NOTES PRÉLIMINAIRES SUR UN TRAVAIL DE Z. TIAN

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE

1. Introduction

Ce texte est une approche partielle d'un travail en cours d'achèvement de Zhiyu Tian (ZT1, ZT2, ZT3), qui s'appuie sur un travail de Kollár et Tian [KT] et utilise des résultats récents de Scavia et Suzuki [SS [SS1].

La motivation est un cas de la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur les variétés sur un corps fini fibrées sur une courbe, avec la "traduction" connue en termes d'obstruction de Brauer-Manin pour les zéro-cycles sur la fibre générique (voir par exemple CT-Kahn).

Pour X/C un solide fibré en surfaces rationnelles sur une courbe sur un corps fini, par exemple une famille de surfaces cubiques lisses sur une telle courbe, le théorème 1.12 de [ZT] dit que *l'application cycle*

$$CH^2(X) \ \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Dans l'état actuel, le présent texte, qui est simplement une lecture d'une partie de l'article [ZT], présente ce résultat (théorème 6.3 ci-dessous) en prenant comme boîtes noires :

(a) Le théorème 4.7 de [ZT] (dont la preuve utilise [KT] et des méthodes et résultats de Suslin et Voevodsky).

(b) Le théorème 7 de Kollár-Tian [KT]

(c) Un résultat de Scavia et Suzuki [SS].

Soit $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$. On a la suite exacte

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \to 0.$$

Il y a deux parties indépendantes dans la démonstration du théorème 6.3.

(1) Montrer que $H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G$ est couvert par $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell$.

(2) Montrer que $CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell$ couvre $H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$, où $CH^2(X)_{alg}$ est le sous-groupe des cycles algébriquement équivalents à zéro.

La partie (1) se déduit relativement facilement du résultat principal de l'article [KT] (Kollár-Tian). Cette déduction est faite dans [ZT1] (p. 35/36, ZT2 ; p. 36/37 ZT3). J'ai quelques arguments pour simplifier cette partie. Voir la démonstration du théorème 6.3 ci-dessous.

La partie (2) est faite dans [ZT1, ZT2, ZT3]. Elle repose en partie sur un article de Scavia-Suzuki, et aussi sur des résultats géométriques dans [KT].

La discussion principale dans [ZT] porte sur le point suivant. On a plusieurs sous-groupes de $H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$:

$$\tilde{N}^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \subset \tilde{N}^1_{cor} H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \subset N^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \subset H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Date: 1 octobre 2023.

Il s'agit des premiers crans des filtrations de la cohomologie obtenus par la codimension du support. Le premier groupe vient de la filtration forte, le second est partie de la filtration obtenu à partir des correspondances de base une variété projective et lisse, le troisième est partie de la filtration (faible) par la codimension du support (classes nulles sur un ouvert de Zariski).

Scavia-Suzuki (Lemma 5.4 de [SS] ; Lemma 2.1 de [SS2]) montrent (en suivant un argument de C. Voisin)

$$\tilde{N}^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \tilde{N}^1_{cor} H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2).)$$

Ils montrent ensuite ([SS], Thm 1.5 et 8.1] ; [SS2], Prop. 5.11) que l'image de $H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$ dans $H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est couverte par $CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell$.

Pout X/C comme ci-desssus, des méthodes connues (théorème 4.2 (7) ci-dessous) donnent que l'on a

$$N^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Théorème 1.1. *(Z. Tian) Pour X/C famille comme ci-dessus, on a*

$$\tilde{N}^1_{cor} H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = N^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

et donc

$$\tilde{N}^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = \tilde{N}^1_{cor} H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = N^1 H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Cela fait l'objet du thm. 4.14 de [ZT1, ZT2], qui s'appuie sur le thm. 4.7 de [ZT1, ZT2, ZT3]. Le "commutative diagram" (5) dans la démonstration du thm. 4.14 de [ZT2] (page 31 de [ZT2, ZT3]) et son interprétation jouent un rôle crucial.

Combiné avec les résultats rappelés ci-dessus, ceci donne :

Théorème 1.2. *(Z. Tian) Pour X/C famille comme ci-dessus, l'application cycle*

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

Un résultat de [CTSS] donne alors que cette application est un isomorphisme.

Remarque 1.3. Comme mentionné dans une des versions antérieures du texte de Tian, pour $X/\mathbb{F}(C)$ une surface géométriquement rationnelle, pour établir la conjecture sur l'existence d'un zéro-cycle de degré premier à ℓ lorsqu'on a une famille locale de tels cycles orthogonale à Brauer de X, il suffit de connaître la surjectivité de

$$CH^2(\mathcal{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{\mathcal{X}}, \mathbb{Z}_l(2))^G.$$

Et cet énoncé se démontre à partir de Kollár-Tian, on n'a pas besoin du thm. 4.7 de [ZT].

Remarque 1.4. Je n'ai cité les résultats de [ZT] que pour les solides X. Plusieurs résultats intermédiaires sont établis dans [ZT] pour les 1-cycles sur une $\mathbb{F}$-variété X munie d'une fibration en variétés séparablement rationnellement connexes de dimension quelconque au-dessus d'une courbe C sur un corps fini $\mathbb{F}$. Tian obtient dans ce cadre un énoncé conditionnel (ZT, Thm. 1.13) pour la conjecture de Tate entière pour les 1-cycles sur X. Un tel énoncé a aussi des applications à l'obstruction de Manin pour les zéro-cycles sur la fibre générique.

