Université Pierrre et Marie Curie	M1 - MM025
Année 2011-2012	Calcul des variations: outils et méthodes

Devoir No. 2

A. Principe variationnel d'Ekeland

Soit (X, d) un espace métrique complet et $f : x \to I\!R$ une fonction s.c.i. minorée. Pour $x \in X$ on définit :

$$S(x) = \{y \in X; f(y) \leq f(x) - d(x, y)\}.$$

1.1 Soit $x \in X$. Montrer que $S(x)$ est un fermé non vide et que $y \in S(x)$ implique $S(y) \subset S(x)$.
1.2 On définit par récurrence $K_0 = X$, puis $K_{n+1} = S(x_{n+1})$ où x_{n+1} est un point de X qui satisfait

$$x_{n+1} \in K_n, \qquad f(x_{n+1}) \leq \inf_{y \in K_n} f(y) + \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Montrer qu'il existe $x^* \in X$ tel que $\cap_n K_n = \{x^*\}$.
1.3 Vérifier que $x \neq x^*$ implique

$$f(x) > f(x^*) - d(x, x^*).$$

1.4 Soit $\varepsilon > 0$ et $x_\varepsilon \in X$ vérifiant :

$$f(x_\varepsilon) \leq \inf_{y \in X} f(y) + \varepsilon.$$

Soit $k > 0$. Montrer qu'il existe $y_\varepsilon \in X$ tel que

$$i) \qquad f(y_\varepsilon) \leq f(x_\varepsilon)$$

$$ii) \qquad d(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \frac{1}{k}$$

$$iii) \qquad f(x) > f(y_\varepsilon) - k\varepsilon d(x, y_\varepsilon), \qquad \forall x \neq y_\varepsilon.$$

B. Théorème de l'application ouverte

Soient E un espace normé, F un espace de Banach et T une application linéaire de E dans F. On suppose que T est **surjective**.

a) Montrer qu'il existe $c > 0$ avec

$$(1) \qquad B_F(0, c) \subset \overline{T(B_E(0, 1))}.$$

b) On suppose de plus que T une application linéaire **continue** de E dans F ($T \in \mathcal{L}(E, F)$) et que E est un **espace de Banach**.
Soit $c = 2r$ et $y \in F$ avec $\|y\|_F < r$. Montrer l'existence de $x_1 \in E$ avec

$$\|x_1\|_E < \frac{1}{2} \qquad \|y - Tx_1\|_F < \frac{r}{2}$$

Partant de $y - Tx_1$ montrer de même l'existence de $x_2 \in E$ avec

$$\|x_2\|_E < \frac{1}{4} \qquad \|y - Tx_1 - Tx_2\|_F < \frac{r}{4}$$

En déduire l'existence de $x \in E$ avec $y = Tx$ et $\|x\|_E < 1$ soit

$$(2) \qquad B_F(0,r) \subset T(B_E(0,1)).$$

c) Montrer que l'image par T d'un ouvert de E est un ouvert de F.

d) On suppose de plus T **bijectif**. Etablir que T^{-1} est continu, i.e. $T^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.

e) Soit E un espace vectoriel qui est un espace de Banach pour deux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$. On suppose que $\|.\|_2 \leq \|.\|_1$. En déduire que les 2 normes sont équivalentes.

f) (Théorème du graphe fermé)
Soient $E, \|.\|_E$ et $F, \|.\|_F$ deux espaces de Banach et T une application linéaire de E dans F. On suppose que le graphe de T, $G_T = \{(x,y) \in E \times F; y = Tx\}$ est fermé dans $E \times F$.
On définit sur E une nouvelle norme par

$$\|x\|_w = \|x\|_E + \|Tx\|_F.$$

Vérifier que $E, \|.\|_w$ est un espace de Banach.
En déduire que T est continu i.e. $T \in \mathcal{L}(E,F)$. (On pourra utiliser e)).
Réciproque ?

C. Convexité forte et convergence

Soit H un espace de Hilbert et C un ensemble convexe fermé non vide inclus dans H.
Une fonction F de C dans $I\!R$ est α-convexe, pour $\alpha > 0$ ssi

$$\frac{F(u)+F(v)}{2} \geq F(\frac{u+v}{2}) + \frac{\alpha}{2}\|u-v\|^2$$

a) Soit F convexe et s.c.i. sur C. Montrer que F est minoré par une fonction affine continue :

$$F(v) \geq \langle x_0, v\rangle + t$$

où $x_0 \in H$ et $t \in I\!R$. (On pourra séparer *epiF* et (u,s) avec $u \in C$ et $F(u) > s$.)
b) On suppose maintenant de plus F α-convexe. Montrer qu' il existe $\beta > 0$ et γ deux réels tels que

$$F(v) \geq \beta\|v\|^2 + \gamma, \qquad \forall v \in C.$$

c) Etablir que F a un minimum sur K et qu'il est unique. Notons le u.
d) Montrer toute suite minimisante dans F converge fortement dans F et que u vérifie

$$F(v) - F(u) \geq \alpha\|v-u\|^2.$$