Mathématiques Orsay

Université Paris Saclay
Master Mathématiques et Applications
Parcours M1 Formation à l'Enseignement Supérieur

Analyse I

Jean-François Babadjian

Table des matières

Chapitre 1

Topologie

Dans ce chapitre, nous allons introduire un certain nombre de définitions de topologie générale. Nous porterons une attention particulière aux espaces métriques pour lesquels beaucoup de ces notions peuvent être transcrites de façon équivalente en terme séquentiel.

Par la suite, nous désignerons par X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ la famille des parties de X.

1.1 Espaces topologiques, espaces métriques

1.1.1 Topologie générale

Définition 1.1.1 (Topologie). Une sous-partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une *topologie* sur X si

1. $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ;
3. $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque.

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un *espace topologique*. Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les *ouverts* et leur complémentaires s'appellent les *fermés*. Par conséquent, les fermés sont stables par union finie et intersection quelconque.

Définition 1.1.2 (Intérieur et fermeture). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$, on définit

1. l'*intérieur* de A par $\mathring{A} := \{x \in A : \text{ il existe } U \in \mathcal{T} \text{ tel que } x \in U \subset A\}$;
2. la *fermeture* de A par $\overline{A} := \{x \in X : \text{ pour tout } U \in \mathcal{T} \text{ avec } x \in U, \text{ alors } U \cap A \neq \emptyset\}$.

On dit que $x \in \overline{A}$ est un *point adhérent* de A et que $x \in \mathring{A}$ est un *point intérieur* de A.

Remarquons que l'on a toujours la série d'inclusions $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. La proposition suivante précise les cas d'égalités.

Proposition 1.1.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. Alors*

1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A ;*
2. *A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$;*

3. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A ;

4. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Démonstration. 1. Tout d'abord, on remarque que $\mathring{A}$ est ouvert. En effet, si $\mathring{A} \neq \emptyset$ et $x \in \mathring{A}$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $U_x \subset A$. Comme tout $y \in U_x$ est inclus dans l'ouvert U_x lui même contenu dans A, on en déduit que $y \in \mathring{A}$, autrement dit que $U_x \subset \mathring{A}$. On en déduit que $\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x$, ce qui montre $\mathring{A}$ est ouvert. Soit V un ouvert contenu dans A. Si $x \in V$, alors $x \in \mathring{A}$ puisque $V \subset A$, ce qui montre que x est un point intérieur de A et que $V \subset \mathring{A}$, ce qui établit 1.

2. Par définition, si x est un point intérieur à A, alors $x \in A$ ce qui montre que $\mathring{A} \subset A$. Si $x \in A$ avec A ouvert, alors clairement, $x \in \mathring{A}$ et donc $A \subset \mathring{A}$, ce qui montre 2.

3. Notons

$$\tilde{A} := \bigcap \{F \text{ fermé}, F \supset A\},$$

de sorte que $\tilde{A}$ est fermé car c'est une intersection de fermés et $A \subset \tilde{A}$. Comme ${}^c\tilde{A}$ est un ouvert inclus dans ${}^cA$, il n'intersecte pas A et donc ${}^c\tilde{A} \subset {}^c\overline{A}$. Par ailleurs, si $x \notin \overline{A}$, il existe un ouvert U contenant x tel que $U \cap A = \emptyset$. Par conséquent, $A \subset {}^cU$ avec ${}^cU$ fermé, d'où $\tilde{A} \subset {}^cU$ ce qui montre que $x \notin \tilde{A}$. On en déduit que $\overline{A} = \tilde{A}$ et donc, si F est un fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset F$.

4. Si $x \in A$, tout ouvert contenant x intersecte A et donc $x \in \overline{A}$, ce qui montre que $A \subset \overline{A}$. Par ailleurs, si A est fermé, on a déjà vu que $\overline{A} \subset A$. □

Définition 1.1.4 (Densité). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est dense dans X pour la topologie $\mathcal{T}$ si $\overline{A} = X$.

Définition 1.1.5 (Limite d'une suite). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ contenant x, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$.

Définition 1.1.6 (Continuité). Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$ une application. On dit que f est continue sur X_1 si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_2$, alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$.

1.1.2 Espaces métriques

Un cas important d'espace topologique est celui d'espace métrique qui repose sur la notion de distance.

Définition 1.1.7 (Distance). Soit X un ensemble. Une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est une *distance* sur X si

i) *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout x, $y \in X$;

ii) *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

iii) *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout x, y, $z \in X$.

On dit alors que (X, d) est un *espace métrique*.

Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on note

$$B(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) < r\} \quad (\text{resp. } \overline{B}(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) \leq r\})$$

la *boule ouverte* (resp. *boule fermée*) de centre x et de rayon r. Un sous ensemble de X est *borné* s'il est contenu dans une boule de rayon fini.

Comme annoncé précédemment, un espace métrique définit toujours une topologie.

Proposition 1.1.8. *Soit (X,d) un espace métrique. La famille $\mathcal{T}$ définie par*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \in \mathcal{P}(X) : \ \textit{pour tout } x \in U, \textit{ il existe } r > 0 \textit{ tel que } B(x,r) \subset U\}$$

définit une topologie sur X.

Démonstration. Par convention, $\emptyset$ et $X \in \mathcal{T}$.

Soient $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{T}$. Si $\bigcap_{i=1}^N U_i = \emptyset \in \mathcal{T}$ par convention. Sinon, il existe $x \in \bigcap_{i=1}^N U_i$. Par définition des éléments de $\mathcal{T}$, pour tout $1 \leq i \leq N$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$. Posons $r := \min_{1 \leq i \leq N} r_i > 0$ de sorte que $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$, soit $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^N U_i$. Autrement dit $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Soient $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille (quelconque) d'éléments de $\mathcal{T}$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, par définition de l'union, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$ puis, par définition de $\mathcal{T}$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x,r_0) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque.

On a finalement montré que $\mathcal{T}$ est effectivement une topologie. □

Par définition, un ensemble non vide $U \subset X$ est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. On montre évidemment que les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.

Dans un espace métrique, certaines propriétés topologiques peuvent être caractérisées séquentiellement, i.e., en terme de suite. Il convient donc de préciser la notion de suite convergente dans les espaces métriques.

Proposition 1.1.9. *Soient (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.*

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$. Si $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ est un ouvert contenant x et donc, par définition d'une suite convergence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x,\varepsilon)$ pour tout $n \geq n_0$, i.e. $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, soit U un ouvert contenant x. Par définition d'un ouvert, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Par hypothèse, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, soit $x_n \in B(x,\varepsilon) \subset U$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$. □

Le résultat suivant permet de caractériser séquentiellement le fait qu'un ensemble est fermé.

Proposition 1.1.10. *Un sous ensemble F de X est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. $\Longleftarrow$: Il s'agit de montrer que F est fermé, autrement dit que $U := X \setminus F$ est ouvert. Si $U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, supposons qu'il existe $x \in U$ tel que pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \not\subset U$. En prenant $r = \frac{1}{n}$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $d(x,x_n) < 1/n$ et $x_n \in X \setminus U = F$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $x_n \to x$ et notre hypothèse montre que $x \in F$ ce qui est absurde. Donc, pour tout $x \in X$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert et donc que F est fermé.

$\Longrightarrow$: Supposons F fermé de sorte que son complémentaire $U := X \setminus F$ est ouvert. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$. Si $x \in U$, celui-ci étant ouvert, par définition de la limite, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier $x_{n_0} \in U$, ce qui est absurde puisque $x_{n_0} \in F$. Par conséquent, $x \in F$. $\square$

Nous allons à présent préciser la notion de continuité dans les espaces métriques. Dans ce qui suit, (X_1, d_1) et (X_2, d_2) désignent deux espaces métriques.

Proposition 1.1.11. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue sur X_1 si pour tout $x \in X_1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que*

$$d_{X_1}(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soient f continue sur X_1, $x \in X_1$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B_{X_2}(f(x),\varepsilon)$ étant ouverte dans X_2, on en déduit que $f^{-1}(B_{X_2}(f(x),\varepsilon))$ est un ouvert de X_1 qui contient x. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $B_{X_1}(x,\delta) \subset f^{-1}(B_{X_2}(f(x),\varepsilon))$, autrement dit si $d_{X_1}(x,y) < \delta$, alors $d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Récriproquement si U_2 un ouvert de X_2 et $U_1 = f^{-1}(U_2)$, il s'agit de montrer que U_1 est ouvert. Soit $x \in U_1$, comme $f(x) \in U_2$ qui est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{X_2}(f(x),\varepsilon) \subset U_2$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{X_1}(x,\delta)) \subset B_{X_2}(f(x),\varepsilon) \subset U_2$, soit $B_{X_1}(x,\delta) \subset f^{-1}(U_2) = U_1$ ce qui prouve que U_1 est ouvert dans X_1. $\square$

Dans un espace métrique, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle.

Proposition 1.1.12. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue sur X_1 si et seulement si pour tout $x \in X_1$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans X_1, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans X_2.*

Démonstration. Si f est continue et $x_n \to x$ dans X_1, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{X_1}(x,x_n) < \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $d_{X_2}(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, si f n'est pas continue, alors il existe $x \in X_1$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d_{X_1}(x,y_\delta) < \delta$ et $d_{X_2}(f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans X_1 et $d_{X_2}(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$, ce qui montre que $f(x_n) \not\to f(x)$. $\square$

Une notion plus forte de continuité est celle d'uniforme continuité.

Définition 1.1.13 (Uniforme continuité). Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On dit que $f : X_1 \to X_2$ est *uniformément continue* sur X_1 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que si x et $y \in X_1$ satisfont $d_{X_1}(x, y) < \delta$, alors $d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Il est clair, de par la définition ci-dessus, que l'uniforme continuité implique la continuité. Nous verrons ultérieurement au théorème 1.3.8 que la réciproque est vraie si (X_1, d_1) est compact.

1.2 Complétude

La complétude est une notion fondamentale de topologie générale et d'analyse fonctionnelle car elle permet de caractériser les suites convergentes sans avoir à recourir au calcul de la limite.

Définition 1.2.1 (Suite de Cauchy). Soit (X, d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est de *Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout n, $m \geq n_0$.

Définition 1.2.2 (Complétude). Un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy converge dans X.

Notons comme premier exemple l'ensemble des nombres réels muni de la métrique usuelle $d(x, y) := |x - y|$. Il est également utile de noter que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet reste complet.

Une application importante de la notion de complétude est le théorème de point fixe suivant. Il est d'une utilité majeure en analyse car il permet, entre autre, de montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz concernant l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations différentielles, ainsi que le théorème d'inversion locale.

Théorème 1.2.3 (Banach, Picard). *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y) \qquad \text{pour tout } x, y \in X.$$

Alors f admet un unique point fixe x^* dans X, i.e. $f(x^*) = x^*$.

Démonstration. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On montre par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0).$$

Si $n > m$, il vient par l'inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=1}^{n-m} d(x_{m+k}, x_{m+k-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=1}^{n-m} \theta^{m+k-1} \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Comme $\theta \in]0,1[$, on en déduit que le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $m \to \infty$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X qui est complet. Elle converge donc vers un élément $x^* \in X$. Comme f est continue, on a $f(x^*) = x^*$ par passage à la limite dans (1.2.1). L'unicité résulte de l'hypothèse de contraction. $\square$

Un deuxième résultat fondamental est le théorème de Baire permettant notamment de montrer l'existence de fonctions continues nul part dérivables ou dont la série de Fourier diverge en un point.

Théorème 1.2.4 (Baire). *Soit (X,d) un espace métrique complet.*

(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X ;

(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration. L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Puisque U_0 est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0,r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1,r_1) \subset B(x_0,r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0,+\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \geq m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X,d) complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m,r_m)$ pour tout $n \geq m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m,r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (1.2.2) est vérifié. $\square$

Une troisième application de la complétude concerne l'extension d'applications uniformément continues.

Théorème 1.2.5. *Soient (X_1,d_1) un espace métrique, (X_2,d_2) un espace métrique complet, Y une sous partie dense de X_1 et $f : Y \to X_2$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $g : X_1 \to X_2$ uniformément continue telle que $g|_Y = f$.*

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. Soit $x \in X_1$, comme Y est dense dans X_1, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ qui converge vers x. Si g et $h : X_1 \to X_2$ sont deux extensions uniformément continues de f, alors nécessairement

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x),$$

ce qui montre que $g = h$.

Venons en à présent à l'existence. Comme précédemment, étant donné $x \in X_1$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y qui converge vers x. Remarquons que la suite

$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X_2 puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donc de Cauchy dans X_1, et f est uniformément continue. Comme (X_2, d_2) est complet, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément z de X_2 qui ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de Y qui converge vers x, alors $d_{X_1}(x_n, x'_n) \to 0$ de sorte que, par uniforme continuité de f, $d_{X_2}(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$. Par conséquent, la suite $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers z. Il est alors licite de définir $g(x) := z$.

Montrons que g est uniformément continue sur X_1. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue sur Y, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y, $y' \in Y$ avec $d_{X_1}(y, y') < \delta$, alors $d_{X_2}(f(y), f(y')) < \varepsilon/3$. Soient x et $x' \in X_1$ tels que $d_1(x, x') < \delta/3$. Par densité de Y dans X_1, il existe y, $y' \in Y$ tels que $d_{X_1}(x, y) < \delta/3$, $d_{X_1}(x', y') < \delta/3$, $d_{X_2}(f(y), g(x)) < \varepsilon/3$ et $d_{X_2}(f(y'), g(x')) < \varepsilon/3$. Par conséquent, l'inégalité triangulaire implique que $d_{X_1}(y, y') < \delta$ et donc $d_{X_2}(f(y), f(y')) < \varepsilon/3$. En utilisant de nouveau l'inégalité triangulaire, il vient $d_{X_2}(g(x), g(x')) < \varepsilon$, ce qui montre l'uniforme continuité de g. □

1.3 Compacité

Nous introduisons ci-dessous deux notions de compacité, l'une topologique, l'autre séquentielle.

Définition 1.3.1 (Propriété de Borel-Lebesgue). Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$, i.e.

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

on peut extraire un sous recouvrement fini : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $i_1, \ldots, i_m \in I$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}.$$

Définition 1.3.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique (X, d) est dit *séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Il s'avère que ces deux notions coïncident dans les espaces métriques.

Théorème 1.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.*

Démonstration. **Etape 1.** Supposons que X est compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors on peut clairement extraire une sous-suite convergente. Dans le cas contraire, supposons, par l'absurde qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence. Alors pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors un recouvrement ouvert

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, r_x)$$

du compact X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r_{x_k}).$$

Comme chacune des boules ouvertes $B(x_1, r_{x_1}), \ldots, B(x_m, r_{x_m})$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite, alors X également ce qui est absurde.

Etape 2. Supposons que X est séquentiellement compact et soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Montrons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i(x)}$. Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction strictement croissante, qui converge vers un $x \in X$. Par conséquent, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Or pour n assez grand on a que $B(x_{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}) \subset B(x, r) \subset U_i$ ce qui est impossible.

Montrons à présent que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ρ. Dans le cas contraire, pour tout $x_0 \in X$, la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas X. Il existe donc un $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \rho$. Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $x_i \notin B(x_j, \rho)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$. Comme $\bigcup_{i=1}^n B(x_i, \rho)$ ne recouvre pas X, on peut trouver un $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^n B(x_i, \rho)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui satisfait $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \neq m$, et qui ne possède donc aucune sous-suite convergente ce qui est absurde.

On a donc montré l'existence de $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \rho)$$

et donc *a fortiori* un sous-recouvrement fini issu de $\{U_i\}_{i\in I}$ puisque, pour $k = 1, \ldots, m$ on a $B(x_k, \rho) \subset U_{i(x_k)}$. □

Corollaire 1.3.4. *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers x. Comme X est séquentiellement compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un $\bar{x} \in X$. Par unicité de la limite, on en déduit que $x = \bar{x} \in X$ ce qui montre que X est fermé.

Si X n'est pas borné, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $d(x_n, x_0) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il n'existe pas de sous-suite convergente. □

Noter que la réciproque est fausse en général comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 1.3.5. On se place dans l'espace métrique $(\mathcal{C}([-1, 1]), d)$ où

$$d(f, g) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$$

est la distance uniforme entre f et $g \in \mathcal{C}([-1,1])$. Soit

$$f_n : x \in [-1,1] \mapsto f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\ge 1}$ dans $\mathcal{C}([-1,1])$ qui est bornée puisque $d(f_n, 0) \le 1$ pour tout $n \ge 1$. Si une sous suite $(f_{\sigma(n)})_{n\ge 1}$ de $(f_n)_{n\ge 1}$ converge dans $\mathcal{C}([-1,1])$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, alors on a nécessairement que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ avec

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \le x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \le 1, \end{cases}$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la boule unité fermée de $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas (séquentiellement) compacte.

Nous verrons toutefois au Chapitre 2 que les parties fermées bornées décrivent tous les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

La propreté suivante exprime le fait que les ensembles compacts sont stables par image continue.

Proposition 1.3.6. *Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ une fonction continue. Si $K \subset X_1$ est compact dans X_1 alors $f(K)$ est compact dans X_2.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K tels que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in K$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$. Par continuité de f, il vient $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \to f(x) \in f(K)$ ce qui montre effectivement que $f(K)$ est compact. □

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut exprimer la Proposition 1.3.6 de la façon suivante.

Proposition 1.3.7. *Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f atteint ses bornes.*

Démonstration. Montrons que f atteint son supremum sur X. Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $f(x_n) \to \sup_X f$. L'espace métrique X étant compact, il existe une sous-suite notée $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$ dans X et, par continuité de f, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Par conséquent

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_X f.$$

On procède de même pour l'infimum. □

Un autre résultat faisant le lien entre continuité et compacité est le théorème de Heine qui montre que les notions de continuité et d'uniforme continuité coïncident sur un compact.

