TD 8. Problèmes variationnels non linéaires I

Etant donné un intervalle borné I de $\mathbb{R}$, l'espace $H_0^1(I)$ (resp. $H^1(I)$) est systématiquement muni du produit scalaire $\langle u, v\rangle = \int_I u'(x)v'(x)\,dx$ (resp. $\langle u, v\rangle = \int_I u(x)v(x)\,dx + \int_I u'(x)v'(x)\,dx$).

Exercice 1. On se donne une fonction croissante lipschitzienne $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h \in L^2(0,1)$. On considère alors le problème :

$$(P) \qquad \begin{cases} -u''(x) + p(u(x)) = h(x) & \text{sur} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Posons $f(s) = \int_0^s p(t)\,dt$ pour tout $s \in \mathbb{R}$ et

$$\Psi(u) = \frac{1}{2}\int_0^1 |u'(x)|^2 dx + \int_0^1 f(u(x))dx - \int_0^1 h(x)u(x)dx$$

pour $u \in H_0^1(0,1)$.

1. Discuter la régularité (continuité/différentiabilité...) de Ψ.
2. Montrer que le problème $\min\{\Psi(u) : u \in H_0^1(0,1)\}$ admet une unique solution.
3. Donner une caractérisation variationnelle de cette solution.
4. Conclure à l'existence d'une unique solution *forte* de (P). Donner une condition nécessaire et suffisante pour que u soit une solution classique.

Exercice 2 (Obstacle en aiguille). Soient $f \in L^2(0,1)$, $x_0 \in]0,1[$ et $h_0 \in \mathbb{R}$. On considère le problème

$$\min\left\{\int_0^1 |u'(x)|^2\,dx + \int_0^1 f(x)u(x)\,dx : u \in H_0^1(0,1), u(x_0) \geq h_0\right\}.$$

1. Montrer que le problème est bien posé et qu'il admet une unique solution.
2. Ecrire les conditions d'optimalité pour ce problème. On donnera la valeur du multiplicateur de Lagrange associé à la contrainte $u(x_0) \geq h_0$ et l'on précisera la régularité de u.
3. Expliciter la solution du problème en fonction des données et de $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Exercice 3 (Quotient de Rayleigh).

1. Soit A une matrice carrée symétrique réelle de taille n. Dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien, montrer en considérant le problème

   $$\inf\{\langle Ax, x\rangle : \|x\| = 1\},$$

   que A possède un vecteur propre. Montrer ensuite que la valeur propre obtenue est la plus petite valeur propre de A.

2. On considère le problème

$$\lambda = \inf \left\{ \int_I |u'(x)|^2 dx : u \in H_0^1(I),\ \int_I |u(x)|^2 dx = 1 \right\}.$$

   (a) Montrer que $\lambda > 0$ et que le problème ci-dessus possède au moins une solution dont on précisera la régularité.

   (b) On introduit l'opérateur $A : H_0^1(I) \cap H^2(I) \to L^2(I)$ défini par $Au = -u''$. Montrer que λ est une valeur propre de A et que c'est la plus petite.

Exercice 4 (Caractérisation variationnelle pour un problème d'obstacle). Soient $C = \{u \in H^1(I) : |u(x)| \leq 1 \text{ p.p. } x \in I\}$ et $f \in L^2(I)$. On considère le problème

$$(P) \quad \inf \left\{ \frac{1}{2} \int_I |u'(x)|^2 dx + \int_I f(x)u(x)dx : u \in C \right\}.$$

1. L'ensemble C est-il borné dans $H^1(I)$? Montrer que le problème possède une solution $u \in C$ satisfaisant

$$(*) \qquad \int_I u'(v' - u')\, dx \geq \int_I f(v - u)\, dx.$$

2. Soient u_1 et u_2 deux solutions, montrer que la fonction $u_1 - u_2$ est constante.
3. Montrer que si u satisfait $(*)$, alors elle est solution de (P).