Chapitre 3

Equations linéaires sous forme divergence

3.1 Introduction

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de frontière $\partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$. On appelle équation elliptique linéaire du second ordre sous forme divergence une équation du type

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1.1}$$

où $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est l'inconnue, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq N}$ est une matrice dont les coefficients $a_{ij} : \Omega \to \mathbb{R}$ ont une régularité à préciser et $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est un second membre. Pour le moment, nous restons vague sur la régularité des données A et f. Nous supposons toutefois que

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega) \quad \text{pour tout } 1 \leq i, j \leq N \tag{3.1.2}$$

ainsi qu'une condition dite d'*ellipticité* (ou de *coercivité*) : il existe $\lambda > 0$ tel que

$$A(x)\xi \cdot \xi = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2 \quad \text{p.p. tout } x \in \Omega \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.1.3}$$

Cette dernière condition assure que l'EDP précédente est effectivement de type elliptique.

Remarque 3.1.1. Nous aurions pu considérer ci-dessus une condition limite de type Dirichlet non homogène de la forme

$$u = g \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

où $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée, ou même considérer d'autres types de conditions limites par exemple une condition de Neumann

$$A\nabla u \cdot \nu = h \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

avec $h : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ également donnée. Cependant, nous nous restreindrons pour simplifier aux conditions de Dirichlet homogène.

Remarque 3.1.2. Si $A = \mathrm{Id}$, on retrouve le problème de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

introduit au chapitre précédent.

Définition 3.1.3. On suppose que $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ pour tout $i, j = 1, \dots, N$ et $f \in \mathcal{C}(\Omega)$. On dit que u est une solution classique de (3.1.1) si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ et

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Il n'existe pas forcément de solution classique à (3.1.1). Néanmoins, il existe des solutions plus faibles que l'on va maintenant définir. Pour ce faire, supposons que u est une solution classique. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on multiplie l'équation ponctuellement par $\varphi(x)$ puis on intègre sur Ω, il vient alors

$$\int_\Omega f\varphi\, dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\varphi\, dx,$$

puis on utilise la forme de Green pour obtenir

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{pour tout} \quad \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega). \tag{3.1.4}$$

Notons l'absence de terme de bord dû au fait que φ est nulle sur $\partial\Omega$ (puisqu'à support compact dans Ω).

Réciproquement, supposons que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfait $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). On peut de nouveau intégrer par parties pour obtenir que

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\ \varphi\, dx = \int_\Omega f\varphi\, dx,$$

ce qui montre que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ p.p. sur Ω. Comme les fonctions f et $\mathrm{div}(A\nabla u)$ sont continues (du fait des hypothèses de régularité), on obtient que $-\mathrm{div}(A\nabla u) = f$ partout sur Ω, ce qui montre que u est une solution forte.

Nous avons donc montré que u est une solution forte si et seulement si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfait $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). Or la formulation (3.1.4) ne fait intervenir que les dérivées partielles premières de u. Ceci suggère d'affaiblir la notion de solution en cherchant une fonction $u \in \mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ satisfaisant $u = 0$ sur $\partial\Omega$ et (3.1.4). Malheureusement, l'espace fonctionnel $\mathcal{C}^1(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ est en général mal adapté pour appliquer des méthodes d'analyse fonctionnelle pour établir des résultats d'existence et d'unicité. Ceci peut se deviner en constatant que la formulation précédente est une formulation de type "intégrale" où il semble naturel d'imposer des conditions d'intégrabilité sur la solution et son gradient. Un bon cadre est donné par les espaces de Sobolev.

3.2 Espaces de Sobolev

Définition 3.2.1 (Espaces de Sobolev). Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$. On dit que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et les dérivées distributionnelles jusqu'à l'ordre m satisfont $\partial^\alpha u \in L^p(\Omega)$ pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ tel que $|\alpha| \leq m$. Autrement dit, il existe des fonctions $g_\alpha \in L^p(\Omega)$ telles que

$$\int_\Omega u\, \partial^\alpha \varphi\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g_\alpha \varphi\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Si $p = 2$, on note $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Par convention, si $m = 0$, on pose $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Insistons sur le fait que les dérivées sont prises au sens des distributions. Il faut bien garder de croire que, par exemple, les fonction $W^{1,p}(\Omega)$ admettent des dérivées partielles au sens classique. Sauf en dimension $N = 1$, les fonctions $W^{1,p}(\Omega)$ ne sont même pas continues.

Exemple 3.2.2. Soit $\Omega =]-1, 1[^2$ et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ définie par $u(x, y) = \left(-\ln(\sqrt{x^2 + y^2})\right)^\gamma$ avec $\gamma > 1$. Du fait de la singularité en $(0, 0)$, on a clairement que u n'est pas continue en $(0, 0)$ et même $u \notin L^\infty(\Omega)$. Cependant, on peut montrer que $u \in H^1(\Omega)$.

Les espaces de Sobolev possèdent de bonnes propriétés topologiques contrairement aux espaces de fonctions continûment différentiables sur un ouvert.

Proposition 3.2.3. *Les espaces $W^{m,p}(\Omega)$ sont des espaces de Banach lorsqu'on les munit de la norme*

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \begin{cases} \left(\sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \max_{0\leq|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)} & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Les espaces $H^m(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert lorsqu'on les munit du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{H^m(\Omega)} = \sum_{0\leq|\alpha|\leq m} \int_\Omega \partial^\alpha u \partial^\alpha v \, dx.$$

De plus,
- *si $1 \leq p < \infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable ;*
- *si $1 < p < \infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.*

Une propriété utile est la densité des applications régulières dans les espaces de Sobolev.

Proposition 3.2.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap W^{m,p}(\Omega)$ est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. Si de plus Ω est borné avec une frontière $\mathcal{C}^m$, alors l'espace $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ (la restriction à $\overline{\Omega}$ des fonctions dans $\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$) est dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.*

Comme nous l'avons observé, on associe toujours à une EDP posée sur un domaine borné une condition limite. Par exemple dans le cas d'une condition limite de Dirichlet, il est nécessaire de donner un sens à la valeur de la solution sur le bord du domaine. Comme les fonctions Sobolev sont définies comme des sous espaces des espaces de Lebesgue, elles sont stricto sensu définies comme des classes d'équivalence de fonctions définies presque partout. Or un ouvert à frontière régulière possède un bord de mesure nulle. Il n'est donc pas trivial de parler de la restriction d'une fonction Sobolev au bord. Une approche possible est la théorie des traces que nous n'évoquerons pas ici. Une autre approche est la suivante.