Les conditions du Thm. 1.13 de [ZT] sont satisfaites lorque la dimension relative de X/C est 2, ce qui donne le théorème inconditionnel 1.12 (ZT3 p. 37) discuté dans la présente note. (Le présent texte offre une alternative à l'argument de [ZT3] haut de la page 37).

2. Applications cycles diverses et rappels

Soit $\mathbb{F}$ un corps fini. Soit $X/\mathbb{F}$ projective lisse géométriquement connexe. Je vais me concentrer ici sur le cas des cycles de codimension 2.

On note $CH^2(X)_{alg}$ désigne le groupe des classes dont l'image est algébriquement triviale dans $CH^2(\overline{X})$.

On note $CH^2(X)_{Ful-alg} \subset CH^2(X)_{alg}$ le sous-groupe des classes algébriquement triviales au sens de Fulton.

On note $CH^2(X)_{hom} = Ker[CH^2(X) \to \prod_\ell H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))]$.

On a $CH^2(X)_{alg} \subset CH^2(X)_{hom}$ et

$$CH^2(X)_{Ful-alg} \subset CH^2(X)_{alg} \subset CH^2(X)_{tors}.$$

On utilise la cohomologie étale, avec ℓ premier distinct de la caractéristique. On a la suite exacte

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))^G \to 0.$$

Le groupe $H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$ est fini (pureté, Deligne).

On a des applications "cycle" compatibles

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

$$CH^2(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Sur la torsion, ces applications se factorisent (CT-Sansuc-Soulé) :

$$CH^2(X)\{\ell\} \hookrightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

$$CH^2(\overline{X})\{\ell\} \hookrightarrow H^3(\overline{X}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

Ces applications induisent des applications

$$Ker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \otimes \mathbb{Z}_\ell \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}) \hookrightarrow H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

$$CH^2(X)_{hom} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

On a aussi l'application d'Abel-Jacobi de Walker définie par Scavia et Suzuki

$$CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))).$$

Rappelons enfin une suite exacte de CT-Kahn.

$$0 \to Ker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})]\{\ell\} \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)_{tors})) \to$$

$$Ker[H^3_{nr}(\mathbb{F}(X), \mathbb{Q}_\ell/Z_\ell(2)) \to H^3_{nr}(\overline{\mathbb{F}}(X), \mathbb{Q}_\ell/Z_\ell(2))] \to Coker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})^G]\{\ell\} \to 0.$$

3. Quelques résultats de Scavia et Suzuki [SS]

Théorème 3.1. *(Scavia-Suzuki, [SS], Proposition 7.6) L'application d'Abel-Jacobi de Walker induit une surjection*

$$CH^2(X)_{Ful-alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to Im[H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^1H^3((\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))).$$

En fait cette proposition établit en toute codimension i une *surjection*

$$CH^i(X)_{Ful-alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to Im[H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^{i-1}H^{2i-1}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^1(\mathbb{F}, N^{i-1}H^{2i-1}(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))].$$

Supposons de nouveau $i = 2$. Dans ce cas, l'application

$$CH^2(X)_{Ful-alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to Im[H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))]$$

est un isomorphisme ([SS], Prop. 7.11). L'injection utilise [CTSS].

Ces énoncés de surjection de Scavia-Suzuki [SS] sont tout à fait non triviaux. La preuve utilise le lemme 5.4 de [SS] (inspiré de Voisin) et le lemme 5.5 de [SS] (pas du tout classique).

Toujours pour $i = 2$ (cycles de codimension 2), le théorème 8.1 de Scavia-Suzuki [SS] (qui repose sur la Proposition 7.13 de [SS], qui développe la suite exacte CT-Kahn) dit :

Théorème 3.2. *(SS, Thm 8.1) Supposons $\tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) = N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$. Alors*

$$CH^2(X)_{Ful-alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell = CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

et

$$Ker[CH^2(X) \to CH^2(\overline{X})] \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}).$$

De plus l'application

$$CH^2(X)_{alg}\{\ell\} \to (CH^2(\overline{X})_{alg})^G\{\ell\}$$

est surjective.

Il y a donc ici une hypothèse à vérifier pour pouvoir appliquer le résultat : il faut avoir l'égalité $\tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ entre la filtration forte et la filtration faible.

4. Solides fibrés en surfaces rationnelles

Ce paragraphe est indépendant des textes de Tian et Kollár. Dans le cas considéré ici (solide fibré en surfaces géométriquement rationnelles) il donne un argument alternatif pour le début de la démonstration aux pages 35/36 de ZT2 (36 et 37 de ZT3), voir le paragraphe avant le théorème 6.3 ci-dessous.

Théorème 4.1. *Soit K un corps, $cd(K) \leq 1$, et S/K une K-surface projective et lisse géométriquement rationnelle avec un K-point. Soit ℓ premier distinct de la car. de K. On a alors $H^3_{nr}(K(S)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.*

Démonstration. Pour K de car. zéro, c'est fait dans la section 8 de CT-Voisin. Hypothèses un peu plus larges : $H^i(S, O_S) = 0$ pour $i = 1, 2$, NS géométrique sans torsion et $A_0(X)$ universellement trivial.

