Chapitre 2

L'opérateur Laplacien

L'un des opérateurs différentiels les plus importants est le Laplacien Δ sur $\mathbb{R}^N$ défini par

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 u = \mathrm{div}\nabla u.$$

Il est utile d'avoir à l'esprit un modèle physique lié à cet opérateur. Le plus simple provient de la théorie de l'électrostatique. Selon les équations de Maxwell, un champ électrique E dans l'espace (un champ de vecteur représentant la force électrostatique par unité de charge) est relié à la densité de charge f par l'équation $\mathrm{div}E = f$ (à condition que les unités de mesure soient correctement choisies) et satisfait également $\mathrm{rot}E = 0$ (en dimension N, $\mathrm{rot}E$ est donné par la matrice antisymétrique $(\partial_i E_j - \partial_j E_i)_{1\leq i,j\leq N}$). Cette deuxième condition signifie que, du moins localement, E est le gradient d'une fonction, notée $-u$, déterminée à une constante additive près, appelé potentiel électrostatique. Par conséquent, on a

$$-\Delta u = f,$$

de sorte que le Laplacien relie le potentiel à la densité de charge.

2.1 Fonctions harmoniques

Définition 2.1.1. Une fonction u de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est *harmonique* si elle est solution de l'*équation de Laplace*

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{pour tout } x \in \Omega.$$

Nous verrons plus loin que l'hypothèse $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est en fait superflue. Nous allons à présent établir un certain nombre de propriétés des fonctions harmoniques. Tout d'abord, comme le Laplacien commute avec les rotations, il préserve la classe des fonctions radiales sur laquelle il se réduit à une équation différentielle ordinaire. On peut alors caractériser toutes les fonctions radiales harmoniques en dehors de l'origine.

Proposition 2.1.2. *Si $u(x) = \phi(|x|)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, alors $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si et seulement si*

$$u(x) = \begin{cases} a|x| + b & \text{si } N = 1, \\ a\ln|x| + b & \text{si } N = 2, \\ a|x|^{2-N} + b & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Démonstration. Pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $x \neq 0$, on a,

$$\partial_i u(x) = \phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}, \quad \partial^2_{ii} u(x) = \phi''(|x|)\frac{x_i^2}{|x|^2} + \phi'(|x|)\left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}\right).$$

Par conséquent,

$$\Delta u(x) = \phi''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}\phi'(|x|)$$

et $\Delta u = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ si et seulement si $\phi''(r) + \frac{N-1}{r}\phi'(r) = 0$ pour tout $r > 0$ ou encore $\frac{\phi''(r)}{\phi'(r)} = \frac{1-N}{r}$ pour tout $r > 0$. On intègre une première fois cette EDO et on obtient alors que $\ln \phi'(r) = (1-N)\ln r + \ln c$, soit $\phi'(r) = cr^{1-N}$. Une nouvelle intégration donne le résultat. □

Dans la suite, nous aurons besoin d'intégrer sur des hypersurfaces S qui sont la frontière de domaines de $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.1.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. On dit que Ω est de classe $\mathcal{C}^k$ ($k \in \mathbb{N}$) si pour tout $x \in \partial\Omega$, il existe
— un $r > 0$
— un système d'axes de coordonnées $\{e_1, \ldots, e_N\}$
— une fonction $\gamma : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k$
tels que

$$\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) : y_N < \gamma(y_1, \ldots, y_{N-1})\},$$
$$\partial\Omega \cap Q_r(x) = \{y \in Q_r(x) : y_N = \gamma(y_1, \ldots, y_{N-1})\},$$

où $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y_i - x_i| < r \text{ pour tout } 1 \leq i \leq N\}$. Si $k \geq 1$, la normale unitaire extérieure à Ω en $y = (y_1, \ldots, y_{N-1}, \gamma(y_1, \ldots, y_{N-1}) = (y', \gamma(y')) \in \partial\Omega \cap Q_r(x)$ est bien définie et est donnée par

$$\nu(y) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|^2}}(-\nabla\gamma(y'), 1).$$

De plus, si $\varphi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, est une fonction continue dans un voisinage de $\partial\Omega$, l'intégrale de bord de φ sur $\partial\Omega \cap Q_r(x)$ est définie par

$$\int_{\partial\Omega\cap Q_r(x)} \varphi \, d\sigma := \int_{x'+]-r,r[^{N-1}} \varphi(y', \gamma(y'))\sqrt{1 + |\nabla\gamma(y')|^2}\, dy'.$$

Si Ω est borné, alors $\partial\Omega$ est un compact de $\mathbb{R}^N$. Par la propriété de Heine-Borel, on peut alors trouver un nombre fini de cubes $Q_i = Q_{r_i}(x_i)$(pour $i = 1, \ldots, m$) qui satisfont les propriétés ci-dessus. Si $\theta_1, \ldots, \theta_m$ est une partition de l'unité associée à $Q_1, \ldots, Q_m$:
— pour tout $1 \leq i \leq m$, $\theta_i \in \mathcal{C}^\infty_c(Q_i)$ et $0 \leq \theta_i \leq 1$;
— $\sum_{i=1}^m \theta_i = 1$ sur $\partial\Omega$;
alors, on définit

$$\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\sigma := \sum_{i=1}^m \int_{\partial\Omega\cap Q_i} \theta_i\varphi \, d\sigma.$$

On peut montrer que cette quantité est indépendante du choix de la paramétrisation, du recouvrement $Q_1, \ldots, Q_m$ et de la partition de l'unitié $\theta_1, \ldots, \theta_m$.

Le résultat suivant est une version N-dimensionelle de la formule d'intégration par parties, bien connue en dimension 1.

