Devoir No. 1

A. Théorème de Stone-Weierstrass

Soit X un espace compact non vide. On désigne par $C(X;\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues de X dans $\mathbb{R}$. On rappelle que la norme de la convergence uniforme est définie par $\|f\|_\infty = \max_{x\in X} |f(x)|$ pour tout f de $C(X;\mathbb{R})$.

Préliminaire : Théorème de Dini. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de fonctions continues, *i.e.* pour tout x de X et tout entier n, $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$. On suppose que f_n converge simplement vers une fonction f de $C(X;\mathbb{R})$.
a) Montrer que $||f_n - f||_\infty$ converge vers 0 lorsque n tend vers l'infini (Théorème de Dini). [On pourra, à cet effet, introduire les ensembles $\omega_n := \{x \in X : f_n(x) > f(x) - \epsilon\}, n \in \mathbb{N}$ où $\epsilon > 0$ est fixé.]
b) Donner un contre-exemple au théorème de Dini lorsque f n'est pas supposée continue.

Rappelons qu'une *sous-algèbre* A de $C(X;\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $C(X;\mathbb{R})$ tel que pour toutes fonctions f, g de A, le produit fg est dans A.
Un sous-ensemble $\mathcal{R}$ de $C(X;\mathbb{R})$ est dit *réticulé* si, pour tout f, g dans $C(X;\mathbb{R})$ les fonctions $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ sont dans $\mathcal{R}$.

1. Parties réticulées. Soit $\mathcal{R}$ une partie réticulée de $C(X;\mathbb{R})$ et f dans $C(X;\mathbb{R})$. On suppose que pour tout x, y de X et tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $g_{x,y}$ de $\mathcal{R}$ telle que $|g_{x,y}(x) - f(x)| < \epsilon$ et $|g_{x,y}(y) - f(y)| < \epsilon$. Nous allons montrer que f est dans l'adhérence $\overline{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ pour la topologie de la convergence uniforme.

Fixons $\epsilon > 0$.

a) *Famille d'approximations inférieures.*
Soit x dans X. Montrer qu'il existe un nombre fini de points $y_1, \ldots, y_n$ de X tels que

$$\inf\{g_{x,y_i}(z) : i = 1, \ldots, n\} < f(z) + \epsilon$$

pour tout z dans X.

b) *Une approximation-inférieure supérieure.*
Posons pour tout x de X, $g_x = \inf\{g_{x,y_i} : i = 1, \ldots, n\}$. Montrer qu'il existe une famille finie $x_1, \ldots, x_m$ de X telle que

$$g := \sup\{g_{x_i} : i = 1, \ldots, m\} > f - \epsilon.$$

c) Conclure.

2. Sous-algèbres fermées. Montrons que *toute sous-algèbre* fermée A *de* $C(X;\mathbb{R})$ *est réticulée.*
a) Pourquoi suffit-il de montrer que $|f|$ est dans A dès que f est dans A ?
b) On introduit la suite de fonctions polynômes $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} &p_0 = 0, \\ &p_{n+1}(s) = p_n(s) + \tfrac{1}{2}(s - p_n^2(s)), \ \forall s \in [0,1]. \end{aligned}$$

b1) Montrer que la suite p_n est croissante et satisfait $p_n(0) = 0$ et $p_n(s) \le \sqrt{s}$ pour tout entier n et tout s de $[0,1]$.
b2) En déduire que p_n converge *uniformément* sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$.
b3) Soit $\epsilon > 0$. Montrer l'existence d'une fonction polynôme p_ϵ telle que

$$p_\epsilon(0) = 0 \text{ et } \max_{s \in [-1,1]} |p_\epsilon(s) - |s|| < \epsilon.$$

c) Soit $\epsilon > 0$ et f dans A telle que $\|f\|_\infty \le 1$. Montrer que la fonction $p_\epsilon \circ f$ est dans A. En conclure que A est réticulée.

3. Théorème de Stone-Weierstrass (1937) *: Soit A une sous-algèbre de $C(X;\mathbb{R})$ telle que :*
(i) A sépare les points de X, i.e. si x et y sont distincts dans X, il existe f dans A telle que $f(x) \neq f(y)$,
(ii) pour tout x de X, il existe f dans A tel que $f(x) \neq 0$.
Alors

$$\bar{A} = C(X;\mathbb{R}).$$

a) S'assurer qu'il suffit de montrer que pour tout x, y distincts de X et tout a, b dans $\mathbb{R}$, il existe g dans A telle que $g(x) = a$ et $g(y) = b$.
b) Établir le théorème de Stone-Weierstrass.
c) On suppose que X est un compact non vide de $\mathbb{R}^n$ (n entier arbitraire). Montrer que toute fonction de $C(X;\mathbb{R})$ est limite uniforme sur X de fonctions polynômes (ce résultat est connu sous le nom de théorème de Weierstrass (1885)). En déduire que l'espace de Banach $(C(X;\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ est séparable.

B. Théorèmes de point fixe

Soit (X,d) un espace métrique et f une application de X dans lui même.

1. Cadre complet

a) (**Théorème de Picard**). On suppose que (X,d) est complet et qu'il existe $0 \le k < 1$ tel que

$$d(f(x), f(y)) \le k\ d(x,y) \quad \forall x, y \in X.$$

Montrer que, pour tout $x \in X$, $\{f^n(x)\}_{n \in I\!N}$ est une suite de Cauchy. En déduire que f possède un point fixe, et qu'il est unique.

b) Construire des contre-exemples si $k = 1$ d'une part et si (X,d) n'est pas complet, de l'autre.

2. Cadre compact

a) On suppose que (X, d) est compact et que

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \neq y.$$

Montrer que f a un point fixe et qu'il est unique.

b) Construire un contre exemple si f satisfait uniquement

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad \forall x, y \in X, x \neq y,$$

et de même si (X, d) n'est pas compact.