Université Paris-Saclay — Master 1 F.E.S.

Analyse 1

Partiel (17/10/2023)

- *Durée : 3 heures*
- *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*
- *Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*
- *Tous les résultats démontrés dans le cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités*
- *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

Exercice 1. (Questions de cours)

1) Soit (X, d) un espace métrique.

a) Rappeler la définition de l'intérieur et de l'adhérence d'un ensemble.

b) Montrer que $Y \subset X$ est dense dans X si et seulement si $X \setminus Y$ est d'intérieur vide.

2) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé.

a) Rappeler la définition d'une norme.

b) Montrer que si $F \subset E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors F est fermé.

Exercice 2. On rappelle que la fonction $\arctan : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, strictement croissante (donc bijective), $\lim_{x\to\pm\infty} \arctan x = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\arctan'(t) = \frac{1}{1+t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

On définit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ par

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y| \quad \text{pour tout } x, y \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ et $(\mathbb{R}, d)$ admettent les mêmes suites convergentes.

3) Trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, d)$ mais pas dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$.

4) Les distances $(x, y) \mapsto |x - y|$ et d sont-elles équivalentes ?

Exercice 3. (Théorème de Dini)

Soient (X, d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}(X; \mathbb{R})$ telle que

$$f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in X.$$

On suppose que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in X$, où $f \in \mathcal{C}(X; \mathbb{R})$.

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$U_n^\varepsilon = \{x \in X : f(x) - f_n(x) < \varepsilon\}.$$

Montrer que $\{U_n^\varepsilon\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ouverts de X et que $X \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n^\varepsilon$.

2) En déduire qu'il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $X \subset U_{N_\varepsilon}^\varepsilon$.

3) Montrer alors que $f_n \to f$ uniformément sur X.

Exercice 4. Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On désigne par $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On pose

$$\|f\| := \sup_{t\in I} |f(t)| + \sup_{t\in I} |f'(t)|.$$

1) Montrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.

2) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.

a) Quel résultat du cours permet d'affirmer qu'il existe des fonctions f, $g \in \mathcal{C}(I;\mathbb{R})$ telles que $f_n \to f$ et $f_n' \to g$ uniformément sur I.

b) Montrer que $f \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ et $g = f'$.

b) En déduire que $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.

c) Comment s'appelle un tel espace vectoriel normé possédant la propriété ci-dessus ?

3) Soit $f \in \mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.

a) Quel résultat montre l'existence d'une suite de fonctions polynômiales $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $p_n \to f'$ uniformément sur I ?

b) On pose, pour tout $t \in I$, $P_n(t) := f(a) + \int_a^t p_n(s)\, ds$. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions polynômiales telle que $P_n(t) \to f(t)$ pour tout $t \in I$.

c) Montrer que

$$\sup_{t\in I} |P_n(t) - f(t)| \le (b-a) \sup_{s\in I} |p_n(s) - g(s)|$$

et en déduire que $P_n \to f$ uniformément sur I.

d) Montrer alors que $P_n \to f$ dans $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$.

4) Montrer que $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$ est séparable.

5) Soit B la boule unité fermée de $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$. On considère une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de B.

a) Montrer que pour tout $t \in I$, $|f_n(t)| \le 1$.

b) Montrer que pour tout t, $s \in I$, on a $|f_n(t) - f_n(s)| \le |t - s|$ et en déduire que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniformément équicontinue.

c) Quel résultat du cours permet d'affirmer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite uniformément convergente.

d) L'ensemble B est-il compact dans $\mathcal{C}(I;\mathbb{R})$? dans $\mathcal{C}^1(I;\mathbb{R})$?