K-Theory 7: 477–500, 1993.

Groupe de Chow des zéro-cycles sur les fibrés en quadriques

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE
CNRS URA 752, Mathématiques, Bâtiment 425, Université de Paris-Sud, F-91405 Orsay, France

et

ALEXEI N. SKOROBOGATOV
Institute for Problems of Information Transmission, Russian Academy of Sciences, 19 Ermolovoy ul., Moscow 101447, Russia and Laboratoire de Mathématiques Discrètes, UPR 9016 du CNRS, Equipe 'Arithmétique et Théorie de l'Information', Luminy Case 930, F-13288 Marseille Cédex 9, France

(Received: June 1993)

Abstract. Let k be a field and C/k a smooth, projective, geometrically integral curve over k. Let X/k be an integral k-variety and $p: X \to C$ a proper dominant morphism. Under the assumption that *all* fibres of p have trivial 0-dimensional Chow group CH_0, we give a formula for the group

$$\mathrm{CH}_0(X/C) = \mathrm{Ker}[p_*: \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(C)].$$

This formula involves the so-called 'norm group' associated to the generic fibre of p.

This formula is then used to relate the study of $\mathrm{CH}_0(X/C)$ when X/C is a fibration into 2-dimensional quadrics to that of $\mathrm{CH}_0(Y/\tilde{C})$ for an associated conic bundle fibration $Y/\tilde{C}$ over a curve $\tilde{C}$ which is a double cover of C (the discriminant of X/C). When $\tilde{C}$ is geometrically integral, we get an injection of $\mathrm{CH}_0(X/C)$ into $\mathrm{CH}_0(Y/\tilde{C})$. Thus, when k is a number field or a local field, known results on the Chow groups of surfaces such as Y imply that $\mathrm{CH}_0(X/C)$ is a *finite* group.

Key words. Chow groups of zero-cycles, pencils of quadrics, finiteness theorems over number fields.

Introduction

Soit X une variété projective et lisse sur un corps de nombres k. On désigne par $\mathrm{CH}_0(X)$ le groupe de Chow des 0-cycles sur X modulo l'équivalence rationnelle. Ce groupe est-il de type fini? Il en est ainsi lorsque X est une surface non de type général dont le second groupe de cohomologie cohérente $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ est nul (on consultera le rapport [3] pour les diverses contributions à ce problème). Le cas particulier des surfaces fibrées en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque, cas qui va nous servir ici, avait été obtenu en 1987 par M. Gros [10] et indépendamment par T. Ōkōchi (non publié). En dimension supérieure, un résultat de ce type a été annoncé en 1985 par P. Salberger [18] (voir aussi [19]) pour les variétés fibrées au-dessus de la droite projective (génériquement) en variétés de Severi–Brauer d'indice premier.

De façon générale, étant donné une courbe lisse intègre C/k, une k-variété intègre X et un k-morphisme propre et surjectif $p: X \to C$, dont toutes les fibres X_P ont un groupe de Chow de dimension zéro trivial, on peut, par des méthodes élémentaires, donner une formule pour le noyau de la projection $p_*: \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(C)$ (théorème 1.4 ci-dessous). Bien que cette formule simple soit en germe dans les travaux [1], [7], [18], [10], elle n'avait pas encore été explicitée.

Cette formule fait intervenir le "groupe des normes" de la fibre générique. Pour exploiter la formule jusqu'au bout, et obtenir des résultats de finitude (travaux de Bloch [1] [2], Sansuc et le premier auteur [7], Salberger [18] [19], Gros [10] et Ōkōchi), il faut d'une part disposer d'une "application caractéristique" dont on établit par des méthodes inspirées de la démonstration du théorème de Mordell–Weil faible que son image est finie, d'autre part contrôler le noyau de cette application. Ce noyau fait intervenir le "groupe de normes" de la fibre générique. Contrôler ce noyau, par exemple par une caractérisation cohomologique du groupe des normes, est un problème purement algébrique qu'on arrive à résoudre dans certains cas grâce à des théorèmes du type Merkur'ev–Suslin.

Dans cet article, nous considérons le cas des variétés X fibrées en quadriques au-dessus d'une courbe de genre quelconque C. Comme indiqué ci-dessus, le cas de la dimension relative 1 est déjà connu. La formule générale mentionnée ci-dessus (théorème 1.4) nous permet alors (sauf dans un cas exceptionnel) de réduire le cas de la dimension relative 2 au cas de la dimension relative 1 (au-dessus d'une courbe de genre quelconque). Sauf dans le cas exceptionnel, nous établissons ainsi qu'en dimension relative 2, le groupe $\mathrm{CH}_0(X)$ est un groupe de type fini (théorème 6.2), ce sans avoir à analyser l'application caractéristique. Nous pouvons aussi traiter quelques types de variétés fibrées en quadriques de dimension au moins 3 (théorème 6.3) mais le cas général nous échappe. Au paragraphe 7, on trouvera quelques questions "simples" portant sur les formes quadratiques et dont la solution semble requise pour étudier la finitude des groupes $\mathrm{CH}_0(X)$ lorsque la dimension relative est au moins 3.

Qu'il soit d'emblée clair pour le lecteur que le quotient de $\mathrm{CH}_0(X)$ par son sous-groupe de torsion est de façon évidente un groupe abélien libre de rang fini dans les cas que nous considérons (par une simple application du théorème de Mordell–Weil), et que la contribution de cet article, et de ceux mentionnés ci-dessus, porte sur les phénomènes de torsion.

Notations et préliminaires

Soient k un corps et X une k-variété. Si X est intègre, on note $k(X)$ le corps des fonctions rationnelles de X. On note $X_{(i)}$ l'ensemble des points de dimension i de X: pour $x \in X_{(i)}$, le corps résiduel $k(x)$ est de degré de transcendance i sur k. On note $X^{(i)}$ l'ensemble des points de codimension i de X.

On utilisera les aspects élémentaires de la théorie des groupes de Chow que l'on trouve développée dans le livre de Fulton [9]. On note $\mathrm{CH}_i(X)$ le groupe de Chow des cycles de dimension i sur X: c'est le quotient du groupe libre $Z_i(X)$ sur les points de $X_{(i)}$ (ou si l'on veut sur les sous-variétés fermées intègres de dimension i) par l'équivalence rationnelle. Ce groupe est fonctoriel covariant par morphismes propres. Lorsque X/k est lisse, on utilisera aussi le groupe de Chow $\mathrm{CH}^i(X)$ des cycles de codimension i modulo l'équivalence rationnelle. Lorsque X/k est propre, l'application linéaire degré: $Z_0(X) \to \mathbf{Z}$ qui à un point fermé P associe la dimension sur k de son corps résiduel $k(P)$ induit une application encore appelée degré: $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathbf{Z}$; c'est l'application $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(\mathrm{Spec}(k)) = \mathbf{Z}$ induite par le morphisme structural $X \to \mathrm{Spec}(k)$. On note $A_0(X)$ le noyau de cette application: c'est le groupe des zéro-cycles de degré zéro, modulo l'équivalence rationnelle.

DÉFINITION. Etant donné une variété X sur un corps F, on définit le sous-groupe de normes $N_X(F) \subset F^*$ du groupe multiplicatif F^* comme le sous-groupe engendré par les normes $N_{L/F}(L^*)$ pour toutes les extensions finies L/F telles que l'ensemble $X(L)$ des points L-rationnels de X soit non vide.

Soient k un corps, C/k une courbe intègre, X une k-variété intègre et $p: X \to C$ un k-morphisme propre dominant. On notera X_η la fibre générique de p, qui est une variété sur le corps des fonctions rationnelles $k(C)$ de C. On notera $X_P = p^{-1}(P)$ la fibre de p en un point fermé P de C: c'est une variété sur le corps résiduel $k(P)$ de C en P. Enfin on notera

$$\mathrm{CH}_0(X/C) = \mathrm{Ker}[p_*: \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(C)].$$

Etant donnée une k-variété X, on note $k[X]$ la k-algèbre des sections globales du faisceau structural de X et on note $k[X]^*$ le groupe des éléments inversibles de cette algèbre.

1. Groupe de Chow des 0-cycles d'une variété fibrée au-dessus d'une courbe

PROPOSITION 1.1. *Soient k un corps, C/k une courbe lisse intègre, X une k-variété intègre et $p: X \to C$ un k-morphisme propre dominant, de fibre générique X_η. On a alors une suite exacte:*

$$\bigoplus_{P \in C^{(1)}} A_0(X_P) \to \mathrm{CH}_0(X/C) \to k(C)^*/k[C]^*.N_{X_\eta}(k(C)) \to \bigoplus_{P \in C^{(1)}} \mathbf{Z}/p_*\mathrm{CH}_0(X_P).$$

Démonstration. Cette suite exacte résulte du diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc}
\oplus_{x \in X_{\eta(0)}} k(x)^* & \longrightarrow & \oplus_{P \in C^{(1)}} \mathrm{CH}_0(X_P) & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(X) & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
k(C)^* & \longrightarrow & \oplus_{P \in C^{(1)}} \mathbf{Z} & \longrightarrow & \mathrm{CH}_0(C) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

dans la mesure où le noyau de la flèche diviseur $k(C)^* \to \oplus_{P \in C^{(1)}} \mathbf{Z}$ n'est autre que $k[C]^*$.

Disons quelques mots sur le diagramme ci-dessus. La suite exacte horizontale est obtenue aisément: si une famille z_P de 0-cycles a une somme rationnellement équivalente à zéro sur X, alors on peut l'écrire comme une somme de diviseurs de fonctions rationnelles f_γ sur des courbes fermées intègres $\gamma \subset X$. Parmi ces courbes certaines sont dans une fibre X_P et quitte à remplacer le cycle z_P par le cycle $z_P - \mathrm{div}(f_\gamma)$, équivalent dans $\mathrm{CH}_0(X_P)$, peuvent être ignorées. Sur les autres courbes, la projection p induit un morphisme fini et plat $p\colon \gamma \to C$, qui au point générique de γ, point de dimension zéro sur la fibre générique X_η, définit une extension finie de corps $k(\gamma)/k(C)$.

La suite exacte du bas est la suite usuelle, la flèche de gauche associant à une fonction son diviseur.