Théorème 2.1.4. (Théorème de la divergence) *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega \mathrm{div} F(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} F \cdot \nu \, d\sigma. \tag{2.1.1}$$

Si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$,

$$\int_\Omega \nabla f(x)\, dx = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma. \tag{2.1.2}$$

Démonstration. Nous démontrons seulement la formule (2.1.2).

Etape 1. On suppose ici que $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega$. Soit $R > 0$ tel que $\Omega \subset]-R, R[^N$. Comme f est à support dans Ω, on peut l'étendre par zéro à tout $]-R, R[^N$ en une fonction (toujours notée f) de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-R, R[^N$. D'après le théorème de Fubini, on a alors que pour tout $1 \le j \le N$,

$$\int_\Omega \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^N} \partial_j f \, dx = \int_{]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j \right) dx_1 \cdots dx_{j-1}\, dx_{j+1} \cdots dx_N.$$

Or

$$\int_{-R}^{R} \partial_j f \, dx_j = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \ldots, x_N) - f(x_1, \ldots, x_{j-1}, -R, x_{j+1}, \ldots, x_N) = 0$$

car $\mathrm{supp}(f) \subset \Omega \subset]-R, R[^N$. Par conséquent, comme $f = 0$ sur $\partial\Omega$,

$$\int_\Omega \nabla f \, dx = 0 = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma.$$

Etape 2. Soit $x \in \partial\Omega$, $r > 0$, $Q := Q_r(x)$ et $\gamma \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{N-1}; \mathbb{R})$ comme dans la Définition 2.1.3. Plaçons nous dans la base $\{e_1, \ldots, e_N\}$ donnée par la paramétrisation locale de $\partial\Omega$. On note alors $\partial_i f = \nabla f \cdot e_i$ la dérivée dans la direction e_i de sorte que $\nabla f = \sum_{i=1}^N (\partial_i f) e_i$. Montrons que

$$\int_\Omega \nabla f(y)\, dy = \int_{\partial\Omega} f\nu \, d\sigma \qquad \text{pour tout } f \in \mathcal{C}^1_c(Q).$$

Tout d'abord, on a d'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \partial_N f(y)\, dy &= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_N f(y', y_N)\, dy_N \right) dy' \\ &= \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', \gamma(y'))\, dy' = \int_{\partial\Omega \cap Q} f\nu_N \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu_N \, d\sigma.\end{aligned}$$

Par ailleurs, si $j \neq N$, et $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$, on a que

$$\partial_j \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} f(y', y_N)\, dy_N \right) = f(y', \gamma(y'))\partial_j \gamma(y') + \int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N.$$

On intègre à présent par rapport à $y' \in x'+]-R, R[^{N-1}$. Comme $f = 0$ sur ∂Q, le théorème de Fubini montre que le membre de gauche s'annule et donc que

$$0 = \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} f(y', \gamma(y'))\partial_j \gamma(y')\, dy' + \int_{x'+]-R,R[^{N-1}} \left(\int_{-R}^{\gamma(y')} \partial_j f(y', y_N)\, dy_N \right) dy',$$

soit

$$\int_\Omega \partial_j f(y)\,dy = \int_{\partial\Omega\cap Q} f\nu_j\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu_j\,d\sigma.$$

Etape 3. Soit $Q_1,\dots,Q_m$ un recouvrement de $\partial\Omega$ par des cubes satisfaisant les propriétés de la Définition 2.1.3. On considère également un ouvert ω tel que $\overline{\omega}\subset\Omega$ et

$$\overline{\Omega}\subset\omega\cup\bigcup_{i=1}^m Q_i.$$

Soit $\theta_0,\theta_1,\dots,\theta_N$ une partition de l'unité associée à $\omega, Q_1,\dots,Q_m$:

— $\theta_0\in\mathcal{C}_c^\infty(\omega)$, $0\le\theta_0\le 1$ et, pour tout $1\le i\le m$, $\theta_i\in\mathcal{C}_c^\infty(Q_i)$ et $0\le\theta_i\le 1$;

— $\sum_{i=0}^m\theta_i = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

Comme $f=\sum_{i=0}^m\theta_i f$ dans Ω, on a que

$$\int_\Omega \nabla f(x)\,dx = \int_\omega \nabla(\theta_0 f)\,dx + \sum_{i=1}^m\int_{\Omega\cap Q_i}\nabla(\theta_i f)\,dx.$$

D'après l'étape 1, du fait que $\mathrm{supp}(\theta_0 f)\subset\omega\subset]-R,R[^N$, on en déduit que

$$\int_\omega \nabla(\theta_0 f)\,dx = 0. \tag{2.1.3}$$

Si $1\le i\le m$, comme $\theta_i f\in\mathcal{C}_c^1(Q_i)$, on peut appliquer l'étape 2 pour obtenir que

$$\int_\Omega \nabla(\theta_i f)\,dx = \int_{\partial\Omega}\theta_i f\nu\,d\sigma. \tag{2.1.4}$$

En regroupant (2.1.3) et (2.1.4), il vient

$$\int_\Omega \nabla f\,dx = \sum_{i=0}^m\int_\Omega\nabla(\theta_i f)\,dx = \sum_{i=1}^m\int_{\partial\Omega}\theta_i f\nu\,d\sigma = \int_{\partial\Omega} f\nu\,d\sigma,$$

où l'on a utilisé le fait que sur $\partial\Omega$, $\theta_0=0$ et donc $\sum_{i=1}^m\theta_i=1$. □

Théorème 2.1.5 (Formules de Green). *Soient $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ et u, $v:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ dans un voisinage de $\overline{\Omega}$. Alors*

$$\int_\Omega (v\Delta u + \nabla u\cdot\nabla v)\,dx = \int_{\partial\Omega} v\partial_\nu u\,d\sigma,$$

et

$$\int_\Omega (v\Delta u + u\Delta v)\,dx = \int_{\partial\Omega}(v\partial_\nu u - u\partial_\nu v)\,d\sigma,$$

où $\partial_\nu u = \nabla u\cdot\nu$ et $\partial_\nu v=\nabla v\cdot\nu$.

