Chapitre 1

Topologie

Dans ce chapitre, nous allons introduire un certain nombre de définitions de topologie générale. Nous porterons une attention particulière aux espaces métriques pour lesquels beaucoup de ces notions peuvent être transcrites de façon équivalente en terme séquentiel.

Par la suite, nous désignerons par X un ensemble et $\mathcal{P}(X)$ la famille des parties de X.

1.1 Espaces topologiques, espaces métriques

1.1.1 Topologie générale

Définition 1.1.1 (Topologie). Une sous-partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}(X)$ est une *topologie* sur X si

1. $\emptyset$ et X appartiennent à $\mathcal{T}$;
2. $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie ;
3. $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque.

On dit que $(X, \mathcal{T})$ est un *espace topologique*. Les éléments de $\mathcal{T}$ s'appellent les *ouverts* et leur complémentaires s'appellent les *fermés*. Par conséquent, les fermés sont stables par union finie et intersection quelconque.

Définition 1.1.2 (Intérieur et fermeture). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$, on définit

1. l'*intérieur* de A par $\mathring{A} := \{x \in A : \text{ il existe } U \in \mathcal{T} \text{ tel que } x \in U \subset A\}$;
2. la *fermeture* de A par $\overline{A} := \{x \in X : \text{ pour tout } U \in \mathcal{T} \text{ avec } x \in U, \text{ alors } U \cap A \neq \emptyset\}$.

On dit que $x \in \overline{A}$ est un *point adhérent* de A et que $x \in \mathring{A}$ est un *point intérieur* de A.

Remarquons que l'on a toujours la série d'inclusions $\mathring{A} \subset A \subset \overline{A}$. La proposition suivante précise les cas d'égalités.

Proposition 1.1.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. Alors*

1. *$\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A ;*
2. *A est ouvert si et seulement si $A = \mathring{A}$;*

3. $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A ;

4. A est fermé si et seulement si $A = \overline{A}$.

Démonstration. 1. Tout d'abord, on remarque que $\mathring{A}$ est ouvert. En effet, si $\mathring{A} \neq \emptyset$ et $x \in \mathring{A}$, il existe un ouvert U_x contenant x tel que $U_x \subset A$. Comme tout $y \in U_x$ est inclus dans l'ouvert U_x lui même contenu dans A, on en déduit que $y \in \mathring{A}$, autrement dit que $U_x \subset \mathring{A}$. On en déduit que $\mathring{A} = \bigcup_{x \in \mathring{A}} U_x$, ce qui montre $\mathring{A}$ est ouvert. Soit V un ouvert contenu dans A. Si $x \in V$, alors $x \in \mathring{A}$ puisque $V \subset A$, ce qui montre que x est un point intérieur de A et que $V \subset \mathring{A}$, ce qui établit 1.

2. Par définition, si x est un point intérieur à A, alors $x \in A$ ce qui montre que $\mathring{A} \subset A$. Si $x \in A$ avec A ouvert, alors clairement, $x \in \mathring{A}$ et donc $A \subset \mathring{A}$, ce qui montre 2.

3. Notons

$$\tilde{A} := \bigcap \{F \text{ fermé}, F \supset A\},$$

de sorte que $\tilde{A}$ est fermé car c'est une intersection de fermés et $A \subset \tilde{A}$. Comme ${}^c\tilde{A}$ est un ouvert inclus dans ${}^cA$, il n'intersecte pas A et donc ${}^c\tilde{A} \subset {}^c\overline{A}$. Par ailleurs, si $x \notin \overline{A}$, il existe un ouvert U contenant x tel que $U \cap A = \emptyset$. Par conséquent, $A \subset {}^cU$ avec ${}^cU$ fermé, d'où $\tilde{A} \subset {}^cU$ ce qui montre que $x \notin \tilde{A}$. On en déduit que $\overline{A} = \tilde{A}$ et donc, si F est un fermé contenant A, on a $\overline{A} \subset F$.

