Université Pierre et Marie Curie — Master 1, 4M025
Année 2014-2015 — Calcul des variations: outils et méthodes

# TD 6. Formulations variationnelles

**Exercice 1.** Soit $f \in L^2(0,1)$. On cherche la solution $u$ du problème aux limites

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{d^4u}{dx^4} = f \text{ dans } (0,1) \\ u(0) = u(1) = 0 \\ u'(0) = u'(1) = 0 \end{cases}$$

1. Donner la définition d'une solution faible $u$ de $(P)$.
2. Démontrer l'existence d'une unique solution faible de $(P)$.
3. Montrer que la solution faible $u$ appartient à $H^4(0,1)$. Pour cela on démontrera que :
   (a) si $w \in L^2(0,1)$ et $\int_0^1 w\varphi''\,dx = 0$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(]0,1[)$, alors $w$ est un polynôme de degré 1 au plus.
   (b) si $w \in L^2(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$ et $\int_0^1 w\varphi''\,dx = \int_0^1 f\varphi\,dx$, alors $w \in H^2(0,1)$ et $w'' = f$.
4. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$, alors $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$.

**Exercice 2.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions 1-Lipschitziennes, c'est-à-dire,

$$|f(x) - f(y)| \le |x-y|, \quad |g(x) - g(y)| \le |x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

On considère le système

$$-u'' + u = f(v) \quad \text{sur } (a,b), \tag{0.1}$$
$$-v'' + v = g(u) \quad \text{sur } (a,b), \tag{0.2}$$
$$u(a) = v(a) = u(b) = v(b) = 0. \tag{0.3}$$

1. Définir une solution faible $(u,v)$ de $(P)$. Montrer que $(u,v)$ est une solution faible si et seulement si $(u,v)$ est une solution classique.
2. On considère l'application $T : L^2(a,b)^2 \to L^2(a,b)^2$ telle que, à chaque $(u,v)$, on associe la solution $(\eta,\theta)$ du système

$$-\eta'' + \eta = f(v) \quad \text{sur } (a,b),$$
$$-\theta'' + \theta = f(u) \quad \text{sur } (a,b),$$
$$\eta(a) = \theta(a) = \eta(b) = \theta(b) = 0.$$

   Montrer que $T$ est une application bien definie.
3. En considérant $L^2(a,b)^2$ avec la norme $\|u\|_{L^2(a,b)} + \|v\|_{L^2(a,b)}$, montrer que $T$ est une contraction.
4. Conclure que le système $(0.1), (0.2), (0.3)$ possède une unique solution classique.

**Exercice 3.** On considère le problème suivant : trouver $u$ définie sur $[0,1]$ de

$$(P) \qquad \begin{cases} \frac{d^4u}{dx^4} + u = f \text{ dans } (0,1) \\ u''(0) = \alpha_0, \quad u''(1) = \alpha_1 \\ u'''(0) = \beta_0, \quad u'''(1) = \beta_1, \end{cases}$$

où $f \in L^2(0,1)$.

1. Définir une solution faible $u$ de $(P)$.
2. On pose

$$a(u,v) := \int_0^1 (u''(t)v''(t) + u(t)v(t))dt$$

et

$$L(v) := \int_0^1 f(t)v(t)dt + \alpha_1 v'(1) - \alpha_0 v'(0) + \beta_0 v(0) - \beta_1 v(1).$$

Montrer que $a$ est une forme bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert $H^2(0,1)$ et que $L$ est une forme linéaire continue sur $H^2(0,1)$.
3. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall v \in H^2(0,1)$,

$$\int_0^1 v'^2(t)dt \le C\Big(\int_0^1 \big[v''^2(t) + v^2(t)\big]dt\Big).$$

En déduire l'ellipticité de $a$ et l'existence d'une solution faible.
4. Montrer que $u \in H^4(0,1)$ et que $u \in \mathcal{C}^4([0,1])$ si $f \in \mathcal{C}^0([0,1])$.

**Exercice 4. (Problème de Perturbation Singulière)** Soient $f \in L^2(I)$ et $\varepsilon > 0$. On considère $u_\varepsilon \in H_0^1(I)$ la solution faible de

$$-\varepsilon u_\varepsilon'' + u_\varepsilon = f.$$

1. Montrer que $\|u_\varepsilon\|_{L^2(I)} \le \|f\|_{L^2(I)}$ et $\varepsilon\|u_\varepsilon'\|^2_{L^2(I)} \le \|f\|^2_{L^2(I)}$.
2. En déduire que $u_\varepsilon \rightharpoonup f$ dans $L^2(I)$, lorsque $\varepsilon \to 0$.
3. Conclure que $u_\varepsilon \to f$ dans $L^2(I)$, lorsque $\varepsilon \to 0$ (Développer $\|u_\varepsilon - f\|^2_{L^2(I)}$).
4. Si $I$ borné, $f \in L^p(I)$, $2 \le p < \infty$, montrer que $u_\varepsilon \to f$ dans $L^p(I)$, lorsque $\varepsilon \to 0$.
5. Dans les cas $f \equiv 1$ et $I = (0,1)$, calculer explicitement les fonctions $u_\varepsilon$. Que peut-on dire de la convergence ponctuelle de $u_\varepsilon$ ? Que peut-on dire de la convergence de $u_\varepsilon$ dans $H_0^1(I)$ ?