Démonstration. Pour la première formule de Green, on applique le théorème de la divergence au champ de vecteurs $F := v\nabla u$. Pour la deuxième formule de Green, on applique, la première formule de Green deux fois. □

Une conséquence immédiate de la formule de Green stipule que le flux d'une fonction harmonique à travers une surface fermée est nul.

Corollaire 2.1.6. *Si u est harmonique sur Ω et ω est un ouvert borné de classe $\mathcal{C}^1$ tel que $\overline{\omega} \subset \Omega$, alors*

$$\int_{\partial\omega} \partial_\nu u \, d\sigma = 0.$$

Démonstration. On applique la formule de Green avec $v = 1$. □

Nous allons à présent établir des formules de moyennes de fonctions harmoniques sur des boules. Pour ce faire, il sera utile de connaître la formule de changement de variables suivante (quand $N = 2$ il s'agit du changement de variables en coordonnées polaires et quand $N = 3$, on retrouve la formule de changement de variables en coordonnées sphériques). On peut trouver une démonstration relativement élémentaire dans [4, Section 2.7].

Théorème 2.1.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $x \in \Omega$ et $R > 0$ sont tels que $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, alors*

$$\begin{aligned}\int_{B_R(x)} u(y)\, dy &= \int_0^R \int_{\partial B_r(x)} u(z)\, d\sigma(z)\, dr \\ &= \int_0^R \int_{\partial B_1(x)} u(rz)\, d\sigma(z)\, r^{N-1} dr = \int_0^R \int_{\partial B_1(0)} u(x + rz)\, d\sigma(z)\, r^{N-1} dr.\end{aligned}$$

Dans la suite, ω_N désigne le volume (la mesure de Lebesgue) de la boule unité. En utilisant la formule de changement de variables en coordonnées polaires avec $u = 1$, on obtient que

$$\omega_N = |B_1| = \int_{B_1} 1\, dx = \int_0^1 \sigma(\partial B_1) r^{N-1}\, dr = \frac{\sigma(\partial B_1)}{N},$$

ce qui montre que le périmètre de la sphère unité est donnée par $N\omega_N$. Par homogénéité et invariance par translation du périmètre et du volume on a donc

$$|B_R(x)| = \omega_N R^N \text{ et } \sigma(\partial B_R(x)) = N\omega_N R^{N-1}.$$

Le résultat suivant établit que la valeur moyenne d'une fonction harmonique en un point est égale à sa moyenne sur n'importe quelle sphère ou boule autour de ce point.

Théorème 2.1.8 (de la valeur moyenne). *Supposons que u est harmonique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Si $x \in \Omega$ et $R > 0$ sont tels que $\overline{B_R(x)} \subset \Omega$, alors*

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N R^{N-1}} \int_{\partial B_R(x)} u(z)\, d\sigma(z) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} u(y)\, dy.$$

Démonstration. Montrons d'abord la première identité. Quitte à translater, on peut supposer que $x = 0$. On utilise la formule de Green avec sur l'ouvert $U := B_R \setminus \overline{B_r}$ $(0 < r < R)$ avec $v(y) = \phi(|y|)$ où $\phi(r) = r$ si $N = 1$, $\phi(r) = \ln r$ si $N = 2$ et $\phi(r) = \frac{r^{2-N}}{2-N}$ si $N \geq 3$. Comme d'après la Proposition 2.1.2, u et v sont harmoniques sur U, on obtient

$$\int_{\partial U} (v \partial_\nu u - u \partial_\nu v)\, d\sigma = 0.$$

Comme $\partial U = \partial B_R \cup \partial B_r$ et $\nu(x) = \frac{x}{R}$ sur ∂B_R et $\nu(x) = -\frac{x}{r}$ sur ∂B_r (le signe moins est dû à l'orientation de ∂B_r qui est opposée à celle de ∂B_R), l'expression précédente devient

$$\phi(R) \int_{\partial B_R} \partial_\nu u\, d\sigma - \phi'(R) \int_{\partial B_R} u\, d\sigma - \phi(r) \int_{\partial B_r} \partial_\nu u\, d\sigma + \phi'(r) \int_{\partial B_r} u\, d\sigma = 0.$$

En utilisant le Corollaire 2.1.6, il vient que

$$R^{1-N}\int_{\partial B_R} u\,d\sigma = r^{1-N}\int_{\partial B_r} u\,d\sigma.$$

Comme u est en particulier continue, on peut faire tendre $r \to 0$ de sorte que

$$R^{1-N}\int_{\partial B_R} u\,d\sigma = \lim_{r\to 0} r^{1-N}\int_{\partial B_r} u\,d\sigma = N\omega_N u(0).$$

En intégrant l'identité précédente par rapport à R et en utilisant la formule de changement de variables en coordonnées polaires, on obtient également que

$$\int_{B_R} u(y)\,dy = \int_0^R \int_{\partial B_r} u(z)\,d\sigma(z)\,dr = N\omega_N\left(\int_0^R r^{N-1}\,dr\right)u(0) = \omega_N R^N u(0),$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Nous avons également une réciproque au théorème de la valeur moyenne.

