Université Pierrre et Marie Curie — M1 - MM025
Année 2011-2012 — Calcul des variations: outils et méthodes

Devoir No. 4

Soit f une fonction convexe s.c.i. propre de X, espace de Hilbert dans $I\!R \cup \{+\infty\}$.
On pose, pour $\lambda > 0$ et $x \in X$:

$$g_\lambda(x;y) = f(y) + \frac{1}{2\lambda}\|y-x\|^2$$

$$F_\lambda(x) = \inf_{y\in X}\ g_\lambda(x;y) \qquad (I)$$

Exercice 1 : Opérateur proximal.
1.1. Montrer, en utilisant le théorème de séparation, que f a une minorante affine continue .
En déduire que $\phi : y \mapsto g_\lambda(x;y)$ atteint son minimum en un point unique $\bar{x}$ solution de (I).
Utiliser $\phi(\overline{x}) \leq \phi(z)$ pour $z = ty + (1-t)\bar{x}$ pour obtenir que :

$$f(\overline{x}) - f(y) + \frac{1}{\lambda}\langle \overline{x} - x, \overline{x} - y\rangle \leq 0 \quad \forall y \in X. \quad (II)$$

Réciproquement, montrer que si $\overline{x}$ vérifie (II), alors il réalise le minimum dans (I). (Utiliser $\frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2) \leq \langle a, a-b\rangle$ avec $a = \overline{x} - x$ et $b = y - x$.)
Etudier la cas ou f est la fonction caractéristique d'un convexe fermé C.
1.2. Soit h une fonction convexe de X, espace de Hilbert dans $I\!R \cup \{+\infty\}$. On pose :

$$\partial h(y) = \{u \in X : h(z) - h(y) \geq \langle u, z-y\rangle, \forall z \in X\}.$$

Vérifier que y réalise le minimum de h ssi $0 \in \partial h(y)$.
Soit $u \in \partial h(y)$ et $v \in \partial h(z)$, établir que :

$$\langle u - v, y - z\rangle \geq 0$$

(∂ est un opérateur monotone).
1.3. Montrer que $0 \in \partial\phi(\bar{x})$ et que (II) s'écrit

$$\frac{(x-\overline{x})}{\lambda} \in \partial f(\overline{x}).$$

Exercice 2 : Algorithme proximal.
Etant donnés x_0 et une suite $\lambda_k > 0, k \geq 1$, on définit inductivement x_k comme le minimum de

$$g_\lambda(x_{k-1};y) = f(y) + \frac{1}{2\lambda_k}\|y - x_{k-1}\|^2$$

soit :

$$y_k = \frac{1}{\lambda_k}(x_{k-1} - x_k) \in \partial f(x_k).$$

2.1. Déduire du fait que ∂ est un opérateur monotone que $\|y_k\|$ est une suite décroissaante.
2.2. Soit $x \in X$. Utiliser $y_k \in \partial f(x_k)$ pour obtenir :

$$2\lambda_k(f(x) - f(x_k)) \geq \|x - x_k\|^2 + \|x_{k-1} - x_k\|^2 - \|x - x_{k-1}\|^2$$

puis, avec $\sigma_n = \sum_{k=1}^n \lambda_k$:

$$2\sigma_n f(x) - 2\sum_1^n \lambda_k f(x_k) \geq \|x - x_n\|^2 + \sum_1^n \lambda_k^2 \|y_k\|^2 - \|x - x_0\|^2.$$

Vérifier que pour tout $k \geq 1$:

$$\sigma_{k-1} f(x_{k-1}) - \sigma_k f(x_k) + \lambda_k f(x_k) \geq \lambda_k \sigma_{k-1} \|y_k\|^2$$

d' où en sommant :

$$-\sigma_n f(x_n) + \sum_1^n \lambda_k f(x_k) \geq \sum_1^n \lambda_k \sigma_{k-1} \|y_k\|^2.$$

En déduire que :

$$2\sigma_n(f(x) - f(x_n)) \geq \|x - x_n\|^2 - \|x - x_0\|^2 + \sum_1^n \|y_k\|^2 (\lambda_k^2 + 2\lambda_k \sigma_{k-1})$$

d'où en utilisant 2.1 que :

$$2\sigma_n(f(x) - f(x_n)) \geq \|x - x_n\|^2 - \|x - x_0\|^2 + \|y_n\|^2 \sigma_n^2.$$

2.3. On suppose désormais $\sigma_n \to +\infty$.
Etablir que :

$$f(x_n) \to inf_{x \in X} f(x) = f^*$$

2.4. Montrer que si $S = \mathrm{argmin} f \neq \emptyset$

$$f(x_n) - f^* \leq \frac{d(x_0, S)^2}{2\sigma_n}$$

et

$$\|y_n\|^2 \sigma_n^2 \leq d(x_0, S)^2 \qquad (III).$$

Par ailleurs vérifier que si $\bar{x} \in S$:

$$\langle x_n - \bar{x}, y_n \rangle \geq 0$$

et en déduire $\|x_n - \bar{x}\|^2$ est décroissant donc converge.
2.5. Soit x^* un point d'accumulation faible de la suite $\{x_n\}$.
Déduire de (III) que $x^* \in S$ (en utilisant 1.2).
Montrer enfin que la suite x_n converge vers x^* en établissant les points suivants :
- toute sous suite de la suite $\{x_n\}$ a une sous suite faiblement convergente vers un point de S
- si α et β sont 2 tels points $\langle x_n, \alpha - \beta \rangle$ converge, d' où l'unicité.