4. Si $x \in A$, tout ouvert contenant x intersecte A et donc $x \in \overline{A}$, ce qui montre que $A \subset \overline{A}$. Par ailleurs, si A est fermé, on a déjà vu que $\overline{A} \subset A$. $\square$

Définition 1.1.4 (Densité). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $A \subset X$. On dit que A est dense dans X pour la topologie $\mathcal{T}$ si $\overline{A} = X$.

Définition 1.1.5 (Limite d'une suite). Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. On dit que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si pour tout ouvert $U \in \mathcal{T}$ contenant x, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$.

Définition 1.1.6 (Continuité). Soient $(X_1, \mathcal{T}_1)$ et $(X_2, \mathcal{T}_2)$ deux espaces topologiques et $f : X_1 \to X_2$ une application. On dit que f est continue sur X_1 si pour tout ouvert $V \in \mathcal{T}_2$, alors $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_1$.

1.1.2 Espaces métriques

Un cas important d'espace topologique est celui d'espace métrique qui repose sur la notion de distance.

Définition 1.1.7 (Distance). Soit X un ensemble. Une application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ est une *distance* sur X si

i) *Symétrie* : $d(x, y) = d(y, x)$ pour tout x, $y \in X$;

ii) *Séparation* : $d(x, y) = 0$ si et seulement si $x = y$;

iii) *Inégalité triangulaire* : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tout x, y, $z \in X$.

On dit alors que (X, d) est un *espace métrique*.

Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, on note

$$B(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) < r\} \quad (\text{resp. } \overline{B}(x,r) := \{y \in X : \ d(x,y) \leq r\})$$

la *boule ouverte* (resp. *boule fermée*) de centre x et de rayon r. Un sous ensemble de X est *borné* s'il est contenu dans une boule de rayon fini.

Comme annoncé précédemment, un espace métrique définit toujours une topologie.

Proposition 1.1.8. *Soit (X,d) un espace métrique. La famille $\mathcal{T}$ définie par*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \{X\} \cup \{U \in \mathcal{P}(X) : \ \textit{pour tout } x \in U, \textit{ il existe } r > 0 \textit{ tel que } B(x,r) \subset U\}$$

définit une topologie sur X.

Démonstration. Par convention, $\emptyset$ et $X \in \mathcal{T}$.

Soient $U_1, \ldots, U_N \in \mathcal{T}$. Si $\bigcap_{i=1}^N U_i = \emptyset \in \mathcal{T}$ par convention. Sinon, il existe $x \in \bigcap_{i=1}^N U_i$. Par définition des éléments de $\mathcal{T}$, pour tout $1 \leq i \leq N$, il existe $r_i > 0$ tel que $B(x,r_i) \subset U_i$. Posons $r := \min_{1 \leq i \leq N} r_i > 0$ de sorte que $B(x,r) \subset B(x,r_i) \subset U_i$, soit $B(x,r) \subset \bigcap_{i=1}^N U_i$. Autrement dit $\bigcap_{i=1}^N U_i \in \mathcal{T}$ et $\mathcal{T}$ est stable par intersection finie.

Soient $\{U_i\}_{i \in I}$ une famille (quelconque) d'éléments de $\mathcal{T}$. Si $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$, par définition de l'union, il existe $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$ puis, par définition de $\mathcal{T}$, il existe $r_0 > 0$ tel que $B(x,r_0) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ est stable par union quelconque.

On a finalement montré que $\mathcal{T}$ est effectivement une topologie. $\square$

Par définition, un ensemble non vide $U \subset X$ est *ouvert* si pour tout $x \in U$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$. On montre évidemment que les boules ouvertes sont ouvertes et les boules fermées sont fermées.

Dans un espace métrique, certaines propriétés topologiques peuvent être caractérisées séquentiellement, i.e., en terme de suite. Il convient donc de préciser la notion de suite convergente dans les espaces métriques.

