CERTAINES FIBRATIONS EN SURFACES QUADRIQUES RÉELLES

JEAN-LOUIS COLLIOT-THÉLÈNE ET ALENA PIRUTKA

Résumé. Soit $X/\mathbb{R}$ une variété projective et lisse sur le corps des réels, géométriquement rationnelle. Si l'espace $X(\mathbb{R})$ est non vide et connexe, la variété X est-elle rationnelle sur $\mathbb{R}$? Est-elle stablement rationnelle ? Est-elle rétractilement rationnelle ? Est-elle universellement CH_0-triviale ?

Dans cet article on considère le cas des solides X fibrés en surfaces quadriques sur la droite projective. Nous donnons un exemple pour lequel X a un groupe de Brauer non trivial et donc la réponse aux questions ci-dessus est négative. Lorsque toutes les fibres géométriques sont intègres, le groupe de Brauer de X est trivial. Nous examinons une classe de telles fibrations pour lesquelles de plus la méthode des torseurs de jacobiennes intermédiaires pour infirmer la rationalité ne s'applique pas. Pour X dans cette classe, en utilisant le troisième groupe de cohomologie non ramifiée de X sur $\mathbb{R}$ et sur tout corps contenant $\mathbb{R}$, nous exhibons un invariant permettant de décider si X est universellement CH_0-triviale. Par deux méthodes complémentaires, l'une utilisant les sommes de carrés, l'autre la multiplication complexe, nous obtenons ainsi de nombreuses classes de telles fibrations pour lesquelles X est universellement CH_0-triviale.

Abstract. We consider the question whether a real threefold X fibred into quadric surfaces over the real projective line is stably rational (over $\mathbb{R}$) if the topological space $X(\mathbb{R})$ is connected. We give a counterexample. When all geometric fibres are irreducible, the question is open. We investigate a family of such fibrations for which the intermediate jacobian technique is not available. We produce two independent methods which in many cases enable one to prove decomposition of the diagonal.

1. Introduction

1.1. **Rappels.** Soit k un corps. Une k-variété est un k-schéma séparé de type fini. Une k-variété intègre est dite *k-rationnelle* si elle est k-birationnelle à un espace projectif $\mathbb{P}^n_k$. Une k-variété intègre X est dite *stablement k-rationnelle* s'il existe des espaces projectifs $\mathbb{P}^n_k$ et $\mathbb{P}^m_k$ tels que $X \times_k \mathbb{P}^n_k$ est k-birationnel à $\mathbb{P}^m_k$. Une k-variété intègre X est dite *rétractilement rationnelle* s'il existe des ouverts de Zariski non vides $U \subset X$ et $V \subset \mathbb{P}^m_k$ (m convenable), et des k-morphismes $f : U \to V$ et $g : V \to U$ tels que le composé $g \circ f$ est l'identité de U. Une k-variété intègre stablement k-rationnelle sur un corps infini k est rétractilement rationnelle.

Pour X une k-variété, on note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles. Pour X une k-variété propre, l'application qui à un point fermé P associe le degré $[k(P) : k]$ du corps résiduel $k(P)$ s'étend en un homomorphisme $\deg_k : CH_0(X) \to \mathbb{Z}$. On note $A_0(X)$ le noyau de cet homomorphisme.

On dit qu'une k-variété propre géométriquement intègre X est universellement CH_0-triviale si pour tout corps F contenant k la flèche $\deg_F : CH_0(X_F) \to \mathbb{Z}$ est un isomorphisme (voir [ACTP17, CTP90]). Sous l'hypothèse que la k-variété X,

Date: 20 juin 2024.

de corps des fonctions $k(X)$, est lisse et possède un zéro-cycle de degré 1, ceci est équivalent à l'énoncé : $A_0(X_{k(X)}) = 0$ [ACTP17, Lemma 1.3].

Une k-variété géométriquement intègre propre et lisse qui est rétractilement rationnelle est universellement CH_0-triviale [CTP16, Lemme 1.5].

Les groupes $H^i(k,\mu)$ sont les groupes de cohomologie galoisienne, où μ est un module galoisien de torsion première à la caractéristique de k. On note

$$H^i_{nr}(k(X)/k,\mu) \subset H^i(k(X),\mu)$$

les groupes de cohomologie non ramifiée d'une k-variété intègre X de corps des fonctions $k(X)$ (voir [CT95]).

Soit X une k-variété propre, lisse, géométriquement connexe, possédant un zéro-cycle de degré 1. Si X est rétractilement rationnelle, alors, pour tout module galoisien μ de torsion première à la caractéristique, tout entier $i \geq 0$, et tout corps L contenant k, l'application $H^i(L,\mu) \to H^i_{nr}(L(X)/L,\mu)$ est un isomorphisme. En particulier l'application $\mathrm{Br}(L) \to \mathrm{Br}_{nr}(L(X)/L) = \mathrm{Br}(X_L)$ est un isomorphisme sur la torsion première à la caractéristique.

Pour $k = \mathbb{R}$, un invariant birationnel stable des $\mathbb{R}$-variétés projectives et lisses géométriquement connexes X est le nombre s de composantes connexes de l'espace topologique $X(\mathbb{R})$. Cet invariant s peut être calculé de diverses manières. Supposons $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$.

On a $A_0(X)/2 \simeq (\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ [CTI81].

Pour tout $i > \dim(X)$, on a $H^i_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R},\mathbb{Z}/2) \simeq (\mathbb{Z}/2)^s$ [CTP90].

Si $X/\mathbb{R}$ est stablement rationnelle sur $\mathbb{R}$, ou même simplement rétractilement rationnelle sur $\mathbb{R}$, alors l'espace topologique $X(\mathbb{R})$ est connexe non vide.

On trouvera dans [ACTP17] et [CT19] des démonstrations et des références pour les énoncés ci-dessus.

1.2. **Fibrations en quadriques.** Soit $f : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une famille de quadriques de dimension relative $r \geq 1$ sur la droite projective réelle, de fibre générique lisse, et d'espace total $X/\mathbb{R}$ projectif et lisse. La fibration $f_{\mathbb{C}} : X_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ admet une section (Max Noether, Tsen), donc la $\mathbb{C}$-variété $X_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-rationnelle. Si $r = 1$ et si l'espace $X(\mathbb{R})$ est non vide et connexe, la surface X est rationnelle sur $\mathbb{R}$ (Comessatti [Co12]).

Pour toute famille de quadriques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ de dimension relative au moins 2, et aussi pour les familles de quadriques $X \to \mathbb{P}^m_{\mathbb{R}}$ de dimension relative au moins 1 qui possèdent une section rationnelle sur les complexes, on peut se poser la question si la connexité de $X(\mathbb{R})$ suffit à assurer la rationalité de X. Dans [BW20], O. Benoist et O. Wittenberg ont étudié des exemples de telles fibrations de dimension relative 1 sur $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ possédant une section sur $\mathbb{C}$, donc rationnelles sur $\mathbb{C}$ (voir aussi [FJSVV22] et [JJ24]). La technique des torseurs de jacobiennes intermédiaires [HT21, BW20] permet dans certains cas de montrer la non $\mathbb{R}$-rationalité de certains solides – mais ne dit rien sur la rationalité stable, ni non plus sur la CH_0-trivialité universelle.

Dans cet article, on s'intéresse aux solides X fibrés en surfaces quadriques sur la droite projective $\mathbb{P}^1_k$ sur un corps k de caractéristique différente de 2. Ceux-ci ont été étudiés dans [Sk90, CTSk93].

On dit qu'une telle fibration $X \to \mathbb{P}^1_k$ est de type (I) si toutes les fibres géométriques sont intègres, auquel cas on peut se ramener à supposer que toute telle fibre est un cône sur une conique lisse. Si X est de type (I), alors pour toute extension L/k du corps de base, on a $\mathrm{Br}(X_L)/\mathrm{Br}(L) = 0$.

Si X n'est pas de type (I), la non k-rationalité stable de X peut souvent être détectée par un calcul de groupe de Brauer [Sk90, CTSD94]. *Dans le cas $k = \mathbb{R}$ nous donnons ainsi un exemple de telle fibration en surfaces quadriques sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ avec $X(\mathbb{R})$ connexe et $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \neq 0$, et donc X non stablement rationnelle* (voir section 11.1).

Comme nous l'a indiqué O. Wittenberg (décembre 2023), pour $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ de type (I), la technique de [HT21] et [BW20] permet de détecter la non rationalité sur $\mathbb{R}$ de nombreuses familles de variétés fibrées en surfaces quadriques sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ pour lesquelles de plus $X(\mathbb{R})$ est connexe non vide. On peut en fait déjà donner de tels exemples de non rationalité à partir d'intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$, comme on voit en combinant le Théorème 36 et la section 11.4 de [HT21].

Ces divers exemples donnent une réponse négative à une question de S. Zimmermann sur la rationalité des solides réels X fibrés en quadriques sur la droite projective lorsque l'espace topologique associé $X(\mathbb{R})$ est connexe.

1.3. **Une classe particulière de fibrations en surfaces quadriques.** Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Supposons $X \to \mathbb{P}^1_k$ de type (I) et supposons qu'il y a au moins une fibre géométrique non lisse. On associe à une telle fibration une courbe discriminant Δ, lisse et géométriquement connexe, qui est un revêtement double de $\mathbb{P}^1_k$, et une classe $\beta \in \mathrm{Br}(\Delta)$, qui est une classe de quaternions dans $\mathrm{Br}(k(\Delta))$.

Lorsque la classe $\beta \in \mathrm{Br}(\Delta)$ n'est pas dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$ et que le nombre de fibres géométriques singulières de $X \to \mathbb{P}^1$ est au moins 6, la technique de [BW20] permet souvent de détecter la non k-rationalité de X (Wittenberg, voir le théorème 11.2 ci-dessous).

Le cas où la classe β est constante, de la forme $\beta = (a, b)$ avec $a, b \in k^\times$, correspond exactement aux fibrations qu'on peut donner en coordonnées affines par une équation

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = q(u)$$

avec $a, b \in k^\times$ et $q(u)$ polynôme séparable.

Dans le cas $k = \mathbb{R}$, $a = b = -1$ et $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$, il y a un nombre pair $2d$ de points de $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dont la fibre n'est pas lisse. L'espace topologique $X(\mathbb{R})$ a d composantes connexes. Si $d > 1$, alors X n'est pas stablement rationnelle, ni même universellement CH_0-triviale. On est ainsi ramené à considérer les équations de la forme

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u) \tag{1.1}$$

avec $p(u)$ polynôme séparable unitaire de degré pair qui est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

Dans ce cas, $X(\mathbb{R})$ est connexe, et la question de la rationalité de ces fibrations en quadriques ne peut être traitée par les méthodes de [HT21], [BW20], comme indiqué ci-dessus ainsi qu'à la section 12.

1.4. **Énoncés et structure de l'article.** Dans cet article, nous étudions la question de la CH_0-trivialité (universelle) des variétés (1.1). Soit $W = X \times_{\mathbb{R}} \Delta$. En utilisant le travail [CTSk93], nous réduisons la question de la CH_0-trivialité universelle de X à la nullité d'une classe précise dans $H^3_{nr}(\mathbb{R}(W)/\mathbb{R},\mathbb{Z}/2)$. On montre (voir théorèmes 3.2 et 4.7) :

Théorème 1.1. *Soit $p(u)\in\mathbb{R}[u]$ séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0)\neq 0$, positif sur $\mathbb{R}$. Soit $\pi: X\to\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}=\mathrm{Spec}(\mathbb{R}[u])$ par l'équation*

$$x^2+y^2+z^2-u.p(u).t^2=0.$$

Soit Δ la courbe réelle projective et lisse d'équation

$$w^2=vp(-v).$$

Soit $W=X\times_{\mathbb{R}}\Delta$.

Alors la classe $(u+v,-1,-1)\in H^3(\mathbb{R}(W),\mathbb{Z}/2)$ est non ramifiée :

$$(u+v,-1,-1)\in H^3_{nr}(\mathbb{R}(W)/\mathbb{R},\mathbb{Z}/2).$$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) Cette classe est nulle.

(ii) La fonction $u+v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$.

(iii) Pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$, on a

$$A_0(X_F)=0.$$

Nous donnons ensuite *deux classes de variétés X pour lesquelles nous pouvons montrer que l'élément $(u+v,-1,-1)$ est nul, et donc établir que ces variétés X sont universellement CH_0-triviales.*

Plus précisément, on établit que X *est universellement CH_0-triviale* dans les cas suivants :

(1) (théorème 5.1) $p(u)=u^2+au+b\in\mathbb{R}[u]$ est un polynôme séparable tel que

$$b\geq\frac{a^2}{3};$$

(2) (théorème 5.3) $p(u)=u^{2n}+\sum_{i=0}^{n-1}a_{2i}u^{2i}\in\mathbb{R}[u]$ séparable, satisfaisant

$$a_0>0 \text{ et } a_{2i}\geq 0 \text{ pour tout } 0<i<n;$$

(3) (théorème 7.2) le polynôme $p(u)$ est de degré 2, la courbe elliptique

$$E: z^2=u.p(u)$$

est à multiplication complexe, et l'on a

$$End_{\mathbb{C}}(E)=\mathbb{Z}[\omega],$$

où $\omega\in\mathbb{C}$ est un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation

$$\omega^2-d\omega+c=0,\ \text{où } d,c\in\mathbb{Z} \text{ et } d \text{ est impair.}$$

Comme on verra à la section 9, pour un polynôme p positif, l'hypothèse faite dans le théorème 5.1 équivaut à l'hypothèse que l'invariant $j(E)\in\mathbb{R}$ de la courbe elliptique E d'équation $z^2=u.p(u)$ est un réel positif ou nul.

À la section 2, on donne quelques rappels sur les formes quadratiques et sur l'article [CTSk93]. À la section 3 on étudie les fibrations en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^1_k$ de type (I) d'équation affine

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = u.p(u)$$

sur un corps k arbitraire de caractéristique différente de 2. Sous la condition technique que le polynôme p est représenté par la forme $<< a, b >>$ sur le corps $k(u)$, on donne un critère pour la CH_0-trivialité universelle de la variété X. À la section 4 on applique ce critère dans le cas où $k = \mathbb{R}$ et p est un polynôme positif.

Des sections 4 à 9, on s'intéresse donc aux variétés $X/\mathbb{R}$ d'équation affine

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u).$$

À la section 5, pour une première classe de variétés $X/\mathbb{R}$, pour $W = X \times_{\mathbb{R}} \Delta$ comme dans le théorème 1.1, on établit par une méthode élémentaire que la fonction $u + v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$, et donc que X est universellement CH_0-triviale.

Aux sections 6 et 7, on utilise un modèle birationnel de X qui est une fibration en coniques sur le plan $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, qui dégénère le long d'une courbe hyperelliptique Γ. Pour F variant parmi les surcorps quelconques de $\mathbb{R}$, on étudie le groupe $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ en utilisant le complexe de Bloch-Ogus sur $\mathbb{A}^2_F$ et un calcul sur la jacobienne de la courbe Γ_F. On obtient des résultats précis sur le groupe $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ lorsque la jacobienne de Γ n'a pas de multiplication complexe (section 6). Lorsque Γ est une courbe elliptique à multiplication complexe, on donne à la section 7 une condition suffisante pour que X soit universellement CH_0-triviale. Une description explicite des cas où cette condition est réalisée nous a été communiquée par Yuri Zarhin. C'est l'objet de la section 8.

Pour $p(u)$ de degré 2, on compare les résultats des deux méthodes dans la section 9. La comparaison fait intervenir l'invariant j de la courbe elliptique réelle $z^2 = u.p(u)$.

À la section 10, on rappelle quelques résultats de rationalité pour des variétés fibrées en quadriques sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. À la section 11 nous donnons notre exemple de variété en surfaces quadriques sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ qui n'est pas de type (I) et dont le groupe de Brauer est non trivial, et qui donc n'est pas universellement CH_0-triviale, et donc n'est pas rétractilement rationnelle. Cet exemple admet des modèles birationnels singuliers Y du type suivant : hypersurface cubique dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ et intersection de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$, dont tous les points singuliers sont complexes, et qui satisfont que $Y(\mathbb{R})$ est connexe. Nous terminons cette section en citant un résultat récent de non rationalité de Wittenberg pour des fibrations de type (I), résultat obtenu par la méthode des torseurs de jacobienne intermédiaire.

À la section 12, nous donnons des compléments à [CT23], qui impliquent que les fibrations (1.1) considérées dans cet article ne sont pas birationnelles à celles obtenues à partir d'une intersection lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5$.

La section 13 contient le calcul des groupes de Chow des zéro-cycles pour les fibrations de type (I) définies sur un corps de nombres.

La question de savoir s'il existe une fibration en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ de type (I) avec $X(\mathbb{R})$ connexe et qui n'est pas universellement CH_0-triviale reste ouverte.

La question de savoir si les variétés du théorème 1.1 sont toutes universellement CH_0-triviales est ouverte.

La question de savoir si les variétés du théorème 1.1 qui sont universellement CH_0-triviales sont rationnelles, stablement rationnelles, rétractilement rationnelles, reste également ouverte, déjà dans le cas donné par l'équation affine

$$x^2 + y^2 + z^2 = u(u^2 + 1).$$

Remerciements. Nous remercions Olivier Wittenberg pour plusieurs échanges électroniques. Nous sommes reconnaissants à Yuri Zarhin pour le contenu de la section 8.

Jean-Louis Colliot-Thélène remercie la Fondation Simons pour son hospitalité à New York en mars et avril 2024. Alena Pirutka a bénéficié du soutien de NSF grant DMS-2201195.

2. Rappels

2.1. **Formes quadratiques et H^3.** Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Soit $a \in F^\times$. On note $<< a >>$ la forme quadratique binaire $x^2 - ay^2$ sur le corps F. Pour $a_i, i = 1, \dots, n$ dans $F^\times$, on a la forme de Pfister en 2^n variables :

$$<< a_1, \dots, a_n >>:=<< a_1 >> \otimes \cdots \otimes << a_n >> .$$

Ainsi $<< a, b >>= x^2 - ay^2 - bz^2 + abt^2$ est la forme norme réduite associée à l'algèbre de quaternions $(a, b)_F$.

