

Un théorème de finitude pour le groupe de Chow des zéro-cycles d'un groupe algébrique linéaire sur un corps p -adique

Jean-Louis COLLIOT-THÉLÈNE

Zusammenfassung Sei X eine glatte Kompaktifizierung einer zusammenhängenden linearen Gruppe über einem Körper k . Die Chowgruppe der nulldimensionalen Zyklen von X vom Grad Null ist eine Torsionsgruppe. Wir zeigen : wenn k ein p -adischer Körper ist, dann ist der prim-zu- p Anteil dieser Gruppe endlich.

Soit X une variété projective, lisse, géométriquement irréductible sur un corps k . On note $CH_0(X)$ le groupe de Chow des zéro-cycles modulo l'équivalence rationnelle, et on note $A_0(X) \subset CH_0(X)$ le groupe de Chow réduit des zéro-cycles, qui est le sous-groupe formé des classes de zéro-cycles de degré zéro.

Si X est une variété rationnelle (c'est-à-dire birationnelle à un espace projectif après extension du corps de base), ou plus généralement si X est une variété rationnellement connexe (au sens de Kollár, Miyaoka et Mori), alors le groupe $A_0(X)$ est un groupe de torsion, d'exposant fini. Si de plus k est un corps p -adique, par quoi l'on entend dans tout cet article une extension finie du corps \mathbf{Q}_p des nombres p -adiques, on conjecture ([CT95], [KoSz03]) que le groupe $A_0(X)$ est fini. Le but du présent article est d'établir un cas particulier de cette conjecture.

Théorème. Soient k un corps p -adique, G un k -groupe linéaire connexe et X une k -compactification lisse de G , c'est-à-dire une k -variété projective lisse contenant G comme ouvert dense. Le groupe $A_0(X)$ est la somme d'un groupe fini et d'un groupe de torsion p -primaire d'exposant fini.

Au paragraphe 1, on donne une variante (Théorème 3) du calcul, dû à P. Gille [Gi97] et à Borovoi et Kunyavskii [BoKu04], de la R -équivalence sur le groupe $G(k)$ des points k -rationnels de G . C'est un point essentiel pour la démonstration. Au paragraphe 2, on donne deux lemmes sur les extensions de corps p -adiques. La démonstration du théorème est donnée au paragraphe 3. C'est la présence possible de ramification sauvage qui empêche de contrôler la partie p -primaire du groupe $A_0(X)$. Au paragraphe 4, on donne une minoration du groupe $A_0(X)$, qui assure en particulier que ce groupe n'est pas toujours nul. On donne des cas (G simplement connexe ou adjoint) où $A_0(X) = 0$. Au paragraphe 5, on rappelle ce qui est connu sur la conjecture générale mentionnée ci-dessus.

§1. Résolutions flasques des groupes réductifs et R -équivalence

Commençons par quelques rappels ([CTSa77], [Vo77], [Vo98]). Soient k un corps, \bar{k} une clôture séparable et $\mathfrak{g} = \text{Gal}(\bar{k}/k)$. Un k -groupe de type multiplicatif (resp. un k -tore) est un k -groupe algébrique linéaire qui, sur \bar{k} , se plonge dans (resp. est isomorphe à) un produit de groupes multiplicatifs \mathbf{G}_m . Pour tout entier $n > 0$, on note $\mu_n \subset \mathbf{G}_m$ le groupe des racines n -ièmes de l'unité. A tout k -groupe de type multiplicatif M on associe deux modules galoisiens de type fini (groupes abéliens de type fini équipés d'une action continue discrète de \mathfrak{g}), le groupe des caractères $X^*(M) = \text{Hom}(M, \mathbf{G}_m)$ (sur \bar{k}) de M et le groupe des cocaractères $X_*(M) = \text{Hom}(\mathbf{G}_m, M)$ (sur \bar{k}) de M . Le k -groupe de type multiplicatif M est un k -tore si et seulement si le groupe abélien $X^*(M)$ est sans torsion. Un k -tore T est dit *quasi-trivial* si le module galoisien $X^*(T)$ (ou, de façon équivalente, $X_*(T)$) est un \mathfrak{g} -module de permutation, c'est-à-dire qu'il possède une base sur \mathbb{Z} respectée par \mathfrak{g} . Un tel k -tore est un produit de restrictions à la Weil $R_{k_i/k} \mathbf{G}_m$, pour certaines extensions finies de corps k_i/k . Un k -tore T est dit *flasque* si pour tout sous-groupe ouvert $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, le groupe de cohomologie $H^1(\mathfrak{h}, X_*(T))$ est nul. Un k -tore quasi-trivial est flasque. La cohomologie utilisée dans cet article est la cohomologie galoisienne

([Se94]). Si X est une variété sur un corps k , par quoi l'on entend un k -schéma séparé de type fini, et si K est un corps contenant k , on note X_K la K -variété $X \times_k K$. Si T est un k -tore quasi-trivial, resp. flasque, pour toute extension de corps K/k le K -tore T_K est quasi-trivial, resp. flasque.

Les deux énoncés rassemblés dans la proposition suivante sont essentiellement dus à S. Endo et T. Miyata [EnMi74]. Rappelons qu'une extension galoisienne finie de corps est dite métacyclique si tout sous-groupe de Sylow de son groupe de Galois est cyclique.

Proposition 1. (i) *Etant donné un k -groupe de type multiplicatif M , il existe une suite exacte de k -groupes de type multiplicatif*

$$1 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow 1$$

avec S un k -tore flasque et P un k -tore quasi-trivial. Si M est déployé par une extension K/k , on peut choisir S et P déployés par cette extension.

(ii) *Si un k -tore flasque S est déployé par une extension métacyclique K/k , alors il existe un k -tore S_1 tel que $S \times_k S_1$ soit un k -tore quasi-trivial. En particulier $H^1(k, S) = 0$.*

Références. Pour (i), voir [CTSa87], Lemma 0.6. Pour (ii), voir [CTSa77], Prop. 2 p. 184 ou [Vo98], 4.8, Thm. 3 p. 55. \square

Proposition 2. *Soient k un corps de caractéristique zéro et G un k -groupe réductif connexe. Il existe une suite exacte de k -groupes algébriques réductifs connexes*

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

dans laquelle S est un k -tore flasque, sous-groupe central dans le groupe H , et le groupe H est une extension d'un k -tore quasi-trivial par un k -groupe semi-simple simplement connexe.

Démonstration. Soit $G' \subset G$ le groupe dérivé de G . C'est un k -groupe semi-simple. Soit G^{sc} le revêtement simplement connexe de G' . Soit $T \subset G$ le radical de G , c'est-à-dire la composante neutre du centre de G . C'est un k -tore. Soit $Q \rightarrow T$ un k -homomorphisme d'un k -tore quasi-trivial Q sur T (on peut par exemple trouver un tel homomorphisme de noyau un k -tore). On dispose alors de l'homomorphisme de k -groupes algébriques $G^{sc} \times_k Q \rightarrow G$ obtenu par composition. On vérifie que le noyau de cet homomorphisme est un k -groupe de type multiplicatif M , central dans $G^{sc} \times_k Q$. Soit

$$1 \rightarrow M \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow 1$$

une suite exacte de k -groupes de types multiplicatifs donnée par la Proposition 1 (i). Soit H le conoyau de la flèche diagonale $M \rightarrow (G^{sc} \times_k Q) \times_k S$. On dispose alors de la suite exacte de k -groupes

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

avec S central dans H , et d'une suite exacte de k -groupes

$$1 \rightarrow G^{sc} \times_k Q \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow 1.$$

Le groupe dérivé de H est le groupe G^{sc} , qui est simplement connexe, et le quotient de H par ce k -sous-groupe normal est un k -tore extension du k -tore quasi-trivial P par le k -tore quasi-trivial Q . Comme toute extension de tels k -tores est scindée (ce qu'on voit aisément sur les suites duales de caractères), ce quotient est isomorphe au k -tore quasi-trivial $P \times_k Q$. \square

Définition. Une suite exacte de k -groupes algébriques réductifs connexes

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

avec H extension d'un k -tore quasi-trivial par un k -groupe semi-simple simplement connexe, et S un k -tore flasque central dans H , est appelée une **résolution flasque** du k -groupe réductif connexe G .