Définition 3.2.5. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \geq 1$. On définit $u \in W^{m,p}_0(\Omega)$ comme la fermeture dans $W^{m,p}(\Omega)$ de $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$. Si $p = 2$, on note $H^m_0(\Omega) = W^{m,2}_0(\Omega)$.

Dire qu'une fonction $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$, est une façon de dire que u est nulle sur $\partial\Omega$ comme limites de fonctions à support compact dans Ω. Le résultat suivant sera essentiel dans l'étude de problèmes aux limites avec une condition de Dirichlet homogène.

Théorème 3.2.6 (Inégalité de Poincaré). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}_0(\Omega)$,*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Démonstration. Supposons d'abord que $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Comme Ω est borné, il existe un $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. On étend u par zéro sur $]-R, R[^N \backslash \Omega$. On a alors que pour tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = \int_{-R}^{x_N} \partial_N u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)\, dt.$$

On élève à la puissance p et on applique l'inégalité de Hölder, il vient que

$$|u(x)|^p \leq (2R)^{p-1} \int_{-R}^{R} |\partial_N u(x_1, \ldots, x_{N-1}, t)|^p\, dt.$$

On intègre maintenant sur Ω, le théorème de Fubini montre alors que

$$\int_\Omega |u|^p\, dx \leq (2R)^p \int_\Omega |\partial_N u|^p\, dx \leq (2R)^p \int_\Omega |\nabla u|^p\, dx.$$

On pose $C_\Omega = 2R$ (qui est indépendante de p) et on obtient la conclusion si $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Si maintenant $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $W^{1,p}(\Omega)$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Comme $u_n \to u$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^p(\Omega)$, alors $\|u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|u\|_{L^p(\Omega)}$ et $\|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \to \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$. Par passage à la limite, on obtient donc l'inégalité de Poincaré pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. □

Par définition, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte continûment dans $L^p(\Omega)$. Si l'ouvert Ω est borné, alors l'injection est en fait compacte.

Théorème 3.2.7 (Rellich). *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$. Alors, pour tout $1 \leq p \leq \infty$, l'espace $W^{1,p}(\Omega)$ s'injecte compactement dans $L^p(\Omega)$, i.e., si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $W^{1,p}(\Omega)$, alors il existe une sous-suite $(u_{\sigma(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et $u \in L^p(\Omega)$ telle que $u_{\sigma(n)} \to u$ fortement dans $L^p(\Omega)$.*

Une conséquence de l'injection compacte de Rellich est l'inégalité de Poincaré-Wirtinger, analogue de l'inégalité de Poincaré quand la fonction n'est pas nulle sur le bord.

Théorème 3.2.8 (Inégalité de Poincaré-Wirtinger). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, connexe et de classe $\mathcal{C}^1$. Il existe une constante $C_\Omega > 0$ telle que pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$,*

$$\|u - u_\Omega\|_{L^p(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)},$$

où $u_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega u(y)\, dy$ est la moyenne de u sur Ω.

Démonstration. On démontre ce résultat par l'absurde en supposant l'existence d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)} > n \|\nabla u_n\|_{L^p(\Omega)} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

Soit

$$v_n := \frac{u_n - (u_n)_\Omega}{\|u_n - (u_n)_\Omega\|_{L^p(\Omega)}} \in W^{1,p}(\Omega),$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_\Omega v_n(y)\, dy = 0$, $\|v_n\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v_n\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{n}$. Par injection compacte de Rellich, on peut extraire une sous-suite (toujours notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_n \to v$ dans $L^p(\Omega)$ avec $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Par passage à la limite dans les propriétés précédentes, il vient $\int_\Omega v(y)\, dy = 0$, $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$ et $\|\nabla v\|_{L^p(\Omega)} = 0$. Par connexité de Ω, on en déduit que v est constante sur Ω et comme v est de moyenne nulle, on en déduit que $v = 0$ sur Ω, ce qui contredit le fait que $\|v\|_{L^p(\Omega)} = 1$. □

3.3 Formulation faible

Revenons au problème aux limites (3.1.1). Les espaces de Sobolev permettent donc de donner un sens à cette formulation pour $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ car dans ce cas, les deux intégrales dans (3.1.4) sont bien définies. Notons que la condition limite "$u = 0$ sur $\partial\Omega$" est encodée dans l'indice 0 de l'espace $W_0^{1,1}(\Omega)$.

Pour montrer le caractère bien posé de ce problème, à se ramène au cadre du Théorème de Lax-Milgram.

Théorème 3.3.1 (Lax-Milgram). *Soit $(H, \langle \cdot \rangle)$ un espace de Hilbert, $L \in H'$ et $a : H \times H \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire*

— *continue : il existe $M > 0$ telle que $|a(u, v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$ pour tout u, $v \in H$;*
— *coercive : il existe $\lambda > 0$ telle que $a(u, u) \geq \lambda\|u\|_H^2$ pour tout $u \in H$.*

Alors, il existe un unique $u \in H$ tel que

$$a(u, v) = L(v) \quad \text{pour tout } v \in H, \tag{3.3.1}$$

et

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{\lambda}\|L\|_{H'}.$$

Démonstration. Fixons $u \in H$ et définissons $L_u : H \to \mathbb{R}$ par $L_u(v) = a(u, v)$ pour tout $v \in H$. La bilinéarité de a montre que L_u est linéaire, et la continuité de a implique que $|L_u(v)| \leq M\|u\|_H\|v\|_H$ pour tout $v \in H$. On en déduit que $L_u \in H'$ avec $\|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$ et le théorème de Riesz assure l'existence et l'unicité d'un élement $Au \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L_u(v) = \langle Au, v\rangle = a(u, v), \quad \|Au\|_H = \|L_u\|_{H'}.$$

