Université Paris-Saclay — Master 1 F.E.S.

Analyse 1

Examen (19/12/2023)

- *Durée : 3 heures*
- *Les notes de cours, les documents et les appareils électroniques ne sont pas autorisés*
- *Dans un même exercice, on peut admettre pour traiter une question les résultats des questions précédentes même s'ils n'ont pas été démontrés*
- *Tous les résultats démontrés dans le cours peuvent être utilisés à condition d'être clairement cités*
- *La note tiendra compte de la qualité de la rédaction*

Exercice 1. (Questions de cours)

1) Enoncer et démontrer le théorème de projection dans un espace de Hilbert. Donner une caractérisation ainsi qu'une interprétation géométrique.

2) Montrer que, dans un espace mesuré quelconque $(X, \mathcal{A}, \mu)$, toute fonction dans $L^\infty(X)$ peut être approchée dans $L^\infty(X)$ par une suite de fonctions étagées.

Exercice 2. (Un autre théorème de Dini) Soient $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$ telle que

$$f_n(x) \leq f_n(y) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } a \leq x \leq y \leq b.$$

On suppose de plus que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in [a, b]$, où $f \in \mathcal{C}([a, b]; \mathbb{R})$.

1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_k = b$ de l'intervalle $[a, b]$ telle que

$$f(a_{i+1}) - f(a_i) \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } 0 \leq i \leq k - 1.$$

2)] Montrer que, pour tout $x \in [a, b]$, il existe $i \in \{0, \ldots, k - 1\}$ tel que

$$f_n(a_i) - f(a_i) - \varepsilon < f_n(x) - f(x) < f_n(a_{i+1}) - f(a_{i+1}) + \varepsilon.$$

3) Montrer qu'il existe un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$\max_{0\leq i\leq k} |f_n(a_i) - f(a_i)| \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geq N_\varepsilon.$$

4) En déduire que $|f_n(x) - f(x)| \leq 2\varepsilon$ pour tout $x \in [a, b]$ et tout $n \geq N_\varepsilon$ et conclure que $f_n \to f$ uniformément sur $[a, b]$.

Exercice 3. (Algèbre de convolution) On considère l'espace $\mathbb{R}^N$ muni de la tribu Borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et de la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$.

1) Soient f et $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

a) On suppose que $f \geq 0$ et $g \geq 0$. Montrer que le produit de convolution $f * g$ est bien défini et que

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

b) Montrer que, dans le cas général, le produit de convolution $f * g$ est toujours bien défini et que

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}.$$

2) Montrer que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R}^N)$ est commutatif et associatif.

3) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Montrer que $f * g$ est bien défini et est une fonction continue sur $\mathbb{R}^N$ (*Indication : on pourra utiliser la continuité de la translation* $y \in \mathbb{R}^N \mapsto f(\cdot + y)$ *dans* $L^1(\mathbb{R}^N)$).

4) Dans cette question, on se place en dimension $N = 1$ et on considère la fonction $\chi = \mathbf{1}_{[0,1]}$.

a) Montrer que $\chi * \chi(x) = \mathcal{L}^1([x-1, x] \cap [0,1])$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et en déduire une expression explicite de $\chi * \chi$.

b) Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ ne possède pas d'élément pour le produit de convolution.

Exercice 4. (Espace de Sobolev) Dans tout cet exercice, on notera $I =]0, 1[$.

1) Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, alors

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\, dt \quad \text{pour tout } x \in I. \tag{1}$$

2) Trouver une fonction $f \in L^1(I)$ admettant presque partout une dérivée f' intégrable telle que la relation (1) n'est pas satisfaite.

Le but de ce problème consiste à écrire certaines fonctions intégrables sur I *comme la primitive de leur "dérivée" (on notera les guillemets !).*

3) Soit $f \in L^2(I)$. Montrer que $f = 0$ p.p. sur I si et seulement si pour tout fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c(I)$, on a $\int_I f\varphi\, dx = 0$.

4) Soit $g \in L^1(I)$, on pose $G(x) = \int_0^x g(t)\, dt$ pour tout $x \in I$. Montrer que

1. G est continue sur I (on pourra montrer que G est 1/2-Höldérienne) ;
2. G est bornée sur I ;
3. pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$, on a $\int_I G\varphi'\, dx = -\int_I g\varphi\, dx$.

5) Soit $a \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $\delta \in L^1(I)$ telle que $\int_I \delta(x)\varphi(x)\, dx = \varphi(a)$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(I)$.

6) Soient $f \in L^1(I)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$. On pose

$$D_f(\varphi) = \int_I f\varphi'\, dx \in \mathbb{R}.$$

Que vaut $D_f(\varphi)$ pour $f = \mathbf{1}_{[1/2,1]}$? Dans ce cas, existe-t-il une fonction intégrable d_f telle que $D_f(\varphi) = \int_I d_f\varphi\, dx$ pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$?

7) Soient $\psi \in \mathcal{C}_c(I)$ et $\theta \in \mathcal{C}_c(I)$ avec $\int_I \theta\, dx = 1$. On pose

$$h(x) = \psi(x) - \theta(x) \int_I \psi(t)\, dt \quad \text{pour tout } x \in I.$$

Montrer que $x \in I \mapsto H(x) = \int_0^x h(s)\, ds$ appartient à $\mathcal{C}_c^1(I)$ et que $H' = h$.

8) Montrer que si $f \in L^2(I)$ vérifie

$$\int_I f\varphi'\, dx = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I),$$

alors il existe un réel $C \in \mathbb{R}$ tel que $\int_I (f - C)\psi\, dx = 0$ pour tout $\psi \in \mathcal{C}_c(I)$. Conclure.

9) Soit $f \in L^2(I)$ telle qu'il existe une fonction $d_f \in L^2(I)$ vérifiant

$$\int_I d_f\varphi\, dx = -\int_I f\varphi'\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Montrer que la fonction $x \mapsto \tilde{f}(x) = \int_0^x d_f(t)\, dt$ est continue, bornée et que $f = \tilde{f} + C$ presque partout sur I, où $C \in \mathbb{R}$.

A titre culturel, cet espace de fonction s'appelle l'espace de Sobolev $W^{1,2}(I)$ *parfois également noté* $H^1(I)$.