Théorème 1.3.8 (Heine). *Soit (X_1, d_1) un espace métrique compact, (X_2, d_2) un espace métrique et $f : X_1 \to X_2$ une application continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X_1 telles que $d_{X_1}(x_n, y_n) \to 0$ et $d_{X_2}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme X_1 est compact, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $x \in X_1$ tels que $x_{\varphi(n)} \to x$. De même il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $y \in X_1$ tels que $y_{\varphi\circ\psi(n)} \to y$. En posant $\sigma : \varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on obtient une extraction qui satisfait $x_{\sigma(n)} \to x$ et $y_{\sigma(n)} \to y$. Comme $d_{X_1}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \to 0$, on en déduit que $x = y$. Par suite, la continuité de f montre que $\lim_n d_{X_2}(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) = d_{X_2}(f(x), f(y)) = 0$ ce qui contredit le fait que $d_{X_2}(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) \geq \varepsilon_0$. □

1.4 Séparabilité

Une autre notion topologique importante est la notion de séparabilité que nous introduisons maintenant.

Définition 1.4.1. Un espace métrique (X, d) est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Un exemple important est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (qui est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$).

Les espaces métriques compacts représentent un exemple important d'espace séparable.

Proposition 1.4.2. *Si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est séparable.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, 1/k).$$

Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe donc des points $x_1^k, \ldots, x_{n_k}^k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B(x_j^k, 1/k).$$

L'ensemble

$$D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{x_j^k\}$$

est dénombrable et dense dans X. □

Chapitre 2

Espaces vectoriels normés

Soit $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On désignera dans ce chapitre par E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

2.1 Normes

Définition 2.1.1. Une application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$ est une *norme* sur E si elle vérifie
i) *Séparation* : $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$;
ii) *Homogénéité* : $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$;
iii) *Inégalité triangulaire* : $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tout x, $y \in E$.
On dit que $(E, \|\cdot\|)$ est un *espace vectoriel normé*.

On vérifie aisément que l'application

$$(x, y) \in E \times E \mapsto \|x - y\|$$

est une distance sur E ce qui confère à E une structure d'espace métrique. La structure d'espace vectoriel normé rend continu les applications canoniques données par la loi interne et la loi externe.

Proposition 2.1.2. *Les applications $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $(\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \mapsto \lambda x \in E$ sont continues.*

Démonstration. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de E telles que $x_n \to x$ et $y_n \to y$. D'après l'inégalité triangulaire,

$$\|x_n + y_n - x - y\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\| \to 0,$$

ce qui montre que $x_n + y_n \to x + y$.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$, alors d'après la propriété d'homogénéité et de nouveau l'inégalité triangulaire,

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| = \|(\lambda_n - \lambda)x_n + \lambda(x_n - x)\| \leq |\lambda_n - \lambda|\|x_n\| + |\lambda|\|x_n - x\|.$$

Comme $x_n \to x$, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Il existe donc $M > 0$ tel que $\|x_n\| \le M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$\|\lambda_n x_n - \lambda x\| \le M|\lambda_n - \lambda| + |\lambda|\|x_n - x\| \to 0,$$

ce qui montre que $\lambda_n x_n \to \lambda x$ dans E. □

Définition 2.1.3. On appelle *espace de Banach* un espace vectoriel normé complet.

Exemple 2.1.4. Un premier exemple que nous étudierons plus en détail dans la section 2.2 est l'espace vectoriel de dimension finie $\mathbb{K}^d$. On montre que l'application

$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d \mapsto |x|_\infty := \sup_{1\le i\le d} |x_i|$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^d$. L'espace $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ est de plus un espace de Banach.

Exemple 2.1.5. Un deuxième exemple en dimension infinie (mais pas trop grande quand même) est donné par des espaces de suites. On définit

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \begin{cases} \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty\} & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\} & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

qui sont des espaces vectoriels normés pour la norme

$$\|x\|_{\ell^p(\mathbb{N})} = \begin{cases} \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

L'espace

$$c_0(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n\to\infty} x_n = 0\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})}$ est également un espace vectoriel normé. Les espaces $(\ell^p(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^p(\mathbb{N})})$ et $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_{\ell^\infty(\mathbb{N})})$ sont des espaces de Banach.

Exemple 2.1.6. Un troisième exemple que nous étudierons en détail au Chapitre 3 est l'espace $\mathcal{C}_b(X)$ des fonctions $f : (X, d) \to \mathbb{K}$ continues bornée sur un espace métrique (X, d) à valeurs dans $\mathbb{K}$. Muni de la norme

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in X} |f(x)|,$$

cet espace est un espace de Banach.

Exemple 2.1.7. Un dernier exemple qui sera étudié au Chapitre 4 est l'espace $L^p(X)$ des (classes d'équivalences de) fonctions $\mathcal{A}$-mesurables $f : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{K}$ (où $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré) à valeurs dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\|f\|_{L^p(X)} := \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} < \infty & \text{si } 1 \le p < \infty, \\ \inf\{C > 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} < \infty & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les espaces $(L^p(X), \|\cdot\|_{L^p(X)})$ sont des espaces de Banach. Notons que les espaces de suites $\ell^p(\mathbb{N})$ correspondent aux espaces $L^p(X)$ quand $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \#)$, où $\#$ est la mesure de comptage.

2.2 Espaces vectoriels normés de dimension finie

Nous allons commencer par nous intéresser à l'espace vectoriel normé de dimension finie $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. Le résultat fondamental suivant permet de caractériser toutes les parties compactes de $\mathbb{K}^d$.

Théorème 2.2.1 (Bolzano-Weierstrass). *De toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$, on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. On se ramène au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (quitte à considérer séparément les parties réelles et imaginaires dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Etape 1 : Le cas $d = 1$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $\mathbb{R}$, il existe $M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$y_k := \sup_{n\geq k} x_n \in [-M, M]$$

de sorte que la suite $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant décroissante et minorée par $-M$, converge vers une limite notée ℓ.

Soit $k(1) \in \mathbb{N}$ tel que

$$|y_{k(1)} - \ell| \leq \frac{1}{2}.$$

Par définition du sup, il existe un entier $\sigma(1) \geq k(1)$ tel que

$$x_{\sigma(1)} \leq y_{k(1)} \leq x_{\sigma(1)} + \frac{1}{2},$$

ce qui implique que

$$|x_{\sigma(1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(1)} - y_{k(1)}| + |y_{k(1)} - \ell| \leq 1.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et supposons qu'il existe des entiers $\sigma(1) < \cdots < \sigma(p)$ tels que

$$|x_{\sigma(k)} - \ell| \leq \frac{1}{k} \quad \text{pour tout } 1 \leq k \leq p.$$

Comme $y_k \to \ell$, il existe $k(p+1) \geq \sigma(p) + 1$ tel que

$$|y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{2(p+1)}.$$

Par ailleurs, par définition du sup, il existe un entier $\sigma(p+1) \geq k(p+1)$ tel que

$$x_{\sigma(p+1)} \leq y_{k(p+1)} \leq x_{\sigma(p+1)} + \frac{1}{2(p+1)},$$

ce qui montre que

$$|x_{\sigma(p+1)} - \ell| \leq |x_{\sigma(p+1)} - y_{k(p+1)}| + |y_{k(p+1)} - \ell| \leq \frac{1}{p+1}.$$

On a donc montré par récurrence l'existence d'une extraction $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ telle que

$$|x_{\sigma(p)} - \ell| \leq \frac{1}{p} \quad \text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*,$$

ce qui donne, par passage à la limite, que $x_{\sigma(p)} \to \ell$.

Etape 2 : Le cas $d \geq 2$. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de $(\mathbb{R}^d, |\cdot|_\infty)$, il existe un $M > 0$ tel que $|x_n|_\infty \leq M$. En particulier, comme $|(x_n)_i| \leq |x_n|_\infty$ pour tout $1 \leq i \leq d$, on en déduit que chacune des suites numériques $((x_n)_i)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées dans $\mathbb{R}$. Par conséquent elles admettent chacune une sous-suite convergente. Plus précisément :

— pour $i = 1$, il existe une extraction $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_1 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1(n)})_1 \to a_1;$$

— pour $i = 2$, la suite $((x_{\sigma_1(n)})_2)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1\circ\sigma_2(n))})_2 \to a_2;$$

— ...

— On suppose qu'il existe des extractions $\sigma_1, \ldots, \sigma_{d-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $a_1, \ldots, a_{d-1} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $1 \leq i \leq d-1$ on a

$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i \to a_i.$$

La suite $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_{d-1}(n)})_d)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée dans $\mathbb{R}$, il existe une extraction $\sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $a_d \in \mathbb{R}$ tels que

$$(x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_d(n)})_d \to a_d.$$

Posons $\sigma := \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_d : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui est strictement croissante. De plus, pour tout $1 \leq i \leq d$, la suite $((x_{\sigma(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $((x_{\sigma_1\circ\cdots\circ\sigma_i(n)})_i)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme cette dernière converge vers a_i dans $\mathbb{R}$, on en déduit que $(x_{\sigma(n)})_i \to a_i$ dans $\mathbb{R}$ et donc $x_{\sigma(n)} \to a$ dans $\mathbb{R}^d$. $\square$

Corollaire 2.2.2. *Les parties compactes de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ sont les parties fermées bornées.*

Démonstration. D'après le Corollaire 1.3.4, toute partie compacte de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ est fermée et bornée dans cet espace. Réciproquement si K est fermé et borné dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, le théorème de Bolzano-Weierstrass montre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite qui converge vers un certain $x \in \mathbb{K}^d$. Comme K est fermé, la Proposition 1.1.10 montre que $x \in K$, et donc K est compact. $\square$

Dans la suite de ce paragraphe, nous considérerons un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie égale à $d \in \mathbb{N}$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_d\}$ désigne une base de E, alors tout élément $x \in E$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i e_i \quad \text{avec } (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{K}^d.$$

On définit la quantité

$$\|x\|_* := \max_{1\le i\le d} |x_i| \quad \text{pour tout } x \in E, \tag{2.2.1}$$

et on montre aisément qu'il s'agit effectivement d'une norme sur E.

On considère l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & (\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty) \\ x & \longmapsto & (x_1, \dots, x_d). \end{array}$$

On vérifie sans difficulté que Φ est une application linéaire bijective et que $|\Phi(x)|_\infty = \|x\|_*$ pour tout $x \in E$. Par conséquent, Φ est un isomorphisme isométrique de $(E, \|\cdot\|_*)$ sur $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$.

La caractérisation des parties compactes de $\mathbb{K}^d$ obtenue au Corollaire 2.2.2 s'étend aux espaces vectoriels de dimension finie. Pour ce faire, il convient de remarquer que le choix de la norme n'influe pas sur la topologie et donc sur la description des compacts.

Théorème 2.2.3. *Dans un espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. Soient E un espace vectoriel de dimension finie d et N une norme sur E. Nous allons montrer que les normes N et $\|\cdot\|_*$ sont équivalentes.

Etape 1 : Montrons que l'application

$$\begin{array}{rcl} N : (E, \|\cdot\|_*) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & N(x) \end{array}$$

est Lipschitzienne. En effet, pour tout x et $y \in E$, d'après l'inégalité triangulaire et l'homogénéité de N, on a

$$\begin{aligned} |N(x) - N(y)| \le N(x-y) = N\left(\sum_{i=1}^d (x_i - y_i)e_i\right) \\ \le \sum_{i=1}^d N((x_i - y_i)e_i) = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| N(e_i) \le L\|x-y\|_*, \end{aligned}$$

où l'on a noté $L := \sum_{i=1}^d N(e_i)$.

Etape 2 : Montrons que l'ensemble $S := \{x \in E : \|x\|_* = 1\}$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Le Corollaire 2.2.2 montre que l'ensemble

$$\tilde{S} := \left\{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{K}^d : \ |(x_1, \dots, x_d)|_\infty = 1\right\}$$

est un compact de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ car il est fermé (comme image réciproque du fermé $\{1\}$ de $\mathbb{R}$ par la fonction continue $(x_1, \dots, x_d) \mapsto |(x_1, \dots, x_d)|_\infty$) et borné. Grâce à la continuité de Φ^{-1}, la Proposition 1.3.6 montre que $S = \Phi^{-1}(\tilde{S})$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$.

Etape 3 : Comme N est continue sur E, elle l'est en particulier sur le compact S. La Proposition 1.3.7 montre alors l'existence d'un minimum $a \in S$ et d'un maximum $b \in S$ tels que

$$\|a\|_* = \|b\|_* = 1, \quad N(a) \leq N(x) \leq N(b) \quad \text{pour tout } x \in S.$$

Notons $m = N(a)$ et $M = N(b)$. Comme $\|a\|_* = 1$, on en déduit que $a \neq 0$ et donc que $N(a) > 0$. Par conséquent, $m > 0$, $M > 0$ et pour tout $y \in E$ ($y \neq 0$), on a $y/\|y\|_* \in S$, ce qui implique

$$m \leq N\left(\frac{y}{\|y\|_*}\right) \leq M.$$

Par la propriété d'homogénéité de la norme N, on en déduit que

$$m\|y\|_* \leq N(y) \leq M\|y\|_* \quad \text{pour tout } y \neq 0. \tag{2.2.2}$$

Cette inégalité reste bien évidemment vraie si $y = 0$, ce qui montre que les normes $\|\cdot\|_*$ et N sont équivalentes.

Enfin si N_1 et N_2 sont deux normes quelconques sur E, en combinant les inégalités (2.2.2) appliquées à N_1 et N_2, on en déduit que N_1 et N_2 sont effectivement équivalentes. □

En dimension finie, les parties compactes sont exactement les parties fermées et bornées par le théorème de Bolzano-Weierstrass.

Théorème 2.2.4. *Les parties compactes d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont les parties fermées et bornées.*

Démonstration. Soient $(E, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie d et $K \subset E$ un ensemble fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|)$. D'après le Théorème 2.2.3, K est également fermé et borné dans $(E, \|\cdot\|_*)$. Par continuité de Φ^{-1}, l'ensemble $\Phi(K) = (\Phi^{-1})^{-1}(K)$ est fermé dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. Comme Φ est une isométrie $\Phi(K)$ est également borné dans $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$. L'ensemble $\Phi(K)$ est donc un compact de $(\mathbb{K}^d, |\cdot|_\infty)$ en vertu du Corollaire 2.2.2. La continuité de Φ^{-1} et la Proposition 1.3.6 montrent alors que $K = \Phi^{-1}(\Phi(K))$ est compact dans $(E, \|\cdot\|_*)$ puis également de $(E, \|\cdot\|)$ par une nouvelle application du Théorème 2.2.3. Réciproquement, d'après le Corollaire 1.3.4, toute partie compacte de $(E, \|\cdot\|)$ est fermée et bornée. □

Cette caractérisation est fausse en dimension infinie, comme l'atteste le résultat suivant.

Théorème 2.2.5 (Riesz). *Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Alors la boule unité fermée est compacte si et seulement si E est de dimension finie.*

Démonstration. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie. Comme la boule unité fermée $B = \{x \in E : \ \|x\| \leq 1\}$ est fermée et bornée, elle est compacte en vertu du Théorème 2.2.4.

Réciproquement, supposons que B est compacte. Par la propriété de Borel-Lebesgue, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un nombre fini de points $x_1, \ldots, x_N \in B$ tels que

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon). \tag{2.2.3}$$

Soit $F = \mathrm{Vect}\{x_i\}_{1\le i\le N}$ qui est un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Si $F = E$, alors le résultat suit. Dans le cas contraire, on peut trouver un $x \in E \setminus F$. Notons $d = \mathrm{dist}(x, F) = \inf_{y\in F} \|x - y\|$. Comme F est de dimension finie, F est fermé dans E et donc $d > 0$. On peut alors trouver un $y_\varepsilon \in F$ tel que

$$d \le \|x - y_\varepsilon\| \le \frac{d}{1-\varepsilon}.$$

Posons $z_\varepsilon = \frac{x-y_\varepsilon}{\|x-y_\varepsilon\|} \in B$. Alors pour tout $y \in F$,

$$\|z_\varepsilon - y\| = \frac{\|x - y_\varepsilon - \|x - y_\varepsilon\|y\|}{\|x - y_\varepsilon\|} \ge d\frac{1-\varepsilon}{d} = 1-\varepsilon$$

car $y_\varepsilon + \|x - y_\varepsilon\|y \in F$, ce qui montre que

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \ge 1 - \varepsilon.$$

Par ailleurs, d'après (2.2.3), il existe un $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $z_\varepsilon \in B(x_i, \varepsilon)$ et donc, puisque $x_i \in F$,

$$\mathrm{dist}(z_\varepsilon, F) \le \|z_\varepsilon - x_i\| < \varepsilon.$$

On aboutit à une contradiction en choisissant $\varepsilon \le 1/2$. $\square$

Remarque 2.2.6. Cette propriété est propre aux espaces vectoriels normés. Il existe en particulier des espaces métriques de "dimension infinie" pour lesquels les parties fermées et bornées sont compactes. C'est notamment le cas de l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, ainsi que de l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$ (pour lesquels il convient de définir une distance).