Il y a pour ces résolutions flasques des propriétés de presque unicité analogues à celles connues dans le cas où G est un k -tore ([CTSa77], [Vo77], [Vo98]). Ceci fera l'objet d'un exposé séparé (voir l'annonce [CT04]). Pour toute extension de corps K/k , la suite associée $1 \rightarrow S_K \rightarrow H_K \rightarrow G_K \rightarrow 1$ est une résolution flasque de G_K .

Rappelons la définition de la R -équivalence sur les k -points d'une variété algébrique X définie sur un corps k . C'est la relation d'équivalence engendrée par la relation élémentaire suivante : deux k -points A et B de $X(k)$ sont liés s'il existe un k -morphisme $f : U \rightarrow X$ d'un ouvert U de la droite projective \mathbf{P}_k^1 vers X tel que A et B appartiennent à $f(U(k))$. Si X est projective, on peut prendre $U = \mathbf{P}_k^1$ dans cette définition. Si X est projective, et A et B sont deux k -points R -équivalents, le zéro-cycle $A - B$ est rationnellement équivalent à zéro sur X .

Soit G un k -groupe algébrique. La structure de groupe sur $G(k)$ induit une structure de groupe sur $G(k)/R$. On renvoie à [CTSa77] et [Gi97] pour plus de détails.

On peut, de diverses façons, établir la finitude du quotient $G(k)/R$ pour G un k -groupe linéaire connexe sur un corps p -adique. Mais pour établir le théorème principal du présent article nous aurons besoin de la valeur précise du groupe $G(k)/R$, donnée par l'énoncé suivant, qui est une variante d'un résultat de P. Gille ([Gi97], III.2.7) et de Borovoi et Kunyavskii ([BoKu04], Thm. 4.8).

Théorème 3. Soit k un corps p -adique, et soit

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

une résolution flasque d'un k -groupe réductif connexe G . L'application bord $G(k) \rightarrow H^1(k, S)$ déduite de cette suite induit un isomorphisme de groupes abéliens finis $G(k)/R \xrightarrow{\sim} H^1(k, S)$.

Démonstration. Sur un corps k quelconque, une suite exacte de k -groupes algébriques

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

comme ci-dessus induit ([Se94], I, §5) une suite exacte de groupes

$$H(k) \rightarrow G(k) \rightarrow H^1(k, S),$$

et l'image de l'application $G(k) \rightarrow H^1(k, S)$ coïncide avec l'ensemble des éléments de $H^1(k, S)$ d'image la classe triviale dans l'ensemble $H^1(k, H)$. Deux points $\alpha, \beta \in G(k)$ ont même image dans $H^1(k, S)$ si et seulement si $\alpha.\beta^{-1} \in G(k)$ est l'image d'un élément de $H(k)$. Lorsque le k -tore S est flasque, l'homomorphisme $\delta : G(k) \rightarrow H^1(k, S)$ passe au quotient par la R -équivalence ([CTSa77], Prop. 12 p. 198), on obtient un homomorphisme $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$.

Pour établir que, sur un corps p -adique, l'homomorphisme $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est un isomorphisme, il suffit de démontrer que sur un tel corps le groupe H satisfait les deux propriétés suivantes :

- (i) On a $H^1(k, H) = 1$, en d'autres termes tout espace principal homogène sous H (sur k) est trivial.
- (ii) Le quotient $H(k)/R$ est réduit à un élément.

Le groupe H s'insère dans une suite exacte

$$1 \rightarrow H' \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow 1,$$

où H' (groupe dérivé de H) est un k -groupe semi-simple simplement connexe et où P est un k -tore quasi-trivial. Cette suite induit une suite exacte d'ensembles pointés ([Se94], I, §5.5)

$$H^1(k, H') \rightarrow H^1(k, H) \rightarrow H^1(k, P).$$

Le groupe $H^1(k, P)$ est trivial (théorème 90 de Hilbert). Le corps k étant p -adique et le groupe H' semi-simple simplement connexe, l'ensemble $H^1(k, H')$ est réduit à un élément (théorème de Kneser). Ainsi $H^1(k, H) = 1$, ce qui établit le point (i).

Le groupe H' étant simplement connexe et le corps k p -adique, on sait que le quotient $H'(k)/R$ est réduit à un élément (Voskresenskiï, 1979, voir [Vo98], 18.5, Thm. 1; pour un énoncé sur des corps plus généraux, rassemblant les résultats de nombreux autres auteurs, voir [CTGiPa04], Thm. 4.5). Comme le k -tore quasi-trivial P est un ouvert d'un espace affine, on a $P(k)/R = 1$. D'après le Théorème 1 de l'appendice de P. Gille à [BoKu04], dans la situation ci-dessus (k corps p -adique, H' simplement connexe), la suite exacte de k -groupes algébriques $1 \rightarrow H' \rightarrow H \rightarrow P \rightarrow 1$ induit une suite exacte de groupes

$$H'(k)/R \rightarrow H(k)/R \rightarrow P(k)/R.$$

On a donc $H(k)/R = 1$, ce qui établit le point (ii). \square

Remarque. La démonstration du Théorème III.2.7 dans [Gi97] repose sur le Lemme III.2.8, spécifique aux corps p -adiques, dont la démonstration est incorrecte mais peut être corrigée. Le théorème III.2.7 de [Gi97] vaut en fait sur des corps plus généraux : voir [CTGiPa04], Thm. 4.9, qui utilise le Théorème 6, p. 308 de [Gi01], indépendant de [Gi97]. La démonstration du résultat de l'appendice de [BoKu04], invoquée à la fin de la démonstration ci-dessus, repose aussi uniquement sur [Gi01]. Ainsi le Théorème 3 vaut sur tout corps k satisfaisant les hypothèses des Théorèmes 1.2 et 4.5 de [CTGiPa04] : le corps k est de caractéristique nulle, de dimension cohomologique au plus 2, sur toute extension finie de k exposant et indice des algèbres simples centrales coïncident, et la dimension cohomologique de l'extension abélienne maximale de k est au plus 1 (cette dernière hypothèse n'étant utilisée que lorsqu'il y a des facteurs de type E_8).

Proposition 4. Soient k un corps p -adique, G un k -groupe réductif connexe, et $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ une résolution flasque de G . Soit K/k l'extension finie galoisienne qui déploie le k -tore S . Soit F/k une extension finie. Si le composé KF/F est cyclique, alors $G_F(F)/R = 1$.