Les flèches verticales sont induites par la projection p. La flèche verticale de gauche est, pour chaque extension finie $k(x)/k(C)$, la norme associée. L'image de cette application est donc le groupe de normes $N_{X_\eta}(k(C)) \subset k(C)^*$. La flèche verticale du milieu est l'application degré pour le groupe $\mathrm{CH}_0(X_P)$ de la $k(P)$-variété X_P. La flèche de droite est la flèche p_* de fonctorialité par morphisme propre. Le carré de droite commute par fonctorialité. Pour la commutativité du carré de gauche, voir [9], Prop. 1.4 p. 12. □

PROPOSITION 1.2. (a) *Soit $p\colon X \to C$ comme à la proposition précédente. Si $f \in k(C)^*$ s'écrit comme le produit d'une unité en P par un élément de $N_{X_\eta}(k(C))$, alors la valuation en P de f, soit* $\mathrm{div}_P(f)$, *appartient au groupe $p_*(Z_0(X_P)) \subset Z_0(k(P)) = \mathbf{Z}$.*

(b) *Réciproquement, s'il existe un 0-cycle de X_P supporté dans le lieu lisse de X et d'image un générateur de $p_*(Z_0(X_P)) \subset Z_0(k(P)) = \mathbf{Z}$, alors toute fonction $f \in k(C)^*$ telle que* $\mathrm{div}_P(f) \in p_*(Z_0(X_P))$ *peut s'écrire comme le produit d'une unité en P par un élément de $N_{X_\eta}(k(C))$.*

Remarque. Les conditions de l'énoncé (b) sont certainement satisfaites si X/k est lisse.

Démonstration. Soit x un point fermé de la fibre générique, et $f \in k(x)^*$. Soit $C_x \subset X$ l'adhérence schématique de x dans X. La projection p induit un morphisme fini et plat $f\colon C_x \to C$ et l'on a la formule:

$$\mathrm{div}(N_{k(x)/k(C)}(f)) = p_*(\mathrm{div}_{C_x}(f))$$

([9], Prop. 1.4 p. 12) qui montre bien que, pour tout point P, $\mathrm{div}_P(N_{k(x)/k(C)}(f))$ appartient à $p_*(Z_0(X_P))$. Comme le groupe des normes $N_{X_\eta}(k(C))$ est engendré par de tels éléments, le premier énoncé suit.

Soit z_P un 0-cycle de support dans X_P avec $\mathrm{div}_P(f) = p_*(z_P)$. D'après l'hypothèse on peut supposer que le 0-cycle z_P a son support dans le lieu lisse de X. Pour chaque point fermé M du support de z_P, il est alors aisé de trouver une courbe intègre $C_M \subset X$ régulière en M et non contenue dans la fibre X_P. En effet $X_P/k(P)$ étant lisse en M, et X_P étant défini localement par une équation, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,M}$ est aussi régulier; on peut trouver un système régulier de paramètres $a_1, \ldots, a_n$ de $\mathcal{O}_{X,M}$ tel que

a_1 définisse localement $X_P \subset X$ au voisinage de M. On prend alors pour courbe $C_M \subset X$ l'adhérence Zariski de la courbe régulière intègre définie localement au voisinage de M par les équations $a_2 = 0, \ldots, a_n = 0$. Comme le groupe de Picard d'un anneau semi-local est trivial, on peut trouver une fonction rationnelle $f_M \in k(C_M)^*$ telle que la différence $M - \mathrm{div}_{C_M}(f_M)$ soit à support étranger au diviseur X_P. Alors $\mathrm{div}_P(N_{k(C_M)/k(C)}(f_M)) = p_*(M)$. Procédant ainsi pour chaque point du support de z_P, on voit que $\mathrm{div}_P(f) = p_*(z_P)$ s'écrit comme le diviseur en P d'une fonction $g_P \in N_{X_\eta}(k(C))$. Comme f/g_P est une unité en P, ceci achève la démonstration. □

La définition suivante, dans le cas des variétés fibrées en variétés de Severi–Brauer, est due à Salberger [19].

DÉFINITION 1.3. Soit X/C comme ci-dessus. Nous appellerons groupe des normes divisorielles, et nous noterons $k(C)^*_{\mathrm{dn}}$ le sous-groupe de $k(C)^*$ formé des fonctions qui en tout point P de la courbe C peuvent s'écrire comme le produit d'une unité en P par un élément du groupe des normes $N_{X_\eta}(k(C))$.

Combinant les énoncés précédents, on obtient le théorème:

THÉORÈME 1.4. *Soient k un corps, C/k une courbe lisse intègre, X une k-variété intègre et $p\colon X \to C$ un k-morphisme propre dominant. Supposons les deux conditions suivantes satisfaites:*

(i) *Pour chaque point fermé P de C, le groupe $A_0(X_P)$ est nul.*
(ii) *Pour chaque point fermé P de C, il existe un 0-cycle z_P de X_P à support dans le lieu lisse de X et d'image $p_*(z_P)$ engendrant le groupe $p_*\mathrm{CH}_0(X_P)$ (ce qui est certainement le cas si X/k est lisse).*

Alors on a un isomorphisme

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k[C]^*.N_{X_\eta}(k(C)) \simeq \mathrm{CH}_0(X/C).$$

2. Groupes de normes de quadriques

PROPOSITION 2.1. *Soit C/F une conique lisse sur le corps F* (car.$(F) \neq 2$), *donnée comme le lieu des zéros d'une forme quadratique $\langle 1, a, b\rangle$ $(a, b \in F^*)$. Soit $D = (-a, -b)_F$ l'algèbre de quaternions associée à C. Le groupe $N_C(F)$ coïncide avec le groupe* $\mathrm{Nrd}(D^*)$ *des normes réduites de D.*

Démonstration. Un tel énoncé vaut plus généralement pour une variété de Severi–Brauer et l'algèbre simple centrale associée (cf. [7], p. 434). □

Le lemme 2.2 et la proposition 2.3 ci-après sont utilisés dans des manuscrits de Markus Rost.

LEMME 2.2. *Soit F un corps* (car.$(F) \neq 2$), *φ une forme quadratique non dégénérée sur le corps F, et Q la quadrique que cette forme définit. Le groupe $N_Q(F)$ est le groupe $N_\varphi^2(F) \subset F^*$ engendré par les produits pairs d'éléments de F^* représentés, sur F, par la forme φ.*

Démonstration. Si la forme φ représente zéro non trivialement sur le corps F, alors les groupes $N_Q(F)$ et $N_\varphi^2(F)$ coïncident tous deux avec F^*. De fait Q possède un point F-rationnel, et donc $N_Q(F) = F^*$, d'autre part la forme φ représente alors tout élément de F^*.

Dans la suite de la démonstration nous supposons donc que φ ne représente pas zéro sur F.

Soit L/F une extension finie de corps avec $Q(L) \neq \emptyset$, et $\alpha = N_{L/F}(\beta)$, $\beta \in L^*$. Comme la forme φ représente zéro sur L, elle représente tout élément de L, et en particulier β. Par ailleurs, par un théorème de Springer ([14], VII.2.3 p. 198), le degré $[L:F]$ de l'extension L/F est pair. Le principe de la norme de Knebusch ([14], VII, Thm. 5.1, p. 208) assure alors que $\alpha = N_{L/F}(\beta)$ est un produit de $[L:F]$ éléments représentés par la forme φ, donc appartient au groupe $N_\varphi^2(F) \subset F^*$.

Pour établir l'inclusion inverse, supposons d'abord que la forme φ représente 1 sur F. On peut alors écrire φ comme une somme orthogonale de formes non dégénérées $\varphi \simeq \langle 1 \rangle \perp \psi$. Si $\alpha \in F^*$ est représenté par φ, alors $\alpha = u^2 + \gamma$, avec $u \in F$ et γ représenté par ψ sur F. Si $\gamma = 0$, alors α est un carré dans F, et appartient certainement à $N_Q(F)$ (en effet Q acquiert un zéro sur une extension quadratique convenable de F). Si $\gamma \neq 0$, comme γ est représenté par la forme ψ, on peut alors écrire la forme ψ comme une somme orthogonale de formes non dégénérées $\psi \simeq \langle \gamma \rangle \perp \rho$. On a donc $\varphi \simeq \langle 1 \rangle \perp \langle \gamma \rangle \perp \rho$. L'égalité $\alpha = u^2 + \gamma$ dit alors que α est une norme de l'extension $F(\sqrt{-\gamma})$ de F, extension sur laquelle $\varphi \simeq \langle 1 \rangle \perp \langle \gamma \rangle \perp \rho$ a clairement un zéro. Tout élément α représenté par φ appartient donc à $N_Q(F)$, a fortiori en est-il ainsi des produits pairs de tels éléments.

Si maintenant φ est quelconque, on peut l'écrire $\varphi = c.\psi$ avec $c \in F^*$ et ψ représentant 1. Les produits pairs de valeurs de φ sont alors produits (pairs) de valeurs de ψ, et appartiennent donc à $N_Q(F)$. □

PROPOSITION 2.3. *Soit Q/F une quadrique lisse de dimension 2 sur le corps F (car.$(F) \neq 2$), donnée comme le lieu des zéros d'une forme quadratique $\langle 1, a, b, abc \rangle$ $(a, b, c \in F^*)$. Soit $D = (-a, -b)_F$ et $L = F(\sqrt{c})$. Le groupe $N_Q(F)$ coïncide avec le groupe $F^* \cap \mathrm{Nrd}(D_L^*) \subset L^*$ des éléments de F^* qui, dans L, deviennent des normes réduites.*

Démonstration: Si c est un carré dans F, l'énoncé est clair. Supposons donc c non carré. Tout élément de F^* représenté par la forme $\langle 1, a, b, abc \rangle$ sur F est clairement représenté par la forme $\langle 1, a, b, ab \rangle$ sur le corps L, donc appartient au groupe $F^* \cap \mathrm{Nrd}(D_L^*) \subset L^*$. D'après le lemme précédent (l'implication utilisée est celle qui repose sur le principe de la norme de Knebusch) on conclut que le groupe $N_Q(F)$ est inclus dans $F^* \cap \mathrm{Nrd}(D_L^*) \subset L^*$.

Etablissons l'inclusion inverse. Notons tout d'abord que le groupe $\mathrm{Nrd}(D^*) \subset F^*$ est contenu dans $N_Q(F)$. En effet, en combinant la proposition 2.1 et le lemme 2.2 ci-dessus, on voit que ce groupe est engendré par les valeurs non nulles prises par la forme $\langle 1, a, b \rangle$ sur F, et est donc a fortiori inclus dans le groupe engendré par les valeurs non nulles prises par la forme $\langle 1, a, b, abc\rangle$ sur F, groupe inclus dans $N_Q(F)$ d'après le lemme (ici on utilise l'autre implication).