Comme [CT-Voisin] utilise l'hypothèse $car(k) = 0$ en plusieurs endroits, donnons ici une démonstration en toute caractéristique.

On utilise le fait que $A_0(S) = Ker[CH_0(S) \to \mathbb{Z}] = 0$ est établi dans [CT83].

On a par Bloch-Ogus la suite exacte :

$$H^3(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^0(S, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to CH^2(S) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^4(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Comme $CH^2(S) = \mathbb{Z}$ est engendré par la classe d'un point rationnel, ou d'un zéro-cycle de degré 1, ceci implique que $H^3(S, (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^0(S, \mathcal{H}^3((\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) = H^3_{nr}(S/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjectif.

En utilisant la suite spectrale de Hochschild-Serre

$$E_2^{pq} = H^p(K, H^q(\overline{S}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))) \Longrightarrow H^n(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)),$$

la propriété $cd(K) \leq 1$ et la nullité des $H^3(\overline{S}, \mathbb{Z}/\ell^n)$ on établit que le groupe

$$H^3(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est divisible.

Comme S est une surface rationnelle, il existe une extension finie L/K telle que S_L est L-rationnelle, donc $H^3_{nr}(L(S)/L, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$, donc $H^3_{nr}(K(S)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ est annulé par un entier $N > 0$.

La surjection

$$H^3(S, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^0(S, \mathcal{H}^3(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3_{nr}(K(S)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

envoie un groupe divisible vers un groupe d'exposant fini, donc est nulle, et donc $H^3_{nr}(K(S)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. QED

Théorème 4.2. *Soit $X \to C$ une fibration sur une courbe sur k séparablement clos, à fibre générique une surface lisse géométriquement rationnelle. Soit ℓ premier distinct de la caractéristique de k. Alors :*

(1) On a $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ et $H^3_{nr}(k(X)/k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = 0$ pour tout entier $n > 0$.

(2) L'application

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est surjective.

(3) L'application

$$CH^2(X)\hat{\otimes}\mathbb{Z}_\ell = projlim CH^2(X)/\ell^n \to projlim H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme.

(4) Les applications $CH^2(X)/\ell^n \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ sont des isomorphismes.

(4bis) L'équivalence algébrique et l'équivalence homologique coïncide sur les cycles de codimension deux, le groupe $A_1(X) := CH^2(X)/alg$ est un $\mathbb{Z}$-module de type fini, on a un isomorphisme

$$A_1(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(5) On a un isomorphisme

$$CH^2(X)\{\ell\} \simeq H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

(6) L'application cycle

$$CH^2(X)\{\ell\} \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}$$

est surjective, et son noyau est divisible, isomorphe au conoyau de la flèche

$$H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell(2)).$$

(7) On a $N^1H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$.

Démonstration. Soit $S/K = k(C)$ la fibre générique de X/C. Comme on a $H^3_{nr}(K(S)/K, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$ (Thm. 4.1), on a $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$.

En passant à une extension finie L/K avec S_L/L rationnelle, on obtient que le conoyau de l'application $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est de torsion. On sait (Kahn, CT-Kahn) que la torsion du conoyau est le quotient de $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ par son sous-groupe divisible maximal. Ceci établit la surjectivité dans (2).

La nullité de $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$ donc de chaque $H^3_{nr}(k(X)/k, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ donne aussi que les applications

$$CH^2(X)/\ell^n \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

sont injectives.

On peut donc passer à la limite projective, ce qui donne une inclusion

$$limproj CH^2(X)/\ell^n \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Comme $CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est surjective, la flèche

$$limprojCH^2(X)/\ell^n \hookrightarrow H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme.

Pour X/C comme ci-dessus, la projection $X \to C$ admet une section, et on a $Pic^0 C \simeq Pic^0 X$. En utilisant ces faits, et on analysant le noyau de la restriction $Pic(X) \to Pic(S)$, on établit que le groupe de Néron-Severi de X, quotient de $Pic(X)$ par $Pic^0 C$ est sans torsion.

On a $NS(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))$ car le groupe de Brauer de X est un sous-groupe du groupe de Brauer de la surface géométriquement rationnelle S/K, donc est fini. Ainsi $H^2(X, \mathbb{Z}_\ell(1))_{tors} = 0$. Ceci implique $H^5(X, \mathbb{Z}_\ell)_{tors} = 0$ (voir les rappels au §7 ci-dessous). Ainsi l'application quotient

$$H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

est surjective. De la surjectivité

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

on déduit que les applications $CH^2(X)/\ell^n \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ sont surjectives. On sait que le noyau est couvert par $H^3_{nr}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$. Par Merkurjev-Suslin, ce groupe est un sous-groupe de $H^3_{nr}(k(X)/k, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) = 0$. Ainsi les applications

$$CH^2(X)/\ell^n \to H^4(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

sont des isomorphismes.

Pour (4bis), voir Bloch-Srinivas.

Pour établir (5), on utilise la suite exacte

$$0 \to H^1(X, K_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(X, \mathcal{H}_X(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to CH^2(X)\{\ell\} \to 0$$

et la suite exacte

$$0 \to H^1(X, \mathcal{H}^2_X(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3_{nr}(k(X), \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

On sait que le composé

$$H^1(X, K_2) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(X, \mathcal{H}_X(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2))$$

est nul (argument de poids, S. Bloch) ce qui donne la flèche injective

$$CH^2(X)\{\ell\} \hookrightarrow H^3(X, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell(2)),$$

qui ici de plus est surjective.

