Leipzig und Berlin, xxix+836 pp. (1890). Reprinted by Chelsea Publishing Co., New York, N.Y. (1970)

[13] Epstein, D. ; Levy, S. : *Experimentation and proof in mathematics*, Notices of the Amer. Math. Soc. **42** (1995), no. 6, 670–674.

[14] Euler, L. : *De summis serierum reciprocarum*, Comm. Acad. Sci. Petrop. **7** (1734/1735), 123–134. Opera Omnia I :14, 1924, pp. 73–86.

[15] Fischler, S. : *Irrationalité de valeurs de zêta [d'après Apéry, Rivoal, ...]*, Séminaire Bourbaki, 55$^{\text{e}}$ année, 2002–2003, n$^{\text{o}}$ 910, Astérisque **294** (2004), 27–62.

[16] Hegel, G.W.F. : *Leçons sur l'histoire de la philosophie. Introduction, bibliographie, philosophie orientale*, Traduction de Gilles Marmasse, Paris, Librairie philosophique J. Vrin, 2004, 207 pp.

[17] Hilbert, D. : *Sur les problèmes futurs des mathématiques. Les 23 problèmes*, Paris, Gauthier-Villars, 1902, 59 pp ; réédition Gabay, 1990.

[18] Iwasawa, H. : *Gaussian integral puzzle*, Notices of the Amer. Math. Soc. **56** (2009), no. 2, 38–41.

[19] Le Robert, *Dictionnaire culturel en langue française*, sous la direction d'Alain Rey, Paris, 2005. Article « Labyrinthe ».

[20] Manin, Y. : *A course in mathematical logic*. Translated from the Russian by Neal Koblitz. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 53, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1977, xiii+286 pp.

[21] Matiyasevich, Y.V. : *Hilbert's tenth problem*. Translated from the 1993 Russian original by the author. With a foreword by Martin Davis. Foundations of Computing Series, MIT Press, Cambridge, MA, 1993, xxiv+264 pp.

[22] Merker, J. : *On the local geometry of generic submanifolds of* $\mathbb{C}^n$ *and the analytic reflection principle*, Journal of Mathematical Sciences (N. Y.) **125** (2005), no. 6, 751–824.

[23] Merker, J. : *An algorithm to generate all polynomials in the* k*-jet of a holomorphic disc* $D \to \mathbb{C}^n$ *that are invariant under source reparametrization*, arxiv.org/abs/0808.3547/

[24] Merker, J. : *Sophus Lie, Friedrich Engel et le problème de Riemann-Helmholtz*, arxiv.org/abs/0910.0801/, Hermann Éditeur des Sciences et des Arts, Paris, $\sim$320 pages, à paraître en 2010.

[25] Merker, J. : *Algebraic differential equations for entire holomorphic curves in projective hypersurfaces of general type*, in preparation.

[26] Merker, M. : *Sophus Lie and Friedrich Engel's Theory of Transformation Groups (Vol. I, 1888). Modern Presentation and English Translation*, in preparation.

[27] Nathanson, M.B. : *Desperately seeking mathematical truth*, arxiv.org/abs/0809.1372/

[28] Passare, M. : *How to compute* $\sum 1/n^2$ *by solving triangles*, Amer. Math. Monthly **115** (2008), no. 8, 745–752.

[29] Patras, F. : *La pensée mathématique contemporaine*, Paris, Presses Universitaires de France, 2001, 195 pp.

[30] van der Poorten, A. : *A proof that Euler missed ... Apéry's proof of the irrationality of* $\zeta(3)$, Math. Intelligencer **1** (1979), 195–203.

[31] Riemann, B. : *Gesammelte mathematische Werke und Wissenschaftlicher Nachlass*, édité avec l'aide de R. Dedekind et H. Weber, Leipzig, Teubner, 1876 ; 2ème édition par H. Weber, 1892.

[32] Riemann, B. : *Sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une grandeur donnée*, pp. 145–155 in [**33**].

[33] Riemann, B. : *Œuvres mathématiques*, traduites en français par L. Laugel, Gauthier-Villars, Paris, 1898. Réédition J. Gabay, Paris, 1990.

[34] Riemann, B. : *Sur la psychologie et la métaphysique*, traduit en français dans : *Fusion*, no. 92, septembre-octobre 2002.

[35] Rivoal, T. : *Irrationalité d'au moins un des neuf nombres* $\zeta(5), \zeta(7), \dots, \zeta(21)$, Acta Arith. **103** (2002), no. 2, 157–167.

[36] Rivoal, T. : *Séries hypergéométriques et irrationalité des valeurs de la fonction zêta de Riemann*, J. Théor. Nombres Bordeaux **15** (2003), no. 1, 351–365.

[37] Schraen, B. : *Introduction à la géométrie* p*-adique rigide*, Exposé à la journée de réception des prix de l'Académie des Sciences, ENS Ulm, Paris, 6 novembre 2009.

[38] Smadja, I. : *Essai sur la notion de schématisme en arithmétique*, Thèse de doctorat, Université de Paris I Panthéon-Sorbonne, juin 2002, 553 pp.

[39] Smale, S. : *Mathematical problems for the next century*, Mathematics : frontiers and perspectives, eds. Arnold, V., Atiyah, M., Lax, P. and Mazur, B., Amer. Math. Soc., 2000.

[40] Stanton, N. : *Infinitesimal CR automorphisms of real hypersurfaces*, Amer. J. Math. **118** (1996), no. 1, 209–233.

[41] Szczeciniarz, J.-J. : *Copernic et la révolution copernicienne*, Nouvelle bibliothèque scientifique, Flammarion, Paris, 1998, 438 pp.

[42] Szczeciniarz, J.-J. : *Le phénomène Hartogs*, pp. 39–58.

[43] Szczeciniarz, J.-J. : *L'Un et le Multiple : réflexions sur le passage en plusieurs variables complexes*, Paris, Hermann, pp. 269–286.

[44] Szczeciniarz, J.-J. : *La Terre immobile. Ptolémée, Husserl*, préface de Thibault Damour, Paris Presses universitaires de France, 2003 xii+418 pp.

[45] Stillwell, J. : *Classical topology and combinatorial group theory*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 72 Springer-Verlag, New York, 1993, xii+334 pp.

[46] Stillwell, J. : *Galois theory for beginners*, Amer. Math. Monthly **101** (1994), no. 1, 22–27.

[47] Stillwell, J. : *Sources of hyperbolic geometry. History of Mathematics*, vol. 10, American Mathematical Society, Providence, RI ; London Mathematical Society, London, 1996. x+153 pp.

[48] Tichmarsh, E.C. : *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford, Clarendon Press, 1951.

[49] Waldschmidt, M. : *Valeurs zêtas multiples. Une introduction*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux **12** (2000), 581–595.

[50] Zagier, D. : *Values of zeta functions and their applications*, in : "First European congress of mathematics", Vol. II, pp. 497–512, Progress in Mathematics, Birkhäuser, Boston, 1994.

[51] Zagier, D. : *D. Newman's short proof of the prime number theorem*, Amer. Math. Monthly **104** (1997), no. 8, 705–708.