Soit ψ la forme quadratique que la norme réduite sur D induit sur le F-espace vectoriel sous-jacent à D, et soit B la forme bilinéaire associée. Soit $\alpha \in F^* \cap \mathrm{Nrd}(D_L^*)$. On peut écrire: $\alpha = \varphi(\xi + \sqrt{c}\eta)$, avec $\xi, \eta \in D$. Développant, on obtient:

$$\alpha = \varphi(\xi) + c.\varphi(\eta) + \sqrt{c}.B(\xi, \eta).$$

De l'hypothèse $\alpha \in F^*$ on déduit $B(\xi, \eta) = 0$ et

$$\alpha = \varphi(\xi) + c.\varphi(\eta).$$

Si $\varphi(\xi) = 0$ ou $\varphi(\eta) = 0$, alors α appartient à $N_Q(F)$ d'après ce qui a été dit ci-dessus (notons que comme a, b et abc appartiennent clairement à $N_Q(F)$, il en est de même de c). On supposera donc dans la suite $\varphi(\xi) \neq 0$ et $\varphi(\eta) \neq 0$. Notons $\xi \to \bar{\xi}$ la conjugaison dans l'algèbre de quaternions. L'égalité $B(\xi, \eta) = 0$ peut encore s'écrire $\xi.\bar{\eta} + \eta.\bar{\xi} = 0$ dans l'algèbre D. Ainsi $\xi.\bar{\eta}$ est un quaternion pur. Multipliant l'égalité ci-dessus par $\mathrm{Nrd}(\bar{\eta}) \neq 0$, on obtient

$$\alpha.\mathrm{Nrd}(\bar{\eta}) = \mathrm{Nrd}(\xi).\mathrm{Nrd}(\bar{\eta}) + c.\mathrm{Nrd}(\eta).\mathrm{Nrd}(\bar{\eta})$$

soit

$$\alpha.\mathrm{Nrd}(\bar{\eta}) = \mathrm{Nrd}(\xi.\bar{\eta}) + c.(\mathrm{Nrd}(\eta))^2.$$

Comme $\xi.\bar{\eta}$ est un quaternion pur, on voit que l'on peut s'écrire

$$\alpha.\mathrm{Nrd}(\bar{\eta}) = au^2 + bv^2 + abw^2 + ct^2$$

avec $u, v, w, t \in F$, soit encore

$$\alpha = (1/a.b.\mathrm{Nrd}(\bar{\eta})).(W^2 + aV^2 + bU^2 + cabT^2)$$

avec $U, V, W, T \in F$, ce qui compte tenu du lemme 2.2, montre que α appartient à $N_Q(F)$. □

Soit Q/F une quadrique lisse de dimension au moins 2 sur le corps F (car.$(F) \neq 2$), donnée comme le lieu des zéros d'une forme quadratique q. Le revêtement double du groupe spécial orthogonal par le groupe spinoriel de q définit une suite exacte de F-groupes algébriques

$$1 \to \mu_2 \to \mathrm{Spin}(q) \to \mathrm{SO}(q) \to 1.$$

Dans la suite exacte d'ensembles de cohomologie associée

$$\mathrm{SO}(q)(F) \to F^*/F^{*2} \to H^1(F, \mathrm{Spin}(q)) \to H^1(F, \mathrm{SO}(q))$$

(où on a identifié F^*/F^{*2} avec $H^1(F, \mu_2)$) l'application $\mathrm{SO}(q)(F) \to F^*/F^{*2}$ est donnée par la norme spinorielle et son image est le groupe engendré par les produits pairs de valeurs de la forme q (ce groupe contient de façon évidente les carrés de F^*). On a donc la

PROPOSITION 2.4. *Avec les notations ci-dessus, le quotient $F^*/N_Q(F)$ s'identifie au noyau de l'application d'ensembles pointés $H^1(F, \mathrm{Spin}(q)) \to H^1(F, \mathrm{SO}(q))$.*

Remarque 2.4.1. Grâce à la proposition 2.4, on peut certainement établir la proposition 2.3 au moyen des 'isomorphismes exceptionnels'. Y a-t-il de telles interprétations pour les formes quadratiques de rang 5 et 6?

Terminons ce paragraphe en établissant un résultat bien connu mais qu'il est difficile de trouver dans la littérature.

THÉORÈME 2.5. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2 et soit $Q \subset \mathbf{P}^3_F$ une quadrique lisse définie par une forme quadratique q/F, de déterminant $d = \mathrm{dét}(q)$.*

(a) *Si d est un carré dans F^*, il existe une conique lisse C/F isomorphe à toute section hyperplane lisse de $Q \subset \mathbf{P}^3_F$, et Q est F-isomorphe au produit $C \times_F C$.*

(b) *Si d n'est pas un carré dans F^*, soit $L = F(\sqrt{d})$. Alors, pour toute conique C/F section hyperplane lisse de $Q \subset \mathbf{P}^3_F$, la quadrique Q est F-isomorphe à la F-variété $R_{L/F}(C \times_F L)$, descendue à la Weil de la conique $C \times_F L$ sur L.*

Algébriquement, si la forme quadratique q est donnée sous forme diagonale $\langle 1, -a, -b, abd \rangle$, on peut prendre C définie par la forme $\langle 1, -a, -b \rangle$.

Démonstration. Si d est un carré dans F, on choisira $d = 1$. On peut supposer la quadrique $Q \subset \mathbf{P}^3_F$ donnée par l'équation homogène

$$x^2 - ay^2 - bz^2 + abdt^2 = 0$$

que l'on peut réécrire

$$(x - \sqrt{a}y)(x + \sqrt{a}y) = b(z - \sqrt{a}\sqrt{d}t)(z + \sqrt{a}\sqrt{d}t)$$

sur la clôture algébrique $\bar{F}$ de F. La quadrique $\bar{Q}$ est isomorphe au produit de deux droites projectives. Les systèmes de génératrices sont donnés par

$$\lambda(x - \sqrt{a}y) = \mu(z - \sqrt{a}\sqrt{d}t)$$
$$\mu(x + \sqrt{a}y) = b\lambda(z + \sqrt{a}\sqrt{d}t)$$

et

$$\lambda(x - \sqrt{a}y) = \mu(z + \sqrt{a}\sqrt{d}t)$$
$$\mu(x + \sqrt{a}y) = b\lambda(z - \sqrt{a}\sqrt{d}t)$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbf{P}^1(\bar{F})$. On passe d'un système à l'autre en changeant le signe de $\sqrt{d}$. Notons e_1 et e_2 les classes de ces génératrices dans le groupe de Picard de $\bar{Q}$. On a $\mathrm{Pic}(\bar{Q}) = \mathbf{Z}e_1 \oplus \mathbf{Z}e_2$. La forme d'intersection sur $\mathrm{Pic}(\bar{Q})$ est, de façon évidente, donnée par:

$$(e_1 . e_1) = 0, \quad (e_1 . e_2) = 1, \quad (e_2 . e_2) = 0.$$

La classe des sections hyperplanes est donnée par $e_1 + e_2$. Soit $G = \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$. On voit que les classes e_1 et e_2 dans $\mathrm{Pic}(\bar{Q})$ sont fixes sous l'action de G si d est un carré, et qu'elles sont conjuguées sous l'action de $\mathrm{Gal}(L/F)$ sinon (pour vérifier qu'une droite tracée sur $\bar{Q}$ est dans la classe d'une génératrice, il suffit de vérifier qu'elle ne rencontre pas une génératrice de cette classe).

Supposons d'abord que d est un carré soit $d = 1$. Si l'algèbre de quaternions (a, b) sur F est triviale, alors on peut supposer que l'équation de la quadrique est

$$x^2 - y^2 - z^2 + t^2 = 0$$

et Q est alors clairement isomorphe à $\mathbf{P}^1_F \times_F \mathbf{P}^1_F$. Par ailleurs, toute section lisse hyperplane de Q est une conique avec un point F-rationnel, donc est isomorphe à $\mathbf{P}^1_F$.

Supposons toujours $d = 1$ mais supposons l'algèbre de quaternions (a, b) non triviale. Soit C la conique associée, d'équation

$$X^2 - aY^2 = bT^2.$$

Pour toute F-variété propre, lisse et géométriquement intègre X, on a la suite exacte bien connue

$$0 \to \mathrm{Pic}(X) \to \mathrm{Pic}(\bar{X})^G \to \mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(X))$$

(on utilise ici l'injection du groupe de Brauer $\mathrm{Br}(X)$ dans $\mathrm{Br}(F(X))$, conséquence de la lissité de X). On vérifie aisément que Q est F-birationnelle au produit $C \times_F \mathbf{P}^1_F$. Ainsi le noyau de $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(X))$ s'identifie au noyau de $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F(C))$, dont on sait bien qu'il est égal à $\mathbf{Z}/2$ et engendré par la classe α, non nulle, de (a, b) dans $\mathrm{Br}(F)$. Par ailleurs la classe $e_1 + e_2$ vient de $\mathrm{Pic}(Q)$, puisque c'est la classe des sections hyperplanes. Ainsi, dans la suite ci-dessus, les éléments e_1 et e_2 de $\mathrm{Pic}(\bar{Q})^G$ s'envoient sur la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$. On sait que la donnée d'un morphisme d'une F-variété propre géométriquement intègre X dans une conique C d'invariant $\alpha \in \mathrm{Br}(F)$ équivaut à la donnée d'un élément L de $\mathrm{Pic}(\bar{X})^G$ d'image α par la suite ci-dessus, tel que l'espace des sections de L sur $\bar{X}$ n'ait pas de zéro commun et soit de dimension 2 (cf. [15] p. 1217/1218). Il en est bien ainsi ici des deux classes e_1 et e_2 de $\mathrm{Pic}(\bar{Q})^G$. Comme chacun de leur invariants est égal à α, on voit qu'il existe un F-morphisme $Q \to C \times_F C$ qui sur $\bar{F}$ donne l'isomorphisme $\bar{Q} \to \mathbf{P}^1 \times \mathbf{P}^1$ défini par les deux systèmes de génératrices. On a donc bien $Q \simeq C \times_F C$. Si $D \subset Q$ est une conique lisse section hyperplane de Q, comme $([D].e_1) = ((e_1 + e_2).e_1) = 1$ et de même $([D].e_2) = 1$, chaque projection $Q \to C$ induit un F-isomorphisme $D \simeq C$.