Proposition 2.1. *(Arason) Soit $q(x, y, z) = x^2 - ay^2 - bz^2$ une forme quadratique non dégénérée de rang 3 sur un corps F de caractéristique différente de 2. Soit Q la conique lisse associée. Le noyau de l'application*

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3(F(Q), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est le sous-groupe de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ formé des éléments de la forme $(a) \cup (b) \cup (c)$ avec $c \in F^\times$.

Démonstration. [Ar75, Satz 5.4]. □

Proposition 2.2. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Pour des éléments $a, b, c \in F^\times$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) La forme quadratique $<< a, b, c >>$ est isotrope.

(ii) La forme quadratique $<< a, b, c >>$ est hyperbolique.

(iii) L'élément $c \in F^\times$ est représenté par la forme $<< a, b >>$.

(iv) Le cup-produit $(a) \cup (b) \cup (c) \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ est nul.

Démonstration. L'équivalence des énoncés (i), (ii), (iii) est un cas particulier de résultats de Pfister. Que ces énoncés impliquent (iv) est connu [Ar75]. Que (iv) implique les autres énoncés est un résultat de Merkurjev et Suslin (voir [MS82, Théorème 12.2]). □

On a plus généralement :

Proposition 2.3. *Soit F un corps de caractéristique différente de 2. Pour des éléments $a, b, c, d, e, f \in F^\times$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) Les formes quadratiques $<< a, b, c >>$ et $<< d, e, f >>$ sont semblables.

(ii) *Les formes quadratiques* $<< a, b, c >>$ *et* $<< d, e, f >>$ *sont isomorphes.*

(iii) *On a*

$$(a) \cup (b) \cup (c) = (d) \cup (e) \cup (f) \in H^3(F, \mathbb{Z}/2).$$

(iv) *Les classes des formes quadratiques* $<< a, b, c >>$ *et* $<< d, e, f >>$ *coïncident dans* I^3F/I^4F, *où* I^nF *désigne la puissance* n*-ième de l'idéal fondamental* IF *de l'anneau de Witt* $W(F)$.

Démonstration. D'après Rost et Merkurjev-Suslin, l'homorphisme d'Arason

$$I^3F/I^4F \to H^3(F, \mathbb{Z}/2)$$

envoyant la classe de $<< a, b, c >>$ sur $(a) \cup (b) \cup (c)$ est un isomorphisme. Par ailleurs, il résulte du Hauptsatz d'Arason-Pfister [AP75], [Kahn08, Thm. 3.3.1] que l'hypothèse (iv) implique l'hypothèse (ii). □

On en déduit :

Proposition 2.4. *Soit* F *un corps de caractéristique différente de* 2. *Soit* q *une forme quadratique non dégénérée de rang au moins* 3 *sur* F, *définissant une quadrique lisse* Q. *Soit* $F(Q)$ *le corps des fonctions de* Q. *Pour* $(a, b, c) \in F^{\times}$, *les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(i) *La forme* q *est semblable à une sous-forme de* $<< a, b, c >>$.

(ii) *Le cup-produit* $(a) \cup (b) \cup (c) \in H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ *a une image nulle dans le groupe* $H^3(F(Q), \mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. Sous l'hypothèse (i), la forme $<< a, b, c >>$ est isotrope et donc hyperbolique sur le corps $F(Q)$, et ceci implique (ii). Que (ii) implique (i) résulte du théorème [Ar75, Satz 5.6] d'Arason et de la proposition 2.3. □

Le résultat suivant, d'abord démontré par Merkurjev (voir [MS82] p.1045) est un cas particulier de la conjecture de Bloch-Kato sur les corps (connue maintenant en toute généralité).

Proposition 2.5. *Soit* F *un corps de caractéristique différente de* 2. *L'application*

$$H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est injective.

On aura aussi besoin du résultat suivant de Kahn, Rost, et Sujatha :

Proposition 2.6. *Soit* q *une forme quadratique non dégénérée de rang au moins* 3 *sur un corps* F *de caractéristique différente de* 2. *Soit* Q *la quadrique lisse associée. Si le rang de* q *est* 6, *supposons que* q *n'est pas semblable à une forme d'Albert. L'application*

$$H^3(F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)) \to H^3_{nr}(F(Q)/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

est surjective.

Démonstration. Voir [KRS98, Thm. 5 p. 846 ; Cor. 10.2 et Prop. 10.3)]. □

2.2. **Fibrés en surfaces quadriques sur la droite projective.** On donne ici quelques rappels du travail [CTSk93].

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit k_s une clôture séparable. Soit

$$\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$$

une famille de surfaces quadriques au-dessus de $\mathbb{P}^1_k$. On suppose que X est une k-variété projective et lisse géométriquement intègre. On trouvera des modèles explicites concrets dans [Sk90] et [CTSk93].

Sur le corps k_s, une telle fibration admet une section, donc $X^s := X \times_k k_s$ est k_s-rationnelle, i.e. k_s-birationnelle à un espace projectif. On s'intéresse à la question si une telle X est k-rationnelle.

On se limite ici au cas des fibrations de type (I), celles dont toutes les fibres géométriques sont intègres, ce qui signifie que les fibres géométriques singulières sont des cônes sur des coniques lisses.

On suppose qu'il y a au moins une fibre géométrique singulière, c'est-à-dire que la fibration est non constante.

Pour les fibrations de type (I), le module galoisien $\mathrm{Pic}(X \times_k k_s)$ est $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, avec action triviale du groupe de Galois. Pour tout corps F contenant k, l'application $\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(X_F)$ induite par le morphisme $X_F \to \mathrm{Spec}(F)$ est surjective.

La quadrique générique a un discriminant bien défini dans $k(\mathbb{P}^1)^\times/k(\mathbb{P}^1)^{\times 2}$. Comme la fibration est de type (I) et non constante ce discriminant n'est pas trivial dans $k_s(\mathbb{P}^1)^\times/k_s(\mathbb{P}^1)^{\times 2}$. Il définit une extension quadratique $k(\Delta)/k(\mathbb{P}^1)$ et un revêtement double

$$\Delta \to \mathbb{P}^1_k \tag{2.1}$$

avec Δ/k une courbe lisse géométriquement intègre.

On associe à cette situation une fibration en coniques $q : Y \to \Delta$. La fibre générique de $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ est la descendue à la Weil de $k(\Delta)$ à $k(\mathbb{P}^1)$ de la fibre générique de q [CTSk93, Thm. 2.5]. On a une classe associée $\alpha \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$ qui est la classe d'une algèbre de quaternions $D/k(\Delta)$. Pour π de type (I), la fibration en coniques est lisse, on a

$$\alpha \in \mathrm{Br}(\Delta)[2].$$

On définit le sous-groupe $k(\mathbb{P}^1)^\times_{dn} \subset k(\mathbb{P}^1)^\times$ formé des fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^1$ dont le diviseur est partout localement (Zariski) sur $\mathbb{P}^1$ dans l'image de $\pi_* : Z_0(X) \to Z_0(\mathbb{P}^1)$. Il y a une application naturelle surjective

$$k(\mathbb{P}^1)^\times_{dn} \to \mathrm{Ker}[\pi_* : CH_0(X) \to CH_0(\mathbb{P}^1) = \mathbb{Z}], \tag{2.2}$$

dont on décrit le noyau.

On définit le groupe analogue $k(\Delta)^\times_{dn}$ pour $q : Y \to \Delta$. Le groupe $k(\Delta)^\times_{dn}$ contient le sous-groupe $N_D(k(\Delta)) \subset k(\Delta)^\times$ des normes réduites. On a une application naturelle surjective

$$k(\Delta)^\times_{dn} \to \mathrm{Ker}[\pi_* : CH_0(Y) \to CH_0(\Delta)],$$

dont le noyau est $k^\times.N_D(k(\Delta))$.

L'application $k(\mathbb{P}^1)^\times \to k(\Delta)^\times$ induit une application

$$k(\mathbb{P}^1)^\times_{dn} \to k(\Delta)^\times_{dn}. \tag{2.3}$$

Par ailleurs, on a une application

$$k(\Delta)^\times/N_D(k(\Delta)) \to H^3(k(\Delta),\mathbb{Z}/2),\ g \mapsto (g)\cup\alpha. \tag{2.4}$$

D'après la proposition 2.2 cette application est injective.

Théorème 2.7. [CTSk93, Thm. 4.2, Thm. 4.3, p.493]. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques de type (I).*

(i) On a un plongement

$$\Phi : A_0(X) \hookrightarrow k(\Delta)^\times_{dn}/k^\times.N_D(k(\Delta))$$

induit par les applications (2.2) et (2.3).

(ii) La composée de l'application Φ et l'application (2.4) induit un plongement

$$\Psi : A_0(X) \hookrightarrow H^3_{nr}(k(\Delta)/k,\mathbb{Z}/2)/\mathrm{Im}[H^1(k,\mathbb{Z}/2)\cup\alpha)]$$

de $A_0(X)$ dans le quotient de $H^3_{nr}(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)$ par le sous-groupe des éléments de $H^3(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)$ de la forme $(e)\cup\alpha$ avec $e \in k^\times/k^{\times 2}$.

3. Une famille spécifique de fibrations de type (I)

Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Dans la suite de cet article, pour $a, b \in k^\times$, on s'intéresse aux fibrations en surfaces quadriques de type (I), d'équation affine

$$x^2 - ay^2 - bz^2 - u.p(u) = 0 \tag{3.1}$$

avec $p(u)$ séparable unitaire, non constant, de degré pair $2d$, tel que $p(0) \neq 0$. Soit

$$q(v) = v^{2d}.p(1/v) \in k[v].$$

Sauf mention du contraire, on prendra pour $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ le modèle projectif et lisse standard X/k donné par recollement de la variété définie par l'équation

$$x^2 - ay^2 - bz^2 - u.p(u)t^2 = 0$$

dans $\mathbb{P}^3_k \times_k \mathrm{Spec}(k[u])$ avec la variété défnie par l'équation

$$x'^2 - ay'^2 - bz'^2 - v.q(v)t'^2 = 0$$

dans $\mathbb{P}^3_k \times_k \mathrm{Spec}(k[v])$, via $v = 1/u$ et

$$(x', y', z', t'; v) = (x.v^{d+1}, y.v^{d+1}, z.v^{d+1}, t; 1/u).$$

Le morphisme $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$, est donné par $u = 1/v$. Toutes les fibres sont géométriquement intègres.

Si $(a, b) = 0 \in H^2(k,\mathbb{Z}/2)$, alors la fibration $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ admet une section. La k-variété X est alors k-rationnelle. On s'intéresse au cas $(a, b) \neq 0 \in \mathrm{Br}(k)$.

3.1. Conséquences de [CTSk93].

Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ de type (I) donnée par l'équation affine (3.1).

La fibre à l'infini est le cône sur la conique d'équation $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$. Le sommet du cône est un k-point de la k-variété lisse X. Notons-le m_∞. Notons c_∞ le point à l'infini de $\mathbb{P}^1_k$:

$$\begin{tikzcd} X \ni m_\infty \arrow[d, "\pi"] & \\ \mathbb{P}^1_k \ni c_\infty & \end{tikzcd}$$

Dans ce cas, le discriminant est $-a.b.u.p(u)$, la courbe Δ dans (2.1) est la courbe hyperelliptique d'équation affine

$$w^2 = -ab.u.p(u),$$

et la classe $\alpha \in \mathrm{Br}(\Delta)$ est l'image de la classe de quaternions

$$D = (a,b) \in H^2(k,\mathbb{Z}/2) \subset \mathrm{Br}(k).$$

Pour $q : Y \to \Delta$ on peut prendre la projection $V_{a,b} \times_k \Delta \to \Delta$, où l'on note $V_{a,b}$ la conique d'équation $x^2 - ay^2 - bz^2 = 0$.

D'après le théorème 2.7 on a ici un plongement

$$\Psi : A_0(X) \overset{\Phi}{\hookrightarrow} k(\Delta)^\times_{dn}/k^\times.N_D(k(\Delta)) \hookrightarrow \hookrightarrow H^3_{nr}(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)/\mathrm{Im}[H^1(k,\mathbb{Z}/2) \cup (a) \cup (b)]. \tag{3.2}$$

Soit $m \in X(k)$ d'image $\pi(m) = c \in \mathbb{A}^1(k) = k$ avec $c.p(c) \neq 0$. La différence $m - m_\infty$ est un zéro-cycle de degré zéro sur X.

Lemme 3.1. *Soit $m \in X(k)$ d'image $\pi(m) = c \in \mathbb{A}^1(k) = k$ avec $c.p(c) \neq 0$. L'image de la classe de $m - m_\infty$ dans $A_0(X)$ par l'application Ψ est nulle si et seulement si*

$$(c.(c-u),a,b) = (p(c).(c-u),a,b) \in H^3_{nr}(k(\Delta)/k,\mathbb{Z}/2)$$

est nul.

Si l'on suppose de plus que l'on a $(p(u),a,b) = 0 \in H^3(k(u),\mathbb{Z}/2)$, alors la condition est équivalente à

$$(c-u,a,b) = 0 \in H^3_{nr}(k(\Delta)/k,\mathbb{Z}/2).$$

Démonstration. Le diviseur de la fonction $u - c \in k(\mathbb{P}^1)^\times_{dn}$ sur $\mathbb{P}^1_k$ est $c - c_\infty$. La description de l'application Ψ dans la section 2.2 montre que la classe de $m - m_\infty$ dans $A_0(X)$ est nulle si et seulement s'il existe une constante $e \in k^\times$ telle que pour la fonction $u - c \in k(\mathbb{P}^1)^\times \subset k(\Delta)^\times$ on ait

$$(u-c,a,b) = (e,a,b) \in H^3_{nr}(k(\Delta),\mathbb{Z}/2) \tag{3.3}$$

pour $e \in k^\times$ convenable.

Comme l'équation affine de la courbe lisse Δ est $w^2 = -abu.p(u)$, la courbe Δ possède le point k-rationnel $w = u = 0$. Comme on a $c \neq 0$, la fonction $u - c$ est inversible en ce point $w = u = 0$. L'égalité (3.3) et un argument de spécialisation impliquent donc que l'on a

$$(-c,a,b) = (e,a,b) \in H^3(k,\mathbb{Z}/2).$$

On est donc ramené à

$$(u-c,a,b) = (-c,a,b) \in H^3_{nr}(k(\Delta)/k,\mathbb{Z}/2),$$

ce qui est équivaut à $(c(c-u),a,b) = 0$.

Comme $c.p(c)$ est représenté par la forme quadratique $< 1,-a,-b >$, donc est une norme réduite de l'algèbre de quaternions (a,b), on a $(c,a,b) = (p(c),a,b)$. On obtient ainsi la première condition de l'énoncé.

Si l'on a de plus $(p(u),a,b) = 0 \in H^3(k(u),\mathbb{Z}/2)$ alors on a $(p(c),a,b) = 0$ par évaluation au point $u = c$. Ainsi on a $(c,a,b) = 0$ et la condition devient $(c-u,a,b) = 0 \in H^3(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)$. □

3.2. **Un invariant dans $H^3_{nr}(k(X \times_k \Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$.** Pour la suite il est commode de changer les variables et poser $u = -v$ dans la définition de la courbe discriminant Δ. D'après le lemme 3.1 on s'intéresse aux éléments de $H^3(k(\Delta), \mathbb{Z}/2)$ de la forme $(c + v, a, b)$.

Théorème 3.2. *Soient $a, b \in k^\times$. Soit $p(u) \in k[u]$ séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, satisfaisant*

$$(p(u), a, b) = 0 \in H^3(k(u), \mathbb{Z}/2).$$

Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec}(k[u])$ par l'équation

$$x^2 - ay^2 - bz^2 - u.p(u)t^2 = 0 \tag{3.4}$$

Soit Δ la courbe projective et lisse d'équation

$$w^2 = abvp(-v) \tag{3.5}$$

Soit $W = X \times_k \Delta$.

La classe $(u + v, a, b) \in H^3(k(W), \mathbb{Z}/2)$ est non ramifiée par rapport à k, elle appartient à $H^3_{nr}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$.

Démonstration. Soit $L = k(W)$ le corps des fonctions de W. On a les inclusions $k(X) \subset k(W)$ et $k(\Delta) \subset k(W)$ provenant des deux projections. Dans le symbole $(u + v, a, b)$, l'élément u provient de $k(\mathbb{P}^1) \subset k(X) \subset k(W)$ et l'élément v de $k(\mathbb{P}^1) \subset k(\Delta) \subset k(W)$.

Soit $A \subset L$ un anneau de valuation discrète contenant k et de corps des fractions L. Soit ω la valuation $L^\times \to \mathbb{Z}$ associée. Soit κ le corps résiduel. Notons $\partial : H^3(L, \mathbb{Z}/2) \to H^2(\kappa, \mathbb{Z}/2)$ l'application résidu. On veut montrer :

$$\partial(u + v, a, b) = 0.$$

On a :

$$\partial(u + v, a, b) = \omega(u + v)(a, b)_\kappa.$$

Si $(a, b)_\kappa = 0$, ce qui équivaut à dire que la forme quadratique $< 1, -a, -b, ab >$ représente zéro sur κ, le résidu est clairement nul.

On suppose désormais :

$$(a, b)_\kappa \neq 0.$$

On est donc ramené à montrer que sous cette condition, $\omega(u + v)$ est pair.

Supposons le contraire :

$$\omega(u + v) \text{ est impair.} \tag{3.6}$$

On voit facilement que comme $< 1, -a, -b, ab >$ ne représente pas zéro sur κ, tout élément de $L^\times$ de la forme $A^2 - aB^2 - bC^2 + abD^2$ avec $A, B, C, D \in L$ a une valuation paire.

On écrit

$$p(u) = u^{2n} + a_{2n-1}u^{2n-1} + \cdots + a_0,$$

avec $a_0 \neq 0$. L'hypothèse $(p(u), a, b) = 0$ implique que l'on peut écrire

$$p(u) = A(u)^2 - aB(u)^2 - bC(u)^2 + abD(u)^2 \in k(u) \tag{3.7}$$

avec $A(u), B(u), C(u), D(u)$ des fractions rationnelles.