Pour établir le point (6), on utilise de plus le diagramme commutatif au début de [CTSS].

Il résulte de l'énoncé $H^3_{nr}(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = 0$ que l'on a $N^1 H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ pour tout $n > 0$. Ceci n'implique pas a priori l'énoncé (7).

Pour établir (7), observons que d'une part le quotient $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)/N^1 H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est sans torsion pour toute variété projective et lisse par Merkurjev-Suslin (voir §7 ci-dessous). Ensuite pour une variété X/C fibrée en variétés géométriquement rationnelles sur une courbe, donc avec un morphisme génériquement fini depuis le produit d'une courbe et d'un espace projectif, un argument de correspondances donne que ce quotient $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)/N^1 H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est de torsion. Ce quotient est donc nul. Voir Prop. 7.1 ci-dessous. QED

Remarque 4.3. Soit k le corps des complexes. On a ici $H^i(X, O_X) = 0$ pour $i = 2, 3$, et la variété X est dominée par le produit d'une courbe et de $\mathbb{P}^2$.

Sous ces hypothèses, on sait que équivalence algébrique et homologique coïncident (Bloch-Srinvias), que le groupe des 1-cycles algébriquement équivalents à zéro modulo l'équivalence rationnelle est isomorphe au groupe des k-points $J(k)$ d'une variété abélienne, la jacobienne intermédiaire J/k avec les propiétés suivantes.

Le groupe $J(k)\{\ell\}$ est isomorphe au quotient de la flèche

$$H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^3(X, \mathbb{Q}_\ell(2))$$

et on a une suite exacte

$$0 \to J(k) \to CH^2(X) \to NS^2(X) \to 0$$

avec $NS^2(X)$ un groupe abélien de type fini satisfaisant

$$NS^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Ceci montre en particulier que la flèche surjective

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to limprojCH^2(X)/\ell^n$$

n'est en général pas un isomorphisme. En effet $J(k) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq (\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{2g}$.

5. Un théorème de Tian et la surjectivité arithmétique

Théorème 5.1. *(voir ZT, Theorem 4.14, p. 31) Soit X projective et lisse de dimension d sur un corps k algébriquement clos. Supposons que X est séparablement rationnellement connexe en codimension 1, par exemple que X est munie d'une fibration sur une courbe à fibres géométriques séparablement rationnellement connexes. Alors*

$$\tilde{N}^{d-2}H^{2d-3}(X, \mathbb{Z}_\ell) = N^{d-2}H^{2d-3}(X, \mathbb{Z}_\ell).$$

Nous nous intéressons ici au cas $d = 3$.

Principales étapes de la démonstration de cet énoncé dans le cas $d = 3$ et X/C famille de surfaces rationnelles sur une courbe, en prenant pour boîte noire l'énoncé du théorème 4.7 de [ZT]

Je suis ici la démonstration du Thm. 4.14 de [ZT2, ZT3], avec des simplifications propres au cas ici considéré : variété de dimension 3 fibrée en surfaces géométriquement rationnelles. Je suis loin d'avoir tout compris.

On sait (paragraphe 4) que l'application cycle $CH^2(X) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$ se factorise par le groupe $A_1(X) = A^2(X)$ des 1-cycles modulo l'équivalence algébrique, et que l'application induite

$$A_1(X)[\ell^n] \simeq H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))[\ell^n]$$

est un isomorphisme.

On a une suite exacte générale pour toute variété lisse X

$$0 \to CH^2(X, 1)/\ell^n \to CH^2(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to CH^2(X)[\ell^n] \to 0.$$

qui en langage ancien est

$$0 \to H^1(X, K_2)/\ell^n \to H^1(X, \mathcal{H}^2(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \to CH^2(X)[\ell^n] \to 0.$$

On a $CH^2(X, 1) = H^3_{Mot}(X, \mathbb{Z}(2))$ et $CH^2(X) = H^4_{Mot}(X, \mathbb{Z}(2))$.

La suite exacte peut encore se voir comme

$$0 \to H^3_{Mot}(X, \mathbb{Z}(2))/\ell^n \to H^3_{Mot}(X, \mathbb{Z}/\ell^n(2)) \to H^4_{Mot}(X, \mathbb{Z}(2)[\ell^n] \to 0$$

La surjection

$$CH^2(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to CH^2(X, 0)[\ell^n] = CH^2(X)[\ell^n]$$

induit une surjection

$$CH^2(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to A^2(X)[\ell^n]).$$

(Le noyau de $CH^2(X) \to A_1(X)$ est le groupe, divisible, des cycles de codimension 2 algébriquement équivalents à zéro.)

Pour toute correspondance (S, Γ_S) avec S *propre, lisse, connexe* et $\Gamma_S \subset S \times X$ équidimensionnelle de dimension relative 1 au-dessus de S, on a une application induite

$$CH_0(S, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to CH_1(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n)$$

soit encore

$$H_1(S, \mathbb{Z}/\ell^n) \to H^1_{Zar}(X, \mathcal{H}^2(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})).$$

[Si S est une courbe lisse, et X est de dimension 3, via la correspondance on trouve une surface $\Sigma \subset X$ avec $\Sigma \to S$, on peut voir l'application image réciproque

$$H^1(S, \mu_{\ell^n}) \to H^1(\Sigma, \mu_{\ell^n})$$

et via Bloch-Ogus, une classe dans $H^1(\Sigma, \mu_{\ell^n})$ définit bien une classe dans $H^1(X, \mathcal{H}^2(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}))$.]