Supposons maintenant que d n'est pas un carré dans F, et $L = F(\sqrt{d})$. Soit C/F la conique lisse correspondant à l'algèbre de quaternions (a, b). Les arguments précédents s'appliquent à Q_L/L. On a donc un L-isomorphisme $Q_L \simeq C_L \times_L C_L$, où les projections $Q_L \to C_L$ sur le premier, resp. le deuxième facteur, correspondent, sur $\bar{F}$, à e_1, resp. e_2. Au morphisme $Q_L \to C_L$ défini par la projection sur le premier facteur correspond, par la restriction des scalaires à la Weil, un F-morphisme $f: Q \to R_{L/F}(C_L)$, qui par passage à L donne un L-morphisme $f_L: Q_L \to C_L \times_L C_L$. La définition même de la descente des scalaires assure que la composition de f_L avec la première projection définit la classe $e_1 \in \mathrm{Pic}(\bar{Q})$ sur $\bar{F}$ et que la composition de f_L avec la deuxième projection correspond à la classe conjuguée par $\mathrm{Gal}(L/F)$, c'est-à-dire e_2. Ainsi f devient un isomorphisme sur $\bar{F}$, il l'était donc sur F. Si $D \subset Q$ est une conique section hyperplane lisse de Q, alors D_L est une conique section hyperplane lisse de la quadrique Q_L dont le déterminant est maintenant un carré et on a vu qu'alors D_L est L-isomorphe à C_L. □

Remarque 2.5.1. A la lumière de la proposition précédente, on peut se demander si la proposition 2.3 admet des généralisations. Plus précisément, soit $X = R_{K/F}(Z)$, où Z/K est une variété de Severi–Brauer d'algèbre associée A/K, et K/F est une extension finie séparable de corps. Soit $N_X(F) \subset F^*$ le groupe des normes de X, i.e. le groupe engendré par les normes $N_{L/F}(L^*)$ pour L/F variant parmi les extensions finies de F avec $X(L) \neq \emptyset$. On établit facilement que l'image de $N_X(F) \subset F^*$ dans K^* est dans le sous-groupe $\mathrm{Nrd}_A(A^*) \subset K^*$. Cette image coïncide-t-elle avec $F^* \cap \mathrm{Nrd}_A(A^*)$? Est-ce au moins le cas lorsque Z/K provient, comme dans la proposition 2.3, d'une variété définie sur F? Dans une autre direction, est-ce au moins le cas pour une surface (de Del Pezzo de degré 8) $X = R_{K/F}(Z)$, avec K/F extension quadratique et Z une conique définie sur K mais pas sur F?

Ces questions sont d'importance, dans la mesure où l'on voudrait étendre les résultats du présent article au cas d'une variété fibrée au-dessus d'une courbe C, la fibre générique étant du type $R_{K/k(C)}(Z)$.

3. Géométrie des fibrations en quadriques

Dans ce paragraphe et les suivants on suppose le corps de base k parfait de caractéristique différente de 2.

DÉFINITION 3.1. Soit C/k une courbe projective, lisse et géométriquement intègre. On appelle fibré en quadriques admissible sur C une k-variété propre et intègre X équipée d'un k-morphisme propre surjectif $p: X \to C$, de fibre générique X_η une quadrique lisse, et qui en tout point fermé $P \in C$ est isomorphe, au-dessus de l'anneau de valuation discrète $A_P = \mathcal{O}_{C,P}$, à un A_P-schéma projectif donné par une équation homogène

$$\sum_{i=1,\ldots,n} a_i X_i^2 = 0,$$

où les valuations $v_P(a_i)$ satisfont $0 \leqslant v_P(a_i) \leqslant 1$ et $0 = v_P(a_i)$ pour $i \leqslant (n+1)/2$.

On peut montrer (facilement) que tout fibré en quadriques (en un sens naïf) au-dessus de C est $k(C)$-birationnel à un fibré en quadriques admissible. Pour une discussion détaillée dans le cas des fibrés de dimension relative 2, on se reportera à [20].

On notera $X_P/k(P)$ la fibre de $p: X \to C$ au-dessus du point fermé P. On vérifie immédiatement le lemme suivant (qui en dimension relative 1 donne la lissité sur k des fibrés en coniques admissibles):

LEMME 3.2. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible de dimension relative au moins 1. Soit P un point fermé de C et soit π une uniformisante de l'anneau local A_P. Supposons la fibre $X_P/k(P)$ au-dessus du point P singulière. Ecrivons $X \times_C \operatorname{Spec}(A_P)$ sous la forme*

$$\sum_{i=1,\ldots,r} a_i X_i^2 + \pi \sum_{i=r+1,\ldots,n} b_i X_i^2 = 0,$$

avec les a_i et b_i unités dans A_P et $r \geqslant n/2$. Alors la trace sur X_P du lieu singulier X_{sing} de X est donnée par

$$X_i = 0 \ (i = 1,\ldots,r); \qquad \sum_{i=r+1,\ldots,n} b_i(P) X_i^2 = 0,$$

où l'on a noté $b_i(P)$ la classe de b_i dans le corps résiduel $k(P)$ en P. En particulier, la $k(P)$-variété singulière X_P possède un $k(P)$-point situé dans le lieu lisse de X.

Démonstration. Les premières assertions résultent d'un calcul immédiat. Quant à la dernière, il suffit de prendre un $k(P)$-point avec $X_i = 0$ $(i = 1,\ldots,r)$ et $\Sigma_{i=r+1,\ldots,n} b_i(P) X_i^2 \neq 0$. □

THÉORÈME 3.3. *Soit X/C un fibré en quadriques admissible de dimension relative au moins 2. Soit $\sigma: X' \to X$ l'éclaté du lieu singulier $Y = X_{\text{sing}}$ dans X, et soit $E = \sigma^{-1}(Y)$ le diviseur exceptionnel sur X'. Alors*

(a) *La k-variété X' est lisse.*
(b) *Les fibres du morphisme $\tau: E \to Y$ induit par σ sont des quadriques lisses de dimension au moins 2.*
(c) *Il existe un k-morphisme $s: Y \to E$ qui est une section de τ, i.e. $\tau \circ s = \mathrm{id}_Y$.*
(d) *Le morphisme σ_* induit un isomorphisme $\mathrm{CH}_0(X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0(X)$.*
(e) *Pour tout modèle projectif et lisse Z/k de X/k, on a un isomorphisme $\mathrm{CH}_0(Z) \simeq \mathrm{CH}_0(X)$.*

Démonstration. Lorsque la dimension relative est 1, et plus généralement lorsque partout localement aux points à fibre singulière, on a $r = n - 1$ ou $r = n$, alors X/k est lisse (lemme 3.2). Dans la suite on supposera donc $n \geqslant 4$, $n/2 \leqslant r \leqslant n - 2$.

Comme le lieu singulier Y est contenu dans un nombre fini de fibres (singulières), pour établir les énoncés (a), (b) et (c) on peut restreindre la fibration $p: X \to C$ au-dessus d'un voisinage affine que nous noterons encore $C = \operatorname{Spec}(A)$ d'un point fermé P à fibre singulière X_P, les autres fibres étant supposées lisses. Le lieu singulier $Y = X_{\text{sing}}$ de X est alors contenu dans la fibre X_P. Quitte à restreindre encore C on peut en outre supposer le point P défini dans C par un idéal principal donné par un élément $t \in A$, et X/C donnée par l'équation

$$\sum_{i=1,\ldots,r} a_i X_i^2 + t \sum_{i=r+1,\ldots,n} b_i X_i^2 = 0,$$

avec $a_i \in A$ et $b_i \in A$ unités dans A (ici $r \geqslant n/2$), dans l'espace projectif $\mathbf{P}_A^{n-1}$. D'après le lemme 3.2, le lieu singulier Y est donné par les équations

$$X_i = 0 \ (i = 1, \ldots, r); \ t = 0; \quad \sum_{i=r+1,\ldots,n} b_i(P) X_i^2 = 0,$$

c'est donc une quadrique lisse de dimension $n - r - 2 \geqslant 0$ sur le corps $k(P)$. Soit M un point de Y. Il est contenu dans l'un des ouverts définis par $X_i \neq 0$, $i = r+1, \ldots, n$, par symétrie on peut supposer que c'est $X_{r+1} \neq 0$. Posons $s = n - r - 1 \geqslant 1$ et $y_j = x_{r+1+j}$ $(j \geqslant 1)$. Le point M est alors contenu dans le schéma affine que nous noterons encore $X = \mathrm{Spec}(B)$ d'anneau

$$B = A[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s]/f$$

avec

$$f = \sum_{i=1,\ldots,r} a_i x_i^2 + t\left(b_0 + \sum_{j=1,\ldots,s} b_j y_j^2\right)$$

a_i et b_j étant des unités dans A. Le lieu singulier de X est $Y = \mathrm{Spec}(B/I)$ avec

$$I = (x_1, \ldots, x_r, t, u)$$

et

$$u = b_0 + \sum_{j=1,\ldots,s} b_j y_j^2.$$

Ce fermé Y est une sous-variété lisse sur k, intersection complète dans $Z = \mathbf{A}_A^{r+s}$. Soit Z' l'éclaté de Z le long de Y. Ce A-schéma s'obtient simplement comme le fermé de l'espace produit $\mathbf{A}_A^{r+s} \times_A \mathbf{P}_A^{r+1}$ défini par l'annulation des mineurs (2,2) de la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_r & t & b_0 + \Sigma_{j=1,\ldots,s} b_j y_j^2 \\ X_1 & \ldots & X_r & T & U \end{pmatrix}$$

où les $(X_1, \ldots, X_r, T, U)$ désignent des coordonnées homogènes pour l'espace projectif $\mathbf{P}_A^{r+1}$. L'éclaté X' de X le long de Y s'obtient alors comme le transformé propre de X dans Z'. Pour obtenir les équations de X', on passe en coordonnées affines, c'est-à-dire qu'on se place sur les divers ouverts $X_i \neq 0$, puis $U \neq 0$, enfin $T \neq 0$. Sur chaque ouvert, on utilise les égalités fournies par l'annulation des mineurs ci-dessus, et on obtient le transformé propre X' en enlevant le diviseur exceptionnel du transformé total. On vérifie alors simplement par le critère jacobien que X' est lisse sur k. Par ailleurs, on vérifie aussi qu'au-dessus d'un point $M \in Y$, la fibre de X'/X est donnée dans l'espace projectif $\mathbf{P}_{k(M)}^{r+1}$ par l'équation

$$\sum_{i=1,\ldots,r} a_i(M) X_i^2 + UT = 0.$$

C'est donc une quadrique lisse, de dimension $r \geqslant n/2 \geqslant 2$. Ceci établit les points (a) et (b) du théorème.