De même, une nouvelle application du théorème de Riesz montre l'existence et l'unicité d'un $f \in H$ tel que pour tout $v \in H$,

$$L(v) = \langle f, v\rangle, \quad \|f\|_H = \|L\|_{H'}.$$

On est donc ramené à démontrer l'existence et l'unicité d'un $u \in H$ tel que

$$Au = f. \tag{3.3.2}$$

Tout d'abord, l'application $A : H \to H$ est linéaire, et comme $\|Au\|_H = \|L_u\|_{H'} \leq M\|u\|_H$, alors $A \in \mathcal{L}(H, H)$. Par ailleurs la coercivité de a implique que A est injective car si $Au = 0$, alors $0 = \langle Au, u\rangle = a(u, u) \geq \alpha\|u\|_H^2$ ce qui implique que $u = 0$. Pour montrer la surjectivité, on établit d'abord que ImA est fermé dans H. Pour ce faire, on considère une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ImA telle que $v_n \to v$ dans H. Comme $v_n = Au_n$ pour un certain $u_n \in H$, on en déduit par coercivité de a que pour tout m, $n \in \mathbb{N}$,

$$\lambda\|u_n - u_m\|_H^2 \leq a(u_n - u_m, u_n - u_m) = \langle Au_m - Au_n, u_m - u_m,\rangle \leq \|Au_m - Au_n\|_H\|u_m - u_n\|_H,$$

d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il s'ensuit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans H, ce qui assure l'existence d'un $u \in H$ tel que $u_n \to u$. Par continuité de A, il vient $v = Au$ ce qui montre que ImA est un sous espace vectoriel fermé de H. On peut donc décomposer $H = \text{Im}A \oplus \text{Im}A^\perp$ et A sera surjective dès lors que $\text{Im}A^\perp = \{0\}$. Or $u \in \text{Im}A^\perp$ si et seulement si $\langle u, Av\rangle = 0$ pour tout $v \in H$. En particulier, le choix $v = u$ montre que $\lambda\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle u, Au\rangle = 0$, soit $u = 0$. Ceci établit la bijectivité de l'opérateur $A : H \to H$ et donc l'existence et l'unicité d'un u satisfaisant (3.3.2). En effectuant le produit scalaire avec u, on obtient

$$\lambda\|u\|_H^2 \leq a(u, u) = \langle Au, u\rangle = \langle f, u\rangle = L(u) \leq \|L\|_{H'}\|u\|_H,$$

ce qui montre l'estimation. □

Remarque 3.3.2. Si la forme bilinéaire a est de plus supposée symétrique, alors $a(\cdot,\cdot)$ définit sur H un nouveau produit scalaire équivalent à $\langle\cdot,\cdot\rangle$, et la conclusion du théorème de Lax-Milgram résulte d'une application directe du théorème de Riesz.

Dans le cas où a est de plus symétrique, le résultat suivant établit une caractérisation variationnelle de la solution de (3.3.1).

Proposition 3.3.3. *Sous les hypothèses du théorème de Lax-Milgram, si l'on suppose de plus que a est symétrique, alors l'unique solution du problème* (3.3.1) *est aussi solution de*

$$\inf_{v\in H} J(v), \qquad \textit{avec} \;\; J(v)=\frac{1}{2}a(v,v)-L(v).$$

Démonstration. Soit $u\in H$, on écrit, pour tout $w\in H$

$$J(u+w)=J(u)+\frac{1}{2}a(w,w)+a(u,w)-L(w). \tag{3.3.3}$$

Si u est l'unique solution de (3.3.1), alors $a(u,w)=L(w)$ pour tout $w\in H$ et donc $J(u+w)>J(u)$ si $w\neq 0$. Réciproquement, si $J(u+w)\geq J(u)$ pour tout $w\in H$, on prend $w=tv$ avec $t>0$ dans (3.3.3), puis on fait tendre $t\to 0^+$, il vient alors $a(u,v)-L(v)\geq 0$, puis $a(u,v)-L(v)=0$ en changeant v en $-v$. □

Le théorème de Lax-Milgram rentre dans un cadre Hilbertien. C'est la raison pour laquelle il convient de rechercher des solutions de (3.1.1) dans $H^1_0(\Omega)$ plutôt que $W^{1,1}_0(\Omega)$. Nous introduisons maintenant la *formulation faible*, ou encore *formulation variationnelle*, du problème aux limites (3.1.1).

Définition 3.3.4. Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f\in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). On dit que u est une solution faible de (3.1.1) si $u\in H^1_0(\Omega)$ et

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx=\int_\Omega f\varphi\,dx \quad\text{ pour tout }\;\varphi\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Remarque 3.3.5. Comme (par définition) $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, on montre que u est une solution faible de (3.1.1) si $u\in H^1_0(\Omega)$ et

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\,dx=\int_\Omega fv\,dx \quad\text{ pour tout }\;v\in H^1_0(\Omega).$$

En effet, si l'égalité précédente est satisfaite pour tout $v\in H^1_0(\Omega)$ elle l'est a fortiori pour tout $v\in\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ puisque $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)\subset H^1_0(\Omega)$. Réciproquement, si u est solution faible et $v\in H^1_0(\Omega)$ alors il existe une suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $\varphi_n\to v$ dans $H^1(\Omega)$. Or pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi_n\,dx=\int_\Omega f\varphi_n\,dx.$$

Comme $\varphi_n\to v$ dans $L^2(\Omega)$, alors d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left|\int_\Omega f\varphi_n\,dx-\int_\Omega fv\,dx\right|\leq\|f\|_{L^2(\Omega)}\;\|\varphi_n-v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,$$

ce qui montre que $\int_\Omega f\varphi_n\,dx\to\int_\Omega fv\,dx$. De même comme $\nabla\varphi_n\to\nabla v$ dans $L^2(\Omega)$, alors de nouveau l'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla\varphi_n\,dx-\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| &\leq\|A\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_n-\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\\ &\leq\|A\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\|\nabla\varphi_n-\nabla v\|_{L^2(\Omega)}\to 0,\end{aligned}$$

d'où $\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla \varphi_n \, dx \to \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx$. Par passage à la limite, on obtient donc que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{pour tout } v \in H_0^1(\Omega).$$

Nous sommes à présent en mesure de montrer le caractère bien posé de la formulation faible.

Théorème 3.3.6. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Alors il existe une unique solution faible $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \textit{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Par ailleurs, on a l'estimation

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{C_\Omega}{\lambda} \, \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{3.3.4}$$

où $C_\Omega > 0$ est la constante de l'inégalité de Poincaré. Si de plus la matrice A est symétrique, alors u est aussi l'unique solution de

$$\inf_{v \in H_0^1(\Omega)} J(v), \qquad \textit{avec} \;\; J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx.$$

Démonstration. Soit $L : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$L(v) = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

Alors L est continue car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \;\; \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

On définit également la forme bilinéaire $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ par

$$a(u, v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Alors, a est continue car, de nouveau, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|a(u, v)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Par ailleurs, a est coercive car d'après la propriété d'ellipticité (3.1.3) et l'inégalité de Poincaré, on a pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, u) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla u \, dx \geq \lambda \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \geq \frac{\lambda}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2C_\Omega} \int_\Omega |u|^2 \, dx.$$

En posant $\alpha := \min(\frac{\lambda}{2}, \frac{\lambda}{2C_\Omega})$, on obtient que

$$a(u, u) \geq \alpha \|u\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Nous somme donc en mesure d'appliquer le théorème de Lax-Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'un $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = a(u, v) = L(v) = \int_\Omega f v \, dx \qquad \text{pour tout} \;\; v \in H_0^1(\Omega).$$

L'estimation (3.3.4) s'obtient en prenant $v = u$ comme fonction test dans la formulation variationnelle, en utilisant la propriété d'ellipticité (3.1.3) de A et les inégalités de Cauchy-Schwarz et Poincaré.