Proposition 1.1.9. *Soient (X,d) un espace métrique et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X. La suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$ si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.*

Démonstration. Supposons que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$. Si $\varepsilon > 0$, $B(x,\varepsilon)$ est un ouvert contenant x et donc, par définition d'une suite convergence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in B(x,\varepsilon)$ pour tout $n \geq n_0$, i.e. $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, soit U un ouvert contenant x. Par définition d'un ouvert, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $B(x,\varepsilon) \subset U$. Par hypothèse, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x,x_n) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$, soit $x_n \in B(x,\varepsilon) \subset U$ pour tout $n \geq n_0$. Ceci montre que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $x \in X$. $\square$

Le résultat suivant permet de caractériser séquentiellement le fait qu'un ensemble est fermé.

Proposition 1.1.10. *Un sous ensemble F de X est fermé si et seulement si pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$, alors $x \in F$.*

Démonstration. $\Longleftarrow$: Il s'agit de montrer que F est fermé, autrement dit que $U := X \setminus F$ est ouvert. Si $U = \emptyset$ il n'y a rien à montrer. Sinon, supposons qu'il existe $x \in U$ tel que pour tout $r > 0$, on a $B(x,r) \not\subset U$. En prenant $r = \frac{1}{n}$, on construit ainsi une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ telle que $d(x,x_n) < 1/n$ et $x_n \in X \setminus U = F$ pour tout $n \geq 1$. Par conséquent, $x_n \to x$ et notre hypothèse montre que $x \in F$ ce qui est absurde. Donc, pour tout $x \in X$, il existe un $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset U$, ce qui montre que U est ouvert et donc que F est fermé.

$\Longrightarrow$: Supposons F fermé de sorte que son complémentaire $U := X \setminus F$ est ouvert. Considérons une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que $x_n \to x$. Si $x \in U$, celui-ci étant ouvert, par définition de la limite, il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in U$ pour tout $n \geq n_0$. En particulier $x_{n_0} \in U$, ce qui est absurde puisque $x_{n_0} \in F$. Par conséquent, $x \in F$. □

Nous allons à présent préciser la notion de continuité dans les espaces métriques. Dans ce qui suit, (X_1, d_1) et (X_2, d_2) désignent deux espaces métriques.

Proposition 1.1.11. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue sur X_1 si pour tout $x \in X_1$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que*

$$d_{X_1}(x,y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Démonstration. Soient f continue sur X_1, $x \in X_1$ et $\varepsilon > 0$. La boule $B_{X_2}(f(x),\varepsilon)$ étant ouverte dans X_2, on en déduit que $f^{-1}(B_{X_2}(f(x),\varepsilon))$ est un ouvert de X_1 qui contient x. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $B_{X_1}(x,\delta) \subset f^{-1}(B_{X_2}(f(x),\varepsilon))$, autrement dit si $d_{X_1}(x,y) < \delta$, alors $d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Récriproquement si U_2 un ouvert de X_2 et $U_1 = f^{-1}(U_2)$, il s'agit de montrer que U_1 est ouvert. Soit $x \in U_1$, comme $f(x) \in U_2$ qui est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B_{X_2}(f(x),\varepsilon) \subset U_2$. Par hypothèse, il existe $\delta > 0$ tel que $f(B_{X_1}(x,\delta)) \subset B_{X_2}(f(x),\varepsilon) \subset U_2$, soit $B_{X_1}(x,\delta) \subset f^{-1}(U_2) = U_1$ ce qui prouve que U_1 est ouvert dans X_1. □

Dans un espace métrique, la continuité est équivalente à la continuité séquentielle.

Proposition 1.1.12. *Une fonction $f : X_1 \to X_2$ est continue sur X_1 si et seulement si pour tout $x \in X_1$ et toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to x$ dans X_1, alors $f(x_n) \to f(x)$ dans X_2.*

Démonstration. Si f est continue et $x_n \to x$ dans X_1, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d_{X_1}(x,x_n) < \delta$ pour tout $n \geq n_0$, de sorte que $d_{X_2}(f(x), f(x_n)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$.