Démonstration. L'énoncé résulte immédiatement de la Proposition 1 (ii) et du Théorème 3, qui donne un isomorphisme fonctoriel en le corps de base. \square

Lemme 5. Soient k un corps p -adique, T un k -tore et L/k une extension finie de corps, de degré premier au degré du corps K de déploiement de T . Alors l'application de restriction $H^1(k, T) \rightarrow H^1(L, T)$ est un isomorphisme.

Démonstration. Soit g le groupe de Galois de l'extension K/k . On a la suite exacte de restriction-inflation

$$0 \rightarrow H^1(g, T(K)) \rightarrow H^1(k, T) \rightarrow H^1(K, T).$$

Comme T_K est un K -tore déployé, on a $H^1(K, T) = 0$ (théorème 90 de Hilbert). Ainsi $H^1(k, T) = H^1(g, T(K)) = H^1(g, X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*)$, et le groupe $H^1(k, T)$ est annulé par l'ordre de g , c'est-à-dire par le degré $[K : k]$ de K sur k . Comme les degrés des extensions

K/k et L/k sont premiers entre eux, le composé $M = KL$ de l'extension galoisienne K/k et de L/k est une extension galoisienne de L de degré $[K : k]$, de groupe g . L'inclusion $K^* \hookrightarrow M^*$ et la norme $M^* \rightarrow K^*$ sont g -équivariantes. Leur composé est l'élévation à la puissance $[M : K] = [L : k]$. La restriction $H^1(k, T) \rightarrow H^1(L, T)$ s'identifie à la flèche $H^1(g, X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*) \rightarrow H^1(g, X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} M^*)$ induite par l'inclusion $K^* \hookrightarrow M^*$. La composition avec l'application $H^1(g, X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} M^*) \rightarrow H^1(g, X_*(T) \otimes_{\mathbb{Z}} K^*)$ induite par la norme est la multiplication par $[L : k]$. Ainsi le noyau de la restriction $H^1(k, T) \rightarrow H^1(L, T)$ est-il annulé par $[L : k]$. Comme $[K : k]$ et $[L : k]$ sont premiers entre eux, on conclut que la restriction $H^1(k, T) \rightarrow H^1(L, T)$ est injective. (Cette première partie de la démonstration vaut sur un corps quelconque; il s'agit, dans le présent contexte, d'une démonstration détaillée, requise par le rapporteur, de la formule générale $\text{Cores}_{L/k} \circ \text{Res}_{k/L} = [L : k]$.)

Rappelons que $X^*(T)$ désigne le groupe des caractères du k -tore T . Si k est un corps p -adique, le cup-produit induit une dualité parfaite de groupes finis $H^1(k, T) \times H^1(k, X^*(T)) \rightarrow \text{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ([Se94], II. §5.8, Théorème 6). On a de même une dualité parfaite de groupes finis $H^1(L, T) \times H^1(L, X^*(T)) \rightarrow \text{Br}(L) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Les suites de restriction-inflation montrent que les flèches $H^1(\text{Gal}(K/k), X^*(T)) \rightarrow H^1(k, X^*(T))$ et $H^1(\text{Gal}(M/L), X^*(T)) \rightarrow H^1(L, X^*(T))$ sont des isomorphismes. L'application de restriction $H^1(k, X^*(T)) \rightarrow H^1(L, X^*(T))$ s'identifie donc à l'identité $H^1(g, X^*(T)) = H^1(g, X^*(T))$, c'est un isomorphisme. En particulier ces deux groupes ont même ordre. Ainsi la restriction $H^1(k, T) \rightarrow H^1(L, T)$ est une injection de groupes finis de même ordre, c'est donc un isomorphisme. \square

Proposition 6. *Soient k un corps p -adique, G un k -groupe réductif connexe, et $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ une résolution flasque de G . Soit K/k l'extension finie galoisienne qui déploie le k -tore S . Supposons que le degré $[K : k]$ soit une puissance d'un nombre premier l . Pour $F/E/k$ des extensions finies de corps avec $[F : E]$ premier à l , l'homomorphisme de restriction $G_E(E)/R \rightarrow G_F(F)/R$ est un isomorphisme de groupes finis.*

Démonstration. L'énoncé résulte immédiatement du Lemme 5 et du Théorème 3, qui donne un isomorphisme fonctoriel en le corps de base. \square

§2. Deux lemmes sur les extensions de corps p -adiques

Soit K/k une extension galoisienne de corps p -adiques, de degré l^n , avec $(l, p) = 1$. Soit $E \subset K$ la sous-extension maximale non ramifiée de K/k . Soit $[E : k] = l^a$ et $[K : E] = l^b$ (ainsi l^b est l'indice de ramification de K sur k). L'extension E/k est cyclique. Comme l est différent de p , l'extension d'inertie K/E est aussi cyclique. L'hypothèse $l \neq p$ est ainsi indispensable dans le lemme suivant, et c'est la raison principale pour laquelle on n'obtient pas la finitude de la partie p -primaire du groupe de Chow dans le théorème principal.

Lemme 7. *Soient k un corps p -adique, l un nombre premier différent de p , puis K/k une extension finie galoisienne de degré l^n . Soit F/k une extension finie. Si l^n divise $[F : k]$, alors le composé KF de K et F est une extension cyclique de F .*

Démonstration. Soit M/k la sous-extension maximale non ramifiée de F/k . L'hypothèse implique que l'on a au moins l'une des deux propriétés : l^a divise $[M : k]$ ou l^b divise $[F : M]$.

Si l^a divise $[M : k]$, on a $E \subset M$, et le composé de K et F sur k est le composé de l'extension cyclique K/E et de l'extension F/E , c'est donc une extension cyclique de F .

Supposons que l^b divise $[F : M]$. Montrons que l'extension KF/F est alors non ramifiée (ce à quoi l'on s'attend selon le principe : *la ramification avale la ramification*). Soient π_k, π_K, π_F des uniformisantes de k, K, F . On peut écrire $\pi_k = u \cdot \pi_K^{l^b}$ avec u unité dans K , et $\pi_k = v \cdot \pi_F^{m \cdot l^b}$, avec v unité dans F et m entier. Comme les extensions K/E et F/M sont totalement ramifiées, et

que l est premier à p , les flèches naturelles d'inclusion d'unités $O_E^* \subset O_K^*$ et $O_M^* \subset O_F^*$ induisent des isomorphismes $O_E^*/(O_E^*)^{l^t} \xrightarrow{\sim} O_K^*/(O_K^*)^{l^t}$ et $O_M^*/(O_M^*)^{l^t} \xrightarrow{\sim} O_F^*/(O_F^*)^{l^t}$ pour tout entier $t \geq 1$.

Quitte à changer d'uniformisante pour K on peut donc supposer $u \in O_E^*$. Par ailleurs on peut écrire $v = w.z^{l^b}$ avec $w \in O_M^*$ et $z \in O_F^*$. On a donc $\pi_k = w.(z.\pi_F^m)^{l^b}$. De ces équations on tire

$$(\pi_K.(z.\pi_F^m)^{-1})^{l^b} = w.u^{-1}.$$

Comme l est premier à p , et que w et u sont dans des extensions non ramifiées de k , il existe une extension non ramifiée de k , contenant E , qui contient $\pi_K.(z.\pi_F^m)^{-1}$. Ainsi π_K appartient au composé de cette extension non ramifiée et de F , l'élément π_K de KF appartient à une extension non ramifiée de EF .