Si de plus la matrice A est symétrique, alors pour tout $(u, v) \in H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$,

$$a(u, v) = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega \nabla u \cdot A\nabla v \, dx = a(v, u)$$

ce qui montre que la forme bilinéaire a est symétrique. D'après la Proposition 3.3.3, on en déduit que u est également l'unique minimiseur de

$$v \mapsto J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega A\nabla v \cdot \nabla v \, dx - \int_\Omega f v \, dx$$

sur $H_0^1(\Omega)$. □

Remarque 3.3.7. En prenant comme fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, on a en fait montré que

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Remarque 3.3.8. Sous les mêmes hypothèses que précédemment, on peut montrer que si $g = (g_1, \ldots, g_N)$ avec $g_i \in L^2(\Omega)$ pour tout $1 \leq i \leq N$, alors il existe une unique solution u au problème

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A\nabla u) = f + \operatorname{div} g & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

3.4 Régularité des solutions

Nous avons montré que toute solution classique est une solution faible de (3.1.1). Par ailleurs, nous avons introduit un cadre Hilbertien qui assure l'existence et l'unicité d'une solution faible. Une question naturelle qui se pose alors, consiste à se demander si cette solution faible est une solution classique (quitte à rajouter des hypothèses sur les données du problème). Ce problème, difficile, rentre dans le cadre de la théorie de la régularité que nous développerons plus en détail dans le chapitre suivant.

Théorème 3.4.1. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3). Soit également $u \in H_0^1(\Omega)$ l'unique solution faible de (3.1.1). Si de plus $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$ et Ω est de classe $\mathcal{C}^2$, alors $u \in H^2(\Omega)$. De plus, il existe une constante $C = C(\lambda, N, A, \Omega) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

La démonstration de ce théorème est assez longue et délicate. Elle repose sur la *méthode des translations* due à Nirenberg. Etant donnés $h \in \mathbb{R}^N$, $h \neq 0$, et une fonction $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, on pose

$$\tau_h \varphi(x) = \varphi(x + h)$$

et

$$D_h \varphi(x) := \frac{\tau_h \varphi(x) - \varphi(x)}{|h|} = \frac{\varphi(x + h) - \varphi(x)}{|h|}.$$

Nous utiliserons la proposition suivante qui caractérise les fonctions Sobolev.

Proposition 3.4.2. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u \in L^2(\Omega)$. Alors $u \in H^1(\Omega)$ si et seulement s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ouvert ω avec $\overline{\omega} \subset \Omega$ et tout $h \in \mathbb{R}^N$ avec $|h| < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$,*

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq C.$$

On a alors que $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\sqrt{N}$.

Démonstration. Commençons par supposer que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$. Soit $h \in \mathbb{R}^N$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $v(t) = u(x + th)$. On a alors $v'(t) = \nabla u(x + th) \cdot h$ et donc

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\, dt = \int_0^1 \nabla u(x + th) \cdot h\, dt.$$

Par conséquent, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le théorème de Fubini montrent que

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2\, dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_\omega |\nabla u(x + th)|^2\, dx\, dt.$$

En effectuant le changement de variable $y = x + th$, il vient

$$\int_\omega |u(x+h) - u(x)|^2\, dx \leq |h|^2 \int_0^1 \int_{\omega + th} |\nabla u(y)|^2\, dy\, dt.$$

Si $|h| \leq \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$, alors $\omega + th \subset \Omega$, ce qui montre que

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Si $u \in H^1(\Omega)$, on peut trouver une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. En particulier, on a que $D_h u_n \to D_h u$ dans $L^2(\omega)$ si $|h| \leq \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ et $\nabla u_n \to \nabla u$ dans $L^2(\Omega)$. Par passage à la limite dans

$$\|D_h u_n\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u_n\|_{L^2(\Omega)}$$

quand $n \to +\infty$, on obtient

$$\|D_h u\|_{L^2(\omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

ce qui conclut la preuve de la condition nécessaire.

Montrons maintenant la condition suffisante. On prend $h = \varepsilon u_i$ où $0 < \varepsilon < \operatorname{dist}(\omega, \Omega^c)$ et e_i est le i-ème vecteur de la base canonique. On pose $g_\varepsilon := D_{\varepsilon e_i} u$ de sorte que l'hypothèse montre que $(g_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ est bornée dans $L^2(\omega)$. On peut donc extraire une sous-suite et trouver $g^{(i)} \in L^2(\omega)$ tels que $g_\varepsilon \rightharpoonup g^{(i)}$ faiblement dans $L^2(\omega)$. Comme cette propriété est satisfaite pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, un argument d'extraction diagonale montre que la sous-suite peut être choisie indépendamment de ω et ainsi que $g^{(i)} \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. Or, par semi-continuité de la norme pour la convergence faible, on a que

$$\|g^{(i)}\|_{L^p(\omega)} \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \|D_{\varepsilon e_i} u\|_{L^p(\Omega)} \leq C,$$

où $C > 0$ est la constante de l'énoncé de la proposition, qui est indépendante de ω. Par conséquent, en prenant une suite d'ensembles $\{\omega_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ qui croît vers Ω, on obtient que $\|g^{(i)}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$, ce qui montre que $g^{(i)} \in L^2(\Omega)$.

Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et ω un ouvert tels que $\overline{\omega} \subset \Omega$ et $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset \omega$. Pour tout $0 < \varepsilon < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$, on a

$$\int_\Omega (D_{\varepsilon e_i} u(x))\varphi(x)\,dx = \int_\Omega \frac{u(x+\varepsilon e_i) - u(x)}{\varepsilon}\varphi(x)\,dx$$
$$= -\int_\Omega u(y)\frac{\varphi(y) - \varphi(y - \varepsilon e_i)}{\varepsilon}\,dy = -\int_\Omega u(y) D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y)\,dy.$$

Par ailleurs comme $D_{-\varepsilon e_i}\varphi(y) \to \partial_i \varphi(y)$ pour tout $y \in \Omega$, d'après le théorème de la convergence dominée, on en déduit que

$$\int_\Omega g^{(i)}\varphi\,dx = -\int_\Omega u\partial_i\varphi\,dx,$$

ce qui montre $u \in H^1(\Omega)$ avec $\partial_i u = g^{(i)}$ et

$$\int_\Omega |\partial_i u|^2\,dx \leq C,$$

où $C > 0$ est la constante de l'énoncé. □

Remarque 3.4.3. La Proposition 3.4.2 reste vraie dans $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 < p \leq \infty$. Par ailleurs, la démonstration de la condition suffisante montre de façon plus générale la propriété suivante : s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout ouvert ω avec $\overline{\omega} \subset \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$ avec $\varepsilon < \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$,

$$\|D_{\varepsilon e_i} u\|_{L^2(\omega)} \leq C,$$

alors $\partial_i u \in L^2(\Omega)$.

Lemme 3.4.4 (Estimations à l'intérieur). *Pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, on a $u \in H^2(\omega)$. De plus, il existe une constante $K_1 = K_1(N, \lambda, A, \Omega, \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\omega)} \leq K_1 \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Démonstration. Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $h \in \mathbb{R}^N$, avec $|2h| < \mathrm{dist}(\mathrm{Supp}(\varphi), \Omega^c)$. Comme $D_{-h}\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, il vient d'après la formulation variationnelle,

$$\int_\Omega D_h(A\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx = -\int_\Omega A\nabla u\cdot\nabla(D_{-h}\varphi)\,dx = -\int_\Omega f D_{-h}\varphi\,dx.$$

Comme $D_h(A\nabla u) = (\tau_h A)(D_h\nabla u) + (D_h A)\nabla u$, on obtient

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\,dx = -\int_\Omega \big((D_h A)\nabla u\cdot\nabla\varphi + f D_{-h}\varphi\big)\,dx.$$

D'après la Proposition 3.4.2, on peut estimer l'expression précédente par

$$\int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\,dx \leq \big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\varphi\|_{L^2(\Omega)}.$$

Par densité, l'expression précédente reste vraie pour tout $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. On pose alors $\varphi = \eta^2 D_h u$ où $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ est telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Notons que, pour h assez petit φ est bien définie et

$\varphi \in H_0^1(\Omega)$, $\nabla\varphi = 2\eta\nabla\eta(D_h u) + \eta^2\nabla(D_h u)$. En reportant dans l'estimation précédente et en utilisant la propriété d'ellipticité (3.1.3) satisfaite par la matrice A, il vient

$$\begin{aligned}\lambda\int_\Omega |\eta\nabla(D_h u)|^2\,dx &\le \int_\Omega \eta^2(\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla(D_h u)\,dx\\ &= \int_\Omega (\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\varphi\,dx - 2\int_\Omega \eta(D_h u)(\tau_h A)\nabla(D_h u)\cdot\nabla\eta\,dx\\ &\le \big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\eta\nabla(D_h u)\|_{L^2(\Omega)})\\ &\qquad + 2\|A\|_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|\eta\nabla(D_h u)\|_{L^2(\Omega)}\|(D_h u)\nabla\eta\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young ($ab \le \frac{\varepsilon}{2}a^2 + \frac{1}{2\varepsilon}b^2$ pour tout a et $b \ge 0$), on obtient que

$$\begin{aligned}\lambda\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 2\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2\varepsilon}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2\\ &\quad + \frac{\varepsilon}{2}\|\eta\nabla(D_h u)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{2}{\varepsilon}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|(D_h u)\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{\lambda}{2}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}\|\eta D_h(\nabla u)\|^2_{L^2(\Omega)} &\le 2\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 + \frac{4}{\lambda}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|(D_h u)\nabla\eta\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Soit ω un ouvert tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, on choisit η de sorte que $\eta = 1$ sur ω, $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $0 \le \eta \le 1$. En notant $d = \mathrm{dist}(\omega, \Omega^c)$, on a que $\|\nabla\eta\|_{L^\infty(\Omega)} \le 2/d$. Il vient alors que

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2}\|D_h(\nabla u)\|^2_{L^2(\omega)} &\le \frac{4}{d}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\\ &\quad + \frac{1}{\lambda}\big(\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{L^2(\Omega)}\big)^2 + \frac{16}{\lambda d^2}\|A\|^2_{\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

D'après la Proposition 3.4.2, on en déduit que $\nabla u \in H^1(\omega)$, soit $u \in H^2(\omega)$ pour tout ouvert ω tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$. De plus en utilisant l'estimation (3.3.4), on obtient que

$$\|D^2 u\|_{L^2(\omega)} \le K_1\|f\|_{L^2(\omega)},$$

où $K_1 = K_1(N, \lambda, d, A, \Omega) > 0$. □

Lemme 3.4.5 (Estimations au voisinage du bord). *Pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, il existe un ouvert U tel que $x_0 \in U$ et $u \in H^2(\Omega \cap U)$. De plus, il existe une constante $K_2 = K_2(N, \lambda, A, U, \Omega) > 0$ telle que*

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \le K_2\|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{3.4.1}$$

Démonstration. **Etape 1 : Changement de variable pour se ramener à un bord plat.** Comme $\partial\Omega$ est de classe $\mathcal{C}^2$, pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, on peut trouver un cube Q centré en x_0, une base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ de $\mathbb{R}^N$ et une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ tels que

$$\Omega \cap Q = \{x \in Q : x_N < \gamma(x')\}, \quad \partial\Omega \cap Q = \{x \in Q : x_N = \gamma(x')\}.$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ la fonction définie par $\Phi(x) = (x', x_N - \gamma(x'))$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. La fonction Φ est clairement de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^N$ ainsi que son inverse donnée par $\Psi(y) = \Phi^{-1}(y) = (y', y_N + \gamma(y'))$ pour tout $y \in \mathbb{R}^N$. De plus,

$$\Phi(Q \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^N_- := \{y \in \mathbb{R}^N : y_N < 0\}, \quad \Phi(Q \cap \partial\Omega) \subset \mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}.$$