On sait (théorème de Cassels-Pfister, [Lam73, Chap. IX, Thm. 1.3]) que l'on peut alors trouver une telle représentation avec $A(u), B(u), C(u), D(u) \in k[u]$.

Comme $p(u)$ est séparable, aucun polynôme de $k[u]$ non constant ne divise tous les $A(u), B(u), C(u), D(u)$. Dans $k[u]$ on a donc une égalité de Bézout :

$$\alpha(u)A(u) + \beta(u)B(u) + \gamma(u)C(u) + \delta(u)D(u) = 1, \tag{3.8}$$

avec $\alpha(u), \beta(u), \gamma(u), \delta(u) \in k[u]$.

En particulier, de l'équation (3.7) appliquée à u et à $u = -v$ on déduit que

$$\omega(p(u)) \text{ est pair et } \omega(p(-v)) \text{ est pair.} \tag{3.9}$$

Par ailleurs, on obtient aussi que $a_0 = p(0) \in k^\times$ est représenté par la forme quadratique $< 1, -a, -b, ab >$.

Comme $p(u)$ est représenté par $< 1, -a, -b, ab >$ sur $k(u)$ et qu'on a l'égalité (3.4) dans L, on voit que u est représenté par $< 1, -a, -b, ab >$ sur le corps L. On en déduit

$$(*) \ \ \omega(u) \text{ est pair.}$$

Puisque $\omega(p(-v))$ est pair d'après (3.9), l'égalité (3.5) donne :

$$(**) \ \ \omega(v) \text{ est pair.}$$

Comme on a $\omega(u+v) \geq \inf(\omega(u), \omega(v))$ avec égalité si $\omega(u) \neq \omega(v)$, de (*), (**) et l'hypothèse (3.6) on déduit

$$\omega(u+v) > \omega(u) = \omega(v).$$

On a trois cas à considérer :

(1) Supposons $\omega(u) = \omega(v) = 2n > 0$. Alors on a $p(u) \in A^\times$, et la réduction de $p(u)$ est l'image de $p(0)$ dans κ. Ainsi $p(u)/p(0)$ est un carré ρ^2 dans le complété $\hat{L}$ de L. On regarde l'égalité (3.4) dans L :

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = u.p(u).$$

En divisant x, y, z par ρ, on en déduit que dans le complété $\hat{L}$ de L, il existe $X, Y, Z \in \hat{L}$ avec

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 = u.p(0).$$

De $\omega(v) > 0$ on déduit que l'on a $p(-v) \in A^\times$ et l'image de $p(-v)$ dans κ est $p(0)$. De (3.5) on déduit alors que $v.p(0)$ s'écrit comme le produit de ab et d'un carré dans $\hat{L}^\times$. On conclut que $(u+v).p(0)$ est représenté par la forme $< 1, -a, -b, ab >$ dans $\hat{L}$, et donc que l'on a $\partial(u+v, a, b) = 0$.

(2) Supposons $\omega(u) = \omega(v) = 2n < 0$. Alors $p(u)$ est le produit de u^{2n} et d'un élément de $A^\times$ d'image 1 dans κ. De même $p(-v)$ est le produit de v^{2n} et d'un élément de $A^\times$ d'image 1 dans κ. Donc $p(u)$ et $p(-v)$ sont des carrés dans $\hat{L}^\times$. De (3.4) on déduit que u est représenté par $< 1, -a, -b >$ dans $\hat{L}$ et de (3.5) on déduit que v/ab est un carré dans $\hat{L}^\times$. On en conclut que $u + v$ est représenté par $< 1, -a, -b, ab >$ sur $\hat{L}$, et donc que l'on a $\partial(u+v, a, b) = 0$.

(3) Supposons $\omega(u) = \omega(v) = 0$. Rappelons que l'on a une égalité

$$p(u) = A(u)^2 - aB(u)^2 - bC(u)^2 + abD(u)^2 \in k[u]$$

avec $\alpha(u)A(u) + \beta(u)B(u) + \gamma(u)C(u) + \delta(u)D(u) = 1$.

Comme on a $\omega(u) = 0$, on a $k[u] \subset A$ et un homomorphisme composé d'anneaux $k[u] \to A \to \kappa$.

L'image de $p(u)$ dans κ est non nulle, sinon la forme $< 1, -a, -b, ab >$ aurait un zéro non trivial dans κ, et on aurait $(a,b)_\kappa = 0$. Ainsi $\omega(p(u)) = 0$. De même $\omega(p(-v)) = 0$.

De l'équation (3.4) on déduit que l'unité $u.p(u) \in A^\times$ est représentée par la forme $< 1, -a, -b >$ dans L, et donc aussi dans A par un argument connu. Via la réduction $A \to \kappa$, notée $r \mapsto \overline{r}$, on obtient une égalité

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 = \overline{u}.p(\overline{u}) \in \kappa^\times$$

avec $X, Y, Z \in \kappa$.

On a $\omega(v) = 0$ et $\omega(p(-v)) = 0$. Via (3.5), on obtient $\omega(w) = 0$ et pour $w' = w/(ab)$ on a une égalité

$$ab\overline{w'}^2 = \overline{v}p(-\overline{v}) \in \kappa^\times.$$

En additionnant les deux dernières égalités, on obtient

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 + ab\overline{w'}^2 = \overline{u}p(\overline{u}) + \overline{v}p(-\overline{v}) \in \kappa$$

avec X, Y, Z non tous nuls et aussi $\overline{w'} \neq 0$. Comme on a $u, v \in A$, donc aussi $u+v \in A$, si l'on suppose $\omega(u+v)$ impair, on a en particulier $\omega(u+v) > 0$. On a donc $\overline{u}+\overline{v} = 0$ et donc $\overline{u}p(\overline{u})+\overline{v}p(-\overline{v}) = 0$. Ceci donne une représentation non triviale dans κ

$$X^2 - aY^2 - bZ^2 + ab\overline{w'}^2 = 0,$$

ce qui était exclu.

En résumé, sous les hypothèses $\omega(u) = \omega(v) = 0$, on a $\omega(u + v) = 0$ et donc $\partial(u + v, a, b) = 0$.

□

3.3. **Critères pour la CH_0-trivialité.** L'invariant

$$(u + v, a, b) \in H^3_{nr}(k(X \times_k \Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$$

de la section précédente permet de détecter si la variété X est universellement CH_0-triviale :

Théorème 3.3. *Soient $a, b \in k^\times$. Soit $p(u) \in k[u]$ séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, satisfaisant*

$$(p(u), a, b) = 0 \in H^3(k(u), \mathbb{Z}/2).$$

Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_k =$ $\mathrm{Spec}(k[u])$ par l'équation

$$x^2 - ay^2 - bz^2 - u.p(u)t^2 = 0.$$

Soit Δ la courbe projective et lisse d'équation

$$w^2 = abvp(-v).$$

Soit $W = X \times_k \Delta$. Alors :

- (i) *Soit F un corps contenant k. Soit $m \in X(F)$ d'image $\pi(m) = c \in \mathbb{A}^1(F) =$ F avec $c.p(c) \neq 0$. La classe de $m - m_\infty$ dans $A_0(X_F)$ est nulle si et seulement si $(c + v, a, b) \in H^3_{nr}(F(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$ est nul.*

(ii) la classe

$$(u+v,a,b) \in H^3_{nr}(k(W)/k,\mathbb{Z}/2)$$

est nulle si et seulement si pour tout corps F contenant k on a $A_0(X_F)=0$.

Démonstration. L'énoncé (i) est dans le lemme 3.1. Rappelons que l'on a $m_\infty \in X(k)$, en particulier $X(k)\neq\emptyset$. Pour montrer (ii), il suffit de montrer que le point générique $\eta_X \in X(k(X))$ est rationnellement équivalent à un k-point de X : cet énoncé est souvent décrit comme “X admet une décomposition de la diagonale.” Plus généralement il implique que

$$H^i(F,\mu) = H^i_{nr}(F(X)/F,\mu)$$

pour tout corps F contenant k, tout i et μ un F-groupe abélien fini tordu d'ordre premier à la caractéristique de k (voir [Mer08]).

Soit $F=k(X)$. On applique (i) à $m=\eta_X$ le point générique de X. L'image de η_X par π est le point générique η de $\mathbb{P}^1$. Son corps résiduel est $k(u)=k(\mathbb{P}^1)$. L'image de $\eta - m_\infty$ dans $H^3_{nr}(k(X)(\Delta)/k(X),\mathbb{Z}/2) \subset H^3(k(W),\mathbb{Z}/2)$ est la classe

$$(u+v,a,b).$$

Cette classe est donc nulle si et seulement si le point générique de X est, sur $k(X)$, rationnellement équivalent au point $m_\infty \in X(k) \subset X(k(X))$. On en déduit (ii). □

Remarque 3.4. L'énoncé (ii) du théorème 3.3 ci-dessus implique en particulier que si la classe $(u+v,a,b)$ est nulle, alors $A_0(X)=0$. En particulier, cet énoncé est indépendant du choix du point m_∞.

On en déduit des conditions équivalentes pour montrer que la variété X est universellement CH_0-triviale. Dans la suite, on va utiliser les critères (c) et (f).

Théorème 3.5. *Soient $a,b\in k^\times$. Soit $p(u)\in k[u]$ séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0)\neq 0$, satisfaisant*

$$(p(u),a,b) = 0 \in H^3(k(u),\mathbb{Z}/2).$$

Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_k = \mathrm{Spec}(k[u])$ par l'équation

$$x^2 - ay^2 - bz^2 - u.p(u)t^2 = 0.$$

Soit Δ la courbe projective et lisse d'équation

$$w^2 = abvp(-v).$$

Soit $W = X\times_k \Delta$.

Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) On a $A_0(X_{k(X)})=0$.

(b) Pour tout corps F contenant k, on a $A_0(X_F)=0$.

(c) Pour le corps $F=k(\Delta)$, l'application $H^3(F,\mathbb{Z}/2)\to H^3_{nr}(F(X)/F,\mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.

(d) L'application $H^3_{nr}(k(\Delta)/k,\mathbb{Z}/2)\to H^3_{nr}(k(W)/k,\mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.

(e) La somme $u+v\in k(W)$ des images réciproques de $u\in k(\mathbb{P}^1)\subset k(X)$ et $v\in k(\Delta)$ dans $k(X\times_k\Delta)$ satisfait l'équation $(u+v,a,b)=0\in H^3(k(W)/k,\mathbb{Z}/2)$.

(f) La fonction $(u+v)\in k(W)$ est représentable sur $k(W)$ par la forme quadratique

$$x^2-ay^2-bz^2+abt^2.$$

Démonstration. D'après le théorème 3.3, on obtient l'équivalence de (a), (b) et (e). L'équivalence de (e) et (f) est donnée par la proposition 2.2. Par ailleurs, il est bien connu que l'énoncé (a) implique (c) (voir [Mer08]).

On va maintenant montrer : $(c) \Rightarrow (d) \Rightarrow (e)$.

L'hypothèse (c) donne que l'application $H^3(k(\Delta), \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(k(W)/k(\Delta), \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme. Comme on a $X(k) \neq \emptyset$, la projection $W = X \times_k \Delta \to \Delta$ admet une section. On en déduit que l'application $H^3_{nr}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme, on a donc l'énoncé (d).

Montrons que (d) implique (e). D'après le théorème 3.2, la classe $(u+v, a, b) \in H^3(k(W), \mathbb{Z}/2)$ appartient à $H^3_{nr}(k(W)/k, \mathbb{Z}/2)$. L'hypothèse (d) montre donc que $(u+v, a, b)$ est dans l'image de $H^3_{nr}(k(\Delta)/k, \mathbb{Z}/2)$. On peut évaluer la classe $(u+v, a, b)$ en le point $(x, y, z, u) = (0, 0, 0, 0)$ de $X(k) \subset X(k(\Delta))$. Cela donne $(v, a, b) \in H^3(k(\Delta), \mathbb{Z}/2)$. L'équation de Δ est $w^2 = abvp(-v)$, et on a supposé

$$(p(u), a, b) = 0 \in H^3(k(u), \mathbb{Z}/2).$$

On obtient

$$(v, a, b) = (abp(-v), a, b) = (ab, a, b) = (-a, a, b) + (-b, a, b) = 0.$$

Ainsi (d) implique (e).

□

4. Le cas réel

4.1. **Propriétés générales et trivialité de $H^3_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$.** Les résultats suivants pour les courbes sur le corps des réels sont connus (Weichold, Witt, Geyer, voir [W34] [G64] [GH81]) :

Proposition 4.1. *Soit Γ une $\mathbb{R}$-courbe projective, lisse, géométriquement connexe. Soit S l'ensemble des composantes connexes de $\Gamma(\mathbb{R})$.*

- *(i) Les groupes $\mathrm{Br}(\Gamma) = H^2_{nr}(\mathbb{R}(\Gamma)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ et $H^i_{nr}(\mathbb{R}(\Gamma)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ pour $i \geq 2$ sont isomorphes à $(\mathbb{Z}/2)^S$, l'application étant donnée par l'évaluation sur chaque composante connexe.*
- *(ii) Soit J_Γ la jacobienne de Γ. Supposons $\Gamma(\mathbb{R})$ connexe non vide. Alors $J_\Gamma(\mathbb{R})$ est connexe, et les groupes $J_\Gamma(\mathbb{R})/2$, $\hat{H}^0(G, J_\Gamma(\mathbb{C}))$ et, pour $i \in \mathbb{Z}$, tous les groupes $\hat{H}^i(G, J_\Gamma(\mathbb{C}))$ sont nuls. L'application $\mathbb{Z}/2 = \mathrm{Br}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Br}(\Gamma)$ est un isomorphisme.*

Soit $X/\mathbb{R}$ un modèle projectif et lisse de l'hypersurface affine d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u)$$

avec $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ séparable, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, strictement positif sur $\mathbb{R}$. Quitte à faire un changement de variables par un scalaire, on peut toujours supposer que p est unitaire.

Proposition 4.2. *Toute classe dans $H^3_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ est l'image d'un élément de $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ de la forme $(-1, -1, R(u)) \in H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$, où $R(u) \in \mathbb{R}[u]$ a toutes ses racines réelles, distinctes, et strictement négatives.*

Démonstration. Par la proposition 2.6, toute classe $\alpha \in H^3_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est image d'une classe dans $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$. Comme $\mathbb{C}(u)$ est dimension cohomologique 1, toute classe dans $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$ est d'exposant 2. En utilisant la Proposition 2.5 on obtient :

$$H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2) = H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2)).$$

En utilisant que $(u, a-u) = 0$ pour $a \in \mathbb{R}$ positif, que $(-1, r(u)) = 0$ si $r(u)$ est un polynôme positif, et la relation $(ab, c, d) = (a, c, d) + (b, c, d)$ pour les symboles, on voit que tout élément de $H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ est de la forme $(-1, -1, R(u))$, où $R(u)$ est séparable, avec toutes ses racines réelles, notons-les b_i.

On a $(-1, -1, u) = 0 \in H^3(\mathbb{R}(X), \mathbb{Z}/2)$ car u est une somme de quatre carrés dans $\mathbb{R}(X)$. On peut donc supposer tous les b_i non nuls.

Le résidu de $(-1, -1, \prod(u - b_i)) \in H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ en $u = b_i$ est $(-1, -1)$. Si $\alpha \in H^3_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$, alors $(-1, -1)$ doit s'annuler dans $H^2(\mathbb{R}(X_{b_i}), \mathbb{Z}/2)$. Si $b_i > 0$ ceci n'est pas possible, car $X_{b_i}(\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Donc tous les b_i sont négatifs. □

Proposition 4.3. *Soit $a \in \mathbb{R},\ a > 0$. La forme quadratique*

$$q =< 1, 1, 1, -u.p(u)) >$$

sur le corps $\mathbb{R}(u)$ est une sous-forme de la forme quadratique de Pfister

$$\psi :=<< -1, -1, u + a >> .$$

Démonstration. Comme par définition

$$<< -1, -1, u + a >>=< 1, 1, 1, 1, -(u + a), -(u + a), -(u + a), -(u + a >,$$

il suffit de démontrer que $-u.p(u) \in \mathbb{R}(u)$ est représenté par la forme binaire

$$< 1, -(u + a > .$$

La question est de savoir si l'algèbre de quaternions

$$(-u.p(u), u + a) \in \mathrm{Br}(\mathbb{R}(u))$$

est triviale. On examine ses résidus aux points fermés de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$. Au point $u = 0$ (resp. $u = -a$) le résidu est $a \in \mathbb{R}^\times/\mathbb{R}^{\times 2}$ (resp. $a.p(-a)$), trivial car $a > 0$ (resp. et p est positif). Aux points fermés non réels, solutions de $p(u) = 0$, le résidu est trivial car dans $\mathbb{C}^\times/\mathbb{C}^{\times 2}$.

Aux autres points de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$, le résidu est nul. Comme on a la suite exacte

$$0 \to \mathrm{Br}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Br}(\mathbb{R}(u)) \to \oplus_{x \in \mathbb{A}^1(\mathbb{R})} \mathbb{Z}/2 \to 0,$$

on voit $(-u.p(u), u + a)$ est dans l'image de $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$. Par évaluation en un point $u_0 \in \mathbb{R}$ convenable, par exemple avec $u_0 + a$ un carré non nul, on voit que la classe est nulle. □

Proposition 4.4. *Dans le corps des fonctions $\mathbb{R}(X)$ de X, pour tout $a \geq 0$, la fonction $u + a$ est une somme de 4 carrés et*

$$(u + a, -1, -1) = 0 \in H^3(\mathbb{R}(X), \mathbb{Z}/2).$$

Démonstration. On combine les propositions 2.2, 2.4 et 4.3. □

Théorème 4.5. *L'application $\mathbb{Z}/2 = H^3(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.*

Démonstration. On combine les propositions 4.2 et 4.4. □

Remarque 4.6. Le résultat ci-dessus peut aussi se déduire d'un résultat général, qui se déduit formellement de trois articles de O. Benoist et O. Wittenberg. Soit $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en surfaces quadriques de type (I), avec $X/\mathbb{R}$ projective et lisse. Soit $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$. Alors le G-module galoisien $\mathrm{Pic}(X_{\mathbb{C}})$ est de permutation. Supposons de plus $X(\mathbb{R})$ connexe non vide.

