TD 2. Espaces de Hilbert

Dans ce qui suit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ désigne un espace de Hilbert réel.

Exercice 1. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de convexes fermés non vides de H. Pour u fixé dans H on pose, $u_n = P_{K_n}(u)$ (où P_{K_n} désigne l'opérateur de projection sur K_n). Montrer que la suite u_n est convergente et identifier sa limite.

Exercice 2 (Adjoints). Soient $(F, \langle\cdot,\cdot\rangle_F)$ un espace de Hilbert et $A : H \to F$ un opérateur linéaire continu.

1. Montrer qu'il existe une unique application $A^* : F \to H$ telle que $\langle Au, v\rangle_F = \langle u, A^*v\rangle_H$ et qu'elle est linéaire, continue et satisfait $\|A^*\| = \|A\|$.
2. Montrer que $\mathcal{L}(H,F) \ni A \mapsto A^*$ est une isométrie linéaire involutive et que $\|AA^*\| = \|A\|^2$.

Exercice 3 (Moindres carrés). Soit $A : H \to H$ un opérateur linéaire continu et f un vecteur de H. Donner une condition suffisante "naturelle" pour que le problème

$$\min\left\{\|Au - f\|^2 : u \in H\right\}$$

ait une solution. On décrira ensuite l'ensemble de ses solutions.

Exercice 4. On considère l'espace ℓ^2 des suites réelles $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^2 < +\infty$. On munit ℓ^2 du produit

$$(u, v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n.$$

1. Montrer que $(\cdot,\cdot)$ est bien défini et fait de ℓ^2 un espace de Hilbert.
2. Soient $0 < \alpha < \beta$. Pour $u \in \ell^2$, on pose $\Phi(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u_n^2 + b_n u_n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles avec $a_n \in [\alpha, \beta]$ pour tout n, et $b \in \ell^2$. Vérifier que Φ est bien définie et continue. Soit G un sous-espace vectoriel fermé de H. Le problème

$$\inf\{\Phi(u) : u \in G\}$$

admet-il une solution ? Est-elle unique ? Peut-on la caractériser ?

Exercice 5.
1. Soient M et N des sous-espaces fermés de H tels que pour $(u, v) \in M \times N$ on ait $\langle u, v\rangle = 0$. Montrer que $M + N$ est fermé dans H.
2. On suppose que $H = \ell^2$, on considère les parties

$$\begin{aligned} X &= \left\{u \in \ell^2; u_{2n} = 0, \forall n \geq 0\right\}, \\ Y &= \left\{u \in \ell^2; u_{2n} = 2^{-n} u_{2n-1}, \forall n \geq 1\right\}. \end{aligned}$$

   (a) Montrer que X et Y sont des sous-espaces fermés de ℓ^2, et que $\ell^2 = \overline{X + Y}$.

(b) Soit $v \in \ell^2$ définie par $v_{2n-1} = 0$, $v_{2n} = 2^{-n}$. Montrer que $v \notin X + Y$.

(c) En déduire que $Z \cap Y = \emptyset$, où $Z := X - v$. Existe-t-il un hyperplan fermé de ℓ^2 qui sépare Y et Z au sens large ?

3. Construire une application linéaire continue A de ℓ^2 dans lui même telle que $\operatorname{Im} A$ ne soit pas fermée.

Exercice 6 (Calcul de projections). 1. L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique. Pour a fixé dans $\mathbb{R}^n$, établir une formule explicite pour l'opérateur de projection sur $a + \mathbb{R}^n_+$.

2. Soit $H = L^2(0,1)$ et $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Pour u_0 dans H, on considère l'ensemble

$$C := \{u \in H : u \geq u_0\}.$$

Montrer que C est un convexe fermé et donner une formule pour P_C.

3. Mêmes questions avec $C := \{u \in H : u_1 \geq u \geq u_0\}$ où u_1 est une fonction de $L^2(0,1)$.

Exercice 7. Soit F un sous-espace vectoriel de H.

1. Montrer que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.
2. Montrer que $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.
3. On considère $H = \ell^2$ et F l'espace des suites nulles à partir d'un certain rang. Déterminer $F^\perp$. A-t-on $H = F \oplus F^\perp$?

Exercice 8 (Opérateurs monotones). Soit $A : \operatorname{dom} A \subset H \to H$ un opérateur linéaire, $\operatorname{dom} A$ désigne ici le domaine (de définition) de A qui est un sous-espace vectoriel de H. On suppose que :
(i) A est monotone, *i.e.* $\langle Au, u \rangle \geq 0$ pour tout $u \in \operatorname{dom} A$
(ii) $I + A$ est une application linéaire surjective.
Lorsque (i) et (ii) sont satisfaites, on dit que A est *maximal* monotone.

1. Montrer que $\operatorname{dom} A$ est dense dans H.
2. Montrer que l'opérateur $(I + A)^{-1}$ est correctement défini sur H et qu'il est continu et contractant.
3. En déduire que le graphe de A est fermé.
4. Soit $\lambda_0 > 0$ et v dans H. On suppose que $I + \lambda_0 A$ est surjective. Pour $\lambda > \lambda_0/2$ on considère l'équation $u + \lambda A u = v$.
   (a) Montrer que cette équation admet une solution.
   (b) En déduire que $I + \lambda A$ est surjective pour tout $\lambda > 0$.
5. On suppose que $\operatorname{dom} A = H$, et que A est continue, monotone.
   (a) Montrer que A satisfait alors (ii).
   (b) Montrer que $\operatorname{Ker} A = (\operatorname{Im} A)^\perp$ puis que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} (I + \lambda A)^{-1}(u) = P_{\operatorname{Ker} A}(u),$$

pour tout u de H.