Théorème 2.1.9. *Soit u une fonction continue sur un ouvert Ω telle que pour tout $x \in \Omega$ et tout $r > 0$ tels que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$,*

$$u(x) = \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}}\int_{\partial B_r(x)} u(z)\,d\sigma(z).$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_1)$ telle que $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ et $\int_{B_1}\phi(y)\,dy = N\omega_N\int_0^1 \psi(r)r^{N-1}\,dr = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-N}\phi(y/\varepsilon)$ et $\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x,\partial\Omega) > \varepsilon\}$. Si $x \in \Omega_\varepsilon$, comme $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$, on en déduit que la fonction $y \mapsto \phi_\varepsilon(x-y)$ est supportée dans $B_\varepsilon(x) \subset \Omega$ et on a

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\,dy = \int_{B_1} u(x-\varepsilon y)\phi(y)\,dy = \int_0^1\int_{\partial B_1} u(x-r\varepsilon z)\psi(r)r^{N-1}\,d\sigma(z)\,dr.$$

En changeant de variables et en utilisant l'hypothèse, on obtient que

$$\int_{\partial B_1} u(x-r\varepsilon z)\,d\sigma(z) = \frac{1}{(r\varepsilon)^{N-1}}\int_{\partial B_{r\varepsilon}(x)} u(z)\,d\sigma(z) = N\omega_N u(x),$$

ce qui implique que

$$u_\varepsilon(x) = N\omega_N u(x)\int_0^1 \psi(r)r^{N-1}\,dr = u(x)\int_{B_1}\phi(y)\,dy = u(x).$$

Comme $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$, on en déduit que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ également. Puis, ε étant arbitraire, il vient que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

Par la propriété de la valeur moyenne, si $x \in \Omega_\varepsilon$, on a

$$\begin{aligned}0 = \frac{d}{dr}\int_{\partial B_1} u(x+ry)\,d\sigma(y) &= \int_{\partial B_1}\nabla u(x+ry)\cdot y\,d\sigma(y)\\ &= \int_{\partial B_r}\nabla u(x+z)\cdot\frac{z}{r}r^{N-1}\,d\sigma(z) = r^{N-1}\int_{\partial B_r(x)}\partial_\nu u\,d\sigma = r^{N-1}\int_{B_r(x)}\Delta u(y)\,dy,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la formule de Green dans la dernière égalité. Comme Δu est continue sur Ω, on en déduit que pour tout $x \in \Omega$, $\Delta u(x) = 0$, ce qui établit que u est harmonique dans Ω. □

De façon générale, il est possible d'étendre la notion de fonctions harmoniques aux distributions. Rappelons au préalable quelques notions de la théorie des distributions.

Définition 2.1.10. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ au sens suivant :

— Linéarité : soient λ, $\mu \in \mathbb{R}$ et φ, $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, alors
$$\langle T, \lambda\varphi + \mu\psi\rangle = \lambda\langle T, \varphi\rangle + \mu\langle T, \psi\rangle;$$

— Continuité : si $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ et $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ sont tels $\varphi_n \to \varphi$ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ (i.e. il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que $\mathrm{Supp}(\varphi) \subset K$, $\mathrm{Supp}(\varphi_n) \subset K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\partial^\alpha\varphi_n \to \partial^\alpha\varphi$ uniformément sur K pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$), alors
$$\langle T, \varphi_n\rangle \to \langle T, \varphi\rangle.$$

A titre d'exemple, toute fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ définit une distribution $T_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par la formule
$$\langle T_f, \varphi\rangle = \int_\Omega f\varphi\, dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$
En effet, la linéarité est une conséquence immédiate de la linéarité de l'intégrale et la continuité résulte du théorème de la convergence dominée. Un autre exemple important est celui de la masse de Dirac $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\Omega)$ définie par
$$\langle \delta_0, \varphi\rangle = \varphi(0) \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

L'un des avantages des distributions réside dans le fait qu'il est possible de définir une notion de dérivée à tout ordre via une généralisation de la formule de Green. En effet, si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière on a par applications successives de la formule de la divergence : pour tout multi-indice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ et tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$,
$$\int_\Omega f(\partial^\alpha\varphi)\, dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega (\partial^\alpha f)\varphi\, dx.$$

Cette formule est à la base de la définition suivante.

Définition 2.1.11. Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_N) \in \mathbb{N}^N$, on définit la distribution $\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ par
$$\langle \partial^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, \partial^\alpha\varphi\rangle \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega),$$
où $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N$.

Nous sommes à présent en mesure de définir la notion de distribution harmonique.

Définition 2.1.12. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert et $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ une distribution. On dit que T est harmonique sur Ω si $\Delta T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, i.e.
$$\langle T, \Delta\varphi\rangle = 0 \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega).$$

Remarque 2.1.13. Si $T = u$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, la formule de Green montre alors que
$$0 = \langle T, \Delta\varphi\rangle = \int_\Omega u\Delta\varphi\, dx = \int_\Omega (\Delta u)\varphi\, dx,$$
pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, ce qui montre que $\Delta u = 0$ sur Ω et donc que u est harmonique au sens usuel.

On peut montrer que toute distribution harmonique sur Ω est en fait une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur Ω. Nous démontrons ci-dessous ce résultat dans le cas où T est une fonction localement intégrable.

Théorème 2.1.14 (Weyl). *Soit $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telle que*

$$\int_\Omega u\Delta\varphi \, dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\Omega).$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω.

