TD 9. Problèmes variationnels non linéaires II

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On introduit les applications

$$G : \begin{array}{rcl} H^2(0,1) & \longrightarrow & H^2(0,1) \\ u & \longmapsto & f \circ u, \end{array} \qquad F : \begin{array}{rcl} H^2(0,1) & \longrightarrow & L^2(0,1) \\ u & \longmapsto & f \circ u. \end{array}$$

1. Montrer que G est bien définie et qu'elle est continue.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H^1(I)$.
3. On suppose désormais que $f(0) = 0$, $f'(0) > 0$ et on considère l'équation

$$(E) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} -u''(x) + f(u(x)) & = & g(x),\ x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) & = & 0. \end{array} \right.$$

   Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $g \in L^2(0,1)$avec $\|g\|_{L^2(0,1)} < \eta$, l'équation (E) admet une solution unique dans $H^1_0(0,1) \cap H^2(0,1)$.

Remarque. Par exemple, on peut appliquer cet exercice à l'équation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -u''(x) + \sin(u(x)) & = & g(x),\ x \in]0,1[, \\ u(0) = u(1) & = & 0. \end{array} \right.$$

Exercice 2. On pose

$$F : \begin{array}{rcl} L^2(0,1) & \longrightarrow & L^2(0,1) \\ u & \longmapsto & \sin(u). \end{array}$$

1. Montrer que F est continue.
2. Montrer que F n'est pas Fréchet-différentiable en $u = 0$. *(Indication : Considérer la suite $v_n = \chi_{]0,\frac{1}{n}[}$)*

Remarque. Si on considère $F : L^p(0,1) \to L^q(0,1)$, $u \to \sin(u)$, avec $p > q$, alors F est de classe $\mathcal{C}^1$. Par ailleurs, les opérateurs de classe $\mathcal{C}^1$ de $L^2(I)$ dans lui-même sont les applications linéaires affines $F(u) = a(\cdot) + b(\cdot)u$.

Exercice 3. (Différentiation en dimension 1 dans H^1)

1. Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(\cdot, s)$ et mesurable sur I pour tout $s \in \mathbb{R}$ et $f(x, \cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}$ p.p. $x \in I$. On suppose de plus qu'il existe $a \in L^1(I)$ et $C > 0$ tels que
$$|f(x,s)| \leq a(x) + C, \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in I.$$
On pose
$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt, \qquad\qquad J(u) = \int_I F(x, u(x))dx.$$
Montrer que J est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H^1(I)$.
2. On considère maintenant le cas d'un intervalle I non borné. On suppose de plus qu'il existe des fonctions a, $b \in L^1(I)$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ continue satisfaisant $g(s) = O(s)$ lorsque $s \to 0$, telles que
$$|f(x,s)| \leq a(x) + b(x)g(s) \qquad \text{pour tout } s \in \mathbb{R} \text{ et p.p. } x \in I.$$
Montrer que J est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H^1(I)$.

Exercice 4. Soient X un espace de Banach, $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $c \in \mathbb{R}$. On dit que J vérifie la **condition de Palais-Smale** (au niveau c), si de toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X telle que
$$J(u_n) \to c \text{ dans } \mathbb{R} \quad \text{ et } \quad dJ(u_n) \to 0 \text{ dans } X^* \tag{PS}$$
on peut extraire une sous-suite $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente.

1. Montrer que la fonction $J(x) = \exp(x)$ définie sur $\mathbb{R}$, ne vérifie pas la condition de Palais-Smale au niveau $c = 0$.
2. Soient I un intervalle borné, $f \in L^2(I)$, $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait les conditions suivantes
$$\exists q > 2,\ R_0 > 0, \text{ tels que } 0 < q\, G(x,s) \leq s\, g(x,s),\ \forall |s| \geq R_0,\ \forall x \in I. \tag{*}$$
On pose $G(x,s) = \int_0^s g(x,t)dt$. Montrer que la fonctionnelle
$$J(v) = \frac{1}{2}\int_I |v'(x)|^2 dx + \int_I G(x, v(x))dx - \int_I f(x)v(x)dx$$
est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $H_0^1(I)$ et vérifie la condition de Palais-Smale (pour tout niveau c)
Indication : D'abord, montrer que tout suite qui satisfait (PS) *est bornée dans* $H_0^1(I)$.

Exercice 5. Soient X un espace de Banach et $J : X \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ bornée inférieurement et qui vérifie la condition de Palais-Smale au niveau $c := \inf_{x\in X} J(x)$.

1. Démontrer que J atteint son minimum, c'est-à-dire $\exists\, \bar{x} \in X$ tel que $J(\bar{x}) = c$. *(Indication : Utiliser le principe variationnel d'Ekeland).*
2. Soient I un intervalle borné, $f \in L^2(I)$ et $g : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue satisfaisant la condition $(*)$ de l'exercice précédent. Montrer qu'il existe (au moins) une solution à l'équation
$$\begin{cases} -u''(x) + g(x, u(x)) = f(x) & \text{pour tout } x \in I, \\ \qquad u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{P}$$