Nous avons la chaîne d'immersions fermées $Y \hookrightarrow S \hookrightarrow X$ où S est le fermé donné avec les coordonnées comme ci-dessus par les équations $x_1 = \cdots = x_r = t = 0$. Le fermé Y est un diviseur de Cartier sur S. D'après [9] B.6.9, il y a une immersion fermée canonique

$$\mathrm{Bl}_Y S \hookrightarrow \mathrm{Bl}_Y X = X'$$

où $\mathrm{Bl}_Y S$ désigne l'éclaté de S le long de Y. Mais puisque Y est un diviseur de Cartier de S on a une identification canonique

$$\mathrm{Bl}_Y S = S$$

([9], B.6.8). Ainsi la restriction de la projection X'/X au-dessus de S admet une section, a fortiori en admet-elle une au-dessus de $Y \subset S$, ce qui établit le point (c).

Pour tout point fermé M de X il existe un point fermé N de X' avec $\sigma(N) = M$ et $k(M) \simeq k(N)$. Ceci est clair pour les points M non situés dans Y et résulte du point (c) pour ceux situés dans Y. Ainsi l'application $\sigma_*: Z_0(X') \to Z_0(X)$ est surjective, a fortiori en est-il ainsi de $\sigma_*: \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$. Soit maintenant $z \in Z_0(X')$ un 0-cycle d'image $\sigma_*(z) \in Z_0(X)$ rationnellement équivalente à zéro sur X. On peut donc écrire:

$$\sigma_*(z) = \sum_{i \in I} \mathrm{div}_{\gamma_i}(f_{\gamma_i})$$

pour un ensemble fini I de courbes fermées intègres $\gamma_i \subset X$ et certaines fonctions $f_{\gamma_i} \in k(\gamma_i)^*$. Toujours d'après (c), on peut relever chaque point générique d'une courbe γ_i en un point de dimension 1 de X', de corps résiduel isomorphe à $k(\gamma_i)$ (si γ_i est contenue dans Y, on prend le point générique de $s(\gamma_i)$). En d'autres termes, on peut trouver des courbes $\delta_i \subset X'$ ($i \in I$) se projetant birationnellement sur les courbes γ_i. Plus précisément, chaque projection $\sigma: \delta_i \to \gamma_i$ est un isomorphisme lorsque γ_i est contenue dans Y, et lorsque γ_i n'est pas contenue dans Y, la projection $\sigma: \delta_i \to \gamma_i$ induit un isomorphisme $\delta_i - E \to \gamma_i - Y$. Le 0-cycle z est rationnellement équivalent au 0-cycle

$$w = z - \sum_{i \in I} \mathrm{div}_{\delta_i}(f_{\delta_i}) \in Z_0(X')$$

dont la projection par σ_* est identiquement nulle. Mais ceci implique que w est une somme de 0-cycles w_M, chaque w_M étant un 0-cycle de degré zéro contenu dans la fibre E_M de $\sigma: E \to Y$ au-dessus du point fermé $M \in Y$. Comme une telle fibre est une quadrique lisse connexe (puisque de dimension au moins 2) le lemme 4.1 ci-dessous assure que w_M est rationnellement équivalent à zéro sur E_M, a fortiori sur X'. Ainsi le 0-cycle z est-il lui-même rationnellement équivalent à zéro sur X', et $\sigma_*: \mathrm{CH}_0(X') \to \mathrm{CH}_0(X)$ est un isomorphisme.

L'énoncé (e) résulte directement des énoncés (a) et (d), compte tenu de l'invariance k-birationnelle du groupe de Chow $\mathrm{CH}_0(X)$ (voir [9] 16.1.11, dont la démonstration vaut pour tout corps de base). □

4. Groupe de Chow des 0-cycles d'une variété fibrée en quadriques: énoncés généraux

LEMME 4.1. *Soit $X \subset \mathbf{P}^n_F$ une quadrique sur un corps F, $n \geqslant 2$. L'application degré $\mathrm{CH}_0(X) \to \mathbb{Z}$ est injective: le groupe $A_0(X)$ est nul.*

Le lecteur se reportera à la note de Swan [21].

THÉORÈME 4.2. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative $\geqslant 1$, au-dessus d'une courbe projective et lisse C sur le corps k. Pour une fonction $f \in k(C)^*$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Il existe un 0-cycle z sur X tel que $\mathrm{div}_C(f) = p_*(z)$;*

(b) *en tout point fermé P de C on peut écrire f comme le produit d'une unité en P par une fonction dans $N_{X_\eta}(k(C))$, i.e. f appartient à $k(C)^*_{\mathrm{dn}}$;*

(c) *en tout point fermé P de C tel que la fibre X_P n'ait pas de point $k(P)$-rationnel (ce qui impose $X_P/k(P)$ lisse), la multiplicité de f en P est paire.*

En outre on a un isomorphisme de groupes de 2 torsion

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \simeq \mathrm{Ker}[p_*: \mathrm{CH}_0(X) \to \mathrm{CH}_0(C)].$$

A une fonction $f \in k(C)^*_{\mathrm{dn}}$, avec $\mathrm{div}(f) = p_*(z)$, cet homomorphisme associe la classe du zéro-cycle z dans le groupe de Chow $\mathrm{CH}_0(X)$.

Démonstration. L'équivalence des propriétés (a) et (b) résulte de la dernière assertion de la proposition 1.2 et du lemme 3.2. En un point P où X_P possède un $k(P)$-point rationnel, ce qui est le cas en particulier si X_P est singulière, l'assertion (a) est trivialement satisfaite par toute fonction f. En un point P où la quadrique (nécessairement lisse) X_P n'a pas de point $k(P)$-rationnel, l'image de l'application degré $Z_0(X_P) \to \mathbf{Z}$ est égale à $2\mathbf{Z}$ comme on vérifie immédiatement. La condition (a) se traduit donc en un tel point par la parité de $v_P(f)$.

Pour établir l'isomorphisme, il suffit de vérifier les deux conditions du théorème 1.4. La première, à savoir que pour tout point fermé $P \in C$, le groupe $A_0(X_P)$ est nul, fait l'objet du lemme 4.1. La seconde condition, à savoir l'existence, en tout point P fermé de C, d'un 0-cycle z_P de X_P à support dans le lieu lisse de X et d'image $p_*(z_P)$ engendrant le groupe $p_*\mathrm{CH}_0(X_P)$ est aussi vérifiée. Ceci est clair si X_P est lisse. Si la quadrique X_P est singulière, on a observé au lemme 3.2 qu'elle possédait un $k(P)$-point rationnel – générateur de $\mathrm{CH}_0(X_P)$ d'après le lemme 4.1 – situé dans le lieu lisse de X. □

Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative 2, au-dessus d'une courbe projective et lisse C sur le corps parfait k. La fibre générique X_η est alors une quadrique lisse sur le corps $k(C)$, définie par une forme quadratique q de rang 4, définie à multiplication par un scalaire près. Comme expliqué au théorème 2.5, on associe à cette quadrique son discriminant $d(q)$ dans $k(C)^*$, bien défini à un carré près, ainsi qu'une conique Q sur le corps $L = k(C)(\sqrt{d(q)})$, obtenue comme section hyperplane lisse de la quadrique $X_\eta \subset \mathbf{P}^3_{k(C)}$. Soit $\tilde{C}/k$ la courbe projective, lisse, intègre obtenue par normalisation de C dans L. On appelle $\tilde{C}/C$ le revêtement discriminant de la fibration X/C.

On peut distinguer trois types ((I), (II) et (III) dans la terminologie de [20]) de fibrations en quadriques X/C de dimension relative 2. Si $d(q)$ n'est pas un carré dans le corps des fonctions $\bar{k}(C)$ de la courbe $\bar{C}/\bar{k}$, on dit que le fibré est de type (I). Si $d(q)$ n'est pas un carré dans $k(C)$ mais est un carré dans $\bar{k}(C)$, on dit que le fibré est de type (II). Dans ce cas, $d(q)$ s'écrit comme le produit d'un carré de $k(C)$ et d'un élément $\delta \in k^*$, $\delta \notin k^{*2}$. On note alors K le corps $k(\sqrt{\delta})$. C'est une extension quadratique de k, qui est la clôture algébrique de k dans $k(C)$. Enfin si $d(q)$ est un carré dans $k(C)$, on dit que le fibré est de type (III). Pour les types (I) et (II), la courbe $\tilde{C}/k$ est un revêtement double de C, géométriquement intègre si et seulement si le fibré est de type (I). Pour le type (III) la courbe $\tilde{C}$ coïncide avec C.

On appellera fibré en coniques admissible associé à $p: X \to C$ tout fibré en coniques admissible $Y/\tilde{C}$ de fibre générique $k(\tilde{C})$-isomorphe à la conique Q.

THÉORÈME 4.3. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative 2, au-dessus d'une courbe projective, lisse et géométriquement intègre C sur le corps k. Soit $\tilde{C} \to C$ le revêtement discriminant. Soit $q: Y \to \tilde{C}$ un fibré en coniques admissible associé. Si la fibration est de type (I) ou (III), l'application $k(C)^* \to k(\tilde{C})^*$ induit une injection*

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \hookrightarrow k(\tilde{C})^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})).$$

Si la fibration est de type (II), et $K = k[\tilde{C}]$ désigne la clôture algébrique de k dans $k(\tilde{C})$, le noyau de l'application

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \to k(\tilde{C})^*_{\mathrm{dn}}/K^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C}))$$

est un sous-groupe du quotient $K^*/k^*.(K^* \cap N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})))$.

Démonstration. De façon générale, soit K la clôture algébrique de k dans $k(C)$, clôture qui n'est autre que l'anneau $k[\tilde{C}] = H^0(\tilde{C}, \mathcal{O}_{\tilde{C}})$, coïncide avec k pour les types (I) et (III), et est une extension quadratique de k pour le type (II). La proposition 2.3 donne une injection

$$k(C)^*/N_{X_\eta}(k(C)) \hookrightarrow k(\tilde{C})^*/N_{Y_\eta}(k(\tilde{C}))$$

et donc aussi une injection

$$k(C)^*/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \hookrightarrow k(\tilde{C})^*/k^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})).$$

Soit $f \in k(C)^*$ une fonction dont la classe est dans le noyau de l'application

$$k(\tilde{C})^*/k^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})) \to k(\tilde{C})^*/K^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})).$$

On peut alors écrire $f = \rho . g$, avec $\rho \in K^*$ et $g \in N_{Y_\eta}(k(\tilde{C}))$. Un calcul simple montre alors qu'en associant à f la classe de $\rho \in K^*/k^*.(K^* \cap N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})))$ on obtient une injection du noyau de

$$k(C)^*/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \to k(\tilde{C})^*/K^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C}))$$

dans le groupe $K^*/k^*.(K^* \cap N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})))$. Ce dernier groupe est nul pour les types (I) et (III), puisqu'alors $k = K$. Par ailleurs, si $f \in k(C)^*$ appartient à $k(C)^*_{\mathrm{dn}}$, alors son image dans $k(\tilde{C})^*$ appartient à $k(\tilde{C})^*_{\mathrm{dn}}$: ceci résulte de la définition 1.3 de $k(C)^*_{\mathrm{dn}}$ et de la comparaison des groupes $N_{X_\eta}(k(C))$ et $N_{Y_\eta}(k(\tilde{C}))$ (Proposition 2.3). Ceci achève la démonstration du théorème. □

Remarque 4.3.1. On peut en fait montrer que toute fonction de $k(C)^*$ dont l'image dans $k(\tilde{C})^*$ est dans $k(\tilde{C})^*_{\mathrm{dn}}$ est automatiquement dans $k(C)^*_{\mathrm{dn}}$.

