Université Pierre et Marie Curie — Master 1, 4M025
Année 2014-2015 — Calcul des variations: outils et méthodes

TD 3. Espaces de Banach

Dans ce qui suit E et F désignent des espaces de Banach.

Exercice 1 (Espaces ℓ^p). Soit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles et $p \geq 1$ un réel. Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on note :

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n\geq 0} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{et} \quad \ell^p = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_p < +\infty\ \},$$
$$\|x\|_\infty = \sup_{n\geq 0} |x_n| \quad \text{et} \quad \ell^\infty = \{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \|x\|_\infty < +\infty\ \}.$$

Si $p > 1$, alors $p' := \frac{p}{p-1}$ désigne l'exposant conjugué de p.

1. Soit $1 < p < \infty$.
   (a) Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, montrer que
   $$\alpha\beta \leq \frac{1}{p}\alpha^p + \frac{1}{p'}\beta^{p'}.$$
   (b) Montrer que si $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^{p'}$ alors $xy = (x_n y_n)_{n\geq 1} \in \ell^1$ et
   $$\|xy\|_1 \leq \|x\|_p \|y\|_{p'} \qquad \textit{(Inégalité de Hölder)}. \tag{0.1}$$
   (c) Montrer que si $x \in \ell^p$ et $y \in \ell^p$ alors $x + y \in \ell^p$ et
   $$\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \textit{(Inégalité de Minkowski)}.$$
2. Montrer que pour $p \geq 1$, ℓ^p est un espace vectoriel et que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur ℓ^p .
3. Montrer que tous les espaces ℓ^p, $1 \leq p \leq +\infty$, sont complets (espaces de Banach).
4. Montrer que l'espace c_0 des suites qui tendent vers 0, est fermé pour la norme $\|.\|_\infty$
5. Soit $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang ; montrer que c'est un sous-espace vectoriel de ℓ^p pour $p \geq 1$; déterminer $\overline{F}$ dans chacun de ces espaces.
6. En déduire que ℓ^p est séparable si $p \neq +\infty$.
7. On va montrer que ℓ^∞ n'est pas séparable.
   Soit $B = \{x \in \ell^\infty : x_n \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$, montrer que si $x, y \in B$ et que $x \neq y$ alors $\|x-y\|_\infty \geq 1$. En déduire que si A est une partie dense dans ℓ^∞, A n'est pas dénombrable.
8. Si $1 \leq p < q \leq +\infty$, montrer que ℓ^p est inclus dans ℓ^q ; quelle est son adhérence ?
9. On va montrer que, pour $1 \leq p < +\infty$, le dual topologique de ℓ^p est isométrique à $\ell^{p'}$.

(a) Utiliser (0.1) pour montrer que $\ell^{p'} \hookrightarrow (\ell^p)'$.

(b) Soit $(e_n)_{n\geq 1}$ la base canonique de ℓ^p, $(e_n^i = \delta_{n,i})$ et soit $\phi \in (\ell^p)'$. On pose $y_n = \phi(e_n)$. Montrer que $y = (y_n)_{n\geq 1} \in \ell^{p'}$ et que $\|y\|_{p'} \leq \|\varphi\|$.

(c) En déduire que $\phi \mapsto y$ est une isométrie de $(\ell^p)'$ sur $\ell^{p'}$.

Exercice 2. Soient E, F et G trois espaces vectoriels normés, et $f \in \mathcal{L}(E\times F, G)$ une application bilinéaire.

1. Montrer que

$$f \text{ continue sur } E \times F \Longleftrightarrow \exists C > 0,\ \forall (x,y) \in E \times F,\ \|f(x,y)\|_G \leq C\,\|x\|\,\|y\|\,,$$

   où $C > 0$.

2. Soit $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites nulles à partir d'un certain rang, doté de la norme $\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i|$, si $x = (x_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Montrer que l'application $a : F \times F \to \mathbb{R}$ définie par $a(x,y) = \sum x_i y_i$ est bilinéaire et séparément continue pour chacune des deux variables, mais qu'elle n'est pas continue.

Exercice 3. 1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, l'ensemble $A_n = \{x \in \ell^2 :\ \sum_k |x_k| \leq n\}$ est fermé et d'intérieur vide dans ℓ^2.

2. En déduire que ℓ^1 est d'intérieur vide dans ℓ^2.
3. Généraliser en montrant que si $1 \leq p < q \leq +\infty$, alors ℓ^p est d'intérieur vide dans ℓ^q.
4. Montrer que $\bigcup_{1\leq p<q} \ell^p$ est d'intérieur vide dans ℓ^q.

Exercice 4. Soit E un sous-espace vectoriel fermé de $L^1(0,1)$ tel que $\forall f \in E$, $\exists p > 1$, $f \in L^p(0,1)$.

1. Montrer à l'aide de l'inégalité de Hölder que si $f \in L^1(0,1) \cap L^p(0,1)$, alors $f \in L^q([0,1])$ pour tout $q \in [1,p]$. *(On pourra trouver s tel que $1/s + p/s' = q$ où $1/s + 1/s' = 1$.)*
2. Montrer qu'il existe $p > 1$ tel que $E \subset L^p(0,1)$.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer qu'une forme linéaire sur E est continue si et seulement s'il existe au moins une boule sur laquelle elle est bornée. Plus précisément, montrer que si une forme linéaire sur E est non continue, alors l'image de toute boule est égale à $\mathbb{R}$ tout entier.
2. Montrer que tout hyperplan (défini par $f(x) = 0$, où f est une forme linéaire non nulle) est soit fermé, soit dense dans E. (Distinguer selon que f est continue ou non)

Exercice 6. On désigne par L le sous-espace de ℓ^∞ composé des suites (u_n) admettant une limite lorsque $n \to +\infty$. On munit L de la norme héritée de ℓ^∞. On considère l'application :

$$f : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L \mapsto \lim_{n\to+\infty} u_n.$$

1. Montrer que f est une forme linéaire continue sur L.

2. Montrer que f peut être prolongée en une forme linéaire continue sur ℓ^∞, que l'on notera $\tilde{f}$. Existe-t-il $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^1$ telle que :

$$\forall (u_n) \in \ell^\infty, \quad \tilde{f}(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n \ ?$$

3. On introduit maintenant D le sous-espace de ℓ^∞ composé des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que les deux sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ soient convergentes lorsque $n \to +\infty$. En utilisant D et en vous inspirant des questions précédentes, montrer que le prolongement $\tilde{f}$ décrit plus tôt n'est pas unique.
4. Montrer qu'il existe une forme linéaire continue ℓ sur $L^\infty(0,1)$ telle que pour tout $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $\ell(f) = f(1/2)$. Existe-t-il une fonction g de $L^1(0,1)$ telle que

$$\forall f \in L^\infty((0,1)),\ \ell(f) = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx \ ?$$