Démonstration. Soit $\phi \in \mathcal{C}^\infty_c(B_1)$ telle que $\phi(x) = \psi(|x|)$ avec $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$ et $\int_{B_1} \phi(y)\, dy = 1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-N}\phi(y/\varepsilon)$ et $\Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : \ \mathrm{dist}(y, \partial\Omega) > \varepsilon\}$. Si $x \in \Omega_\varepsilon$, la fonction $y \mapsto \phi_\varepsilon(x - y)$ est supportée dans Ω. On pose alors

$$u_\varepsilon(x) := \int_\Omega u(y)\phi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Les propriétés standards de la convolution montrent que $u_\varepsilon \to u$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ et également presque partout (quitte à extraire une sous-suite). On montre par ailleurs que $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_\varepsilon)$ et que

$$\Delta u_\varepsilon(x) = \int_\Omega u(y)\Delta\phi_\varepsilon(x-y)\, dy = 0,$$

autrement dit, que u_ε est harmonique sur Ω_ε. Soient $x \in \Omega$ tel que $u_\varepsilon(x) \to u(x)$ et $r > 0$ tels que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega$. On peut alors trouver un $\varepsilon_0 > 0$ (dépendant de x et r) tel que $\overline{B_r(x)} \subset \Omega_\varepsilon$ pour tout $\varepsilon < \varepsilon_0$. D'après le Théorème de la valeur moyenne, on a que

$$u_\varepsilon(x) = \frac{1}{\omega_N r^N}\int_{B_r(x)} u_\varepsilon(y)\, dy.$$

Par passage à la limite quand $\varepsilon \to 0$, on obtient que p.p. tout $x \in \Omega$,

$$u(x) = \frac{1}{\omega_N r^N}\int_{B_r(x)} u(y)\, dy$$

Par conséquent u admet un représentant continu dans la classe d'équivalence des fonctions qui lui sont égales presque partout. On peut donc supposer que $u \in \mathcal{C}(\Omega)$. On est alors en mesure d'appliquer le Théorème 2.1.9 qui assure que $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et u est harmonique sur Ω. □

La propriété régularisante des fonctions harmoniques peut se quantifier par l'inégalité de Caccioppoli qui contrôle les dérivées d'une fonction harmonique par des termes d'ordre inférieur. Notons que cette inégalité (valable pour les fonctions harmoniques ou, plus généralement, pour les solutions d'EDP elliptiques sous forme divergence) peut être vue comme une inégalité de Poincaré-Wirtinger inversée (voir le Théorème 3.2.8).

Théorème 2.1.15 (Inégalité de Caccioppoli). *Il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de la dimension N) telle que pour toute fonction harmonique u sur Ω, tout $x_0 \in \Omega$ et tout $0 < \rho < R$ tels que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, alors on a*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2\, dx \leq \frac{C}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u - u_{x_0,R})^2\, dx,$$

où $u_{x_0,R} = \frac{1}{\omega_N R^N}\int_{B_R(x_0)} u(y)\, dy$ est la moyenne de u sur $B_R(x_0)$.

Démonstration. Soit $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R(x_0))$ telle que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ sur $B_\rho(x_0)$ et $|\nabla \varphi| \le C/(R-\rho)$, où $C > 0$ est une constante ne dépendant que de N. Comme $\varphi^2(u - u_{x_0,R}) \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R(x_0))$, on en déduit de la formule de Green que

$$\begin{aligned} 0 = -\int_{B_R(x_0)} \varphi^2(u - u_{x_0,R})\Delta u \, dx &= \int_{B_R(x_0)} \nabla(\varphi^2(u - u_{x_0,R})) \cdot \nabla u \, dx \\ &= \int_{B_R(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \, dx + 2\int_{B_R(x_0)} \varphi(u - u_{x_0,R})\nabla\varphi \cdot \nabla u \, dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, d'après l'inégalité $2ab \le \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$, il vient

$$\begin{aligned} \int_{B_R(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \, dx &= -2\int_{B_R(x_0)} \varphi(u - u_{x_0,r})\nabla\varphi \cdot \nabla u \, dx \\ &\le \varepsilon \int_{B_R(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{\varepsilon}\int_{B_R(x_0)} (u - u_{x_0,R})^2 |\nabla \varphi|^2 \, dx \\ &\le \varepsilon \int_{B_R(x_0)} \varphi^2 |\nabla u|^2 \, dx + \frac{C}{\varepsilon(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u - u_{x_0,R})^2 \, dx. \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = 1/2$ et en utilisant le fait que $\varphi = 1$ sur $B_\rho(x_0)$, on en déduit que

$$\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \le \frac{C}{(R-\rho)^2}\int_{B_R(x_0)} (u - u_{x_0,R})^2 \, dx,$$

ce qui démontre l'inégalité souhaitée. $\square$

Une conséquence de l'inégalité de Caccioppoli concerne des propriétés de décroissance de la norme L^2 d'une fonction harmonique localisée sur une boule, en fonction du rayon de la boule. Ce type d'estimations mesure la régularité des fonctions (voir par exemple la Définition 4.1.2 des espaces de Campanato). Elles sont liées à des propriétés de monotonie et sont souvent à la base de théories de régularité.

Corollaire 2.1.16. *Il existe une constante $C > 0$ (qui ne dépend que de la dimension N) telle que pour toute fonction harmonique u sur Ω, tout $x_0 \in \Omega$ et tout $0 < \rho < R$ tels que $\overline{B_R(x_0)} \subset \Omega$, on a*

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u|^2 \, dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^N \int_{B_R(x_0)} |u|^2 \, dx$$

et

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^2 \, dx \le C\left(\frac{\rho}{R}\right)^{N+2} \int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}|^2 \, dx.$$

Démonstration. Notons que les deux inégalités sont immédiates si $\rho \ge R/2$. Sans restreindre la généralité, on peut donc supposer que $\rho < R/2$.