Assertion 1 (Théorème 4.7 de [ZT3]). *Pour X comme dans le théorème, les flèches ci-dessus donnent une suite exacte*

$$\oplus_{\{(S,\Gamma_S)\}} CH_0(S, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to CH_1(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \to A_1(X)[\ell^n] \to 0.$$

La démonstration de ce théorème utilise des outils de cohomologie motivique et des résultats et méthodes de [KT]. Elle occupe les pages 26, 27, 28, 29, 30. **Nous ne la discutons pas ici.**

On a une suite exacte de cohomologie ℓ-adique

$$0 \to H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2))/\ell^n \to H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to 0.$$

Pour X comme considérée ici, on sait (Thm. 4.2 ; Prop. 7.1 (b) ci-dessous) que $H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ s'annule sur un ouvert de X, c'est-dire $H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^n) = N^1H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^n)$ et que l'on a $N^1H^3(X, \mathbb{Z}_\ell) = H^3(X, \mathbb{Z}_\ell)$.

Rappel, formule générale :

$$CH^i(X, s) = H^{2i-s}_{Mot}(X, \mathbb{Z}(i)).$$

Idem avec coefficients $\mathbb{Z}/\ell^n$.

On a une application

$$CH_1(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) = CH^2(X, 1, \mathbb{Z}/\ell^n) \simeq H^3_{Mot}(X, \mathbb{Z}/\ell^n(2)) \to H^3(X, \mathbb{Z}/\ell^n(2)).$$

Assertion 2 Pour X comme ci-dessus, cette application s'identifie à

$$H^1(X, \mathcal{H}^2(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})) \to N^1H^3(X, \mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$$

et est un isomorphisme.

Assertion 3 Ces diverses applications s'insèrent dans un diagramme *commutatif* (Commutativité à VÉRIFIER) de suites exactes (le diagramme (5) du début de la démonstration de [ZT2], Thm. 4.14)

$$\begin{tikzcd}
 & \oplus_{(S,\Gamma_S)} CH_0(S,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[r] \arrow[d] & CH_1(X,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[r] \arrow[d] & A_1(X)[\ell^n] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2))/\ell^n \arrow[r] & H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2)) \arrow[r] & H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2))[\ell^n] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La flèche verticale de gauche est celle induite par le reste du diagramme commutatif de suites exactes.

Assertion 4 (Comparer [ZT3], Claim 4.15) La flèche verticale médiane

$$CH_1(X,1,\mathbb{Z}/\ell^n) = H^1(X,\mathcal{H}^2(\mathbb{Z}/\ell^n(2))) \to H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration : Par Bloch–Ogus, pour toute variété lisse sur un corps, on a un isomorphisme

$$H^1_{Zar}(X,\mathcal{H}^2(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) \simeq N^1H^3_{et}(X,(\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}).$$

Pour les variétés ici considérées, on a $N^1H^3_{et}(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2}) = H^3_{et}(X,\mu_{\ell^n}^{\otimes 2})$ (voir le pagragraphe 4).

Assertion 5 (déjà vue, résulte du paragraphe 4). La flèche verticale de droite est un isomorphisme.

Assertion 6 Les flèches composées

$$CH_0(S,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \to CH_1(X,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \to H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2))$$

ont leur image dans $\tilde{N}^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2))$.

On obtient ainsi :

$$H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2))/\ell^n \subset \tilde{N}^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2)) \subset N^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2))) = H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2)).$$

Ceci utilise bien sûr la lissité des variétés S (avec coefficients $\mathbb{Z}_\ell$, comparer [SS2, Lemma 2.2]).

Note : Si $H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2)\{\ell\} \neq 0$ (et donc groupe de Brauer de X non trivial), il n'est pas clair si l'on a $\tilde{N}^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2)) = N^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n(2))$. Mais ceci n'est pas important, c'est la cohomologie à coefficients $\mathbb{Z}_\ell$ qui nous intéresse.

Assertion 7 On a

$$\tilde{N}^1H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) = N^1H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2)).$$

D'après le paragraphe 4, on a $H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n) = N^1H^3(X,\mathbb{Z}/\ell^n)$, et l'application cycle induit des isomorphismes

$$A_1(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H_2(X,\mathbb{Z}_\ell)$$

et

$$A_1(X)[\ell^n] \otimes \mathbb{Z}_\ell \simeq H_2(X,\mathbb{Z}_\ell)[\ell^n]$$

Le diagramme de [ZT3, Thm. 4.14] s'écrit de manière homologique comme suit :

$$\begin{tikzcd}
 & \oplus_{\Gamma_S} CH_0(S,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[r] \arrow[d] & CH_1(X,1,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[r] \arrow[d] & A_1(X)[\ell^n] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n \arrow[r] & H_3(X,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[r] & H_2(X,\mathbb{Z}_\ell)[\ell^n] \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Les deux verticales de droite sont des isomorphismes (voir ci-dessus).

