TD 4. Espaces de Sobolev

Exercice 1. Soit $I =]-1,1[$.

1. Montrer que la fonction $u(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ appartient à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$ et que $u' = H$ définie par $H(x) = 1$ si $0 < x < 1$ et $H(x) = 0$ si $-1 < x < 0$.
2. Montrer que H n'appartient pas à $W^{1,p}(I)$ pour tout $1 \le p \le +\infty$.

Exercice 2. Soit $g \in L^p(I)$ avec $1 \le p \le +\infty$ et soit x_0 fixé dans I. On pose $u(x) = \int_{x_0}^x g(t)dt$.

1. Montrer que $u \in \mathcal{C}(I)$.
2. Montrer que $u \in W^{1,p}(I)$ si $|I| < +\infty$.
3. Soit $I = \mathbb{R}$ et $g = \chi_{]0,1[}$. Que se passe-t-il pour $u(x) = \int_0^x g(t)dt$?

Exercice 3. Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Soient $u, v \in W^{1,p}(I)$ pour $1 \le p \le +\infty$. Montrer que $uv \in W^{1,p}(I)$ et $(uv)' = u'v + uv'$.

Exercice 4. Soit $I =]0, +\infty[$. On définit un opérateur P dans $W^{1,p}(I)$ par $Pu(x) = u(x)$ si $x \ge 0$ et $Pu(x) = u(-x)$ si $x \le 0$. Montrer que $Pu \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ et que $\|Pu\|_{1,p} \le 2\|u\|_{1,p}$.

Exercice 5. Soit $I = [0,1]$. On considère une fonction $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telle que $0 \le \eta \le 1$ et $\eta(x) = 1$ si $x < 1/4$ et $\eta(x) = 0$ si $x > 3/4$. Étant donnée une fonction $u \in W^{1,p}(I)$ on la prolonge par 0 sur $[1, +\infty[$. On note $\tilde{u}$ son prolongement.

1. A-t-on $\tilde{u} \in L^p([0, +\infty[)$? $\tilde{u} \in W^{1,p}([0, +\infty[)$?
2. Montrer que $\eta\tilde{u} \in W^{1,p}([0, +\infty[)$.

Exercice 6. En utilisant les deux exercices précédents, montrer que l'on peut prolonger toute fonction de $W^{1,p}(I)$ en un élément de $W^{1,p}(\mathbb{R})$ et que ce prolongement est continu.

Exercice 7.

1. Montrer que la famille $(\sqrt{2}\sin \pi n x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $L^2(0,1)$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a $\sin \pi n x \in H_0^1(0,1)$. Montrer que la famille $(\frac{\sqrt{2}}{\pi n}\sin \pi n x)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une base hilbertienne de $H_0^1(0,1)$.

Exercice 8. Soit $1 \le p < \infty$. Montrer que si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ alors $u(x) \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$.

Exercice 9. (Le dual de $W^{1,p}$).] Soit p et q deux réels vérifiant : $1 \le p < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On considére $L \in (W^{1,p}(I))^*$.

1. Montrer que $\exists v_0, v_1 \in L^q(I)$ tels que

$$\forall u \in (W^{1,p}(I)),\ L(u) = \int_I v_0 u + v_1 u'.$$

(Montrer que l'application $\tilde{L} : \theta(W^{1,p}(I)) \mapsto L^p(I) \times L^p(I)$, $\tilde{L}(\theta(u)) = L(u)$, où $\theta(u) = (u, u')$, peut-elle être prolongée à $L^p(I) \times L^p(I)$.)

2. Conclure que

$$\|L\|_{W^{1,p}(I)^*} = \inf \left\{ \|(m_0, m_1)\|_{L^q \times L^q} : \forall u \in (W^{1,p}(I)),\ L(u) = \int_I m_0 u + m_1 u' \right\}.$$