Comme $V := \Phi(Q)$ est un ouvert tel que $V \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}) \neq \emptyset$, il existe une boule ouverte B centrée en un point de l'hyperplan $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$ telle que $B \subset V$. On note enfin $U := \Psi(B)$ et $B^- := B \cap \mathbb{R}^N_- \subset V \cap \mathbb{R}^N_-$ de sorte que

$$\Omega \cap U = \Psi(B^-).$$

Notons $\tilde{u} = u \circ \Psi$ et montrons que $\tilde{u} \in H^1(B^-)$. En effet, comme $u \in H^1_0(\Omega)$ il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\tilde{u}_n = u_n \circ \Psi$. La fonction $\tilde{u}_n$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur B^-. D'après la formule de changement de variables, on a

$$\int_{B^-} |\tilde{u}_n(y) - \tilde{u}(y)|^2\, dy = \int_{\Omega\cap U} |u_n(x) - u(x)|^2 |\det(\nabla\Phi(x))|\, dx \ \leq C\|u_n - u\|^2_{L^2(\Omega\cap U)} \to 0,$$

ce qui montre que $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $L^2(B^-)$. Un argument similaire montre que pour tout $1 \leq i \leq N$,

$$\partial_i \tilde{u}_n = (\nabla u_n \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \to (\nabla u \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi \quad \text{dans} \ \ L^2(B^-).$$

On en déduit alors que pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$

$$\int_{B^-} (\partial_i \tilde{u}_n)\varphi\, dy \to \int_{B^-} (\nabla u \circ \Psi) \cdot \partial_i \Psi\, \varphi\, dy,$$

ce qui montre que $\tilde{u} \in H^1(B^-)$ et $\nabla\tilde{u} = (\nabla\Psi)^T(\nabla u \circ \Psi)$. Comme la matrice $(\nabla\Psi)$ est inversible d'inverse $\nabla\Phi \circ \Psi$, on en déduit que

$$\nabla u \circ \Psi = (\nabla\Phi \circ \Psi)^T(\nabla\tilde{u}). \tag{3.4.2}$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$, alors $\phi = \varphi \circ \Phi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega \cap U) \subset \mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ et donc d'après la formulation variationnelle,

$$\int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\phi\, dx = \sum_{i,j=1}^N \int_\Omega a_{ij}\partial_j u \partial_i \phi\, dx = \int_\Omega f\phi\, dx.$$

Comme $\partial_i \phi = \sum_{k=1}^N (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k$, il vient

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_\Omega a_{ij}\partial_j u\, (\partial_k \varphi \circ \Phi)\partial_i \Phi_k\, dx = \int_\Omega f(\varphi \circ \Phi)\, dx.$$

En changeant de variables $x = \Psi(y)$, il vient

$$\sum_{i,j,k=1}^N \int_{B^-} (a_{ij} \circ \Psi)(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)|\det(\nabla\Psi)|(\partial_j u \circ \Psi)\partial_k \varphi\, dy = \int_{B^-} (f \circ \Psi)|\det(\nabla\Psi)|\varphi\, dy.$$

En posant $\tilde{A} = (\tilde{a}_{kl})_{1\leq k,l\leq N}$ où

$$\tilde{a}_{kl} := \sum_{i,j=1}^N |\det(\nabla\Psi)|\, (a_{ij} \circ \Psi)(\partial_i \Phi_k \circ \Psi)(\partial_j \Phi_l \circ \Psi), \quad \tilde{f} = |\det(\nabla\Psi)|\, (f \circ \Psi)$$

et en utilisant (3.4.2), il vient

$$\int_{B^-} \tilde{A}\nabla\tilde{u}\cdot\nabla\varphi\,dy = \int_{B^-} \tilde{f}\varphi\,dy. \tag{3.4.3}$$

On a clairement que $\tilde{f} \in L^2(B^-)$ avec $\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} \leq C\|f\|_{L^2(\Omega\cap U)}$. De plus, pour tout $1 \leq k,l \leq N$, $\tilde{a}_{kl} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et la matrice $\tilde{A}(y) = (\tilde{a}_{kl}(y))_{1\leq k,l\leq N}$ satisfait $\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})} \leq C\|A\|_{\mathcal{C}^1(\overline{\Omega\cap U})}$ ainsi que la condition d'ellipticité. En effet, d'après (3.1.3), pour tout $y \in B^-$ et tout $\xi \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned}\tilde{A}(y)\xi\cdot\xi = &\sum_{i,j,k,l=1}^N |\det(\nabla\Psi(y))|\,(a_{ij}(\Psi(y))\partial_i\Phi_k(\Psi(y))\partial_j\Phi_l(\Psi(y))\xi_k\xi_l \\ &= \sum_{i,jl=1}^N |\det(\nabla\Psi(y))|\,(a_{ij}(\Psi(y))\eta_i\eta_j \geq \lambda|\det(\nabla\Psi(y))||\eta|^2,\end{aligned}$$

où $\eta = \nabla\Phi(\Psi(y))^T\xi$. Comme $\xi = \nabla\Psi(y)^T\eta$, on en déduit que $|\xi|^2 \leq C|\eta|^2$ où $C = \|\nabla\Psi\|_{L^\infty(B^-)}$. Par ailleurs, $\det(\nabla\Psi) = \sqrt{1+|\nabla\gamma|^2} \geq 1$, ce qui montre que

$$\tilde{A}(y)\xi\cdot\xi \geq \frac{\lambda}{C}|\xi|^2 \quad \text{pour tout } y \in B^- \text{ et tout } \xi \in \mathbb{R}^N. \tag{3.4.4}$$

Etape 2 : Estimation dans un demi plan. En utilisant la nouvelle formulation variationnelle (3.4.3), on peut procéder exactement comme dans les estimations intérieures en faisant cette fois des translations tangentielles, i.e., de la forme $h = te_k$ où $1 \leq k \leq N-1$. En effet, en prenant $D_{-h}\varphi$ comme fonction test dans (3.4.3) (où $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$), on obtient que

$$\int_{B^-} (\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\varphi\,dx \leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\|\nabla\varphi\|_{L^2(B^-)}.$$