2.3 Applications linéaires continues

Théorème 2.3.1. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \to F$ une application linéaire. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est continue en 0 ;*
2. *f est continue ;*
3. *f est uniformément continue ;*
4. *f est Lipschitzienne ;*
5. *Il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout $x \in E$,*

$$\|f(x)\|_F \le M\|x\|_E.$$

Démonstration. Par linéarité de f, il est clair que 5. $\Rightarrow$ 4. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 1. Il reste à montrer que 1. implique 5. Par continuité de f en 0, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\|_E \le \delta$, alors $\|f(x)\|_F \le 1$. Soit $x \in E$ quelconque (non nul) de sorte que $x' = \delta x/\|x\|_E$ satisfait

$\|x'\|_E \leq \delta$. Alors $\|f(x')\|_F \leq 1$, ce qui implique par linéarité de f et homogénéité de la norme que

$$\|f(x)\|_F \leq \frac{1}{\delta}\|x\|_E,$$

qui reste vrai pour $x = 0$. □

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Il s'agit clairement d'un espace vectoriel. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit la quantité

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{0<\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 2.3.2. *La quantité $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ définit une norme sur $\mathcal{L}(E, F)$ ce qui en fait un espace vectoriel normé.*

Démonstration. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, comme $\|\cdot\|_F$ est une norme sur F, il vient

$$\|\lambda f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|\lambda f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda| \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = |\lambda|\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)},$$

ce qui établit l'homogénéité de la norme. On a évidemment que $\|0\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, et si $\|f\|_{\mathcal{L}(E,F)} = 0$, alors $\|f(x)\|_F = 0$ pour tout $x \in E$, ce qui implique que $f(x) = 0$ pour tout $x \in E$, soit $f = 0$. Enfin, si f_1 et $f_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, quel que soit $x \in E$ ($x \neq 0$), on a

$$\|(f_1+f_2)(x)\|_F = \|f_1(x)+f_2(x)\|_F \leq \|f_1(x)\|_F+\|f_2(x)\|_F \leq (\|f_1\|_{\mathcal{L}(E,F)}+\|f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)})\|x\|_E.$$

En divisant par $\|x\|_E$ puis en passant au sup dans le membre de gauche, il vient $\|f_1 + f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \|f_1\|_{\mathcal{L}(E,F)} + \|f_2\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, ce qui montre l'inégalité triangulaire. □

Nous allons maintenant énoncer une condition suffisante pour que $\mathcal{L}(E, F)$ soit un espace de Banach.

Proposition 2.3.3. *Si F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ l'est aussi. En particulier, $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq n_0$,

$$\frac{\|f_n(x) - f_m(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \|f_n - f_m\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in E. \tag{2.3.1}$$

On en déduit que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans F qui est complet. Il existe donc $\ell_x \in F$ tel que $f_n(x) \to \ell_x$. On montre facilement que $x \mapsto \ell_x$ est linéaire et l'on note $\ell_x = f(x)$. Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$ elle est bornée dans cet espace et donc il existe une constante $C > 0$ telle que $\|f_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C$. Par conséquent, $\|f_n(x)\|_F \leq \|f_n\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E \leq C\|x\|_E$. Comme $f_n(x) \to f(x)$ dans F, alors

$\|f_n(x)\|_F \to \|f(x)\|_F$ et il vient par passage à la limite que $\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E$, soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Enfin, dans (2.3.1), on passe à la limite quand $m \to \infty$ et on obtient

$$\frac{\|f_n(x) - f(x)\|_F}{\|x\|_E} \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq n_0 \text{ et tout } x \in E.$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il s'ensuit que $\|f_n - f\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $\mathcal{L}(E,F)$. □

Le résultat suivant permet de passer d'une majoration ponctuelle à une majoration uniforme.

Théorème 2.3.4 (Banach-Steinhaus). *Soit E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Si $\{f_i\}_{i\in I}$ est une famille dans $\mathcal{L}(E,F)$ telle que*

$$\sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_F < \infty \quad \textit{pour tout } x \in E,$$

alors

$$\sup_{i\in I} \|f_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} < \infty.$$

Démonstration. On pose $X_n := \{x \in E : \sup_{i\in I} \|f_i(x)\|_F \leq n\}$. Comme f_i est continue, $x \mapsto \|f_i(x)\|_F$ l'est également et l'ensemble $\{x \in E : \|f_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé. Par suite $X_n = \bigcap_{i\in I}\{x \in E : \|f_i(x)\|_F \leq n\}$ est fermé. Par ailleurs, par hypothèse,

$$E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

L'ensemble E étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que X_{n_0} n'est pas d'intérieur vide. Il existe donc un $x_0 \in E$ et $r_0 > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r_0) \subset X_{n_0}$, soit $\|f_i(x)\|_F \leq n_0$ pour tout $x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et tout $i \in I$. Si $x \in \overline{B}(0,1)$, alors $x_0 + r_0 x \in \overline{B}(x_0, r_0)$ et donc

$$\|f_i(x)\|_F \leq \frac{1}{r_0}(n_0 + \|f_i(x_0)\|_F) \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|f_i(x_0)\|_F\right).$$

Par passage au sup en x dans le membre de gauche, il vient

$$\|f_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \frac{1}{r_0}\left(n_0 + \sup_{i\in I}\|f_i(x_0)\|_F\right),$$

d'où le résultat. □

Théorème 2.3.5 (Application ouverte). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application surjective. Alors f est une application ouverte, i.e., pour tout ouvert $U \subset E$, l'ensemble $f(U)$ est ouvert dans F.*

Démonstration. Notons B_E et B_F la boule unité ouverte de E et F, respectivement. Comme f est surjective, on a

$$F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} n\overline{f(B_E)}.$$

Par conséquent, F étant complet, le théorème de Baire assure l'existence d'un indice $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0\overline{f(B_E)}$ n'est pas d'intérieur vide dans F. On peut donc trouver un $y_0 \in F$ et $r_0 > 0$ tels que $y_0 + r_0 B_F \subset n_0\overline{f(B_E)}$. Comme $y_0 \in n_0\overline{f(B_E)}$, par symétrie de B_E par rapport à l'origine, on en déduit que $-y_0 \in n_0\overline{f(B_E)}$, d'où

$$r_0 B_F = -y_0 + y_0 + r_0 B_F \subset n_0\overline{f(B_E)} + n_0\overline{f(B_E)},$$

puis, par convexité de B_E, il vient que $r_0 B_F \subset 2n_0\overline{f(B_E)}$. En posant $c = r_0/(4n_0)$, on a donc montré que

$$2cB_F \subset \overline{f(B_E)}. \tag{2.3.2}$$

Soit $y \in cB_F$, d'après (2.3.2), on a $2y \in \overline{f(B_E)}$, il existe un $x_1 \in \frac{1}{2}B_E$ tel que $\|2y - f(2x_1)\|_F < c$, soit $\|y - f(x_1)\|_F < \frac{c}{2}$. Par récurrence, supposons avoir à notre disposition des éléments $x_1, \dots, x_n \in E$ tels que pour tout $1 \le k \le n$,

$$\|x_k\|_E < 2^{-k}, \quad \|y - f(x_1 + \cdots + x_n)\|_F < c2^{-n}.$$

Alors $2^{n+1}(y - f(x_1 + \cdots + x_n)) \in 2cB_F$ et d'après (2.3.2) il existe donc un $x_{n+1} \in 2^{-n-1}B_E$ tel que $\|2^{n+1}(y - f(x_1 + \cdots + x_n)) - f(2^{n+1}x_{n+1})\|_F < c$, soit

$$\|x_{n+1}\|_E < 2^{-n-1}, \quad \|y - f(x_1 + \cdots + x_n + x_{n+1})\|_F < c2^{-n-1}.$$

Pour tout $n \ge 1$, notons $s_n := \sum_{k=1}^n x_k$ la suite des sommes partielles. Alors $(s_n)_{n\ge 1}$ définit une suite de Cauchy dans E, complet. Comme $\|s_n\|_E \le 1$, il existe $x \in \overline{B}_E \subset 2B_E$ tel que $s_n \to x$ dans E et $y = f(x)$. On a donc montré que pour tout $y \in cB_F$, il existe un $x \in 2B_E$ tel que $y = f(x)$, autrement dit,

$$\frac{c}{2}B_F \subset f(B_E).$$

Enfin, si U est un ouvert de E et $y \in f(U)$, il existe un $x \in U$ et $r > 0$ tels que $y = f(x)$ et $x + rB_E \subset U$. Par conséquent, $y + \frac{cr}{2}B_F \subset f(x) + rf(B_E) \subset f(U)$, ce qui montre effectivement que $f(U)$ est ouvert dans F. □

Un corollaire immédiat du théorème de l'application ouverte est le résultat suivant, bien connu en dimension finie, qui assure que l'inverse d'une application linéaire continue reste continue.

Théorème 2.3.6 (Banach). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E,F)$ une application inversible. Alors $f^{-1} \in \mathcal{L}(F,E)$.*

Démonstration. Le théorème de l'application ouverte montre que pour tout ouvert $U \subset E$, l'ensemble $f(U) = (f^{-1})^{-1}(U)$ est un ouvert de F, ce qui montre que f^{-1} est continue. □

Le résultat suivant donne une caractérisation de la continuité d'une application linéaire en terme de son graphe.

Théorème 2.3.7 (Graphe fermé). *Soient E et F deux espaces de Banach et $f : E \to F$ une application linéaire. On note $G(f) := \{(x, f(x)) : x \in E\}$ le graphe de f. Alors f est continue si et seulement si $G(f)$ est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Il est clair que si f est continue, alors son graphe est fermé. Supposons alors que $G(f)$ est fermé dans $E \times F$. Notons $\|x\|'_E := \|x\|_E + \|f(x)\|_F$ et montrons que $(E, \|\cdot\|'_E)$ est un espace de Banach. Le fait que $\|\cdot\|'_E$ est une norme résulte de la linéarité de f. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|'_E)$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Par complétude de ces deux espaces, il existe $x \in E$ et $y \in F$ tels que $x_n \to x$ dans $(E, \|\cdot\|_E)$ et $f(x_n) \to y$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Comme $(x_n, f(x_n)) \in G(f)$, $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ dans $E \times F$ et $G(f)$ est fermé dans l'espace produit $E \times F$, on en déduit que $(x, y) \in G(f)$, soit $y = f(x)$. On a montré que $x_n \to x$ dans $(E, \|\cdot\|'_E)$, ce qui établit que $(E, \|\cdot\|'_E)$ est un espace de Banach.

Définissons l'application identité

$$i : (E, \|\cdot\|'_E) \to (E, \|\cdot\|_E)$$

qui à $x \in E$ associe $i(x) = x$. Cette application est évidemment linéaire, inversible. Par ailleurs, pour tout $x \in E$, on a $\|i(x)\|_E = \|x\|_E \leq \|x\|_E + \|f(x)\|_F = \|x\|'_E$ ce qui montre qu'elle est continue. Le théorème de Banach implique que son inverse $i^{-1} : (E, \|\cdot\|_E) \to (E, \|\cdot\|'_E)$ est également continue. Il existe donc une constante $c > 0$ telle que

$$\|x\|'_E = \|i^{-1}(x)\|'_E \leq c\|x\|_E.$$

Comme $\|x\|'_E \geq \|f(x)\|_F$, il vient $\|f(x)\|_F \leq c\|x\|_E$, ce qui montre la continuité de f. □

Chapitre 3

Espaces de fonctions continues

Dans ce chapitre, nous nous attacherons à montrer des propriétés topologiques d'espaces de fonctions continues d'un espace métrique (X, d) dans $\mathbb{K}$ (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On notera

$$\mathcal{C}(X; \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue}\}$$

et

$$\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K}) := \{f : X \to \mathbb{K} \text{ continue et bornée}\}.$$

Les espaces $\mathcal{C}(X; \mathbb{K})$ et $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ sont clairement des espaces vectoriels et la quantité

$$\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$$

est finie quelque soit $f \in \mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$. On montre aisément qu'il s'agit d'une norme sur $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$, ce qui confère à $(\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$ une structure d'espace vectoriel normé.

3.1 Complétude de $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$

Proposition 3.1.1. *L'espace $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ est complet. Pour ce faire, considérons une suite de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$ et montrons qu'elle converge uniformément sur X vers une fonction $f \in \mathcal{C}_b(X; \mathbb{K})$. D'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq n_0$ et pour tout $x \in X$,

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|_\infty \leq \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K}$ complet, ce qui assure l'existence d'un scalaire $f(x) \in \mathbb{K}$ tel que $f_n(x) \to f(x)$ dans $\mathbb{K}$. Par passage à la limite quand $m \to \infty$ dans l'inégalité précédente, puis par passage au sup en x, il vient pour tout $n \geq n_0$,

$$\|f - f_n\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui assure que f_n converge uniformément vers f sur X. De plus, l'inégalité précédente montre que $\|f\|_\infty \leq \|f_{n_0}\|_\infty + \varepsilon < \infty$, ce qui assure que f est bornée. Il reste à montrer que la fonction f est continue. Pour ce faire, on utilise la continuité de f_{n_0} qui assure, l'existence d'un $\delta > 0$ tel que si $y \in X$ et $d(x,y) \leq \delta$, alors $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq \varepsilon$. D'où

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \\ &\leq 2\|f - f_{n_0}\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| \leq 3\varepsilon, \end{aligned}$$

ce qui montre bien la continuité de f en x et donc que $f \in \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. □

Remarque 3.1.2. En vertu de la Proposition 1.3.7, si (X,d) est un espace métrique compact, on a que $\mathcal{C}(X;\mathbb{K}) = \mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$. Dans ce cas, $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ est un espace de Banach.

3.2 Séparabilité de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$

Le Théorème de Weierstrass affirme que toute fonction continue sur un intervalle compact de $\mathbb{R}$ peut être approchée uniformément par une suite de fonctions polynômiales. Le Théorème de Stone-Weierstrass donne une généralisation de ce résultat au cas des fonctions continues $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ sur un espace métrique compact (X,d), vu comme une algèbre de Banach muni du produit ponctuel des fonctions. Ce résultat de portée générale donne une caractérisation des sous-algèbres $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ qui sont denses dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$. Nous nous concentrons ici juste sur la condition suffisante dans le cas de fonctions à valeurs réelles ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Théorème 3.2.1 (Stone-Weierstrass, cas réel). *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points, i.e., pour tout $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$.

Nous commençons par montrer le résultat suivant d'approximation polynômiale de la fonction racine carrée.

Lemme 3.2.2. *Il existe une suite de fonctions polynômiales qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction racine carrée.*

Démonstration. On définit la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout $x \in [0,1]$,

$$\begin{cases} P_0(x) = 0, \\ P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - P_n(x)^2\right) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction P_n est polynômiale. Montrons par récurrence que $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. En effet, cette propriété est claire pour $n = 0$. Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $0 \leq P_n(x) \leq \sqrt{x}$ pour tout $x \in [0,1]$. Alors, $P_{n+1}(x) \geq 0$ et

$$\begin{aligned} P_{n+1}(x) &= P_n(x) + \frac{1}{2}(\sqrt{x} - P_n(x))(\sqrt{x} + P_n(x)) \\ &\leq P_n(x) + (\sqrt{x} - P_n(x)) \\ &\leq \sqrt{x}, \end{aligned}$$

car $\sqrt{x}-P_n(x) \geq 0$ et $\sqrt{x}+P_n(x) \leq 2\sqrt{x} \leq 2$ pour tout $x \in [0,1]$. On en déduit que, pour tout $x \in [0,1]$, la suite $(P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante en majorée. Elle converge pontuellement vers une limite $\ell(x) \geq 0$ qui satisfait $\ell(x) = \ell(x) + \frac{1}{2}(x - \ell(x)^2)$, i.e. $\ell(x) = \sqrt{x}$.

Montrons à présent que la convergence est uniforme. Pour ce faire, on remarque que $x \mapsto \sqrt{x} - P_n(x)$ est continue sur $[0,1]$. D'après la Proposition 1.3.7, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que

$$\max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_n(x)) = \sqrt{x_n} - P_n(x_n).$$

Comme $[0,1]$ est compact, il existe une sous suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $\bar{x} \in [0,1]$ tels que $x_{\sigma(n)} \to \bar{x}$. En utilisant le fait que la suite de fonctions $(\sqrt{\cdot} - P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_{\sigma(n)}(x_{\sigma(n)})\right) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{x_{\sigma(n)}} - P_m(x_{\sigma(n)})\right) \\
&= \sqrt{\bar{x}} - P_m(\bar{x}).
\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $m \to \infty$, on obtient que

$$\lim_{n\to\infty} \max_{x\in[0,1]} (\sqrt{x} - P_{\sigma(n)}(x)) = 0.$$

Enfin, en utilisant de nouveau le fait que la suite de fonction $(\sqrt{\cdot}-P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, il vient $\|\sqrt{\cdot} - P_n\|_\infty \to 0$. □

On montre à présent que toute sous-algèbre (fermée) de fonctions continues est stable par passage au maximum et minimum.

Corollaire 3.2.3. *Sous les mêmes hypothèses que dans le Théorème 3.2.4, si f et $g \in \overline{\mathcal{A}}$, alors $\max(f,g)$ et $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$.*

Démonstration. Par continuité de la somme et du produit, on en déduit que si $\mathcal{A}$ est une algèbre, il en est de même pour $\overline{\mathcal{A}}$. Si $\|f-g\|_\infty = 0$, alors $\max(f,g) = \min(f,g) = f = g \in \overline{\mathcal{A}}$. On suppose donc désormais que $\|f-g\|_\infty > 0$. On remarque tout d'abord que, du fait que

$$\max(f,g) := \frac{1}{2}(f+g+|f-g|) \text{ et } \min(f,g) := \frac{1}{2}(f+g-|f-g|),$$

il suffit de montrer que $|f-g| \in \overline{\mathcal{A}}$. Soit $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions polynômiales construite au Lemme 3.2.2. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est une algèbre, il vient

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f-g\|_\infty \in \overline{\mathcal{A}}$$

et d'après le Lemme 3.2.2,

$$P_n\left(\frac{(f-g)^2}{\|f-g\|_\infty^2}\right)\|f-g\|_\infty \to |f-g| \quad \text{uniformément sur } X.$$

Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermée, on en déduit que $|f-g| \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc que $\max(f,g)$ et $\min(f,g) \in \overline{\mathcal{A}}$. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass.

