Mouvement brownien et calcul stochastique

Partiel du 6 décembre 2024

2 heures 30, sans documents

Dans les exercices 1 et 3, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration complète (donc les martingales ou martingales locales sont relatives à cette filtration).

Exercice 1. Soit M une martingale locale avec $M_0 = 0$.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < 0 < b$. On pose

$$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : M_t \notin]a, b[\}$$

avec la convention habituelle $\inf \varnothing = \infty$. Justifier le fait que $T_{a,b}$ est un temps d'arrêt.

(2) On suppose que $T_{a,b} < \infty$ p.s. Calculer la quantité

$$\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b).$$

(3) On suppose dans cette question que

$$\sup_{t \geq 0} M_t = +\infty\,, \quad \text{p.s.}$$

Montrer que

$$\inf_{t \geq 0} M_t = -\infty\,, \quad \text{p.s.}$$

Exercice 2. Soit B un mouvement brownien réel issu de 0. On considère le temps d'arrêt

$$T = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = 1\}.$$

(1) En utlisant la martingale $(B_t)^2 - t$, montrer que $\mathbb{E}[T] = 1$. (*On justifiera précisément les arguments*).

(2) Soit $\varepsilon > 0$. On définit $S_1^\varepsilon = 0$ et $T_1^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t| = \varepsilon\}$ puis par récurrence, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq T_n^\varepsilon : B_t = 0\}\ , \quad T_{n+1}^\varepsilon = \inf\{t \geq S_{n+1}^\varepsilon : |B_t| = \varepsilon\}.$$

Expliquer rapidement pourquoi $(S_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ et $(T_n^\varepsilon)_{n \geq 1}$ sont deux suites de temps d'arrêt finis p.s., puis montrer que $\mathbb{E}\big[T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon\big] = \varepsilon^2$, pour tout $n \geq 1$.

(3) On pose $N_\varepsilon = \sup\{n \geq 1 : S_n^\varepsilon \leq 1\}$. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}}\,(T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big] = \varepsilon^2\,\mathbb{E}[N_\varepsilon].$$

(4) Vérifier que

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^1 \mathbf{1}_{\{|B_t| \leq \varepsilon\}}\,\mathrm{d}t\Big] \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}},$$

puis montrer que $\mathbb{E}[N_\varepsilon] \leq \dfrac{4}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} + 1$.

Exercice 3. Soit $(Y_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté, à trajectoires continues et **à valeurs positives ou nulles**, et soit $(V_t)_{t\geq 0}$ un processus croissant (à trajectoires continues et croissantes, adapté, et tel que $V_0 = 0$). On considère la condition suivante :

$$\mathbb{E}[Y_T] \leq \mathbb{E}[V_T] \text{ , pour tout temps d'arrêt borné } T. \qquad (D)$$

(1) Montrer que si M est une (vraie) martingale à trajectoires continues et de carré intégrable, telle que $M_0 = 0$, alors la condition (D) est satisfaite par $Y_t = M_t^2$ et $V_t = \langle M, M\rangle_t$.

(2) Montrer que la conclusion de la question précédente reste vraie si on suppose seulement que M est une martingale locale issue de 0.

(3) On note $Y_t^* = \sup_{s\leq t} Y_s$. Montrer que sous la condition (D) on a pour tout temps d'arrêt borné S et tout $c > 0$:

$$\mathbb{P}[Y_S^* \geq c] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[V_S].$$

(on pourra appliquer l'inégalité (D) au temps d'arrêt $S \wedge R$, avec $R = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq c\}$).

(4) Soient $c > 0$ et $d > 0$, et $S = \inf\{t \geq 0 : V_t \geq d\}$. Soit aussi T un temps d'arrêt borné. En remarquant que

$$\{Y_T^* \geq c\} \subset \Big(\{Y_{T\wedge S}^* \geq c\} \cup \{V_T \geq d\}\Big)$$

montrer que, sous la condition (D), on a

$$\mathbb{P}[Y_T^* \geq c] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[V_T \wedge d] + \mathbb{P}[V_T \geq d].$$

(5) En utilisant le résultat de la question précédente avec $c = d$, montrer que, pour tout réel $\beta \in]0, 1[$, pour toute martingale locale M issue de 0 ($M_0 = 0$), et tout temps d'arrêt T, on a

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\leq T} |M_s|^{2\beta}\Big] \leq \frac{2-\beta}{1-\beta}\,\mathbb{E}\Big[(\langle M, M\rangle_T)^{\beta}\Big].$$

(6) Montrer que, si $(M^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de martingales locales telles que $M_0^{(n)} = 0$ pour tout n, et si T est un temps d'arrêt tel que $\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T$ converge en probabilité vers 0 quand $n \to \infty$, alors,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\sup_{s\leq T} |M_s^{(n)}|\Big) = 0 \ , \qquad \text{en probabilité.}$$

Corrigé.