D'après [BW20b, Thm. 8.1], la conjecture de Hodge réelle entière vaut pour les 1-cycles sur X.

D'après [BW20a, Thm 3.16], pour X comme ci-dessus, ceci implique que

$$CH_1(X) \to H_1(X(\mathbb{R}), \mathbb{Z}/2)$$

est surjective.

D'après le théorème 4.3 de [BW20], on peut alors conclure que pour tout G-module M, et tout i, on a $H^i(G,M) \simeq H^i_{nr}(\mathbb{R}(X), M)$.

4.2. **Les critères de CH_0-trivialité dans le cas réel.** Soient X et Δ comme dans la section 3.3. Sur les réels, on s'intéresse au cas $k = \mathbb{R}$ et $a = b = -1$. L'hypothèse

$$(p(u), -1, -1) = 0 \in H^3(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$$

se traduit par le fait que le polynôme séparable $p(u)$ est une somme de 2 carrés, c'est-à-dire est positif sur $\mathbb{R}$. Il se traduit aussi par le fait que $\Delta(\mathbb{R})$ et $X(\mathbb{R})$ sont connexes et non vides.

Comme Δ est une courbe projective et lisse et $\Delta(\mathbb{R})$ est connexe non vide, on a $H^i_{nr}(\mathbb{R}(\Delta)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) = H^i(\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$ pour tout $i \geq 2$.

Le critère 3.5 se spécialise en l'énoncé suivant.

Théorème 4.7. *Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, positif sur $\mathbb{R}$. Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[u])$ par l'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 - u.p(u).t^2 = 0.$$

Soit Δ la courbe réelle projective et lisse d'équation

$$w^2 = vp(-v).$$

Soit $W = X \times_{\mathbb{R}} \Delta$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) On a $A_0(X_{\mathbb{R}(X)}) = 0$.

(b) Pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$, on a $A_0(X_F) = 0$.

(c) Pour le corps $F = \mathbb{R}(\Delta)$, l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme.

(d) L'application

$$\mathbb{Z}/2 = H^3_{nr}(\mathbb{R}(\Delta)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(\mathbb{R}(W)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2).$$

est un isomorphisme.

(e) La somme $u + v \in \mathbb{R}(W)$ des images réciproques de $u \in \mathbb{R}(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{R}(X)$ et de $v \in \mathbb{R}(\Delta)$ dans $\mathbb{R}(X \times_{\mathbb{R}} \Delta)$ satisfait l'équation

$$(u + v, -1, -1) = 0 \in H^3_{nr}(\mathbb{R}(W)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2).$$

(f) La fonction $u + v \in \mathbb{R}(W)$ est une somme de 4 carrés.

Remarque 4.8. Comme $p(-v) \in \mathbb{R}[v]$ est positif sur $\mathbb{R}$ donc est une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[v]$, l'équation $w^2 = vp(-v)$ donne que la fonction v est une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}(\Delta)$. Comme $p(u)$ est une somme de deux carrés dans $\mathbb{R}[u]$, l'équation $x^2+y^2+z^2-u.p(u).t^2 = 0$ donne que u est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(X)$. Donc $u+v$ est une somme de 6 carrés dans $\mathbb{R}(W)$.

Remarque 4.9. Soit X comme ci-dessus. Par un résultat général sur les formes quadratiques en 4 variables ([Lam73, Chap. VII. Lemma 3.1], [CTSk21, Prop. 7.2.4]), la forme quadratique $< 1,1,1,-u >$ en 4 variables a un zéro dans $F = \mathbb{R}(X)$ si et seulement la forme $< 1,1,1,1 >$ a un zéro dans l'extension discriminant $E = F(\sqrt{-u})$, i.e. si la classe de l'algèbre de quaternions $(-1,-1) \in \mathrm{Br}(\mathbb{R})$ s'annule dans $\mathrm{Br}(E)$.

Posons $-u = w^2$. Le corps E est le corps des fonctions de la variété d'équation
$$x^2+y^2+z^2 = -w^2.P(-w^2).$$
Comme $P(u)$ est séparable, non constant et non nul en $u = 0$, le polynôme non constant $P(-w^2)$ a toutes ses racines simples sur $\mathbb{C}$ et donc n'est pas un carré. Le discriminant $w^2.P(-w^2)$ de la forme quadratique
$$< 1,1,1,w^2.P(-w^2)) >$$
sur le corps $\mathbb{R}(w)$ n'est donc pas un carré dans $\mathbb{R}(w)$ ni même dans $\mathbb{C}(w)$. Ceci implique que l'application $\mathrm{Br}(\mathbb{R}(w)) \to \mathrm{Br}(E)$ est injective [CTSk21, Prop. 7.2.4].

Ainsi $\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Br}(E)$ est injective. On conclut :

La fonction $u \in \mathbb{R}(X)$, qui est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(X)$, n'est pas une somme de 3 carrés dans $\mathbb{R}(X)$.

Mais un tel énoncé ne permet pas de décider de la non rationalité d'un solide réel. De fait $1+x^2+y^2+z^2$ n'est pas une somme de 3 carrés dans $\mathbb{R}(x,y,z) = \mathbb{R}(\mathbb{P}^3)$ (Cassels-Pfister) [Lam73, Chap. IX, Cor. 2.4].

5. CH_0-trivialité de X par sommes de 4 carrés dans $\mathbb{R}(X \times_{\mathbb{R}} \Delta)$

On va maintenant donner des exemples où l'on peut vérifier la condition (f) du théorème 4.7 et l'on peut donc démontrer que la variété X est universellement CH_0-triviale.

Théorème 5.1. *Soit $p(u) = u^2+au+b \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable positif. Supposons*
$$b \geq \frac{a^2}{3}.$$
Soit $X/\mathbb{R}$ d'équation affine
$$X: \ x^2+y^2+z^2 = u.p(u).$$
Soit Δ la courbe d'équation affine
$$\Delta: \ w^2 = v.p(-v).$$
Soit $W = X \times_{\mathbb{R}} \Delta$. Alors

(i) la fonction
$$r(u,v) = \frac{up(u)+vp(-v)}{u+v}$$
est une somme de 3 carrés dans $\mathbb{R}(u,v)$;

(ii) la fonction $u+v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$;

(iii) pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$, on a $A_0(X_F) = 0$.

Démonstration. Dans $\mathbb{R}(u, v)$, on a

$$up(u) + vp(-v) = (u + v)(u^2 - uv + v^2 + au - av + b) =$$
$$= (u + v)\left(\left(u + \frac{a - v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(v - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}\right).$$

Par hypothèse, on a $b - \frac{a^2}{3} \geq 0$. Ainsi

$$r(u, v) = \frac{up(u) + vp(-v)}{u + v} = \left(u + \frac{a - v}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(v - \frac{a}{3}\right)^2 + b - \frac{a^2}{3}$$

est une somme de 3 carrés dans $\mathbb{R}(u, v)$. Dans le corps des fonctions $\mathbb{R}(W)$, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = up(u) + vp(-v) = (u + v).r(u, v).$$

Comme le produit de deux sommes de 4 carrés est une somme de 4 carrés, on obtient que $u + v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$. Le dernier énoncé résulte du théorème 4.7. □

Remarque 5.2. (1) Par exemple, la proposition ci-dessus s'applique à la variété X donnée par l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = u(u^2 + 1)$.

(2) Le polynôme p est positif si et seulement si $b > \frac{a^2}{4}$. Dans la proposition ci-dessus, on a besoin de la condition plus forte $b \geq \frac{a^2}{3}$ (sauf pour $a = 0$).

En degré supérieur, nous avons les exemples suivants :

Théorème 5.3. *Soit $n \geq 1$ un entier, et soit*

$$p(u) = u^{2n} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i}u^{2i} \in \mathbb{R}[u]$$

un polynôme séparable positif, tel que $p(0) \neq 0$. Supposons de plus

$$a_{2i} \geq 0 \text{ pour tout } 0 \leq i < n.$$

Soit $X/\mathbb{R}$ d'équation affine

$$X : \ x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u).$$

Soit Δ la courbe d'équation affine

$$\Delta : \ w^2 = v.p(-v).$$

Soit $W = X \times_{\mathbb{R}} \Delta$. Alors

(i) La fonction

$$r(u, v) = \frac{up(u) + vp(-v)}{u + v}$$

est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(u, v)$.

(ii) La fonction $u + v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$.

(iii) Pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$, on a $A_0(X_F) = 0$.

Démonstration. On fait le changement de variables $u = tv$ et on écrit :

$$r(tv, v) \quad = \quad \frac{tvp(tv) + vp(-v)}{tv + v} \quad = \quad v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} \ + \ \sum_{i=0}^{n-1} a_{2i}v^{2i}\frac{t^{2i+1}+1}{t+1}.$$

Notons que pour tout $i > 0$ le polynôme $\frac{t^{2i+1}+1}{t+1}$ a pour racines dans $\mathbb{C}$ des racines de l'unité ζ avec $\zeta^{4i+2} = 1$, distinctes de $\zeta = 1$ et $\zeta = -1$, donc non réelles. Comme le coefficient dominant est 1, pour toute valeur $t \in \mathbb{R}$ ce polynôme ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$. Puisque $a_{2i} \geq 0$ pour tout i par hypothèse, on en déduit que le polynôme $r(u, v) = r(tv, v)$ ne prend que des valeurs positives sur $\mathbb{R}$, c'est donc une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(u, v)$ d'après un théorème de Pfister (voir [Lam73, XI.4.11]).

Dans le corps des fonctions $\mathbb{R}(W)$ de la variété W, on a l'égalité

$$(u + v)r(u, v) = x^2 + y^2 + z^2 + w^2.$$

Ainsi, $u + v$ est une somme de 4 carrés dans $\mathbb{R}(W)$. Le dernier énoncé résulte du théorème 4.7.

□

Remarque 5.4. Dans l'exemple ci-dessus, tous les coefficients de puissances impaires de t sont nuls. Si l'on relâche cette hypothèse, on peut au moins trouver un ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ (pour la topologie euclidienne) dans l'espace de coefficients de polynômes

$$p(u) = \sum_{i=0}^{2n} a_i u^i,$$

tel que pour tout $(a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_0) \in U$ la fonction

$$r(u, v) = \frac{up(u) + vp(-v)}{u + v}$$

soit positive sur $\mathbb{R}(u, v)$, et donc soit une somme de 4 carrés. Par évaluation en $v = 0$, le polynôme $p(u)$ est alors positif. Par exemple, on peut définir U comme suit.

Soit $0 < i < n$. Le polynôme

$$v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} + v^{2i-1}\frac{t^{2i}-1}{t+1} \in \mathbb{R}[v, t]$$

est un polynôme de terme dominant $v^{2n}t^{2n}$, il est donc positif pour $v, t \geq T_i$ avec $T_i > 0$ assez grand, et il est borné dans le compact $-T_i \leq v, t \leq T_i$. Il existe donc $m_i \in \mathbb{R}$ tel que

$$v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} + v^{2i-1}\frac{t^{2i}-1}{t+1} > m_i$$

pour tous $v, t \in \mathbb{R}$. On prend $(a_{2n}, a_{2n-1}, \ldots, a_0)$ dans l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^{2n+1}$ défini par les conditions

$$a_i \geq 0 \text{ pour tout } i, \ a_{2n} > \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1}, \ a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i-1}m_i > 0.$$

On fait le changement de variables $u = vt$ et on écrit :

$$r(tv,v) = \frac{tvp(tv)+vp(-v)}{tv+v} =$$
$$= a_{2n}v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i-1}v^{2i-1}\frac{t^{2i}-1}{t+1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i}v^{2i}\frac{t^{2i+1}+1}{t+1} + a_0 =$$
$$= (a_{2n} - \sum_{i=1}^{n} a_{2i-1})v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} + \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i-1}(v^{2n}\frac{t^{2n+1}+1}{t+1} + v^{2i-1}\frac{t^{2i}-1}{t+1} - m_i) +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i}v^{2i}\frac{t^{2i+1}+1}{t+1} + (a_0 + \sum_{i=1}^{n-1} a_{2i-1}m_i).$$

Comme dans la proposition ci-dessus, les fonctions $v^{2i}\frac{t^{2i+1}+1}{t+1}$ sont positives pour tout $i > 0$. Tous les autres termes de la somme sont positifs par le choix de coefficients dans U.

En divisant par a_{2n} on peut aussi supposer que p est unitaire. La condition supplémentaire que p est séparable est aussi ouverte.

6. Point de vue de fibration en coniques et calcul de $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$

Dans cette partie on s'intéresse au groupe $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ pour $F = \mathbb{R}(\Delta)$ comme dans théorème 4.7(c). On commence par quelques rappels généraux de cohomologie galoisienne.

6.1. Lemmes de cohomologie galoisienne. Soit K/k une extension finie galoisienne de corps, de groupe de Galois G. On note $N_{K/k}$ la norme de K à k. On note $N_G = \sum_{g\in G} g \in \mathbb{Z}[G]$ et $I_G \subset \mathbb{Z}[G]$ le noyau de l'augmentation $\epsilon : \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}$ envoyant tout $g \in G$ sur $1 \in \mathbb{Z}$. Pour M un G-module, on utilise la cohomologie galoisienne de Tate. Notant ${}^{N_G}M$ le noyau de $N_G : M \to M$, on sait que l'on a $\hat{H}^{-1}(G,M) \simeq {}^{N_G}M/I_GM$ et $\hat{H}^0(G,M) = M^G/N_GM$. Pour G cyclique, et $i \in \mathbb{Z}$, on a des isomorphismes $\hat{H}^i(G,M) \simeq \hat{H}^{i+2}(G,M)$.

Lemme 6.1. *Soit X une k-variété projective et lisse géométriquement intègre, avec un k-point. On a des suites exactes*

$$0 \to H^2(G,K^\times) \to \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(X) \to \mathrm{Br}(X_K)] \to H^1(G,\mathrm{Pic}(X_K)) \to 0 \tag{6.1}$$

et

$$1 \to k^\times/NK^\times \to \mathrm{Ker}[k(X)^\times/N_{K/k}(K(X)^\times) \to \mathrm{Div}(X)/N_{K/k}(\mathrm{Div}(X_K))] \to$$
$$\to \hat{H}^{-1}(G,\mathrm{Pic}(X_K)) \to 0. \tag{6.2}$$

Dans cette suite, l'application de droite, qui est surjective, envoie la classe d'une fonction $f \in k(X)^\times$ avec $div_{X_K}(f) = N_{K/k}(\Delta)$ sur la classe de Δ dans le groupe $\hat{H}^{-1}(G,\mathrm{Pic}(X_K))$. Lorsque K/k est cyclique de degré n, définie par un caractère $\chi \in H^1(K/k,\mathbb{Z}/n)$, on passe de la seconde suite à la première en prenant le cup-produit avec χ.

Démonstration. Le premier énoncé est standard. Pour obtenir le second on prend la cohomologie galoisienne de la suite exacte

$$1 \to K(X)^{\times}/K^{\times} \to \mathrm{Div}(X_K) \to \mathrm{Pic}(X_K) \to 0.$$

□

Lemme 6.2. *Soit K/k une extension de corps, finie galoisienne de groupe G. Soit Γ une k-courbe projective, lisse, géométriquement intègre, possédant un k-point. Soit $J_\Gamma = \mathrm{Pic}^0_{\Gamma/k}$ la jacobienne de Γ. Le degré définit une suite exacte scindée de G-modules*

$$0 \to J_\Gamma(K) \to \mathrm{Pic}(\Gamma_K) \to \mathbb{Z} \to 0.$$

En particulier, on a

$$H^1(G, J_\Gamma(K)) \simeq H^1(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_K))$$

et

$$\hat{H}^{-1}(G, J_\Gamma(K)) \simeq \hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_K)).$$

Le lemme suivant est bien connu.

Lemme 6.3. *Soit $G = \mathbb{Z}/2 = \{1, \sigma\}$. Soit $\tilde{\mathbb{Z}}$ le réseau $\mathbb{Z}$ avec action antipodale de σ, et soit $\mathbb{Z}[G]$ le réseau $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}.\sigma$. Tout G-réseau M est isomorphe comme G-module à une somme directe*

$$M \simeq \mathbb{Z}^a \oplus \tilde{\mathbb{Z}}^b \oplus \mathbb{Z}[G]^c,$$

où les entiers a, b, c sont uniquement déterminés par M. On a :

(1) $\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}[G]) = 0$ *pour tout i.*

(2) $\hat{H}^i(G, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/2$, *resp.* 0, *pour i pair, resp. impair.*

(3) $\hat{H}^i(G, \tilde{\mathbb{Z}}) = \mathbb{Z}/2$, *resp.* 0, *pour i impair, resp. pair.*

Dans ce qui suit on aura besoin de l'énoncé suivant :

Lemme 6.4. *Soit $\omega \in \mathbb{C}$ un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation*

$$\omega^2 - d\omega + c = 0$$

avec $d, c \in \mathbb{Z}$, $d^2 - 4c < 0$. Soit $K = \mathbb{Q}(\omega)$. Soit $G = \mathbb{Z}/2 =< 1, \sigma >$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) = \mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$.

