Université Pierre et Marie Curie	Master 1, 4M025
Année 2014-2015	Calcul des variations: outils et méthodes

Devoir 2

Exercice 1. Dans toute la suite on considère un intervalle I **borné** de $\mathbb{R}$ et $p \in [1, +\infty[$.

1. Soit $f \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$. Montrer que pour tout $u \in W^{1,p}(I)$, la fonction $f \circ u$ appartient à $W^{1,p}(I)$, et que sa dérivée est la fonction $(f' \circ u)u'$ *(On pourra approcher u par des fonctions régulières et justifier le passage à la limite).*
2. Pour $u \in L^p(I)$, on définit $u_+ \in L^p(I)$ par :

$$u_+(x) := \max(u(x), 0) \quad \text{p.p. tout } x \in I.$$

Soit $G \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ telle que :

$$G(s) = s \quad \forall s \in [1, +\infty[\text{ et } G(s) = 0 \quad \forall s \in]-\infty, 0].$$

Pour tout $u \in W^{1,p}(I)$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la suite $u_k : I \to \mathbb{R}$ par :

$$u_k(x) = \frac{1}{k} G(ku(x)) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

   (a) Montrer qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{R}, \quad |G(s)| \leq C + |s|.$$

   Montrer que la suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ converge vers u_+ dans $L^p(I)$ quand $k \to +\infty$.

   (b) Montrer que $u_+ \in W^{1,p}(I)$ et que de plus

$$(u_+)' = \chi_{\{u>0\}} u',$$

   où $\chi_{\{u>0\}}$ désigne la fonction caractéristique de $\{u > 0\} := \{x \in I : u(x) > 0\}$, i.e.

$$\chi_{\{u>0\}}(x) = 1 \text{ si } u(x) > 0 \text{ et } \chi_{\{u>0\}}(x) = 0 \text{ si } u(x) \leqq 0.$$

   (c) Si $u \in W^{2,p}(I)$, peut-on conclure que $u_+ \in W^{2,p}(I)$?

3. En considérant $-u$, montrer que

$$u' = 0 \text{ p.p. sur } \{x \in I : u(x) = 0\}.$$

4. Montrer que $T : W^{1,p}(I) \to W^{1,p}(I)$, $u \mapsto T(u) = u_+$ est continue. Montrer que si $u \in W_0^{1,p}(I)$, alors $u_+ \in W_0^{1,p}(I)$.
5. Montrer que si $u \in W_0^{1,p}(I)$ vérifie $u(x) \geqq 0$, $\forall x \in I$, alors il existe une suite $(\phi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de fonctions $C_0^\infty(I)$ telle que

$$\phi_k(x) \geqq 0, \ \forall x \in I \text{ et } \phi_k \to u \text{ dans } W^{1,p}(I) \text{ quand } k \to +\infty.$$

Exercice 2. On considère la fonctionnelle J définie par

$$J(u) := \int_0^1 \sqrt{u^2 + (u')^2}\, dx$$

pour tout u dans l'espace

$$W := \Big\{ v \in H^1(0,1) : v(0) = 0 \text{ et } v(1) = 1 \Big\}.$$

1. Montrer que cette fonctionnelle est convexe et continue.
2. Montrer que $\inf_{u \in W} J(u) = 1$.
3. Montrer que l'infimum n'est pas atteint et commenter.