Comme π_K engendre K sur E (solution d'une équation d'Eisenstein), KF est une extension non ramifiée de EF , donc de F . L'extension de corps locaux KF/F étant non ramifiée, elle est cyclique. \square

Lemme 8. *Soient k un corps p -adique et $l \neq p$ un nombre premier. Supposons que k contient les racines l -ièmes de l'unité. Soit F/k une extension finie de corps. Soit l^n la plus grande puissance de l divisant le degré $[F : k]$. Il existe alors une sous-extension L/k de F/k telle que $[L : k] = l^n$, et donc $([F : L], l) = 1$.*

Démonstration. Soit E/k la sous-extension maximale non ramifiée de F/k et soit $N \subset E$ la sous-extension maximale non ramifiée de F/k de degré une puissance de l , soit l^a . L'extension E/N est de degré premier à l . L'inclusion $\kappa_N \subset \kappa_E$ de leurs corps résiduels induit, pour tout entier $t \geq 1$, une inclusion $\kappa_N^*/\kappa_N^{*l^t} \hookrightarrow \kappa_E^*/\kappa_E^{*l^t}$. L'ordre du premier quotient est le même que celui de $\mu_{l^t}(\kappa_N)$, et celui du deuxième quotient est le même que celui de $\mu_{l^t}(\kappa_E)$. L'inclusion $\mu_{l^t}(\kappa_N) \subset \mu_{l^t}(\kappa_E)$ est un isomorphisme; en effet, s'il existait ζ dans le second groupe non dans le premier, la sous-extension $\kappa_N(\zeta)/\kappa_N$ de κ_E/κ_N serait de degré une puissance de l (car l'hypothèse sur k implique que le corps résiduel de k contient les racines l -ièmes de l'unité), et ceci n'est pas possible puisque le degré de κ_E/κ_N est égal à celui de E/N , donc est premier à l . Ainsi l'inclusion $\kappa_N^*/\kappa_N^{*l^t} \hookrightarrow \kappa_E^*/\kappa_E^{*l^t}$ est un isomorphisme. Les corps résiduels de E et F coïncident. En utilisant le lemme de Hensel, on voit alors que pour tout t entier, $t \geq 1$, l'inclusion naturelle des groupes d'unités $O_N^* \subset O_F^*$ induit un isomorphisme $O_N^*/(O_N^*)^{l^t} \xrightarrow{\sim} O_F^*/(O_F^*)^{l^t}$. Soit $e = l^b.m$ l'indice de ramification de F sur k , avec $(m, l) = 1$. Notant π_k et π_F des uniformisantes de k , resp. F , on a $\pi_k = u.(\pi_F)^{l^b.m}$, avec $u \in O_F^*$. D'après ce qui précède, on peut donc écrire $v.\pi_k = w^{l^b}$, avec $v \in O_N^*$ et $w \in F^*$. L'équation $X^{l^b} - v.\pi_k$ est une équation d'Eisenstein sur le corps N , elle définit une extension L totalement ramifiée de degré l^b de N . D'après ce qui précède, cette équation a la racine w dans F . Ainsi $L \subset F$. On a $[L : k] = [L : N][N : k] = l^b.l^a = l^n$. \square

Remarques. Comme me l'a fait observer P. Deligne, on peut directement déduire le Lemme 8 du fait que le groupe de Galois absolu de k est extension d'un pro- l -groupe par un groupe d'ordre (profini) premier à l . Par ailleurs, M. Brion note que lorsque l'extension finie F/k est galoisienne, l'énoncé résulte (même pour $l = p$, et sans rien supposer sur les racines de l'unité) des théorèmes de Sylow généralisés pour les groupes résolubles, dus à Philip Hall (voir [Ha59], Thm. 9.3.1).

§3. Démonstration du théorème

Rappelons pour mémoire ([Fu84], 1.4) que pour un morphisme propre $\pi : Y \rightarrow Z$ entre k -variétés, l'application image directe $\pi_* : CH_0(Y) \rightarrow CH_0(Z)$ est induite par l'application linéaire sur les zéro-cycles $Z_0(Y) \rightarrow Z_0(Z)$ qui envoie un point fermé M sur $[k(M) : k(N)]N$,

où N est le point fermé de Z image de M , et où $[k(M) : k(N)]$ est le degré relatif des extensions résiduelles.

Soient k un corps et X une k -variété projective et lisse. Soit K/k une extension finie de corps. Soit $p : X_K \rightarrow X$ la projection naturelle. Cette projection est finie et plate. On dispose donc des homomorphismes d'image réciproque $p^* : CH_0(X) \rightarrow CH_0(X_K)$ ([Fu75], 1.2; [Fu84], 1.7) et d'image directe, encore appelée trace, $p_* : CH_0(X_K) \rightarrow CH_0(X)$ ([Fu75], 1.6; [Fu84], 1.4).

Le composé $p_* \circ p^* : CH_0(X) \rightarrow CH_0(X)$ est la multiplication par le degré $[K : k]$. C'est un cas particulier d'un énoncé général sur les morphismes finis et plats ([Fu84], Example 1.7.4).

En particulier, si l est un nombre premier ne divisant pas $[K : k]$, alors l'application de restriction $A_0(X) \rightarrow A_0(X_K)$ est injective sur le sous-groupe de torsion l -primaire de $A_0(X)$.

Le groupe de Chow réduit $A_0(X)$ associé à une k -variété X projective, lisse, géométriquement connexe, est un invariant k -birationnel ([CTCo79], Prop. 6.3; [Fu84], 16.1.11, où l'hypothèse faite sur le corps de base est inutile). Il satisfait $A_0(X \times_k Z) \simeq A_0(X)$ si Z est une k -variété projective lisse k -birationnelle à un espace projectif.

En caractéristique zéro, tout k -groupe linéaire connexe G est k -isomorphe au produit de son radical unipotent, qui est comme k -variété un espace affine standard, par un k -groupe réductif connexe G_1 . Pour X , resp. X_1 , une k -compactification lisse de G , resp. de G_1 , on a donc $A_0(X) \simeq A_0(X_1)$. (Que de telles compactifications lisses existent résulte du théorème d'Hironaka. Une démonstration plus économe n'est sans doute pas hors d'atteinte, mais elle n'est pas disponible dans la littérature.)

Pour établir le théorème, on supposera donc G réductif connexe. Soit

$$1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

une résolution flasque de G . Soit K/k l'extension finie galoisienne qui déploie le k -tore S .

Pour chaque premier l divisant $[K : k]$, choisissons un l -sous-groupe de Sylow g_l de $g = \text{Gal}(K/k)$. Soit k_l le corps fixe de g_l . Comme le degré de k_l sur k est premier à l , l'argument général de trace rappelé ci-dessus assure que le sous-groupe de torsion l -primaire de $A_0(X)$ s'injecte (par la flèche de restriction de k à k_l) dans le sous-groupe de torsion l -primaire de $A_0(X_{k_l})$.

Pour établir le résultat de finitude annoncé, qui porte sur tous les corps p -adiques, on peut donc supposer que le degré de K sur k est une puissance d'un nombre premier $l \neq p$. On dispose de la résolution flasque

$$1 \rightarrow S_K \rightarrow H_K \rightarrow G_K \rightarrow 1,$$

où S_K est un K -tore déployé. Un cas simple de la Proposition 10 ci-dessus (qui n'utilise que le Théorème 3 ci-dessus) montre alors qu'on a $A_0(X_K) = 0$. L'argument de trace rappelé ci-dessus montre que le groupe $A_0(X)$ est annulé par $[K : k]$, qui est une puissance de l . (On pourrait se dispenser de l'utilisation de la Proposition 10, en partant d'une extension finie galoisienne K/k déployant le groupe G , et en considérant les sous-groupes de Sylow de $\text{Gal}(K/k)$.)