Soit M le G-module $\mathbb{Z}[\omega]$ avec l'action donnée par

$$\sigma(\omega) = d - \omega.$$

Soit M_1 le G-module $\mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ avec l'action donnée par

$$\sigma(e_1) = -e_1, \ \sigma(e_2) = -de_1 + e_2.$$

(i) *Si d est pair, alors $\hat{H}^{-1}(G, M) = \hat{H}^{-1}(G, M_1) = \mathbb{Z}/2$.*

(ii) *Si d est impair, alors $\hat{H}^{-1}(G, M) = \hat{H}^{-1}(G, M_1) = 0$.*

Démonstration. Étant donné un G-module M, notons $M^G = M^+$ le sous-module des invariants et M^- le sous-module des antiinvariants, formé des éléments m avec $\sigma(m) = -m$. Pour le module $M = \mathbb{Z}[\omega]$, on a $M^+ = \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\omega]$. Si d est pair, $d = 2r$, on vérifie que $\mathbb{Z}[\omega]^- = \mathbb{Z}[r + \omega]$, donc $\mathbb{Z}[\omega]^+ \oplus \mathbb{Z}[\omega]^- = \mathbb{Z}[\omega]$. Ainsi $M \simeq \mathbb{Z} \oplus \tilde{\mathbb{Z}}$. Si d est impair, $d = 2r + 1$, alors $\omega + \sigma(\omega) = 2r + 1$ donc $(\omega) - r + (\sigma(\omega) - r) = 1$. Notant $\rho = \omega - r$, on a $\mathbb{Z}\rho + Z\sigma(\rho) = M$ et donc $M \simeq \mathbb{Z}[G]$. On conclut avec le lemme 6.3.

Soit maintenant $M_1 = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2$ et soit $xe_1 + ye_2 \in M_1$. On a alors :

$$(1-\sigma)(xe_1 + ye_2) = xe_1 + ye_2 + xe_1 + dye_1 - ye_2 = (2x + dy)e_1.$$

Par ailleurs,

$$N_G(xe_1 + ye_2) = xe_1 + ye_2 - xe_1 - dye_1 + ye_2 = y(-de_1 + 2e_2).$$

Ainsi la condition $N_G(xe_1 + ye_2) = 0$ est équivalente à la condition $y = 0$ et on trouve ${}^{N_G}M_1 = \mathbb{Z}e_1$. On en déduit que pour d impair ${}^{N_G}M_1 = I_G M_1$ et que pour d pair ${}^{N_G}M_1/I_G M_1 = \mathbb{Z}/2$. □

6.2. **La réduction à $H^3(F(\mathbb{A}^2))$.** Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, tel que p est positif sur $\mathbb{R}$. Comme dans la section 4, soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en surfaces quadriques donnée au-dessus de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[u])$ par l'équation affine

$$x^2 + y^2 + z^2 - u.p(u) = 0.$$

Dans cette section on considère un modèle birationnel de X comme fibration en coniques sur le plan affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. On définit

$$\tilde{X} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

par l'équation

$$x^2 + y^2 = (u.p(u) - z^2)t^2$$

avec coordonnées homogènes (x, y, t) pour $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ et coordonnées affines (u, z) pour $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$. La projection $\tilde{X} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ est propre, l'espace total est lisse. La fibration est ramifiée exactement le long de la courbe affine lisse $\Gamma_1 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ d'équation

$$g(u, z) = u.p(u) - z^2 = 0.$$

Cette courbe admet une compactification lisse Γ qui est une courbe hyperelliptique (elliptique si le degré de p est 2). Le schéma $\Gamma \setminus \Gamma_1$ est réduit à un unique point réel O. L'espace topologique $\Gamma(\mathbb{R})$ est connexe et non vide.

Proposition 6.5. *Soit F un corps contenant $\mathbb{R}$, et soit*

$$\beta \in H^3_{nr}(F(\tilde{X})/F, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}(2))$$

une classe nulle en un point F-rationnel de $\tilde{X}$. Alors β provient d'un élément

$$\alpha \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$$

dont tous les résidus aux points de codimension 1 de $\mathbb{A}^2_F$ sont nuls, sauf peut-être au point générique de Γ_F. De plus, le résidu $\partial_{\Gamma_F}(\alpha)$ est dans $\mathrm{Br}(\Gamma_F)[2]$, et il s'annule par passage de F à $F(\sqrt{-1})$:

$$\partial_{\Gamma_F}(\alpha) \in \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\Gamma_F) \to \mathrm{Br}(\Gamma_{F(\sqrt{-1})})][2].$$

Démonstration. Soit $F' := F(\sqrt{-1})$. Notons que β s'annule par passage de F à F' puisque la variété $\tilde{X}$ est rationnelle sur $\mathbb{C}$.

On a l'extension de corps $F(\mathbb{A}^2) \subset F(\tilde{X})$. D'après les propositions 2.6 et 2.5, appliquées à la fibre générique de $\tilde{X} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, la classe β vient de $\alpha \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$ qui s'annule par passage de F à F' puisque sur F' la fibration $\tilde{X}_{F'} \to \mathbb{A}^2_{F'}$ admet une section.

En un point ξ de codimension 1 de $\mathbb{A}^2_F$ autre que le point générique de Γ_F, le résidu $\partial_\xi(\alpha)$ est dans le groupe

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(F(\xi)) \to \mathrm{Br}(F(\tilde{X}_\xi)],$$

où la fibre $\tilde{X}_\xi$ est une conique lisse, de classe $(-1, g)$. Ainsi, le résidu $\partial_\xi(\alpha)$ est dans le sous-groupe de $\mathrm{Br}(F(\xi))[2]$ engendré par l'élément $(-1, g)$.

En ξ point générique de Γ_F, le résidu de α est dans le groupe

$$\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(F(\xi)) \to \mathrm{Br}(F'(\xi))].$$

Ainsi, le résidu de α en ξ est de la forme $(-1, h)_{F(\xi)}$ pour $h \in F(\xi)^\times$ convenable.

Soit $P(u, z) \in F[u, z]$ le polynôme sans facteur carré définissant les points de codimension 1 de $\mathbb{A}^2$ autres que le point générique de Γ_F où α a un résidu non nul. Alors

$$\alpha_0 := \alpha - (-1, g(u, z), P(u, z)) \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$$

a tous ses résidus nuls hormis peut-être celui au point générique de Γ_F. Comme $(-1, g(u, z))$ s'annule dans $H^2(F(\tilde{X}), \mathbb{Z}/2)$ la classe β est l'image de α_0.

On dispose du complexe de Bloch-Ogus qui, sur l'espace affine, est une suite exacte [BO74] [R96, §2, Prop. 8.6] :

$$0 \to H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2) \to \oplus_{x \in \mathbb{A}^{2(1)}} H^2(F(x), \mathbb{Z}/2) \to \oplus_{x \in \mathbb{A}^{2(2)}} H^1(F(x), \mathbb{Z}/2).$$

En utilisant ce complexe, on voit que le résidu $\partial_{\Gamma_F}(\alpha_0)$ a tous ses résidus $\partial_x \partial_{\Gamma_F}(\alpha_0)$ nuls aux points fermés de $\Gamma_{1,F}$. En utilisant la loi de réciprocité sur la courbe Γ_F, qui ne diffère de $\Gamma_{1,F}$ que par un unique point F-rationnel, on écrit

$$\sum_{x \in \Gamma_F^{(1)}} \partial_x \partial_{\Gamma_F}(\alpha_0) = 0.$$

On conclut que $\partial_x \partial_{\Gamma_F}(\alpha_0) = 0$ pour tout point fermé $x \in \Gamma_F$. On a donc $\partial_\Gamma(\alpha_0) = \theta \in \mathrm{Br}(\Gamma_F)[2]$, et cet élément s'annule par passage de F à F'. $\square$

6.3. **Cas sans multiplication complexe.** On garde les notations du paragraphe précédent. Soit $\Gamma/\mathbb{R}$ la courbe projective et lisse d'équation affine

$$\Gamma_1 : z^2 = u.p(u).$$

Soit $\Delta/\mathbb{R}$ la courbe projective et lisse d'équation affine

$$\Delta : w^2 = v.p(-v).$$

On pointe ces courbes par le point à l'infini (qui est réel) des revêtements doubles $\Gamma \to \mathbb{P}^1$ et $\Delta \to \mathbb{P}^1$ définis par u, resp. v. On note J_Γ, resp. J_Δ la jacobienne de Γ, resp. de Δ. On considère les plongements $\Gamma \to J_\Gamma$, et $\Delta \to J_\Delta$ envoyant les points marqués sur les points 0 des jacobiennes (si degré de p est 2 ces plongements sont des isomorphismes).

On note $F = \mathbb{R}(\Delta)$ et $F' = \mathbb{C}(\Delta)$. Soit $G = \mathbb{Z}/2 =< 1, \sigma >$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R})$.

Lemme 6.6. *Avec les notations ci-dessus, supposons que l'anneau des endomorphismes de $J_{\Gamma_\mathbb{C}}$ est réduit à $\mathbb{Z}$. Alors*

- *(i) le groupe $\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'}))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2$, engendré par l'image de la fonction $u + v$ via la suite exacte (6.2) ;*

(ii) le groupe $\mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(\Gamma_F) \to \mathrm{Br}(\Gamma_{F'})]$ *est engendré par*

$$\textit{le groupe } \mathrm{Ker}[\mathrm{Br}(F) \to \mathrm{Br}(F')] \textit{ et la classe } (u+v,-1).$$

Démonstration. D'après le lemme 6.1 le premier énoncé implique le second.

On a

$$J_\Gamma(F') = Hom(\Delta_{\mathbb{C}}, J_\Gamma).$$

Via le choix des points marqués, on a

$$Hom(\Delta_{\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) = J_\Gamma(\mathbb{C}) \oplus Hom_\bullet(\Delta_{\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}).$$

Par l'identification entre jacobienne et variété d'Albanese pour une courbe, le plongement pointé $\Delta \hookrightarrow J_\Delta$ induit un isomorphisme G-équivariant

$$Hom_\bullet(\Delta_{\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) = Hom_{varab}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}).$$

On obtient donc un isomorphisme de G-modules

$$J_\Gamma(F') = J_\Gamma(\mathbb{C}) \oplus Hom_{varab}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}).$$

Comme $\Gamma(\mathbb{R})$ est connexe non vide, on a $H^1(G, J_\Gamma(\mathbb{C})) = 0$ (proposition 4.1). En utilisant le lemme 6.2, on obtient

$$H^1(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'})) = H^1(G, Hom_{varab}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})).$$

On s'intéresse maintenant au G-réseau $Hom_{varab}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})$.

Sur le corps des complexes, on a l'isomorphisme de courbes pointées $\Delta_{\mathbb{C}} \simeq \Gamma_{\mathbb{C}}$ donné par

$$\theta : (v,w) \mapsto (-v, iw),$$

qui induit un isomorphisme de jacobiennes

$$\varphi_\theta : J_{\Delta\mathbb{C}} \simeq J_{\Gamma\mathbb{C}}.$$

Puisque φ_θ est un isomorphisme, on a donc un isomorphisme de groupes abéliens abstraits :

$$\mathbb{Z} \simeq End(J_{\Gamma\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) \simeq Hom_{grp}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})$$

où la première flèche envoie le générateur $1 \in \mathbb{Z}$ sur l'application identité dans $End(J_{\Gamma\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})$. La deuxième flèche envoie $\rho \in End(J_{\Gamma\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})$ sur $\rho \circ \varphi_\theta$.

On a donc

$$Hom_{grp}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}\varphi_\theta$$

avec l'action induite par l'action de θ sur les points. Comme

$$\sigma(\theta) : (v,w) \mapsto (-v, -iw) = -\theta,$$

l'action de G sur $Hom_{grp}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}\varphi_\theta$ est antipodale. Alors

$$\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'})) = H^1(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'})) = H^1(G, Hom_{grp}(J_{\Delta\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}})) = \mathbb{Z}/2$$

(voir le lemme 6.3).

Via la suite exacte (6.2), on obtient que le générateur de $\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'}))$ est donné par la classe de la fonction rationnelle $(u+v)$ dans $F(\Gamma)^\times / N(F'(\Gamma)^\times)$. En effet, soit

$$\theta(\eta) = \theta(v,w) = (-v, iw) \in \Gamma(F').$$

Alors $\sigma(\theta(v,w)) = (-v, -iw)$ où σ est la conjugaison complexe. Le diviseur de $u+v$ sur $\Gamma_{F'}$ est donné par

$$\theta + \sigma(\theta) - 2O = (\theta - O) + \sigma(\theta - O),$$

où O est le point à l'infini du revêtement double $\Gamma \to \mathbb{P}^1$. On en déduit que le diviseur de la fonction $u+v$ est une norme. Par construction, $u+v$ s'envoie donc sur le générateur de $\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(\Gamma_{F'}))$. □

L'hypothèse du lemme 6.6 est réalisée pour les courbes elliptiques (cas $deg(p) = 2$) sans multiplication complexe. Cette condition est aussi souvent réalisée pour les courbes hyperelliptiques (cas $deg(p) \geq 4$). En effet, on a le théorème suivant [Z00, Thm. 1.3] :

Théorème 6.7. *(Zarhin) Soit K un corps de caractéristique zéro. Soit $f(u) \in K[u]$ un polynôme séparable irréductible de degré n au moins égal à 5. Si le groupe de Galois sur K de l'équation $f(u) = 0$ est le groupe symétrique S_n, alors sur tout corps algébriquement clos contenant K, l'anneau des endomorphismes de la jacobienne de la courbe hyperelliptique*

$$y^2 = f(u)$$

est réduit à $\mathbb{Z}$.

On en déduit :

Corollaire 6.8. *En tout degré $d \geq 2$ tout polynôme réel de degré $2d+1$ de la forme $u.h(u)$ avec $h(u)$ unitaire positif de degré $2d$ est limite de tels polynômes h' avec la propriété que l'anneau des endomorphismes complexes de la jacobienne de la courbe hyperelliptique*

$$y^2 = u.h'(u)$$

est réduit à $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit n un entier, $n \geq 2$. Partons de l'extension générique du corps $\mathbb{Q}(z_1, \ldots, z_n)$ donnée par l'équation

$$x^n + z_1 x^{n-1} + \cdots + z_n = 0.$$

Le groupe de Galois absolu est S_n. Par le théorème d'irréductibilité de Hilbert avec approximation [Ek90], on peut approcher tout point de $\mathbb{R}^n$ hors du lieu de ramification par un point de $\mathbb{Q}^n$ tel que le groupe de Galois absolu de l'équation spécialisée soit S_n.

Soit $h(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable unitaire positif sur $\mathbb{R}$, de degré $2d$. On peut approcher le polynôme $u.h(u) \in \mathbb{R}[u]$, de degré $n = 2d+1$, par un polynôme séparable unitaire $r(u) \in \mathbb{Q}[u]$ de degré n de telle manière que le polynôme $r(u)$ ait S_n pour groupe de Galois absolu.

Plus précisément, si $V \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ est l'ouvert formé des points où le polynôme

$$x^n + z_1 x^{n-1} + \cdots + z_n$$

est séparable, l'ensemble des points de $V(\mathbb{Q})$ où le polynôme spécialisé a un groupe de Galois absolu différent de S_n est un ensemble mince. Son complémentaire dans $V(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{A}_n(\mathbb{Q})$ est en particulier Zariski dense.

Si le polynôme unitaire $r(u) \in \mathbb{Q}[u]$ est suffisamment proche de $u.h(u)$, alors il est de la forme $(u-a).h'(u)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $h'(u)$ unitaire positif sur $\mathbb{R}$ (lemme de Krasner, théorème des fonctions implicites). □

Dans la situation du théorème 4.7, avec $F = \mathbb{R}(\Delta)$, si la classe $(u+v, -1, -1) \in H^3(F(X), \mathbb{Z}/2)$ est nulle, alors le groupe quotient $H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)/H^3(F, \mathbb{Z}/2)$ est nul. Lorsque la courbe Γ n'a pas de multiplication complexe, et $F = \mathbb{R}(\Delta)$, on peut montrer que ce quotient est a priori engendré par cette classe $(u+v, -1, -1)$:

Théorème 6.9. *Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable unitaire, non constant, de degré pair, avec $p(0) \neq 0$, tel que p est positif sur $\mathbb{R}$. Soit X le modèle projectif et lisse de la variété d'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u),$$

avec la projection $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ donnée par la coordonnée u. Soit Γ la courbe projective et lisse d'équation affine

$$\Gamma : z^2 = u.p(u)$$

et soit Δ la courbe projective et lisse d'équation d'équation affine $w^2 = v.p(-v)$. Soit $F = \mathbb{R}(\Delta)$. Supposons que l'anneau des endomorphismes sur $\mathbb{C}$ de la jacobienne J_Γ de Γ est réduit à $\mathbb{Z}$:

$$Hom_{varab}(J_{\Gamma\mathbb{C}}, J_{\Gamma\mathbb{C}}) \simeq \mathbb{Z}.$$

Alors le groupe

$$H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)/H^3(F, \mathbb{Z}/2)$$

est engendré par la classe $(u + v, -1, -1)$.

Démonstration. Soit $\beta \in H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$. D'après la proposition 6.5, dont nous reprenons les notations, la classe β est l'image d'une classe $\alpha \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$ dont tous les résidus sont nuls sauf peut-être au point générique de la courbe Γ_F. De plus, le résidu $\partial_{\Gamma_F}(\alpha)$ est dans $\mathrm{Br}(\Gamma_F)[2]$, et il s'annule par passage de F à $F' = F(\sqrt{-1})$.

D'après le lemme 6.6, le résidu $\partial_{\Gamma_F}(\alpha)$ est égal à $(\delta(u + v)^n, -1)$, avec $\delta \in F^\times$ et $n \in \{0, 1\}$.

Soit

$$\gamma = (\delta(u + v)^n, z^2 - up(u), -1) \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2).$$

On examine les résidus de γ sur $\mathbb{A}^2_F$. Sur $\Gamma_F \subset \mathbb{A}^2_F$ on a la classe $(\delta(u + v)^n, -1)$. Le résidu en $u = -v$ est $n(z^2 + vp(-v), -1) = n(z^2 + w^2, -1) = 0$. Tous les autres résidus sont nuls par définition de γ.

On en déduit que la classe $\alpha - \gamma \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$ a tous ses résidus sur $\mathbb{A}^2_F$ triviaux. D'après [R96, Prop. 8.6] elle vient donc de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$.