Exercice 1. (1) $T_{a,b}$ est le temps d'entrée dans le fermé $]-\infty, a] \cup [b, \infty[$ du processus M_t qui est adapté et à trajectoires continues.

(2) Le processus arrêté $M^{T_{a,b}}$ est encore une martingale locale, qui est bornée par $|a| \vee b$. C'est donc une vraie martingale uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt montre que $\mathbb{E}[M_{T_{a,b}}] = \mathbb{E}[M_0] = 0$, d'où (puisque $T_{a,b} < \infty$ p.s.) $a\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = a) + b\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = 0$. Mais toujours parce que $T_{a,b} < \infty$ p.s., on a aussi $\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = a) + \mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = 1$. Il en découle que

$$\mathbb{P}(M_{T_{a,b}} = b) = \frac{-a}{b-a}.$$

(3) L'hypothèse entraîne que $T_{a,b} < \infty$ p.s. pour tout choix de $a < 0 < b$. Fixons $a < 0$ et notons $T_a = \inf\{t \geq 0 : M_t = a\}$. Alors l'événement $\{T_a < \infty\}$ est la réunion croissante de la suite d'événements $E_n = \{M_{T_{a,n}} = a\}$. En conséquence,

$$\mathbb{P}(T_a < \infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_{T_{a,n}} = a) = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n-a} = 1.$$

Donc $T_a < \infty$ p.s., pour tout $a < 0$, ce qui suffit pour conclure.

Exercice 2. (1) Soit $M_t = (B_t)^2 - t$. Alors d'après le cours, $M_{t\wedge T}$ est encore une martingale. En écrivant $\mathbb{E}[M_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[M_0] = 0$ on trouve

$$\mathbb{E}[(B_{t\wedge T})^2] = \mathbb{E}[t \wedge T].$$

Quand $t \to \infty$, $\mathbb{E}[t \wedge T] \to \mathbb{E}[T]$ par convergence monotone, et $\mathbb{E}[(B_{t\wedge T})^2] \to \mathbb{E}[(B_T)^2] = 1$ par convergence dominée (noter que $|B_{t\wedge T}| \leq 1$). Cela donne le résultat. On peut aussi remarquer' que si le mouvement brownien B est issu de $a \in [-1, 1]$, le même argument montre que $\mathbb{E}[T] \leq 1$.
(2) Le fait que les temps aléatoires S_n^ε et T_n^ε soient tous finis découle de ce que $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$ p.s. Pour voir que ce sont des t.a. on peut procéder par récurrence, en écrivant

$$\{S_{n+1}^\varepsilon \leq t\} = \{T_n^\varepsilon \leq t\} \cap \{\inf\{|B_{(T_n^\varepsilon+s)\wedge t}| : s \in \mathbf{Q}_+\} = 0\}$$

et en notant que (si on sait déjà que T_n^ε est un t.a.) l'événement $\{T_n^\varepsilon \leq t\}$ comme les variables $B_{(T_n^\varepsilon+s)\wedge t}$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurables (observer que $(T_n^\varepsilon + s) \wedge t$ est un t.a. plus petit que t).

La propriété de Markov forte montre que si on pose $B_t^{(n)} = B_{S_\varepsilon^n + t}$, le processus $B_t^{(n)}$ est encore un mouvement brownien issu de 0. Comme $T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t^{(n)}| = \varepsilon\}$, on voit que $T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon$ a même loi que $\inf\{t \geq 0 : |B_t| = \varepsilon\} = T_1^\varepsilon$. Par ailleurs, en introduisant le changement d'échelle $B_t^\varepsilon = \varepsilon^{-1} B_{\varepsilon^2 t}$, on voit que $T_1^\varepsilon = \varepsilon^2 \inf\{t \geq 0 : |B_t^\varepsilon| = 1\}$ a même loi que $\varepsilon^2 T$. On conclut que $\mathbb{E}[T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon] = \mathbb{E}[T_1^\varepsilon] = \varepsilon^2 \mathbb{E}[T] = \varepsilon^2$.