Par suite, on prend $\varphi = \eta^2 D_h\tilde{u}_n$ où $\tilde{u}_n = u_n\circ\Psi$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions $\mathcal{C}^\infty_c(\Omega)$ telle que $u_n \to u$ dans $H^1(\Omega)$ et $\eta \in \mathcal{C}^\infty_c(B)$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$. Comme $\tilde{u}_n = 0$ dans un voisinage de l'hyperplane $\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\}$, du fait que $h = te_k$ avec $1 \leq k \leq N-1$, alors $D_h\tilde{u}_n = 0$ dans un voisinage de $\mathbb{R}^{N-1}\times\{0\}$ (c'est ici qu'on utilise le fait que les translations doivent être tangentielles au bord). Par conséquent, le produit $\eta^2 D_h\tilde{u}_n$ est bien à support compact dans B^-. Il vient alors

$$\begin{aligned}&\int_{B^-} \eta^2(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla(D_h\tilde{u}_n)\,dx \\ &\qquad= \int_{B^-}(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\varphi\,dx - 2\int_{B^-}\eta(D_h\tilde{u}_n)(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla\eta\,dx \\ &\leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}_n\|_{L^2(B^-)} + \|\eta\nabla(D_h\tilde{u}_n)\|_{L^2(B^-)}) \\ &\qquad + 2\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^0(\overline{B^-})}\|\eta\nabla(D_h\tilde{u}_n)\|_{L^2(B^-)}\|(D_h\tilde{u}_n)\nabla\eta\|_{L^2(B^-)}.\end{aligned}$$

Par passage à la limite quand $n\to\infty$, comme $\tilde{u}_n \to \tilde{u}$ dans $H^1(B^-)$, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{C}\int_{B^-}|\eta\nabla(D_h\tilde{u})|^2\,dx &\leq \int_{B^-}\eta^2(\tau_h\tilde{A})\nabla(D_h\tilde{u})\cdot\nabla(D_h\tilde{u})\,dx \\ &\leq \big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)(2\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\eta\nabla(D_h\tilde{u})\|_{L^2(B^-)}) \\ &\qquad + 2\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^0(\overline{B^-})}\|\eta\nabla(D_h\tilde{u})\|_{L^2(B^-)}\|(D_h\tilde{u})\nabla\eta\|_{L^2(B^-)},\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété d'ellipticité (3.4.4) satisfaite par la matrice $\tilde{A}$. En utilisant l'inégalité de Young avec $\varepsilon = \frac{\lambda}{2C}$, il vient

$$\begin{aligned}\frac{\lambda}{2C}\|\eta D_h(\nabla\tilde{u})\|^2_{L^2(B^-)} &\leq 2\big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)\|\nabla\eta\|_{L^\infty(B^-)}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\\ &\quad + \frac{C}{\lambda}\big(\|\tilde{A}\|_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} + \|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)}\big)^2 + \frac{4C}{\lambda}\|\tilde{A}\|^2_{\mathcal{C}^1(\overline{B^-})}\|(D_h\tilde{u})\nabla\eta\|^2_{L^2(B^-)}.\end{aligned}$$

En raisonnant comme dans l'estimation à l'intérieur et en utilisant la Remarque 3.4.3, on en déduit que pour tout $(k,l) \neq (N,N)$, $\partial^2_{kl}\tilde{u} \in L^2(B^-)$. De plus, il existe une constante $\tilde{C}_1 = \tilde{C}_1(N,\lambda,\Omega,A) > 0$ telle que

$$\|\partial^2_{kl}\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_1\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right). \tag{3.4.5}$$

Pour montrer que $\tilde{u} \in H^2(B^-)$, il reste à montrer que $\partial^2_{NN}\tilde{u} \in L^2(\Omega)$. Pour ce faire, on considère $\varphi = \frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi$ (où $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$ comme fonction test dans (3.4.3). Notons que $\tilde{a}_{NN}(y) = \tilde{A}(y)e_N\cdot e_N \geq \frac{\lambda}{C} > 0$ pour tout $y \in B^-$ de sorte que $\frac{1}{\tilde{a}_{NN}} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(B^-)$. Il vient alors que

$$\int_{B^-}\tilde{a}_{NN}(\partial_N\tilde{u})\partial_N\left(\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi\right)dy = \int_{B^-}\left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_{NN}}\psi - \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\tilde{a}_{kl}(\partial_l\tilde{u})\partial_k\left(\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}\psi\right)\right)dy.$$

Soit $(k,l) \neq (N,N)$. Comme $\tilde{a}_{k,l} \in \mathcal{C}^1(\overline{B^-})$ et $\partial_{kl}\tilde{u} \in L^2(B^-)$, on en déduit que $\tilde{a}_{kl}\partial_l\tilde{u}$ admet une dérivée distributionnelle par rapport à x_k dans $L^2(B^-)$ donnée par $(\partial_k\tilde{a}_{kl})\partial_l\tilde{u} + \tilde{a}_{kl}\partial^2_{kl}\tilde{u}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy &= \int_{B^-}\frac{1}{\tilde{a}_{NN}}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\tilde{a}_{NN})\psi\,dy\\ &\quad + \int_{B^-}\left(\frac{\tilde{f}}{\tilde{a}_{NN}}\psi + \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\frac{\partial_k\tilde{a}_{kl}}{\tilde{a}_{NN}}(\partial_l\tilde{u})\psi + \sum_{(k,l)\ \neq(N,N)}\frac{\tilde{a}_{kl}}{\tilde{a}_{NN}}(\partial^2_{kl}\tilde{u})\psi\right)dy.\end{aligned}$$

En utilisant (3.4.5), on obtient que pour tout $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-)$,

$$\left|\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy\right| \leq \tilde{C}_2\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right)\|\psi\|_{L^2(B^-)},$$

où $\tilde{C}_2 = \tilde{C}_2(A,\Omega,\tilde{K}_2) > 0$. Comme $\mathcal{C}^\infty_c(B^-)$ est dense dans $L^2(B^-)$, la forme linéaire $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-) \mapsto \int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy$ s'étend de façon unique en une forme linéaire continue sur $L^2(B^-)$. Le Théorème de Représentation de Riesz montre alors l'existence d'une fonction $g \in L^2(B^-)$ telle que

$$\int_{B^-}(\partial_N\tilde{u})(\partial_N\psi)\,dy = -\int_{B^-}g\psi\,dy \quad \text{pour tout} \ \ \psi \in \mathcal{C}^\infty_c(B^-),$$

et

$$\|g\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_2\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right). \tag{3.4.6}$$

Ceci montre que $\partial^2_{NN}\tilde{u} = g \in L^2(B^-)$ et donc que $\tilde{u} \in H^2(B^-)$. Par ailleurs, en regroupant (3.4.5) et (3.4.6), on obtient que pour tout $1 \leq k,l \leq N$,

$$\|\partial^2_{kl}\tilde{u}\|_{L^2(B^-)} \leq \tilde{C}_3\left(\|\tilde{f}\|_{L^2(B^-)} + \|\nabla\tilde{u}\|_{L^2(B^-)}\right), \tag{3.4.7}$$

où $\tilde{C}_3 = \tilde{C}_3(N, \lambda, \Omega, A) > 0$.