Soit μ_l le groupe des racines l -ièmes de l'unité. L'extension $k(\mu_l)/k$ est de degré premier à l . L'argument de trace montre que l'application de restriction $A_0(X) \rightarrow A_0(X_{k(\mu_l)})$ est injective. Pour établir la finitude de $A_0(X)$, il suffit d'établir celle de $A_0(X_{k(\mu_l)})$.

En résumé, il suffit d'établir la finitude de $A_0(X)$ lorsque l'extension K/k qui déploie S est de degré une puissance l^n d'un nombre premier $l \neq p$ et que de plus k contient μ_l , deux hypothèses que nous faisons jusqu'à la fin de la démonstration.

Pour établir le résultat, comme $A_0(X)$ est un groupe de torsion, il suffit de montrer que le groupe $CH_0(X)$ est un groupe de type fini. Soit M un point fermé de G . Soit $F = k(M)$ le corps résiduel de M . Soit l^t la puissance maximale de l divisant $[F : k]$.

Via l'application évidente $F \otimes_k F \rightarrow F$ envoyant $a \otimes b$ sur ab , le point fermé M de $G \subset X$ de corps résiduel F définit un point F -rationnel de $G_F \subset X_F$, que nous noterons m . L'application

$p_* : CH_0(X_F) \rightarrow CH_0(X)$ envoie la classe de $m \in X(F)$ dans $CH_0(X_F)$ sur la classe de M dans $CH_0(X)$.

Si $n \leq t$, alors par le Lemme 7 l'extension KF/F est cyclique, donc d'après la Proposition 4 le point rationnel m est R -équivalent à ϵ_F sur G_F (on note $\epsilon \in G(k)$ l'élément neutre de G), donc aussi sur X_F , et les zéro-cycles m et ϵ_F sont rationnellement équivalents sur X_F . En appliquant l'homomorphisme $CH_0(X_F) \rightarrow CH_0(X)$ induit par la projection $X_F \rightarrow X$, on voit que M est rationnellement équivalent, sur X , à un multiple de $\epsilon \in G(k)$.

Supposons $t < n$. D'après le Lemme 8, il existe une sous-extension L/k de F/k , de degré l^t , avec $([F : L], l) = 1$. Le L -tore S_L est déployé par une extension de L de degré une puissance de l . D'après la Proposition 6, la restriction de L à F induit un isomorphisme $G_L(L)/R \xrightarrow{\sim} G_F(F)/R$. Le groupe $G_L(L)/R$ est fini. Soient $P_i \in G_L(L), i \in I_L$, des représentants, en nombre fini, de $G_L(L)/R$. On dispose des projections $p_1 : X_F \rightarrow X_L$ et $p_2 : X_L \rightarrow X$, dont le composé est $p : X_F \rightarrow X$. Ces projections induisent les applications d'image directe $p_{1*} : CH_0(X_F) \rightarrow CH_0(X_L)$ et $p_{2*} : CH_0(X_L) \rightarrow CH_0(X)$. On a donc $p_{2*}(p_{1*}(m)) = p_*(m) = M \in CH_0(X)$. Soit $P_i \in G_L(L)$ dont l'image dans $G_F(F)$ est dans la R -classe de m . Dans $CH_0(X_F)$, on a $m = p_{1*}^*(P_i)$. Ainsi, dans $CH_0(X_L)$, on a $p_{1*}(m) = p_{1*}(p_{1*}^*(P_i)) = [F : L]P_i$, et dans $CH_0(X)$, on a

$$M = p_*(m) = p_{2*}(p_{1*}(m)) = p_{2*}([F : L]P_i) = [F : L]p_{2*}(P_i).$$

Un lemme de déplacement bien connu (voir le complément ci-dessous) assure que le groupe $CH_0(X)$ est engendré par les points fermés de l'ouvert $G \subset X$. Le groupe $CH_0(X)$ est donc engendré par ϵ et la famille des zéro-cycles $p_{L/k*}(P_i)$, pour L/k parcourant les extensions de k de degré l^t avec $t < n$ et, pour L donné, i dans l'ensemble fini I_L . Comme il n'y a qu'un nombre fini d'extensions de degré donné d'un corps p -adique ([Se94], chap. III, §4.2, p. 150/151), on conclut que le groupe $CH_0(X)$ est de type fini, et donc que $A_0(X)$ est fini. \square

Complément. Dans la démonstration, nous avons utilisé le lemme de déplacement suivant. Soit k un corps parfait infini. Pour tout ouvert de Zariski non vide U d'une k -variété lisse intègre V , tout zéro-cycle sur V est rationnellement équivalent, sur V , à un zéro-cycle à support dans U . Sur requête du rapporteur, rappelons la démonstration (dans le cas quasi-projectif, on pourrait aussi invoquer [AK79], mais le fait à démontrer ici est plus élémentaire). Il suffit d'établir le résultat pour un point fermé $M \in V$. Soit $F \subset V$ le fermé complémentaire de U . Soit d la dimension de V . Dans l'idéal maximal de l'anneau local, régulier, $\mathcal{O}_{V,M}$ de M sur V , il existe un élément $g \neq 0$ qui définit localement un fermé contenant F . On peut trouver une chaîne de paramètres réguliers f_1, \dots, f_{d-1} , membres d'un système de d générateurs de l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{V,M}$, telle que l'image de g dans l'anneau local régulier $\mathcal{O}_{V,M}/(f_1, \dots, f_{d-1})$ ne soit pas nulle. En écrivant ces équations au voisinage de M et en prenant l'adhérence schématique dans V , on trouve une courbe intègre C fermée dans V , passant par M , régulière en M et non contenue dans F . Soit $D \rightarrow C$ la normalisation de C . C'est une k -courbe intègre régulière, donc lisse sur le corps parfait k . En particulier D est quasi-projective. Il existe un point fermé $N \in D$ d'image M tel qu'au voisinage de N , la projection $D \rightarrow C$ soit un isomorphisme. Soit $F_1 \subset C$ le fermé propre de C image réciproque de $F \subset V$ par le morphisme propre $\pi : D \rightarrow V$. Comme π est propre, le morphisme $\pi_* : Z_0(D) \rightarrow Z_0(V)$ induit sur les groupes de zéro-cycles passe au quotient par l'équivalence rationnelle ([Fu84], Thm. 1.4). On a $M = \pi_*(N)$. Sur la courbe quasi-projective lisse intègre D , le point fermé N est rationnellement équivalent à un zéro-cycle z dont le support est étranger à F_1 (car l'anneau semilocal de D aux points de F_1 a un groupe de Picard trivial). Ainsi M est, sur V , rationnellement équivalent au zéro-cycle $\pi_*(z)$, dont le support est dans U .