Remarque 4.3.2. Pour les types (I) et (III), le théorème ci-dessus et le théorème 1.4 fournissent une injection $\mathrm{CH}_0(X/C) \hookrightarrow \mathrm{CH}_0(Y/\tilde{C})$. Il est naturel de se demander s'il en est encore ainsi pour le type (II), soit encore d'après le théorème 1.4, si l'on a dans ce cas une injection

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)) \hookrightarrow k(\tilde{C})^*_{\mathrm{dn}}/K^*.N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})).$$

Ceci n'est pas toujours le cas, comme le montre l'exemple suivant (cf. [20], Example 3.1 p. 68). Soit k le corps $\mathbf{Q}_p$ des p-adiques, avec $p \neq 2$. Soit $u \in \mathbf{Z}_p^*$ une unité qui n'est pas un carré. Considérons un fibré en quadriques U au-dessus de la droite affine $\mathrm{Spec}(k[\lambda])$ donné par l'équation homogène en x, y, z, t:

$$x^2 - uy^2 - (\lambda^2 - pu)(z^2 - pt^2) = 0.$$

Soit X/C un fibré en quadriques admissible associé au-dessus de $C = \mathbf{P}^1_k$, et W/C un modèle avec W/k projectif et lisse ([20], §2). On vérifie par des calculs valuatifs dans le corps des fonctions de X, ou avec les méthodes de [20] loc. cit., que l'algèbre de quaternions $(\lambda^2 - pu, u)$ sur le corps $k(W)$ définit sur W une algèbre partout non ramifiée, i.e. un élément α du groupe du Brauer de W. Cet élément permet donc de définir un homomorphisme $\rho: \mathrm{CH}_0(W) \to \mathrm{Br}(k) = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$, qui à tout point fermé $P \in W$ associe la classe de $\mathrm{Cores}_{k(P)/k}(\alpha(P))$. Or on vérifie aisément sur le modèle U ci-dessus que cet homomorphisme est non trivial. Des propriétés bien connues de la norme dans les extensions de corps locaux, on déduit en effet qu'il existe des points k-rationnels $A \in U(k)$ avec $\lambda = 1/p$, $z = 1/p$, $t = 1$ et donc $\rho(A) = 0$ et des points rationnels $B \in U(k)$ avec $\lambda = 0$, $z = 0$, $t = 1$ et donc $\rho(B) = 1/2$. Le 0-cycle $A - B$ a alors une classe non nulle dans $A_0(W) = \mathrm{CH}_0(W/\mathbf{P}^1_k) \simeq \mathrm{CH}_0(X/\mathbf{P}^1_k)$ (on a utilisé le théorème 3.3). Ainsi $\mathrm{CH}_0(X/C) \neq 0$.

D'un autre côté, tout fibré en coniques admissible $Y/\mathbf{P}^1_K$ associé au fibré ci-dessus est un fibré sur $\mathbf{P}^1_k$, avec $K = k(\sqrt{pu})$, de modèle affine

$$x^2 - uy^2 - (\lambda^2 - pu) = 0.$$

Cette surface admet comme compactification lisse une quadrique avec un point rationnel, et donc (cas trivial du lemme 4.1) pour tout modèle projectif et lisse Y/K, on a $A_0(Y) = 0$, ce qui implique $\mathrm{CH}_0(Y/\tilde{C}) = \mathrm{CH}_0(Y/\mathbf{P}^1_K) = A_0(Y) = 0$.

5. Groupe de Chow des 0-cycles d'une surface fibrée en coniques: rappels

Nous rappelons ici les résultats déjà obtenus. Soit C une courbe projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps k et X/C une fibration en coniques admissible. Lorsque $C = \mathbf{P}^1_k$, ces résultats sont dus à Bloch [1] (complété par Sansuc et le premier auteur [7]). Pour C de genre quelconque, les résultats furent obtenus par Gros [10] et Ōkōchi. Comme il a été rappelé dans l'introduction, les principaux résultats de finitude (sur un corps p-adique, sur un corps de nombres) ont été depuis démontrés pour des surfaces plus générales (Raskind et le premier auteur [6]; Salberger; S. Saito; cf. [3]). On peut donc aussi faire appel à ces résultats plus récents. Toutes ces démonstrations utilisent l'identification $\mathrm{CH}_0(X) = \mathrm{CH}^2(X)$ pour X une surface.

Soit k un corps parfait de caractéristique différente de 2, puis C/k une courbe projective et lisse géométriquement intègre, enfin X/C une fibration en coniques admissible. Par des méthodes de K-théorie algébrique, on définit ([1], [5], [10]) une application caractéristique Φ:

$$\mathrm{CH}_0(X/C) \xrightarrow{\Phi} H^1(k, S),$$

où S est le k-tore dual du groupe de Néron–Severi de la surface projective et lisse $\bar{X}$. Soit D l'algèbre de quaternions sur $k(C)$ correspondant à la conique générique X_η de la fibration $p: X \to C$, et Nrd la norme réduite associée. D'après la proposition 2.1, on peut identifier $N_{X_\eta}(k(C))$ avec $\mathrm{Nrd}(D^*)$. Le théorème 4.2 donne un isomorphisme

$$k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.\mathrm{Nrd}(D^*) \xrightarrow{\sim} \mathrm{CH}_0(X/C).$$

On considère ensuite l'application ρ qui à $f \in k(C)^*$ associe la classe du cup-produit

$$(f \cup D) \in H^3(k(C), \mathbf{Z}/2).$$

Il s'agit ici de cohomologie galoisienne, et dans cette formule on voit f comme une classe dans $k(C)^*/k(C)^{*2} \simeq H^1(k(C), \mathbf{Z}/2)$ et D comme une classe dans $H^2(k(C), \mathbf{Z}/2) \simeq {}_2\mathrm{Br}(k(C))$ (la 2-torsion du groupe de Brauer de $k(C)$). Un résultat de Merkur'ev et Suslin ([16]) assure que l'application en question induit un homomorphisme *injectif* de $k(C)^*/\mathrm{Nrd}(D^*)$ dans $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$. On montre ensuite que le noyau de l'application $k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.\mathrm{Nrd}(D^*) \to H^1(k, S)$ induite par Φ s'identifie via ρ à un sous-quotient du groupe des éléments non ramifiés de $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$, c'est-à-dire de l'image de l'application restriction au point générique $H^3_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/2) \to H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$.

De ceci on déduit les résultats suivants sur le groupe $k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.\mathrm{Nrd}(D^*) \simeq \mathrm{CH}_0(X/C)$.

(i) Si k est un corps de dimension cohomologique 1, alors ce groupe est nul. En effet $H^1(k, S) = 0$, et par ailleurs $k(C)$ est de dimension cohomologique 2.

(ii) Si k est un corps local, ce groupe est fini. En effet sur un tel corps le groupe $H^1(k, S)$ est fini quel que soit le k-tore S. Par ailleurs les groupes de cohomologie galoisienne d'un corps local à valeurs dans un module galoisien fini sont finis. Un argument de suite spectrale de Hochschild–Serre montre alors que le groupe $H^3_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/2)$ est fini.

On peut aussi établir la finitude en citant [5], §6, ou [3], §8 (travaux de S. Saito); le théorème 8.1 de [3], qui est une conséquence immédiate de résultats de Merkur'ev–Suslin [16], via une technique de Bloch, suffit ici déjà à établir la finitude du groupe $\mathrm{CH}_0(X/C)$, qu'i est un groupe de 2-torsion.

(iii) Si k est un corps de nombres, ce groupe est fini. La démonstration, due indépendamment à Gros [10] et à Ōkōchi (non publié), est plus délicate. On montre d'une part au moyen d'arguments de bonne réduction que l'image de l'homomorphisme caractéristique Φ dans le groupe (en général infini) $H^1(k, S)$ est finie, d'autre part on invoque un résultat de K. Kato [12] en théorie du corps de classes supérieur, qui assure que l'image du groupe $H^3_{\text{ét}}(C, \mathbf{Z}/2)$ dans $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ est finie. Pour les diverses autres façons d'obtenir la finitude de $\mathrm{CH}_0(X/C)$, on se reportera à [3] (§ 6 à 9).

(iv) Si k est un corps de nombres, alors pour presque toute place v de k, le groupe $\mathrm{CH}_0(X \times_k k_v/C \times_k k_v)$ est nul (Gros, [10], Prop. 2.1. p. 178; voir aussi [3], §8).

6. Groupe de Chow des 0-cycles d'une variété fibrée en quadriques: arithmétique

Dans tout ce paragraphe, k désigne un corps parfait de caractéristique différente de 2. En dimension relative quelconque, on a le:

THÉORÈME 6.1. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative au moins* 1, *au-dessus d'une courbe C, projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps k de dimension cohomologique* 1. *Alors le groupe*

$$\mathrm{CH}_0(X/C) = \mathrm{Ker}[\mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{p_*} \mathrm{CH}_0(C)] \simeq k(C)^*_{\text{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C))$$

est nul.

Démonstration. Lorsque la dimension cohomologique de k est 1, toute fibre de p a un point rationnel sur son corps de définition. Le groupe $k(C)^*_{\text{dn}}$ coïncide donc avec le groupe $k(C)^*$ tout entier. La fibre générique X_η est une quadrique lisse sur $k(C)$. Elle contient évidemment une $k(C)$-conique lisse, soit $Y/k(C)$. Soit $D/k(C)$ l'algèbre de quaternions associée à la conique $Y/k(C)$. Le groupe $N_{X_\eta}(k(C)) \subset k(C)^*$ contient le sous-groupe $N_Y(k(C)) = \mathrm{Nrd}(D^*)$. Mais comme nous l'avons déjà vu, le quotient $k(C)^*/\mathrm{Nrd}(D^*)$ s'injecte dans $H^3(k(C), \mathbf{Z}/2)$ (Merkur'ev/Suslin) et ce dernier groupe est nul car $k(C)$ est de dimension cohomologique 2. □

Remarque 6.1.1. Lorsque k est un corps fini, le résultat obtenu est, compte tenu du théorème 3.3, un cas particulier du théorème de Kato/Saito [13] donnant la valeur exacte de $A_0(X)$ pour une variété projective et lisse X quelconque.

