M2 Probabilités et Statistiques – Université Paris-Saclay

Mouvement brownien et calcul stochastique

Examen du 10 janvier 2024, 3 heures sans documents

Barème approximatif. Exercice : 4 pts. Problème A : 8 pts. Problème B : 9 pts.

Dans tout l'énoncé, on se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$ complète et continue à droite.

Exercice. Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien issu de 0, et soit $a > 0$. On pose $X_t = B_t + at$ pour tout $t \geq 0$.

1. Montrer qu'il existe une unique constante $b \in \mathbb{R}^*$ telle que le processus e^{bX_t} soit une martingale locale, et déterminer b.

2. Soient $u, v \in \mathbb{R}$ avec $u < 0 < v$, et soit $T = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin]u, v[\}$. Vérifier que $T < \infty$ p.s., puis calculer $\mathbb{P}(X_T = u)$.

3. La martingale locale e^{bX_t} est-elle une vraie martingale ? Si oui, cette martingale est-elle uniformément intégrable ? On justifiera précisément la réponse.

Problème A. On considère un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$ issu de 0. Pour tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $g_\varepsilon : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en posant $g_\varepsilon(x) = \sqrt{\varepsilon + x^2}$.

1. Montrer que

$$g_\varepsilon(B_t) = g_\varepsilon(0) + M_t^\varepsilon + A_t^\varepsilon$$

où M^ε est une (vraie) martingale de carré intégrable, que l'on identifiera sous forme d'intégrale stochastique, et A^ε est un processus croissant que l'on explicitera.

2. On pose $\operatorname{sgn}(x) = \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$M_t^\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{L^2} \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s.$$

Soit $A = (A_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par

$$|B_t| = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s + A_t\ .$$

En observant que $A_t^\varepsilon \xrightarrow{L^2} A_t$ quand $\varepsilon \to 0$, montrer que A est un processus croissant.

3. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, pour tous $0 < u < v$, la condition ($|B_t| \geq \delta$ pour tout $t \in [u, v]$) entraîne p.s. que $A_v^\varepsilon - A_u^\varepsilon \longrightarrow 0$ quand $\varepsilon \to 0$. En déduire que p.s. la fonction $t \to A_t$ est constante sur chaque composante connexe de l'ouvert $\{t \geq 0 : B_t \neq 0\}$.

4. On pose $\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\, \mathrm{d}B_s$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien réel issu de 0.

5. Soit $t \geq 0$. Montrer que $A_t = \sup_{s\leq t}(-\beta_s)$, p.s. (*pour l'inégalité* $A_t \leq \sup_{s\leq t}(-\beta_s)$, *on pourra considérer* $\sup\{s \leq t : B_s = 0\}$ *et utiliser la question* **3**). En déduire la loi de A_t.

Problème B. On utilisera la terminologie suivante : pour $a \in \mathbb{C}$, un processus $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ est un mouvement brownien complexe issu de a si $Z_t = a + Z_t^{(1)} + \mathrm{i}\, Z_t^{(2)}$, où $Z^{(1)}$ et $Z^{(2)}$ sont deux mouvements browniens réels **indépendants** issus de 0. On dit que Z est un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien complexe issu de a si de plus Z est adapté et à accroissements indépendants par rapport à $(\mathcal{F}_t)$.

1. Soient M et N deux martingales locales continues. On suppose que $M_0 = N_0 = 0$ et que M et N satisfont p.s. les trois propriétés suivantes :

(i) Pour tout $t \geq 0$, $\langle M, M \rangle_t = \langle N, N \rangle_t$.
(ii) Pour tout $t \geq 0$, $\langle M, N \rangle_t = 0$.
(iii) $\langle M, M \rangle_\infty = \infty$.

Pour tout $s \geq 0$, soit $\mathcal{G}_s = \mathcal{F}_{\tau_s}$, où $\tau_s = \inf\{t \geq 0 : \langle M, M \rangle_t \geq s\}$. Justifier rapidement l'existence de deux $(\mathcal{G}_s)$-mouvements browniens réels, notés $(\beta_s)_{s \geq 0}$ et $(\gamma_s)_{s \geq 0}$, tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \beta_{\langle M,M \rangle_t}, \qquad N_t = \gamma_{\langle N,N \rangle_t}.$$

2. En observant que, pour tout $r \geq 0$, les processus arrêtés M^{τ_r} et N^{τ_r} sont des vraies martingales bornées dans L^2, montrer que $\beta_s \gamma_s$ est une martingale dans la filtration $(\mathcal{G}_s)_{s \geq 0}$. En déduire que les deux mouvements browniens $(\beta_s)_{s \geq 0}$ et $(\gamma_s)_{s \geq 0}$ sont indépendants.

3. Soit $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien complexe issu de 0, et notons $X_t = \mathrm{Re}(Z_t)$ la partie réelle de Z_t, et $Y_t = \mathrm{Im}(Z_t)$ la partie imaginaire de Z_t, de sorte que X et Y sont deux $(\mathcal{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants issus de 0. On introduit le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ à valeurs complexes défini par $W_t = \exp(Z_t) = e^{X_t}(\cos(Y_t) + \mathrm{i} \sin(Y_t))$.

On note $U_t = e^{X_t} \cos(Y_t)$ la partie réelle de W_t et $V_t = e^{X_t} \sin(Y_t)$ la partie imaginaire de W_t. Montrer que les processus $M_t = U_t - 1$ et $N_t = V_t$ vérifient les hypothèses de la question **1.**, et en déduire qu'il existe un mouvement brownien complexe Γ issu de 1 tel que, p.s. pour tout $t \geq 0$,

$$W_t = \Gamma_{H_t}$$

où

$$H_t = \int_0^t e^{2X_s}\, \mathrm{d}s.$$

4. Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien complexe issu de 1. Montrer sans calculs que p.s. la courbe aléatoire $(B_t(\omega))_{t \geq 0}$ ne visite pas 0, mais visite tout disque ouvert (non vide) centré en 0. (*On notera qu'il suffit d'établir ces propriétés pour un choix particulier de B.*)

5. Soit $\alpha \in]0, \pi[$, et soit le cône $\mathcal{D}_\alpha = \{z = r\, e^{\mathrm{i}\theta} : r > 0, \theta \in]-\alpha, \alpha[\}$. Soit $T = \inf\{t \geq 0 : B_t \notin \mathcal{D}_\alpha\}$. Montrer que la loi de $\log |B_T|$ coïncide avec la loi de $X_{\inf\{t \geq 0 : |Y_t| = \alpha\}}$. En déduire que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\lambda \log |B_T|}] = \frac{1}{\cosh(\alpha\lambda)}.$$