Comme $\nabla \tilde{u} \in H^1(B^-)$, on obtient que $\nabla \tilde{u} \circ \Phi \in H^1(\Omega \cap U)$ et, d'après (3.4.2), que $\nabla u = \nabla \Phi(\nabla \tilde{u} \circ \Phi) \in H^1(\Omega \cap U)$. Par conséquent $u \in H^2(\Omega \cap U)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \le C\left(\|f\|_{L^2(\Omega\cap U)} + \|u\|_{H^1(\Omega\cap U)}\right),$$

où $C = C(N, \lambda, \Omega, A, U) > 0$. D'après l'inégalité de Poincaré et (3.3.4), on a que $\|u\|_{H^1(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$, d'où $\|u\|_{H^2(\Omega\cap U)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$. $\square$

Nous sommes à présent en mesure de donner la preuve du Théorème 3.4.1

Démonstration du Théorème 3.4.1. Comme $\partial\Omega$ est compact, d'après le Lemme 3.4.5, on peut le recouvrir par un nombre fini d'ouverts $U_1, \dots, U_m$ tels que, pour tout $1 \le i \le m$, $u \in H^2(\Omega \cap U_i)$ et

$$\|u\|_{H^2(\Omega\cap U_i)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Soit maintenant U_0 un ouvert tel que $\overline{U}_0 \subset \Omega$ et $\overline{\Omega} \subset \bigcup_{i=0}^m U_i$. D'après le Lemme 3.4.4, on a que $u \in H^2(U_0)$ et

$$\|u\|_{H^2(U_0)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

On considère une partition de l'unité $\theta_0, \dots, \theta_m$ subordonnée au recouvrement $\{U_0, \dots, U_m\}$ de $\overline{\Omega}$, i.e.,

— pour tout $0 \le i \le m$, $\theta_i \in \mathcal{C}_c^\infty(U_i)$ et $0 \le \theta_i \le 1$;

— $\sum_{i=0}^m \theta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

On a alors que $\theta_i u \in H^2(\Omega)$ et $\|\theta_i u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|u\|_{H^2(\Omega\cap U_i)}$ pour tout $0 \le i \le m$ et comme $u = \sum_{i=0}^m \theta_i u$, il vient que $u \in H^2(\Omega)$ et $\|u\|_{H^2(\Omega)} \le C\|f\|_{L^2(\Omega)}$.

La régularité de la solution faible permet de définir une notion plus précise de solution.

Définition 3.4.6. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \le i, j \le N$. On dit que u est une *solution forte* de (3.1.1) si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et

$$-\mathrm{div}(A\nabla u) = f \quad \text{ p.p. dans } \Omega.$$

On peut alors montrer l'existence de solutions fortes.

Théorème 3.4.7. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^2$, $f \in L^2(\Omega)$ et A une matrice satisfaisant les hypothèses (3.1.2) et (3.1.3) et dont les coefficients $a_{ij} \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ pour tout $1 \le i, j \le N$. Alors l'unique solution faible de (3.1.1) est également l'unique solution forte.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.4.1, l'unique solution faible u de (3.1.1) appartient à l'espace $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. En particulier, comme les coefficients de la matrice A sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\overline{\Omega}$, alors $A\nabla u \in H^1(\Omega)$ et donc $\mathrm{div}(A\nabla u) \in L^2(\Omega)$. Par définition de la formulation faible et de la dérivée au sens des distributions, on a donc que

$$\int_\Omega f\varphi\,dx = \int_\Omega A\nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx = -\int_\Omega \mathrm{div}(A\nabla u)\varphi\,dx$$

pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. On en déduit alors que $f = -\mathrm{div}(A\nabla u)$ p.p. sur Ω. L'unicité de la solution forte vient du fait que toute solution forte est une solution faible et de l'unicité de cette dernière. $\square$

Il est encore possible d'aller plus loin et de montrer que, si les données sont assez régulières, alors on retrouve bien une solution classique. Tout d'abord, une récurrence relativement immédiate permet de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.4.8. *Soit* $m \in \mathbb{N}$*. Si* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné de classe* $\mathcal{C}^{m+2}$*,* $f \in H^m(\Omega)$ *et* A *une matrice satisfaisant les hypothèses* (3.1.2) *et* (3.1.3) *et dont les coefficients* $a_{ij} \in \mathcal{C}^{m+1}(\overline{\Omega})$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq N$ *. Alors l'unique solution faible* u *de* (3.1.1) *appartient à* $H^{m+2}(\Omega)$*.*

On peut même retrouver des solutions classiques quand les données sont très régulières. Pour ce faire, il convient d'utiliser une version des injections de Sobolev que nous admettrons (voir par exemple [3, Lemma 6.45]).

Théorème 3.4.9 (Injection de Sobolev). *Soient* $m > k + \frac{N}{2}$ *et* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^N$ *de classe* $\mathcal{C}^m$*. Alors* $H^m(\Omega) \subset \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ *et il existe une constante* $C = C(m, k, N, \Omega)$ *telle que*

$$\|u\|_{\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{H^m(\Omega)} \quad \textit{pour tout } u \in H^m(\Omega).$$

Une conséquence immédiate du Théorème 3.4.8 et de l'injection de Sobolev est que si $m > \frac{N}{2}$, alors la solution $u \in H^{m+2}(\Omega)$ est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overline{\Omega}$. Par conséquent, l'égalité $-\text{div}(A\nabla u) = f$ p.p. sur Ω a en fait lieu partout sur Ω, ce qui montre que u est une solution classique de (3.1.1).

On a finalement le résultat suivant de régularité.

Théorème 3.4.10. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *un ouvert borné de classe* $\mathcal{C}^\infty$*,* $f \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *et* A *une matrice satisfaisant les hypothèses* (3.1.2) *et* (3.1.3) *et dont les coefficients* $a_{ij} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$ *pour tout* $1 \leq i, j \leq N$*. Alors l'unique solution faible* u *de* (3.1.1) *appartient à* $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$*.*

Démonstration. D'après le Théorème 3.4.8, on a que $u \in H^m(\Omega)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$. Par conséquent, l'injection de Sobolev montre que $u \in \mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, soit $u \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega})$. □