TD 7. Optimisation

Exercice 1. (Théorème de Bishop-Phelps). Soit E un espace de Banach, C une partie convexe, fermée, bornée et non vide de E, et f un élément du dual E^*. Soit $\varepsilon > 0$.

1. Montrer que si E est réflexif, f atteint son supremum sur C.
2. Donner un exemple d'une forme linéaire continue sur $F := \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ et n'atteignant pas son supremum sur la boule unité fermée de F.
3. Déduire du principe variationnel d'Ekeland l'existence de $x_0 \in C$ tel que pour tout $x \in C$ avec $x \neq x_0$,
$$-f(x) \geq -f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|.$$
4. On définit les deux ensembles
$$\begin{aligned} C_1 &:= \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : t \leq -f(x_0) - \varepsilon\|x - x_0\|\}, \\ C_2 &:= \{(x,t) \in C \times \mathbb{R} : t \geq -f(x)\}. \end{aligned}$$
Montrer que C_1 et C_2 sont convexes et que l'intérieur de C_1 est disjoint de C_2.
5. Montrer qu'il existe $g \in E^*$ tel que $\|g\| \leq \varepsilon$ et $f + g$ atteint son minimum sur C en x_0.
6. En déduire que l'ensemble des formes linéaires continues qui atteignent leur supremum sur C est dense dans E^*.

Exercice 2. Soit E un espace de Banach de dual E^*. On notera $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre E^* et E. Soient $F_1 : E \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ et $F_2 : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre : son domaine $C = \mathrm{Dom} F_2 = \{u \in E : F_2(u) < +\infty\}$ est non vide. On pose $F = F_1 + F_2$.

1. Etablir l'équivalence entre les trois assertions suivantes :
   - (i) u est solution du problème : $\inf_{v \in E} F(v)$;
   - (ii) $\langle DF_1(u), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0, \qquad \forall v \in C$;
   - (iii) $\langle DF_1(v), v - u\rangle + F_2(v) - F_2(u) \geq 0, \qquad \forall v \in C$.
2. On se place ici dans un espace de Hilbert V. Soient $x \in V$ et $\phi : V \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. et propre.
On prend $F_1(u) = \frac{1}{2}\|u - x\|^2$ et $F_2(u) = \phi(u)$.
   (a) Montrer que F est coercive et strictement convexe. *(On rappelle que ϕ propre implique l'existence d'une minorante affine continue : $\exists y \in V^* = V, a \in \mathbb{R}$ tels que $\phi(u) \geq \langle y, u\rangle + a, \forall u \in V$.)*
   (b) Etablir l'existence d'une application P_ϕ de V dans lui même qui associe à $x \in V$ la solution u de (i) et déduire de la question 1 que $u = P_\phi(x)$ est caractérisé par :
   $(ii)'$ $\qquad \langle u - x, v - u\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V$;

ou $(iii)'$ $\qquad \langle v-x, v-u\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V.$

   (c) Montrer que si ϕ est la fonction indicatrice χ_C d'un convexe fermé C, P_ϕ est l'opérateur de projection sur C.

   (d) Vérifier que l'application $x \mapsto P_\phi(x)$ est 1-Lipschitzienne.

3. V est maintenant un espace de Hilbert de dimension finie. On considère un opérateur A de V dans son dual $V^* = V$ qui vérifie :
   (H1) A est continu
   (H2) il existe v_0 avec $\phi(v_0) < +\infty$ et

$$\frac{\langle Av, v-v_0\rangle + \phi(v)}{\|v\|} \to +\infty, \qquad \text{quand} \qquad \|v\| \to +\infty.$$

   Soit $f \in V^* = V$. Le but est de montrer l'existence d'un $u \in V$ vérifiant :

$$(iv) \qquad \langle Au - f, v-u\rangle + \phi(v) - \phi(u) \geq 0, \qquad \forall v \in V.$$

   (a) On suppose que le domaine $D = \mathrm{Dom}\phi$ est borné. Vérifier que (iv) se lit, grâce à $(ii)'$:

$$u = P_\phi(u + f - Au).$$

   Etablir que l'application $u \mapsto P_\phi(u + f - Au)$ est continue puis considérer sa restriction à D et utiliser le théorème de Brouwer (une application continue d'un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ dans lui même possède un point fixe) pour conclure.