L'homomorphisme

$$\oplus_{\Gamma_S} CH_0(S,1,\mathbb{Z}/\ell^n) = \oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}/\ell^n) \to H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n \subset H_3(X,\mathbb{Z}/\ell^n)$$

a donc pour image $H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n$.

On peut maintenant conclure avec un argument inspiré de la démonstration de [ZT3, Claims 4.17]. On a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} \oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}/\ell^n) \arrow[d] \\ H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n \arrow[r] & H_3(X,\mathbb{Z}/\ell^n) \end{tikzcd}$$

où les applications verticales sont données par les correspondances Γ_S et la flèche verticale de droite se décompose en une surjection

$$\oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}/\ell^n) \to H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n)$$

suivie de l'inclusion

$$H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)/\ell^n \hookrightarrow H_3(X,\mathbb{Z}/\ell^n).$$

On obtient que la verticale de gauche est surjective. Le conoyau de l'application

$$\oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}_\ell) \to H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)$$

est donc infiniment divisible. Mais ce conoyau est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini. Il est donc nul.

Comme les variétés S sont projectives et lisses, l'image de

$$\oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}_\ell) \to H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)$$

est contenue dans $\tilde{N}^1 H^3(X,\mathbb{Z}_\ell)$ (cf. [SS2], Lemma 2.2). On conclut :

Théorème 5.2. *L'application*

$$\oplus_{\Gamma_S} H_1(S,\mathbb{Z}_\ell) \to H_3(X,\mathbb{Z}_\ell)$$

est surjective, et $\tilde{N}^1 H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(2))$.

Question Dans le cas considéré ici, i.e. X de dimension 3, peut-on obtenir le théorème 5.1 ci-dessus sans utiliser le théorème 4.7 de [ZT] ?

Quand on revient sur un corps fini, et que l'on suppose $d = 3$, en combinant ce résultat avec le théorème de Scavia-Suzuki, on obtient :

Théorème 5.3. *(ZT1, Cor. 4.17; ZT3, Cor. 4.21) Soit $X/\mathbb{F}$ projective lisse de dimension 3 sur $\mathbb{F}$ corps fini. Supposons que X est géométriquement séparablement rationnellement connexe en codimension 1, par exemple que $\overline{X} = X \times_{\mathbb{F}} \overline{\mathbb{F}}$ est munie d'une fibration sur une courbe à fibres géométriques séparablement rationnellement connexes.*

Alors l'application injective

$$CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X},\mathbb{Z}_\ell(2)))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. On considère les applications

$$CH^2(X)_{alg}\otimes\mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))).$$

Le théorème 5.1 (Tian) ci-dessus établit que l'on a

$$\tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)).$$

Le théorème 3.2 ci-dessus (Scavia-Suzuki) donne alors que l'application composée

$$CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, \tilde{N}^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))) \to H^1(\mathbb{F}, N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

est surjective.

Enfin un argument connu (voir le théorème 4.2 (7) ci-dessus ou la Prop. 7.1 ci-dessous) assure que l'on a $N^1H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) = H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$. QED

6. Un théorème de Kollár et Tian, la surjectivité géométrique et la fin de la démonstration

Soit X une k-variété propre. On note $A_1(X)$ le quotient du groupe des 1-cycles sur X par l'équivalence algébrique au sens de Fulton. Il y a une application naturelle $A_1(X) \to A_1(\overline{X})^G$.

Kollár et Tian [KT] établissent le théorème (KT23 Thm. 7 = Thm. 1.35 de ZT2) :

Théorème 6.1. *(Kollár-Tian) Soit k un corps parfait tel que toute k-variété lisse géométriquement intègre possède un zéro-cycle de degré 1, par exemple un corps fini. Soit K une clôture algébrique de k et $G = Gal(K/k)$. Soit X une k-variété projective lisse, géométriquement src en codimension 1, par exemple géométriquement fibrée en variétés séparablement rationnellement connexes au-dessus d'une courbe. L'application $A_1(X) \to A_1(\overline{X})^G$ est un isomorphisme.*

En particulier l'application $CH_1(X) \to A_1(\overline{X})^G$ est surjective, et l'équivalence algébrique à la Fulton sur $CH_1(X)$ et celle définie par passage à une clôture algébrique coïncident.

Nous ne démontrons pas ce théorème ici.

Remarque 6.2. Il ne semble pas y avoir de démonstration plus simple dans le cas de solides X fibrés en surfaces rationnelles sur une courbe....

Revenons à la situation d'une variété X de dimension 3 fibrée en surfaces lisses géométriquement rationnelles au-dessus d'une courbe.

On a alors le théorème suivant (ZT1, Thm. 1.13, Proof of Thm. 1.13 p. 34) ([ZT2 Thm. 1.12, Proof of Thm. 1.12 p. 35/36].

Théorème 6.3. *Soient $\mathbb{F}$ fini, $C/\mathbb{F}$ une courbe et X/C une fibration de fibre générique une surface lisse et géométriquement rationnelle. L'application*

$$CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2))$$

est un isomorphisme.