§4. Une minoration pour le groupe de Chow réduit

Soient k un corps de caractéristique zéro, G un k -groupe réductif connexe et X une k -compactification lisse de G . Soit $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ une résolution flasque de G . Cette résolution induit un homomorphisme $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ (voir le début de la démonstration du Théorème 3). Comme S est flasque, il existe un torseur $\mathcal{T} \rightarrow X$ sous le k -groupe S qui étend le torseur sous S donné par $H \rightarrow G$ ([CTSa77], Prop. 9 p. 194). D'après ([CTSa77], Prop. 12 p. 198), ce torseur définit un homomorphisme $CH_0(X) \rightarrow H^1(k, S)$, lequel composé avec l'application naturelle composée $G(k)/R \rightarrow X(k)/R \rightarrow CH_0(X)$ donne la flèche naturelle $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$. Comme le torseur \mathcal{T} a une fibre triviale en l'élément neutre $\epsilon \in G(k) \subset X(k)$, on voit que l'homomorphisme $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ peut s'écrire comme le composé des applications $G(k)/R \rightarrow X(k)/R$, puis de l'application $X(k)/R \rightarrow A_0(X)$ qui envoie la classe d'un k -point P sur la classe du zéro-cycle $P - \epsilon$, enfin de l'homomorphisme $A_0(X) \rightarrow H^1(k, S)$ défini par le torseur \mathcal{T} .

Proposition 9 *Soient k un corps p -adique, G un k -groupe réductif connexe et X une k -compactification lisse de G . Soit $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ une résolution flasque de G . L'application naturelle $G(k)/R \rightarrow CH_0(X)$ est injective, et l'homomorphisme $A_0(X) \rightarrow H^1(k, S)$ défini ci-dessus est surjectif.*

Démonstration. D'après le Théorème 3, l'homomorphisme $G(k)/R \rightarrow H^1(k, S)$ est une bijection. Les considérations précédentes montrent alors que l'application composée $G(k)/R \rightarrow X(k)/R \rightarrow A_0(X)$ induite par $P \mapsto (P - \epsilon)$ est une injection, et que l'homomorphisme $A_0(X) \rightarrow H^1(k, S)$ est une surjection. \square

Remarque. On peut de diverses façons voir que l'application $G(k)/R \rightarrow X(k)/R$ est une bijection. Mais ceci laisse ouvert (même pour G un k -tore) les deux questions (équivalentes d'après ce qui précède) :

(i) L'application $X(k)/R \rightarrow A_0(X)$ est-elle surjective? (Tout zéro-cycle de degré 1 sur X est-il rationnellement équivalent à un point rationnel?)

(ii) L'homomorphisme surjectif $A_0(X) \rightarrow H^1(k, S)$ est-il une bijection?

En utilisant la Proposition 9 et le lien entre les résolutions flasques de G et les torseurs universels établi dans [CT04] (ceci utilise le théorème 3.2 de [BoKu04]), on peut montrer que l'accouplement naturel

$$A_0(X) \times \text{Br}(X)/\text{Br}(k) \rightarrow \text{Br}(k) = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

entre le groupe $A_0(X)$ et le groupe de Brauer réduit $\text{Br}(X)/\text{Br}(k)$ de X est non dégénéré à droite. La question (ii) se reformule alors ainsi : cet accouplement est-il un accouplement parfait de groupes finis?

Nous pouvons maintenant montrer que le groupe $A_0(X)$ dont le théorème principal de l'article assure la finitude (à la torsion p -primaire près) n'est pas toujours nul. Sur k p -adique, il est facile de construire des k -tores flasques S tels que $H^1(k, S) \neq 0$. L'exemple le plus simple correspond à une résolution flasque du k -tore des éléments de norme 1 dans une extension biquadratique de k (voir [CTSa77], §6, Cor. 1 p. 207).

Etant donné un tel k -tore S , on peut facilement donner une suite exacte de k -tores algébriques

$$1 \rightarrow S \rightarrow P \rightarrow G \rightarrow 1$$

avec P quasi-trivial. Si X est une k -compactification lisse de G , d'après ce qui précède, on a $A_0(X) \neq 0$.

On peut aussi donner de tels exemples avec G un k -groupe semi-simple. Soit S/k comme ci-dessus. Comme remarqué par Ono (voir [Sa81], Lemme 1.7), le théorème d'Artin sur les

caractères induits à partir de groupes cycliques assure l'existence d'un entier $m > 0$, de k -tores quasi-triviaux P_1 et P_2 et d'une isogénie

$$1 \rightarrow \mu \rightarrow S^m \times_k P_1 \rightarrow P_2 \rightarrow 1.$$

Ici μ est un k -groupe fini commutatif. Sur une extension finie galoisienne K/k , le groupe μ_K est K -isomorphe à un produit de groupes de racines de l'unité, lesquels se plongent dans des groupes spéciaux linéaires. Le groupe μ se plonge dans le k -groupe fini $R_{K/k}(\mu_K)$, et ce dernier se plonge (de façon centrale) dans un produit G_1 de descendus à la Weil de groupes spéciaux linéaires. Soit G le k -groupe semi-simple quotient de G_1 par μ . Soit H le quotient de $G_1 \times_k (S^m \times_k P_1)$ par l'action diagonale de μ . On a d'une part une suite exacte de k -groupes

$$1 \rightarrow G_1 \rightarrow H \rightarrow P_2 \rightarrow 1,$$

c'est-à-dire H est extension d'un k -tore quasi-trivial par un k -groupe semi-simple simplement connexe, d'autre part une suite exacte (centrale)

$$1 \rightarrow S^m \times_k P_1 \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1,$$

qui est donc une résolution flasque du k -groupe semi-simple G . Si X est une k -compactification lisse de G , le groupe $A_0(X)$ admet $H^1(k, S^m) = (H^1(k, S))^m \neq 0$ comme quotient.

Pour certains groupes G , le groupe de Chow réduit $A_0(X)$ est automatiquement nul.

Proposition 10. *Soient k un corps p -adique, G un k -groupe réductif connexe et X une k -compactification lisse de G . Dans chacun des cas suivants*

- (i) G est semi-simple simplement connexe,
 - (ii) G est un groupe adjoint,
 - (iii) G est un k -groupe absolument presque simple,
 - (iv) il existe une résolution flasque $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ de G telle que le k -tore S soit déployé par une extension métacyclique de k ,
- le groupe $A_0(X)$ est nul.

Démonstration. Dans chacun des cas mentionnés ci-dessus, on a $G(F)/R = 1$ pour toute extension finie F de k . Pour les cas (i) à (iii), c'est établi dans [CTGiPa04], Corollary 4.11. Dans le cas (iv), pour toute extension finie F/k , on a $G(F)/R \xrightarrow{\sim} H^1(F, S)$ (Théorème 3). Par ailleurs, le F -tore S_F est déployé par une extension métacyclique de F . On a donc $H^1(F, S) = 1$ (Proposition 1). Ainsi dans chaque cas tout point fermé de G est rationnellement équivalent sur X à un multiple de $\epsilon \in G(k)$. Par le lemme de déplacement simple détaillé à la fin du §3, ceci suffit à établir $A_0(X) = 0$. \square

Remarque. Soit G un k -groupe réductif connexe qui admet une résolution flasque $1 \rightarrow S \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$ telle que le k -tore S soit déployé par une extension K/k modérément ramifiée du corps p -adique k . L'hypothèse assure qu'un p -sous-groupe de Sylow de $\text{Gal}(K/k)$ est cyclique. Soit F le corps fixe d'un tel sous-groupe. Comme l'extension K/F est cyclique, la Proposition 10 assure $A_0(X_F) = 0$. Un argument de trace montre alors que le sous-groupe de torsion p -primaire de $A_0(X)$ est nul. Le théorème principal de cet article assure alors que le groupe $A_0(X)$ est fini.