   (b) Dans le cas général on introduit, pour $r > 0$, $\phi_r(u) = \phi(u) + \chi_{\{\|u\| \leq r\}}$.
   Montrer que, pour r assez grand, les hypothèses pour utiliser 3.a sont satisfaites par ϕ_r d'où l'existence de u_r vérifiant :
   $(v) \qquad \langle Au_r - f, v - u_r\rangle + \phi_r(v) - \phi_r(u_r) \geq 0, \qquad \forall v \in V.$
   Prendre $v = v_0$ et invoquer (H2) pour en déduire que la famille $\{u_r\}$ est bornée.
   Montrer enfin qu'il existe une solution de (iv).

Exercice 3. (Projections alternées). Soit H un espace de Hilbert.

1. Soit ϕ une fonction convexe s.c.i. propre ($\not\equiv +\infty$) de H dans $[0, +\infty]$. Montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\|x-y\|^2}{2} + \phi(x)$ admet un minimimum unique, noté $T(y)$. Vérifier que si ϕ est la fonction indicatrice χ_C d'un convexe fermé C, l'application T est l'opérateur de projection sur C. Etablir que :

$$\langle x-y, T(x) - T(y)\rangle \geq \|T(x) - T(y)\|^2.$$

2. Soit g une fonction convexe s.c.i. propre de $H \times H$ dans $[0, +\infty]$. On pose

$$G(x,y) = \frac{\|x-y\|^2}{2} + g(x,y)$$

   Soit (x_n, y_n) une suite minimisante de G. Montrer en évaluant $G(x_n, y_n) + G(x_m, y_m) - 2G(\frac{x_n+x_m}{2}, \frac{y_n+y_m}{2})$, que $u_n = x_n - y_n$ est une suite de Cauchy et, en “mélangeant” 2 suites minimisantes, que sa limite ne dépend pas de la suite minimisante.

3. On considère 2 ensembles C_i convexes fermés non vides et $T_i = \Pi_{C_i}$ les opérateurs de projection associés. Partant de $y_0 \in H$ on définit pour $n \geq 1$:

$$x_n = T_1(y_{n-1}), \qquad y_n = T_2(x_n).$$

Soit

$$\Phi(x,y) = \frac{\|x-y\|^2}{2} + \chi_{C_1}(x) + \chi_{C_2}(y).$$

Etablir que y_n minimise $\Phi(x_n, .)$ et que x_{n+1} minimise $\Phi(., y_n)$. En déduire que $d_n = \Phi(x_n, y_n)$ décroit vers $d \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que pour tout couple (x,y)

$$\Phi(x,y) - \Phi(x_{n+1}, y_n) \geq \langle x_n - x_{n+1}, y - y_n \rangle$$

$$\Phi(x,y) - \Phi(x_{n+1}, y_{n+1}) \geq \langle x - x_{n+1}, y_n - y_{n+1} \rangle$$

et en déduire que

$$\langle x - x_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle \leq \langle x - x_n, y - y_n \rangle + 2\Phi(x,y) - \Phi(x_{n+1}, y_n) - \Phi(x_{n+1}, y_{n+1})$$

d'où

$$\langle x - x_{n+1}, y - y_{n+1} \rangle \leq \langle x - x_1, y - y_1 \rangle + 2n(\Phi(x,y) - d).$$

Utiliser 1 avec $y = T_2(x)$ pour obtenir

$$0 \leq \|T_2(x) - y_{n+1}\|^2 \leq \langle x - x_{n+1}, T_2(x) - y_{n+1} \rangle$$

puis la minoration

$$\Phi(x, T_2(x)) \geq d$$

et enfin $d = \inf \Phi$. En particulier (x_n, y_n) est une suite minimisante pour Φ et 2 s'applique.

5. On suppose ici que l'ensemble M des minima de Φ est non vide. Vérifier que

$$M = \{(x,y) \in H \times H; x = T_1(y), y = T_2(x)\}$$

puis que pour tout $(x,y) \in M$, les suites $\|x_n - x\|$ et $\|y_n - y\|$ sont décroissantes. En particulier les suites x_n et y_n possèdent des sous-suites faiblement convergentes vers un élément $(x,y) \in H \times H$. Montrer que $(x,y) \in M$ puis qu'il est unique : (x_n, y_n) converge faiblement vers (x,y).

6. Montrer que si $M = \emptyset$, alors $\lim \|x_n\| = \lim \|y_n\| = +\infty$, quand $n \to +\infty$.