THÉORÈME 6.2. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative 2, au-dessus d'une courbe C, projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps k. Notons*

$$CH_0(X/C) = \mathrm{Ker}[CH_0(X) \xrightarrow{p_*} CH_0(C)] \simeq k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)).$$

(i) *Si k est un corps de dimension cohomologique 1, le groupe $CH_0(X/C)$ est nul et le groupe $A_0(X)$ est isomorphe au groupe $A_0(C)$.*

(ii) *Si k est un corps fini, le groupe $A_0(X)$ est fini et isomorphe au groupe $A_0(C)$.*

(iii) *Le groupe $CH_0(X/C)$ est fini si k est un corps local (archimédien ou non).*

(iv) *Si k est un corps local non archimédien, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, le sous-groupe de torsion de $CH_0(X)$ est fini.*

(v) *Si X/C n'est pas de type (II), et k est un corps de nombres, le groupe $CH_0(X/C)$ est fini.*

(vi) *Si X/C n'est pas de type (II), et k est un corps de nombres, le groupe $CH_0(X)$ est un groupe de type fini.*

(vii) *Si X/C n'est pas de type (II), et k est un corps de nombres, pour presque toute place v de k, le groupe $CH_0(X \times_k k_v/C \times_k k_v)$ est nul.*

Démonstration. La plupart des énoncés résultent directement du théorème 4.3 et des rappels du §5 sur les fibrés en coniques. On notera que, même lorsque $C = \mathbf{P}^1_k$, il convient de faire appel aux résultats sur les fibrés en coniques au-dessus d'une courbe de genre quelconque. Les autres énoncés résultent des remarques suivantes.

Sur un corps de dimension cohomologique 1, l'application $p_*: CH_0(X) \to CH_0(C)$ est surjective car toute fibre de p est une quadrique, donc possède un point rationnel sur un tel corps.

Sur un corps fini, le groupe $A_0(C)$ s'identifie au groupe fini $J(k)$ des points k-rationnels de la jacobienne J de C.

En général, le groupe $A_0(C)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe $J(k)$ des points rationnels de la jacobienne de C. Si k est local non-archimédien, le groupe de torsion du groupe de Lie p-adique $J(k)$ est un groupe fini. Si k est un corps de nombres, le groupe $J(k)$ est un groupe de type fini d'après le théorème de Mordell–Weil.

Lorsque X/C est de type (II), et $D/k(\tilde{C})$ est l'algèbre de quaternions associée, le quotient $K^*/k^*.(K^* \cap N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})))$ est un quotient du groupe $K^*/K^* \cap \mathrm{Nrd}(D^*)$, sous-groupe, selon Merkur'ev/Suslin, de $H^3(k(\tilde{C}), \mathbf{Z}/2)$. Si k est de dimension cohomologique 1, ce groupe est nul. Par ailleurs $K^*/k^*.(K^* \cap N_{Y_\eta}(k(\tilde{C})))$ est aussi clairement un quotient de K^*/K^{*2}, et ce quotient est fini si k, et donc aussi K, est un corps local. □

Remarque 6.2.1. Pour X/C une fibration en quadriques admissible de dimension relative au moins 1, lorsque k est le corps $\mathbf{R}$ des réels et $C = \mathbf{P}^1_{\mathbf{R}}$, il résulte de [4] et du théorème 3.3 ci-dessus que le groupe $A_0(X)$ est fini, nul si $X(\mathbf{R}) = \emptyset$ et égal à $(\mathbf{Z}/2)^{s-1}$ si le nombre s de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$ est non nul. Dans le cas de dimension relative 2, nous suggérons au lecteur de confronter ce résultat avec le théorème 4.3.

Remarque 6.2.2. Sur un corps de nombres, on peut sans doute établir les énoncés de finitude (v), (vi) et (vii) lorsque X/C est de type (II). Mais pour ce faire, il conviendra de suivre le programme général rappelé dans l'introduction dans son entier (définition de l'application caractéristique, démonstration de la finitude de son image). Ce n'est pas le propos du présent article, qui précisément utilise la combinaison des §2 et §5 pour parvenir sans effort supplémentaire au théorème ci-dessus.

THÉORÈME 6.3. *Soit $p: X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative au moins 3, au-dessus d'une courbe projective et lisse C sur un corps k. Supposons que la quadrique générique X_η contienne une quadrique de dimension 3 définie par une forme quadratique du type*

$$q(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + abx_4^2 + cx_5^2$$

(avec $a, b, c \in k(C)^*$). Si k est un corps de dimension cohomologique au plus 2, par exemple si k est un corps de nombres totalement imaginaire ou un corps p-adique, alors le groupe

$$\mathrm{CH}_0(X/C) = \mathrm{Ker}[\mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{p_*} \mathrm{CH}_0(C)] \simeq k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C))$$

est nul.

(Une forme quadratique $\langle 1, a, b, ab, c \rangle$ du type décrit ci-dessus est connue sous le nom de "voisine d'une 3-forme de Pfister". La forme de Pfister dont elle est voisine est, avec les notations usuelles de la théorie algébrique des formes quadratiques [14], la forme

$$\langle\langle a, b, c \rangle\rangle = \langle 1, a \rangle \otimes \langle 1, b \rangle \otimes \langle 1, c \rangle.)$$

Démonstration. Procédant comme à la démonstration du théorème précédent, il suffit de voir que lorsque la quadrique X_η est de dimension 3 et donnée par la forme q ci-dessus, alors $N_{X_\eta}(k(C)) = k(C)^*$. D'après le lemme 2.2, le groupe $N_{X_\eta}(k(C))$ coïncide avec le sous-groupe de $k(C)^*$ engendré par les valeurs non nulles de q (sur $k(C)$). En utilisant la multiplicativité de la forme quaternionienne $x_1^2 + ax_2^2 + bx_3^2 + abx_4^2$ on voit aisément que toute valeur non nulle prise par la forme de Pfister $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ est produit de valeurs non nulles de la forme q. Ainsi le groupe $N_{X_\eta}(k(C))$ coïncide avec le sous-groupe ([14], X.1.7 p. 279) de $k(C)^*$ formé des valeurs de la forme de Pfister $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$. Maintenant il est connu (sur un corps de base F quelconque de caractéristique différente de 2) que la forme $\langle\langle a, b, c \rangle\rangle$ représente l'élément $f \in F^*$ si et seulement si le cup-produit $(-f) \cup (-a) \cup (-b) \cup (-c) \in H^4(F, \mathbf{Z}/2)$ est nul (Jacob/Rost [11]; Merkur'ev/Suslin [17]). Dans notre cas, le corps p-adique k est de dimension cohomologique 2, le corps $F = k(C)$ est de dimension cohomologique 3, et le groupe $H^4(F, \mathbf{Z}/2)$ est donc nul. Ainsi $N_{X_\eta}(k(C)) = k(C)^*$. □

Remarque 6.4. Soit X/C un fibré en quadriques admissible et soit Z un modèle projectif et lisse de X. En utilisant le théorème 3.3, qui assure l'existence d'isomorphismes $\mathrm{CH}_0(Z) \simeq \mathrm{CH}_0(X)$, on déduit des divers théorèmes de finitude ci-dessus des énoncés analogues pour $\mathrm{CH}_0(Z)$, énoncés que nous laissons le soin au lecteur d'expliciter.

THÉORÈME 6.5. *Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$ une intersection complète, lisse, de deux quadriques. Supposons $X(k) \neq \emptyset$.*

(i) *Si k est un corps de dimension cohomologique 1 et $n \geqslant 4$, alors le groupe $A_0(X)$ est nul.*

(ii) *Si k est un corps local, ou si k est un corps de nombres, et si $n = 4$ ou $n = 5$, alors le groupe $A_0(X)$ est un groupe fini.*

Démonstration. Sous l'hypothèse $X(k) \neq \emptyset$ on sait en effet que la k-variété X est k-birationnelle à une k-variété Y fibrée en quadriques sur la droite projective $\mathbf{P}_k^1$ ([8], Théorème 3.2), qu'on peut transformer en un fibré admissible (le cas de la dimension relative 2 est traité dans [20], §2, et le cas général se traite de même). D'après le théorème 3.3, on a donc $A_0(X) \simeq A_0(Y)$. Comme la base de la fibration est $\mathbf{P}_k^1$, le groupe $A_0(Y)$ s'identifie au groupe $\mathrm{CH}_0(Y/\mathbf{P}_k^1)$. L'énoncé (i) résulte alors du théorème 6.1. Pour $n = 4$, l'énoncé (ii) résulte des rappels sur les fibrés en coniques et du théorème 6.2.

Soit $n = 5$. L'hypothèse de lissité sur X assure que la fibration en quadriques $Y/\mathbf{P}_k^1$ construite dans ([8], loc. cit.) est admissible, et possède des fibres "faiblement singulières" au sens de [20], §2; en fait toutes les fibres sont faiblement singulières, et il y a 6 telles fibres géométriques, comme il résulte de [8], (3.4). Ainsi $Y/\mathbf{P}_k^1$ est de type (I) ([20], Prop. 3.2). L'énoncé pour $n = 5$ résulte alors du théorème 6.2 et du Théorème 3.3. □

Remarque 6.5.1. Dans le cas ci-dessus, pour $n \geqslant 5$, on peut voir ([8]) que la fibration en quadriques associée a toutes ses fibres géométriquement irréductibles, et que le k-tore S dual du groupe de Néron–Severi n'est autre que $\mathbf{G}_m^2$. Ainsi $H^1_{\text{ét}}(k, S) = 0$, et l'on ne peut pas détecter la non nullité de classes de cycles au moyen de l'homomorphisme caractéristique. Cependant, au moins pour $k = \mathbf{R}$, on peut trouver des intersections lisses de deux quadriques avec $A_0(X) \neq 0$. Nous conjecturons que ceci ne peut pas se produire lorsque k est un corps p-adique (voir la question 7.1(ii) ci-dessous).