Commençons par montrer la première inégalité. Dans ce cas, on a

$$\int_{B_\rho(x_0)} |u|^2 \, dx \le \omega_N \rho^N \sup_{B_\rho(x_0)} |u|^2 \le \omega_N \rho^N \sup_{B_{R/2}(x_0)} |u|^2 = \omega_N \rho^N |u(\bar{x})|^2, \tag{2.1.5}$$

où $\bar{x} \in \overline{B_{R/2}(x_0)}$. D'après le théorème de la valeur moyenne, on a

$$u(\bar{x}) = \frac{2^N}{\omega_N R^N}\int_{B_{R/2}(\bar{x})} u \, dx,$$

ce qui implique, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$|u(\bar{x})|^2 \leq \frac{2^N}{\omega_N R^N} \int_{B_{R/2}(\bar{x})} |u|^2 \, dx \leq \frac{2^N}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x_0)} |u|^2 \, dx. \tag{2.1.6}$$

La première inégalité se déduit de (2.1.5) et (2.1.6).

Concernant la deuxième inégalité, d'après l'inégalités de Poincaré-Wirtinger et la première inégalité appliquée à la fonction harmonique ∇u et l'inégalité de Caccioppoli, il vient

$$\begin{aligned} \int_{B_\rho(x_0)} |u - u_{x_0,\rho}|^2 &\leq C\rho^2 \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\leq C\rho^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \int_{B_{R/2}(x_0)} |\nabla u|^2 \, dx \\ &\leq C\rho^2 \left(\frac{\rho}{R}\right)^N \frac{1}{R^2} \int_{B_R(x_0)} |u - u_{x_0,R}|^2 \, dx, \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve du corollaire. □

Théorème 2.1.17 (Principe du maximum). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert connexe. Si u est harmonique sur Ω et $M := \sup_{x\in\Omega} u(x) < +\infty$, alors soit $u(x) < M$ pour tout $x \in \Omega$ ou $u(x) = M$ pour tout $x \in \Omega$.*

Démonstration. Définissons $A := \{x \in \Omega : u(x) = M\}$ et notons qu'il s'agit d'un ensemble relativement fermé dans Ω. Comme u est harmonique dans Ω, il en est de même pour $M - u$. Par conséquent, si $x \in A$, le théorème de la valeur moyenne montre que

$$0 = M - u(x) = \frac{1}{\omega_N r^N} \int_{B_r(x)} [M - u(y)] \, dy.$$

Comme par ailleurs $M - u \geq 0$ dans Ω, on en déduit $M - u = 0$ dans $B_r(x)$, ce qui montre que $B_r(x) \subset A$. Par conséquent A est également ouvert dans Ω. La connexité de Ω entraine que $A = \Omega$ ou $A = \emptyset$. Dans le premier cas, on obtient que $u = M$ sur Ω et dans le second cas que $u < M$ sur Ω. □

Corollaire 2.1.18. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné et $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ une fonction harmonique sur Ω. Alors le maximum de u sur $\overline{\Omega}$ est atteind sur $\partial\Omega$.*

Démonstration. Comme $\overline{\Omega}$ est compact et u est continue sur $\overline{\Omega}$, u atteind son maximum sur $\overline{\Omega}$ en un point x_0. Si $x_0 \in \Omega$, le principe du maximum montre que u est constante sur la composante connexe de Ω qui contient x_0. Par conséquent, le maximum est atteind sur $\partial\Omega$. □

Théorème 2.1.19 (Unicité). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert borné, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ et $g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$. Si u_1, $u_2 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ sont des fonctions telles que*

$$\begin{cases} -\Delta u_i(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u_i(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $i = 1, 2$, alors $u_1 = u_2$ sur $\overline{\Omega}$.

Démonstration. Les fonctions $u_1 - u_2$ et $u_2 - u_1 \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ sont harmoniques sur Ω, elle atteignent donc leurs maximum sur $\partial\Omega$. Comme $u_1 - u_2 = 0$ sur $\partial\Omega$, on en déduit que $u_1 = u_2$ sur Ω. □

Théorème 2.1.20 (Liouville). *Si u est une fonction harmonique et bornée sur $\mathbb{R}^N$, alors u est constante.*

Démonstration. Comme u est harmonique sur $\mathbb{R}^N$ elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^N$. Par conséquent, en dérivant l'équation $\Delta u = 0$, on en déduit que toutes les dérivées partielles $\partial_i u$ $(1 \leq i \leq N)$ sont également harmoniques sur $\mathbb{R}^N$. Le théorème de la valeur moyenne et le théorème de la divergence montrent alors que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $R > 0$, on a

$$\partial_i u(x) = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{B_R(x)} \partial_i u(y)\, dy = \frac{1}{\omega_N R^N} \int_{\partial B_R(x)} u \nu_i \, d\sigma.$$

Par conséquent,

$$|\partial_i u(x)| \ \leq \frac{1}{\omega_N R^N} N \omega_N R^{N-1} \max_{\partial B_R(x)} |u| \leq \frac{N}{R} \sup_{\mathbb{R}^N} |u|.$$

En faisant tendre $R \to +\infty$, on obtient que $\partial_i u(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ et tout $1 \leq i \leq N$, ce qui montre que u est effectivement une fonction constante. □

2.2 Solution fondamentale

Dans cette section nous calculons la solution fondamentale du Laplacien, i.e. une fonction $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ qui satisfait

$$-\Delta G = \delta_0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$$

et donnons quelques applications à la résolution d'EDP dans tout l'espace. Une manière élémentaire d'obtenir une solution fondamentale consiste à considérer des fonctions radiales sur $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Nous avons déjà vu au Corollaire 2.1.2 qu'elles sont toutes de la forme $a|x| + b$ si $N = 1$, $a \ln |x| + b$ si $N = 2$ et $a|x|^{2-N} + b$ si $N \geq 3$. Notons que ces fonctions sont localement intégrales de sorte qu'elles définissent bien des distributions sur $\mathbb{R}^N$. Comme la constante b est harmonique même en 0, elles ne contribuent pas et peuvent être omises. Il s'agit donc de montrer que la constante a peut être choisie de sorte à obtenir une solution fondamentale.

