Université Paris-Saclay Master 1 F.E.S.

Analyse 1

Partiel (21/10/2024)

---

- *Durée : 3 heures*
- *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*
- *Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*
- *Tous les résultats démontrés dans le cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités*
- *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

**Exercice 1. (Questions de cours)**

**1)** Soit $(X, d)$ un espace métrique.

a) Rappeler les définitions d'un ensemble compact et séquentiellement compact.

b) Montrer que si $K \subset X$ est compact, alors il est séquentiellement compact.

**2)**

a) Montrer que la valeur absolue $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$.

b) Enoncer et démontrer le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

**3)** Enoncer le théorème de Stone-Weierstrass (cas réel).

**Exercice 2. (Base de Schauder)** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une famille $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une *base de Schauder* de $E$ si, pour tout $x \in E$, il existe une unique suite $(a_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} \|x - S_n(x)\| = 0,$$

où

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k(x) e_k.$$

On supposera dans cet exercice que $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de Schauder de $E$.

**1)** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'application $x \in E \mapsto a_n(x) \in \mathbb{R}$ est linéaire.

**2)** Démontrer que $|x| := \sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n(x)\|$ définit une norme sur $E$.

**3)** Montrer que pour tout $0 \leq m \leq n$, on a $S_m \circ S_n = S_m$.

**4)** Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite d'élements de $E$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_n(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\cdot\|)$ vers $y_n$ quand $j \to \infty$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $b_k \in \mathbb{K}$ tel que $a_k(x_j) \to b_k$ quand $j \to \infty$ et en déduire que

$$y_n = \sum_{k=0}^{n} b_k e_k \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

**5)** On souhaite montrer que $(E, |\cdot|)$ est un espace de Banach. Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(E, |\cdot|)$.

a) Montrer que $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $x \in E$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(S_n(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$ converge vers $y_n$ dans $(E, \|\cdot\|)$.

c) Montrer que $y_n = S_n(x)$ et conclure.

**6)** On souhaite établir que les normes $\|\cdot\|$ et $|\cdot|$ sont équivalentes.

a) Montrer tout d'abord que $\|x\| \le |x|$ pour tout $x \in E$.

b) En déduire que l'application identité $i : (E, |\cdot|) \to (E, \|\cdot\|)$ est une application linéaire continue.

c) Conclure.

**7)** Etablir enfin que les applications linéaires $a_n : (E, \|\cdot\|) \to \mathbb{R}$ et $S_n : (E, \|\cdot\|) \to (E, \|\cdot\|)$ sont continues.

**Exercice 3. (Espaces de Fréchet)** Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Une *semi-norme* sur $E$ est une application $p : E \to [0, +\infty[$ telle que

— $p(x + y) \le p(x) + p(y)$ pour tout $x, y \in E$ ;

— $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$ pour tout $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $\{p_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de semi-normes sur $E$. Nous supposerons de plus que cette famille est

— *croissante :* $p_k \le p_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ ;

— *séparante* : $x = 0$ si et seulement si $p_k(x) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**Partie I.**

**1)** Montrer que la fonction $t \in \mathbb{R} \to \frac{t}{1+t}$ est croissante sur $[0, +\infty[$ et sous-additive :

$$\frac{s+t}{1+s+t} \le \frac{t}{1+t} + \frac{t}{1+t} \quad \text{pour tout } s, t \ge 0.$$

**2)** Pour tout $x, y \in E$, on pose

$$d(x, y) := \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} \frac{p_k(x - y)}{1 + p_k(x - y)}.$$

Montrer que $d$ définit une distance sur $E$.

**3)** Montrer que $d$ est invariante par translation, i.e. $d(x + y, x + z) = d(y, z)$ pour tout $x$, $y$ et $z \in E$.

**4)** Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ converge vers $x \in E$ pour la distance $d$ si et seulement si $p_k(x_n - x) \to 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

**5)** Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $E$ est de Cauchy dans $(E, d)$ si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p_k(x_n - x_m) \le \varepsilon$ pour tout $m, n \ge n_0$.

On dit que $E$ est un *espace de Fréchet* si $(E, d)$ est un espace métrique complet.

**Partie II.** Soit $E$ un espace de Fréchet et $f : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire.

**6)** Montrer que $f$ est continue si et seulement $f$ est continue en 0.

**7)** On souhaite montrer ici que $f$ est continue si et seulement s'il existe $k \in \mathbb{N}$ et $C > 0$ tels que

$$|f(x)| \le C p_k(x) \quad \text{pour tout } x \in E. \tag{1}$$

a) Montrer que (1) implique la continuité de $f$.

b) Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in E$ tel que $f(x_n) > np_n(x_n)$. Montrer que $\frac{x_n}{f(x_n)} \to 0$ dans $(E, d)$ et en déduire que $f$ n'est pas continue en 0.

c) Conclure.

**<u>Partie III.</u> Application à l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R})$.**

**8)** L'application

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|$$

définit-elle une norme sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ ? Justifier votre réponse.

**9)** Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$p_k(u) = \max_{x \in [-k,k]} |u(x)| \quad \text{pour tout } u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}).$$

Montrer que $p_k$ est bien défini et que $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable, croissante et séparante de semi-normes sur $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. On notera $d$ la distance induite par $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ comme dans la partie I.

**10)** Montrer que $(\mathcal{C}(\mathbb{R}), d)$ est un espace de Fréchet.

**11)** Montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ converge vers $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ pour la distance $d$ si et seulement si $u_n \to u$ uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$.