§5. Groupe de Chow des zéro-cycles sur les variétés rationnellement connexes

Soit k un corps. Une k -variété projective et lisse X est dite *rationnellement connexe par chaînes*, si pour tout corps algébriquement clos Ω contenant k , l'ensemble $X(\Omega)/R$ est réduit à un élément.

Une k -variété projective et lisse X est dite *séparablement rationnellement connexe* s'il existe une extension K/k de corps et un K -morphisme $f : \mathbf{P}_K^1 \rightarrow X_K$ tels que "la" décomposition de l'image inverse f^*T_X du fibré tangent à X_K en somme directe de fibrés inversibles $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_i)$ ne comporte que des a_i strictement positifs.

Une variété séparablement rationnellement connexe est rationnellement connexe par chaînes. En caractéristique zéro, les deux propriétés sont équivalentes. En caractéristique zéro, on parlera donc simplement de variétés rationnellement connexes.

Ces variétés ont, sur un corps algébriquement clos, fait l'objet de nombreux travaux dans les quinze dernières années (travaux de Kollár-Miyaoka-Mori et Campana en particulier). On se reportera à [Ko96] et [ArKo03]. En caractéristique zéro, des exemples de telles variétés (projectives, lisses) sont les variétés (géométriquement) rationnelles et plus généralement les variétés (géométriquement) unirationnelles. Un théorème de Kollár-Miyaoka-Mori et Campana assure que les variétés de Fano sont rationnellement connexes par chaînes.

Soient k un corps et X une k -variété rationnellement connexe par chaînes. Si k est algébriquement clos, la trivialité de $X(k)/R$ implique $A_0(X) = 0$. Pour k quelconque, un argument de trace sur les groupes de Chow montre que le groupe $A_0(X)$ est un groupe de torsion. L'énoncé suivant, plus précis, n'est pas dans la littérature.

Proposition 11. *Soient k un corps et X une k -variété projective, lisse, rationnellement connexe par chaînes. Il existe un entier $n > 0$ tel que pour tout corps F contenant k le groupe $A_0(X_F)$ est annulé par n .*

Démonstration. Un argument de trace permet de se ramener au cas où X possède un point k -rationnel P . Soit η le point générique de X et $L = k(X)$ le corps des fonctions de X . Soit Ω une clôture algébrique de $k(X)$. Sur X_Ω , les points η et P définissent des points de $X(\Omega)$ qui sont R -équivalents, donc rationnellement équivalents. Cette équivalence rationnelle existe sur une extension finie de L . En prenant une trace, on trouve qu'il existe un entier $n > 0$ tel que le zéro-cycle $n(\eta - P_L) \in CH_0(X_L)$ soit rationnellement équivalent à zéro. Sur le produit $X \times_k X$, on trouve une équivalence rationnelle entre $n(\Delta - (P \times_k X))$, où $\Delta \subset X \times_k X$ désigne la diagonale, et un cycle supporté dans un fermé de la forme $X \times_k Y$, avec $Y \subset X$ de codimension au moins 1. La correspondance $CH_0(X) \rightarrow CH_0(X)$ induite par $n(\Delta - (P \times_k X)) \in CH^d(X \times_k X)$ (où d est la dimension de X) est donc nulle (voir [Fu84], Chapitre 16). Par ailleurs, cette correspondance coïncide avec l'application qui à une classe de zéro-cycle z associe $n(z - \deg_k(z)P)$. Ceci montre que le groupe $A_0(X)$ est annulé par n . Comme l'équivalence rationnelle sur $X \times_k X$ en induit une sur $X_F \times_F X_F$ pour toute extension de corps F/k , on voit que l'on a aussi $nA_0(X_F) = 0$. \square

Dans le reste de ce paragraphe, nous rappelons ce qui est connu sur la conjecture suivante ([CT95], [KoSz03]), que le théorème principal du présent article établit dans un cas particulier.

Conjecture *Soit X/k une variété projective, lisse, rationnellement connexe sur un corps p -adique k . Le groupe $A_0(X)$ est un groupe fini.*

L'analogue de cette conjecture sur le corps \mathbb{R} des réels est connue. Si $X(\mathbb{R}) = \emptyset$, alors $A_0(X) = 0$. Si $X(\mathbb{R}) \neq \emptyset$ et $s \geq 1$ est le nombre de composantes connexes de l'espace topologique $X(\mathbb{R})$, alors $A_0(X) \simeq (\mathbb{Z}/2)^{s-1}$ (cas particulier d'un théorème de Ischebeck et l'auteur, 1981).

En dimension 2, les variétés (projectives, lisses) séparablement rationnellement connexes ne sont autres que les surfaces (géométriquement) rationnelles. Des techniques de K -théorie (arguments de S. Bloch, théorème de Merkur'ev et Suslin), grâce auxquelles on peut contrôler la torsion dans le groupe de Chow des cycles de codimension 2, ont permis il y a vingt ans de démontrer la conjecture dans ce cas : pour toute surface (géométriquement) rationnelle X sur un corps p -adique k , le groupe $A_0(X)$ est un groupe fini ([CT83]). De fait, la même méthode

donne aussi la finitude si k est un corps de nombres ([CT83]) – alors qu’on est loin de pouvoir établir l’analogie du théorème principal du présent article sur un corps de nombres.

En dimension supérieure à 2, le principal théorème de finitude pour $A_0(X)$ obtenu avant le présent article concerne le cas des fibrés en quadriques au-dessus de la droite projective, la méthode reposant sur une réduction au cas des cycles de codimension 2 sur une surface, où l’on utilise le théorème de Merkur’ev et Suslin. On consultera l’article de Parimala et Suresh [PaSu95] pour les meilleurs résultats obtenus dans cette direction.

Dans [KoSz03], Kollár et Szabó établissent que si k est un corps p -adique de corps résiduel (fini) \mathbb{F} et X est une k -variété projective, lisse, géométriquement irréductible, avec bonne réduction séparablement rationnellement connexe sur le corps \mathbb{F} , alors on a $A_0(X) = 0$. (On trouve des compléments utiles dans [Ko04].)

Sans hypothèse de bonne réduction, Kollár ([Ko99]) montre que pour tout corps local localement compact de caractéristique zéro, et toute k -variété projective, lisse, rationnellement connexe, l’ensemble $X(k)/R$ est fini (il montre que la R -équivalence est ouverte). On trouve des compléments utiles dans [Ko04]. Ce résultat a pour conséquence le fait suivant.