Théorème 2.2.1. *Soit*

$$G(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}|x| & \text{si } N = 1, \\ -\frac{1}{2\pi} \ln |x| & \text{si } N = 2, \\ \frac{|x|^{2-N}}{N(N-2)\omega_N} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Alors G est une solution fondamentale pour le Laplacien.

Démonstration. Si $N = 1$, calculons pour tout $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R})$,

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \ \varphi''(x)\, dx = -\int_{-\infty}^0 x\varphi''(x)\, dx + \int_0^{+\infty} x\varphi''(x)\, dx.$$

En effectuant des intégrations par parties dans chaque intégrales, on obtient que

$$\int_{\mathbb{R}} |x| \ \varphi''(x)\, dx = \int_{-\infty}^0 \varphi'(x)\, dx - [x\varphi'(x)]_{-\infty}^0 - \int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, dx + [x\varphi'(x)]_0^{+\infty} = 2\varphi(0),$$

ce qui montre bien que $-G'' = \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Considérons maintenant le cas $N \geq 2$. Pour tout $\varepsilon > 0$, on pose

$$G_\varepsilon(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \ln(|x|^2 + \varepsilon^2) & \text{si } N = 2, \\ \frac{(|x|^2+\varepsilon^2)^{(2-N)/2}}{N(N-2)\omega_N} & \text{si } N \geq 3. \end{cases}$$

Notons que $G_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. On a clairement que $G_\varepsilon(x) \to G(x)$ pour tout $x \neq 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Par ailleurs, $-\frac{1}{4\pi}\ln(|x|^2+1) \le G_\varepsilon \le -\frac{1}{2\pi}\ln|x|$ si $N=2$ et $|G_\varepsilon| \le |G|$ si $N \ge 3$. Dans les deux cas, G_ε est dominée par une fonction localement intégrable. Le théorème de la convergence dominée montre alors que $G_\varepsilon \to G$ dans $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$. En particulier, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$,

$$\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} G_\varepsilon \Delta\varphi\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} G\Delta\varphi\, dx = \langle \Delta G, \varphi\rangle.$$

Il suffit donc de montrer que $-\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle \to \varphi(0)$.

Comme

$$\partial_i G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2}x_i, \quad \partial^2_{ii}G_\varepsilon(x) = -\frac{1}{N\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2}+\frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2}x_i^2$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}-\Delta G_\varepsilon(x) &= \frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-N/2} - \frac{1}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2}|x|^2 \\ &= \frac{\varepsilon^2}{\omega_N}(|x|^2+\varepsilon^2)^{-(N+2)/2} = \varepsilon^{-N}\psi(x/\varepsilon) = \psi_\varepsilon(x),\end{aligned}$$

où

$$\psi(y) := \frac{1}{\omega_N}(|y|^2+1)^{-(N+2)/2}. \tag{2.2.1}$$

Du fait que ΔG_ε est une fonction radiale, on peut donc écrire que

$$-\langle \Delta G_\varepsilon, \varphi\rangle = -\int_{\mathbb{R}^N} \Delta G_\varepsilon(-x)\varphi(x)\, dx = \varphi * \psi_\varepsilon(0).$$

Il s'agit alors de montrer que $\varphi * \psi_\varepsilon(0) \to \varphi(0)$.

Tout d'abord, un changement de variables en coordonnées polaires montre que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \psi(y)\, dy = \int_0^{+\infty}\int_{\partial B_1} \psi(rz) r^{N-1}\, d\sigma(z)\, dr \\ &= \frac{1}{\omega_N}\int_0^{+\infty}\int_{\partial B_1}(r^2+1)^{-(N+2)/2} r^{N-1}\, d\sigma(z)\, dr = N\int_0^{+\infty}(r^2+1)^{-(N+2)/2}r^{N-1}\, dr.\end{aligned}$$

En posant $s = r^2/(r^2+1)$, $ds = 2rdr/(r^2+1)^2$, il vient

$$\int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N}\psi(y)\, dy = \frac{N}{2}\int_0^1 s^{(N-2)/2}\, ds = 1,$$

ce qui implique que $\psi \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\eta > 0$ on peut alors trouver un $R > 0$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\overline{B_R}} |\psi(y)|\, dy \le \eta.$$

Par conséquent,

$$\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^N}[\varphi(x)-\varphi(0)]\psi_\varepsilon(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N}[\varphi(\varepsilon y)-\varphi(0)]\psi(y)\, dy.$$

Par conséquent,

$$|\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0)| \le 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\eta + \sup_{y\in\overline{B_R}}|\varphi(\varepsilon y)-\varphi(0)|,$$

et comme φ est uniformément continue sur le compact $\overline{B_R}$ on en déduit que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} |\varphi * \psi_\varepsilon(0) - \varphi(0)| \leq 2\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)}\eta,$$

puis, $\eta > 0$ étant arbitraire, que $\varphi * \psi_\varepsilon(0) \to \varphi(0)$. □

Le nom de solution fondamentale est en l'honneur de Newton car, pour $N = 3$, G est le potentiel Newtonien, i.e. le potentiel gravitationnel engendré par une unité de masse à l'origine. En termes d'électrostatique, G est le potentiel Coulombien, i.e. le potentiel électrostatique engendré par une unité de charge positive à l'origine.

Nous sommes maintenant en mesure de résoudre l'*équation de Poisson* $-\Delta u = f$ pour des seconds membres f assez généraux. Commençons par un résultat d'existence pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Théorème 2.2.2. *Soit $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose*

$$u(x) := (G * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} G(x-y)f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(x-y)G(y)\,dy.$$

Alors $u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $-\Delta u(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$.