Réciproquement, si f n'est pas continue, alors il existe $x \in X_1$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour tout $\delta > 0$, on peut trouver un $y_\delta \in X_1$ satisfaisant $d_{X_1}(x, y_\delta) < \delta$ et $d_{X_2}(f(x), f(y_\delta)) \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta = 1/n$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et en posant $x_n := y_{1/n}$, alors $x_n \to x$ dans X_1 et $d_{X_2}(f(x), f(x_n)) \geq \varepsilon_0$, ce qui montre que $f(x_n) \not\to f(x)$. □

Une notion plus forte de continuité est celle d'uniforme continuité.

Définition 1.1.13 (Uniforme continuité). Soient (X_1, d_1) et (X_2, d_2) deux espaces métriques. On dit que $f : X_1 \to X_2$ est *uniformément continue* sur X_1 si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tels que si x et $y \in X_1$ satisfont $d_{X_1}(x, y) < \delta$, alors $d_{X_2}(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Il est clair, de par la définition ci-dessus, que l'uniforme continuité implique la continuité. Nous verrons ultérieurement au théorème 1.3.8 que la réciproque est vraie si (X_1, d_1) est compact.

1.2 Complétude

La complétude est une notion fondamentale de topologie générale et d'analyse fonctionnelle car elle permet de caractériser les suites convergentes sans avoir à recourir au calcul de la limite.

Définition 1.2.1 (Suite de Cauchy). Soit (X, d) un espace métrique. On dit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ est de *Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout n, $m \geq n_0$.

Définition 1.2.2 (Complétude). Un espace métrique (X, d) est *complet* si toute suite de Cauchy converge dans X.

Notons comme premier exemple l'ensemble des nombres réels muni de la métrique usuelle $d(x, y) := |x - y|$. Il est également utile de noter que tout sous-ensemble fermé d'un espace métrique complet reste complet.

Une application importante de la notion de complétude est le théorème de point fixe suivant. Il est d'une utilité majeure en analyse car il permet, entre autre, de montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz concernant l'existence et l'unicité de solutions à certaines équations différentielles, ainsi que le théorème d'inversion locale.

Théorème 1.2.3 (Banach, Picard). *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$ une application contractante : il existe $\theta \in]0, 1[$ tel que*

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta d(x, y) \qquad \textit{pour tout } x, y \in X.$$

Alors f admet un unique point fixe x^* dans X, i.e. $f(x^*) = x^*$.

Démonstration. On définit par récurrence la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = f(x_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{1.2.1}$$

On montre par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d(x_{n+1}, x_n) \leq \theta^n d(x_1, x_0).$$

Si $n > m$, il vient par l'inégalité triangulaire

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=1}^{n-m} d(x_{m+k}, x_{m+k-1}) \leq d(x_1, x_0) \sum_{k=1}^{n-m} \theta^{m+k-1} \leq \frac{\theta^m}{1-\theta} d(x_1, x_0).$$

Comme $\theta \in]0,1[$, on en déduit que le membre de droite de l'inégalité précédente tend vers 0 quand $m \to \infty$. Par conséquent, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X qui est complet. Elle converge donc vers un élément $x^* \in X$. Comme f est continue, on a $f(x^*) = x^*$ par passage à la limite dans (1.2.1). L'unicité résulte de l'hypothèse de contraction. $\square$

Un deuxième résultat fondamental est le théorème de Baire permettant notamment de montrer l'existence de fonctions continues nul part dérivables ou dont la série de Fourier diverge en un point.

Théorème 1.2.4 (Baire). *Soit (X, d) un espace métrique complet.*

(i) Pour toute suite d'ouverts $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denses dans X, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est dense dans X ;

(ii) Pour toute suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'intérieurs vide dans X, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration. L'énoncé (ii) suit de (i) par passage au complémentaire. On montre donc (i). Notons $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$, il s'agit de montrer que $\overline{G} = X$, *i.e.*, pour tout $x_0 \in X$ et tout $r_0 > 0$,

$$B(x_0, r_0) \cap G \neq \emptyset. \tag{1.2.2}$$

Puisque U_0 est un ouvert dense, il existe un $x_1 \in B(x_0, r_0) \cap U_0$ et, ce dernier ensemble étant ouvert, il existe un $0 < r_1 < r_0/2$ tel que $\overline{B}(x_1, r_1) \subset B(x_0, r_0) \cap U_0$. Par récurrence, on construit deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans X et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $]0, +\infty[$ ayant les propriétés