Dans $H^3(F(X), \mathbb{Z}/2)$, on a $-(z^2 - up(u)) = x^2 + y^2$ qui est une somme de deux carrés, donc $(-(z^2 - up(u)), -1) = 0$. L'image de la classe γ dans $H^3(F(X), \mathbb{Z}/2)$ est donc égale à la classe $(\delta(u + v)^n, -1, -1)$. Modulo l'image de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$, la classe β est donc nulle ou égale à la classe $(u + v, -1, -1)$. □

7. CH_0-TRIVIALITÉ DE X PAR LE CALCUL DE $H^3_{nr}(F(X)/F)$

7.1. **Cas elliptique avec multiplication complexe.** Dans certains cas avec multiplication complexe, on a un résultat meilleur que le lemme 6.6 :

Lemme 7.1. *Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable unitaire de degré 2, avec $p(0) \neq 0$, tel que p est positif sur $\mathbb{R}$. Soit X le modèle projectif et lisse standard de la variété d'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u),$$

avec la projection $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ donnée par la coordonnée u. Soit $E \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la courbe elliptique

$$E : z^2 = u.p(u)$$

et soit $\Delta \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *la courbe elliptique*

$$\Delta : w^2 = v.p(-v).$$

Soient $F = \mathbb{R}(\Delta)$ *et* $F' = \mathbb{C}(\Delta)$. *Soit* $G = \mathrm{Gal}(\mathbb{C}/\mathbb{R}) =< 1, \sigma >$. *Supposons que la courbe* E *est à multiplication complexe, et que l'on a*

$$End_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{Z}[\omega],$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ *est un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation*

$$\omega^2 - d\omega + c = 0, \text{ où } d, c \in \mathbb{Z} \text{ et } d \text{ est impair.}$$

Alors

$$\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(E_{F'})) = 0.$$

Démonstration. En utilisant le lemme 6.2 et la proposition 4.1, on obtient

$$\hat{H}^{-1}(G, \mathrm{Pic}(E_{F'})) = H^1(G, \mathrm{Pic}(E_{F'})) = H^1(G, Hom_{grp}(\Delta_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})).$$

Soit $\varphi_\theta : \Delta_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$ l'isomorphisme

$$\varphi_\theta(v, w) = (-v, iw).$$

Cet isomorphisme induit un isomorphisme de groupes abéliens

$$End_{\mathbb{C}}(E) \to Hom_{grp}(\Delta_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}), \ \rho \mapsto \rho \circ \varphi_\theta.$$

On a donc $Hom_{grp}(\Delta_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}}) = \mathbb{Z}\varphi_\theta \oplus \mathbb{Z}\omega \circ \varphi_\theta$.

On examine l'action du groupe G : on a

$$\sigma(\varphi_\theta(v, w)) = \sigma(-v, iw) = (-v, -iw) = -\varphi_\theta(v, w).$$

De même,

$$\sigma(\omega \circ \varphi_\theta(v, w)) = \sigma(\omega(-v, iw)) \stackrel{(a)}{=} d(-v, -iw) - \omega(-v, -iw) =$$

$$\stackrel{(b)}{=} -d\varphi_\theta(v, w) + \omega(-v, iw) = -d\varphi_\theta(v, w) + \omega \circ \varphi_\theta(v, w).$$

L'égalité (a) utilise que le morphisme d'évaluation

$$End_{\mathbb{C}}(E_{\mathbb{C}}) \times E_{\mathbb{C}} \to E_{\mathbb{C}}$$

est Galois-équivariant. L'égalité (b) utilise que $\omega(-P) = -\omega(P)$ pour tout point P de E puisque ω est un endomorphisme de E.

Notant $e_1 = \varphi_\theta$ et $e_2 = \omega \circ \varphi_\theta$, on voit que le G-module $Hom_{grp}(\Delta_{\mathbb{C}}, E_{\mathbb{C}})$ est isomorphe au G-module M_1 du lemme 6.4 (ii). Ainsi $\hat{H}^{-1}(G, M_1) = 0$. □

On peut maintenant donner une autre famille de fibrations en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ dont l'espace total X est CH_0-universellement trivial.

Théorème 7.2. *Soit* $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ *un polynôme séparable unitaire de degré* 2, *avec* $p(0) \neq 0$, *tel que* p *est positif sur* $\mathbb{R}$. *Soit* X *le modèle projectif et lisse standard de la variété d'équation*

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u),$$

avec la projection $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *donnée par la coordonnée* u. *Soit* $E \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *la courbe elliptique d'équation affine*

$$E : z^2 = u.p(u)$$

et soit $\Delta \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ *la courbe elliptique d'équation affine*

$$\Delta : w^2 = v.p(-v).$$

Supposons que la courbe E est à multiplication complexe, et que l'on a

$$End_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{Z}[\omega],$$

où $\omega \in \mathbb{C}$ est un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation

$$\omega^2 - d\omega + c = 0, \text{ où } d, c \in \mathbb{Z} \text{ et } d \text{ est impair.}$$

Alors

(i) pour le corps $F = \mathbb{R}(\Delta)$, l'application $H^3(F, \mathbb{Z}/2) \to H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2)$ est un isomorphisme ;

(ii) pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$, on a $A_0(X_F) = 0$.

Démonstration. L'énoncé (i) implique (ii) d'après le théorème 4.7.

La preuve de (i) est semblable à la preuve du théorème 6.9. Soit

$$\beta \in H^3_{nr}(F(X)/F, \mathbb{Z}/2).$$

D'après la proposition 6.5, la classe $\beta \in H^3_{nr}(F(\tilde{X})/F, \mathbb{Z}/2)$ est l'image d'une classe $\alpha \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$ dont tous les résidus sont nuls sauf peut-être au point générique de la courbe $E_F \subset \mathbb{P}^2_F$. De plus, $\partial_{E_F}(\alpha) \in \mathrm{Br}(E_F)[2]$ s'annule par passage de F à $F' = F(\sqrt{-1})$. D'après le lemme 7.1 et le lemme 6.1, le résidu $\partial_{E_F}(\alpha) \in \mathrm{Br}(E_F)[2]$ est égal à $(\delta, -1)$ sur E_F, avec $\delta \in F^\times$.

Le résidu de la classe $(\delta, z^2 - up(u), -1) \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$ au point générique de $E_F \subset \mathbb{P}^2_F$ est $(\delta, -1)$. Tous les autres résidus sur $\mathbb{A}^2_F$ sont nuls. Ainsi la classe

$$\gamma = \alpha - (\delta, z^2 - up(u), -1) \in H^3(F(\mathbb{A}^2), \mathbb{Z}/2)$$

a tous ses résidus sur $\mathbb{A}^2_F$ triviaux. D'après [R96, Prop. 8.6] cette classe vient donc de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$.

Dans $H^3(F(X), \mathbb{Z}/2)$, on a $-(z^2 - up(u)) = x^2 + y^2$ qui est une somme de deux carrés, donc $(-(z^2 - up(u)), -1) = 0$. On en déduit que la classe β est l'image de la classe $\gamma + (\delta, -1, -1)$ de $H^3(F, \mathbb{Z}/2)$. □

8. Courbes elliptiques satisfaisant les hypothèses du théorème 7.2

Les résultats de ce paragraphe nous ont été communiqués par Yuri Zarhin. Ils donnent un critère pour que l'hypothèse sur $End_{\mathbb{C}}(E)$ dans le théorème 7.2 ci-dessus soit satisfaite. Voir [Z24] pour des résultats plus généraux.

Si D est un entier negatif, on écrit $\sqrt{D} = id$, où $d \in \mathbb{R}$ est positif, tel que $d^2 = -D$.

Proposition 8.1. *(voir aussi* [Z24, Definition 1.1]*) Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{R}$ à multiplication complexe par un ordre dans un corps quadratique imaginaire $K = \mathbb{Q}(\sqrt{D})$, où D est un entier négatif, non divisible par un carré. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) $End_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{Z}[\omega]$, où $\omega \in \mathbb{C}$ est un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation

$$\omega^2 - d\omega + c = 0, \text{ où } d, c \in \mathbb{Z} \text{ et } d \text{ est impair.}$$

(ii) $End_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{Z} \oplus f\mathcal{O}_K$ est un ordre dans le corps K, où f est un entier impair, et $D \equiv 1 \bmod 4$.

(iii) La restriction de l'application trace

$$K \to \mathbb{Q},\ \lambda + \mu\sqrt{D} \mapsto 2\lambda$$

induit une application surjective $tr : End_{\mathbb{C}}(E) \to \mathbb{Z}$.

Démonstration. Les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes d'après la description de l'anneau des entiers du corps quadratique imaginaire K. La condition (i) implique clairement (iii). La condition (ii) implique (i) : il suffit de prendre $d = f, c = f^2(1-D)/4$. □

La proposition suivante est un cas particulier de [Z24, Thm. 2.4] (voir [Z24, Lemma 3.9, Ex. 3.10]) :

Proposition 8.2. *Soit E une courbe elliptique sur $\mathbb{R}$. Supposons que le discriminant d'une équation de Weierstraß de $E/\mathbb{R}$ est négatif. Alors $E(\mathbb{C}) \simeq E_\tau = \mathbb{C}/(\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau)$ où $\tau = \frac{1}{2} + i\frac{y}{2}$ avec $y \geq 1$ un nombre réel.*

Le conditions équivalentes de la proposition 8.1 ci-dessus sont satisfaites pour E si et seulement s'il existe un entier négatif D, $D \equiv 1 \bmod 4$, et des entiers positifs impairs k, β, où β divise k^2D, tels que

$$\tau = \frac{1}{2} + \frac{k}{2\beta}\sqrt{D}. \tag{8.1}$$

Les invariants réels $j(E_\tau)$ pour τ de la forme (8.1) sont dans l'intervalle $(-\infty, 1728]$, et ils sont denses pour la topologie réelle.

Remarque 8.3. Pour une courbe elliptique E sur $\mathbb{R}$ avec $j(E) \neq 0, 1728$ on a l'équivalence entre les hypothèses :

(1) le discriminant d'une équation de Weierstraß de $E/\mathbb{R}$ est négatif ;

(2) $E(\mathbb{R})$ est connexe ;

(3) $j(E) < 1728$.

(voir les formules [S92, III, §1]).

Démonstration. Le premier énoncé est standard (voir [S92, §III.1] et [S94, Thm. V.1.1c)] pour la définition du discriminant d'une équation de Weierstraß d'une courbe elliptique E et [S94, Chapitre V, Prop. 2.1, preuves du Thm. 2.3 et Cor. 2.3.1] pour l'expression de τ et le fait que $\mathrm{sgn}(\Delta(E_\tau)) = \mathrm{sgn}(e^{2\pi i\tau})$).

Supposons τ soit de la forme (8.1) et soit $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ le réseau correspondant. Alors

$$End_{\mathbb{C}}(E_\tau) = \{\alpha \in \mathbb{C}, \alpha\Lambda \subset \Lambda\} = \{\alpha \in \mathbb{C}, |\, \exists a, b, c, d \in \mathbb{Z},\ \alpha = a + b\tau,\ \alpha\tau = c + d\tau\}.$$

On écrit la dernière condition explicitement :

$$\alpha = a + b/2 + \frac{kb}{2\beta}\sqrt{D},\ \text{puis}$$

$$\alpha\tau = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{k^2bD}{4\beta^2} + \frac{k}{2\beta}\sqrt{D}(a+b) = c + d/2 + \frac{kd}{2\beta}\sqrt{D}.$$

Ainsi la condition $\alpha\Lambda \subset \Lambda$ est équivalente à la condition

$$d = a + b,\ c = \frac{b}{4}\left(\frac{k^2D - \beta^2}{\beta^2}\right)$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. D'après les hypothèses, $4\beta | k^2D - \beta^2$, ainsi $c \in \mathbb{Z}$ pour tout b divisible par β, i.e. $b = \beta n$ pour $n \in \mathbb{Z}$. En particulier, b prend des valeurs impaires et, comme $tr(\alpha) = tr(a + b/2 + \frac{kb}{2\beta}\sqrt{D}) = 2a + b$, la condition (iii) de la proposition 8.1 est satisfaite.

Inversement, on écrit les conditions ci-dessus pour $\tau = \frac{1}{2} + i\frac{y}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{t}$ où $t = -y^2$ est un nombre réel négatif. On obtient :

$$\alpha = a + b/2 + \frac{b}{2}\sqrt{t},\ \alpha\tau = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{bt}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{t}(a+b) = c + d\tau,$$

d'où

$$d = a + b,\ c = \frac{b}{4}(t-1).$$

Ainsi t est rationnel, on peut l'écrire $t = \frac{m}{\beta} = \frac{m\beta}{\beta^2} = \frac{k^2D}{\beta^2}$, où m, β, k, D sont des entiers, $m\beta = k^2D < 0$, le carré k^2 est le plus grand carré entier qui divise $m\beta$, et D n'est pas divisible par un carré. Ainsi $D < 0$ et $\beta | k^2D$ par définition. La condition $c = \frac{b}{4}(t-1) = \frac{b}{4}\left(\frac{k^2D-\beta^2}{\beta^2}\right) \in \mathbb{Z}$ et la condition (iii) de la proposition 8.1 donnent que b prend des valeurs impaires, et donc 4 divise $k^2D - \beta^2$, d'où l'on déduit $D \equiv 1$ mod 4, et k, β sont impairs.

Finalement, soit $f : [\frac{1}{2}, \infty) \to (-\infty, \infty)$ la fonction réelle définie par

$$f(y) = j(\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}(\frac{1}{2} + iy))).$$

On a :

(i) La fonction f induit une bijection continue décroissante

$$f : [1/2, \infty) \to [1728, -\infty).$$

On a $f(1/2) = 1728$, $f(\sqrt{3}/2) = 0$. Pour ceci, voir [S94, Chapitre V, Prop. 2.1, Thm. 2.3 et leurs preuves].

(ii) Soient n un entier impair, $\beta = n^2 + 2, D = -(n^2 + 2)$, et $k > n$ un entier impair. Soit

$$y_{k,n} = \frac{k}{2(n^2+2)}\sqrt{n^2+2} = \frac{k}{2\sqrt{n^2+2}}$$

et soit $\tau_{k,n} = 1/2 + iy_{k,n}$. D'après ce qui précède, les conditions de la proposition 8.1 sont satisfaites pour les courbes elliptiques $E_{\tau_{k,n}}$. Par ailleurs, les réels $y_{k,n}$ sont denses dans l'intervalle $[\frac{1}{2}, \infty)$. Puisque f est continue et bijective, les j-invariants de $E_{\tau_{k,n}}$ sont denses dans $(-\infty, 1728]$.

□

9. Comparaison des résultats des deux méthodes pour $p(u)$ de degré 2

Soit $p(u) = u^2 + au + b \in \mathbb{R}[u]$ un polynôme séparable unitaire de degré 2, avec $b = p(0) \neq 0$, tel que p est positif sur $\mathbb{R}$. On a donc $0 \leq a^2/b < 4$. Soit X le modèle projectif et lisse standard de la variété d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u),$$

On compare ici les résultats de CH_0-trivialité sur X obtenus au §5 (première méthode) avec ceux obtenus au §7 (deuxième méthode).

Les formules [S92, III, §1] pour le j-invariant de la courbe

$$E : z^2 = u^3 + au^2 + bu$$

donnent

$$\Delta(E) = -16b^3(4 - a^2/b) < 0, \text{ et}$$
$$j = 256\frac{(3-(a^2/b))^3}{4-(a^2/b)}.$$

L'invariant $j(E)$ est un nombre réel. On a $0 \leq a^2/b \leq 3$ si et seulement si $j(E) \geq 0$, et alors $0 \leq j(E) \leq 1728$. On a $3 \leq a^2/b < 4$ si et seulement si $j(E) \leq 0$. On a $a^2/b = 3$ si et seulement si $j(E) = 0$. Pour $a^2/b = 0$, i.e. $a = 0$ on a $j(E) = 1728$.

Soit $X/\mathbb{R}$ d'équation affine

$$X : \; x^2 + y^2 + z^2 = u.p(u). \tag{9.1}$$

On a montré que le groupe $A_0(X_F)$ est nul pour tout corps F contenant $\mathbb{R}$ dans chacun des cas suivants.

($*$) (première méthode) D'après le théorème 5.1 il en est ainsi si $0 \leq a^2/b \leq 3$, c'est-à-dire si $j(E) \geq 0$. Dans ce cas $j(E)$ décroît continûment de 1728 à 0.

($**$) (deuxième méthode) D'après le théorème 7.2, il en est ainsi si la courbe elliptique $E/\mathbb{R}$ est à multiplication complexe et l'on a $End_{\mathbb{C}}(E) = \mathbb{Z}[\omega]$, où $\omega \in \mathbb{C}$ est un entier quadratique imaginaire, satisfaisant une équation $\omega^2 - d\omega + c = 0$ avec $d, c \in \mathbb{Z}$, et d impair. Dans ce cas les invariants $j(E)$ sont algébriques et en particulier dénombrables. Pour $j(E) < 0$ seule cette méthode est éventuellement disponible. D'après la proposition 8.2, on obtient que les invariants réels $j(E)$ correspondant à ce cas sont dans l'intervalle $[-\infty, 1728]$, et ils sont denses pour la topologie usuelle dans cet intervalle.

Voici quelques exemples.

(1) Soit $p(u) = u^2 - 3u + 3$. La courbe elliptique E est donnée par l'équation
$$z^2 = (u-1)^3 + 1.$$
On a $j(E) = 0$. La courbe E est à multiplication complexe par les racines cubiques de l'unité. L'équation est ici $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ et $d = 1$ est impair. Les deux méthodes s'appliquent.

(2) Soit $p(u) = u(u^2 + 1)$. La courbe elliptique E est donnée par l'équation
$$z^2 = u(u^2 + 1).$$
On a $j(E) = 1728$. Dans ce cas la première méthode s'applique. La seconde méthode ne s'applique pas. On a multiplication complexe par $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$. L'équation est ici $\omega^2 + 1 = 0$ et $d = 0$ n'est pas impair.

(3) Soit $p(u) = u^2 - 21u + 112$. La courbe elliptique E est donnée par l'équation
$$z^2 = u(u^2 - 21u + 112).$$
On a ici $a = -21$, $b = 112$, p est un polynôme positif avec $3 < \frac{a^2}{b}$ donc $j(E) < 0$. La première méthode ne s'applique pas. Après le changement de variables $t = u + 7$ on obtient que E est donnée par l'équation $z^2 = t^3 - 35t + 98$ que l'on trouve dans la base de données [LMFDB]. Elle a multiplication complexe par $\mathbb{Z}[\omega]$ avec $\omega = \frac{(1+\sqrt{-7})}{2}$. L'équation est ici $\omega^2 - \omega + 2 = 0$ et $d = -1$ est impair. La seconde méthode s'applique.