Démonstration du Théorème 3.2.4. La preuve est divisée en quatre étapes.

Etape 1 : Pour tout x, $y \in X$ et tout α, $\beta \in \mathbb{R}$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

En effet, si $\alpha = \beta$, il suffit de considérer la fonction constante égale à $\alpha = \beta$. Par ailleurs, si $\alpha \neq \beta$, alors par hypothèse, il existe une fonction $g \in \mathcal{A}$ telle que $g(x) \neq g(y)$. Dans ce cas, la fonction

$$f := \alpha + \frac{\beta - \alpha}{g(y) - g(x)}(g - g(x)),$$

appartient à $\mathcal{A}$ et satisfait $f(x) = \alpha$ et $f(y) = \beta$.

Etape 2 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$, $x \in X$ et $\varepsilon > 0$, il existe une fonction f^x dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, d'après l'étape 1, pour tout $y \in X$, il existe une fonction $f^x_y \in \mathcal{A}$ telle que $f^x_y(x) = h(x)$ et $f^x_y(y) = h(y)$. Comme h et f^x_y sont continues, il existe $r^x_y > 0$ tel que pour tout $z \in B(y, r^x_y)$,

$$|f^x_y(z) - f^x_y(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(y) - h(z)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Du fait que $f^x_y(y) = h(y)$, on en déduit que $f^x_y(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in B(y, r^x_y)$. Comme

$$X \subset \bigcup_{y \in X} B(y, r^x_y),$$

par compacité de X, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\{B(y_i, r^x_{y_i})\}_{1 \leq i \leq l}$. D'après le Corollaire 3.2.3, la fonction

$$f^x := \min_{1 \leq i \leq l} f^x_{y_i}$$

appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ et elle satisfait $f^x(x) = h(x)$ et $f^x(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 3 : Pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $f \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que $h(z) - \varepsilon < f(z) < h(z) + \varepsilon$ pour tout $z \in X$.

En effet, soient $x \in X$ et f^x la fonction construite à l'étape 2. Les fonctions f^x et h étant continues, il existe $r'_x > 0$ tel que pour tout $z \in B(x, r'_x)$,

$$|f^x(z) - f^x(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad |h(z) - h(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme $f^x(x) = h(x)$, on en déduit que $f^x(z) > h(z) - \varepsilon$ pour tout $z \in B(x, r'_x)$. On utilise de nouveau la compacité de X pour extraire du recouvrement ouvert $\{B(x, r'_x)\}_{x \in X}$ de X un sous-recouvrement fini $\{B(x_j, r'_{x_j})\}_{1 \leq j \leq m}$. On introduit la fonction

$$f := \max_{1 \leq j \leq m} f^{x_j}$$

qui appartient à $\overline{\mathcal{A}}$ en vertu du Corollaire 3.2.3, et qui satisfait $h(z)-\varepsilon < f(z) < h(z)+\varepsilon$ pour tout $z \in X$.

Etape 4 : D'après l'étape 3, pour tout $h \in \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\overline{\mathcal{A}}$ telle que $f_n \to h$ uniformément sur X. Comme $\overline{\mathcal{A}}$ est fermé, on en déduit que $h \in \overline{\mathcal{A}}$ et donc $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. □

Théorème 3.2.4 (Stone-Weierstrass, cas complexe). *Soient (X,d) un espace métrique compact et $\mathcal{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$. On suppose que*
- *$\mathcal{A}$ contient les constantes ;*
- *$\mathcal{A}$ sépare les points ;*
- *$\mathcal{A}$ est stable par passage au complexe conjugué : si $f \in \mathcal{A}$, alors $\bar{f} \in \mathcal{A}$.*

Alors $\mathcal{A}$ est dense dans $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $\mathcal{A}_\mathbb{R} := \{\mathrm{Re}(f) : f \in \mathcal{A}\}$. Comme $\mathrm{Re}(f) = \frac{1}{2}(f+\bar{f})$ et $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Re}(-if)$, on en déduit que $\mathcal{A}_\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{A}_\mathbb{R} + i\mathcal{A}_\mathbb{R}$. On montre que $\mathcal{A}_\mathbb{R}$ est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{R})$ qui contient les constantes et qui sépare les points, de sorte que le théorème 3.2.1 assure que $\overline{\mathcal{A}_\mathbb{R}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{R})$. Par conséquent, $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{C}(X;\mathbb{C})$. □

Nous donnons à présent quelques conséquences du théorème de Stone-Weierstrass.

Corollaire 3.2.5. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(K;\mathbb{K})$, il existe une suite de fonctions polynômiales $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui converge uniformément vers f sur K.*

Démonstration. L'algèbre $\mathbb{K}[X]$ des fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}^N$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ contient les fonctions constantes et sépare les points. En effet, si x_0 et $y_0 \in \mathbb{R}^N$ sont tels que $x_0 \neq y_0$, alors la fonction affine $f : x \mapsto (x-x_0)\cdot(x_0-y_0) + (x-y_0)\cdot(x_0-y_0)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$ et satisfait $f(x_0) = \|x_0-y_0\|^2 \neq -\|x_0-y_0\|^2 = f(y_0)$ (car $\|x_0-y_0\| \neq 0$). Par ailleurs, si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, alors $\mathbb{C}[X]$ est stable par passage au complexe conjugué. La conclusion suit du Théorème de Stone-Weierstrass. □

Corollaire 3.2.6. *Soit K un compact de $\mathbb{R}^N$. Alors l'espace $\mathcal{C}(K;\mathbb{K})$ est séparable.*

Démonstration. En distinguant les parties réelles et imaginaires, on se ramène au cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. D'après le Corollaire 3.2.5, l'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels est dense dans $\mathcal{C}(K)$. Il suffit donc de montrer que $\mathbb{R}[X]$ est séparable pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathbf{P}_n$ (resp. $\mathbf{Q}_n$) l'ensemble des polynômes à coefficients réels (resp. rationnels) de degré inférieur ou égal à n. L'espace $\mathbf{P}_n$ étant un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie $d = \dim(\mathbf{P}_n)$, on en déduit que $\mathbf{P}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^d$. Comme $\mathbb{Q}^d$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathbf{Q}_n$ est isomorphe à $\mathbb{Q}^d$, il s'ensuit que $\mathbf{Q}_n$ est dénombrable et dense dans $\mathbf{P}_n$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$ (on utilise ici le fait que toutes les normes sont équivalentes en dimension finie). Enfin comme $\mathbb{R}[X] = \bigcup_n \mathbf{P}_n$ et $\mathbb{Q}[X] := \bigcup_n \mathbf{Q}_n$, on en déduit que $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}[X]$ pour la topologie de $\mathcal{C}(K)$. □

En général l'espace $\mathcal{C}_b(X;\mathbb{K})$ n'est pas séparable comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 3.2.7. Soient $-\infty \le a < b \le +\infty$, on considère l'espace $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Nous allons montrer que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ n'est pas séparable. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante telle que $a_n \to a$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $b_n \to b$. On pose $x_n = \frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ et on considère une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}_c(]a,b[)$ telle que $0 \le \varphi_n \le 1$, $\varphi_n(x_n) = 1$ et $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset]a_{n+1}, a_n[$. En notant $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, on pose pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$

$$\varphi_A := \sum_{n\in A} \varphi_n.$$

Comme $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \cap \mathrm{Supp}(\varphi_m) = \emptyset$ dès que $n \neq m$, la somme définissant φ_A est toujours localement finie même si A est infini. Par conséquent, φ_A est continue et $0 \le \varphi_A \le 1$, ce qui montre que $\varphi_A \in \mathcal{C}_b(]a,b[)$.

Supposons que $\mathcal{C}_b(]a,b[)$ est séparable est considérons une famille $D = \{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui est dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_b(]a,b[)$. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, on considère le plus petit entier $k_A \in \mathbb{N}$ tel que

$$\|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty < \frac{1}{2}.$$

On définit ainsi une application $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$ qui a toute partie A de $\mathbb{N}$ associe $\Phi(A) := k_A$. Notons que si A et $B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ sont tels que $A \neq B$, alors (quitte à échanger les rôles de A et B) il existe $n_0 \in A \setminus B$ et donc

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \ge |\varphi_A(x_{n_0}) - \varphi_B(x_{n_0})| = \varphi_A(x_{n_0}) = 1.$$

Par conséquent, si $k_A = k_B$, on aurait par inégalité triangulaire

$$\|\varphi_A - \varphi_B\|_\infty \le \|\varphi_A - f_{k_A}\|_\infty + \|\varphi_B - f_{k_B}\|_\infty < 1,$$

ce qui est absurde. On a donc montré que si $A \neq B$, alors $k_A \neq k_B$ ce qui établit l'injectivité de l'application Φ, et donc que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ s'injecte dans $\mathbb{N}$ ce qui est impossible car $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est infini non dénombrable. [1]

3.3 Critère de compacité

Nous établissons pour finir un critère de compacité dans l'espace $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$.

Théorème 3.3.1 (Ascoli-Arzela)**.** *Soient (X,d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ telle que*

i) (bornitude) pour tout $x \in X$, il existe $M(x) > 0$ telle que $\sup_n |f_n(x)| \le M(x)$;

ii) (uniforme équi-continuité) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$,

$$d(x,y) \le \delta \quad \Longrightarrow \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \le \varepsilon.$$

1. Si $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ était dénombrable, il existerait une bijection $\Psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Soit $E = \{n \in \mathbb{N} : \ n \notin \Psi(n)\}$. Par surjectivité de Ψ, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\Psi(n_0) = E$. Si $n_0 \in E$, alors par définition de E on aurait $n_0 \notin \Psi(n_0) = E$ ce qui est impossible. Si $n_0 \notin E$, alors toujours par définition de E, on aurait $n_0 \in \Psi(n_0) = E$ ce qui est de nouveau impossible.

Alors, il existe une sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ *et une fonction* $f \in \mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ *telles que* $f_{\sigma(n)}$ *converge uniformément vers* f *sur* X*.*

Réciproquement, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de fonctions de* $\mathcal{C}(X;\mathbb{K})$ *uniformément convergente, alors elle est bornée et uniformément équi-continue.*

Démonstration. Pour simplifier, on ne traitera que le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'espace métrique (X, d) étant compact, la Proposition 1.4.2 assure qu'il est séparable. Il existe donc un sous-ensemble D dénombrable et dense dans X.

Etape 1 : Définition de la fonction f sur D. L'ensemble D étant dénombrable, on peut énumérer ses éléments en une suite $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$. D'après la propriété de bornitude i), pour tout $j \in \mathbb{N}$, la suite numérique $(f_n(a_j))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Nous allons appliquer un principe d'extraction diagonal de sous-suite. Pour $j = 0$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(f_{\sigma_0(n)}(a_0))_{n\in\mathbb{N}}$ et $f(a_0) \in \mathbb{R}$ tels que $f_{\sigma_0(n)}(a_0) \to f(a_0)$. Pour un certain $k \in \mathbb{N}$, on suppose avoir à notre disposition des extractions $\sigma_0, \dots, \sigma_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissantes et des réels $f(a_0), \dots, f(a_k) \in \mathbb{R}$ tels que

$$f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_j(n)}(a_j) \to f(a_j) \quad \text{pour tout } 0 \le j \le k.$$

La suite $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, le Théorème de Bolzano-Weierstrass permet de nouveau d'extraire une sous-suite notée $(f_{\sigma_0\circ\cdots\sigma_k\circ\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1}))_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un $f(a_{k+1}) \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$f_{\sigma(n)} := f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_n(n)}$$

de sorte que $(f_{\sigma(n)}(a_k))_{n\ge k}$ est une sous-suite de $(f_{\sigma_0\circ\cdots\circ\sigma_k(n)}(a_k))_{n\ge k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Par conséquent,

$$\lim_{n\to\infty} f_{\sigma(n)}(a_k) = f(a_k) \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}. \tag{3.3.1}$$

Etape 2 : Convergence simple. Montrons que pour tout $x \in X$, la suite $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Soient ε et δ comme dans la définition de l'uniforme équi-continuité. Par densité de D dans X, il existe un $a \in D$ tel que $d(x, a) \le \delta$. Par conséquent, pour tout n et $m \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad \le |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a)| + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| + |f_{\sigma(m)}(a) - f_{\sigma(m)}(x)| \\
&\qquad\qquad \le 2\varepsilon + |f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)|.
\end{aligned}$$

Comme $a \in D$, d'après l'étape 1, la suite numérique $(f_{\sigma(n)}(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et donc est de Cauchy. Il existe donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \ge N$, on a $|f_{\sigma(n)}(a) - f_{\sigma(m)}(a)| \le \varepsilon$, ce qui implique que

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(m)}(x)| \le 3\varepsilon.$$

Ceci montre effectivement que $(f_{\sigma(n)}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc il existe un $f(x) \in \mathbb{R}$ tel que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$.

Etape 3 : Uniforme continuité de f. D'après la propriété d'uniforme équi-continuité de f_n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que pour tout x, $y \in X$ avec $d(x,y) \le \delta$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(y)| \le \varepsilon.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$, on obtient que

$$|f(x) - f(y)| \le \varepsilon,$$

ce qui montre bien l'uniforme continuité de f sur X.

Etape 4 : Convergence uniforme. Soient ε et δ donnés par la propriété ii). Par compacité de X, il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $a_1, \dots, a_{N_\varepsilon} \in X$ tels que $X \subset \bigcup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(a_i, \delta/2)$. Donc si $x \in X$, il existe $i \in \{1, \dots, N_\varepsilon\}$ tel que $x \in B(a_i, \delta/2)$ et

$$\begin{aligned} |f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| &\le |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(a_i)| + |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| + |f(a_i) - f(x)| \\ &\le 2\varepsilon + \max_{1 \le i \le N_\varepsilon} |f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)|, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'uniforme équi-continuité de la suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et l'uniforme continuité de f établie à l'étape 3. D'après l'étape 2, on en déduit que $|f_{\sigma(n)}(a_i) - f(a_i)| \le \varepsilon$ dès lors que $n \ge n_i$ (qui ne dépend que de ε et de a_i). En notant $n_\varepsilon := \max\{n_1, \dots, n_{N_\varepsilon}\}$, il vient : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $|f_{\sigma(n)}(x) - f(x)| \le 3\varepsilon$ pour tout $n \ge n_\varepsilon$ et tout $x \in X$. On en déduit la convergence uniforme de $f_{\sigma(n)}$ vers f sur X.

Etape 5 : Réciproque. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}(X)$ qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}(X)$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{C}(X)$. Par ailleurs, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon/3$ pour tout $n \ge N$. Comme les fonctions f, $f_0, \dots, f_N$ sont continues sur le compact X, elles sont uniformément continues d'après le Théorème de Heine. Par conséquent, il existe $\eta > 0$ et $\delta_0, \dots, \delta_N > 0$ tels que pour tout $x, y \in X$

$$\begin{cases} d(x,y) \le \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \\ d(x,y) \le \delta_i \Longrightarrow |f_i(x) - f_i(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{pour tout } 0 \le i \le N. \end{cases}$$

On définit $\delta := \min(\eta, \delta_0, \dots, \delta_N)$ de sorte que si x et $y \in X$, alors

$$d(x,y) \le \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} \text{ et } |f_i(x) - f_i(y)| \le \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pour tout } 0 \le i \le N.$$

Par ailleurs, pour tout $n \ge N$ et pour tout $x, y \in X$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_n(y)| &\le |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f(y)| + |f(y) - f_n(y)| \\ &\le 2\|f - f_n\|_\infty + |f(x) - f(y)| \le \varepsilon. \end{aligned}$$

On obtient finalement que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien uniformément équi-continue. □

3.4 Quelques espaces de fonctions continues

Pour simplifier, dans ce qui suit, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ ($N \geq 1$). Si $K \subset \Omega$ est un compact, on note

$$\mathcal{C}_K(\Omega) = \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \ \mathrm{Supp}(f) \subset K\},$$

où $\mathrm{Supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}}$ désigne le support de f. Il s'agit clairement d'un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}_b(\Omega)$, ce qui en fait donc un espace de Banach. On note également

$$\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{K \subset \Omega \text{ compact}} \mathcal{C}_K(\Omega)$$

l'ensemble des fonctions continues et à support compact dans Ω. Cet espace n'est pas fermé dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$ comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 3.4.1. En dimension $N = 1$, on pose $\Omega =]-1,1[$ et, pour tout $n \geq 1$, la fonction $f_n :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,-1+\frac{1}{n}[\cup]1-\frac{1}{n},1[, \\ 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ \frac{2n}{2-n}(x-1+\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1-\frac{1}{n}[, \\ \frac{2n}{n-2}(x+1-\frac{1}{n}) & \text{si } x \in]-1+\frac{1}{n},-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Clairement $f_n \in \mathcal{C}_c(]-1,1[)$ et $f_n \to f$ uniformément sur $[-1,1]$ où

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2},\frac{1}{2}], \\ 2(1-x) & \text{si } x \in]\frac{1}{2},1[, \\ 2(x+1) & \text{si } x \in]-1,-\frac{1}{2}[. \end{cases}$$

Or $\mathrm{Supp}(f) = [-1,1]$ ce qui montre que $f \notin \mathcal{C}_c(]-1,1[)$.