(3) On écrit d'abord

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}} \, (T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}} \, (T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big].$$

Pour tout $n \geq 1$, la propriété de Markov forte montre que $T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : |B_t^{(n)}| = \varepsilon\}$ est indépendante de $S_\varepsilon^{(n)}$, donc

$$\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}} \, (T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big] = \mathbb{P}(S_n^\varepsilon \leq 1) \, \mathbb{E}[T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon] = \varepsilon^2 \mathbb{P}(S_n^\varepsilon \leq 1).$$

Puisque $\{S_n^\varepsilon \leq 1\} = \{N_\varepsilon \geq n\}$, on conclut que

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}}\,(T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon)\Big] = \varepsilon^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_\varepsilon \geq n) = \varepsilon^2 \mathbb{E}[N_\varepsilon].$$

(4) D'après le théorème de Fubini,

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^1 \mathbf{1}_{\{|B_t|\leq\varepsilon\}}\,\mathrm{d}t\Big] = \int_0^1 \mathbb{P}(|B_t| \leq \varepsilon)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-x^2/2t}\,\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi t}}\Big)\,\mathrm{d}t \leq \frac{2\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}}.$$

Introduisons le temps d'arrêt $R_\varepsilon = \inf\{t \geq 1 : |B_t| \geq \varepsilon\}$. Alors il découle des définitions que

$$\Bigg(\bigcup_{n:S_n^\varepsilon\leq 1} [S_n^\varepsilon, T_n^\varepsilon]\Bigg) \subset \Big(\{t \in [0,1] : |B_t| \leq \varepsilon\} \cup]1, R_\varepsilon]\Big).$$

En prenant la mesure de Lebesgue de ces ensembles on trouve donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_n^\varepsilon \leq 1\}}\,(T_n^\varepsilon - S_n^\varepsilon) \leq \int_0^1 \mathbf{1}_{\{|B_t|\leq\varepsilon\}}\,\mathrm{d}t + (R_\varepsilon - 1).$$

Si on sait que $\mathbb{E}[R_\varepsilon - 1] \leq \varepsilon^2$, en prenant les espérances dans cette inégalité et en utilisant la question (3) on trouve

$$\varepsilon^2 \mathbb{E}[N_\varepsilon] \leq \frac{4\varepsilon}{\sqrt{2\pi}} + \varepsilon^2,$$

d'où le résultat voulu en divisant par ε^2.
Pour justifier que $\mathbb{E}[R_\varepsilon - 1] \leq \varepsilon^2$ on remarque d'abord que $R_\varepsilon - 1 = 0$ si $|B_1| \geq \varepsilon$. Dans le cas $|B_1| < \varepsilon$ on sert de la propriété de Markov simple pour se ramener à montrer que l'espérance du temps de sortie de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ par un mouvement brownien issu d'un point (quelconque) de cet intervalle est majorée par ε^2. Par changement d'échelle, cette espérance vaut ε^2 fois l'espérance du temps de sortie de $[-1, 1]$ pour un mouvement brownien issu d'un point de $[-1, 1]$, et cette dernière espérance est majorée par 1 d'après la question (1) (voir la remarque à la fin de cette question).

Exercice 3. (1) D'après le cours, $M_t^2 - \langle M, M\rangle_t$ est une vraie martingale issue de 0. D'après le théorème d'arrêt (cas des temps d'arrêt bornés), pour tout temps d'arrêt borné T,

$$\mathbb{E}[M_T^2 - \langle M, M\rangle_T] = 0$$

et on voit que la condition (D) est satisfaite (même avec égalité) pour $Y_t = (M_t)^2$ et $V_t = \langle M, M\rangle_t$.
(2) Soit $T_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$. On peut appliquer la question 1. à la martingale M^{T_n}, et on a pour tout temps d'arrêt borné T,

$$\mathbb{E}[(M_{T\wedge T_n})^2] \leq \mathbb{E}[\langle M, M\rangle_{T\wedge T_n}].$$

Quand $n \to \infty$, le membre de droite tend vers $\mathbb{E}[\langle M, M\rangle_T]$ par convergence monotone, alors que le lemme de Fatou donne

$$\mathbb{E}[(M_T)^2] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[(M_{T\wedge T_n})^2].$$

(3) Soit $R = \inf\{t \geq 0 : Y_t \geq c\}$. Alors R et aussi $T = S \wedge R$ sont des temps d'arrêt. D'après la propriété (D), comme T est un temps d'arrêt borné,

$$\mathbb{E}[Y_T] \leq \mathbb{E}[V_T] \leq \mathbb{E}[V_S].$$

D'autre part, $\{R \leq S\} = \{Y_S^* \geq c\}$ et sur l'ensemble $\{R \leq S\}$ on a $Y_T = Y_R \geq c$. Donc,

$$\mathbb{E}[Y_T] \geq \mathbb{E}[Y_T\,\mathbf{1}_{\{R\leq S\}}] \geq c\,\mathbb{P}[R \leq S].$$

On conclut que $c\,\mathbb{P}[Y_S^* \geq c] = c\,\mathbb{P}[R \leq S] \leq \mathbb{E}[Y_T] \leq \mathbb{E}[V_S]$.