10. Rationalité

On donne des exemples de fibrations en quadriques

$$\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$$

de dimension relative au moins 1 dont l'espace total est rationnel sur $\mathbb{R}$.

10.1. **Théorème de Witt** [W34, W37]**).** Dans [W37, Satz 22], Witt montre :

Théorème 10.1. *Soit Γ une courbe réelle géométriquement intègre. Une forme quadratique non dégénérée en au moins 3 variables sur le corps $\mathbb{R}(\Gamma)$ représente zéro si elle représente zéro sur toutes les complétions de $\mathbb{R}(\Gamma)$ sauf au plus un nombre fini.*

En particulier, si $\Gamma = \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ et l'application $X(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$ est surjective, alors la fibration π admet une section, et donc X est rationnelle.

10.2. **Fibrations en coniques sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.** Soit maintenant $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ définie par une équation affine

$$x^2 + a(u)y^2 = u.f(u)$$

avec $a(u)$ et $f(u)$ deux polynômes positifs sur $\mathbb{R}$ premiers entre eux. Dans ce cas $X(\mathbb{R})$ est connexe et non vide.

L'algèbre de quaternions $(-a(u), -uf(u)) \in \mathrm{Br}(\mathbb{R}(u))[2]$ a deux résidus non nuls, en $u = 0$ et $u = \infty$. Elle est donc égale à $(-1, u)$ à addition près d'un élément de $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$. Par évaluation en un point réel avec $u > 0$, on voit qu'elle est égale à $(-1, u)$.

Les formes quadratiques de rang 3 sur $\mathbb{R}(u)$

$$< 1, a(u), -uf(u) >$$

et

$$a(u)f(u) < 1, 1, -u >$$

ont donc même discriminant et même invariant de Hasse-Witt. Elles sont donc isomorphes sur $\mathbb{R}(u)$. Ainsi la fibre générique de $X/\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ est la conique d'équation affine $r^2 + s^2 - u = 0$. Son corps des fonctions est transcendant pur sur $\mathbb{R}$. Le corps des fonctions de X est donc transcendant pur sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, soit $X/\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en coniques relativement minimale. Soit $A/\mathbb{R}(u) = \mathbb{R}(\mathbb{P}^1)$ l'algèbre de quaternions associée à la fibre générique. Les résidus non nuls de cette algèbre en des points de $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ sont en nombre pair et correspondent à des fibres singulières formées de deux droites conjuguées, il y a des points réels d'un côté d'une telle fibre, et pas de l'autre. Si $X(\mathbb{R})$ est connexe, il y donc zéro ou deux tels points. Dans le second cas, on peut supposer que ces points correspondent à $u = 0$ et $u = \infty$. Dans le premier cas, l'algèbre A est constante, et donc nulle dans $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ sinon on aurait $X(\mathbb{R}) = \emptyset$. Ceci implique que X est birationnelle à $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Dans le second cas, la classe de $A \in \mathrm{Br}(\mathbb{R}(u))$ s'écrit $(-1, u)$ (quitte à changer u en $-u$). Ainsi la fibre générique de $X/\mathbb{P}^1$ est $\mathbb{R}(u)$-isomorphe à $X^2 + Y^2 - uT^2 = 0$ dans $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}(u)}$. Donc X est $\mathbb{R}$-rationnelle, car $\mathbb{R}$-birationnelle à la surface affine d'équation $x^2 + y^2 - u = 0$.

On dispose d'un résultat plus général :

Théorème 10.2. *Soit $X/\mathbb{R}$ une surface projective et lisse géométriquement rationnelle possédant un point réel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) L'espace topologique $X(\mathbb{R})$ est connexe non vide.

(ii) *La $\mathbb{R}$-surface X est rationnelle.*

(iii) *La $\mathbb{R}$-surface X est stablement rationnelle.*

(iv) *La $\mathbb{R}$-surface X est rétractilement rationnelle.*

(v) *La $\mathbb{R}$-surface X est universellement CH_0-triviale.*

(vi) *Le groupe $A_0(X)$ est nul.*

Démonstration. Que (i) implique (ii) est établi par R. Silhol [Sil89, Cor. 6.5]. La démonstration repose sur la classification k-birationnelle des k-surfaces géométriquement rationnelles. Que (vi) implique (i) est un cas particulier de [CTI81]. □

10.3. **Un exemple en dimension supérieure.** Soit $p(u) \in \mathbb{R}[u]$ non nul, positif sur $\mathbb{R}$, donc de la forme $p(u) = a(u)^2 + b(u)^2$ avec $a(u), b(u) \in \mathbb{R}[u]$. Soit $m \geq 1$. Toute variété sur $\mathbb{R}$ définie par une équation

$$\sum_{j=1}^{m}(x_j^2 + x_{j+1}^2) = up(u)$$

est rationnelle sur $\mathbb{R}$. En effet, le changement de variables

$$X_j + X_{j+1}\sqrt{-1} = (x_j + x_{j+1}\sqrt{-1})/(a(u) + b(u)\sqrt{-1})$$

montre que cette variété est $\mathbb{R}$-birationnelle à celle définie par

$$\sum_{j=1}^{m}(X_j^2 + X_{j+1}^2) = u,$$

qui est $\mathbb{R}$-isomorphe à l'espace affine $\mathbb{A}^{2m}_{\mathbb{R}}$.

11. Variétés non rationnelles : deux méthodes

11.1. **Fibrations non de type (I) et calcul de groupe de Brauer.** Soit $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ une fibration en surfaces quadriques d'espace total lisse. Supposons que X n'est pas de type (I). S'il y a une section alors la variété X est rationnelle sur $\mathbb{R}$. Supposons qu'il n'y a pas de section. Soit $K = \mathbb{R}(\mathbb{P}^1)$. L'application

$$\mathrm{Br}(K) \to \mathrm{Br}(\mathbb{R}(X))$$

est injective si et seulement si le discriminant de la forme quadratique définissant la fibre générique n'est pas un carré ; sinon son noyau est $\mathbb{Z}/2$ [CTSk93, Prop. 7.2.4]. Pour $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ on note K_P le complété de K au point P. On note $t_P \in K_P$ une uniformisante. Soit T l'ensemble des points $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ tels que $X \times_K K_P$ soit K_P-birationnel à une quadrique définie par une équation

$$(x^2 + y^2) - t_P(u^2 + v^2) = 0.$$

Le groupe $H^2_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ est engendré par les éléments de $\mathrm{Br}(\mathbb{R}(\mathbb{P}^1))$ dont tous les résidus aux points hors de T sont nuls (voir [Sk90] et [CTSD94, Theorem 2.3.1]) :

(*) Si le discriminant n'est pas un carré, le groupe $H^2_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ n'est pas réduit à $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ si le cardinal de T est au moins 2.

(**) Si le discriminant est un carré, le groupe $H^2_{nr}(\mathbb{R}(X)/\mathbb{R}, \mathbb{Z}/2)$ n'est pas réduit à $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ si le cardinal de T est au moins 4.

On peut ainsi donner des exemples de fibrations en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ telles que $X(\mathbb{R})$ soit connexe mais que X ne soit pas stablement rationnelle, ni même CH_0-triviale.

On considère la famille donnée dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ avec coordonnées $(x, y, z, t; u)$ par l'équation

$$x^2 + (1 + u^2)y^2 - u(z^2 + t^2) = 0.$$

On peut recoller cette famille avec la famille donnée par l'équation

$$x'^2 + (1 + v^2)y'^2 - v(z'^2 + t'^2) = 0$$

dans $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ avec coordonnées $(x', y', z', t'; v)$, au moyen du changement de variable $(x', y', z', t'; v) = (vx, y, z, t; 1/u)$. Ceci donne un modèle admissible au sens de [Sk90, §2] et [CTSk93, §3]. On en déduit (voir [Sk90, Prop. 2.4], [CTSk93, Thm. 3.3]) une construction explicite d'un modèle $\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ avec $X/\mathbb{R}$ projectif et lisse. Pour $u \in \mathbb{R}$, les fibres lisses X_u satisfont $X_u(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ (et connexe) si et seulement si $u > 0$. L'espace $X(\mathbb{R})$ a donc exactement une composante connexe.

Proposition 11.1. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la fibration en surfaces quadriques définie ci-dessus : c'est un modèle projectif et lisse de la variété*

$$x^2 + (1 + u^2)y^2 - u(z^2 + t^2) = 0 \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}} \times_{\mathbb{R}} \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}.$$

Alors l'image α de la classe $(-1, u) \in H^2(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ dans $H^2(\mathbb{R}(X), \mathbb{Z}/2)$ n'est pas dans l'image de $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$*, et on a*

$$\alpha \in \mathrm{Br}(X)[2] \subset H^2(\mathbb{R}(X), \mathbb{Z}/2).$$

Ainsi l'application

$$\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \to \mathrm{Br}(X)$$

n'est pas surjective.

Démonstration. L'application de restriction $\mathrm{Br}(\mathbb{R}(u)) \to \mathrm{Br}(\mathbb{R}(X))$ est injective car le discriminant $u^2(1+u^2)$ de la forme quadratique $x^2+(1+u^2)y^2 - u(z^2+t^2)$ n'est pas un carré dans $\mathbb{R}(u)$ [CTSk21, Prop. 7.2.4]. La classe $(-1, u) \in H^2(\mathbb{R}(u), \mathbb{Z}/2)$ ne vient pas de $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$ car son résidu en $u = 0$ n'est pas nul. La classe $\alpha \in \mathrm{Br}(\mathbb{R}(X))$ n'est donc pas dans l'image de $\mathrm{Br}(\mathbb{R})$. Puisque X est lisse sur $\mathbb{R}$, pour établir l'énoncé il suffit de montrer que α est non ramifiée sur $\mathbb{R}(X)$ [CT95]. Soit $A \subset \mathbb{R}(X)$ un anneau de valuation discrète w. Soit w' la valuation sur $\mathbb{R}(u)$ induite par w. Si w' ne correspond pas au point $u = 0$ ou $u = \infty$ alors la valuation $w(u)$ est nulle. Si la valuation $w(u)$ est paire, le résidu de $(-1, u)$ est trivial. Si la valuation $w(u)$ est impaire, on vérifie sur l'équation que (-1) est un carré dans le corps résiduel κ de A, et donc le résidu de $(-1, u)$ est trivial. $\square$

En particulier, X n'est pas universellement CH_0-triviale.

11.2. **Hypersurface cubique singulière dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$.** La variété de la proposition 11.1 est $\mathbb{R}$-birationnelle à l'hypersurface cubique de $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ d'équation affine

$$x^2 + (1 + u^2) - u(z^2 + t^2) = 0.$$

Celle-ci admet un modèle projectif $Y \subset \mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ d'équation

$$x^2.y + y.(y^2 + u^2) - u(z^2 + t^2) = 0$$

en coordonnées homogènes (x, y, u, z, t). Le lieu singulier est formé des 4 points non réels donnés par

$$(x, y, u, z, t) = (\pm i, 0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, \pm i, 1).$$

Ceci donne un exemple d'hypersurface cubique Y singulière dans $\mathbb{P}^4_{\mathbb{R}}$ avec un modèle projectif et lisse Y' satisfaisant $Y'(\mathbb{R})$ connexe et $\mathrm{Br}(Y')/\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \neq 0$, donc Y' non stablement rationnelle, ni même universellement CH_0-triviale.

Par comparaison, la variété affine d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - u(u^2 + 1) = 0$ sur $\mathbb{R}$ admet une compactification évidente comme hypersurface cubique Y d'équation homogène

$$(x^2 + y^2 + z^2)t - u(u^2 + t^2) = 0.$$

Les points singuliers sont donnés par $u = t = 0 = x^2 + y^2 + z^2$. C'est une conique plane sans point réel. Il n'y a pas de point réel singulier. Nous avons vu au paragraphe 9 (deuxième exemple) que tout modèle projectif et lisse de Y est universellement CH_0-trivial.

11.3. **Intersection singulière de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$.** La variété de la proposition 11.1 est aussi $\mathbb{R}$-birationnelle à l'intersection de deux quadriques W dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$ donnée par les équations

$$x^2 + y^2 + u^2 - uw = 0.$$

$$wy = z^2 + t^2.$$

Le lieu singulier est formé des 4 points non réels donnés par

$$(x, y, u, w, z, t) = (\pm i, 0, 1, 0, 0, 0)$$

$$(x, y, u, w, z, t) = (0, 0, 0, 0, \pm i, 1).$$

La section par $w = 0$ est donnée par $x^2 + y^2 + u^2 = 0, z^2 + t^2 = 0$. En particulier elle ne contient pas de point réel. Ceci implique que W ne contient pas de droite réelle. Ceci donne un exemple d'intersection de deux quadriques Y dans $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$ avec un modèle projectif et lisse Y' satisfaisant $Y'(\mathbb{R})$ connexe et $\mathrm{Br}(Y')/\mathrm{Br}(\mathbb{R}) \neq 0$, donc Y' non stablement rationnelle, ni même universellement CH_0-triviale.

Par comparaison, en posant $w = u^2 + 1$, on peut voir la variété affine d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 - u(u^2 + 1) = 0$$

dont on a rappelé ci-dessus que tout modèle projectif et lisse est universellement CH_0-trivial, comme intersection de deux quadriques affines

$$x^2 + y^2 + z^2 - uw = 0,$$

$$w = u^2 + 1.$$

La compactification évidente $Y \subset \mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$ donnée par

$$x^2 + y^2 + z^2 - uw = 0,$$

$$u^2 + t^2 - wt = 0$$

est singulière. Le lieu singulier est donné par

$$u = t = w = 0 = x^2 + y^2 + z^2,$$

c'est une conique plane sans point réel. La trace de l'hyperplan $w = 0$ sur $Y(\mathbb{R})$ est vide. Ainsi Y ne contient aucune droite réelle de $\mathbb{P}^5_{\mathbb{R}}$.

11.4. **La méthode des jacobiennes intermédiaires.** Olivier Wittenberg nous informe que la méthode des jacobiennes intermédiaires comme établie dans [BW21] donne le résultat suivant.

Théorème 11.2. *Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques de type (I), avec au moins 6 fibres géométriques singulières. Soit $\Delta \to \mathbb{P}^1_k$ le revêtement double associé, et soit $\beta \in \mathrm{Br}(\Delta)$ la classe associée à cette fibration. Supposons $\Delta(k) \neq \emptyset$. Si β n'est pas dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$, alors la k-variété X n'est pas k-rationnelle.*

Dans le cas $k = \mathbb{R}$, cela lui permet de donner de nombreux exemples de fibrations de type (I) telles que $X(\mathbb{R})$ est connexe mais X n'est pas $\mathbb{R}$-rationnelle. Pour les fibrations (1.1) considérées dans cet article, la classe β est non nulle mais dans l'image de $\mathrm{Br}(k)$, donc le théorème ci-dessus ne peut être utilisé.

12. Intersections lisses de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$

Soit $Y \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection complète lisse de deux quadriques définies par un système $f = g = 0$. Supposons que Y possède un k-point M. Soit $H \subset \mathbb{P}^5_k$ l'espace tangent à Y en M. La famille des espaces linéaires $\mathbb{P}^4_k \subset \mathbb{P}^5_k$ contenant H définit une application rationnelle de Y vers $\mathbb{P}^1_k$. Dans [CT23, §5.2], on montre qu'on obtient ainsi une k-variété projective et lisse

$$X \subset \mathbb{P}^3_k \times_k \mathbb{P}^1_k$$

qui est k-birationnelle à Y. La fibration $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ a pour fibres des quadriques. Les fibres géométriques singulières sont définies par des formes de rang 3. Il y a exactement 6 fibres géométriques singulières, correspondant aux zéros de la forme homogène $det(\lambda f + \mu g)$. La fibration $X \to \mathbb{P}^1_k$ est de type (I). Le revêtement double associé $\Delta \to \mathbb{P}^1_k$ est donné par

$$z^2 = -det(\lambda f + \mu g).$$

Comme Y possède un point rationnel, la forme quadratique générique $f + tg$ possède un zéro sur le corps $k(t)$, elle admet donc une décomposition

$$f + tg \simeq < 1, -1 > \perp \Phi$$

avec Φ de rang 4 sur $k(t) = k(\mathbb{P}^1)$. La fibre générique de la fibration $X \to \mathbb{P}^1_k$ est définie par $\Phi = 0$.

La classe $\beta \in \mathrm{Br}(\Delta)$ est la classe associée à la forme quadratique $\Phi_{k(\Delta)}$, qui est de rang 4, et de discriminant un carré dans $k(\Delta)^\times$.

En utilisant [CT23, Prop. 5.6], on vérifie, sous l'hypothèse $Y(k) \neq \emptyset$, que la classe $\beta \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$ ici définie coïncide avec la classe $\alpha := \alpha_Y \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$ associée à Y dans [CT23, §5.2].

La proposition suivante étend [CT23, thm. 5.10]. Elle nous a été communiquée par Olivier Wittenberg.

Proposition 12.1. *Soit $Y \subset \mathbb{P}^5_k$ une intersection lisse de deux quadriques donnée par un système $f = g = 0$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) la k-variété Y contient une droite sur k ;

(ii) on a $\alpha_Y = 0 \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$;

(iii) la classe $\alpha_Y \in \mathrm{Br}(k(\Delta)$ est dans l'image de $\mathrm{Br}(k) \to \mathrm{Br}(k(\Delta))$.

Elles impliquent :

(iv) la k-variété Y est k-rationnelle.