On note $\mathcal{C}_0(\Omega)$ la fermeture de l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$. Nous allons caractériser l'espace $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions continues qui tendent vers 0 sur le bord de Ω. Avant cela, il convient de rappeler le résultat suivant qui sera utile par la suite.

Lemme 3.4.2 (Urysohn). *Soient K un compact et V un ouvert borné dans $\mathbb{R}^N$ tels que $K \subset V$. Alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N;[0,1])$ telle que $f = 1$ sur K et* $\mathrm{Supp}(f) \subset V$.

Démonstration. Soit

$$d := \inf_{x \in K, y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x-y\| = \inf_{x \in K} \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V),$$

où

$$\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V) := \inf_{y \in \mathbb{R}^N \setminus V} \|x-y\|.$$

La fonction $x \mapsto \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus V)$ étant continue (en fait elle est même 1-Lipschitz) et K étant compact, il existe $\bar{x} \in K$ tel que $d = \mathrm{dist}(\bar{x}, \mathbb{R}^N \setminus V)$. Si $d = 0$, par définition de l'infimum, il existerait une suite $(y_j)_{j\in\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}^N \setminus V$ telle que $\|\bar{x} - y_j\| \to 0$. L'ensemble $\mathbb{R}^N \setminus V$ étant fermé, on aurait alors $\bar{x} \in \mathbb{R}^N \setminus V$ ce qui est impossible puisque $\bar{x} \in K \subset V$. Par conséquent, $d > 0$ et l'ensemble

$$U := \{x \in \mathbb{R}^N : \ \mathrm{dist}(x, K) < d/2\},$$

est un ouvert borné satisfaisant $K \subset U \subset \overline{U} \subset V$. La fonction

$$x \mapsto f(x) := \frac{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U)}{\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus U) + \mathrm{dist}(x, K)}$$

convient. □

Proposition 3.4.3. *Une fonction f appartient à $\mathcal{C}_0(\Omega)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K_\varepsilon \subset \Omega$ tel que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K_\varepsilon$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ et un compact $K \subset \Omega$ tels que $|f| < \varepsilon$ sur $\Omega \setminus K$. D'après le Lemme d'Urysohn, on peut trouver une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ telle que $g = 1$ sur K. Posons $h = fg$ de sorte que $h \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\|f - h\|_\infty < \varepsilon$, soit $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$.

Réciproquement, considérons une fonction $f \in \mathcal{C}_0(\Omega)$, par définition il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ telle que $f_n \to f$ uniformément sur Ω. Soient $\varepsilon > 0$ et $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que $\|f_{n_\varepsilon} - f\|_\infty < \varepsilon/2$ et définissons $K := \{x \in \Omega : \ |f_{n_\varepsilon}| \geq \varepsilon/2\}$. Alors K est un sous ensemble compact de Ω et pour tout $x \in \Omega \setminus K$, $|f| \leq |f - f_{n_\varepsilon}| + |f_{n_\varepsilon}| < \varepsilon$. □

Proposition 3.4.4. *Les espaces $\mathcal{C}_c(\Omega)$ et $\mathcal{C}_0(\Omega)$ sont séparables.*

Démonstration. Par définition de $\mathcal{C}_0(\Omega)$ comme la fermeture de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ dans $\mathcal{C}_b(\Omega)$, il suffit de montrer que $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est séparable. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille exhaustive de compacts, i.e. $K_n \subset \mathring{K}_{n+1} \subset \Omega$ et $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = \Omega$ [2]. Comme $\mathcal{C}_c(\Omega) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$, il suffit de montrer que chacun des $\mathcal{C}_{K_n}(\Omega)$ est séparable (pour la norme uniforme sur Ω).

Soit donc $K \subset \Omega$ un compact et ω un ouvert borné tel que $K \subset \omega \subset \overline{\omega} \subset \Omega$. Comme $\overline{\omega}$ est compact, l'espace $\mathcal{C}(\overline{\omega})$ est séparable d'après le Corollaire 3.2.6. Il existe donc une famille $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ dénombrable et dense dans $\mathcal{C}(\overline{\omega})$. Soit $(r_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs qui tend vers 0. Pour tout couple $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on choisit arbitrairement une fonction $g_{k,\ell} \in \mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_k, r_\ell)$ si cet ensemble n'est pas vide de sorte que l'ensemble (dénombrable) $D := \{g_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\omega)$ est dense dans $\mathcal{C}_K(\omega)$ (pour la norme uniforme sur $\overline{\omega}$). En effet, pour tout $f \in \mathcal{C}_K(\omega)$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\ell_0 \in \mathbb{N}$ tel que $r_{\ell_0} < \varepsilon/2$ et $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_\omega |f - f_{k_0}| < r_{\ell_0}.$$

Il s'ensuit que $\mathcal{C}_K(\omega) \cap B(f_{k_0}, r_{\ell_0}) \neq \emptyset$ de sorte que

$$\sup_\omega |f - g_{k_0,\ell_0}| \leq \sup_\omega |f - f_{k_0}| + \sup_\omega |f_{k_0} - g_{k_0,\ell_0}| \leq 2r_{\ell_0} < \varepsilon.$$

2. On peut par exemple considérer $K_n = \big\{x \in \Omega : \ |x| \leq n \text{ et } \mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \setminus \Omega) \geq \frac{1}{n}\big\}$.

Comme les fonctions $g_{k,\ell}$ sont à support dans K qui est un sous-ensemble compact de ω, on peut les étendre par 0 sur $\Omega\backslash\omega$ en des fonctions $\tilde{g}_{k,\ell}$ qui sont donc dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} = \{\tilde{g}_{k,\ell}\} \subset \mathcal{C}_K(\Omega)$ est donc dénombrable et dense dans $\mathcal{C}_K(\Omega)$ (pour la norme uniforme sur Ω). $\square$

Chapitre 4

Espaces de Lebesgue

4.1 Rappels de théorie de la mesure

Définition 4.1.1. Une *tribu* (ou *σ-algèbre*) sur un ensemble X est une sous famille $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(X)$ vérifiant :

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$;

(ii) si $A \in \mathcal{A}$, alors $X \setminus A \in \mathcal{A}$;

(iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{A}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.

Le couple $(X, \mathcal{A})$ est appelé *espace mesurable.*

Définition 4.1.2. Une *mesure* est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ qui satisfait

(i) $\mu(\emptyset) = 0$;

(ii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints,

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n).$$

Le triplet $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est appelé *espace mesuré.*

Pour les fonctions $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ on munit implicitement l'espace d'arrivée $\mathbb{K}$ de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{K})$.

Définition 4.1.3. Une fonction $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{K}$ est $\mathcal{A}$-mesurable si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ pour tout $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K})$ ce qui est encore équivalent à $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert $U \subset \mathbb{K}$.

4.2 Premières définitions et propriétés

Définition 4.2.1. Soit $1 \leq p \leq \infty$, on définit

$$\mathcal{L}^p(X) := \left\{ f : X \to \mathbb{K} \ \mathcal{A}\text{-mesurable} : \ \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} < +\infty \right\},$$

où

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| = \inf\{C \geq 0 : \ \mu(\{|f| > C\}) = 0\} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Commençons par établir deux inégalités fondamentales en théorie de l'intégration.

Proposition 4.2.2 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $g \in \mathcal{L}^{p'}(X)$ alors $fg \in \mathcal{L}^1(X)$ et*

$$\|fg\|_{\mathcal{L}^1(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}.$$

Démonstration. Par concavité du logarithme sur $]0, +\infty[$, pour $a, b > 0$ et $1 \leq p, p' < \infty$ avec $1/p + 1/p' = 1$, on a

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b) = \frac{1}{p} \log(a^p) + \frac{1}{p'} \log(a^{p'}) \leq \log\left(\frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}\right).$$

Par passage à l'exponentielle, on obtient l'*inégalité de Young*

$$ab \leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'}$$

qui reste vraie pour tout $a \geq 0$ et $b \geq 0$. En prenant $a = |f(x)|/\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ et $b = |g(x)|/\|g\|_{\mathcal{L}^{p'}(X)}$ et en intégrant sur X, on obtient l'inégalité voulue.

Dans l'un des cas $p = 1$ ou $p = \infty$, le résultat est immédiat par définition du sup-essentiel. □

Proposition 4.2.3 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et pour tout f, $g \in \mathcal{L}^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^p(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}.$$

Démonstration. On commence par le cas $p = \infty$. Par définition du sup-essentiel, $|f(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ et $|g(x)| \leq \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$ pour μ-presque tout $x \in X$, d'où

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)},$$

pour μ-presque tout $x \in E$, et donc $\|f + g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} \leq \|f\|_{\mathcal{L}^\infty(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^\infty(X)}$.

Si $p = 1$, on a

$$\|f + g\|_{\mathcal{L}^1(X)} = \int_E |f + g| \, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|) \, d\mu = \|f\|_{\mathcal{L}^1(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^1(X)}.$$

Enfin, si $1 < p < \infty$, l'inégalité de Hölder implique que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|^p_{\mathcal{L}^p(X)} &= \int_E |f+g|^p\,d\mu = \int_X |f+g||f+g|^{p-1}\,d\mu \\
&\leq \int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu \\
&\leq (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \left(\int_X (|f+g|^{p-1})^{p/(p-1)}\,d\mu\right)^{(p-1)/p} \\
&= (\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} + \|g\|_{\mathcal{L}^p(X)}) \|f+g\|^{p-1}_{\mathcal{L}^p(X)},
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve de ce résultat. □

L'inégalité de Minkowski montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ satisfait l'inégalité triangulaire. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda|\|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}^p(X)$ et $\|0\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$. Malheureusement, $\|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = 0$ n'implique pas forcément que $f = 0$, ce qui montre que l'application $\mathcal{L}^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)}$ ne définit pas une norme sur $\mathcal{L}^p(X)$ (c'est en fait une semi-norme). En effet, on a le résultat suivant qui caractérise toutes les fonctions de semi-norme nulle :

Proposition 4.2.4. *Soit $f : X \to [0, +\infty[$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable telle que*

$$\int_X f\,d\mu = 0.$$

Alors $f(x) = 0$ μ-presque pour tout $x \in X$.

Démonstration. On considère les ensembles mesurables $E_n := \{f \geq 1/n\}$. La suite d'ensembles $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\mu(E_n) \leq \int_{E_n} f\,d\mu \leq \int_E f\,d\mu = 0,$$

et donc, $\mu(E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit par passage à la limite que

$$\mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(E_n) = 0,$$

ce qui montre bien que $f = 0$ μ-p.p. dans X. □

Etant données deux fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f et $g : X \to \mathbb{K}$, on dit que $f \sim g$, si $f(x) = g(x)$ μ-presque pour tout $x \in X$. On peut montrer que $\sim$ définit une relation d'équivalence (réflexive, symétrique et transitive) dans la classe des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables. Les espaces $\mathcal{L}^p(X)$ peuvent être rendus normés en considérant l'espace quotient $\mathcal{L}^p(X)/\sim$ noté dorénavant $L^p(X)$. Si $f \in \mathcal{L}^p(X)$, on notera (temporairement) $[f]$ sa classe d'équivalence et par définition de la norme dans un espace quotient, on a

$$\|[f]\|_{L^p(X)} = \inf_{f\in[f]} \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} = \|f\|_{\mathcal{L}^p(X)} \quad \text{pour tout } f \in [f].$$

Par abus de notation, nous identifierons systématiquement une fonction avec sa classe d'équivalence.

Définition 4.2.5. Soit $f \in L^p(X)$, on note

$$\|f\|_p = \|f\|_{L^p(X)} = \begin{cases} \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les inégalités de Hölder et Minkowski restent vraies dans les $L^p(X)$.

Proposition 4.2.6 (Inégalité de Hölder). *Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $p' \geq 1$ son exposant conjugué défini par $1/p + 1/p' = 1$ (par convention $p' = 1$ si $p = \infty$, et $p' = \infty$ si $p = 1$). Si $f \in L^p(X)$ et $g \in L^{p'}(X)$ alors $fg \in L^1(X)$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Proposition 4.2.7 (Inégalité de Minkowski). *Pour $1 \leq p \leq \infty$ et tout f, $g \in L^p(X)$, on a*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Proposition 4.2.8. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'application $L^p(X) \ni f \mapsto \|f\|_p$ définit une norme sur $L^p(X)$. De plus, pour $p = 2$, l'application*

$$(f, g) \in L^2(X) \times L^2(X) \mapsto \langle f, g \rangle := \int_X f \bar{g} \, d\mu.$$

définit un produit scalaire sur $L^2(X)$.

Démonstration. D'après la Proposition 4.2.4, si $\|f\|_p = 0$, alors $f = 0$ μ-p.p. dans X, et donc $f = 0$ dans $L^p(X)$. Par ailleurs, $\|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in L^p(X)$. Enfin l'inégalité triangulaire n'est autre que l'inégalité de Minkowski.

Si $p = 2$, l'inégalité de Hölder (Cauchy-Schwarz dans ce cas) assure que l'intégrale $\int_X fg \, d\mu$ est bien définie pour f et $g \in L^2(X)$. De plus, il s'agit clairement d'une forme sesquilinéaire (par linéarité de l'intégrale) hermitienne définie positive (d'après la Proposition 4.2.4) ce qui assure que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est effectivement un produit scalaire sur $L^2(X)$. □

4.3 Complétude

Théorème 4.3.1 (Riesz-Fischer). *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $L^p(X)$ est complet.*

Démonstration. Supposons d'abord que $1 \leq p < \infty$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $L^p(X)$. Grâce à la propriété de Cauchy, on construit par récurrence une sous-suite $(f_{n_j})_{j \geq 1}$ de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ayant la propriété

$$\|f_{n_{j+1}} - f_{n_j}\|_p \leq 2^{-j} \quad \text{pour tout } j \geq 1.$$

Soit $u_k = \sum_{j=1}^k |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, alors la suite $(u_k)_{k \geq 1}$ est croissante et

$$\|u_k\|_p \leq \sum_{j=1}^k 2^{-j} \leq 1.$$

Par conséquent, le théorème de la convergence monotone assure que

$$\int_X |u|^p \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_X |u_k|^p \, d\mu \leq 1,$$

où l'on a posé $u := \lim_k u_k = \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|$, ce qui montre que $u(x) < \infty$ pour μ-presque tout $x \in X$. On pose

$$f(x) = \begin{cases} f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \left(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right) & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| < \infty, \\ 0 & \text{si } \sum_{j\geq 1} |f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)| = \infty \end{cases}$$

La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable et comme la somme

$$f_{n_1}(x) + \sum_{j\geq 1} \left(f_{n_{j+1}}(x) - f_{n_j}(x)\right)$$

se téléscope, on en déduit que $f_{n_j} \to f$ μ-p.p. dans X. Comme $|f| \leq |f_{n_1}| + u$, l'inégalité de Minkowski montre que

$$\|f\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + \|u\|_p \leq \|f_{n_1}\|_p + 1,$$

ce que assure que $f \in L^p(X)$. Comme $|f_{n_j}| \leq |f_{n_1}| + u \in L^p(X)$, le théorème de la convergence dominée montre que $f_{n_j} \to f$ dans $L^p(X)$. Montrons que toute la suite $f_n \to f$ dans $L^p(X)$. Soit $\varepsilon > 0$, d'après le critère de Cauchy, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_p \leq \varepsilon$. Soit j assez grand de sorte que $n_j \geq N$, alors il vient que

$$\|f_n - f\|_p \leq \|f_n - f_{n_j}\|_p + \|f_{n_j} - f\|_p \leq \varepsilon + \|f_{n_j} - f\|_p.$$

En faisant tendre $j \to \infty$ puis $\varepsilon \to 0$, on obtient la convergence souhaitée.

Pour $p = \infty$, si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $L^\infty(X)$, alors il existe un ensemble μ-négligeable $A \in \mathcal{A}$ tel que

$$|f_n(x)| \leq \|f_n\|_\infty, \quad |f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \quad \text{pour tout } x \in X \setminus A \text{ et tout } m, n \in \mathbb{N}. \tag{4.3.1}$$

Donc si $x \in X\setminus A$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{K}$ complet, elle admet donc une limite notée $f(x)$. Par ailleurs, on pose $f(x) = 0$ si $x \in A$. La fonction f ainsi définie est $\mathcal{A}$-mesurable comme limite d'une suite de fonctions mesurables. De plus, comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^\infty(X)$ elle est bornée. Donc il existe $M > 0$ tel que $\|f_n\|_\infty \leq M$ et donc par passage à la limite dans la première inégalité de (4.3.1), il vient $|f(x)| \leq M$ μ-presque pour tout $x \in X$ soit $f \in L^\infty(X)$. Enfin d'après le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout m, $n \geq N$, $\|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$. Donc par passage à la limite dans la deuxième inégalité de (4.3.1), il vient $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$ et μ-presque tout $x \in X$, soit $\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui montre que $f_n \to f$ dans $L^\infty(X)$. □

Corollaire 4.3.2. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, les espaces $L^p(X)$ sont des espaces de Banach et $L^2(X)$ est un espace de Hilbert.*

4.4 Résultats de densité

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note $\mathcal{E}_p$ l'ensemble des fonctions $f \in L^p(X)$ qui sont étagées.

Théorème 4.4.1. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'ensemble $\mathcal{E}_p$ est dense dans $L^p(X)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(X)$. On peut supposer sans restreindre la généralité que $f \geq 0$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions étagées définies de la façon suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \{0, \dots, n2^n - 1\}$, on définit les ensembles $\mathcal{A}$-mesurables

$$E_{n,k} := \left\{ x \in X : \frac{k}{2^n} \leq f(x) < \frac{k+1}{2^n} \right\}, \quad F_n := \{f \geq n\}.$$

et pour tout $x \in X$,

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{E_{n,k}}(x) + n\chi_{F_n}(x).$$

On vérifie que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et qu'elle converge μ-presque partout vers f.