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset B(x_n, r_n) \cap U_n, \quad 0 < r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En particulier, si $n \geq m$, alors $x_n \in B(x_m, r_m)$ et donc $d(x_n, x_m) < r_m < r_0/2^m$. Par conséquent $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans (X, d) complet, et donc il existe un $x \in X$ tel que $x_n \to x$. Or $x_n \in B(x_m, r_m)$ pour tout $n \geq m$ et donc $x \in \overline{B}(x_m, r_m) \subset U_m$ par construction. Finalement, on obtient que $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n = G$ et donc (1.2.2) est vérifié. $\square$

Une troisième application de la complétude concerne l'extension d'applications uniformément continues.

Théorème 1.2.5. *Soient (X_1, d_1) un espace métrique, (X_2, d_2) un espace métrique complet, Y une sous partie dense de X_1 et $f : Y \to X_2$ une application uniformément continue. Alors il existe une unique application $g : X_1 \to X_2$ uniformément continue telle que $g|_Y = f$.*

Démonstration. Commençons par montrer l'unicité. Soit $x \in X_1$, comme Y est dense dans X_1, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ qui converge vers x. Si g et $h : X_1 \to X_2$ sont deux extensions uniformément continues de f, alors nécessairement

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} h(x_n) = h(x),$$

ce qui montre que $g = h$.

Venons en à présent à l'existence. Comme précédemment, étant donné $x \in X_1$, on considère une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Y qui converge vers x. Remarquons que la suite

$(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans X_2 puisque $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, et donc de Cauchy dans X_1, et f est uniformément continue. Comme (X_2, d_2) est complet, la suite $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément z de X_2 qui ne dépend pas de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En effet, si $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une autre suite d'éléments de Y qui converge vers x, alors $d_{X_1}(x_n, x'_n) \to 0$ de sorte que, par uniforme continuité de f, $d_{X_2}(f(x_n), f(x'_n)) \to 0$. Par conséquent, la suite $(f(x'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers z. Il est alors licite de définir $g(x) := z$.

Montrons que g est uniformément continue sur X_1. Soit $\varepsilon > 0$, comme f est uniformément continue sur Y, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout y, $y' \in Y$ avec $d_{X_1}(y, y') < \delta$, alors $d_{X_2}(f(y), f(y')) < \varepsilon/3$. Soient x et $x' \in X_1$ tels que $d_1(x, x') < \delta/3$. Par densité de Y dans X_1, il existe y, $y' \in Y$ tels que $d_{X_1}(x, y) < \delta/3$, $d_{X_1}(x', y') < \delta/3$, $d_{X_2}(f(y), g(x)) < \varepsilon/3$ et $d_{X_2}(f(y'), g(x')) < \varepsilon/3$. Par conséquent, l'inégalité triangulaire implique que $d_{X_1}(y, y') < \delta$ et donc $d_{X_2}(f(y), f(y')) < \varepsilon/3$. En utilisant de nouveau l'inégalité triangulaire, il vient $d_{X_2}(g(x), g(x')) < \varepsilon$, ce qui montre l'uniforme continuité de g. $\square$

1.3 Compacité

Nous introduisons ci-dessous deux notions de compacité, l'une topologique, l'autre séquentielle.

Définition 1.3.1 (Propriété de Borel-Lebesgue). Un espace métrique (X, d) est dit *compact* si de tout recouvrement de X par une famille d'ouverts $\{U_i\}_{i\in I}$, i.e.

$$X \subset \bigcup_{i\in I} U_i,$$

on peut extraire un sous recouvrement fini : il existe $m \in \mathbb{N}$ et $i_1, \dots, i_m \in I$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} U_{i_k}.$$

Définition 1.3.2 (Propriété de Bolzano-Weierstrass). Un espace métrique (X, d) est dit *séquentiellement compact* si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite convergente.

Il s'avère que ces deux notions coïncident dans les espaces métriques.