Remarque 6.5.2. Soit k un corps p-adique ou un corps de nombres totalement imaginaire. Soit $X \subset \mathbf{P}_k^n$ une intersection complète, lisse, de deux quadriques dans $\mathbf{P}_k^n$. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Pour $n \geqslant 7$, on a $A_0(X) = 0$; ceci résulte facilement du théorème 3.27 de [8]. Pour $n = 6$ la finitude de $A_0(X)$ n'est pas claire. Cependant, comme à la remarque précédente, nous conjecturons que $A_0(X) = 0$ dans ce cas (ceci découlerait bien sûr du résultat analogue pour $n = 5$).

7. Questions ouvertes

Soit $p\colon X \to C$ un fibré en quadriques admissible, de dimension relative d au-dessus d'une courbe projective et lisse C sur un corps k. Notons

$$\mathrm{CH}_0(X/C) = \mathrm{Ker}[\mathrm{CH}_0(X) \xrightarrow{p_*} \mathrm{CH}_0(C)] \simeq k(C)^*_{\mathrm{dn}}/k^*.N_{X_\eta}(k(C)).$$

QUESTIONS 7.1. (i) *Soit* $d \geqslant 1$. *Si* k *est un corps de type fini sur* $\mathbf{Q}$, *le groupe* $\mathrm{CH}_0(X/C)$ *est-il fini?*

(ii) *Lorsque* $d \geqslant 3$, *si* k *est un corps de dimension cohomologique au plus 2, par exemple si* k *est un corps de nombres totalement imaginaire ou un corps p-adique, le groupe* $\mathrm{CH}_0(X/C)$ *est-il nul? Dans ces deux derniers cas, est-il au moins fini?*

(iii) *Lorsque* $d \geqslant 3$, *et* k *est un corps de nombres, le groupe* $\mathrm{CH}_0(X/C)$ *est-il fini, contrôlé par les groupes* $\mathrm{CH}_0(X_{k_v}/C_{k_v})$ *pour* v *parcourant les places réelles de* k?

(iv) *Lorsque* $d = 1$, *i.e.* X/C *est un fibré en coniques admissible, si* k *est un corps p-adique et si toutes les fibres du morphisme* p *sont lisses, le groupe fini* $\mathrm{CH}_0(X/C)$ *est-il nul?*

(v) *Lorsque* $d = 2$, *si* k *est un corps p-adique et toutes les fibres du morphisme* p *sont géométriquement intègres, le groupe fini* $\mathrm{CH}_0(X/C)$ *est-il nul? En est-il ainsi au moins si la courbe* C *est la droite projective?*

Commentaires:

(i) Pour un corps k de degré de transcendance au moins 1 sur $\mathbf{Q}$, et C une courbe de genre au moins 1, et $d = 1$, la question (i) est déjà ouverte. On dispose de résultats de finitude pour les surfaces projectives et lisses X/k au-dessus d'un corps k de type fini sur $\mathbf{Q}$ lorsque les deux groupes de cohomologie cohérente $H^2(X, \mathcal{O}_X)$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ sont nuls (S. Saito, cf. [3] Théorème 7.6), ce qui n'est le cas pour le fibré en coniques X/C que si C est de genre zéro.

(iv) On peut montrer qu'on a une réponse affirmative lorsque la courbe C a bonne réduction sur le corps p-adique k. Cette question est liée à une question plus générale ([3] Remarque 8.4.1). On fabrique facilement des contre-exemples lorsque $k = \mathbf{R}$.

(v) Via le théorème 4.3, on voit qu'une réponse affirmative à (iv) impliquerait une réponse affirmative à (v). Ceci résoudrait aussi les questions soulevées en 6.5.1 et 6.5.2. Ici encore on peut aisément fabriquer des contre-exemples lorsque $k = \mathbf{R}$.

Nos principaux commentaires concernent la question (ii).

(a) Soit q une forme quadratique non dégénérée sur le corps $k(C)$, de rang donc au moins 5, définissant la fibre générique. Observons que si k est un corps de nombres totalement imaginaire ou un corps p-adique, toute fibre de p, étant définie par une forme quadratique en au moins 5 variables, possède un point rationnel. On a donc ici $k(C)^*_{\mathrm{dn}} = k(C)^*$, et le groupe dont la finitude ou mieux la nullité nous intéresse est le quotient $k(C)^*/k^*.N_Q(k(C))$, où $Q/k(C)$ désigne la quadrique générique. Pour k p-adique, la finitude est équivalente à celle de $k(C)^*/N_Q(k(C))$, puisque les carrés sont dans $N_Q(k(C))$. Rappelons (Proposition 2.4) que le quotient $k(C)^*/N_Q(k(C))$ s'identifie au noyau de l'application d'ensembles pointés $H^1(k(C), \mathrm{Spin}(q)) \to H^1(k(C), \mathrm{SO}(q))$. Soit alors $U \subset C$ l'ouvert de Zariski de C où q définit une forme quadratique non dégénérée, que nous noterons q_U, et soit $\mathrm{Spin}(q_U)$ le U-schéma en groupes semi-simples simplement connexes associé. On vérifie alors que l'égalité $k(C)^*_{\mathrm{dn}} = k(C)^*$ implique que le groupe $k(C)^*/N_Q(k(C)) \subset H^1_{\text{ét}}(k(U), \mathrm{Spin}(q))$ est dans l'image de

$$H^1_{\text{ét}}(U, \mathrm{Spin}(q_U)) \to H^1_{\text{ét}}(k(U), \mathrm{Spin}(q)).$$

Une petite chasse dans les suites exactes mentionnées avant la proposition 2.4 amène à poser les questions:

Soit U une courbe lisse sur un corps local, et soit G/U un U-schéma en groupes semi-simples. L'ensemble de cohomologie étale $H^1_{\text{ét}}(U, G)$ est-il fini? Est-ce au moins vrai pour U un ouvert de la droite affine? Si U est un ouvert d'une courbe lisse sur un corps local, et Q un espace quadratique sur U de rang au moins 5, l'ensemble des classes d'isomorphisme d'espaces quadratiques sur U qui deviennent isomorphes à Q sur le corps des fonctions rationnelles de U est-il fini? Est-ce au moins vrai pour U un ouvert de la droite affine?

(b) Pour k p-adique, c'est une question ouverte de savoir si toute forme quadratique non dégénérée en au moins 9 variables sur le corps $k(C)$ (de dimension cohomologique 3) représente zéro. Si c'était le cas pour les formes à au moins dix variables, on pourrait conclure que le sous-groupe de $k(C)^*$ engendré par les valeurs non nulles de la forme q est égal à $k(C)^*$ tout entier: on aurait $\mathrm{CH}_0(X/C) = 0$. Mais, même lorsque C est la droite projective, i.e. $k(C) = k(t)$, on ne sait pas si toute forme non dégénérée de rang assez grand sur $k(t)$ possède un zéro non trivial.

(c) Comme observé à la remarque 6.5.2, le théorème 3.27 de [8] fournit des exemples particuliers de quadriques Q (de dimension au moins 4) sur $k(t)$ (avec k corps p-adique ou k corps de nombres totalement imaginaire) pour lesquelles $k(t)^* = k^*.N_Q(k(t))$.

Bibliographie

1. Bloch, S.: On the Chow groups of certain rational surfaces, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* **14** (1981), 41–59.
2. Bloch, S.: *Lectures on Algebraic Cycles*, Duke Univ. Math. Ser. **4**, Durham, N. C. (1980).
3. Colliot-Thélène, J.-L.: *Cycles algébriques de torsion et K-théorie algébrique*, Cours donné au C.I.M.E., Juin 1991, prépublication d'Orsay 92-14, à paraître in Springer L. N. M. **1553**.
4. Colliot-Thélène, J.-L. et Ischebeck, F.: L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles, *C. R. Acad. Sci. Paris* **292** (1981), 723–725.
5. Colliot-Thélène, J.-L. and Raskind, W.: K_2-cohomology and the second Chow group, *Math. Ann.* **270** (1985), 165–199.
6. Colliot-Thélène, J.-L. et Raskind, W.: Groupe de Chow de codimension deux des variétés définies sur un corps de nombres: un théorème de finitude pour la torsion, *Invent. Math.* **105** (1991), 221–245.
7. Colliot-Thélène, J.-L. and Sansuc, J.-J.: On the Chow groups of certain rational surfaces: a sequel to a paper of S. Bloch, *Duke Math. J.* **48** (1981), 421–447.
8. Colliot-Thélène, J.-L., Sansuc, J.-J. and Swinnerton-Dyer, P.: Intersections of two quadrics and Châtelet surfaces, I, *J. Reine Angew. Math.* **373** (1987), 37–107; II, *ibid.* **374** (1987), 72–168.
9. Fulton, W.: *Intersection Theory*, Ergeb. der Math. und ihr. Grenzgeb. 3. Folge, Bd. **2**, Springer (1984).
10. Gros, M.: 0-cycles de degré zéro sur les surfaces fibrées en coniques, *J. Reine Angew. Math.* **373** (1987), 166–184.
11. Jacob, B. and Rost, M.: Degree four cohomological invariants for quadratic forms, *Invent. Math.* **96** (1989), 551–570.
12. Kato, K.: A Hasse principle for two dimensional global fields, *J. Reine Angew. Math.* **366** (1986), 142–181.
13. Kato, K. and Saito, S.: Global class field theory of arithmetic schemes, in *Applications of Algebraic K-theory to Algebraic Geometry and Number Theory*, Part I, Contemp. Math. **55** (1986), pp. 255–331.
14. Lam, T.-Y.: *The Algebraic Theory of Quadratic Forms*, Benjamin/Cummings, (1980).
15. Lichtenbaum, S.: The period-index problem for elliptic curves, *Amer. J. Math.* **90** (1968), 1209–1223.

16. Merkur'ev, A. S. and Suslin, A. A.: K-cohomology of Severi–Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **46** (1982), 1011–1046 = *Math. USSR Izvestiya* **21** (1983), 307–340.
17. Merkur'ev, A. S. and Suslin, A. A.: On the norm residue homomorphism of degree three *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **54** (1990), 339–356 = *Math. USSR Izvestiya* **36** (1991), 349–367.
18. Salberger, P.: K-theory of orders and their Brauer–Severi schemes, Thèse, Université de Göteborg, 1985.
19. Salberger, P.: Galois descent and class group of orders, in *Lecture Notes in Math.* **1142** Springer-Verlag, (1985).
20. Skorobogatov, A. N.: Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension two, I. *J. Reine Angew. Math.* **407** (1990), 57–74.
21. Swan, R. G.: Zero-cycles on quadric hypersurfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* **107** (1989), 43–46.