Proposition 12. *Soit k un corps p -adique. Soit X une k -variété projective, lisse, rationnellement connexe. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) *Le groupe $A_0(X)$ est fini;*
- (ii) *Il existe un entier $m \geq 1$ tel que tout zéro-cycle sur X de degré au moins égal à m est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif.*

Démonstration. Supposons $A_0(X)$ fini. Choisissons des points fermés P_1, \dots, P_r de X tels que le degré (sur k) de tout zéro-cycle sur X est une combinaison linéaire des degrés (sur k) des points P_1, \dots, P_r . Soient $z_i, i \in I$, des zéro-cycles de degré zéro, en nombre fini, représentant les classes de $A_0(X)$. Fixons une k -courbe $C \subset X$ projective, lisse, géométriquement intègre sur X qui contient tous les points P_j et tous les points fermés apparaissant dans le support des z_i . Une variante du théorème de Bertini ([AK79], Thm. 1 et Thm. 7) assure l’existence d’une telle courbe C sur X . Soit g le genre de C . Soit z un zéro-cycle sur X de degré N . Il existe des entiers $n_j, j = 1, \dots, r$ tels que le zéro-cycle $z - \sum_{j=1}^r n_j P_j$ soit de degré nul. Ce zéro-cycle est donc rationnellement équivalent, sur X , à l’un des z_i . Ainsi z est rationnellement équivalent, sur X , au zéro-cycle $\sum_j n_j P_j + z_i$. Ce dernier cycle, de degré N , est supporté sur la courbe projective et lisse C , de genre g . Pour $N \geq g$, ce zéro-cycle est, par le théorème de Riemann-Roch, rationnellement équivalent sur C à un zéro-cycle effectif. Ainsi tout zéro-cycle z sur X de degré $N \geq g$ est rationnellement équivalent à un zéro-cycle effectif. On notera que l’argument donné vaut sur tout corps, et sous l’hypothèse plus faible que le groupe $A_0(X)$ est un groupe de type fini.

Supposons maintenant (ii). Soit $M_0 \in X$ un point fermé, d son degré, et $n = rd \geq m$. Pour tout zéro-cycle z de degré zéro, le zéro-cycle $z + rM_0$ est rationnellement équivalent à une somme $\sum_i n_i P_i$, avec $n_i \geq 0$ avec P_i point fermé de degré au plus n et avec n_i majoré par n . Il n’y a qu’un nombre fini d’extensions d’un corps p -adique de degré donné ([Se94], chap. III, §4.2, p. 150/151). Pour toute telle extension F/k , d’après le théorème de Kollár mentionné ci-dessus, l’ensemble $X(F)/R$ est fini. Ainsi les points P de X de corps résiduel F appartiennent à un nombre fini de classes dans $CH_0(X)$. Ainsi le groupe $CH_0(X)$ est de type fini, et son sous-groupe de torsion $A_0(X)$ est fini. \square

Remarque. La démonstration donnée au paragraphe 3 a consisté précisément à montrer que, sous certaines hypothèses, le groupe de Chow $CH_0(X)$ est engendré par des zéro-cycles effectifs de degré borné. L’un des premiers cas de finitude de $A_0(X)$ ([CTCo79]) avait été obtenu en établissant l’énoncé (ii) pour les surfaces fibrées en coniques au-dessus de la droite projective.

Remerciements. L'essentiel de ce travail a été réalisé à l'Institut Tata de recherche fondamentale (T.I.F.R.) de Mumbai, en décembre 2003 et janvier 2004. Je remercie l'Institut pour son hospitalité et le Centre franco-indien pour la recherche avancée (CEFIPRA, IFCPAR) pour son soutien.

Bibliographie

- [AK79] A. B. Altman and S. L. Kleiman, Bertini theorems for hypersurface sections containing a subscheme, *Commun. Algebra* **7** (1979) 775-790.
- [ArKo03] C. Araujo et J. Kollár, Rational curves on varieties, in *Higher dimensional varieties and rational points* (Budapest, 2001), K. Böröczky, Jr., J. Kollár, T. Szamuely (eds.), Bolyai Soc. Math. Stud. **12**, Springer, Berlin (2003), 13-68.
- [BoKu04] M. Borovoi and B. Kunyavskii, Arithmetical birational invariants of linear algebraic groups over two-dimensional geometric fields, with an appendix by P. Gille, *J. of Algebra* **276** (2004) 292-339.
- [CT83] J.-L. Colliot-Thélène, Hilbert's theorem 90 for K_2 , with application to the Chow groups of rational surfaces. *Invent. math.* **71** (1983) 1-20.
- [CT95] J.-L. Colliot-Thélène, L'arithmétique des zéro-cycles (exposé aux Journées arithmétiques de Bordeaux, Septembre 93), *Journal de théorie des nombres de Bordeaux* **7** (1995) 51-73.
- [CT04] J.-L. Colliot-Thélène, Résolutions flasques des groupes réductifs, Note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris (2004), à paraître.
- [CTCo79] J.-L. Colliot-Thélène et D. Coray, L'équivalence rationnelle sur les points fermés des surfaces rationnelles fibrées en coniques, *Compositio math.* **39** (1979), no. 3, 301-332.
- [CTGiPa04] J.-L. Colliot-Thélène, P. Gille et R. Parimala, Arithmetic of linear algebraic groups over 2-dimensional geometric fields, *Duke Math. J.* **121** (2004) 285-341.
- [CTSa77] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, La R -équivalence sur les tores, *Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.* **10** (1977) 175-229.
- [CTSa87] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, Principal homogeneous spaces under flasque tori : Applications, *J. Algebra* **106** (1987) 148-205.
- [EnMi74] S. Endo et T. Miyata, On a classification of the function fields of algebraic tori, *Nagoya Math. J.* **56** (1974) 85-104. Corrigendum, *ibid.* **59** (1979) 187-190.
- [Fu75] W. Fulton, Rational equivalence on singular varieties, *Publ. Math. I.H.É.S.* **45** (1975) 147-167.
- [Fu84] W. Fulton, *Intersection Theory*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 2.* Springer, 1984 (2. Auflage, 1998).
- [Gi97] P. Gille, La R -équivalence sur les groupes algébriques réductifs définis sur un corps global, *Publications Mathématiques de l'I.H.É.S.* **86** (1997) 199-235.
- [Gi01] P. Gille, Cohomologie galoisienne des groupes quasi-déployés sur des corps de dimension cohomologique ≤ 2 , *Compositio mathematica* **125** (2001) 283-325.
- [Ha59] Marshall Hall, Jr., *The theory of groups*, The Macmillan Co., New York, N.Y., 1959. Reprint, Chelsea, New York, N. Y., 1976.
- [Ko96] J. Kollár, *Rational curves on algebraic varieties*, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge, Bd. 32*, Springer, 1996.
- [Ko99] J. Kollár, Rationally connected varieties over local fields, *Annals of Math.* **150** (1999) 357-367.
- [Ko04] J. Kollár, Specialization of zero-cycles, *Publications of RIMS* (2004), à paraître.
- [KoSz03] J. Kollár et E. Szabó, Rationally connected varieties over finite fields, *Duke Math. J.* **120** (2003) 251-267.
- [PaSu95] R. Parimala and V. Suresh, Zero-cycles on quadric fibrations : finiteness theorems and the cycle map. *Invent. math.* **122** (1995), 83-117. Erratum, *ibid.* **123** (1996), 611.

- [Sa81] J.-J. Sansuc, Groupe de Brauer et arithmétique des groupes algébriques linéaires, *J. reine angew. Math. (Crelle)* **327** (1981) 12–80.
- [Se94] J-P. Serre, *Cohomologie galoisienne*, Cinquième édition, Lecture Notes in Mathematics **5**, Springer, Berlin, 1994.
- [Vo77] V. E. Voskresenskiï, *Algebraicheskie tory*, Izdat. “Nauka”, Moscou, 1977.
- [Vo98] V. E. Voskresenskiï, *Algebraic groups and their birational invariants*, Transl. Mathematical Monographs **179**, Amer. Math. Soc., 1998.

J.-L. Colliot-Thélène,
Centre National de la Recherche Scientifique,
Unité mixte de recherche 8628,
Mathématiques,
Bâtiment 425,
Université Paris-Sud,
F-91405 Orsay
France
courriel : colliot@math.u-psud.fr