Si $p = \infty$, alors pour tout $n \geq \|f\|_\infty$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq 2^{-n}$ presque pour tout $x \in X$, et donc $\|f_n - f\|_\infty \leq 2^{-n} \to 0$.

Si $1 \leq p < \infty$, comme $f_n(x) \nearrow f(x)$ pour presque tout $x \in E$, on en déduit que $|f(x) - f_n(x)|^p \to 0$ et $|f(x) - f_n(x)|^p \leq 2^p f(x)^p$ μ-presque pour tout $x \in X$, d'où par le théorème de la convergence dominée $\|f - f_n\|_p \to 0$. □

Nous allons à présent nous restreindre au cas de mesures Boréliennes sur $\mathbb{R}^N$, finies sur les compacts (que l'on appelle mesures de Radon). Notons que la mesure de Lebesgue, notée dorénavant $\mathcal{L}^N$, en est un cas particulier puisqu'un ensemble compact $K \subset \mathbb{R}^N$ étant borné, il est inclu dans un cube $[-R, R]^N$ avec $R > 0$. Par conséquent $\mathcal{L}^N(K) \leq (2R)^N < \infty$.

Les mesures de Radon positives jouissent d'une propriété de régularité permettant d'approcher la mesure d'un Borélien par l'intérieur à l'aide de compacts, et par l'extérieur à l'aide d'ouverts.

Proposition 4.4.2. *Soit μ une mesure Borélienne dans $\mathbb{R}^N$ finie sur les compacts. Pour tout Borélien $A \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mu(A) < \infty$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K et un ouvert U tels que $K \subset A \subset U$ et*

$$\mu(A \setminus K) < \varepsilon, \quad \mu(U \setminus A) < \varepsilon.$$

Démonstration. Commençons par montrer l'approximation intérieure par un compact. On pose $\nu(B) := \mu(A \cap B)$ pour tout Borélien $B \subset \mathbb{R}^N$, ce qui définit une mesure Borélienne finie sur $\mathbb{R}^N$.

On considère la famille

$$\mathcal{F} := \Big\{ B \subset \mathbb{R}^N \text{ Borélien : pour tout } \varepsilon > 0, \text{ il existe un fermé } C \subset B \text{ tel que } \nu(B \setminus C) < \varepsilon \Big\}.$$

La famille $\mathcal{F}$ contient évidemment les ensembles fermés.

Montrons que $\mathcal{F}$ est stable par union et intersection dénombrable. Soit donc $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille d'éléments de $\mathcal{F}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un ensemble fermé $C_n \subset B_n$ tel que

$$\nu(B_n \setminus C_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}.$$

L'ensemble $C := \bigcap_n C_n$ est fermé et

$$\begin{aligned}\nu\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus C\right) &= \nu\left(\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus \left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)\right)\\ &\le \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui montre que $\bigcap_n B_n \in \mathcal{F}$. Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\lim_{m\to\infty} \nu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=0}^{m} C_n\right)\right) &= \mu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right)\right)\\ &\le \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (B_n \setminus C_n)\right) \le \sum_{n=0}^{\infty} \nu(B_n \setminus C_n) < \varepsilon.\end{aligned}$$

Pour m asssez grand, on a donc en posant $C' := \bigcup_{n=0}^{m} C_n$

$$\nu\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \setminus C'\right) < \varepsilon,$$

ce qui montre, C' étant fermé, que $\bigcup_n B_n \in \mathcal{F}$.

Comme tout ouvert de $\mathbb{R}^N$ peut s'écrire comme une union dénombrable d'ensembles fermés, on en déduit que $\mathcal{F}$ contient tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$.

Posons à présent

$$\mathcal{G} := \{B \in \mathcal{F} : \ {}^{c}B \in \mathcal{F}\}$$

de sorte que $\mathbb{R}^N \in \mathcal{G}$ et $\mathcal{G}$ est stable par union dénombrable. Par conséquent, $\mathcal{G}$ est une tribu. Comme les ouverts sont contenus dans $\mathcal{G}$, on en déduit que la tribu $\mathcal{G}$ contient la tribu Borélienne. Par conséquent, pour tout $B \subset \mathbb{R}^N$ Borélien et tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble fermé $C \subset B$ tel que $\nu(B \setminus C) < \varepsilon$. En particulier, pour $B = A$, on obtient un fermé $C \subset A$ tel que $\mu(A \setminus C) < \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := C \cap \overline{B}(0, n)$ qui est un compact inclu dans A. Comme $\mu(C) \le \mu(A) < \infty$, on a $\lim_n \mu(C \setminus K_n) = 0$. Pour n assez grand, on obtient donc un compact $K_n \subset A$ tel que $\mu(A \setminus K_n) < \varepsilon$.

Montrons maintenant l'approximation par l'extérieur à l'aide d'ouverts. L'ensemble $B(0, n) \setminus A$ étant un Borélien de mesure finie (car μ est finie sur les compacts), l'étape précédente montre l'existence d'un fermé $C_n \subset B(0, n) \setminus A$ tel que $\mu((B(0, n) \setminus A) \setminus C_n) < \varepsilon/2^n$. Posons $U_n = B(0, n) \setminus C_n$ qui est un ouvert avec $B(0, n) \cap A \subset U_n$ et tel que $\mu(U_n \setminus A) < \varepsilon/2^n$. Si on pose $U := \bigcup_n U_n$ qui est un ouvert, on obtient que $A \subset U$ et $\mu(U \setminus A) \le \sum_n \mu(U_n \setminus A) < \varepsilon$. $\square$

Cette propriété de régularité des mesures de Radon permet de montrer la densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue pour $p < \infty$.

Théorème 4.4.3. *Soit μ une mesure Borélienne dans $\mathbb{R}^N$ finie sur les compacts. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mu)$.*

Démonstration. Soit $f \in L^p(\Omega, \mu)$. D'après le Théorème 4.4.1, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction étagée $g \in L^p(\Omega, \mu)$ telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. On est donc ramené à montrer que toute fonction étagée peut être approchée par une fonction de $\mathcal{C}_c(\Omega)$ pour la norme $L^p(\Omega)$.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts telle que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Le Théorème de la convergence dominée assure que $\|g - \chi_{K_n} g\|_p \to 0$ quand $n \to \infty$. On peut donc supposer sans restreindre la généralité que $g = 0$ au voisinage de $\partial\Omega$.

Par linéarité, il suffit de considérer la fonction caractéristique d'un ensemble Borélien A tel que $\overline{A}$ est compact et $\overline{A} \subset \Omega$ (autrement dit χ_A est à support compact dans Ω). En particulier, comme A est borné, on a $\mu(A) < \infty$. Par conséquent la Proposition 4.4.2 assure, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'un ouvert U et d'un compact K tels que $K \subset A \subset U$ et $\mu(U \setminus K) \leq \varepsilon$. Le Lemme d'Urysohn donne alors l'existence d'une fonction $h \in \mathcal{C}_c(\Omega; [0, 1])$ telle que $h = 1$ sur K et $\mathrm{Supp}(h) \subset U$. D'où, comme $\chi_K \leq h \leq \chi_U$,

$$\int_\Omega |h - \chi_A|^p \, d\mu \leq \mu(U \setminus K) \leq \varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du résultat. □

Dans le cas de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, nous allons améliorer le résultat précédent en montrant que l'ensemble des fonctions régulières et à support compact est dense dans les espaces de Lebesgue. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^N$ l'espace $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles continues à tout ordre et telles que $\mathrm{Supp}(f)$ est un compact inclu dans Ω.

Définition 4.4.4. Soit $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\rho \geq 0$, $\mathrm{Supp}(\rho) \subset \overline{B}(0, 1)$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\, dx = 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\rho_n(x) := n^N \rho(nx)$ de sorte que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x)\, dx = 1$ et $\mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{n})$. On dit que $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite régularisante.

A titre d'exemple, on peut vérifier que la fonction $\rho : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par

$$\rho(x) := c \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x\|^2 - 1}} & \text{si } \|x\| < 1, \\ 0 & \text{si } \|x\| \geq 1, \end{cases}$$

où la constante $c := \left(\int_{B(0,1)} e^{\frac{1}{\|x\|^2-1}}\, dx \right)^{-1}$, satisfait les propriétés requises ci-dessus.

Définition 4.4.5. Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction localement intégrable (*i.e.* dans $L^1(K)$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, et on note $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$), on définit le produit de convolution

$$f * \rho_n(x) := \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - y) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y) \rho_n(y)\, dy \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^N.$$

Remarque 4.4.6. Notons que l'intégrale est bien défnie car $y \mapsto \rho_n(x-y)$ s'annule en dehors de $\overline{B}(x, \frac{1}{n})$, elle est bornée sur cet ensemble et f est intégrable sur cet ensemble.

Lemme 4.4.7. *Si $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus*
- *si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors $f*\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{Supp}(f*\rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f)+\overline{B}(0,\frac{1}{n})$ et $f*\rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$;*
- *si $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, alors $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $f*\rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. On montre par convergence dominée que $f * \rho_n$ est continue sur $\mathbb{R}^N$. Montrons à présent qu'elle admet des dérivées partielles d'ordre 1. Soit $h \in \mathbb{R}$ avec $|h| < 1$, en notant $\{e_1, \ldots, e_N\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, on calcule

$$\frac{f * \rho_n(x+he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\rho_n(x+he_i-y) - \rho_n(x-y)}{h} f(y)\, dy.$$

Pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\frac{\rho_n(x+h-ye_i)-\rho_n(x-y)}{h} f(y) \to \partial_{x_i}\rho_n(x-y)f(y)$ quand $h \to 0$ car ρ_n est différentiable sur $\mathbb{R}^N$. Par ailleurs, le Théorème des accroissements finis montre que pour presque tout $y \in \mathbb{R}^N$, on a $\left|\frac{\rho_n(x+he_i-y)-\rho_n(x-y)}{h} f(y)\right| \leq \max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}(y)|f(y)|$ car $\rho_n(x+he_i-y) = \rho_n(x-y) = 0$ si $|y-x| > 2$. Notons que $\partial_{x_i}\rho_n$ étant également $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ elle est bornée sur $\mathbb{R}^N$ ce qui montre que $\max_{\mathbb{R}^N} |\partial_{x_i}\rho_n| \chi_{\overline{B}(x,2)}|f| \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Le Théorème de la convergence dominée montre alors que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f * \rho_n(x+he_i) - f * \rho_n(x)}{h} = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_{x_i}\rho_n(x-y) f(y)\, dy,$$

ce qui montre que $f*\rho_n$ admet des dérivées partielles d'ordre 1 et $\partial_{x_i}(f*\rho_n) = f*(\partial_{x_i}\rho_n)$ pour tout $1 \leq i \leq N$. On montre de nouveau par convergence dominée que toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues sur $\mathbb{R}^N$, ce qui établit que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^N$. Par récurrence, on montre ainsi que $f * \rho_n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$.

Si $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$, alors il existe $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f) \subset \overline{B}(0,R)$. Comme f est continue sur le compact $\overline{B}(0,R)$ (et donc bornée) et nulle à l'extérieur de $\overline{B}(0,R)$, $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. De plus si $x \notin \mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n)$ et $y \in \mathrm{Supp}(\rho_n)$, alors $x - y \notin \mathrm{Supp}(f)$ et donc $f(x-y) = 0$. Par conséquent,

$$f * \rho_n(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = \int_{\mathrm{Supp}(\rho_n)} f(x-y)\rho_n(y)\, dy = 0,$$

ce qui montre que le support de $f * \rho_n$ (qui est toujours un fermé) est inclus dans $\mathrm{Supp}(f) + \mathrm{Supp}(\rho_n) \subset \mathrm{Supp}(f) + \overline{B}(0,\frac{1}{n})$ et en particulier que $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Comme f est uniformément continue, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tels que $\|x - x'\| \leq \delta$ implique $|f(x) - f(x')| \leq \varepsilon$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ assez grand de sorte que $1/n \leq \delta$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour tout $y \in \overline{B}(0,\frac{1}{n})$, on a $|f(x) - f(x-y)| \leq \varepsilon$. On multiplie alors cette inégalité par $\rho_n(y) \geq 0$, puis on intègre sur $\mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} |f(x) - f*\rho_n(x)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^N} (f(x) - f(x-y))\rho_n(y)\, dy\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f(x-y)|\rho_n(y)\, dy \leq \varepsilon, \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

où l'on a utilisé le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\,dy = 1$. On a donc montré que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ (qui ne dépend que de δ donc ε) tels que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f * \rho_n(x)| \leq \varepsilon$, ce qui montre que $f * \rho_n \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N$ et donc dans $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Si $1 \leq p < \infty$, comme $f(x) = f * \rho_n(x) = 0$ si $|x| > R + \frac{1}{n}$, on peut élever l'expression (4.4.1) à la puissance p, puis par intégration,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x) - f*\rho_n(x)|^p\,dx = \int_{\overline{B}(0,R+\frac{1}{n})} |f(x) - f*\rho_n(x)|^p\,dx \leq \varepsilon^p \mathcal{L}^N(\overline{B}(0,R+1)), \quad (4.4.2)$$

ce qui montre également que $f * \rho_n \to f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < \infty$.

Supposons enfin que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pour $1 \leq p < \infty$. D'après l'inégalité de Hölder, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$,

$$\int_K |f(x)|\,dx \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}\,\mathcal{L}^N(K)^{1-1/p} < \infty,$$

ce qui prouve que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, et donc que le produit de convolution $f * \rho_n$ est bien défini. D'après le Théorème 4.4.3, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $g \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ telle que $\|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Par ailleurs, d'après (4.4.2), on a $\|g - g * \rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$ pour n assez grand. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\|f - f*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} &\leq \|f - g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|g - g*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|(g-f)*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\
&\leq 2\varepsilon + \|(g-f)*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.
\end{aligned}$$

Or, d'après l'inégalité de Hölder et le fait que $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(y)\,dy = 1$,

$$\begin{aligned}
|(g-f)*\rho_n(x)|^p &= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)\,dy \right|^p \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^N} (g(x-y) - f(x-y))\rho_n(y)^{1/p}\rho_n(y)^{1/p'}\,dy \right|^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p \rho_n(y)\,dy,
\end{aligned}$$

puis, en intégrant par rapport à x et en appliquant le théorème de Fubini-Tonelli, il vient que

$$\|(g-f)*\rho_n\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y) - f(x-y)|^p\,dx \right) \rho_n(y)\,dy = \|g - f\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Par conséquent, $\|f - f*\rho_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 3\varepsilon$, ce qui conclut la preuve du lemme. □

Corollaire 4.4.8. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.*

Démonstration. D'après le Théorème 4.4.3, pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. On étend g par zéro en dehors de Ω et on note $\tilde{g}$ cette extension. Alors $\tilde{g} \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R}^N)$ et $\mathrm{Supp}(\tilde{g}) \subset \Omega$. D'après le Lemme 4.4.7, on peut choisir $n_0 \in \mathbb{N}$ suffisamment grand de sorte que pour tout $n \geq n_0$, $\mathrm{Supp}(\tilde{g}*\rho_n) \subset \mathrm{Supp}(\tilde{g})+\overline{B}(0,\frac{1}{n}) \subset \Omega$ et $\|\tilde{g} * \rho_n - \tilde{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Finalement, on obtient que $f_n := \tilde{g} * \rho_n|_\Omega \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et

$$\|f - f_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{g} * \rho_n\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

4.5 Séparabilité

Nous sommes à présent en mesure de discuter la séparabilité des espaces de Lebesgue.

Proposition 4.5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $1 \leq p < \infty$. Alors l'espace $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite exhaustive de compacts, *i.e.*, $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. D'après le Corollaire 3.2.6, $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable par rapport à la norme uniforme sur K_n. Or les ensembles K_n étant bornés, la convergence uniforme sur K_n implique la convergence dans $L^p(K_n)$ pour tout $1 \leq p < \infty$ car

$$\int_{K_n} |f - g|^p\, dx \leq \mathcal{L}^N(K_n) \sup_{K_n} |f - g|^p \quad \text{pour tout } f, g \in \mathcal{C}(K_n).$$

Par conséquent, l'espace $\mathcal{C}(K_n)$ est séparable pour la convergence dans $L^p(K_n)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe donc un ensemble D_n dénombrable dense dans $\mathcal{C}(K_n)$ pour la convergence dans $L^p(K_n)$.