(4) Sur l'ensemble $\{V_T < d\}$ on a $S \geq T$ et donc $Y^*_{T\wedge S} = Y^*_T$. Il en découle que

$$\{Y_T^* \geq c\} \subset \Big(\{Y^*_{T\wedge S} \geq c\} \cup \{V_T \geq d\}\Big).$$

En utilisant la question 3, on a donc

$$\mathbb{P}(Y_T^* \geq c) \leq \mathbb{P}(Y^*_{T\wedge S} \geq c) + \mathbb{P}(V_T \geq d) \leq \frac{1}{c}\,\mathbb{E}[V_{T\wedge S}] + \mathbb{P}(V_T \geq d).$$

Mais $V_{T\wedge S} \leq d$ par définition de S, donc aussi $V_{T\wedge S} \leq V_T \wedge d$ puisque V est croissant.

(5) Soit T un temps d'arrêt borné. Sous la condition (D), la question précédente donne pour $c > 0$,

$$\mathbb{P}[Y_T^* \geq c] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[V_T \wedge c] + \mathbb{P}[V_T \geq c] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[V_T\,\mathbf{1}_{\{V_T < c\}}] + 2\,\mathbb{P}[V_T \geq c].$$

On multiplie les deux cotés par $\beta c^{\beta-1}$ et on intègre par rapport à dc. On a d'abord

$$\int_0^\infty \mathrm{d}c\,\beta c^{\beta-1}\,\mathbb{P}[Y_T^* \geq c] = \mathbb{E}\Big[\int_0^{Y_T^*} \mathrm{d}c\,\beta c^{\beta-1}\Big] = \mathbb{E}[(Y_T^*)^\beta],$$

et de même $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{d}c\,\beta c^{\beta-1}\,\mathbb{P}[V_T \geq c] = \mathbb{E}[(V_T)^\beta]$. D'autre part,

$$\int_0^\infty \mathrm{d}c\,\beta c^{\beta-1}\,\frac{1}{c}\,\mathbb{E}[V_T\,\mathbf{1}_{\{V_T < c\}}] = \mathbb{E}\Big[V_T \int_{V_T}^\infty \mathrm{d}c\,\beta c^{\beta-2}\Big] = \frac{\beta}{1-\beta}\,\mathbb{E}[(V_T)^\beta].$$

En récapitulant, on trouve

$$\mathbb{E}[(Y_T^*)^\beta] \leq \frac{\beta}{1-\beta}\,\mathbb{E}[(V_T)^\beta] + 2\,\mathbb{E}[(V_T)^\beta] = \frac{2-\beta}{1-\beta}\,\mathbb{E}[(V_T)^\beta].$$

D'après la question 2 on peut appliquer ceci à $Y_t = (M_t)^2$ et $V_t = \langle M, M\rangle_t$: on trouve

$$\mathbb{E}\Big[\Big(\sup_{s\leq T}|M_s|\Big)^{2\beta}\Big] \leq \frac{2-\beta}{1-\beta}\,\mathbb{E}[(\langle M, M\rangle_T)^\beta].$$

A priori T est un temps d'arrêt borné, mais si T est un temps d'arrêt quelconque il suffit de remplacer T par $T \wedge n$ et d'utiliser le théorème de convergence monotone.

(6) On remarque que l'inégalité de la question 4 reste vraie pour un temps d'arrêt T quelconque. En effet, on choisit $c' < c$ et $d' > d$, et on observe que l'événement $\{Y_T^* \geq c\}$ est contenu dans la réunion croissante des événements $\{Y^*_{T\wedge n} \geq c'\}$, $n \in \mathbb{N}$, et donc d'après le cas borné,

$$\mathbb{P}[Y_T^* \geq c] \leq \lim_{n\to\infty} \uparrow \Big(\frac{1}{c'}\mathbb{E}[V_{T\wedge n} \wedge d'] + \mathbb{P}[V_{T\wedge n} \geq d']\Big) \leq \frac{1}{c'}\mathbb{E}[V_T \wedge d'] + \mathbb{P}[V_T \geq d]$$

en utilisant le théorème de convergence monotone. En faisant tendre c' vers c et d' vers d, on obtient bien à nouveau

$$\mathbb{P}[Y_T^* \geq c] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[V_T \wedge d] + \mathbb{P}[V_T \geq d].$$

En appliquant cette inégalité à $Y_t = (M_t^{(n)})^2$ et $V_t = \langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_t$ on a pour tout $c > 0$,

$$\mathbb{P}\Big[\sup_{s\leq T}|M_s^{(n)}|^2 \geq c\Big] \leq \frac{1}{c}\mathbb{E}[\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \wedge c] + \mathbb{P}[\langle M^{(n)}, M^{(n)}\rangle_T \geq c].$$

Mais le terme de droite tend vers 0 quand $n \to \infty$ d'après l'hypothèse, et c'est donc aussi le cas pour le terme de gauche.