Théorème 1.3.3. *Soit (X, d) un espace métrique. Alors X est compact si et seulement s'il est séquentiellement compact.*

Démonstration. **Etape 1.** Supposons que X est compact et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X. Si la suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs, alors on peut clairement extraire une sous-suite convergente. Dans le cas contraire, supposons, par l'absurde qu'elle ne possède aucune valeur d'adhérence. Alors pour tout $x \in X$, il existe un $r_x > 0$ tel que $B(x, r_x)$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient alors un recouvrement ouvert

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, r_x)$$

du compact X, dont on peut extraire un sous-recouvrement fini

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, r_{x_k}).$$

Comme chacune des boules ouvertes $B(x_1, r_{x_1}), \ldots, B(x_m, r_{x_m})$ ne contient qu'un nombre fini d'éléments de la suite, alors X également ce qui est absurde.

Etape 2. Supposons que X est séquentiellement compact et soit $\{U_i\}_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de X.

Montrons qu'il existe un $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $i(x) \in I$ tel que $B(x, \rho) \subset U_{i(x)}$. Dans le cas contraire, on pourrait trouver une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $B(x_n, \frac{1}{n}) \not\subset U_i$ pour tout $i \in I$. On peut alors extraire une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une extraction strictement croissante, qui converge vers un $x \in X$. Par conséquent, il existe un $i \in I$ tel que $x \in U_i$, et U_i étant ouvert, il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U_i$. Or pour n assez grand on a que $B(x_{\sigma(n)}, \frac{1}{\sigma(n)}) \subset B(x, r) \subset U_i$ ce qui est impossible.

Montrons à présent que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ρ. Dans le cas contraire, pour tout $x_0 \in X$, la boule $B(x_0, \rho)$ ne recouvre pas X. Il existe donc un $x_1 \in X$ tel que $d(x_0, x_1) \geq \rho$. Par récurrence, on suppose que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, il existe des éléments $x_1, \ldots, x_n \in X$ tels que $x_i \notin B(x_j, \rho)$ pour tout $1 \leq i, j \leq n$ tels que $i \neq j$. Comme $\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$ ne recouvre pas X, on peut trouver un $x_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \rho)$. On construit ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X qui satisfait $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour tout $n \neq m$, et qui ne possède donc aucune sous-suite convergente ce qui est absurde.

On a donc montré l'existence de $x_1, \ldots, x_m \in X$ tels que

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{m} B(x_k, \rho)$$

et donc *a fortiori* un sous-recouvrement fini issu de $\{U_i\}_{i\in I}$ puisque, pour $k = 1, \ldots, m$ on a $B(x_k, \rho) \subset U_{i(x_k)}$. $\square$

Corollaire 1.3.4. *Les parties compactes d'un espace métrique sont fermées et bornées.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers x. Comme X est séquentiellement compact, on peut extraire une sous-suite qui converge vers un $\bar{x} \in X$. Par unicité de la limite, on en déduit que $x = \bar{x} \in X$ ce qui montre que X est fermé.

Si X n'est pas borné, on peut alors construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que $d(x_n, x_0) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors il n'existe pas de sous-suite convergente. $\square$

Noter que la réciproque est fausse en général comme l'atteste l'exemple suivant.

Exemple 1.3.5. On se place dans l'espace métrique $(\mathcal{C}([-1, 1]), d)$ où

$$d(f, g) = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x) - g(x)|$$

est la distance uniforme entre f et $g \in \mathcal{C}([-1,1])$. Soit

$$f_n : x \in [-1,1] \mapsto f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{si } -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n} \\ 1 & \text{si } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Il s'agit d'une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ dans $\mathcal{C}([-1,1])$ qui est bornée puisque $d(f_n, 0) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Si une sous suite $(f_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ de $(f_n)_{n\geq 1}$ converge dans $\mathcal{C}([-1,1])$ vers une fonction $f \in \mathcal{C}([-1,1])$, alors on a nécessairement que $f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$ pour tout $x \in [-1,1]$ avec

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \leq 1, \end{cases}$$

ce qui est impossible puisque f n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la boule unité fermée de $\mathcal{C}([-1,1])$ n'est pas (séquentiellement) compacte.