Démonstration. Comme $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, les propriétés classiques de la convolution montrent que $G * f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$

$$\Delta u(x) = \Delta(G * f)(x) = G * \Delta f(x).$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\Delta u(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta f(x-y)G(y)\,dy = \int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy.$$

On estime d'abord la première intégrale

$$\left|\int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy\right| \leq \|\Delta f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{B_\varepsilon} |G(y)|\,dy.$$

Comme $G \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$, l'intégrale ci-dessus tend vers 0 quand $\varepsilon \to 0$, ce qui implique que

$$\int_{B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy \to 0.$$

Soit $R > 0$ tel que $\mathrm{Supp}(f(x-\cdot) \subset B_R$. D'après la formule de Green, le fait que G est harmonique sur $B_R \setminus B_\varepsilon$ et $f = 0$ sur ∂B_R, on en déduit que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy &= \int_{B_R\setminus B_\varepsilon} \Delta f(x-y)G(y)\,dy \\ &= -\int_{\partial B_\varepsilon} G(y)\partial_\nu f(x-y)\,d\sigma(y) - \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y)\partial_\nu G(y)\,d\sigma(y).\end{aligned}$$

La première intégrale de bord s'estime de la façon suivante :

$$\left|\int_{\partial B_\varepsilon} G(y)\partial_\nu f(x-y)\,d\sigma(y)\right| \leq \|\nabla f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)|\,d\sigma(y),$$

où

$$\int_{\partial B_\varepsilon} |G(y)|\, d\sigma(y) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } N = 1, \\ \varepsilon |\ln \varepsilon| & \text{si } N = 2, \\ \frac{\varepsilon}{N-2} & \text{si } N \geq 3, \end{cases}$$

ce qui montre que

$$\int_{\partial B_\varepsilon} G(y) \partial_\nu f(x-y)\, d\sigma(y) \to 0.$$

Par ailleurs, pour tout $y \in \partial B_\varepsilon$,

$$\partial_\nu G(y) = \nabla G(y) \cdot \left(\frac{-y}{|y|}\right) = \left(-\frac{y}{N\omega_N |y|^N}\right) \cdot \left(\frac{-y}{|y|}\right) = \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}}.$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y) \partial_\nu G(y)\, d\sigma(y) &= \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon} f(x-y)\, d\sigma(y) \\ &= \frac{1}{N\omega_N \varepsilon^{N-1}} \int_{\partial B_\varepsilon(x)} f(z)\, d\sigma(z) \to f(x). \end{aligned}$$

En regroupant les résultats précédents, on obtient que $-\Delta u(x) = f(x)$. □

Pour des seconds membres f plus généraux, il convient de donner une définition généralisée de solution de l'équation $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^N$.

Définition 2.2.3. Soit $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. On dit que $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ est une *solution faible* (ou *solution au sens des distributions*) du problème

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \mathbb{R}^N,$$

si pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, on a

$$-\int_{\mathbb{R}^N} u \Delta\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f\varphi\, dx.$$

On a alors le résultat suivant d'existence.

Théorème 2.2.4. *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Si $N = 1$, on suppose de plus que $\int_{\mathbb{R}} |y||f(y)|\, dy < +\infty$ et si $N = 2$, on suppose que $\int_{\mathbb{R}^2} |f(y)||\ln|y||\, dy < +\infty$. Alors $u := G * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ et u est une solution faible de l'équation $-\Delta u = f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Montrons d'abord que $u := G * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$. Soit χ la fonction caractéristique de la boule unité. Comme $G \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ on a que $\chi G \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Par ailleurs, $(1-\chi)G \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ si $N \geq 3$, $y \mapsto (1-\chi(y))\frac{G(y)}{|\ln|y||} \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ si $N = 2$ et $y \mapsto (1-\chi(y))\frac{G(y)}{|y|} \in L^\infty(\mathbb{R})$ si $N = 1$. Les hypothèses faites sur f montrent alors que $(\chi G) * f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ et $((1-\chi)G) * f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, ce qui montre que

$$u = G * f = (\chi G) * f + ((1-\chi)G) * f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N).$$

Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, le théorème de Fubini montre que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} u(x) \Delta\varphi(x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y) f(y)\, dy\right) \Delta\varphi(x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(x-y) \Delta\varphi(x)\right) f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} G(y-x) \Delta\varphi(x)\right) f(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \Delta(G * \varphi)(y) f(y)\, dy = -\int_{\mathbb{R}^N} f(y)\varphi(y)\, dy, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé le fait que G est radiale et le Théorème 2.2.2 dans la dernière égalité. □

Si la convolution avec la solution fondamentale permet de montrer l'existence de solutions classiques ou faibles du type $-\Delta u = f$ dans $\mathbb{R}^N$, l'unicité n'est en générale pas assurée par l'EDP. En effet, on peut par exemple rajouter à u n'importe quelle fonction harmonique pour construire une famille de solutions de l'EDP précédente. Il faut généralement rajouter des conditions de décroissance de u à l'infini.

De même, si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert borné, la résolution d'EDP du type $-\Delta u = f$ dans Ω (en un certain sens) nécessite de préciser des conditions, dites conditions limites, sur le bord de Ω. On distingue deux classes importantes de problèmes aux limites :

— *le problème de Dirichlet* : soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, on cherche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega; \end{cases}$$

— *le problème de Neumann* : soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, on cherche $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(x) & \text{pour tout } x \in \Omega, \\ \partial_\nu u(x) = h(x) & \text{pour tout } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Dans la suite du cours, nous nous attacherons à décrire de bon cadres mathématiques permettant de résoudre ce type de problèmes parfois dans une plus grande généralité.