Démonstration. D'après le théorème 6.1 (Kollár-Tian), on a une suite exacte

$$0 \to CH^2(X)_{alg} \to CH^2(X) \to A_1(\overline{X})^G \to 0.$$

Cette suite induit une suite exacte

$$0 \to CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to A_1(\overline{X})^G \otimes \mathbb{Z}_\ell \to 0.$$

soit encore

$$0 \to CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to (A_1(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell)^G \to 0.$$

Dans notre cas, la flèche cycle $A_1(\overline{X}) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2))$ est un isomorphisme, comme établi au paragraphe 4 ci-dessus (Théorème 4.2 (3)) (cet argument me permet d'ignorer la discussion du diagramme du haut de la page 35 de ZT1 = page 36 de ZT2). On a donc la suite exacte

$$0 \to CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to CH^2(X) \otimes \mathbb{Z}_\ell \to (H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))^G \to 0.$$

Cette suite s'envoie via l'application cycle dans la suite exacte

$$0 \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to H^4(X, \mathbb{Z}_\ell(2)) \to (H^4(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))^G \to 0.$$

D'après le théorème 5.3 (qui utilise Scavia–Suzuki [SS]), la flèche

$$CH^2(X)_{alg} \otimes \mathbb{Z}_\ell \to H^1(\mathbb{F}, H^3(\overline{X}, \mathbb{Z}_\ell(2)))$$

est un isomorphisme. QED

Remarque 6.4. Si on pense à la suite

$$0 \to J(\overline{\mathbb{F}}) \to CH^2(\overline{X}) \to NS^2(\overline{X}) \to 0,$$

avec J la jacobienne intermédiaire qui est ici une variété abélienne, on a la surjection $CH^2(\overline{X})^G \to NS^2(\overline{X})^G$ car J est une variété abélienne sur un corps fini $\mathbb{F}$ et donc $H^1(\mathbb{F}, J) = 0$. Le point est de voir que chaque classe dans $NS^2(\overline{X})^G$ provient d'un point de $CH^2(\overline{X})^G$ qui provient d'un cycle sur $\mathbb{F}$.

7. Appendice : Les quotients H^i/N^1H^i à coefficients entiers sont sans torsion

Suivant [ZT2, démonstration du thm. 1.12 p. 36], on donne ici une version ℓ-adique d'un résultat dont on peut trouver l'analogue dans le cas des variétés complexes et de la cohomologie de Betti dans [CT-Voisin, Thm. 3.1].

Proposition 7.1. *Soit k un corps algébriquement clos, ou un corps fini, plus généralement un corps "à cohomologie galoisienne finie" et soit ℓ inversible dans k. Soit X une k-variété intègre.*

(a) Pour tout entier $n \geq 1$, le quotient

$$H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))/N^1H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$$

est sans torsion.

(b) Si X projective et lisse admet une fibration sur une variété projective et lisse Y de dimension d sur un corps algébriquement clos, et si la fibre générique géométrique est rationnellement connexe alors a

$$N^1H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1)) = H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$$

pour $n \geq d+1$.

Démonstration. Soit $\alpha \in H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$. Supposons qu'il existe un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$ tel que

$$\ell.\alpha_U = 0 \in H^n(U, \mathbb{Z}_\ell(n-1)).$$

La multiplication par ℓ sur $\mathbb{Z}_\ell(n-1)$ induit une suite exacte

$$H^{n-1}(U, \mathbb{Z}/\ell(n-1)) \to H^n(U, \mathbb{Z}_\ell(n-1)) \to H^n(U, \mathbb{Z}_\ell(n-1)).$$

La classe α_U est donc l'image d'un élément $\beta \in H^{n-1}(U, \mathbb{Z}/\ell(n-1))$.

D'après Merkurjev-Suslin pour $n = 3$ et d'après Voevodsky-Rost pour n quelconque, l'image de β dans $H^{n-1}(k(U), \mathbb{Z}/\ell(n-1))$, provient d'une classe $\gamma \in K^M_{n-1}(k(U))$.

Il existe un ouvert non vide $V \subset U$ et une somme finie de symboles $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ avec $a_i \in H^0(V, \mathbb{G}_m)$ qui a pour image $\gamma \in K^M_{n-1}(k(U))$.

Cette somme définit une famille compatible d'éléments

$$\delta_r \in H^{n-1}(V, \mathbb{Z}/\ell^r(n-1)).$$

Quitte à restreindre V, on peut supposer que $\delta_1 = \beta_V \in H^{n-1}(V, \mathbb{Z}/\ell(n-1))$.

En comparant les suites exactes de cohomologie étale obtenues par la multiplication par les différentes puissances de ℓ sur $\mathbb{Z}_\ell$, on obtient que $\alpha_V \in H^n(V, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$ est infiniment ℓ-divisible. Comme le groupe $H^n(V, \mathbb{Z}/\ell(n-1))$ est un $\mathbb{Z}_\ell$-module de type fini, ceci établit $\alpha_V = 0$. On a donc $\alpha \in N^1H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$.

Ceci établit la partie (a) de la proposition. Pour la partie (b), un argument de correspondances à détailler (voir [CTV, §3.2], [CTK, §3.1]) montre que le quotient est annulé par un entier, puisque pour une variété projective et lisse Y de dimension d sur un corps algébriquement clos on a $N^1H^i(V, \mathbb{Z}_\ell) = H^i(V, \mathbb{Z}_\ell)$ pour $i \geq d+1$. QED

Remarque 7.2. Comme le $\mathbb{Z}_\ell$-module $H^r(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est de type fini, le sous-$\mathbb{Z}_\ell$-module $N^1H^r(X, \mathbb{Z}_\ell)$ est de type fini. Il existe par conséquent un ouvert de Zariski non vide $U \subset X$ tel que $N^1H^r(X, \mathbb{Z}_\ell)$ ait son image nulle dans $H^r(U, \mathbb{Z}_\ell)$.