Nous verrons toutefois au Chapitre 2 que les parties fermées bornées décrivent tous les compacts d'un espace vectoriel normé de dimension finie.

La propreté suivante exprime le fait que les ensembles compacts sont stables par image continue.

Proposition 1.3.6. *Soient (X_1, d_1), (X_2, d_2) deux espaces métriques et $f : (X_1, d_1) \to (X_2, d_2)$ une fonction continue. Si $K \subset X_1$ est compact dans X_1 alors $f(K)$ est compact dans X_2.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $f(K)$. Par définition, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de K tels que $y_n = f(x_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble K étant compact, il existe une sous-suite $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in K$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$. Par continuité de f, il vient $y_{\sigma(n)} = f(x_{\sigma(n)}) \to f(x) \in f(K)$ ce qui montre effectivement que $f(K)$ est compact. □

Dans le cas des fonctions à valeurs réelles, on peut exprimer la Proposition 1.3.6 de la façon suivante.

Proposition 1.3.7. *Si (X, d) est un espace métrique compact et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors f atteint ses bornes.*

Démonstration. Montrons que f atteint son supremum sur X. Par définition du supremum, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X tels que $f(x_n) \to \sup_X f$. L'espace métrique X étant compact, il existe une sous-suite notée $(x_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $x \in X$ tels que $x_{\sigma(n)} \to x$ dans X et, par continuité de f, $f(x_{\sigma(n)}) \to f(x)$. Par conséquent

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_{\sigma(n)}) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \sup_X f.$$

On procède de même pour l'infimum. □

Un autre résultat faisant le lien entre continuité et compacité est le théorème de Heine qui montre que les notions de continuité et d'uniforme continuité coïncident sur un compact.

Théorème 1.3.8 (Heine). *Soit (X_1, d_1) un espace métrique compact, (X_2, d_2) un espace métrique et $f : X_1 \to X_2$ une application continue. Alors f est uniformément continue.*

Démonstration. Supposons par l'absurde que f n'est pas uniformément continue, il existe alors $\varepsilon_0 > 0$ et deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X_1 telles que $d_{X_1}(x_n, y_n) \to 0$ et $d_{X_2}(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Comme X_1 est compact, il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $x \in X_1$ tels que $x_{\varphi(n)} \to x$. De même il existe une extraction $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $y \in X_1$ tels que $y_{\varphi\circ\psi(n)} \to y$. En posant $\sigma : \varphi \circ \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, on obtient une extraction qui satisfait $x_{\sigma(n)} \to x$ et $y_{\sigma(n)} \to y$. Comme $d_{X_1}(x_{\sigma(n)}, y_{\sigma(n)}) \to 0$, on en déduit que $x = y$. Par suite, la continuité de f montre que $\lim_n d_{X_2}(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) = d_{X_2}(f(x), f(y)) = 0$ ce qui contredit le fait que $d_{X_2}(f(x_{\sigma(n)}), f(y_{\sigma(n)})) \geq \varepsilon_0$. □

1.4 Séparabilité

Une autre notion topologique importante est la notion de séparabilité que nous introduisons maintenant.

Définition 1.4.1. Un espace métrique (X, d) est dit *séparable* s'il contient un sous-ensemble dénombrable dense.

Un exemple important est l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui contient l'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$ (qui est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}$).

Les espaces métriques compacts représentent un exemple important d'espace séparable.

Proposition 1.4.2. *Si (X, d) est un espace métrique compact, alors il est séparable.*

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$X \subset \bigcup_{x\in X} B(x, 1/k).$$

Par compacité, on peut extraire un sous-recouvrement fini : il existe donc des points $x_1^k, \dots, x_{n_k}^k \in X$ tels que

$$X = \bigcup_{j=1}^{n_k} B(x_j^k, 1/k).$$

L'ensemble

$$D := \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcup_{j=1}^{n_k} \{x_j^k\}$$

est dénombrable et dense dans X. □