Posons $D := \bigcup_n D_n$ qui est par conséquent dénombrable. Si l'on énumère les éléments de D en une suite $(f_i)_{i\in\mathbb{N}}$, chacune des fonctions f_i est une fonction continue sur un sous-ensemble compact de Ω. On étend alors f_i par zéro sur Ω, et on note $\tilde{f}_i$ cette extension qui n'est *a priori* plus continue mais toutefois dans $L^p(\Omega)$. L'ensemble $\tilde{D} := \{\tilde{f}_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ est alors un sous-ensemble dénombrable de $L^p(\Omega)$. Montrons qu'il est dense dans $L^p(\Omega)$. Pour ce faire, soit $f \in L^p(\Omega)$ et $\varepsilon > 0$. D'après le Théorème 4.4.3, il existe $g \in \mathcal{C}_c(\Omega)$ tel que $\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon$. Ensuite il existe un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Supp}(g) \subset K_n$. Donc il existe un $h \in D_n$ tel que $\|g - h\|_{L^p(K_n)} \leq \varepsilon$. Soit $\tilde{h}$ l'extension par zéro de h sur Ω. Alors $\tilde{h} \in \tilde{D}$ et comme $g = 0$ sur $\Omega \setminus K_n$, il vient

$$\int_\Omega |\tilde{h} - g|^p\, dx = \int_{K_n} |h - g|^p\, dx \leq \varepsilon^p.$$

Finalement, on a que $\|f - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f - g\|_{L^p(\Omega)} + \|g - \tilde{h}\|_{L^p(\Omega)} \leq 2\varepsilon$, ce qui montre la densité de $\tilde{D}$ dans $L^p(\Omega)$. □

Proposition 4.5.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

Démonstration. Soit $X := \{\chi_{B(x,r)} : B(x,r) \subset \Omega\}$ qui est une famille non dénombrable de $L^\infty(\Omega)$. Si χ, $\chi' \in X$ sont telles que $\chi \neq \chi'$, alors $\|\chi - \chi'\|_\infty = 1$. Supposons qu'il existe un sous-ensemble $D = \{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^\infty(\Omega)$ dénombrable et dense. Soit $\Phi : X \to \mathbb{N}$ l'application qui à chaque $\chi \in X$ associe le plus petit entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $\|\chi - f_n\|_\infty \leq 1/3$. Cette application est bien définie par densité de D dans $L^\infty(\Omega)$. Supposons maintenant que $\Phi(\chi_1) = \Phi(\chi_2) = n$, alors $\|\chi_1 - f_n\|_\infty \leq 1/3$ et $\|\chi_2 - f_n\|_\infty \leq 1/3$, ce qui implique par l'inégalité triangulaire que $\|\chi_1 - \chi_2\|_\infty \leq 2/3 < 1$. Comme χ_1 et $\chi_2 \in X$ sont des fonctions caractéristiques, alors nécessairement $\chi_1 = \chi_2$ dans $L^\infty(\Omega)$ ce qui montre l'injectivité de Φ. L'ensemble X étant non dénombrable, on aboutit à une contradition. □

4.6 Critère de compacité

Pour finir, nous établissons un critère compacité dans les espaces de Lebesgue.

Théorème 4.6.1 (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, avec $1 \leq p < \infty$, telle que*

(i) $\displaystyle\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} < +\infty$;

(ii) $\displaystyle\sup_{\|y\|\leq\delta} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x+y) - f_n(x)|^p \, dx \to 0$ *quand* $\delta \to 0$.

Alors, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la suite $(f_{n|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $L^p(K)$.

Démonstration. Soit $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite régularisante comme dans la Définition 4.4.4. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions dans $\mathcal{C}(K)$. Nous allons montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{C}(K)$. Pour faire, nous allons appliquer le théorème d'Ascoli-Arzela. Tout d'abord d'après l'inégalité de Hölder, pour tout $x \in K$, on a

$$|f_n * \rho_k(x)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y)|\rho_k(y)\, dy \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \leq C_k,$$

où, d'après l'hypothèse (i), la constante $C_k > 0$ est indépendante de n et de x. Par ailleurs, si x et $x' \in K$,

$$\begin{aligned}
|f_n * \rho_k(x) - f_n * \rho_k(x')| &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-y) - f_n(x'-y)|\rho_k(y)\, dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(x-x'+z) - f_n(z)|\rho_k(x'-z)\, dz \\
&\leq \|\rho_k\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)} \left(\sup_{\|y\|\leq\|x-x'\|} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\mathbb{R}^N} |f_n(z+y) - f_n(z)|^p \, dz \right)^{1/p} \\
&= \omega_k(\|x-x'\|),
\end{aligned}$$

où, d'après l'hypothèse (ii), $\omega_k(t) \to 0$ quand $t \to 0^+$, ce qui montre l'uniforme équicontinuité de la suite $(f_n * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$. Le Théorème d'Ascoli-Arzela combiné avec un principe d'extraction diagonal assure l'existence d'une sous-suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k|_K})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge dans $\mathcal{C}(K)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est borné on en déduit que $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_{|K}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $L^p(K)$.

Nous allons à présent montrer que la sous-suite $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$ ce qui montrera qu'elle converge dans cet espace par le Théorème de Riesz-Fischer. Pour ce faire, on écrit grâce à l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned}\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} &\leq \|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(n)} * \rho_k\|_{L^p(K)} \\ &\quad + \|f_{\sigma(n)} * \rho_k - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)} + \|f_{\sigma(m)} - f_{\sigma(m)} * \rho_k\|_{L^p(K)}. \qquad (4.6.1)\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{Supp}(\rho_k) \subset \overline{B}(0, \frac{1}{k})$ et $\int_{\mathbb{R}^N} \rho_k(y)\, dy = 1$,

$$|f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)| \leq \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|\rho_k(y)\, dy.$$

En élevant l'inégalité précédente à la puissance p, en intégrant par rapport à $x \in K$ et en appliquant l'inégalité de Hölder et le Théorème de Fubini-Tonelli, il vient

$$\begin{aligned}\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx &\leq \int_{\overline{B}(0,\frac{1}{k})} \left(\int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)}(x-y)|^p\, dx\right) \rho_k(y)\, dy \\ &\leq \sup_{\|y\|\leq 1/k} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_n(x) - f_n(x-y)|^p\, dx.\end{aligned}$$

D'après l'hypothèse (ii), on en déduit alors que

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_k(x)|^p\, dx = 0.$$

Par conséquent, si $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_K |f_{\sigma(n)}(x) - f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0}(x)|^p\, dx \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

La suite $(f_{\sigma(n)} * \rho_{k_{0|K}})_{n\in\mathbb{N}}$ étant convergente dans $L^p(K)$, elle y est de Cauchy et on peut trouver un $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m, n \geq N_0$,

$$\|f_{\sigma(n)} * \rho_{k_0} - f_{\sigma(m)} * \rho_{k_0}\|_{L^p(K)} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc si $m, n \geq N_0$, (4.6.1) donne $\|f_{\sigma(n)} - f_{\sigma(m)}\|_{L^p(K)} \leq \varepsilon$, ce qui montre que $(f_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $L^p(K)$, et donc qu'elle converge dans cet espace. $\square$

Chapitre 5

Dualité dans les espaces de Lebesgue

5.1 Le cas Hilbertien de L^2

5.1.1 Quelques rappels sur les espaces de Hilbert

Soit H un $\mathbb{K}$-espace vectoriel (avec comme toujours $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On rappelle qu'un *produit scalaire hermitien* $\langle\cdot,\cdot\rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ est une

(i) *forme sesquilinéaire* : $u \mapsto \langle u, v\rangle$ est linéaire pour tout $v \in H$ et $v \mapsto \langle u, v\rangle$ est antilinéaire pour tout $u \in H$;

(ii) *hermitienne* : $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ pour tout u, $v \in H$;

(iii) *définie positive* : $\langle u, u\rangle > 0$ pour tout $u \in H \setminus \{0\}$;

Un *espace de Hilbert* est un espace vectoriel H muni d'un produit scalaire hermitien (i.e. un espace pré-Hilbertien) et qui est complet pour la norme Hilbertienne $\|u\|_H := \sqrt{\langle u, u\rangle}$ associée au produit scalaire.

Les résultats suivants sont spécifiques aux espaces de Hilbert et y jouent un rôle fondamental.

Théorème 5.1.1 (Projection orthogonale). *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et C un sous-ensemble de H convexe, fermé et non vide. Pour tout $u \in H$, il existe un unique élément $P_C(u) \in C$, appelé la projection orthogonale de u sur C, tel que*

$$\|u - P_C(u)\|_H = \min_{v\in C} \|u - v\|_H.$$

De plus, $P_C(u)$ est caractérisé par

$$P_C(u) \in C, \quad \mathrm{Re}(\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle) \leq 0 \text{ pour tout } v \in C. \tag{5.1.1}$$

Démonstration. On considère le problème de minimisation

$$\alpha := \inf_{v\in C} \|u - v\|_H^2 \tag{5.1.2}$$

Comme $C \neq \emptyset$, on a $\alpha \in [0, \infty[$. On considère alors une suite $(v_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de H telle que pour tout $n \geq 1$,

$$v_n \in C, \quad \alpha \leq \|v_n - u\|_H^2 \leq \alpha + \frac{1}{n}. \tag{5.1.3}$$

Par convexité de C, $(v_n + v_m)/2 \in C$ pour tout m, $n \geq 1$, et donc l'inégalité du parallélogramme montre que

$$\begin{aligned} \alpha \leq \left\| \frac{v_m + v_n}{2} - u \right\|_H^2 &= \left\| \frac{v_m - u}{2} + \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\ &= 2\left\| \frac{v_m - u}{2} \right\|_H^2 + 2\left\| \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 - \left\| \frac{v_m - u}{2} - \frac{v_n - u}{2} \right\|_H^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{m}\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{4}\|v_m - v_n\|_H^2. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\|v_m - v_n\|_H^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m}$$

ce qui montre que la suite $(v_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans H. Il existe donc un élément $v \in H$ tel que $v_n \to v$. L'ensemble C étant fermé, on en déduit que $v \in C$ et par passage à la limite dans (5.1.3) que $\alpha = \|v - u\|_H^2$. Ceci montre l'existence d'une solution au problème de minimisation (5.1.2). Quant à l'unicité, si $v_1 \in C$ et $v_2 \in C$ sont deux solutions, alors par convexité de C, on a $\frac{1}{2}(v_1 + v_2) \in C$, d'où

$$\alpha \leq \left\| \frac{v_1 + v_2}{2} - u \right\|_H^2 = \frac{1}{2}\|v_1 - u\|_H^2 + \frac{1}{2}\|v_2 - u\|_H^2 - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2 = \alpha - \frac{1}{4}\|v_1 - v_2\|_H^2,$$

ce qui montre que $\|v_1 - v_2\|_H = 0$ et donc que $v_1 = v_2$.

Montrons à présent que l'unique solution de (5.1.2) est caractérisée par (5.1.1). Si $P_C(u)$ est l'unique solution de (5.1.2), alors $P_C(u) \in C$ et, par convexité de C, $P_C(u) + t(v - P_C(u)) \in C$ pour tout $t \in]0, 1[$ et tout $v \in C$. Donc

$$\alpha \leq \|u - P_C(u) - t(v - P_C(u))\|_H^2 = \alpha - 2t\mathrm{Re}(\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle) + t^2\|v - P_C(u)\|_H^2.$$

En divisant par t puis en passant à la limite quand $t \to 0$, il vient $\mathrm{Re}(\langle u - P_C(u), v - P_C(u)\rangle) \leq 0$ comme attendu. Réciproquement, supposons (5.1.1), alors pour tout $v \in C$,

$$\begin{aligned} &\|v - u\|_H^2 = \|v - P_C(u) + P_C(u) - u\|_H^2 \\ &\quad = \|v - P_C(u)\|_H^2 + 2\mathrm{Re}(\langle v - P_C(u), P_C(u) - u\rangle) + \|P_C(u) - u\|_H^2 \geq \|P_C(u) - u\|_H^2, \end{aligned}$$

ce qui montre, avec $P_C(u) \in C$, que $P_C(u)$ est la solution au problème de minimisation (5.1.2). □

Dans le cas particulier où C est un sous espace vectoriel fermé de H, le théorème de la projection orthogonale permet de décomposer l'espace H en la somme directe de C et de son orthogonal.

Proposition 5.1.2. *Soit F un sous espace vectoriel fermé de H et $u \in H$. Alors la projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est caractérisée par*

$$P_F(u) \in F, \quad \langle u - P_F(u), v\rangle = 0 \text{ pour tout } v \in F.$$

De plus, en notant $F^\perp = \{v \in H : \langle v, u\rangle = 0 \text{ pour tout } u \in F\}$ l'orthogonal de F, on a la décomposition

$$H = F \oplus F^\perp.$$

Démonstration. Comme F est un sous espace vectoriel de H, il est non vide (car il contient l'origine) et convexe. La projection orthogonale $P_F(u)$ de u sur F est donc bien définie et est caractérisée par

$$P_F(u) \in F, \quad \mathrm{Re}(\langle u - P_F(u), w - P_F(u)\rangle) \leq 0 \text{ pour tout } w \in F.$$

Si $v \in F$ est arbitraire, alors $w = P_F(u) \pm v \in F$ car F est un sous espace vectoriel, et donc $\pm\mathrm{Re}(\langle u - P_F(u), v\rangle) \leq 0$, autrement dit $\mathrm{Re}(\langle u - P_F(u), v\rangle) = 0$. En remplaçant v par iv, on en déduit que $\langle u - P_F(u), v\rangle = 0$. L'implication réciproque est immédiate.

Tout élément $u \in H$ peut donc s'écrire $u = P_F(u) + (u - P_F(u))$, où $P_F(u) \in F$ et $u - P_F(u) \in F^\perp$ d'après la caractérisation de la projection orthogonale sur F établie précédemment. Par ailleurs, comme $F^\perp \cap F = \{0\}$, alors on a bien que $H = F \oplus F^\perp$. □

Un corollaire du résultat précédent est l'identification du dual d'un espace de Hilbert H avec H lui même.

Théorème 5.1.3 (Riesz). *Soit $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace de Hilbert et $L \in H'$. Il existe un unique élément $f \in H$ tel que*

$$L(u) = \langle u, f\rangle \quad \text{pour tout } u \in H.$$

De plus, $\|L\|_{H'} = \|f\|_H$.

Démonstration. Si $L = 0$, on prend $f = 0$. Sinon, on pose $M = \mathrm{Ker}(L)$ qui est un sous espace vectoriel fermé de H. Comme d'après la Proposition 5.1.2, $H = M \oplus M^\perp$, on en déduit que $M^\perp \neq \{0\}$ et il existe donc un élément $e \in M^\perp$ avec $e \neq 0$. Alors $L(e) \neq 0$ (car sinon $e \in M$ et donc $e = 0$). On en déduit que $u - \frac{L(u)}{L(e)}e \in M$ donc $\langle u, e\rangle = \frac{L(u)}{L(e)}\|e\|_H^2$, soit

$$L(u) = \left\langle u, \frac{\overline{L(e)}}{\|e\|_H^2} e \right\rangle$$

pour tout $u \in H$, d'où l'existence. Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in H$ sont deux représentants de L, alors $\langle f_1 - f_2, u\rangle = 0$ pour tout $u \in H$, en particulier le choix de $u = f_1 - f_2$ donne $\|f_1 - f_2\|_H^2 = 0$ soit $f_1 = f_2$. Enfin en prenant $u = f/\|f\|_H$, on obtient $\|L\|_{H'} \geq \|f\|_H$, l'autre inégalité vient de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

5.1.2 Application à L^2

En tant qu'espace de Hilbert, le Théorème de Riesz (Théorème 5.1.3) permet d'identifier le dual de L^2 avec lui même.

Théorème 5.1.4. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $L \in [L^2(X)]'$, il existe un unique $f \in L^2(X)$ tel que pour tout $g \in L^2(X)$,*

$$L(g) = \int_X \bar{f} g \, d\mu, \quad \|L\|_{[L^2(X)]'} = \|f\|_2.$$

5.2 Le cas L^p, $1 \leq p < \infty$

Le cas général est plus difficile. Il repose sur le théorème de Radon-Nikodým lui même une conséquence du Théorème 5.1.4. Nous donnons ici une version loin d'être optimale, mais toutefois suffisante pour la suite.

Théorème 5.2.1 (Radon-Nikodým). *Soient $(X, \mathcal{A})$ un espace mesurable et λ et ν deux mesures finies sur $(X, \mathcal{A})$ telles que λ est absolument continue par rapport à ν : si $A \in \mathcal{A}$ est tel que $\nu(A) = 0$, alors $\lambda(A) = 0$. Alors, il existe une unique fonction $f \in L^1(X, \nu)$ avec $f \geq 0$ ν-p.p. telle que*

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\nu \quad \textit{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Démonstration. **Etape 1 :** On suppose ici que $\lambda \leq \nu$. Soit $u : X \to \mathbb{R}^+$ une fonction $\mathcal{A}$-mesurable, d'après le Théorème 4.4.1 de densité des fonctions étagées, il existe une suite croissante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions positives étagées telles que $u_n \to u$ simplement dans X. Comme u_n est étagée, c'est une combinaison linéaire de fonctions caractéristiques, donc

$$\int_X u_n \, d\lambda \leq \int_X u_n \, d\nu,$$

puis, par convergence monotone, on obtient que

$$\int_X u \, d\lambda \leq \int_X u \, d\nu.$$

En prenant $u = |g|^2$ avec $g \in L^2(X, \nu)$, on obtient que

$$\int_X |g|^2 \, d\lambda \leq \int_X |g|^2 \, d\nu.$$

Ensuite, λ étant une mesure finie, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans $L^2(X, \lambda)$ montre que

$$\int_X |g| \, d\lambda \leq \sqrt{\lambda(X)} \left(\int_X |g|^2 \, d\nu \right)^{1/2},$$

de sorte que $L^2(X,\nu) \subset L^1(X,\lambda)$. Ceci montre alors que l'application $\Phi : L^2(X,\nu) \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\Phi(g) = \int_X g\, d\lambda,$$

est bien définie et que c'est une forme linéaire continue sur $L^2(X,\nu)$. Le Théorème 5.1.4 nous donne alors l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(X,\nu)$ telle que

$$\Phi(g) = \int_X fg\, d\nu = \int_X g\, d\lambda.$$

Comme la mesure ν est finie, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on a que $\chi_A \in L^2(\mathbb{R},\nu)$ et donc

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\nu,$$

ce qui est l'égalité demandée. Montrons de plus que $f(x) \in [0,1]$ pour ν-presque tout $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \geq 1$, on a

$$0 \leq \lambda(\{f \leq -1/n\}) = \int_{\{f \leq -1/n\}} f\, d\nu \leq -\frac{1}{n}\nu(\{f \leq -1/n\}) \leq 0,$$

ce qui montre que $\nu(\{f \leq -1/n\}) = \lambda(\{f \leq -1/n\}) = 0$. Comme $\{f < 0\} = \bigcup_n \{f \leq -1/n\}$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f < 0\}) = 0$. De même

$$\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) \geq \lambda(\{f \geq 1 + 1/n\}) = \int_{\{f \geq 1+1/n\}} f\, d\nu \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}),$$

ce qui montre que $\nu(\{f \geq 1 + 1/n\}) = 0$. Comme $\{f > 1\} = \bigcup_n (\{f \geq 1 + 1/n\})$ et que l'union est croissante, il vient que $\nu(\{f > 1\}) = 0$.