Proposition 7.3. *Soit $X/\mathbb{F}$ une variété projective, lisse, géométriquement intègre sur un corps fini $\mathbb{F}$. Soit ℓ premier distinct de la caractéristique. Soit $n \geq 3$. Alors on a l'égalité de groupes finis*

$$N^1H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1)) = H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1)).$$

Démonstration. Pour $n \geq 3$, on a $n \neq 2(n-1)$ et $n \neq 2(n-1)+1$. D'après Deligne (cf. [CTSS]), cela implique que $H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$ est un groupe fini. Le quotient $H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))/N^1H^n(X, \mathbb{Z}_\ell(n-1))$ est fini et sans torsion, donc nul. QED

Remarque. Si la torsion ℓ-primaire du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ est finie (comme conjecturé par Tate pour toute variété projective et lisse), alors on a $H^2(X, \mathbb{Z}_l(1) = N^1H^2(X, \mathbb{Z}_l(1)$, comme il résulte de la suite de Kummer et du fait que $\mathrm{Pic}(X)$ est un groupe de type fini.

8. Appendice : Torsion dans la cohomologie ℓ-adique

Soit k un corps séparablement clos, ℓ premier distinct de la caractéristique de k. Soit X/k projective, lisse, connexe, de dimension d.

Soit $0 \leq i \leq 2d$. Soit $r \in \mathbb{Z}$. En utilisant la dualité de Poincaré à coefficients finis et en passant à la limite, on obtient des suites exactes scindées

$$0 \to Hom(H^{i+1}(X, \mathbb{Z}_\ell(r))_{tors}, \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell) \to H^{2d-i}(X, \mathbb{Z}_\ell(2d-r)) \to (\mathbb{Z}_\ell)^{b_i} \to 0.$$

On sait par ailleurs que $H^3(X, \mathbb{Z}_\ell(1))_{tors}$ est le quotient de $Br(X)\{\ell\}$ par son sous-groupe divisible maximal $(\mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^{b_2-\rho}$.

Supposons $dim(X) = 3$.

Alors
$$Hom(H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(4))_{tors},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}.$$
Par ailleurs, toujours pour X de dimension 3, on a
$$Hom(H^2(X,\mathbb{Z}_\ell(4))_{tors},\mathbb{Q}/\mathbb{Z}) = H^5(X,\mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}$$
et
$$NS(X)(3)_{tors} \simeq H^2(X,\mathbb{Z}_\ell(4))_{tors}.$$
Pour X/C une fibration en surfaces géométriquement rationnelles au-dessus d'une courbe, on a vu au début du texte que ces deux derniers groupes sont nuls. Pour une telle variété X/C, et déjà avec ${}^C = \mathbb{P}^1$, le groupe $\mathrm{Br}(X)\{\ell\}$ est fini non nécessairement nul, il est isomorphe à $H^3(X,\mathbb{Z}_\ell(1))_{tors}$. Ainsi $H^4(X,\mathbb{Z}_\ell(2))_{tors}$ n'est pas nécessairement nul,

9. Leitfaden pour [ZT2]

page 17 [KT23 Theorem 58] utilisé pour montrer le thm. 2.5.

Théorème 2.5 et référence au Corollaire 59 de [KT23] donnent le théorème 2.6 (démonstration p. 18).

Théorème 2.6 implique le Théorème 4.7 (début de la démonstration p. 27, fin de la démonstration bas de la page 30, passe par le Lemme 4.11, lequel implique Lemme 4.12, lequel implique Lemme 4.13).

Théorème 4.7 implique Théorème 4.14 (fin de la démonstration, milieu de la page 33) puis Thm 4.20. Voir le théorème 5.2 ci-dessus.

Le Thm. 1.35 (page 13) de ZT2 (=Théorème 7 de KT23) est utilisé p. 35 dans la démonstration du thm. 1.13. et finalement du thm 1.12.

Références

[CT] CT Inventiones 1983 sur K_2

[CTK] CT, Kahn, J. K-Theory 11 (2013) 1–53.

[CTSS] CT, Sansuc, Soulé, DMJ 1983 3, 6, 13

[CTV] CT, Voisin, Duke Math. J.

[K] B. Kahn, Ann. Sc. ENS 36 (2003).

[K2] B. Kahn, Algebra & Number Theory.

[KT] Kollár-Tian, 12 February 23, arXiv.

[Saito] Shuji Saito, Inventiones math. 98 (1989)

[SS] Scavia, Suzuki, Non-algebraically geometrically trivial cohomology classes over finite fields, arXiv 3, 12

[SS2] Scavia, Suzuki Two coniveau filtrations and algebraic equivalence over finite fields, arXiv (sous-ensemble du précédent) 9

[ZT1] Zhiyu Tian, version 21st February 23 (on arXiv)

[ZT2] Zhiyu Tian, version 21st March 23 (sent to me)

[ZT3] Zhiyu Tian, version 13th September 23 (sent to me)

[V] C. Voisin, Geometric representability of 1-cycles on rationally connected threefoids, arXiv (2022).

Email address: `jlct@math.u-psud.fr`