Démonstration. Nous n'indiquons ici que le complément de démonstration. Supposons que la classe α est l'image de $\gamma \in \mathrm{Br}(k)$. Soit Z une k-variété de Severi-Brauer de classe $\gamma \in \mathrm{Br}(k)$. Sur le corps des fonctions $k(Z)$, la classe β s'annule. Soit $F_1(Y)$ la k-variété des droites de Y. C'est un espace principal homogène sous une k-variété abélienne J. D'après [CT23, thm. 5.10], la classe de $F_1(Y)$ dans $H^1(k, J)$ s'annule alors dans $H^1(k(Z), J)$. Cela signifie qu'il y a une k-application rationnelle de Z vers $F_1(Y)$. Mais toute application rationnelle d'une variété géométriquement rationnelle vers un espace homogène d'une variété abélienne est constante. Ainsi $F_1(Y)(k) \neq \emptyset$, donc $Y \subset \mathbb{P}^5_k$ contient une droite définie sur k. D'après [CT23, thm. 5.10], ceci implique $\alpha = 0 \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$. □

Remarque 12.2. Supposons que Y possède un point rationnel. On considère une fibration $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ associée. Si l'on a (ii), on peut aussi déduire (iv) de la manière suivante. La fibration en coniques sur Δ associée est alors triviale. La fibre générique de π est la descendue à la Weil pour l'extension $k(\Delta)/k(\mathbb{P}^1)$ de $\mathbb{P}^1_{k(\Delta)}$. Elle est donc birationnelle à $\mathbb{P}^2_{k(\mathbb{P}^1)}$ et donc X est k-rationnelle. De fait il y a équivalence entre le fait que la quadrique fibre générique de $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ a un $k(\mathbb{P}^1)$-point, ou encore qu'elle est $k(\mathbb{P}^1)$-rationnelle, et l'égalité $\alpha_X = 0 \in \mathrm{Br}(k(\Delta))$.

Remarque 12.3. C'est un théorème d'O. Benoist et O. Wittenberg [BW21] que (iv) implique les autres énoncés. Ceci n'est pas utilisé dans le corollaire suivant.

Corollaire 12.4. *Soit $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques donnée par une équation affine*

$$x^2 - ay^2 - bz^2 = u.p(u)$$

avec $p(u)$ séparable non constant et $p(0) \neq 0$, et avec $(a, b) \neq 0 \in \mathrm{Br}(k)$. La fibration $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ n'est pas birationnellement équivalente sur $\mathbb{P}^1_k$ à une fibration associée à une intersection complète lisse de deux quadriques dans $\mathbb{P}^5_k$ possédant un point rationnel.

Démonstration. Comme le polynôme $u.p(u)$ a un zéro, la courbe Δ possède un point rationnel. On a donc $(a, b) \neq 0 \in \mathrm{Br}(\Delta) \subset \mathrm{Br}(k(\Delta))$. L'équivalence entre (ii) et (iii) dans la proposition 12.1 permet de conclure. □

13. Corps de nombres et corps p-adiques

Soit $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ la fibration en surfaces quadriques donnée par l'équation affine

$$x^2 + y^2 + z^2 = u(u^2 + 1).$$

Le polynôme $p(u) = u^2+1$ est une somme de 2 carrés dans $\mathbb{Q}[u]$. D'après la preuve du théorème 5.1, la fonction $r(u, v)$ est une somme de 3 carrés dans $\mathbb{Q}(\sqrt{3})(u, v)$. D'après le théorème 3.5, on a donc que pour $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ la k-variété X d'équation affine $x^2 + y^2 + z^2 = u(u^2 + 1)$ est universellement CH_0-triviale.

En général, on ne peut pas espérer étendre les résultats de CH_0-trivialité sur $\mathbb{R}$ aux corps de nombres et corps p-adiques. Soit k un corps de caractéristique différente de 2. Soit X une k-variété projective et lisse munie d'un morphisme plat $\pi : X \to \mathbb{P}^1_k$ dont la fibre générique est une surface quadrique lisse. Supposons $X(k) \neq \emptyset$. Pour tout surcorps L de k, le groupe $A_0(X)$ est d'exposant 2. Soit k un corps de nombres. Notons k_v le complété de k en une place v et $X_v := X \times_k k_v$. Pour

v place complexe, $A_0(X_v)=0$. Pour v place réelle, on a $A_0(X_v)=(\mathbb{Z}/2)^{s_v-1}$, où s_v est le nombre de composantes connexes de l'espace topologique $X_v(k_v)$ [CTI81]. Pour presque toute place finie v, on a $A_0(X_v)=0$ ([CTSk93, Thm. 6.2 (vi)] et [PS95, Thm. 5.3]).

On a un complexe naturel de groupes abéliens finis

$$A_0(X)\to \oplus A_0(X_{k_v})\to \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k),\mathbb{Q}/\mathbb{Z}),$$

où les accouplements

$$A_0(X_{k_v})\times \mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

sont donnés par l'évaluation. Pour X une fibration en quadriques sur $\mathbb{P}^1_k$, ce complexe est une suite exacte (Wittenberg, [W12, Cor. 1.7]).

Théorème 13.1. *Soient k un corps de nombres et $\pi : X\to \mathbb{P}^1_k$ une fibration en surfaces quadriques de type (I) satisfaisant $X(k)\neq\emptyset$. On a un isomorphisme de groupes abéliens finis de 2-torsion*

$$A_0(X)\simeq \oplus_v A_0(X_v).$$

Démonstration. Pour une fibration de type (I), on a $\mathrm{Br}(X)/\mathrm{Br}(k)=0$. L'application diagonale

$$A_0(X)\to \oplus A_0(X_{k_v})$$

est donc surjective. Avec les notations de la section 2.2, on a les injections

$$A_0(X)\hookrightarrow k(\Delta)^\times_{dn}/k^\times.N_D(k(\Delta))$$
$$A_0(X_v)\hookrightarrow k_v(\Delta)^\times_{dn}/k_v^\times.N_D(k_v(\Delta))$$

On a les injections

$$k(\Delta)^\times/N_D(k(\Delta))\hookrightarrow H^3(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)$$
$$k_v(\Delta)^\times/N_D(k(\Delta_v))\hookrightarrow H^3(k_v(\Delta),\mathbb{Z}/2)$$

On a donc les injections

$$k(\Delta)^\times_{dn}/N_D(k(\Delta))\hookrightarrow H^3_{nr}(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)$$
$$k_v(\Delta)^\times_{dn}/N_D(k(\Delta_v))\hookrightarrow H^3_{nr}(k_v(\Delta),\mathbb{Z}/2).$$

D'après Kato [K86], pour presque toute place v, le groupe $H^3_{nr}(k_v(\Delta),\mathbb{Z}/2)$ est nul. Il en est de même pour les groupes $A_0(X_v)$. Soit S l'ensemble fini des places v avec $A_0(X_v)\neq 0$. D'après Kato [K86] l'application diagonale

$$H^3(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)\to\prod_v H^3(k_v(\Delta),\mathbb{Z}/2)$$

est injective. Il est en donc de même de

$$H^3_{nr}(k(\Delta),\mathbb{Z}/2)\to\prod_{v\in S} H^3_{nr}(k_v(\Delta),\mathbb{Z}/2).$$

On a des suites exactes évidentes et compatibles avec les applications diagonales :

$$k^\times\to k(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta))\to k(\Delta)^\times_{nr}/k^\times.N_D(k(\Delta))\to 1$$
$$\prod_{v\in S}k_v^\times\to\prod_{v\in S}k_v(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta_v))\to\prod_{v\in S}k_v(\Delta)^\times_{nr}/k_v^\times.N_D(k(\Delta_v))\to 1.$$

Soit $\xi\in A_0(X)$ d'image $\xi_0\in k(\Delta)^\times_{nr}/k^\times.N_D(k(\Delta))$ et d'image nulle dans tous les $A_0(X_v)$. Relevons ξ_0 en $\xi_1\in k(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta))$. Comme l'image de ξ dans les groupes $A_0(X_v)$ est nulle, pour chaque $v\in S$, il existe $\lambda_v\in k_v^\times$ d'image $\xi_{1,v}\in$

$k_v(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta))$. Par approximation faible aux places de S, on trouve $\lambda \in k^\times$ tel que $\xi_0/\lambda \in k(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta))$ ait une image nulle par passage aux complétés k_v pour $v \in S$. Ceci implique

$$\xi_0/\lambda = 1 \in k(\Delta)^\times_{nr}/N_D(k(\Delta))$$

et donc $\xi = 0 \in A_0(X)$. □

Ainsi, s'il existe une place v telle que le groupe $A_0(X_{k_v})$ n'est pas trivial, alors $A_0(X) \neq 0$. En particulier, c'est le cas dans l'exemple qui suit.

Dans [PS95, Proposition 6.2, p.108] Parimala et Suresh montrent que pour la famille $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}_3}$ d'équation affine

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = 3u(u+2)(u+3)$$

le groupe $A_0(X)$ n'est pas nul. En multipliant cette équation par 9 et en faisant un changement de variables, on voit que la variété X est isomorphe à la variété d'équation affine

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = u(u+6)(u+9).$$

Par approximation faible, on trouve un polynôme $p(u) \in \mathbb{Q}[u]$ de degré 2 proche de $(u+6)(u+9) \in \mathbb{Q}_3[u]$ et de $u^2+1 \in \mathbb{R}[u]$. On obtient ainsi un exemple de fibré en surfaces quadriques $X \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Q}}$ de type (I) d'équation affine

$$x^2 + y^2 + 3z^2 = u.p(u)$$

avec $A_0(X_{\mathbb{R}}) = 0$, $A_0(X_{\mathbb{Q}_3}) \neq 0$ et $A_0(X) \neq 0$.

Notons que dans cet exemple sur $\mathbb{Q}_3$, la condition

$$((u+6)(u+9), -1, -3) = 0$$

du théorème 3.5 n'est pas satisfaite, comme on voit par résidu $(-1,-3)_{\mathbb{Q}_3} \neq 0$.

Références

[Ar75] Jón Kr. Arason, Cohomologische Invarianten quadratischer Formen J. Algebra **36** (1975), no. 3, 448–491. 6, 7

[AP75] J. K. Arason und A. Pfister : Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring, Invent. math. **12** (1971), 173–176. 7

[ACTP17] A. Auel, J.-L. Colliot-Thélène, R. Parimala, Universal unramified cohomology of cubic fourfolds containing a plane, in *Brauer groups and obstruction problems* Progr. Math. **320** Birkhäuser/Springer, Cham, 2017, p. 29–55. 1, 2

[BW20] O. Benoist and O. Wittenberg, The Clemens-Griffiths method over non-closed fields. Algebr. Geom. **7** (2020), no.6, 696–721. 2, 3, 17

[BW20a] O. Benoist and O. Wittenberg, On the integral Hodge conjecture for real varieties, I. Invent. math. **222** (2020), no.1, 1–77. 17

[BW20b] O. Benoist and O. Wittenberg, On the integral Hodge conjecture for real varieties, II. Journal de l'École Polytechnique **7** (2020) 373–429. 17

[BW21] O. Benoist and O. Wittenberg, Intermediate Jacobians and rationality over arbitrary fields, Ann. Sc. Éc. Norm. Supér., (4) **56** (2023), no.4, 1029–1084 37, 38

[BO74] S. Bloch and A. Ogus, Gersten's conjecture and the homology of schemes, Ann. Sc. Éc. Norm. Supér., (4) **7** (1974), 181–201. 24

[CT95] J.-L. Colliot-Thélène, Birational invariants, purity and the Gersten conjecture, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa Barbara, CA, 1992), 1–64. Proc. Sympos. Pure Math., **58**, Part 1 American Mathematical Society, Providence, RI, 1995. 2, 35

[CT23] J.-L. Colliot-Thélène, Retour sur l'arithmétique des intersections de deux quadriques, avec un appendice par A. Kuznetsov, J. reine angew. Math. **806** (2024), 147–185. 5, 37, 38

[CT19] J.-L. Colliot-Thélène, Non rationalité stable sur les corps quelconques, in Birational Geometry of Hypersurfaces, Gargnano del Garda, Italie, 2018, A. Hochenegger, M. Lehn, P. Stellari ed., Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana, Springer LNM 2019. 2

[CTI81] J.-L. Colliot-Thélène et F. Ischebeck, L'équivalence rationnelle sur les cycles de dimension zéro des variétés algébriques réelles, C. R. Acad. Sc. Paris t. **292**, Série I (1981) 723–725. 2, 34, 39

[CTP90] J.-L. Colliot-Thélène and R. Parimala, Real components of algebraic varieties and étale cohomology, Invent. math. **101** (1) 8–99, 1990. 1, 2

[CTSk93] J.-L. Colliot-Thélène et A.N. Skorobogatov, Groupes de Chow des zéro-cycles des fibrés en quadriques, Journal of K-theory **7** (1993) 477–500. 2, 4, 5, 8, 9, 34, 35, 39

[CTSD94] J.-L. Colliot-Thélène and Sir Peter Swinnerton-Dyer, Hasse principle and weak approximation for pencils of Severi-Brauer and similar varieties, J. reine angew. Math. **453** (1994) 49–112. 3, 34

[CTP16] J.-L. Colliot-Thélène et A. Pirutka, Hypersurfaces quartiques de dimension 3 : non-rationalité stable, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) **49** (2016), no.2, 371–397. 2

[CTSk21] J.-L. Colliot-Thélène and A.N. Skorobogatov, The Brauer–Grothendieck group, Ergeb. Math. Grenzgeb. (3), **71** [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematic] Springer, Cham, 2021. 18, 35

[Co12] A. Comessatti, Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale, Math. Ann. **73** (1912), no.1, 1–72. 2

[Ek90] T. Ekedhal, An effective version of Hilbert's irreducibility theorem, Séminaire de théorie des nombres de Paris 1988-1989, Progress in Mathematics, Vol. **91**, Birkhäuser, 1990, 241–249. 26

[FJSVV22] S. Frei, L. Ji, S. Sankar, B. Viray, and I. Vogt, Curve classes on conic bundle threefolds and applications to rationality, à paraître dans Algebraic Geom. 2

[G64] W.-D. Geyer, Ein algebraischer Beweis des Satzes von Weichhold über reelle algebraische Funktionenkörper, in *Algebraische Zahlentheorie*, Herausgegeben von H. Hasse und P. Roquette, Berichte aus dem Mathematischen Forschunsinstitut Oberwolfach, Heft **2**, Bibliographisches Institut, Mannheim, Hochschultaschenbücher-Verlag, 1966, S. 83–98. 15

[GH81] B. H. Gross and J. Harris, Real algebraic curves, Ann. Sc. Éc. Norm. Supér., 4ème série t. **14**, no. 2 (1981) 157–182. 15

[HT21] B. Hassett and Yu. Tschinkel, Rationality of complete intersections of two quadrics over nonclosed fields, L'Enseignement mathématique **67** (2021) no. 1–2, 1–44. With an appendix by Jean-Louis Colliot-Thélène. 2, 3

[JJ24] L. Ji and M. Ji, Rationality of real conic bundles with quartic discriminant curve, Int. Math. Res. Not. **1** (2024), 115–151. 2

[Kahn08] B. Kahn, Formes quadratiques sur un corps, Cours Spéc., **15** Société Mathématique de France, Paris, 2008 7

[KRS98] B Kahn, M. Rost, R. Sujatha, Unramified cohomology of quadrics. I, Amer. J. Math. **120** (1998), no. 4, 841–891. 7

[K86] K. Kato, A Hasse principle for two-dimensional global fields, J. reine angew. Math. **366** (1986) 142–181. 39

[Lam73] T.Y. Lam, The algebraic theory of quadratic forms, Math. Lecture Note Ser. W. A. Benjamin, Inc., Reading, MA, 1973 11, 18, 20

[LMFDB] The LMFDB Collaboration, The L-functions and modular forms database, https ://www.lmfdb.org, 2024, [Online ; accessed 8 April 2024]. 32

[MS82] A. S. Merkur'ev and A. A. Suslin, *K-когомологии многообразий Севери-Брауэра и гомоморфизм норменного вычета* (K-cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism), Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **46** (1982), no. 5, 1011–1046, 1135–1136. 6, 7

[Mer08] A. S. Merkurjev, Unramified elements in cycle modules, J. London Math. Soc. (2) **78** (2008) no. 1, 51–64. 14, 15

[PS95] R. Parimala and V. Suresh, Zero-cycles on quadric fibrations : Finiteness and the cycle map, Inv. math. **122** (1995) 83–117. 39, 40

[R96] M. Rost, Chow groups with coefficients, Doc. Math. **1** (1996), No. 16, 319–393. 24, 27, 29

[Sil89] R. Silhol, Real Algebraic Surfaces, Springer LNM **1392** (1989). 34

[S92] J. H. Silverman, The arithmetic of elliptic curves, Grad. Texts in Math., **106** Springer-Verlag, New York, 1992. 30, 32

[S94] J. H. Silverman, Advanced topics in the arithmetic of elliptic curves, Grad. Texts in Math., **151** Springer-Verlag, New York, 1994. 30, 31

[Sk90] A. N. Skorobogatov, Arithmetic on certain quadric bundles of relative dimension 2. I. J. reine angew. Math. **407** (1990), 57–74. 2, 3, 8, 34, 35

[W34] E. Witt, Zerlegung reeller algebraischer Funktionen in Quadrate. Schiefkörper über reellem Funktionenkörper, J. reine angew. Math. **171** (1934), 4–11. Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998, 81–88. 15, 33

[W37] E. Witt, Theorie der quadratischen Formen in beliebigen Körpern, J. reine angew. Math. **176** (1937), 31–44. Gesammelte Abhandlungen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1998, 2–15. 33

[W12] O. Wittenberg, Zéro-cycles sur les fibrations au-dessus d'une courbe de genre quelconque, Duke Mathematical Journal **161** no. 11 (2012) 2113–2166. 39

[Z00] Yu. G. Zarhin, Hyperelliptic jacobians without complex multiplication. Mathematical Research Letters **7**, 123–132 (2000). 26

[Z24] Yu. G. Zarhin, Odd and even elliptic curves with complex multiplication. `arXiv : 2406.07240`, prépublication (2024). 29, 30

Université Paris-Saclay, CNRS, Laboratoire de mathématiques d'Orsay, 91405, Orsay, France.

E-mail address: `jean-louis.colliot-thelene@universite-paris-saclay.fr`

Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 10012, U.S.A.

E-mail address: `pirutka@cims.nyu.edu`