Etape 2 : On suppose maintenant que λ est absolument continue par rapport à ν. Il s'ensuit que les mesures λ et $\nu + \lambda$ sont finies et $\lambda \leq \lambda + \nu$, de sorte qu'on peut appliquer la conclusion de l'étape 1. Il existe donc une fonction $\mathcal{A}$-mesurable $f \in L^1(X, \nu + \lambda)$ telle que $f(x) \in [0,1]$ pour $(\nu + \lambda)$-presque tout $x \in \mathbb{R}$ et

$$\lambda(A) = \int_A f\, d\nu + \int_A f\, d\lambda,$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, soit

$$\int_A f\, d\nu = \int_A (1 - f)\, d\lambda. \tag{5.2.1}$$

Comme $\nu \leq \nu + \lambda$ et $\lambda \leq \nu + \lambda$, alors f prend ses valeurs dans $[0,1]$ ν-p.p. et λ-p.p. Par approximation (voir la Proposition 4.4.1) et convergence monotone, on obtient également que

$$\int_X fg\, d\nu = \int_X (1 - f) g\, d\lambda \tag{5.2.2}$$

pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable $g : X \to \mathbb{R}^+$. En notant $Z := \{f = 1\}$, on a d'après (5.2.1) que $\nu(Z) = 0$ et donc que $\lambda(Z) = 0$. Définissons alors $\bar{f} = \frac{f}{1-f}\chi_{Z^c}$ qui est $\mathcal{A}$-mesurable et positive, il vient donc en prenant $g = \frac{\chi_{A\setminus Z}}{1-f}$ dans (5.2.2)

$$\lambda(A) = \lambda(A \setminus Z) = \int_X (1-f)\frac{\chi_{A\setminus Z}}{1-f}\, d\lambda = \int_A \bar{f}\, d\nu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Le fait que $\bar{f} \in L^1(X, \nu)$ vient du fait que λ est une mesure finie. □

Nous aurons également besoin de décomposer n'importe quelle forme linéaire continue sur L^p comme la dfférence entre deux formes linéaires continues positives.

Lemme 5.2.2. *Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $1 \le p < \infty$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe des formes linéaires continue positives L^+ et L^- sur $L^p(X)$ telles que*

$$L(f) = L^+(f) - L^-(f) \quad \textit{pour tout } f \in L^p(X).$$

Démonstration. Définissons le cône $\mathcal{C}^+ := \{f \in L^p(X) : \ f \ge 0\ \mu\text{-p.p. sur } X\}$ et pour tout $f \in \mathcal{C}^+$,

$$L^+(f) := \sup\{L(g) : \ g \in \mathcal{C}^+,\ g \le f\}.$$

Etape 1 : *L^+ est positive et finie sur $\mathcal{C}^+$.* Soit $f \in \mathcal{C}^+$. Comme $0 \in \mathcal{C}^+$, $L^+(f) \ge 0$. Soit maintenant $g \in \mathcal{C}^+$ telle que $0 \le g \le f$. Par continuité de L, on a $L(g) \le \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p \le \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p$, et par passage au sup en g, on obtient que $0 \le L^+(f) \le \|L\|_{[L^p(X)]'}\|f\|_p < \infty$.

Etape 2 : *L^+ est additive sur $\mathcal{C}^+$.* Soient f_1 et $f_2 \in \mathcal{C}^+$ et $g \in \mathcal{C}^+$ telles que $0 \le g \le f_1 + f_2$. On décompose g comme $g = \min(f_1, g) + \max(g - f_1, 0)$, où $\min(f_1, g) \le f_1$ et $\max(g - f_1, 0) \le f_2$. Comme $\min(f_1, g)$ et $\max(g - f_1, 0) \in \mathcal{C}^+$, alors

$$L(g) = L(\min(f_1, g)) + L(\max(g - f_1, 0)) \le L^+(f_1) + L^+(f_2),$$

puis par passage au sup en g,

$$L^+(f_1 + f_2) \le L^+(f_1) + L^+(f_2).$$

Pour montrer l'autre inégalité on se donne un $\varepsilon > 0$. Par définition de L^+, il existe g_1 et $g_2 \in \mathcal{C}^+$ tels que $0 \le g_i \le f_i$ et $L^+(f_i) \le L(g_i) + \varepsilon$ pour $i = 1, 2$. Comme $0 \le g_1 + g_2 \le f_1 + f_2$, il s'ensuit que

$$L^+(f_1 + f_2) \ge L(g_1 + g_2) = L(g_1) + L(g_2) \ge L^+(f_1) + L^+(f_2) - 2\varepsilon,$$

et le résultat suit par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$.

Etape 3 : *Définition et additivité de L^+ sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. On décompose f comme la différence entre sa partie positive et négative $f = f^+ - f-$ avec $f^\pm \in \mathcal{C}^+$. On pose alors $L^+(f) := L^+(f^+) - L^+(f^-)$. Si f et $g \in L^p(X)$, alors $(f + g)^+ - (f + g)^- =$

$f^+ - f^- + g^+ - g^-$ de sorte que $(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+$. D'où, par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$,

$$L^+((f+g)^+) + L^+(f^-) + L^+(g^-) = L^+((f+g)^-) + L^+(f^+) + L^+(g^+),$$

et donc $L^+(f+g) = L^+(f) + L^+(g)$. En particulier, comme $(-f)^\pm = f^\mp$, on en déduit que $L^+(-f) = -L^+(f)$.

Etape 4 : *L^+ est continue sur $L^p(X)$.* Soit $f \in L^p(X)$. Comme L^+ est positive, alors $L^+(|f| \pm f) \geq 0$, donc par additivité de L^+ sur $\mathcal{C}^+$, $L^+(|f|) \geq \pm L^+(f)$, *i.e.*, $|L^+(f)| \leq L^+(|f|)$. Soient maintenant f_1 et $f_2 \in L^p(X)$, alors les étapes 3 et 1 impliquent que,

$$|L^+(f_1) - L^+(f_2)| = |L^+(f_1 - f_2)| \leq L^+(|f_1 - f_2|) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \|f_1 - f_2\|_p.$$

Etape 5 : *L^+ est une forme linéaire sur $L^p(X)$.* L'additivité de L^+ montre que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^+(nf) = nL^+(f)$. Comme $L^+(-f) = -L^+(f)$, l'identité précédente a en fait lieu pour $n \in \mathbb{Z}$. Si $r = p/q \in \mathbb{Q}$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$ et $q \neq 0$, alors $L^+(qrf) = qL^+(rf) = L^+(pf) = pL^+(f)$, d'où $L^+(rf) = rL^+(f)$. La continuité de L^+ et la densité $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ impliquent que $L^+(\alpha f) = \alpha L^+(f)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Etape 6 : *L^- est une forme linéaire continue positive sur $L^p(X)$.* On définit $L^- := L^+ - L$. Alors L^- est clairement une forme linéaire continue sur $L^p(X)$. De plus, par définition de L^+, $L^+(f) \geq L(f)$ pour tout $f \in \mathcal{C}^+$, ce qui montre que L^- est également positive. $\square$

Venons en maintenant à la caractérisation du dual de L^p.

Théorème 5.2.3. *Soit $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini, i.e., il existe une suite croissante $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ tels que*

$$\mu(E_n) < \infty \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n.$$

Soit $1 \leq p < \infty$ et p' l'exposant conjugué donné par $1/p + 1/p' = 1$. Pour tout $L \in [L^p(X)]'$, il existe une unique fonction $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X fg\,d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X)$$

et

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} = \|f\|_{L^{p'}(X)}.$$

Par conséquent, le dual de $L^p(X)$ est isométriquement isomorphe à $L^{p'}(X)$.

Avant de procéder à la preuve du Théorème 5.2.3, remarquons que celui-ci s'applique à la mesure de Lebesgue qui est σ-finie puisque $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n\geq 1} B(0,n)$ et, $\mathcal{L}^N$ étant finie sur les compacts, $\mathcal{L}^N(B(0,n)) < \infty$ pour tout $n \geq 1$.

Démonstration. Posons $F_0 = E_0$ et pour tout $n \geq 1$, $F_n = E_n \setminus E_{n-1}$ de sorte que $\mu(F_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ et les F_n sont deux à deux disjoints.

Etape 1 : Supposons tout d'abord que L et une forme linéaire continue positive. Soit $n \in \mathbb{N}$, pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose

$$\nu_n(A) = \mu(A \cap F_n), \quad \lambda_n(A) := L(\chi_{A\cap F_n}).$$

Alors ν_n est une mesure finie sur $(X, \mathcal{A})$. Quant à λ_n, on a clairement que $\lambda_n(\emptyset) = L(0) = 0$. Par ailleurs, si $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles dans $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints, alors

$$\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j} = \lim_{k\to\infty} \chi_{\bigcup_{j=0}^k A_j} = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^k \chi_{A_j} \quad \text{dans } X$$

et

$$0 \leq \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \cap F_n} - \sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} = \chi_{\bigcup_{j>k} A_j\cap F_n} \leq \chi_{F_n} \in L^p(X).$$

Le Théorème de la convergence dominée montre alors que $\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n} \to \chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}$ dans $L^p(X)$. Donc, par continuité et linéarité de L,

$$\begin{aligned}\lambda_n\left(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\right) &= L\left(\chi_{\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\cap F_n}\right)\\ &= \lim_{k\to\infty} L\left(\sum_{j=0}^k \chi_{A_j\cap F_n}\right) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=0}^k L\left(\chi_{A_j\cap F_n}\right) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \lambda_n(A_j),\end{aligned}$$

ce qui montre que λ_n est également une mesure sur $(X, \mathcal{A})$. De plus comme

$$\lambda_n(A) = L(\chi_{A\cap F_n}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \mu(A\cap F_n)^{1/p} = \|L\|_{[L^p(X)]'} \nu_n(A)^{1/p}$$

pour tout $A \in \mathcal{A}$, on constate d'une part que λ_n est absolument continue par rapport à ν_n, et d'autre part que λ_n est une mesure finie. Le Théorème de Radon-Nikodým montre alors l'existence d'une fonction $f_n \in L^1(X, \nu_n)$ telle que $f_n \geq 0$ ν_n-p.p. et

$$\lambda_n(A) = \int_A f_n \, d\nu_n = \int_{A\cap F_n} f_n \, d\mu \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

Par linéarité de L, on en déduit que si g est une fonction étagée positive,

$$L(g\chi_{F_n}) = \int_{F_n} f_n g \, d\mu,$$

puis par approximation (voir la Proposition 4.4.1) et convergence monotone, l'égalité précédente s'étend à toute fonction positive $g \in L^p(X)$. En posant $f = \sum_{n=0}^\infty f_n\chi_{F_n}$, une nouvelle application du Théorème de la convergence dominée montre que $\sum_{n=0}^{k} g\chi_{F_n} \to g$ dans $L^p(X)$, et donc par linéarité et continuité de L et convergence monotone,

$$L(g) = L\left(\sum_{n=0}^{\infty} g\chi_{F_n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{F_n} f_n g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu.$$

Montrons enfin que $g \in L^{p'}(X)$. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ et tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A \cap E_k} f \, d\mu \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} \mu(A \cap E_k).$$

En choisissant $A = \{f \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A \cap E_k) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $\mu(A) = 0$ en faisant tendre $k \to \infty$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}$. Si en revanche $1 < p < \infty$, on pose $g_{n,k} = f^{p'-1}\chi_{\{f \leq n\} \cap E_k}$. Vérifions que $g_{n,k} \in L^p(X)$:

$$\int_X |g_{n,k}|^p \, d\mu = \int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu \leq n^{p'} \mu(E_k) < \infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu = L(g_{n,k}) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'} \|g_{n,k}\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'} \left(\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p},$$

ce qui implique que

$$\left(\int_{\{f \leq n\} \cap E_k} |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Par passage à la limite quand $n \to \infty$ puis $k \to \infty$ et par application du Théorème de la convergence monotone, il vient

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'},$$

ce qui montre bien que $f \in L^{p'}(X)$.

On a donc montré l'existence d'une fonction positive $f \in L^{p'}(X)$ telle que

$$L(g) = \int_X fg \, d\mu \quad \text{pour toute fonction } g \in L^p(X), \ g \geq 0.$$

Si $g \in L^p(X)$ est de signe quelconque, l'inégalité précédente reste vraie en décomposant g comme la différence entre sa partie positive et négative, et en utilisant la linéarité de L.

Etape 2 : D'après le Lemme 5.2.2, on peut écrire que $L = L^+ - L^-$ où $L^\pm$ sont des formes linéaires continues et positives sur $L^p(X)$. En appliquant l'étape 1, on obtient des fonctions $f^\pm \in L^{p'}(X)$ telles que

$$L^\pm(g) = \int_X f^\pm g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

On pose $f := f^+ - f^- \in L^{p'}(X)$ de sorte que

$$L(g) = L^+(g) - L^-(g) = \int_X f^+ g \, d\mu - \int_X f^- g \, d\mu = \int_X fg \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Par l'inégalité de Hölder, on a que

$$\|L\|_{[L^p(X)]'} \leq \|f\|_{p'}.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, on procède de même que dans l'étape 1. Si $p = 1$, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$, on choisit $g := \frac{f}{|f|}\chi_{A\cap\{f\neq 0\}\cap E_n} \in L^1(X)$ de sorte que

$$\int_{A\cap E_n} |f| \, d\mu = \int_X fg \, d\mu = L(g) \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\|g\|_1 \leq |L\|_{[L^1(X)]'}\mu(A \cap E_n).$$

En choisissant $A = \{|f| \geq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon\}$ où $\varepsilon > 0$, on obtient que $\mu(A \cap E_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $\mu(A) = 0$. Ceci montre que $\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'} + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, soit $f \in L^\infty(X)$ et

$$\|f\|_\infty \leq \|L\|_{[L^1(X)]'}.$$

Si $1 < p < \infty$, on prend $g = f|f|^{p'-2}\chi_{\{f\neq 0\}}$. Notons que $g \in L^p(X)$ car

$$\int_X |g|^p \, d\mu = \int_X |f|^{(p'-1)p} \, d\mu = \int_X |f|^{p'} \, d\mu < \infty.$$

Par ailleurs,

$$\int_X |f|^{p'} \, d\mu = L(g) \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}\|g\|_p = \|L\|_{[L^p(X)]'}\left(\int_X |f|^{p'} \, d\mu\right)^{1/p}$$

ce qui implique que

$$\|f\|_{p'} \leq \|L\|_{[L^p(X)]'}.$$

Quant à l'unicité, si f_1 et $f_2 \in L^{p'}(X)$ satisfont

$$L(g) = \int_X f_1 g \, d\mu = \int_X f_2 g \, d\mu \quad \text{pour tout } g \in L^p(X),$$

alors on a

$$\int_X (f_1 - f_2) g \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } g \in L^p(X).$$

Le choix $g = \frac{f_1 - f_2}{|f_1 - f_2|}\chi_{\{f_1\neq f_2\}\cap E_n} \in L^1(X)$ pour $p = 1$ montre que

$$\int_{E_n} |f_1 - f_2| \, d\mu = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},$$

puis par passage à la limite quand $n \to \infty$ par convergence monotone, $\|f_1 - f_2\|_1 = 0$, soit $f_1 = f_2$ μ-presque partout. Si $1 < p < \infty$, alors on pose $g = (f_1 - f_2)|(f_1 - f_2|^{p'-2}\chi_{\{f_1\neq f_2\}} \in L^p(X)$ et on obtient $\|f_1 - f_2\|_p = 0$ d'où $f_1 = f_2$ μ-presque partout. $\square$

Remarque 5.2.4. Le Théorème 5.2.3 ne couvre pas le cas $p = \infty$. En particulier, $L^1(X)$ est un sous-espace strict du dual de $L^\infty(X)$. On peut montrer (et ça n'est pas forcément très difficile !) que si $(X, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré, n'importe quel élément $L \in [L^\infty(X)]'$ dans le dual de $L^\infty(X)$ s'identifie avec un unique élément de l'espace $\mathrm{ba}(X, \mathcal{A}, \mu)$ qui sont les applications **b**ornées et **a**dditives d'ensembles $\lambda : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ satisfaisant

— $\lambda(\emptyset) = 0$;

— $\lambda(A \cup B) = \lambda(A) + \lambda(B)$ pour tout A, $B \in \mathcal{A}$ avec $A \cap B = \emptyset$;

— la quantité

$$|\lambda|(X) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |\lambda(A_i)| \, : \, \{A_i\}_{1 \leq i \leq m} \subset \mathcal{A} \text{ partition finie de } X \right\}$$

est finie ;

— $\lambda(A) = 0$ si $A \in \mathcal{A}$ et $\mu(A) = 0$;

via la dualité [1]

$$L(f) = \int_X f \, d\lambda \quad \text{pour tout } f \in L^\infty(X).$$

1. Sous réserve que l'intégrale par rapport à une telle "mesure finiment additive" soit correctement définie